Engineering Mechanics
DYNAMICS

Russell Hibbeler

Ustad Hafizullah Wardak & Prof Dr Zarjon Baha

دا کتاب په امریکا کې په ډېرو مشـــهورو او معتبرو پوهنتونو کې تدریس کېږي. له نیکمرغه دا کتاب حفیظ لله وردک او ډاکتر زرجان بها په ساده او روانه ژبه ژباړلی دی.

دا کتاب په یولس (۱۱) فصلونو کې لیکل شوی دی. په هر فصل کې موضوعګانې په روښانه برخو وېشـل شوي، وروسته له هغو تشـریحي پوښتنې او په پای کې د کورنۍ دندې پوښتنې راغلي دي.



حفیظ لله وردګ د حاجي بســـم الله خان زوی او د وردګو په جغتوولســـوالۍ کې زېږېدلی دی. نوموړي خپل د لیسانس سند د امریکا له هاوایی پوهنتون، د ماسټرۍ سند یې له کیس وسټرن ریزرو پوهنتون او د دکتورا د درسونو برخه یې په البامۍ پوهنتون کې بشپړه کړې دي.



ښاغلی حفیظ الله وردګ شپږ کاله د کابل پوهنتون په انجینري پوهنځي کې استاد وه، له هغه وروسته شپږ کاله په امریکا کې د سارجنټ لندی د اټومي انرژۍ کمپنۍ، بیا د بوینګ له کمپنۍ سره دېرش کاله د عالي رتبې انجینر په حیث، د فضـایي هدې (International Space station) د ناسا (NASA) مربوطه او هم د بوینګ کمپنۍ د ډول ډول موډلونو د نویو الوتکو په انجینري کارونو کې د مشـــر سټرکچر انجینر په حیث، د عالي رتبې انجینر (تکنیکل فیلو) په صفت دندې ترسره کړې دي. د بوینګ له کمپنۍ سره یوه اختراع هم لري او دا اختراع د امریکا د پټنټ په اداره کې رسمي ثبت شوې ده. په ۲۰۲۲ز کال کې د انجینرۍ په مســـلک کې درهبري اولاسته راوړنو پر بنســټ د نړۍ د انجینرانو د سترت مور په لســت(who is who Worldwide) کې د انجنیر په توګه پېژندل شوی دی.

دکتور زرجان بها د بهاول زوی دی. هغه د وردګو په سید آباد ولســوالۍ کې زېږېدلی دی. نوموړي خپل لوړې زدهکړې د کابل پوهنتون په انجینري پوهنځي کې بشـــپړې کړې دي، همدارنګه د ماسټرۍ سند یې د پوردو پوهنتون او د دکتورا سند یې د نارټ کرلینا سټیټ پوهنتون څخه ترلاسه کړی دی .

ښاغلی بها د کابل پوهنتون د انجینرۍ استاد، د زراعت او سیول انجینرۍ د ډیپارټمنټ مشر، د یاد پوهنځي رئیس، د کرنې په وزارت کې د احصـایې او وترنرۍ کورسونو استاد، د یاد پوهنځي په CECSARکې مشـاور، په پوردو پوهنتون کې څلویښت کاله د پروفیسـور په توګه، د پوردو انټرنشـنل پروګرام د Resident Program coordinator په توګه په مالیزیا کې د پینځو کالو لپاره دندې تر سره کړې دي. دا د مالیزیا پروژه د بانک جهاني د شـلو میلیونو ډالرو پروژه وه، چې باید د پولتخنیک پوهنتون لپاره ۹۰۰ اســتادان په پینځو کلونو کې تربیه شـــي، د پردو په پوهنتون کې د درس ورکولو تر څنګ د څوکالو لپاره د ډیپارټمنټ علمي معاون او یو کال د ډیپارټمنټ د آمر په توګه پاتې شو.

2025

not for sale

انجنیري میخانیک
ډینامیکس



استاد حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها

۱۴۰۴

پلورل منع دی

انجنیري میخانیک: ډینامیکس

استاد حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها

بسم الله الرحمن الرحيم

اقرأ باسم ربك الذي خلق

انجنيري ميخانيک:
ډينامیکس

لومړی چاپ

استاد حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها

د کتاب نوم	انجنيري ميخانيک: ډېنامیکس
ژباړونکي	استاد حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها
وېب پاڼه	www.ecampus-afghanistan.org
د چاپ کال	۱۴۰۴، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۴۰۰
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org



د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:

ډاکتر یحیی وردک، کابل، افغانستان

موبایل ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ایمېل info@ecampus-afghanistan.org

د چاپ ټول حقوق له مؤلف سره خوندي دي.

SI Prefixes

Multiple	*Exponential Form*	*Prefix*	*SI Symbol*
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submultiple			
0.001	10^{-3}	milli	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Conversion Factors (FPS) to (SI)

Quantity	*Unit of Measurement (FPS)*	*Equals*	*Unit of Measurement (SI)*
Force	lb		4.448 N
Mass	slug		14.59 kg
Length	ft		0.3048 m

Conversion Factors (FPS)

1 ft = 12 in. (inches)
1 mi. (mile) = 5280 ft
1 kip (kilopound) = 1000 lb
1 ton = 2000 lb

Fundamental Equations of Dynamics

KINEMATICS

Particle Rectilinear Motion

Variable a	*Constant $a = a_c$*
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Particle Curvilinear Motion

x, y, z Coordinates		*r, θ, z Coordinates*	
$v_x = \dot{x}$	$a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r}$	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y}$	$a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$a_z = \ddot{z}$

n, t, b Coordinates

$v = \dot{s}$

$a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

Relative Motion

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Rigid Body Motion About a Fixed Axis

Variable α	*Constant $\alpha = \alpha_c$*
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

For Point P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Relative General Plane Motion—Translating Axes

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pin})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pin})}$

Relative General Plane Motion—Trans. and Rot. Axis

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

KINETICS

Mass Moment of Inertia $I = \int r^2\,dm$

Parallel-Axis Theorem $I = I_G + md^2$

Radius of Gyration $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Equations of Motion

Particle	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Rigid Body (Plane Motion)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(m_k)_P$

Principle of Work and Energy

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

Kinetic Energy

Particle	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Rigid Body (Plane Motion)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Work

Variable force $U_F = \int F\cos\theta\,ds$

Constant force $U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$

Weight $U_W = -W\Delta y$

Spring $U_s = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right)$

Couple moment $U_M = M\Delta\theta$

Power and Efficiency

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \varepsilon = \dfrac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \dfrac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$

Conservation of Energy Theorem

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Potential Energy

$V = V_g + V_e$, where $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principle of Linear Impulse and Momentum

Particle	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int F\,dt = m\mathbf{v}_2$
Rigid Body	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservation of Linear Momentum

$\Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{syst. } m\mathbf{v})_2$

Coefficient of Restitution $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principle of Angular Impulse and Momentum

Particle	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ *where* $H_O = (d)(mv)$
Rigid Body (Plane motion)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ where $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ where $H_O = I_O\omega$

Conservation of Angular Momentum

$\Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{syst. } \mathbf{H})_2$

د انجينري ميخانيک

(ENGINEERING MECHANICS)

ډينامېکس

DYNAMICS

حفيظ الله وردک او زرجان بها

پنځه لسم چاپ

(FIFTEEN EDITION)

R. C. HIBBELER

Pearson

د انجينري ميخانيک

(ENGINEERING MECHANICS)

ډينامېکس

DYNAMICS

حفيظ الله وردک او زرجان بها

پنځه لسم چاپ

(FIFTEEN EDITION)

R. C. HIBBELER

Pearson

پښتو ژبې ته ژباړنه

د دی کتاب (ډینامیکس) ژباړنه پښتو ژبې ته، د پیرسن کمپنی په اجازه سره شوي ده. پښتو ژباړنه له انګلیسی نسخې ، کال 2022 ، د ډینامیکس پنځه لسمه نسخه، رسل هیبلر، کوم چې د پیرسن (Pearson Education, Inc. Hoboken, NJ 07030) لخوا چاپ شوی، بشپړه شوي ده. خپرول يې د نسخې © 2022 حق دی . [د انګلیسی ژبی د چاپ حق د پیرسن کمپنی سره خوندی دي.]

ټول حقونه خوندي دي. د دې کتاب د انګلیسي ژبې چاپ شوی نسخې هیڅ برخه يې په هره بڼه یا په هره وسیله، بیا تولید یا لیږدول شوی، الکترونیکي یا میخانیکي، د فوټوکاپي په ګډون، ثبت کول یا د هر ډول معلوماتو ذخیره کولو سیستم له لارې، بې له اجازې د Pearson Education, Inc، له خوا اجازه نشته او د چاپ حق © خوندی دي. د پښتو ژبی چاپ کال 2025 دی.

مایکروسافت او/یا د هغې اړوند عرضه کوونکي د خدماتو د برخې په توګه د خپرو شویو اسنادو او اړوندو ګرافیکونو کې د معلوماتو د مناسبوالي په اړه د هیڅ موخې لپاره ځرګندونې نه کوي. ټول داسې اسناد او اړوند ګرافیکونه "څنګه چې دي" پرته له کوم ډول ضمانت څخه چمتو کیږي. مایکروسافت او/یا د هغې اړوند عرضه کوونکي په دې وسیله د دې معلوماتو په اړه د ټولو ضمانتونو او شرایطو څخه ډډه کوي، پشمول د سوداګرۍ د ټولو ضمانتونو او شرایطو، که صریح، ضمني یا قانوني وي، د ځانګړې موخې لپاره مناسبوالی، سرلیک او د حقوقو نه نقض کول. په هیڅ حالت کې به مایکروسافت او/یا د هغې اړوند عرضه کوونکي د کوم ځانګړي، غیر مستقیم یا پایلې لرونکي زیانونو یا د استعمال، معلوماتو یا ګټو د ضایع کیدو له امله د هر ډول زیانونو مسؤل نه وي، که په ټرون، غفلت یا بل ظالمانه عمل کې رامینځته شوي وي، چې د خدماتو څخه د لاسته راغلي معلوماتو د کارولو یا اجرا له امله یا په تړاو کې رامینځته شوي وي.

دلته شامل اسناد او اړوند ګرافیکونه کیدای شي تخنیکي ناسموالي یا د ټایپ تیروتنې ولري. په دې معلوماتو کې په دوره يي ډول بدلونونه راځي. مایکروسافت او/یا د هغې اړوند عرضه کوونکي کیدای شي په هر وخت کې د دلته تشریح شوي محصول(محصولاتو) او/یا پروګرام(پروګرامونو) کې بڼه والی راولي او/یا بدلونونه راولي. د سکرین قسمي عکسونه کیدای شي د ځانګړي شوي سافټویر نسخې کې په بشپړ ډول وکتل شي.

مایکروسافټ® او ویندوز® د مایکروسافټ کارپوریشن ثبت شوي سوداګریز نښې دي په متحده ایالاتو او نورو هیوادونو کې. دا کتاب د مایکروسافټ کارپوریشن لخوا تمویل یا تایید شوی نه دی او نه هم ورسره تړاو لري.

د چاپ حق © 2022، 2018، 2015، 2013، 2011 د R. C. Hibbeler لخوا. د پیرسن انک یا د هغې د اړوندو شرکتونو لخوا خپور شوی، 221 ریور سټریټ، هوبوکن، NJ 07030.

ټول حقوق خوندي دي. د متحده ایالاتو په امریکا کې جوړ شوی. دا نشریه د چاپ د حق لخوا خوندي ده، او د هر ډول منع شوي بیا تولید، په یوه بیرته راټولونې سیسټم کې زیرمه کولو، یا په هر ډول یا د هر وسیلې له لارې لیږد څخه مخکې باید د خپروونکي څخه اجازه واخیستل شي، که برښنایي، میخانیکي، فوټوکاپي، ریکارډنګ، یا په بل ډول وي. د اجازو په اړه د معلوماتو لپاره، د غوښتنې فورمې، او د پیرسن زده کړې نړیوال حقوق او اجازې څانګې کې د مناسبو اړیکو لپاره، مهرباني وکړئ www.pearsoned.com/permissions/څخه لیدنه وکړئ.

د دریم-اړخ مینځپانګې پیژندنې د متن په داخل کې په مناسبه پاڼه کې څرګندیږي.

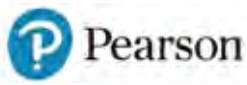
PEARSON، ALWAYS LEARNING، او MYLAB ځانګړي سوداګریز نښې دي چې د پیرسن ایډیوکیشن انک یا د هغې اړوندو شرکتونو ملکیت دی په متحده ایالاتو او/یا نورو هیوادونو کې.

که دلته په بل ډول نه وي ښودل شوي، هر ډول دریم-اړخ سوداګریز نښې، لوګوګانې، یا آیکونونه چې کیدای شي په دې کار کې څرګند شي د خپلو اړوندو مالکانو ملکیت دی، او د دریم-اړخ سوداګریزو نښو، لوګوګانو، آیکونونو، یا نورو سوداګریزو لباسونو ته هر ډول مراجعې یوازې د توضیحاتي یا تشریحي موخو لپاره دي. داسې مراجعې د پیرسن محصولاتو لپاره د داسې نښو د مالکانو لخوا د کوم تمویل، تاییدې، اجازې، یا پرمختګ په موخه نه دي، یا د مالک او پیرسن ایډیوکیشن انک، یا د هغې اړوندو شرکتونو، لیکوالانو، جواز لرونکو، یا ویشونکو ترمینځ د اړیکې په موخه نه دي.

د کانګرس کتابتون-خپرونې معلوماتو کټلاګ کول

نومونه: هیبلر، R. C.، لیکوال. سرلیک: انجنیري میخانیک. ډینامیکس .Russell C. Hibbeler / تشریح: پنځلسمه نسخه. | هوبوکن: پیرسن، 2022. | شاخص شامل دی. | لنډیز: "د دې کتاب اصلي موخه زده کوونکي ته د انجنیري میخانیک د تیوري او کاریدنې واضح او بشپړ وړاندې کول دي. دا کتاب په 11 څپرکیو کې ویشل شوی چې په کې اصول لومړی ساده او بیا پیچلي ډینامیکي حالاتو کې پلي کیږي"— د خپروونکي لخوا چمتو شوی.

پیژندونکي: LCCN 2021011723 | ISBN 9780134814988 (کلک پوښ) :LCSH موضوعات : ډینامیکس. ډلبندي: LC TA352 .H5 2022 | DDC 620.1/054—dc23 :ریکارډ پاڼه https://lccn.loc.gov/2021011723کې شتون لري.



زده کوونکیو ته

په دې هیله چې دا کار به په انجنیري میخانیک کې یوه لیوالتیا راوپاروي او د هغې د پوهیدو لپاره به یو د منلو وړ لاربښود وړاندې کړي.

سریزه (PREFACE)

د دې کتاب اصلي موخه زده کوونکي ته د انجنیري میخانیک د تیوري او کاریدنې واضح او بشپړ وړاندې کول دي. د دې موخې د ترلاسه کولو لپاره، دا کار د تدریس په مسلک کې د سلګونو کتونکو د تبصرو او وړاندیزونو، او همدارنګه د لیکوال د ډیرو زده کوونکو لخوا بڼه ورکړل شوې ده.

ددی نسخې نوي شیان (NEW TO THIS EDITION)

نوي پراخه ځوابونو برخه. د کتاب په وروستۍ برخه کې د ځوابونو برخه اوس د غوره شویو بنسټیزو پوښتنو د حل په اړه اضافي معلومات لري ترڅو زده کوونکو ته د پوښتنو په حل کولو کې یو څه لارښوونه وړاندې کړي.

د متن موادو بیا لیکل. په دې نسخه کې د ځینو مفاهیمو نوره څرګندونه شامله ده، او د ټول کتاب په اوږدو کې دقت ته وده ورکړل شوې ده، او مهم تعریفونه اوس په متن کې په زغرده ډول دي ترڅو د هغوی اهمیت په ګوته کړي.

نوي عکسونه. د موضوع د پوهیدو اهمیت د ریښتینې نړۍ کاریدنو له لارې منعکس کیږي چې په کتاب کې د ځای پر ځای شویو نږدې 14 نویو یا تازه شویو عکسونو له لارې بنودل شوي دي. دا عکسونه په عمومي توګه د دې لپاره کارول کیږي چې څنګه اړوند اصول د ریښتینې نړۍ په حالاتو کې پلي کیږي او څنګه مواد تر بار لاندې چلند کوي.

نوې پوښتنې. تقریباً 30% نوې پوښتنې دي چې دې نسخې ته ور زیاتې شوي دي، چې د انجنیرۍ په ډیرو بیلابیلو ډګرونو کې کاریدنې دي.

مهم ځانګړتياوې (Hallmark Features)

د يادو شويو نويو ځانګړتياوو سربيره، نورې وتلې ځانګړتياوې چې د کتاب منځپانګې تعريفوي په لاندې ډول دي:

تنظيم او چلند. هر فصل په ښه تعريف شويو برخو کې تنظيم شوی دی چې د ځانګړو موضوعاتو تشريح، روښانه بيلګې پوښتنې، او د کورنۍ دندې پوښتنو يوه ټولګه لري. په هره برخه کې موضوعات په فرعي ډلو کې ځای پر ځای شوي دي چې د زغردو سرليکونو له لارې تعريف شوي دي. د دې موخه د هر نوي تعريف يا مفهوم د معرفي کولو لپاره يوه جوړښتي طريقه وړاندې کول دي او کتاب د وروستي مراجعې او کتنې لپاره آسانه کول دي.

د څپرکي منځپانګې. هر فصل د فصل دننه د موادو د پراخې-کچې کاريدنې ښودلو سره پيليږي . د فصل منځپانګو يو نقطه لرونکی ليست وړاندې شوی دی ترڅو د هغه موادو عمومي کتنه ورکړي چې پوښل کيږي.

د جسم په آزاد- ډياګرامونو باندې ټينګار. د آزاد-جسم ډياګرام رسمول په ځانګړي توګه د پوښتنو په حل کولو کې مهم دی، او په دې دليل دا ګام په کتاب کې په کلکه ټينګار شوی دی. په ځانګړي توګه، ځانګړې برخې او بيلګې وقف شوي دي چې څنګه د آزاد-جسم ډياګرامونه رسم کړي. ځانګړې کورنۍ دندې پوښتنې هم اضافه شوي دي ترڅو دا تمرين ته وده ورکړي.

د تحليل لپاره کړنلارې. د هر ميخانيک پوښتنې د تحليل لپاره يوه عمومي کړنلاره د لومړي فصل په پای کې وړاندې شوې ده .بيا دا کړنلاره د ځانګړو ډول پوښتنو سره اړيکه لرلو لپاره ځانګړې کيږي چې د کتاب په اوږدو کې پوښل شوي دي .دا ځانګړې ځانګړتيا زده کوونکي ته يوه منطقي او منظمه طريقه وړاندې کوي چې دوی يې د تيوري پلي کولو لپاره تعقيب کړي .د بيلګې پوښتنې د دې طرح شوې طريقې په کارولو سره حل شوي دي ترڅو د هغې عددي کاريدل روښانه کړي. په شئ، خو، يوځل چې اړوند اصول په شوي وي او کافي باور او قضاوت ترلاسه شوي وي، زده کوونکی کولی شي بيا خپلې کړنلارې د پوښتنو حل کولو لپاره رامينځته کړي.

مهمې نقطې. دا ځانګړتيا په يوه برخه کې د ډيرو مهمو مفاهيمو بياکتنه يا لنډيز وړاندې کوي او ډيرې مهمې نقطې په ګوته کوي چې بايد په شي کله چې د پوښتنو د حل لپاره تيوري پلي کيږي.

بنسټيزې پوښتنې. دا د پوښتنو ټولګې په انتخابي ډول د ډيرو بيلګه پوښتنو وروسته ځای پر ځای شوي دي .دوی زده کوونکو ته د مفاهيمو ساده کاريدنې وړاندې کوي، او له دې امله، د پوښتنې-حل کولو مهارتونو پراختيا فرصت وړاندې کوي مخکې له دې چې د هغو معياري پوښتنو څخه

چې وروسته راځي د حل هڅه وکړي. په اضافه، دوی کیدای شي د ازموینو لپاره د چمتووالي لپاره وکارول شي، او دوی کیدای شي په وروسته وخت کې وکارول شي کله چې د انجنیرۍ په بنسټونو کې د ازموینې لپاره چمتووالی نیول کیږي. یو شمیرحلونه د کتاب په شا کې ورکړل شوي دي.

مفهومي پوهاوی. د کتاب په اوږدو کې د ځای پر ځای شویو عکسونو په کارولو سره، تیوري په ساده ډول پلي شوې ده ترڅو د هغې ځینې مهم مفهومي ځانګړتیاوې روښانه کړي او په معادلو کې د کارول شویو ډیرو اصطلاحاتو فزیکي معنی وښیي.

د کورنۍ دندې پوښتنې. د مخکې یادو شویو بنسټیزو او مفهومي ډول پوښتنو څخه پرته، په کتاب کې شامل نور ډول پوښتنې په لاندې ډول دي:

. آزاد-جسم ډیاګرام پوښتنې. د کتاب ځینې برخې پیلیزې پوښتنې لري چې یوازې د ځانګړو پوښتنې لپاره د آزاد-جسم ډیاګرام رسمول غواړي د پوښتنې په یوه ټولګه کې. دا دندې به په زده کوونکي باندې د دې مهارت د تسلط اهمیت اغیزه وکړي د هر توازن پوښتنې د بشپړ حل لپاره د اړتیا په توګه.

. عمومي تحلیل او ډیزاین پوښتنې. په کتاب کې د پوښتنو اکثریت په انجنیري تمرین کې رامینځته شوي ریښتیني حالتونه انځوروي. د دې پوښتنو ځینې د صنعت کې کارول شوي اصلي محصولاتو څخه راځي. هیله ده چې دا واقعیت به د زده کوونکي لیوالتیا په انجنیري میخانیک کې وهڅوي او د هر داسې پوښتنې د کمولو مهارت د پراختیا لپاره یوه وسیله چمتو کړي، د هغې فزیکي تشریح څخه یو ماډل یا سمبولیک استازیتوب ته چې د میخانیک اصول ورته پلي کیدای شي.

د کتاب په اوږدو کې، د پوښتنو تقریبي توازن شتون لري چې یا SI یا FPS واحدونه کاروي. سربیره پر دې، په هره ټولګه کې، هڅه شوې ده چې پوښتنې د زیاتیدونکي ستونزې په ترتیب تنظیم شي پرته له د څېرکي د پای بیاکتنې پوښتنو څخه، چې په تصادفي ترتیب وړاندې شوي دي.

. کمپیوټري پوښتنې. هڅه شوې ده چې څو پوښتنې شاملې شي چې کیدای شي د عددي کړنلارې په کارولو سره حل شي چې یا په ډیسکټاپ کمپیوټر یا په پروګرام کیدونکي جیبي محاسبه کوونکي باندې اجرا کیږي. دلته موخه د زده کوونکي وړتیا پراخول دي د ریاضیاتي تحلیل نورو بڼو د کارولو لپاره پرته له دې چې هغه وخت قرباني کړي چې د میخانیک د اصولو د کاریدنې باندې تمرکز لپاره اړین دی. د دې ډول پوښتنې، چې یا کیدای شي یا باید د عددي کړنلارو په کارولو سره حل شي، د "مربع" نښې (j) په واسطه پیژندل کیږي چې د پوښتنې شمیرې مخکې راځي.

په دې نسخه کې ډیرې د کورنۍ دندې پوښتنې، په دوو بیلابیلو کټګوریو کې ځای پر ځای شوي دي. پوښتنې چې یوازې د پوښتنې شمیرې له لارې ښودل شوي دي یو ځواب لري او په ځینو مواردو کې یو اضافي عددي پایله د کتاب په شا کې ورکړل شوې ده. د هر څلورم پوښتنې شمیرې مخکې یو ستوری (*) د یوې پوښتنې ښودنه کوي چې ځواب نه لري.

دقت. د مخکینیو نسخو په څیر، د لیکوال څخه پرته، د متن او د پوښتنو د حلونو دقت په بشپړ ډول د Kai Beng Yap لخوا چې یو عملي انجنیر دی، او د EPAM کې د متخصصینو یو ټیم لخوا تایید شوی، پشمول دEkaterina Radchenko ، Georgii Kolobov، او Artur Akberov.

محتویات (CONTENTS)

دا کتاب په 11 فصلونو کې ویشل شوی دی، چې په کې اصول لومړی په ساده، بیا په پیچلي حالاتو کې پلي کیږي. دا کتاب ادامه د ستاتیک ده ، فصلونه 1 تر 11 په ستاتیک کتاب کې دي او له دی امله ډینامیکس له دولسم (12) فصل پیل کیږي او تر 22 فصل ادامه لري.

د ذرې کینماتیک په دولسم (12) فصل کې بحث شوی دی، د ذرې کینتیک په اړه بحث تعقیبوي په 13 فصل کې (د حرکت معادله)، 14 فصل کې (کار او انرژي)، او 15 فصل کې (امپلس او مومنټم). د ذرې ډینامیک مفاهیم چې په دې څلورو فصلونو کې شامل دي بیا په یوه "بیاکتنه" برخه کې لنډیز شوي دي، او زده کوونکي ته د بیلابیلو پوښتنو د پیژندلو او حل کولو فرصت ورکړل شوی دی. د وړاندې کولو ورته پرله پسې والی د سخت جسم د سطحې حرکت لپاره ورکړل شوی دی: 16 فصل (سطحی کینمتیک)، 17 فصل (د حرکت معادلې)، 18 فصل (کار او انرژي)، او 19 فصل (امپلس او مومنټم)، د دې فصلونو لپاره لنډیز او بیاکتنې پوښتنوټولګې بیا شتون لري.

که وخت اجازه ورکړي، د درې-بعدي سخت-جسم حرکت په اړه ځینې مواد کیدای شي په کورس کې شامل شي. د دې حرکت کینمتیک او کینتیک په ترتیب سره په 20 او 21 فصلونو کې بحث شوي دي. 22 فصل (لړزیدا یا اهتزازات) کیدای شي شامل شي که زده کوونکی لازمي ریاضیاتي زدکړه ولري. د کتاب هغه برخې چې د بنسټیز ډینمیک کورس د محدودې څخه بهر ګڼل کیږي د ستوري (★) په واسطه په نښه شوي دي او کیدای شي پریښودل شي. په یاد ولرئ چې دا مواد همدارنګه د بنسټیزو اصولو لپاره یوه مناسبه مرجع چمتو کوي کله چې په نورو پرمختللي کورسونو کې بحث کیږي.

په پای کې، ضمیمه A د ریاضیاتي فورمولونو یو لیست چمتو کوي چې په کتاب کې د پوښتنو د حل لپاره اړین دي، ضمیمه B د ویکټور تحلیل لنډه بیاکتنه چمتو کوي، او ضمیمه C د ځنځیرۍ قاعدې د کاریدنې بیاکتنه کوي.

بدیل پوښښ. د ښوونکي په خوښه، دا ممکنه ده چې 12 څخه تر 19 څپرکي پرته له پرله پسې توب د ضایع کولو څخه په لاندې ترتیب پوښښ شي: 12 او 16 فصلونه (کینمتیک)، 13 او 17 فصلونه (د حرکت معادلې)، 14 او 18 فصلونه (کار او انرژي)، او 15 او 19 فصلونه (امپلس او مومنټم).

یادونه او مننه (ACKNOWLEDGEMENTS)

لیکوال هڅه کړې ده چې دا کتاب داسې ولیکي چې هم زده کوونکي او هم ښوونکي ته به جذاب وي. د کلونو په اوږدو کې، ډیرو خلکو په دې پراختیا کې مرسته کړې ده، او زه به تل د هغوی د باارزښته وړاندیزونو او تبصرو لپاره مننه وکړم. په ځانګړي توګه، زه غواړم د ټولو هغو کسانو څخه مننه وکړم چې ماته یې تبصرې رالیږلي دي. په دې کې شامل دي J. Aurand, J. Ari-Gur, R. Boyd, O. Byer, E. Erisman, C. Heinke, H. Kuhlman, E. Most, S. Moustafa, H. Nazeri, D. Pox, J. Ross, D. Rowlison, R. Scott, K. Steurer.

یو اوږد-مهاله ملګری او همکار، Kai Beng Yap، د پوښتنو د حلونو په چمتو کولو او چک کولو کې زما لپاره لویه مرسته وه. د تولید پروسې په جریان کې زه د Rose Kernan ، زما د تولید ایډیټر، او Marta Samsel ، چې د کتاب پر پوښ یې کار کړی دی، د مرستې لپاره مننه کوم. او په پای کې، زما میرمنې، Conny ته، چې د خپرولو لپاره د لاسلیک په لوستلو کې یې مرسته کړې ده.

په پای کې، ډیرې مننې ټولو زما زده کوونکو او د تدریس مسلک غړو ته وړاندې کیږي چې په آزاده توګه یې وخت نیولی دی ترڅو خپل وړاندیزونه او تبصرې وړاندې کړي. څرنګه چې دا لیست د یادولو لپاره ډیر اوږد دی، هیله ده چې هغه کسان چې په دې ډول یې مرسته کړې ده به دا ناپیژانده پیژندنه ومني.

x

زه به ډیره قدرداني وکړم که له تاسو څخه واورم، که په هر وخت کې تاسو د دې نسخې په اړه د کومو چارو په اړه کومې تبصرې، وړاندیزونه، یا پوښتنې ولرئ. آر. سی. هیبلر

ددی کتاب پښتو ژبې ژباړنې په باره کې

ددی کتاب د ژباړې لپاره مورډ (حفیظ ا لله وردک او زرجان بها) دوه فکتورنه په نظر کی نیولي:
(۱) داچی په دی رشته کی تحول په کراری سره دی، او ډیر وخت نیسی چی کوم بنیادی تحول پکی راشی. (۲) داچی دا کتاب په امریکاکی ښه شهرت لری او په ډیرو معتبرو پوهنتونونو کی اوس تدریس کیږی. ډینامیک داسی یوه موضوع ده چی زمورډ اول شرط یی پوره کړی. ممکن هغه ښه کتابونه چی پنځوس کاله مخ کی پدی ساحه کی لیکل شوی وی اوس هم د ګټی وړ وی. همدا رنګه دا کتاب چی مورډ خو ښکړی په ډیرد پوهنتونو کی تدریس کیږی چی زمورډ دوهم شرط پوره کوی.
ددی کتاب پوره معلومات په انګلیسی ژبه په لاندی ډول دی:

Dynamics

By Hibbeler , 15th edition 2022

Publisher is Pearson

دا کتاب آر.سي. هیبلر لیکلی چی د پیرسن کمپنی چاپ کړی او پنځه لسم چاپ یی په ۲۰۲۲ کال کی راوتلي.

لمړی مورډباید د نشرونکی کمپنی نه د ترجمی اجازه واخیستله چی ډیره اورډه مرحله وه او یو څه وخت یی ونیو چی مورډ به حوصله انتظار وییست. مورډ یو اندازه پیسی هم ورکړی چی د ترجمی اجازه واخلو خو دا زمورډ د پاره کوم دیادولو وړ خبره نه وه. مورډ دواړه ژباړونکی د پیرسن کمپنی د صلاحیت لرونکیو څخه، په خاصه توګه دښاغلی رندینا پابلو (Rendina, Pablo) نه ، د زړه له کومی مننه کوو چی مورډ ته یې اجازه راکړه (HIBB4988_15_SE ډینامیکس) چی ددوی یو مشهور کتاب د افغانستان په ملی ژبه پښتو تر جمه کړو. هیله ده چی په افغانستان کی اوسنی او راتلونکی انجینران تری پوره ګټه پورته کړی.

په امریکا کی داکتاب د سیول انجینری او میخانیک انجینری زده کونکیو دپاره دی، هیله ده چی په افغانستان کی هم پدی دوو انجینری رشتو کی تدریس شی. پدی کتاب کی په کافی اندازه مواد شته

چی د دوو سمترو د پاره کار ورکا. دا ممکن په استاد او رشته پوری اړه ولری چی کوم څپرګی په یوه سمستر کی وړاندی شی.

مونږ کوشش کړی چی به ډیرو ځایو کی په قوسو کی د انګلیسی لغتونه هم استعمال کړو چی زمونږ د ترجمی پوره معنا لوستونکی وپوهیږی. مونږ کوشش ندی کړی چی پدی برخه کی نور اثار چی په ښتو لیکل شوی دی ولولو او یا دهغو اصطلاحات استعمال کړو. کوشش مو کړی چی په ډیره رواجی ژبه داکتاب ولیکو. هیله ده چی د ټولو افغانانو د پاره اسانه وی چی د موضوع مطلب تری تر لاسه کړی.

منن لیک (حفیظ الله وردک)

ډېر خوشحاله یم، الحمد الله، چې الله (ج) دا وړتیا راکړې چې د ډینامیکس کتاب (Dynamics by R.C. Hibbeler) ژباړه په ساده او روانه پښتو ژبه، د خپل کورنۍ په مرسته، د ځینو محترمو او درناوي وړ استادانو او ملګرو په لارښوونه او هڅونو، د ګران افغانستان د انجینرۍ زده کوونکو او د افغانستان انجینرانو د زده کړې او ریفرنس لپاره تکمیل کړم. د دغه کتاب په ژباړه کې زما ګران او محترم استاد د کابل پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي پخواني ریس او د پورډو یونیورسټي پخواني پروفیسور ډاکټر زرجان بها چې په اندیانا کې ژوند کوي زما سره ملګرتیا یې کړې او د هغه په مرسته مونږ د دغه کتاب ژباړه تکمیل کړه.

دلته غواړم چې د ډېر قدرمن د کابل پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي پخواني زما استاد او درند ملګري محترم پروفیسور ډاکټر سورګل وردک، چې اوس په کلیفورنیا یونیورسټي کې پروفیسور دی او هلته ژوند کوي د هغه د ارزښتناکو لارښوونو، هڅونو، نظریاتو، او ملاتړ په ډېر درناوي یادونه، او مننه وکړم.

له خپلې میرمنې ثریا جانې چې په ډېره حوصله مندۍ په کور کې یې هر ډول اسانتیاوې ماته برابرې کړې او ملاتړ یې کړی په ډېر درناوي یادونه او مننه کوم. زما د دوو زامنو د طبي پوهنتون پروفیسور ډاکټر ذبیح الله وردک او میرمن یې ډاکټر انجیلا فاروقي، او بل زوی ډاکټر نجیب الله وردک او میرمن یې لانا میرا کې، او د دوو لورګانو ډاکټر لمیا وردک او خاوند یې پروفیسور ډاکټر ښالان، او بله لور می انجینره وژمه وردک او اولادونه یې، د دوی له بې حده مرستو، هڅونو، او دعاګانو په درناوي یادونه او مننه کوم. زما د کور د دفتر وسایل په پښتو او انګلیسي ژبو سمبالول او زما د کمپیوټري ستونزو له منځه وړل د څو کلونو راهیسې کله چې ما

خپل رسمي کار له بوینګ کمپنۍ سره وروسته له دېرشو کلونو بس کړی، ماته د درناوي او مننې وړ دی او له دوی ټولو د محبت ډکه مننه کوم.

په پای کې غواړم چې د محترم ډاکټر صاحب یحیی وردک او د هغوی د ټیم څخه چې د دغه کتاب په چاپ کې یې مرسته کړې ډېره مننه وکړم. او هم د ګران افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د څېړنو، تالیف او ژباړې د ریس ډاکټر حمید الله مزمل څخه ډېره مننه کوم، چې دا کتاب د افغانستان په پوهنتونونو او علمي مرکزونو ته ویشي. او هم له پیرسن (Pearson) کمپنۍ ډېر مننه کوم چې د دغه ارزښتناک کتاب د ژباړې پښتو ژبې ته یې اجازه راکړې.

له ټولو لوستونکو زما هیله دا ده چې خپل نظریات او انتقادات زموږ سره شریک کړي تر څو په بل چاپ کې هغه په پام کې ونیسو. او که چیرې کوم تېروتنې شوي له ټولو بخښنه غواړو.

په درناوي
حفیظ الله وردک

جوزا 8th، 1404 (May 29, 2025)

منن لیک (زرجان بها)

تر هر څه د مخه زه د کایناتو د جوړوونکی **الله سبحان الله وتعالله** د بی ساریه لورینونه چی په ماباندی یی کړی منند وی یم.

زما په ژوند کی زما پلار، بهاول، ډیر مثبت رول لوبولی چی په کوچنوالی کی یی ماته واک راکا چی کړی شم ددینی زده کړو د پاره د طا لبی لار ونیسم او یا د عمومی زده کړو د باره ښونځی ته ولاړ شم چی ما ښونځی خوښکا او د وردګود تکیی په ښونځی کی داخل شوم. او پدی کار کی زما تره، اغاجان چی ملک وا هم رول در لود، چی ارزو یی وه چی زه په ښونځی کی لیک او لوست زده کړم تر څو وکړی شم د خپل پلار په ځای، چی د ستروک له کبله یی نور لیک نه شوی کولی، د وولس د پاره ګتور تمام شم. زما پلار زموږ د ټولی که لی (قلعی) ښونکی وا چی نجونی او هلکان به هر سهار زموږ کورته د درس ویلو د پاره راتلل. لږ تر لږه به ټولو د قران مجید لوستل زده کول. د سبق ویلو د پاره یو شمیرنوری نجونی او ښځی د نورو نیږدی که لونه هم را غلی دی. دقران مجید له لوستلو نه پس که چا غوښتل نور درس ووایی په هلکانو به یی پنجکتاب چی په دری ژبه وا او په نجونو به یی رشید بیان چی په پښتو ژبه وا شروع کړل او دا دده دپاره اخری مرحله د تدریس وه.

همدا رنګه زما میرمنی فاطمی (ګول) زما به ژوند کی مثبت رول درلود چی په دوامداره توګه یی په ډیره حوصله ربړونه پر ځان قبول کړی وو تر څو زه وکړی شم د ارزو سره سم خپلو زده کړوته دوام ورکړم. همدارنګه نوموړیی د دریسو اولادو په روزنه کی د کورنی د نورو غړیوچی څلور خورانی وی(سدوزی، شرنګو، فاطمه، او طیبه) په مرسته پوره ونډه اخستی وه چی ډیر وخت ځان ملامت بولم چی زه د افغانستان په جوړولو کی دومره مصروف وم چی دوی ته می ډیر کم وخت درلود او ښښنه تری غواړم.

زه ډیر طالع من یم چی اولادونو می عبدالغفورچی د ژوند شریکه یی ملالیٔ ، عبد الرءوف چی د ژوند شریکه یی هیلیٔ . او وسیمه چی د ژوند شر یک یی عبدالحکیم دی، نه یواځی په کوچنوالی کی ماته هیڅ تکلیف ندی راکړی ، او اوس چی لوی شوی او دژوند د شریکانو او اولادوسره په خپلو کورونو کی ژوند کوی زما او د ګول بی نهایته احترام او هر اړخیزه پام لرنه لری.

یو ډیر نیږدی ملګری می ډاکتر محمد رسول وردګ وا چی موږ دواړه په یوه وخت کی د کابل په پوهنتون کی وو او پس له پوهنتونه دواړه په پوهنتون کی د استادانو په توګه پاتی شوو. نوموړی څو کاله پخوا په سویس کی چی ډاکتر وا وفات شو. نوموړی دما دپاره د صداقت او دیانت نمونه وا او زما په ژوند کی چی وکړی شم پر خپلو کړنلارو کی بریالی شم مثبته اغیزه درلوده.

ددی کتاب به لیکلو کی زما خواخوږی ملګری چی د کابل د انجینری پوهنځی په استادانو کی یی خا ص او ډ یر پیاوړی ځای در لود، حفیظ الله وردګ، ددی کتاب په لیکلو کی بی ساریه زیاریستلی او زه تری مننه کوم چی ماته یی ددی کتاب په ژباړنه کی برخه راکړه. هیله لرو چی په راتلونکیی وخت کی موږ په ګډه سره وکړی شو د افغانستان د پاره د نوروعلمی پروژو په تکمیلولو کی بریالی شو.

لیک لر

لیک لر



12

د یوې ذری کینیمتیک

Kinematics of a Particle)

د فصل موخې 2

12.1 پیژندنه (Introduction) 3

12.2 مستقیم یا خطی کینمتیکس: دوامداره حرکت 4

(RECTILINEAR KINEMATICS: CONTINUOUS MOTION)

12.3 مستقیم کینمتیکس: نامنظم حرکت (RECTILINEAR KINEMATICS: MOTION ERRATIC) 25

12.4 دعام ډول منحني حرکت (GENERAL CURVILINEAR MOTION) 48

12.5 منحني حرکت: مستطیلي اجزاوي (CURVILINEAR MOTION: RECTANGULAR COMPONENTS) 51

12.6 . د پروجکټایل حرکت (MOTION OF PROJECTILE) 59

12.7. منحني حرکت : نارمل او مماسي اجزاوي (CURVILINEAR MOTION: NORMAL AND TANGENTIAL COMPONENTS) 84

12.8 د منحني حرکت : سلندري اجزاوي (CURVILINEAR MOTION: CYLINDRICAL COMPONENTS) 111

12.9. د دوو ذرو مطلق تابع حرکت تحلیل (ABSOLUTE DEPENDENT MOTION ANALYSIS OF TWO PARTICLES) 137

12.10 د دوو ذرو نسبي حرکت د متحرکومحورونو له لارې (RELATIVE MOTION OF TWO PARTICLES USING TRANSLATING AXES) 153



13 176

د یوې ذرې کینیټیکس (قوه او تعجیل)

(Kinetics of a Particle: Force and Acceleration)

د فصل موخې (Chapter Objective) 177

13.1 د نیوتن د حرکت دوهم قانون ((Newton’s Second Law of Motion 178

13.2 د حرکت معادله (The Equation of Motion) 181

13.3 د حرکت معادله د ذرو د یوه سیستم لپاره (Equation of Motion for a System of Particles) 184

13.4 د حرکت معادلې: مستطیلي محورونه (Equations of Motion: Rectangular Coordinates) 186

13.5 د حرکت معادله : عمودي او مماسي کوردیناتونه (Equations of Motion: Normal and Tangential Coordinates) 222

13.6 د حرکت معادله : استوانه يي محورونه (Equations of Motion Cylindrical Coordinates) 251

13.7* دمرکزي قوی حرکت او فضايي ميکانيک: (Central-Force Motion and Space Mechanics) 276



14

298

د يوې ذری کينيتيکس (کار او انرژې)

(Kinetics of a Particle: Work and Energy)

د فصل موخې (Chapter Objective) 299

14.1 د يوې قوی کار (The Work of a Force) 300

14.2 د کار اود انرژې اصول (Principle of Work and Energy) 306

14.3 د ذرو د يوه سيستم لپاره د کار او انرژی اصول : (Principle of Work and Energy for a System of Particles) 309

14.4 قدرت او مؤثريت: (Power and Efficiency) 340

14.5 دساتنې قواوې او پوتنشيل انرژي: (Conservative Forces and Potential Energy) 360

14.6 د انرژی ساتنه (Conservation of Energy) 365



15 399

د يوې ذرې حرکت (امپلس او مؤمنتم او انرژۍ)

(KINETICS of a Particle: Impulse and Momentum)

د فصل موخې (Chapter Objective) 400

15.1 د خطي آنې قوې (امپلس) او مؤمنتم اصول : (Principle of Linear Impulse and Momentum) 401

15.2 د خطي امپلس او مومنتم اصول د ذرو د سيستم لپاره (Principle of Linear Impulse and Momentum for a System of Particles) 404

15.3 د خطي مومنتم ساتنه د ذرو دسيستم لپاره : (Conservation of Linear Momentum for a System of Particles) 427

15.4 ضربه يا امپکت : (Impact) 448

15.5 زاويه وې مومنتم : (Angular Momentum) 479

15.6 د يوې قوې د مومنټ او زاويه وې مومنتم ترمنځ اړيکه : (Relation Between the Moment of a Force and Angular Momentum) 480

15.7 د زاويي امپلس او مومنتم اصول : 484
(Principle of Angular Impulse and Momentum)

15.8جسمونه چې له کتلوی جریان سره مخ دي : (Bodies Subjected to a Mass Flow) 504

15.9 د مایع د بهیر دوامداره جریان :(Steady Flow of a Fluid Stream) 507

15.10 هغه جسمونه چې کتله له لاسه ورکوي یا یې ترلاسه کوي: (Bodies that Lose or Gain Mass) 512



16 د جامد جسم سطحي کینیمتیک (Planar Kinematics of a Rigid body) 538

د فصل موخې: (Chapter Objective) 539

16.1 د جامد جسم سطحی حرکت : (Planar Rigid-Body Motion) 540

16.2 لیږدول (Translation) 541

16.3 څرخیدل په یو ثابت محور: (Rotation About a Fixed Axis) 543

*16.4 د مطلق حرکت تحلیل:(Absolute Motion Analysis) 571

16.5 د نسبي حرکت تحلیل:(Relative-Motion Analysis) 583

16.6 د صفر سرعت لپاره لحظوی مرکز: (Instantaneous Center of Zero Velocity) 606

16.7 د نسبي حرکت تحلیل: تعجیل: Relative-Motion Analysis: Acceleration 624

16.8 د نسبي حرکت تحلیل د څرخیدونکیو محورونو په کارولو سره: (Relative- Motion Analysis Using Rotating Axes) 647



17 675

د جامد جسم سطحي کینیمتیک

(Planar Kinematics of a Rigid body)

د فصل موخې: (Chapter Objective) 676

17 .1 د کتلې انرشیایی مؤمنټ (Mass Moment of Inertia) 677

17.2 د سطحی کینیټیک د حرکت معادله (Planar Kinetic Equations of Motion) 696

17.3 د حرکت معادلې: انتقالیدل: (Equation of Motion: Translation)702

17.4 د حرکت معادلې: په یوه ثابت محور ګرزیدل (Equations of Motion: Rotation About a Fixed Axis) 725

17.5 د حرکت معادلي: عمومي سطحی حرکت (Equation of Motion: General Plane Motion) 750



18

778

د یو سخت جسم سطحي کینیتیکس: کار او انرژی

(Planar Kinetics of a Rigid Body: Work and Energy)

د فصل موخي: (Chapter Objective) 779

18.1. کینیتیک انرژي (Kinetic Energy) 780

18.2 . د یوې قوې کار (The Work of a Force) 784

18.3 . د کپل مؤمنت کار: (The Work of a Couple Moment) 786

18.4 . د کار او انرژۍ اصول (Principle of Work and Energy) 790

18.5 . د انرژي ساتل (Conservation of Energy) 817



19

849

د یو سخت جسم سطحي کینیتیکس: امپلس او مؤمنتم

(PLANAR KINETICS OF A RIGID BODY: IMPULSE AND MOMENTUM)

د فصل موخي: (Chapter Objective) 850

19.1 .خطي او زاويوي مؤمنتم: (Linear and Angular Momentum) 851

19.2 .د امپلس او مؤمنتم اصول: (Principle of Impulse and Momentum) 858

19.3 . د مومنتم ساتنه : (Conservation of Momentum) 882

19.4 . غير مركزي ټکر: (Eccentric Impact) 887



20

910

د سخت جسم دري بعدي کينيمتيکس

(Three-Dimensional Kinematics of a Rigid Body)

د فصل موخي: (Chapter Objective) 911

20.1 . په يوه ثابته نقطه تاويدل (Rotation About a Fixed Point) 912

*20.2 . د وخت مشتق د ويکتور چې د ثابت يا خوځيدونکی تاويدونکی سيستم څخه اندازه کيږي-(The Time Derivative of a Vector Measured From a Fixed or Translating-Rotating System) 917

20.3 . عمومي حرکت: (General Motion) 924

*20.4 . د نسبي حرکت تحليل د خوځيدونکيو او تاويدونکيومحورونو سره:

(Relative- Motion Analysis Using Translating and Rotating Axes) 940

20.1 . په يوه ثابته نقطه تاويدل (Rotation About a Fixed Point) 912



21 959

د سخت جسم دري بعدي کينيتيکس

(Three-Dimensional Kinetics of a Rigid body)

د فصل موخي: (Chapter Objective) 960

*21.1. مؤمنت او انرشيايی ضرب : (Moments and Products of Inertia) 961

21.2. زاويوي مومنټم (Angular Momentum) 975

21.3 کينيتيک انرژی (Kinetic Energy) 980

*21.4 د حرکت معادلې (Equations of Motion) 996

21.5 جايرسکوپي حرکت (Gyroscopic Motion) 1018

21.6 بيله تورکه حرکت (Torque-Free Motion) 1026



22 1044

لړزيدا (اهتزازونه)

(Vibrations)

د فصل موخي: (bjective Chapter O) 1045

22.1 نه کمزوره شوي آزاد لړزيدا (Undamped Free Vibration) 1046

*22.2 د انرژی ميتودونه (Energy Methods) 1064

*22.3 د قووي له امله نه کمزوره شوي لړزيدا(Undamped Forced Vibration)
1074

*22.4 د ويسکز په واسطه کمزورى شوى آزاده لړزيدا (Viscous Damped Free
Vibration) 1079

22.5 ويسکس کمزوره شوى د قووى تر اثر لاندې لړزيدا
(Viscous Damped Forced Vibration) 1083

*22.6 بريښنايى سرکټ (Electrical Circuit Analogs) 1087

ضميمى

1. ضميمه A: اصتلاحات رياضي 1101
2 . ضميمه B : ويکتورى تحليل 1104
3 . ضميمه C : ذنجيرى قانون 1110
4 . بنسټيز پوښتنو ځوابونه 1114
5 . د بيا کتنې سوالونو ځوابونه 1137
6 . انتخاب شوى پوښتنو ځوابونه 1139

په فصلونو کى د انتخاب شويو عکسونو نوماندونه او يادونه

12 فصل GETTY IMMAGES INCORPORATED : Sollina Images/Getty
Images 001

059 SHUTTERSTOCK: Nam Mun Photo/Shutterstock

13 فصل Image Credits

176 ALAMY IMAGES: H. Mark Weidman Photography/Alamy Stock Photo

183 GETTY IMAGES INCORPORATED: Keystone/Stringer/Hulton Archive/Getty Images

228 123RF GB LIMITED: John Sandy/123RF

278 GETTY IMAGES INCORPORATED: Universal images group/Getty Images

Image Credits فصل 14

298 ALAMY IMAGES: Michael Doolittle/Alamy Images

Image Credits فصل 15

399 123RF GB LIMITED: Andrey Kekyalyaynen/123RF

428 REB Images/Image Source/Getty Images

451 SHUTTERSTOCK: NamMun Photo/Shutterstock

487 123RF GB LIMITED: Andrey Kekyalyaynen/123RF

514 NASA: © NASA

Chapter 16: Image Credits

Image Credits فصل 16

538 SHUTTERSTOCK: Georgi Roshkov/Shutterstock

Image Credits فصل 17

675 SHUTTERSTOCK: Maksim Dobytko/Shutterstock

Image Credits فصل 18

778 SHUTTERSTOCK: Canbedone/Shutterstock

Image Credits فصل 19

849 ALAMY IMAGES: NASA Images/Alamy Stock Photo

889 GETTY IMAGES INCORPORATED: Mike Kemp/Rubberball/Getty Images

Image Credits فصل 20

910 123RF GB LIMITED: Romsvetnik/123RF

Image Credits فصل 21

959 ALAMY IMAGES: CW Motorsport Images/Alamy Stock Photo

965 GETTY IMAGES INCORPORATED: Ablestock/Getty Images

980 NASA: © NASA

1005 SHUTTERSTOCK: F Armstrong Photography/Shutterstock

1023 123RF GB LIMITED: Ruben Martinez Barricarte/123RF

Image Credits فصل 22

1044 SHUTTERSTOCK: Wadas Jerzy/Shutterstock

د انجینری میخانیک

د انجینری میخانیک

(ENGINEERING MECHANICS)

ډینامیکس

DYNAMICS

پنځه لسم چاپ

(FIFTEEN EDITION)

دولسم فصل

(CHAPTER 12)



که څه هم دا جټ الوتکې خورا لوړې دي، د لیرې څخه دوی لکه یوه زره چې په حرکت کې وي تحلیل کیدی شي.

د يوې زرې کينماتيک
(KINEMATICS OF A PARTICLE)

د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

- § معرفي کول د موقعيت، بې ځايه کيدنه، او سرعت .
- § د يوې ذرې د حرکت مطالعه او په ګرافيک ډول د هغې بدلون د يوې مستقيمې کرښې په اوږدو کې.
- § د ذرې د حرکت پلټنه، د منحني لارو په اوږدو کې د مختلفو کوردیناتو په کارولو سره .
- § د دوو ذراتو د متکي (dependent) حرکت تحليل.
- § د دوو ذراتو د نسبي حرکت د اصولو لدينه د متحرکو محورونو په کارولو سره.

12.1 پیژندنه (INTRODUCTION)

انجینرۍ میخانیک د قواوو د عمل لاندې د اجسامو د سکون یا حرکت حالتونومطالعه ده. دا په دوو برخو ویشل کیږي، چې عبارت دي له ستاټیکس او ډینامیکس څخه. ستاټیکس د یو جسم د تعادل سره اړه لري کوم چې په سکون یا آرام حالت کې وي یا په ثابت (constant) سرعت (velocity) حرکت کوي. دلته به مور ډینامیکس ته پام وکړو، کله چې د جسم د چټک حرکت یا تعجیل حالت کې وي. دا موضوع به په دوه برخو کې وړاندې شي: کینیماتیکس (*kinematics*)، چې یوازې د حرکت هندسي اړخونه څیړي، اوکیناتیک (*kinetics*)، چې د حرکت لاملونوتحلیل او څیړینه د هغو قواوو چې د حرکت لامل کیږي. د دې اصولو د پراختیا لپاره، لمړي به د یوی ذرې یا بڅرکي ډینامیکس حالت وڅیړل شي، وروسته به په دوو او بیا په درې اړخیزو ابعادو کې د سخت جسم (rigid-body) ډینامیکس حالتونه وڅیړل شي.

په تاریخي توګه، د ډینامیکس اصول هغه وخت رامینځته شوي کله چې د وخت دقیق اندازه کول امکان پیدا کړ. ګلیلو ګلیلی (1564-1642) په دې ډګر کې د لومړي لوی مرسته کونکو څخه وا. د هغه په کار کې د پنډولمونو (pendulums) او د اجسامو د ښکته لویدو په کارولو سره تجربې شاملې وې . تر ټولو د پام وړ په هرصورت، د ډینامیکو سره مرسته د اسحاق نیوټن لخوا ترسره شوې (1642-1727)، چې د هغه د دریو د حرکت بنسټیز قوانینو فورمول اود نړیوالی جاذبی د کشش قانون د پامور پرمختګ وا. په لنډ وخت ددی قوانینو په رڼاګی د مهمو تخنیکوپه پلیکیدوکی د یولر ډی المبرټ (Euler D'Alembert)، لاګرنج (Lagrange)، او نورو لخوا پوره پرمختګونه رامینځته شوي.

د انجینرۍ په برخه کې ډیری ستونزې شتون لري چې حل یې د ډینامیکس اصولو پلي کولو ته اړتیا لري. د مثال په توګه، پلونه او د جوړښتونوچوکاټونه کله چې د متحرک بارونو او طبیعي قواوو لکه باد او ذلزلی سره مخ شي ډینامیکي حالت رامینځته کیږي . د هر خوځیدونکی لکه موټر یا الوتکې، ساختماني ډیزاین د حرکت په پام کې نیولو ته اړتیا لري، ځکه چې حرکت کوی. دا حالت د ډیرومیخانیکي وسیلو لپاره هم ریښتیا ده ، لکه موټور، پمپونه، د حرکت وړ وسیلې، صنعتي لاسوهنې، او ماشینونه. سربیره پردې، د مصنوعي سپوږمکیو د حرکتونو وړاندوینه او فضایي بیړۍ د ډینامیکس په تیوري ولاړ دي. د ټیکنالوژۍ برخې د پرمختګ سره ، د پوهیدو لپاره به نور ډیره اړتیا وی رامینځ ته شي چې د دې موضوع اصول څنګه پلي کړل شي.

د پوښتنو حل کول. د ستاتیک په پرتله ډینامیکس تحلیل ډیر پراخ او ښکیل ساحه ګڼل کیږي، ځکه چې په جسم باندې پلي شوي قواوې او هم د جسم حرکت باید په پام کې ونیول شوی. همدا رنګه ، ډیرې تعملات یوازې د الجبرا او مثلثاتوکارولو پر ځای د مشتقاتو(کیلکولس) کارولو ته هم اړتیا لري. په هرحالت کې، د ډینامیکس اصولو زده کړې لپاره ترټولو اغیزمنه لاره د **سوالونو**

حلول دي. د دې لپاره چې په دې ساحه کې بریالی شئ ، اړینه ده چې تحلیل په منطقي او منظم ډول وړاندې کړئ لکه څنګه چې په لاندې مرحلوکې وړاندیز شوي:

1. پوښتنه یا سوال په دقت سره ولولئ او هڅه وکړئ چې اصلي فزیکي وضعیت یاحالت اړیکه ونیسئ د هغه تیوري سره چې تاسو یې مطالعه کړې.

2. هر اړین ډیاګرام رسم کړئ او د سوال د ډیټا جدول جوړکړئ.

3. محوري کوردینات سیستم رامینځته کړئ او اړوند اصول په ریاضیکي بڼه پلي کړئ.

4. اړین مساوات داسې حل کړئ چې واحدونه په نظر کې و نیول شي ، او ځواب له دریو عددو څخه زیات راپور مه ورکوئ، کوم چې عموما د ورکړل شوي معلوماتو یا ډیټا دقت دی.

5. ځواب د تخنیکي قضاوت او سلیم عقل په کارولو سره مطالعه کړئ. دا معلومه کړئ چې آیا دا ځواب معقول ښکاري یا نه.

د دې عمومی طرزالعمل په پلي کولو کې، د امکان تر حده په پاکې سره کار وکړئ. پاک ساتل عموما روښانه او منظم فکر هڅوي، او برعکس. که تاسو د ستونزې حل کولو مهارتونو ته وده ورکولو کې ستونزه لرئ، په پام کې ونیسئ په www.pearson.com/hibbeler کې د موجود ویډیوګانې کتل .

12.2 مستقیم یا خطي کینماتیکس: دوامداره حرکت

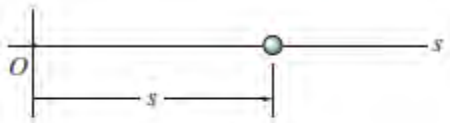
(RECTILINEAR KINEMATICS: CONTINUOUS MOTION)

مورِ به د ډینامیکس په اړه خپله مطالعه د کینماتیک په بحث کولو سره پیل کړو کله چې یوه ذره په مستقیمه لاره حرکت کوي. په یاد ولرئ چې یوه **ذره** (particle) کتله لري مګر د پام وړ اندازه او شکل نلري، نو په دې اساس زمورِ پلي کول محدودکیږي هغه شیانو ته چې ابعاد لري اما د حرکت په تحلیل کې دوي هیڅ پایله نلري. د بیلګې په توګه، یو راکټ، پروجیکتایل، یا یو موټر کیدای شي د **ذرې** په توګه وګڼل شي، تر هغه چې حرکت یې مشخص وي د خپلې کتلې دمرکز د حرکت په واسطه، او د بدن هر ډول دوراني حرکت یې د پام وړ نه دي.

مستقیم یا خطي کینامتیک (Rectilinear Kinematics): د یوې زرې کینماتیک په هر لحظ کې د زرې په موقعیت، سرعت او تعجیل سره مشخص کیدې شي.

موقعیت (Position) . د ذرې یا بڅرکي خطي لاره یا په مستقیم کرښه د یو محور په کارولو سره تعریف کیدې شي، انځور 12-1 وګورئ. په مستقیم لاره مبداء O یو ثابت ټکی دی،

او له دي ځای څخه موقعیت کوردینات s په هر وخت کي د ذري دموقعیت مشخص کولو لپاره کارول کیږي. د s اندازه د O څخه تر ذري پوري فاصله ده ، معمولا په متر (m) یا فټ (ft) سره اندازه کیږي، او سمت یا جهت د s د الجبری نښی لخوا تعریف کیږي. که څه هم انتخاب په خپل سر دی، دلته به s مثبت وي کله چې ذره په ښي خوا د مبداء موقعیت ولري، او دا به منفي وي که چیرې ذره د O کین لور ته موقعیت ولري. موقعیت په حقیقت کې ویکتوري مقدار دی ځکه چې دا دواړه سمت او اندازه لري. په هرصورت، او دا په الجبریک سکلر s لخوا ښودل کیږی، دا د سخت تور شوی مخ په پرتله s، ځکه چې سمت تل پر کوردینات محور پاتي کیږي .

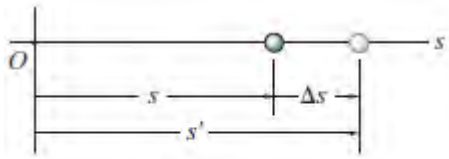


Position

(a)

بې ځایه کیدل (Displacement) . د زري بې ځایه کیدل د خپل موقعیت بدلون په توګه تعریف کیږي. د مثال په توګه، که چیرې زره له یوې نقطې نه بلې نقطې ته حرکت وکړي، انځور 1-12b دا بیځایه کیدنه ده چې ښکته په Δs ښودل شویی.

$$\Delta s = s' - s$$



Displacement

(b)

انځور 1-12

پدې حالت کې Δs مثبت ده ځکه چې د ذري وروستنۍ موقعیت په ښي لور د لومړني موقعیت واقع شویدي، د بیلګې په توګه s` > s . بې ځایه کیدنه هم یو ویکتوري مقدار دي، او دا باید له هغه فاصلې څخه چې ذره یې سفر کوي توپیر شي. په ځانګړې توګه، *سفر شوی واټن* یو *مثبت سکلر* (scalar) دی چې د لارې ټول اوږدوالی څرګندوي کوم چې په هغې باندې ذره سفر کوي.

سرعت (Velocity). که چیرې زره (particle) په اندازه د Ds په تیریدو د وخت Dt کې بیځایه کیدنه ولري، نو بیا اوسط سرعت ددی زرې عبارت دی په

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

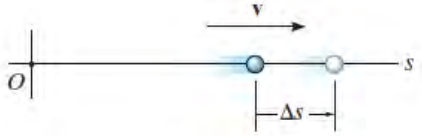
که مور د Δt ارزښتونه کوچني او کوچني کړو، د Δs اندازه کوچنی او کوچنی کیږي. په پایله کې، لحظ يي سرعت (*instantaneous velocity*) یو ویکتور دی او په دی توګه تعریف کیږي په

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t)$$

یا

$$(\pm) \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad (12\text{–}1)$$

څرنګه چې Δt یا dt تل مثبت وي، نښه د سرعت سمت په ځیر د Δs یا ds تعریف کیږي. د مثال په توګه، که ذره ښي خوا ته حرکت کوي، انځور 12-1c، سرعت *مثبت* دی؛ په داسې حال کې چې که دا چپې خوا ته حرکت کوي سرعت *منفي* دی .(دا دلته د دې لخوا ټینګار شوی چې د تیرپواسط د معادله 12-1 په کین اړخ کې لیکل شوی) د سرعت مقدار (magnitude) په نامه د تیزوالی (speed) پیژندل کیږي، او دا عموما د m/s یا ft/s په واحدونو ښودل کیږی. ځینې وختونه، د "اوسط تیزوالي" اصطلاح کارول کیږي. ***اوسط تیزوالی*** (*average speed*) تل یو مثبت سکیلر مقدار دی او هغه تعریف شوی ټوله فاصله ده چې زره ، s_T، تللیی او ویشل شوی په تیر شوي وخت (Δt

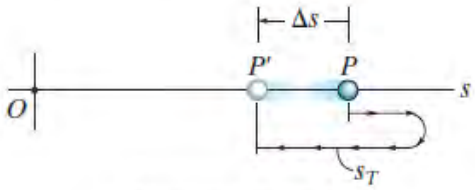


Velocity

(c)

$$(v_{avg})_{sp} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

د مثال په توګه، په انځور 12-1d کې ذری سفر کړي په اوږدوالی دلاری s_T په وخت Δt کې . نو اوسط تیزوالی دی $(u_{avg})_{sp} = s_T/\Delta t$ ، مګر اوسط سرعت دی $u_{avg} = -\Delta s/\Delta t$.



Average velocity and Average speed

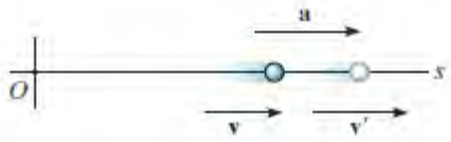
(d)

انځور 12-1 (ادامه)

تعجیل (Acceleration) . که د یوه جسم سرعت په دوه ټکیو کې معلوم وي، نو بیا د ذراتو اوسط تعجیل د وخت په اوږدو کې عبارت دي په

$$a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

د وخت په اوږدو کې د سرعت توپیر Dv ، د بیلګې په توګه $Dv = v`-v$ ، انځور 12-1e .



تأجیل (Acceleration)

(e)

آنی تعجیل په وخت t کې یو ویکتور دي چې په کوچني او کوچني ارزښت د Dt او په ورته کوچني او کوچني ارزښت د Dv کی پیدا کیږی، نو بیا

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta v / \Delta t)$$

او یا

$$(\pm) \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad (12\text{–}2)$$

معادله 12-1 په دی پورتنئ معادله کې ځای پر ځای کوو او لیکلی شو

$$(\pm) \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

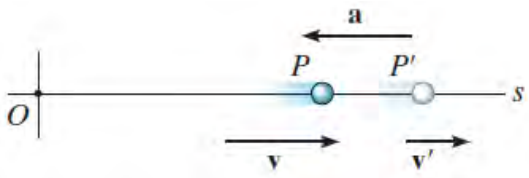
اوسط (average) او آنی (instantaneous) تعجیل دواړه کیدې شي چې مثبت یا منفی وي. په خاصه توګه که د ذرې تعجیل *مخ په کمیدو* وي، یادا چې تیزوالی (speed) په کمیدو وي، دلته داسي ویل کیږي چې د *ذرې تأجیل کمیږي* (decelerating). په دې صورت کې، v' د انځور 12-1f له v لږ دي، او پس دا $\Delta v = v' - v$ *به* منفی وي. په نتیجه کې، a به هم منفی وي او دا په چپ خوا په برعکس د v د جهت عمل کوی. هم دا شان دې ته وګورئ چې که ذره په اصل کې په سکون کې وي، نو دا ممکن ده چې تعجیل به ولري که یو لحظه وروسته سرعت v' شي. واحدونه په اختیاری توګه تعجیل د مقدار بیانولو لپاره m/s^2 یا ft/s^2 استعمالیږي .

په پای کې، یو مهم ډیفرینسیالي (differential) اړیکه د بیځایکیدو، سرعت او تعیل سره په لاس راځی کله چې (dt) ډیفرینسیل د معادلو 12-1 او 12-2 په مینځ کی له پامه وغورځوو، نو موږ لرو:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$$

یا

$$(\pm\rightarrow) \qquad a\,ds = v\,dv \qquad (12\text{–}3)$$



تعجیل

(f)

انځور 12-1 (ادامه)

مونږ اوس دري کینماتیکي مساواتونه پیدا کړي، او باید و پوهیږی چی دا له معادلو 12-1 او 12-2 خپل واکه نه دي.

ثابت تعجیل $a = a_c$ (Constant Acceleration) .

کله چی تعجیل ثابت وي، هره یوه د دریو کینماتیک معادلو $v = ds/dt$, $a_c = dv/dt$ او $a_c\,ds = v\,dv$ کیدي شي چي انتیګریت شي تر څو هغه فورمول چی دوی یو بل ته ارتباط ورکوي په لاس راشي، a_c, s, v او t .

سرعت تابع د وخت (Velocity as a Function of Time).

معادله $a_c = dv/dt$ انتیګریت کړي او فرض کړي چی اصلاً $v = v_0$ کله چی $t = 0$ او مونږ لرو

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a_c\,dt$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad \boxed{v = v_0 + a_c t} \qquad (12\text{–}4)$$

Constant Acceleration

ثابت تعجیل

موقعیت تابع د وخت (Position as a Function of Time).

انتیګرال د $v = ds/dt = v_0 + a_c t$ پلي کړي، فرض کړي چی په پیل کي $s = s_0$ کله چي $t = t_0$ او حاصل یي دا لاندی دي

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$(\pm) \qquad \boxed{s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2 \quad \text{Constant Acceleration}} \qquad (12\text{–}5)$$

ثابت تعجيل

سرعت تابع د موقعيت (Velocity as a Function of Position).

چيرى د وخت t ارزښت له معادلې 12-4 حاصل او بيايې په معادله 12-5 کى ځاى په ځاى کړو، او يا انتيګرال د $v\,dv = a_c\,ds$ جوړ کړو او فرض کړو چې په پيل کى $v = v_0$ په $s = s_0$، مونږ لرو

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} a_c\, ds$$

$$(\pm) \qquad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \quad \text{Constant Acceleration}} \qquad (12\text{–}6)$$

د s_0, v_0 او a_c الجبري نښې، چې په دې معادلو کې کارول شوي، د s محور د مثبت لورې څخه ټاکل کيږي، لکه څنګه چې د هرې معادلې په کين اړخ کې ليکل شوي او د ويکتور لخوا ښودل شوي. دا مهمه ده چې په ياد ولرئ چې دا معادلې يوازې هغه وخت ګټورې دي کله چې تعجيل (اکسيليريشن) ثابت وي او کله چې $t=0$, $s=s_0$ ، $v=v_0$ وي. د ثابت تعجيل حرکت يو عادي مثال هغه وخت پيښيږي کله چې يو جسم آزادانه ځمکې ته لويږي. که د هوا مقاومت له پامه وغورځول شي او د لويدو فاصله لنډه وي، نو د جسم ثابت ښکته تعجيل کله چې دا د ځمکې سره نږدې وي شاوخوا $9.81 m/s^2$ يا $32.2 ft/s^2$. دى.

IMPORTANT POINTS

مهم ټکي

- ډینامیکس د اجسامو څیړنه ده کله چې د چټک حرکت یا تعجیل حالت کې وي.
- کینما تیکس (Kinematics) هندسي اړخونه د حرکت څیړي
- کینټیکس (Kinetics) دحرکت لاملونه یعني هغو قواوی چې د حرکت لامل کیږي څیړي
- خطي کینیماتیک د هغه حرکت چې په مستقیم خط وی اشاره کوي.
- تیزوالی (speed) د سرعت (velocity) مقدار ته اشاره کوي.
- اوسط تیزوالی (average speed) تولہ هغه فاصله ده چې سفر شوې تقسیم په ټول وخت. دا له اوسط سرعت (average velocity) سره توپیر لري، چې آخری بیځایه کیدل تقسیم د وخت دی.
- هغه ذره چې ورو کیږي، سست یا تجیل (decelerating) کیږي.
- یوه ذره کولی شي تعجیل ولري که څه هم صفر سرعت ولري.
- د $ads=v\,dv$ اړیکه له $a=dv/dt$ او $v=ds/dtv$ څخه اخیستل شوې ده، چې د dt له منځه وړلو له لارې.
- نوټ: تیزوالی (speed) سکلر دی. سرعت (velocity) ویکتور دی.



په هغه وخت کې چې پورته راکټ مستقیم حرکت کوي، د دې لوړوالی تابع د وخت د $s=s(t)$ په توګه اندازه کیدی شي. بیا یې سرعت د $v=ds/dt$ په کارولو سره موندلی شو، او تعجیل یې د $a=dv/dt$ له مخې ټاکلی شو.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د کوردینات سیستم (Coordinate System)

. د s ځای یا موقعیت کوردینات سیستم چمتو کړئ اوبیا مبداء له مثبت جهت سره مشخص کړی.

- ځکه چی حرکت په مستقیم کرښه دی ویکتوری اندازی د موقعیت، سرعت او تعجیل په الجبري سکلر سره بنودل کیدای شي . د تحلیل لپاره جهت د s,v او a په الجبری علامه بنودل کیدی شي.
- مثبت جهت د هر یوه د دې عددي سکلر د تیر په واسط د کیناماتیک معادله سره بنودل کیدی شي.

کینماتیک مساوات Kinematic Equations

. که له څلورو متغیرونو (a,v,s,t) څخه د دوو متغیرونو اړیکی معلومی وي د کینماتیک معادلو په واسطه $a = dv/dt$، $v = ds/dt$ یا $a\,ds = v\,dv$ دریم متغیر موندل کیدای شي. دا ځکه چی هر یوه معادله اړیکی لری له دریو نورو سره. *

- هر وخت چی انتیګرال و نیول شي اړین ده چی ارزښتونه د موقعیت او سرعت په هغه لحظ کی معلوم وي تر څو د انیګریشن ثابت ارقام و پیژندل شي.
- یاد ولرئ چې معادلې 4-12 تر 6-12 محدود استعمال لري. دا معادلې یوازې هغه وخت استعمال کیږي چې تعجیل ثابت (constant) وی او ابتدائي شرایط $s = s_0$ او $v = v_0$ کله چې $t = 0$.

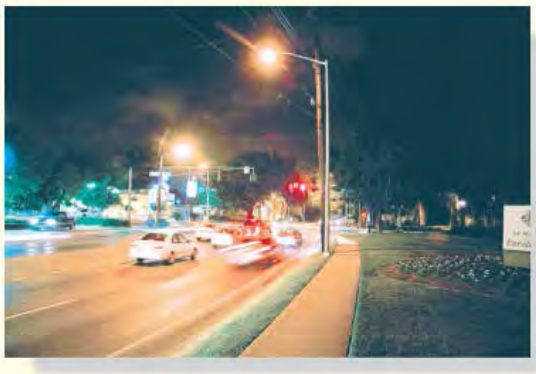
*یو تعداد عادي مشتق او انتیګریشن فورمولو تفصیل او لاربنود په ضمیمه A کی بنودل شوي دي.

مثالونه

مثال 12.1

په انځور 12-2 کی د بنودل شوي موټر سرعت په مستقیمه کربنه د لنډ وخت لپاره بنودل شوي دي په $v = (3t^2 + 2t)/s$ ، دلته t په ثانیه اندازه شوي.

موقعیت او تعجیل مشخص کړي کله چی $t = 3\ s$ او هم $t = 0,\ s = 0$.





انځور 12-2

حل

★

کوردینات سیستم (Coordinate System) . موقعیت د کوردینات له مبداء O تر موټر دي، او مثبت په بني لور بنودل شوي دي.

موقعیت (Position) . ځکه چې $v = f(t)$ د موټر موقعیت له معادلي $v = ds/dt$ څخه موندل کیداي شي ، ځکه دا معادله v, s او t سره تړاولري.

بنودل شوي چی $s = 0$ کله چی $t = 0$ مونږ لرو:

$$(\pm) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

کله چې $t = 3\ s$

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36\ ft \qquad Ans$$

تعجیل (Acceleration) . ځکه چې $v = f(t)$ تعجیل له معادلې $a = dv/dt$ موندل کیږي، ځکه چې دا معادله له v , a او t سره تړاو لري.

$$(\pm\rightarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) = 6t + 2$$

کله چې t = 3 s

$$a = 6(3) + 2 = 20\ ft/s^2 \rightarrow \bigstar \qquad Ans.$$

یادونه: د ثابت تعجیل فورمول دلته د استعمال وړ ندي ځکه دلته تعجیل تابع د وخت ورکړ شوي.

★ همدا نتیجه په ارزولو د انتیګریشن د ثابت عدد د c تر لاسه کیدي شي ، په ځای د انتیګرال نیول په معلوم حدود سره. د بیلګې به توګه انتیګرال د $ds = (3t^2 + 2t)dt$ حاصلوي، $s = t^3 + t^2 + c$ له ورکړل شوی حدود $t = 0,\ s = 0$ بیا $C = 0$ په لاس راځي .

مثال 12.2

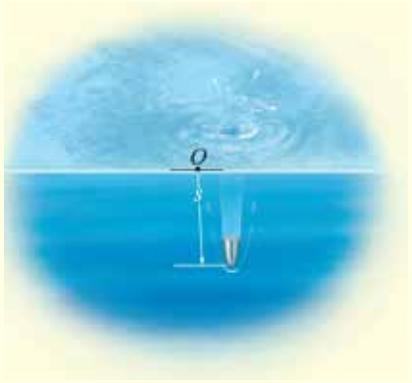
یو کوچنۍ توغندۍ په عمودي ډول بنکته خوا ته په یوه مایع کې په لومړني سرعت 60 متر/ثانیه کې توغول کیږي. د مایع د مقاومت له امله توغندۍ د $a = -(0.4v^3)\ m/s^2$ د سرعت کمښت سره مخ کیږي، چیرته چې v په متر/ثانیه کې دی. د توغندي سرعت او موقعیت د توغولو څخه 4 ثانیې وروسته وټاکئ.

حل

کوردینات سیستم (Coordinate System) . له هغه ځایه چې حرکت بنکته خوا ته دی، د موقعیت کوردینات مثبت دي په لاندې خوا سره چې په O کې موقعیت لري، انځور 12-3

سرعت (Velocity) . دلته $a = f(v)$ دی او نو موږ باید د وخت تابع په کارولو د معادلې $a = dv/dt$ سرعت معلوم کړو . دا ځکه چې په دی معادله کې a،v ، او t سره اړیکه لري.

(ولې $v = v_0 + at$ استعمال نه کړو؟) . متغیرونه بېلولو او انټیګریشن کولو سره، کله چې $v_0 =$ 60 متر/ثانیه او $t = 0$ وي، دا لاندئ حاصل کیږي*



$$(+\downarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\,\text{m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\}\text{m/s}$$

انځور 12-3

دلته مثبت جذر کاریدل کیږی ځکه توغوندی په کښته خوا په حرکت کی دي. په $t = 4$ s کې

$$v = 0.559\,\text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مو قعیت: د $v= f(t)$ په پوهیدو سره مورِ کولاي شو توغوندی موقعیت له $v = ds/dt$ مشخص کړو.

څرنګه چې په دی معادله کی s,v او t سره اړیکه لري . له ابتدايي حالت نه چې په $s=0$ کی $t=0$ نو مورِ لرو:

$$(+\downarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\}\text{m}$$

کله چې t= 4s نو:

$$s = 4.43\,\text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

* کیدای شي د انټیګرال ثابت عدد په پیداکولو سره هم دغه نتیجه په لاس راشي پرته له دی چې د انټیګرال حدود و کارول شي.

مثال 12.3

د يو ازموينې په ترڅ کې په شکل 12-4 کې ښودل شوې چې راکټ په 75 m/s سرعت سره پورته سفر کوي، او کله چې دا له ځمکې څخه 40 متره لوړ وي، د دې انجن ناکامیږي، یا دریږي. د راکټ لخوا رسیدل شوې اعظمي ارتفاع s_B او د ځمکې له لویدلو څخه مخکې د دې سرعت وټاکئ. د حرکت په حالت کې راکټ د جاذبې له امله په 9.81 m/s² ثابت ښکته تیزوالی (deceleration) تطبیق کیږي. د هوا مقاومت اغیزه له پامه وغورځوئ.



انځور 12-3

حل

کوردینات سیستم (Coordinate System). له هغه ځایه چې حرکت پورته خوا ته دی، د موقعیت کوردینات مثبت دي په پورته خوا سره او مبداء O د کوردینات s د ځمکې په سطحه موقعیت لري، انځور 12-3 .

اعظمي لوړوالي (Maximum Height) . څنګه چې راکټ پورته سفر کوي، $v_A = +75$ m/s کله چې $t = 0$ وي. په اعظمي ارتفاع $s = s_B$ کې سرعت $v_B = 0$ دی. د ټول حرکت لپاره، تعجیل $a_c = -9.81$ m/s² دی (منفي ځکه چې دا په مخالف جهت د مثبت سرعت یا مثبت بیځایه کیدنې عمل کوي). څنګه چې a_c ثابت دی، د راکټ موقعیت ممکن د دې سرعت سره په مسیر کې په دوو نقطو Aاو B کې په ټراو وي، د معادله 12–6 په کا رولو سره، یعنی

$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$0 = (75\ \text{m/s})^2 + (-9.81\ \text{m/s}^2)(s_B - 40\ \text{m})$$
$$s_B = 327\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

سرعت (Velocity) . د راکټ سرعت موندلو لپاره، مخ کې له دی چې په ځمکه ولګیږي موږ کولای شو چې معادله 12-6 تر منځ د دوو نقطو B او C تطبیق کړو، انځور 12-4 وګوري

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$
$$= 0 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 327\ \text{m})$$
$$v_C = -80.1\ \text{m/s} = 80.1\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

منفی جذر انتخاب شوي ځکه چې راکټ ښکته لورته حرکت کوي. په ورته ډول معادله 12-6 په منځ د دو نقطو A او C کې تطبیق کیدی شي، یعنې

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$
$$= (75\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(0 - 40\ \text{m})$$
$$v_C = -80.1\ \text{m/s} = 80.1\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: باید وپوهیږو چې راکټ له *A* څخه *B* پورې په $9.81\ \text{m/s}^2$ کموالي د سرعت (deceleration) سره مخ دی، او بیا له *B* څخه *C* سره ګړندی (accelerated) کیږي. سر بیره پر دې، حتی که راکټ په *B* کې لنډمهاله تم شي ($v_B=0$) بیا هم په *B* کې تعجیل 9.81m/s^2 ښکته دی!

مثال 12.4

یوه فلزی ذره د مقناطیسی ساحی تر تاثیر لاندې له تختی *A* څخه تختی *B* ته ښکته سفر کوي، انځور 12-5. که ذره له سکون حالت څخه په منځپانګې د نقطی *C* کی آزاده شی $s = 100\ \text{mm}$ او تعجیل $a= (4s)\ \text{m/s}^2$ دی، دلته *s* په مېټرونو اندازه کیږي. د ذرې سرعت وښیي کله چې تختې B ته ورسږي، $s =200\ \text{mm}$، اوهم موده چې له *C* څخه *B* ته سفر کوي معلومه کړي.

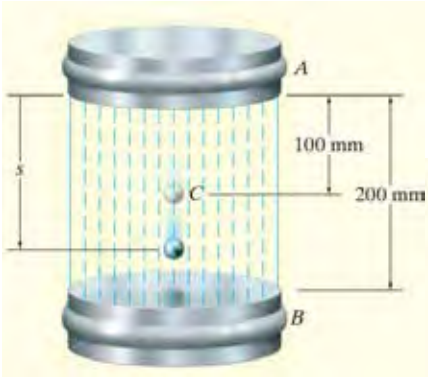
حل

کوردینات سیستم (Coordinate System). څنګه چې په انځور 12-5 کی ښودل شوي ،*s* مثبت دی ښکته لورته او له تختې *A* اندازه شوي.

سرعت (Velocity) .

ځکه چې $a = f(s)$ دی، سرعت تابع د موقعیت کیدی شي چې له $v\,dv = a\,ds$ و موندل شي. که سرعت $v = 0$ په $s =$ 0.1 مېتر کی نو مونږ لرو:

$$v\,dv = a\,ds$$
$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1\,\text{m}}^{s} 4s\,ds$$
$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1\,\text{m}}^{s}$$
$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\ \text{m/s} \qquad (1)$$



انځور 12-5

په $s =200\ \text{mm} = 0.2\text{m}$

$$v_B = 0.346\ \text{m/s} = 346\ \text{mm/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

وخت (Time) .

د ذرې وخت کله چې له *C* تر *B* سفر کړي له معادلې *v = ds/dt* او معادلې 1 په لاس راځي ، کله چې *s* = 0.1 m او t =0 وي .

له ضمیمې A

$$(+\downarrow) \qquad ds = v\,dt$$
$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}dt$$
$$\int_{0.1}^{s} \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$
$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^{s} = 2t\Big|_0^t$$
$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.303 = 2t$$

په *s*= 0.2m کې:

$$t = \frac{\ln\left(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2\right) + 2.303}{2} = 0.658\ \text{s} \qquad Ans.$$

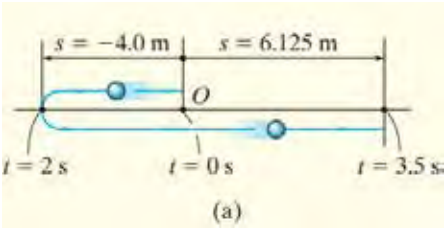
یادونه : د ثابت تعجیل فورمول د استعمال وړ ندي ځکه تعجیل د موقعیت سره تغیر مومي ، د بیلګې په توګه a =4s .

مثال 12.5

یو ذره په یوه افقي مسیر په سرعت د $v = (3t^2 - 6t)$ m/s سره په حرکت کې ده، دلته *t* په ثانیې اندازه کیږي. که په ابتدائي حالت کې اصلي ځای یې په مبداء O کې وي، هغه مسافه چې په 3.5 ثانیو کې یې سفر کړي مشخص کړي. او هم د ذرې اوسط سرعت (velocity) او اوسط رفتار (speed) په دې وخت کې وټاکئ.

کوردینات سیستم (Coordinate System). دلته مثبت حرکت په بنې لور دي، او له مبداء O، اندازه کیږي. انځور 12-6a و ګورئ.

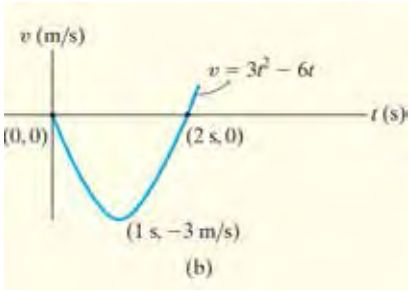
وهلیې شوی فاصله. څرنګه چې *v = f(t)* ده، په دې حالت کې موقعیت تابع د وخت په انټیګرال نیولو د معادلې *v =ds/dt* څخه په لاس راځي کله چې *t* = 0، s=0 .



انځور 12-6a

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad ds = v\,dt$$
$$= (3t^2 - 6t)\,dt$$
$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 - 6t)\,dt$$
$$s = (t^3 - 3t^2)\ \text{m} \qquad (1)$$

د 3.5 ثانیو فاصلې ترلاسه کولو لپاره، دا ضروري ده چې د حرکت مسیر وخیړئ. که مونږ د سرعت فعالیت ګراف کړو، انځور 12-6b، دا ښیي چې د $0 \le t \le 2$ ثانیو لپاره سرعت منفي دی، چې دا معنی لري چې ذره کین لور ته حرکت کوي، او د $t > 2$ ثانیو لپاره سرعت مثبت دی، او په دې توګه ذره ښیې خوا ته حرکت کوي. همدارنګه، یادونه وکړئ چې $v = 0$ کله چې $t =$ 2 ثانیې وي. د ذرې موقعیت کله چې $t = 0$، $t = 2$ ثانیې، او $t = 3.5$ ثانیې وي، د معادله 1 څخه ترلاسه کېدی شي. چې دا لاندې په لاس راځي



انځور 12-6 b

$$s|_{t=0} = 0 \quad s|_{t=2\,\text{s}} = -4.0\ \text{m} \quad s|_{t=3.5\,\text{s}} = 6.125\ \text{m}$$

د فاصلې مسیر په انځور 12-6a کې ښودل شوي. هغه فاصله چې په 3.5 ثانیو کې وهلې شې عبارت ده په

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125\ \text{m} = 14.1\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

سرعت (Velocity) . بیځایه کیدنه په وخت $t = 0$ تر $t = 3.5$ s عبارت ده په:

$$\Delta s = s|_{t=3.5\,\text{s}} - s|_{t=0} = 6.125\ \text{m} - 0 = 6.125\ \text{m}$$

او اوسط سرعت عبارت دي په

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 1.75\ \text{m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

اوسط تیزوالی (speed) په ټول ترلاسه شوي واټن s_T سره تعریف کیږي. او دا مثبت سکلر عبارت دی په

$$(v_{\text{avg}})_{\text{sp}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 4.04\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: په دی پوښتنه کی تعجیل $a = dv/dt = (6t\text{-}6)\ \text{m/s}^2$ دي چی ثابت نه دي.

بنسټیز پوښتنې

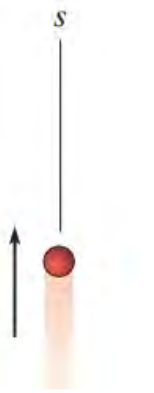
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 12.1 په پیل کې، موټر په مستقیمه لاره کې په 35 m/s سرعت سره سفر کوي. که بریکونه وکارول شي او د موټر سرعت په 15 ثانیو کې 10 m/s ته راکم شي، د موټر تعجیل (deceleration) وټاکئ .



پوښتنه ب 12.1

ب 12.2 یو توپ په عمودي ډول په 15 m/s تیزوالی (speed) سره پورته غورځول کیږي. کله چې دا خپل اصلي موقعیت ته راستون شي د الوتنې وخت وټاکئ .



ب 2.2

ب 12.3 یو ذره په مستقیمه کرښه کې د $v = (4t - 3t^2)$ m/s سرعت سره حرکت کوي، چیرته چې t په ثانیو کې دی. د ذرې موقعیت وټاکئ کله چې t = 4 ثانیې وي. $s = 0$ کله $t = 0$ وي

ب 12.4 یو ذره په مستقیمه کرښه کې د $v = (0.5t^3 - 8t)$ m/s سرعت سره حرکت کوي، چیرته چې t په ثانیو کې دی. د ذرې تعجیل وټاکئ کله چې $t = 2$ ثانیې وي

ب 12.5 د ذرې موقعیت په $s = (2t^2 - 8t + 6)$ m تعریف شوي دي، چیرته چې t په ثانیو کې بدلیږي شوي ده. هغه وخت وټاکئ کله چې د ذرې سرعت صفر وي، اوهم ټوله فاصله وټاکئ چې د ذرې لخوا په $t = 3$ ثانیو کې ترلاسه شوی.



پوښتنه ب 12.5

ب 12.6 . یو ی ذری په مستقیمه کرښه په تعجیل $a = (10 - 0.2s)\ m/s^2$ کې حرکت کړي، چیرته چې s په مترونو سره اندازه شوی دی. د ذرې سرعت وټاکئ کله چې $s = 10$ مترہ وي او $v = 5\ m/s$ که $s = 0$ په وي.



پوښتنه ب 12.6

ب 12.7 . یوه ذره په مستقیمه کرښه کې حرکت کوي، داسې چې د هغې تعجیل $a = (4t^2 - 2)\ m/s^2$ دی، چیرته چې t په ثانیو کې دی. کله چې $t = 0$ وي، ذره له مبداء څخه 2 متره کینې لورې ته موقعیت لري، او کله چې $t = 2$ ثانیې وي، دا له مبداء څخه 20 متره کینې لورې ته موقعیت لري. د ذرې موقعیت وټاکئ کله چې $t = 4$ ثانیې وي .

ب 12.8 . یوه ذره په مستقیمه کرښه کې د $v = (20 - 0.05s^2)\ m/s$ سرعت سره حرکت کوي، چیرته چې s په مترونو کې دی. د ذرې تعجیل وټاکئ کله چې $s = 15$ متره وي.

پوښتنې

PROBLEMS

پ 12.1 یوه ذره په مستقیمه کرښه له سکون حالت څخه په تعجیل $a = (2t - 6)\ m/s^2$ حرکت پیل کوي ، چیرته چې t په ثانیو کې ده. د ذرې سرعت کله چې $t = 6$ ثانیې وي څه دی، او د دې موقعیت کله چې $t = 11$ ثانیې وي وښیی.

پ 12.2. یو ذره ابتدایي سرعت $v_0 = 12\ ft/s$ بنې لور ته لري په $s_0 = 0$ کې. د دې موقعیت وټاکئ کله چې $t = 10$ ثانیې وي، که تعجیل یې $a = 2ft/s^2$ چپ لور ته وي

پ 12.3. یو ذره په مستقیمه کرښه کې د $v = (12-3t^2)\ m/s$ سرعت سره حرکت کوي، چیرته چې t په ثانیو کې ده. کله چې $t = 1\ s$ ثانیه وي، ذره له مبداء څخه 10 متره چپ لور ته موقعیت لري. کله چې $t=4s$ ثانیې وي تعجیل وټاکئ ،او بیځایه کیدنه له $t=0$ څخه تر $t=10s$ ثانیو پورې مشخص کړي، او وټاکي چې په دې وخت کې ذرې څومره واټن سفر کوي.

★ پ 12.4. یو ذره په مستقیمه کرښه کې د ثابت تعجیل سره حرکت کوي. کله چې $s = 4\ ft$ وي، $v = 3\ ft/s$ او کله چې $s = 10\ ft$ وي $v = 8\ ft/s$ دي. سرعت تابع د موقعیت سره معلوم کړی.

پ 12.5. د یو ذرې د حرکت سرعت چې په مستقیمه کرښه سفر کوي د $v=(6t-3t^2)\ m/s$ په واسطه ورکړل شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. که $s=0$ کله چې $t=0$ وي، د ذرې تجیل

(deceleration) او موقعیت ((position په $t=3$ s ثانیو کې تعیین کړ ئ. څومره لاره ذري په 3 ثانیو کې طی کړي ده، او د هغې منځنی تیزوالی (speed) څه دی؟

پ 12.6. یوه ذره چې په مستقیمه کرښه کې حرکت کوي د تعجیل د کمښدو تابع ده $a = (-2v^3)$ m/s²، چیرې چې v په m/s کې دی. که دا په $t = 0$ کې سرعت $v = 8$ m/s او موقعیت $s = 10$ m ولري، د هغې سرعت او موقعیت په $t = 4$ s کې وټاکئ.

پ 12.7. یو ذره په یوه مستقیمه کرښه کې حرکت کوي داسې چې د هغې موقعیت د $s = (2t^3 + 3t^2 - 12t - 10)$ m په توګه تعریف شوی. کله چې $t = 3$ s وي، د ذري سرعت، اوسط سرعت، او اوسط تېزوالی (speed) معلوم کړئ.

★ پ 12.8. یوه ذره په مستقیمه کرښه کې داسې حرکت کوي چې موقعیت یې د $s = (10t^2$ mm (20 +لخوا تعریف شوی، چیرې چې t په ثانیه اندازه کیږي . معلوم کړئ (a) د ذري بې ځایه کیدل د وخت وقفې په جریان کې له $t = 1$ s ځخه تر $t = 5$ s ، (b)د دې وخت وقفې په جریان کې د ذري اوسط سرعت، او (c) تعجیل کله چې $t = 1$ s .

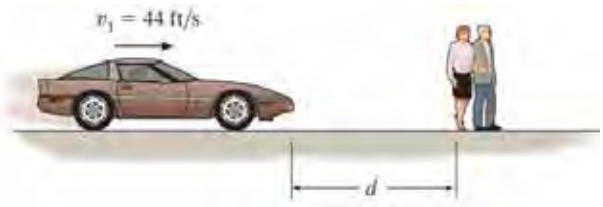
پ 12.9. یوه ذره په مستقیمه لاره حرکت کوي تعجیل یې ښودل شوي په د $a = (5/s)$ m/s² ، چیرته چې s په مترو اندازه کیږی. د ذري سرعت معلوم کړئ کله چې $s = 2$ m ، او دا له سکون حالت څخه کله چې $s = 1$ m حرکت شروع کوي.

پ 12.10. یوه ذره د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې حرکت کوي او تعجیل یې تعریف شوي په $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s² ، چیرته چې s په مترکې دی . د ذري سرعت معلوم کړئ کله چې $s = 2$ m ، حرکت د سکون څخه پیل کیږي کله چې $s = 1$ m . له عددي طریقې څخه کار واخلئ د انټیګرال د ارزونې دپاره.

★ پ 12.11. یوه ذره د مستقیمې کرښې په اوږدو کې سفر کړي، او دا په 4 ثانیو کې له لومړني موقعیت $s_A = -8$ m څخه حرکت کوي موقعیت $s_B = +3$m مترته. بیا په نورو 5 ثانیو کې دا له s_B څخه حرکت کوي $s_C = -6$ متر ته. په دی 9 ثانیو جریان کی د ذري اوسط سرعت معلوم کړئ او هم په دی جریان کی د ذری اوسط تیزوالی وټاکي.

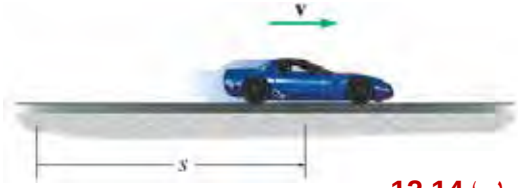
پ 12.12. یوه ذره د مایع دننه په مستقیم کرښه سفر کړي اود تیزوالې (speed) یې تابع د موقعیت اندازه کیږي په $v = (100 - s)$ mm/s، چیرته چې s په ملی متر کې دی. معلوم کړي (a) د ذري د تعجیل کموالی کله چې دا په A نقطه کې موقعیت لري، اوmm $s_A = 75$ دي، (b)هغه فاصله چې ذره یې سفر کوي مخکې له دې چې ودریږي، او (c) د ذري د دریدلو لپاره اړین وخت .

پ 12.13. ازمایښتونه ښیي چې یو ډرایور شاوخوا 0.75 ثانیې وخت نیسي چې هغه وکولی شي د ټکر مخنیوي لپاره وضعیت ته عکس العمل وښیي. دا د هغه موټر چلوونکي لپاره چې په خپل سیستم کې 0.1٪ الکول لري شاوخوا 3s وخت نیسي ترڅو همداسې وکړئ. که داسې موټر چلوونکي په مستقیمه لاره سفر کوي په 30 mph (44 ft>s) کې او د دوی موټر کولی شي په 2 ft>s^2 کې تعجیل کم (decelerate) کړي، د هر یوه چلونکي لپاره لنډه د دریدو فاصله d وټاکئ هغه شیبه کې چې دوی پیاده شخص وویني . *اخلاقی یادونه*: که تاسو اړتیا لرئ چې الکول وڅښئ، مهرباني وکړئ موټر مه چلوئ !



پ 12.13

س 12.14. د سپورت موټر د مستقیم سړک په اوږدو سفر کوي ، او سرعت یې $v = 3\sqrt{100 - s}$ m/s دي، چیرته چې s په مترسره اندازه کیږي. د موټر د رسیدو وخت په فاصله $s = 60$ m معلوم کړي . او څومره وخت نیسي چې دا به ودریږي.



پ 12.14

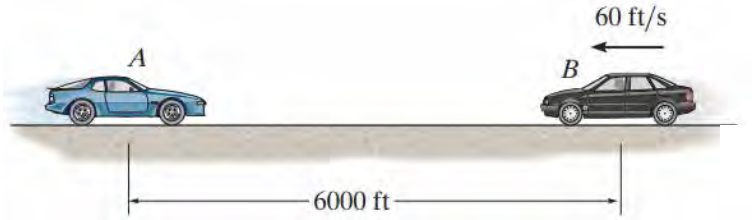
پ 12.15. یو توپ د لفټ له ښکته برخې څخه خوشې کیږي. لفت پورته خوا ته په 6 ft/s سرعت سفر کوي. که توپ په 3 ثانیو کې د لفټ شافټ لاندې ځمکې ته ورسږي، مشخص کړئ د لفت لوړوالي د شافت له ټیټې سطحې څخه په هغه لحظ کې چې توپ خوشې کیږي. همدارنګه، د توپ سرعت وموميئ کله چې توپ د شافټ په لاندې سطحه لګیږي .

★ پ 12.16. یوه ذره د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې په لومړنۍ سرعت 6 m/s حرکت کوي کله چې دا د تعجیل د کمیدو $a = (-1.5v^{1.2})$ m/s^2 سره مخ کیږي ، چیرته چې v په m/sکې محاسبه کیږي. معلومه کړئ چې څومره لرې، مخکې له دې چې ودریږي ، سفر کوي. او دا څومره وخت نیسي؟

پ 12.17. موټر B د موټر A څخه مخکې په فاصله d سفر کې دي. دواړه موټرونه په 60 ft/s کې سفر کړي. کله چې موټر B ناڅاپه بریکونه ونیسي، د هغه موټر د 12 ft/s^2 تعجیل (decelerate) لامل کیږي. د موټر A د چلوونکي عکس العمل 0.75 s وخت نیسي (دا د موټر

چلوونکو لپاره د عادي عکس العمل وخت دی). کله چې هغه خپل بریکونه ونیسي، د هغه 15 ft/s^2 تعجیل (decelerate) دی. لږترلږه د موټرو تر مینځ فاصله d د ټکر مخنیوي لپاره مشخص کړئ .

پ 12.18. موټر A له ځایه د صفر وخت $t=0$ په سفر پیل کوي او په مستقیم سړک کې په ثابت تعجیل 6 ft/s^2 سره حرکت کوي تر څو چې 80 ft/s تیزوالي (speed) ته ورسیږي. بیا وروسته دا تیزوالي ساتي. همدارنګه، کله چې وخت $t = 0$ وی، موټر B چې د سړک په 6000 فوټه لیرې ځای کې موقعیت لري، په ثابت 60 ft/s د موټر A په لور روان دی. معلومه کړئ چې موټر A څومره فاصله طي کړي ده کله چې دوی له یو بل تیریږي.



پ 12.18

پ 12.19. یوه ذرّه په مستقیمه لاره کې په تعجیل د $a=(kt^3+4)\ ft/s^2$ سره حرکت کوي، چیرې چې t په ثانیو کې دی. ثابت عدد k معلوم کړئ، په داسې حال کې چې $v=12\ ft/s$ دی کله چې $t=1\ s$ وي، او $v=-2\ ft/s$ دی کله چې $t = 2\ s$ وي.

پ *12.20 . د یوې ذرې سرعت چې په مستقیمه کرښه کې سفر کړي $v = (3t^3 - 6t)\ ft/s$ دی، چیرې چې t د تیریدو وخت په ثانیو کې دی. که $s= 4ft$ وي کله چې $t = 0$ وي، د ذرې ځای معلوم کړئ کله چې $t =4\ s$ وي. په دې وخت موده کې د $t = 0$ تر $t = 4s$ پورې ټول سفر شوی فاصله څومره ده؟ همدارنګه، کله چې $t= 2\ s$ وي تعجیل څومره دی؟

پ 12.21. یو باروړونکی ګاډی په $v = 60(1-e^{-t})ft/s$ سره حرکت کوي، چیرې چې t د تیریدو وخت په ثانیو کې دی. په درې ثانیو کې سفر شوې فاصله معلومه کړئ، او په دې وخت کې تعجیل څه دی.



پ 12.21

پ 12.22 د کښتۍ تعجیل تعریف شوي دي په $a = (1.5v^{1/2})\ m/s$. تیزوالي یې معلوم کړي کله چې $t = 4\ s$ په داسې حال کې چې تیزوالي 3m/s وي په $t = 0$ کې.



پ 12.22

پ 12.23 یوه زره په یوه مستقیمه کرښه باندې حرکت کوي چې تعجیل يې تعریف شوي په $a = (-2v)\ m/s^2$، چیرې چې v په ثانیه په میترونو کې وي. که $v = 20\ m/s$ وي کله چې $s = 0$ او $t = 0$ وي، د ذرې موقعیت، سرعت، او تعجیل تابع د وخت معلوم کړئ.

★ پ 12.24 . یوه زره عمودي پورته خوا ته د یو ابتدایي سرعت v_0 سره توغول کیږي، او دا د تعجیل $a = -(g + kv^2)$ سره مخ کیږي، چیرې چې g د جاذبې تعجیل دې، k یو ثابت عدد دی، او v د ذرې سرعت دی. د ذرې رسیدلي اعظمی ارتفاع معلومه کړئ.

پ 12.25 . که چیرې د هوا د مقاومت اغېزې په پام کې ونیول شي، یوه په آزاده توګه غورځېدونکي جسم داسې یو تعجیل لري چې د معادلې $a = 9.81[1 - v^2(10^{-4})]\ m/s^2$، له مخې تعریف شوې دي، چیرې چې v په m/s کې دی او مثبت لوری ښکته دی. که جسم له خورا *لوړ لوړوالي* څخه له سکون حالت څخه خوشې شي، معلومه کړئ (a) سرعت کله چې t = 5 s وي، او (b) د جسم نهایی یا اعظمي ترلاسه کېدونکی سرعت کله چې t لایتناهی ته رسیږی (t->∞).

پ 12.26یوه توپ له یوې 10-مترە لوړې ودانۍ څخه په 5 m/s سرعت سره پورته غورځول کیږي. یو ثانیه وروسته بل توپ له ځمکې څخه په 10 m/s سرعت سره پورته غورځول کیږي. معلومه کړئ چې دا دوه توپونه د ځمکې څخه په کوم لوړوالي کې سره تېریږي.

پ 12.27 . کله چې یوه ذره د په هوا کی غورځول کیږي، د هغې ابتدایي تعجیل $a = g$ کمیږي تر څو چې صفر شي، او له هغې وروسته دا په یوه ثابت یا نهایی سرعت v_f سره لویږي. که دا تغیرد تعجیل د معادلې په توګه څرګندېدای شي $a = (g/v_f^2)(v_f^2 - v^2)$، معلومه کړئ چې څومره وخت ته اړتیا ده تر څو چې سرعت $v = v_f/2$ شي. په ابتدا کې ذره له آرام حالته څخه غورځي.

پ 12.28 . یو د ریل ګاډي په ابتدا کې په یوه مستقیمه کرښه باندې په 90 m/s تیزوالي سره روان دی. د 6 ثانیو لپاره دا د $0.5\ m/s^2$ د ثابت تعجیل سره مخ کیږي، او بیا د راتلونکو 5 ثانیو لپاره دا د ثابت تعجیل a_c سره مخ کیږي. a_c معلوم کړئ تر څو چې د ریل ګاډي په 11 ثانیو وخت کې ودرېږي.

پ 12.29 . دوه موټرې A او B له آرام حالت څخه د تم ځای څخه حرکت پیل کوي. موټر A د ثابت تعجیل $a_A = 8\ m/s^2$ سره مخ دی، پداسې حال کې چې موټر B د تعجیل $a_B = (2t^{3/2})\ m/s^2$ سره مخ دی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. هغه فاصله د موټرو په منځ کی معلومه کړئ کله چې د موټر A سرعت 120 km/h ته ورسیږي.

پ 12.30 یو کره په یوه شي کی په ښکته لورېه 27 m/s ابتدایي تیزوالي سره توغول کیږي. که دا د $a = (-6t)\ m/s^2$ تعجیل سره مخ شي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، هغه فاصله مخکې له دې چې ودرېږي معلومه کړئ .

پ 12.31 . یوه ذره په یوې مستقیمې کرښې باندې حرکت کړي او د هغې موقعیت په $s = (4t - t^2)$ ft سره ورکړل شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. له د وخت t =0 څخه تر t= 5 s پورې تې شوي فاصله، اوسط سرعت، او د دې وخت په موده کې د ذرې اوسط تیزوالي معلوم کړئ.

پ12.32 . توپ A د یوې 30 متره لوړې ودانۍ څخه په ابتدايي سرعت د 5 m/s سره عمودي پورته غورځول کیږي. په همدې وخت کې بل توپ B له ځمکې څخه په ابتدايي سرعت د 20 m/s سره عمودي پورته غورځول کیږي. معلوم کړئ چې توپونه د ځمکې څخه په کوم لوړوالي او په کوم وخت کې د یو بل نه تېریږي

پ 12.33 . کله چې یو جسم د ځمکې له سطحې څخه ډیرې لوړې ارتفاع ته وتوغول شي، د جاذبې د تعجیل تغیر د ارتفاع y په نسبت بدلیږي. د هوا مقاومت له پامه غورځولو سره، دا تعجیل له معادلې $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$، څخه معلومیږي چیرې چې g_0 د بحر سطحې په کچه د ثابتې جاذبې تعجیل ده، R د ځمکې شعاع دی، او مثبت لوری پورته اندازه کیږي. که $g_0 =$ 9.81 m/s² او $R = 6356$ km وي، د توغول کولو لپاره لږ تر لږه ابتدايي سرعت (د تېښتې سرعت) معلوم کړئ کوم چې باید عمودي له ځمکې څخه وتوغول شي تر څو دا بېرته ځمکې ته ونه غورځي.

کمک: دا اړتیا لري چې $v = 0$ وي کله چې لایتناهی ته رسی (y -> ∞).

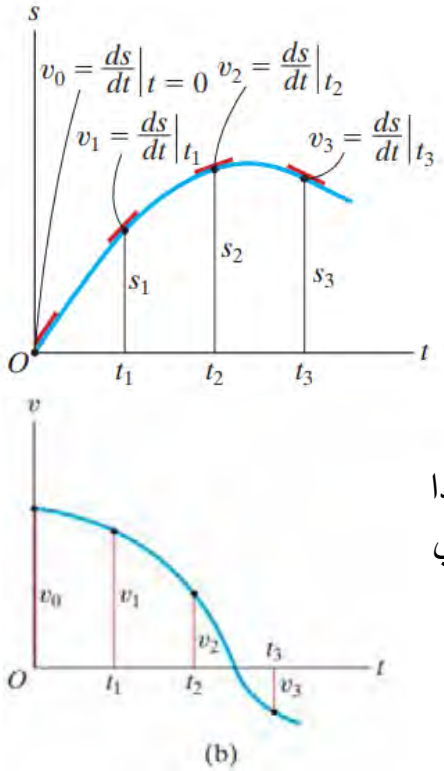
پ 12.34 . د جاذبې تعجیل a بدلېدو ته په پام سره (لکه په پوښتنه 12.33 کې) د ارتفاع y په نسبت ، یوه معادله داسې جوړه کړي چې د یوه په آزاده توګه غورځېدونکې ذرې سرعت د هغې د ارتفاع سره اړیکه ولري. فرض کړئ چې ذره له آرام حالت څخه د y_0 ارتفاع څخه د ځمکې له سطحې څخه غورځول شوې ده. که یوه ذره له $y_0 = 500$ km ارتفاع څخه له آرام حالت څخه غورځول شوې وي، په کوم سرعت سره به دا په ځمکه ولګیږي؟ د عددي معلوماتو څخه چې په پوښتنه 12.33کې ورکړل شوي کار واخلئ .

12.3 مستقیم کینماتیکس: نامنظم حرکت

(RECTILINEAR KINEMATICS: MOTION ERRATIC)

کله چې یوه ذره نامنظم یا بدلیدونکی حرکت ولري، نو د هغې موقعیت، سرعت، او تعجیل یې په ټول مسیر کې د یوه واحد ، مسلسل ریاضي تابع لخوا نه شي ښودل کیدای. پر ځای یې، د حرکت په مختلفو وقفوکې د حرکت معلومولو لپاره یوه سلسله توابعو ته اړتیا لري تر څو

حرکت يي تعريف کړي. د دې دليل لپاره، دا مناسب دی چې حرکت په يوه ګراف کې وښودل شي. که دا ګراف د کوم دوه سره اړيکه ولري، نو دا s ,v, a, t متغيرونو د نورو دوو متغيرونو ترمنځ د ګراف جوړولو لپاره کارول کيدی شي ځکه چې متغيرونه د ديفرينشلي اړيکو له a ds = v dv ,a = dv/dt يا v = ds/dt مخې اړيکه لري. څو مختلف حالتونه ممکن دي.



انځور 12-7

د s–t، v–t، او a–t ګرافونه. د s–t ګراف څخه د v–t ګراف جوړولو لپاره، لکه څنګه چې په انځور 12-7a کې ښودل شوي، بايد د $v = ds/dt$ معادله وکارول شي، ځکه چې دا له متغيرونو s او t له v سره اړيکه لري. دا معادله داسې بيانوي چې

$$\frac{ds}{dt} = v$$

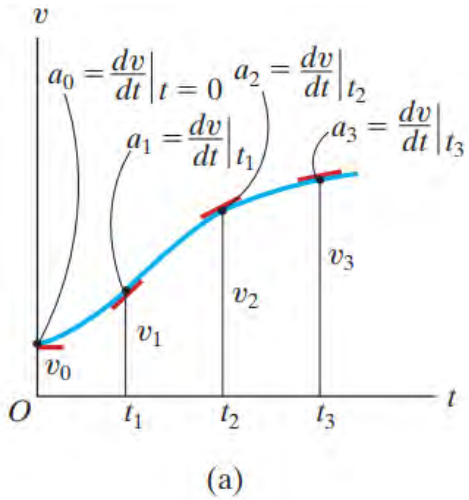
slope of s–t graph = velocity

د مثال په توګه، په s–t ګراف کې د ميلان اندازه کولو لپاره کله چې $t = t_1$ سرعت v_1 دی، انځور 12-7a . د v-t ګراف هم کيدی شي د پلاټ په واسطه ددې او نور ارزښتونولپاره په هرلحظه د وخت کې جوړ شي ، انځور 12-7b وګورئ.

د a-t ګراف د v - t ګراف څخه په ورته طريقه جوړ يدی شي، ځکه

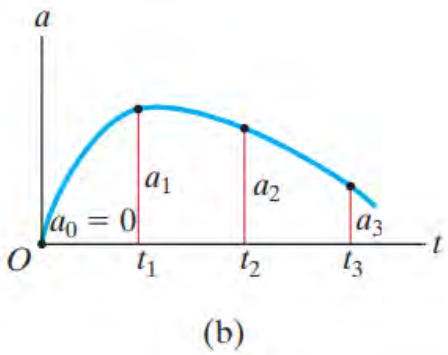
$$\frac{dv}{dt} = a$$

slope of v–t graph = acceleration



(a)

د بيلابيلو اندازو مثالونه په شکل 12-8a کې ښودل شوي او په انځور 12-8b کې ترسيم شوي دي.



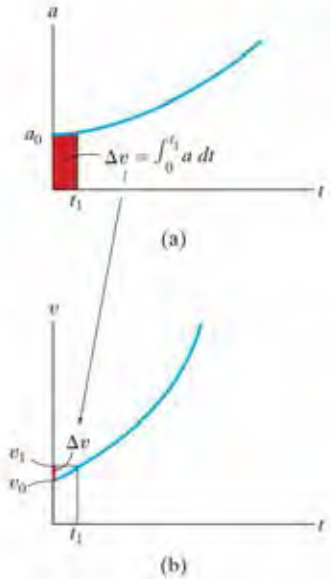
انځور 12-8

که د حرکت د هرې فاصلې لپاره د *s-t* منحنی په یوه ریاضي تابع *s = s(t)*، سره څرګند شي نو بیا معادله د *v-t* او *a-t* منحنی مساوات د همدې فاصلې لپاره د دې تابع د وخت پر وړاندې د پرله پسې مشتقاتو څخه ترلاسه کیدی شي، ځکه چې *v =ds/dt* او *a=ds/dt*. د دیفرینسیال کولو له مخې یو پولینومیال د درجه *n* څخه تر هغه درجه *n-1* ته راکمیږي، نو که چیرې *s-t* منحنی پارابولیک (دوهم درجه منحنی) وي، *v-t* منحنی به یوه مایل کرښه (لومړی درجه منحنی) وي، او *a-t* منحنی به یو ثابت یا افقي کرښه (صفر درجه منحنی) وي.

که د *a–t* منحنی ورکړل شوې وي، لکه په شکل 12-9a کې، نو *v–t* منحنی د *a = dv/dt* په کارولو سره جوړېدای شي، چې داسې لیکل شوې دی

$$\Delta v = \int a\,dt$$

change in velocity = area under *a–t* graph



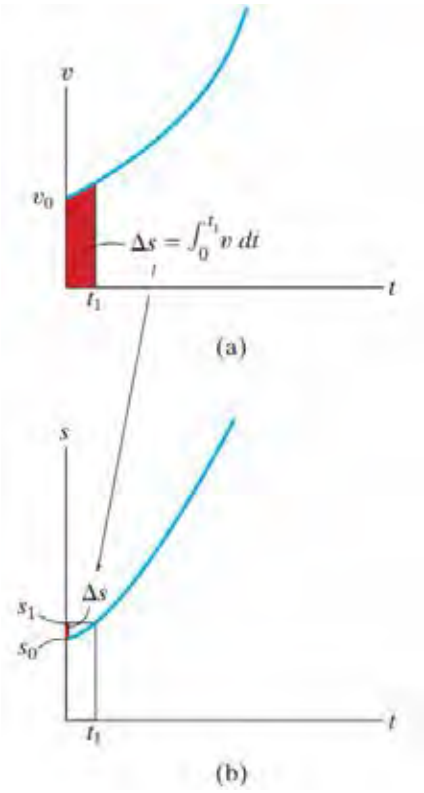
انځور 12-9

نو د *v-t* منحنی د جوړولو لپاره، مور د ذرې د پیل سرعت v_0 څخه پیل کوو او بیا دې ته د ساحې کوچنۍ زیاتوالی (Δv) اضافه کوو چې د *a-t* منحنی څخه ټاکل شوې دي. په دې توګه پرله پسې نقطې، $v_1 = v_0 + \Delta v$ ، او نور ټاکل کیږي، لکه په انځور 12-9b کې. د دې کار په کولو کې، د *a-t* منحنی د ساحې زیاتوالی د الجبرایي زیاتولوته اړتیا لري، ځکه چې هغه ساحې چې د *t* محور پورته دي د *v* په زیاتوالی (مثبت ساحه) سره مطابقت لري، په داسې حال کې چې هغه چې

د محور لاندې دي د *v* په کمیدو (منفي ساحه) سره مطابقت لري. په ورته ډول، که د *v-t* منحنی ورکړل شوې وي، لکه په انځور 12-10a کې، دا ممکنه ده چې د *s-t* منحنی د *v=ds/dt* په کارولو سره معلوم شي، چې داسې لیکل شوې دی .

$$\Delta s = \int v\,dt$$

displacement = area under v–t graph



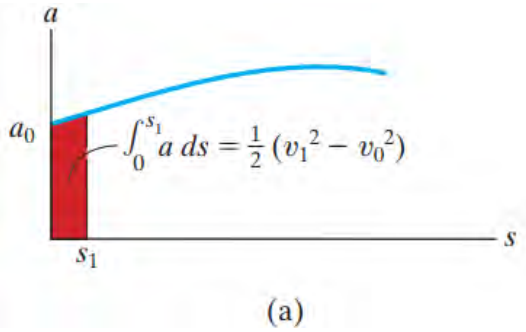
انځور 12-10

دلته مونږ د ذرې له پیل ځای s_0 څخه پیل کوو او دې ته د ساحې کوچني زیاتوالی Δs (الجبرایي) اضافه کوو چې د v–t منحنی څخه ټاکل شوي، لکه په انځور 12-10b کې.

د انټګریشن له امله، که د a–t منحنی برخې د یوې سلسلې معادلاتو له لارې تشریح کیدی شي، نو هر یو له دې معادلاتو څخه پرله پسې انټګریټ کیدی شي ترڅو هغه معادلات ترلاسه کړي چې د v–t او s–t منحنی مطابق برخې تشریح کوي. په پایله کې، که a–t منحنی خطي وي (د لومړۍ درجې منحنی)، انټګریشن به یو پارابولیک v–t منحنی (دوهم درجې منحنی) او یو کیوبیک s–t منحنی (دریمې درجې منحنی) ترلاسه کړي.

د V–s او a–s ګرافونه.

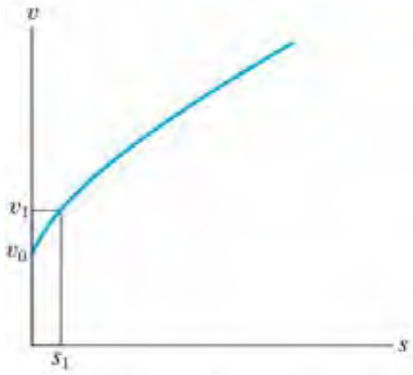
که د a–s منحنی جوړ کړل شي، نو په v–s منحنی کې نقطې د $v\,dv = a\,ds$ په کارولو سره ټاکل کیدی شي. د دې معادلې د حدودو ترمنځ انټګریټ کول د $v = v_0$ په $s = s_0$ کې او $v = v_1$ په $s = s_1$ کې، مونږ لرو



(a)

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

area under
a–s graph



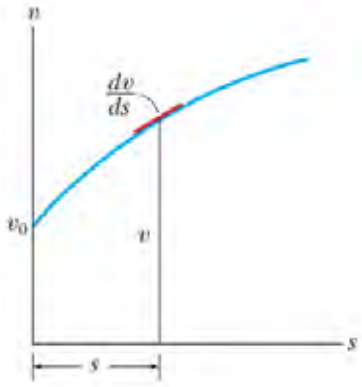
(b)

انځور 12-11

د بیلګې په توګه، که په انځور 12-11a کې سره ساحه معلومه شي، او په $s_0 = 0$ کې د پیل سرعت v_0 معلوم وي، نو $v_1 = (2\int_0^{s1} ads + v^2_0)^{1/2}$، لکه په انځور 12-11b کې. په دې ډول په v–s منحنی کې نوري نقطې هم ټاکل کیدی شي. که د v–s منحنی معلوم وي، نو په هر ځای s کې تعجیل a د $a\,ds = v\,dv$ په کارولو سره ټاکل کیدی شي، چې داسې لیکل شوې ده

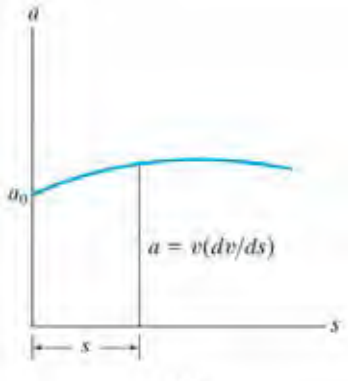
$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

acceleration = velocity times slope of v–s graph



(a)

انځور 12-12



(b)

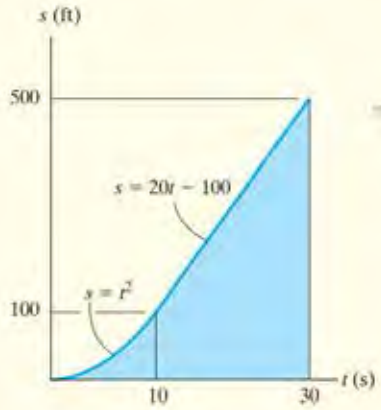
بیلګې په توګه، په نقطه (*s*, *v*) د انځور 12-12a کې، د *v–s* منحنی میلان dv/ds اندازه کیږي. بیا د *v* او *dv/ds* په معلومولو سره، د *a* ارزښت محاسبه کیدی شي، لکه په انځور 12-12b کې.

د *v–s* منحنی هم د *a–s* منحنی څخه جوړیدلی شي، یا برعکس، د معلوم منحنی د بیلابیلو فاصلې په ریاضي توابع سره نږدې کول، *v* = *f*(*s*) یا *a* = *g*(*s*)، او بیا د *a ds* = *v dv* په کارولو سره بله منحنی ترلاسه کول.

مثالونه

مثال 12.6

یو بایسکل په یو مستقیم سړک باندې حرکت کوي چې د هغه موقعیت د انځور 12-13a په منحنی کې تشریح شوی دی. د 0 ≤ t ≤ 30 s لپاره د *v–t* او *a–t* ګرافونه جوړ کړئ.



(a)



حل

د *v–t* منحنی (v-t Graph) . له دې امله چې *v* = *ds/dt*، د *v-t* منحنی د *s-t* منحنی دمعادلود مشتق نیولو په واسطه ټاکل کیدی شي، لکه په انځور 12-13a کې. مورږ لرو:

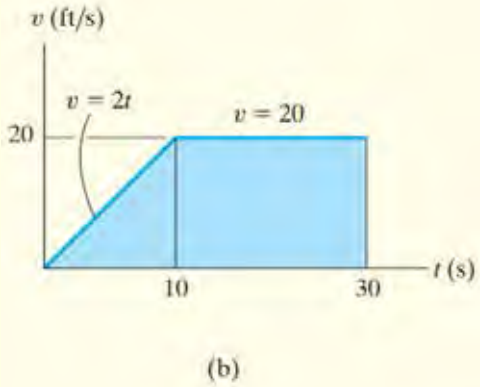
$$0 \le t < 10\ \text{s}; \qquad s = (t^2)\ \text{ft} \qquad v = \frac{ds}{dt} = (2t)\ \text{ft/s}$$

$$10\ \text{s} < t \le 30\ \text{s}; \qquad s = (20t - 100)\ \text{ft} \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20\ \text{ft/s}$$

دغه پایلې په انځور12-13b کې ترسیم شوې دي. مورږ کولی شو د *v* ځانګړي ارزښتونه هم په اندازه کولومیلان د *s-t* منحنی د یوه ورکړل شوي شېبې لپاره ه ترلاسه کړو. د بیلګې په توګه، په *t*=20s کې، د *s-t* منحنی میلان د 10 s څخه تر 30 s پورې د مستقیمې کرښې څخه ټاکل کیږي، یعنې:

حل

$$t = 20\ \text{s}: \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500\ \text{ft} - 100\ \text{ft}}{30\ \text{s} - 10\ \text{s}} = 20\ \text{ft/s}$$

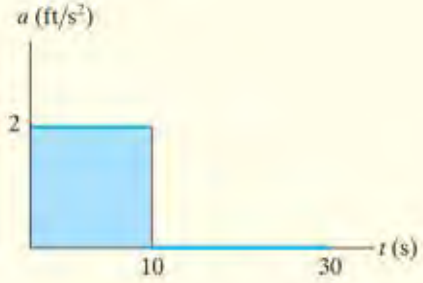


(b)

د a-t منحنی (*a-t* Graph) . له دې امله چې $a =$ *dv/dt*، د *a-t* منحنی په واسطه دمشتق نیولو د *v-t* منحنی د کربنو تعریف کوونکو معادلوسره ټاکل کیدی شي. دا ورکوي:

$$v = (2t)\ \text{ft/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2\ \text{ft/s}^2$$

$$10 < t \leq 30\ \text{s}; \qquad v = 20\ \text{ft/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$



(c)

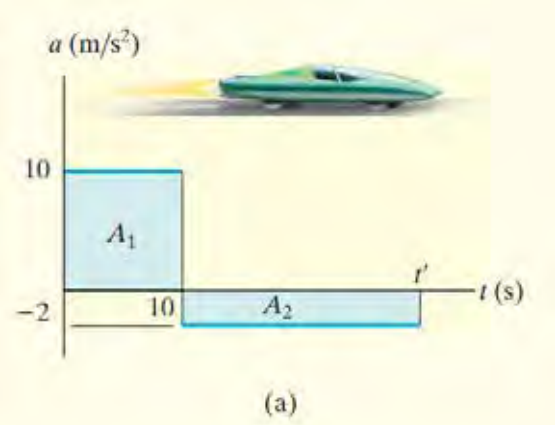
انځور 12-13

دا پایلې په انځور 12-13c کې پلاټ شوي دي.

یادونه: د *v* او *a* ناڅاپي بدلون په $t = 10$ s کې یو بندیدل والی (discontinuity) څرګندوي، خو په حقیقت کې دا بدلون باید په یو لنډ، خو محدود وخت کې رامنځته شي.

مثال 12.7

موټر چې په انځور 12-14a کې ښودل شوی له دریدلي حالته حرکت پیل کوي او په یوه مستقیمه لاره باندې سفر کړي، دا 10 ثانیو لپاره $10\ \text{m/s}^2$ تعجیل زیاتوي، او بیا تجیل 2m/s^2 ته کموي. د *v-t* ګراف رسم کړئ او وخت *t'* چې موټر د درېدو ته ورسیږی معلومه کړئ.

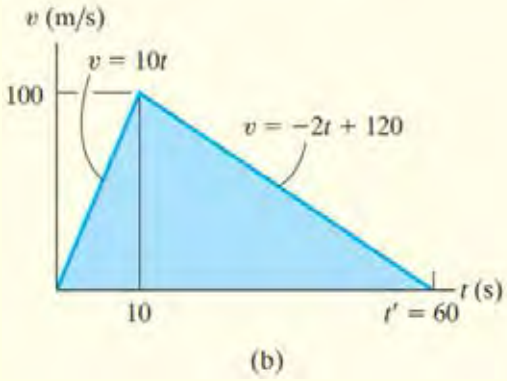


(a)

حل

د v–t ګراف (*v-t* Graph) . له دې امله چې د $dv = a\,dt$ دي ، د *v-t* ګراف په انټیګریټ نیولو د مستقیمی کربنی له برخو څخه د *a-t* ګراف په لاس راځي. د ابتدايي حالت په پام نیولوکی $v = 0$ او $t = 0$ ، مونږ لرو:

$$0 \le t < 10\ \text{s}; \quad a = (10)\ \text{m/s}^2; \quad \int_0^v dv = \int_0^t 10\,dt, \quad v = 10t$$



(b)

انځور 12-14

کله چې $t = 10$ s, $v = 10(10) = 100$ m/s . دا ابتدايي حالت په توګه د راتلونکي وخت وقفې لپاره په پام کی نیسو، مونږ لرو

$$10\ \text{s} < t \le t'; \quad a = (-2)\ \text{m/s}^2; \int_{100\ \text{m/s}}^{v} dv = \int_{10\ \text{s}}^{t} -2\,dt, \quad v = (-2t + 120)\ \text{m/s}$$

کله چې $t = t'$ مونږ لرو چې $v = 0$. پدی ډول انځور 12-14b، په لاس راځی او

$$t' = 60\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

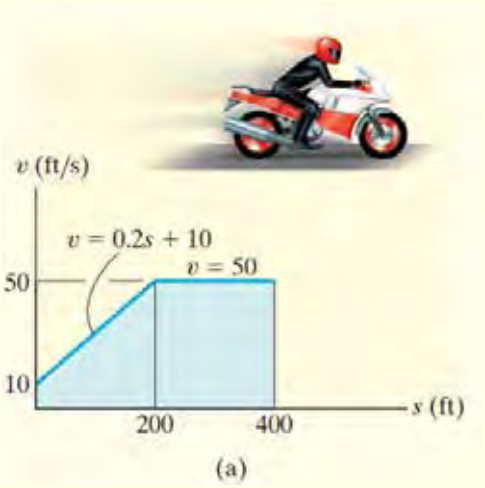
مستقیم حل د t' لپاره هم کیدونکی دی، چې لاندې ساحه د a-t ګراف مساوي دی د موټر د سرعت په بدلون سره. په دی توګه $\Delta v = 0 = A1 + A2$ ، انځور 12-14a، مورِ لرو:

$$0 = 10\ \text{m/s}^2(10\ \text{s}) + (-2\ \text{m/s}^2)\,(t' - 10\ \text{s})$$

$$t' = 60\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.8

په انځور 12-15a کې د یوه موټرسایکل د حرکت v-s ګراف ښودل شوی دی. د حرکت a–s ګراف جوړ کړئ او هغه وخت معلوم کړئ چې تر څو موټرسایکل د $s = 400$ ft ځای ته ورسیږي.



حل

انځور 12-15

د a–s ګراف (a-s Graph). له هغه ځایه چې د v–s ګراف برخو معادلات ورکړل شوي دي ، د a–s ګراف د $a\,ds = v\,dv$ په مرسته سره ټاکل کیدی شي.

$$0 \le s < 200\ \text{ft}; \qquad v = (0.2s + 10)\ \text{ft/s}$$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.2s + 10)\frac{d}{ds}(0.2s + 10) = 0.04s + 2$$

$$200\ \text{ft} < s \le 400\ \text{ft}; \qquad v = 50\ \text{ft/s}$$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (50)\frac{d}{ds}(50) = 0$$

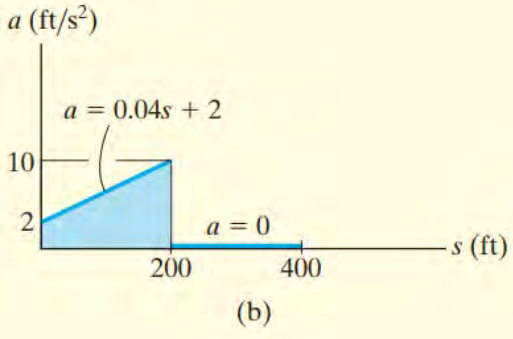
دا پایلې په انځور 12-15b کې پلاټ شوي دي.

وخت (*Time*) . وخت د *v*–*s* ګراف او *v* = *ds*/*dt* په کارولو سره ترلاسه کیدی شي، ځکه چې دا معادله د *v*، *s* ، او *t* اړیکه ښیي. د حرکت د لومړي برخې لپاره، *s* = 0کله چې *t* = 0 وي، نو:

$$0 \le s < 200 \text{ ft}; \qquad v = (0.2s + 10) \text{ ft/s}; \qquad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$t = (5 \ln(0.2s + 10) - 5 \ln 10) \text{ s}$$



انځور12-15

په *s* = 200 ft کې دا کیږی ، *t* =5 ln[0.2(200)+10] − 5 ln 10 = 8.05s . له همدې امله، د حرکت د دویمې برخې لپاره د دې لومړنیو شرایطو په کارولو سره

$$200 \text{ ft} < s \le 400 \text{ ft}; \qquad v = 50 \text{ ft/s}; \qquad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{50}$$

$$\int_{8.05\text{ s}}^t dt = \int_{200\text{ m}}^s \frac{ds}{50}$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{50} - 4;$$

$$t = \left(\frac{s}{50} + 4.05\right) \text{s}$$

له همدې امله په *s* =400 ft کې

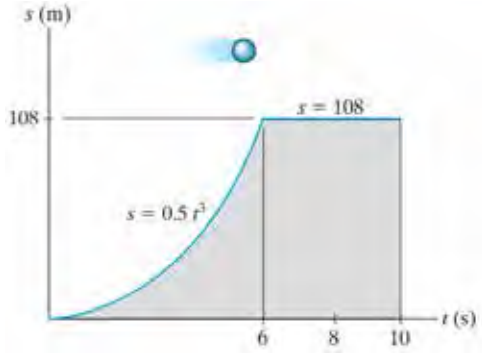
$$t = \frac{400}{50} + 4.05 = 12.0 \text{ s} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: ګرافیکي پایلې په جزوي ډول د میلان په حساب کولو سره چک کیدی شي. د بیلګې په توګه، په *s*=0, *a* =*v*(*dv*/*ds*) = 10(50-10)/200=2 m/s^2. همدارنګه، پایلې په جزوي ډول د معاینه کولو سره چک کیدی شي. د *v*-*s* ګراف د سرعت لومړنۍ زیاتوالی (یا تعجیل) ښیي، چې وروسته تعقیب کیږي په ثابت سرعت (*a*=0).

بنسټیزی پوښتنې

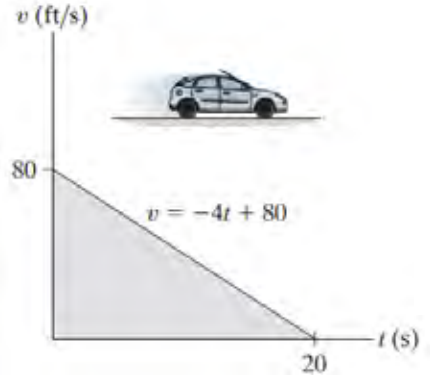
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 12.9 . د یوې بهرني قوې له امله، ذره په یو مستقیم لاره کې داسې حرکت کوي چې د هغې موقعیت د v-s ګراف لخوا تشریح شوي. د هماغه وخت لپاره د v-t ګراف جوړ کړئ. په نظر کې ونیسئ $v = 0$ ، $a = 0$ کله چې $t = 0$.



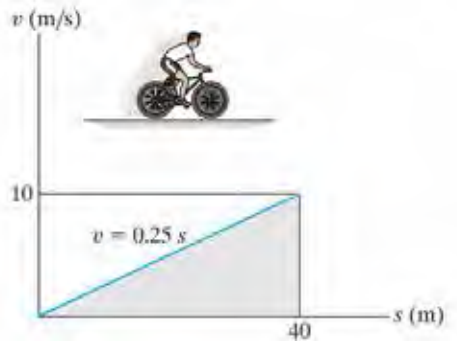
پوښتنه ب 12-09

ب 12.10 . .یو ون په یو مستقیم سړک کې په داسې سرعت سفر کړي کوم چې د ښودل شوي ګراف لخوا تعریف شوی دی. د همداغه وخت لپاره د a-t او s-t ګرافونه جوړ کړئ. په نظر کې ونیسئ $s=0$ کله چې $t=0$.



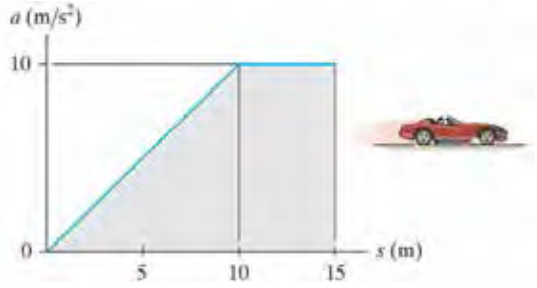
پوښتنه ب 12-10

ب 12.11 . بایسکل سوار د تعجیل پیل کولو لپاره د خپل بایسکل د شا په څرخ باندې یوه قوه تطبیق کوي. او د هغه سرعت د ښودل شوي v-s ګراف لخوا تشریح شوي، په مقابل کې د a-s ګراف د هماغه وخت لپاره جوړ کړئ.



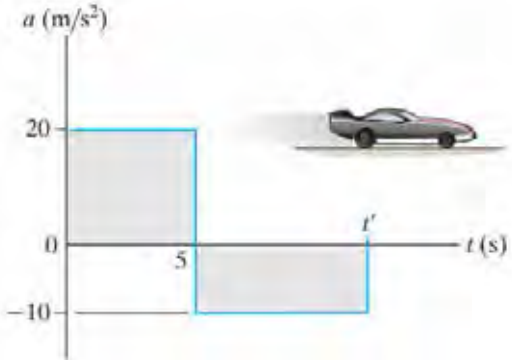
پوښتنه ب 12-11

ب 12.12 . سپورټي موټرله دریدلي حالت حرکت پیل کوي او په یو مستقیم سړک باندی سفر کړي. د هغې لومړنی زیاتیدونکی تعجیل د موټر د شا د څرخونو لخوا رامنځته شوی دی ، لکه چې په ګراف کې ښودل شوي. د v-s ګراف یې جوړ کړئ. او هم د موټر سرعت څومره دی کله چې $s = 10\ m$ او $s = 15\ m$ وي؟



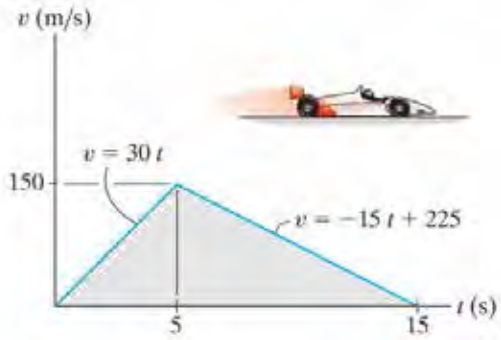
پوښتنه ب 12-12

ب 12.13 . یو ډراګسټر موټر له دریدلي حالت حرکت پیل کړي اوتعجیل یې د ښودل شوی ګراف لخوا تشریح شوی دي. د v-t ګراف یې د وخت $0 \le t \le t'$ لپاره جوړ کړئ، چیرته چې t' هغه وخت دی چې موټر د دریدلو حالت ته ورسیږی.



پوښتنه ب 12-13

ب 12.14 . د ډراګسټر موټر له دریدلي حالت څخه حرکت پیل کوي اوسرعت یې د ښودل شوي ګراف لخوا تشریح شوی دي. د وخت په تیریدو $0 \le t \le 15\ s$ لپاره د s-t ګراف جوړ کړئ. همدارنګه، د دې وخت په موده کې د ټول سفر فاصله چې تکمیل شوي وټاکي .



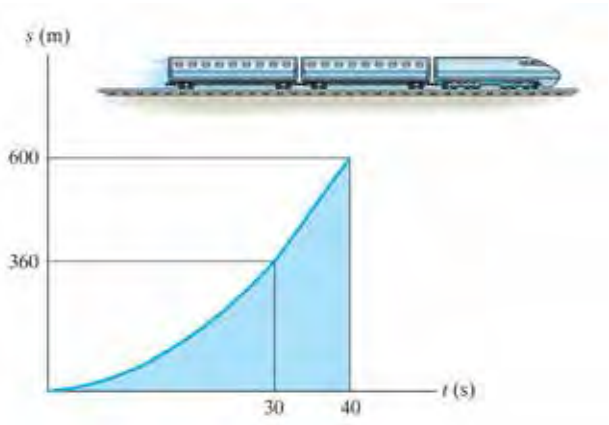
پوښتنه ب 12-14

پوښتنې

Problems

12.35 . یو بار وړونکی ګاډی (ټرین) له دریدلې حالت څخه په ثابت تعجیل $0.5\ ft/s^2$ حرکت پیل کوي . د وخت t' وروسته، دا یو ثابت تیزوالی ساتي ترڅو چې په $t=160\ s$ وخت کی یی 2000 ft فاصله سفر کړي. وخت t' او د حرکت لپاره د v-t ګراف جوړ کړی.

12.36* . د یوه ګاډی لپاره د s-t ګراف د تجربي په اساس ټاکل شوی دی. له دی معلوماتي ډ یتا څخه، د حرکت لپاره v-t او a-t ګرافونه د $0 \le t \le 40s$ وخت لپاره جوړ کړئ. د $0 \le t \le 30\ s$ لپاره، ګراف $s = (0.4t^2)\ m$ دی، او بیا د $t \ge 30\ s$ وخت لپاره مستقیم کیږي.



پ 12.36

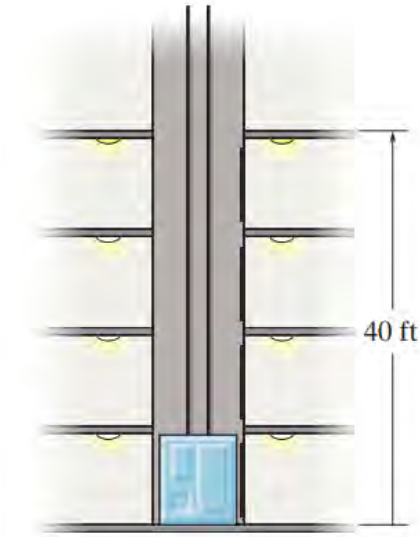
12.37 . دوه راکټونه په یوه سطحه کې له ساکن حالت څخه حرکت پیل کړي. راکټ A عمودی په $20\ m/s^2$ تعجیل سره د 12 ثانیو لپاره حرکت کوی او بیا یو ثابت تیزوالی ساتي. راکټ B په $15\ m/s^2$ تعجیل سره حرکت کوی تر څو چې یو ثابت $150\ m/s$ تیزوالی ته ورسیږي. د هر راکټ لپاره د a-t او s-t ګرافونه جوړ کړئ تر $t = 20\ s$ وخت پورې. کله چې $t = 20\ s$ شي، د راکټونو ترمنځ فاصله څومره ده؟

12.38 . یوه ذره له $s = 0$ څخه حرکت پیل کوي او په یو مستقیم خط کې داسې سفر کړي چې د هغې سرعت $v = (t^2 - 4t + 3)\ m/s$ وي، چیرته چې t په ثانیو کې دی. د $0 \le t \le 4$ ثانیو وخت لپاره د a-t او v-t ګرافونه جوړ کړئ.

12.39 . که د یوې ذرې موقعیت د $s = [2\sin(\pi/5)t + 4]m$ په توګه تعریف شوی وي، چیرته چې t په ثانیو کې ده، د $0 \le t \le 10\ s$ وخت لپاره د v-t, s-t او a-t ګرافونه جوړ کړئ.

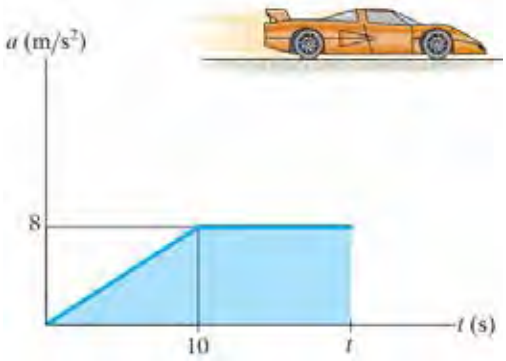
*12.40 . یو الوتکه له دریدلې حالت څخه په یوه رن وی 5000 ft سفر کوی ، او د یوثابت تعجیل وروسته، په 162 mi/h تیزوالي له ځمکې پورته کیږي. دا بیا په یو مستقیم خط کې په یوثابت تعجیل 3 ft/s² سره پورته ځي تر څو چې یو ثابت تیزوالي 220 mi/h ته ورسیږي. د حرکت تشریح کولو لپاره د *s-t, v-t* او *a-t* ګرافونه رسم کړئ.

12.41 . لفټ له دریدلې حالت څخه د ودانۍ له لومړۍ پورې څخه حرکت پیل کوي. دا کولی شي په 5 ft/s² تعجیل سره حرکت وکړي او بیا په 2 ft/s² د تعجیل کموالی مومي. هغه تر ټولو لنډ وخت وټاکئ کوم چې دا اړتیا لري ترڅو له ځمکې څخه 40 ft پورته پورې ته ورسیږي. لفټ له ساکن حالت څخه پیل کوي او بیا دریږي. د حرکت لپاره د *a-t, v-t* او *s-t* ګرافونه رسم کړئ.



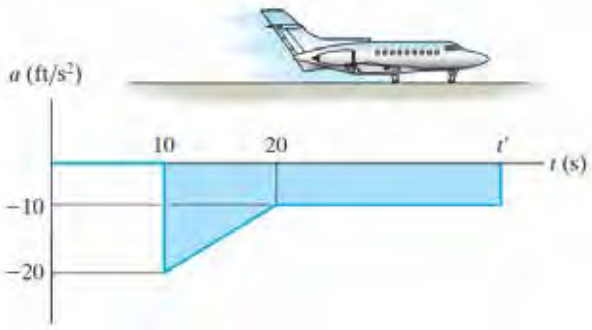
پ 12.41

12.42 . یو موټر له دریدلې حالت څخه په یو مستقیم لاره په ښودل شوي تعجیل سره حرکت کړي. د موټر د 50 m/s تیزوالی رسیدلو لپاره وخت *t* وټاکئ ، او هم د حرکت تشریح کولو لپاره تر وخت *t* پورې د *v-t* ګراف رسم کړئ.



پ 12.42

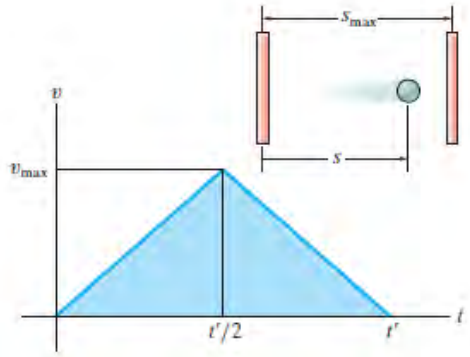
12.43 . د جټ الوتکې حرکت په یوه رنوی له کښته کیدو وروسته په a-t ګراف تشریح شوی دی. هغه وخت t' وټاکئ کله چې جټ الوتکه ودریږي. د حرکت لپاره د v-t او s-t ګرافونه رسم کړئ. دلته $s = 0$ دی، او $v = 300$ ft/s کله چې $t = 0$ وي.



پ 12.43

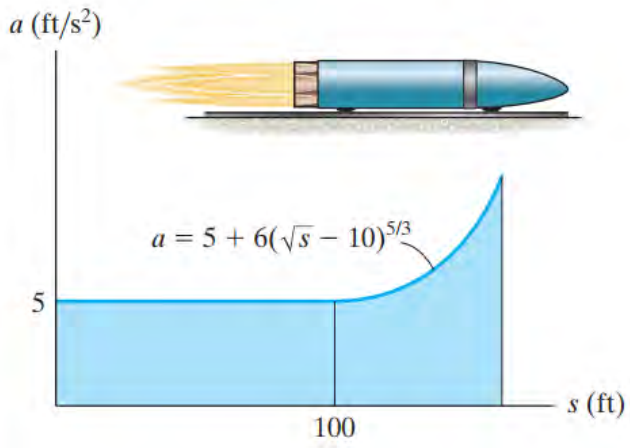
12.44 . د یوی ذرې لپاره د v–t ګراف چې د یوی بریښنایي نفوذی ساحې (الیکټریک ساحې) له لارې د یوې تختې څخه بلې ته حرکت کوي په لاندې انځور کې ښودل شوي . تعجیل او وتجیل چې واقع کیږي ثابت دي او د دواړو کچه $4\ m/s^2$ ده. که چیرې تختې 200 ملي متره جلا وي، اعظمي سرعت v_{max} او وخت t' د ذرې د سفر کولو لپاره له یوې تختې څخه بلې ته وټاکئ. همدارنګه د s–t ګراف رسم کړئ. کله چې $t = t'/2$ وي، ذره په $s = 100$ mm کې ځای لري .

12.45 . د یو ې ذرې لپاره v–t ګراف چې د یو بریښنایي نفوذی ساحې له لارې د یوې تختې څخه بلې ته حرکت کوي په لاندې انځور کې ښودل شوي دی، چیرې چې $t' = 0.2$ s او $v_{max} = 10$ m/s دی. د s–t او a–t ګرافونه د ذرې لپاره رسم کړئ. کله چې $t = t'/2$ وي، ذره په $s = 0.5$ m کې ده .



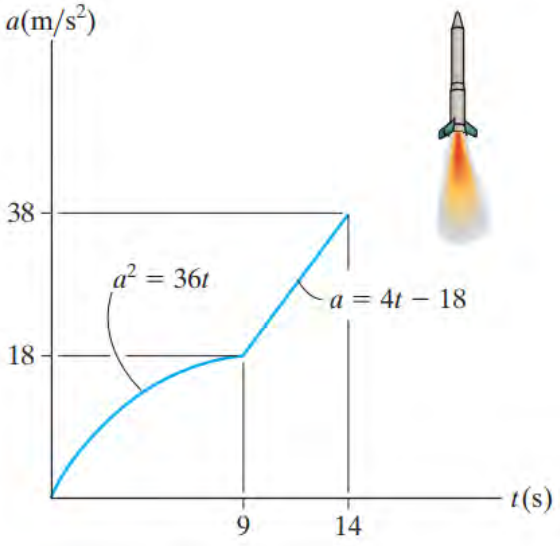
پ 12.44/45

12.46 . د یوه راکټ لپاره a–s ګراف چې د یوی مستقیمی لارې په اوږدو کې حرکت کوي په تجربوی توګه ټاکل شوی دی. که راکټ په $s = 0$ کې حرکت پیل کړي کله چې $v = 0$ وي، د هغې تیزوالی وټاکئ کله چې دا په $s = 75$ ft او 125 فوټ کې وي. د د سیمپسن قانون وکاروئ د $n = 100$سره ترڅو په $s = 125$ ft کې د v ارزونه وکړئ .



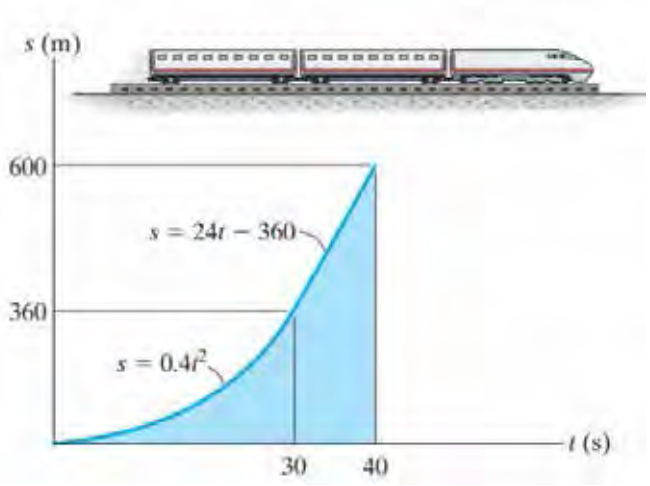
پ 12.46

12.47 . د راکټ تعجیل په لاندې ګراف کې تشریح شوې دي. که دا له ساکن حالت څخه حرکت پیل کړي، د توغولو لپاره د v-t او s-t ګرافونه د $0 <= t < 14s$ وخت لپاره جوړ کړئ .



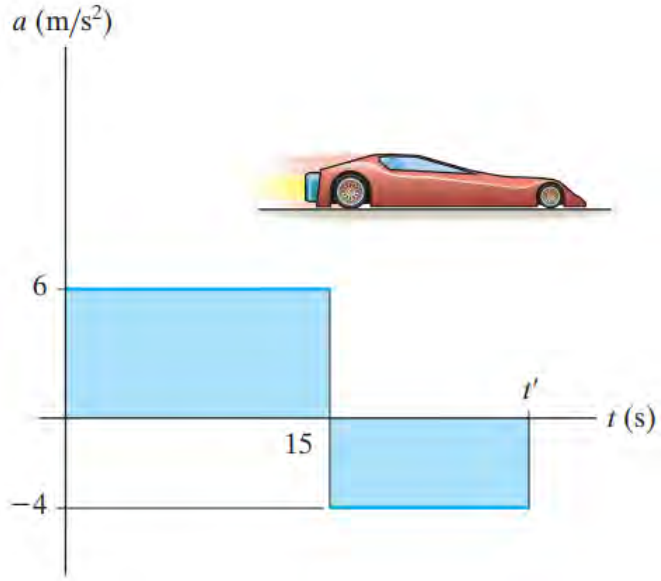
پ 12.47

★ 12.48 . د یو مسافر وړونکي ګاډی لپاره s–t ګراف په تجربي توګه ټاکل شوی دی. د معلوماتو څخه، د v–t او a–t ګرافونه د حرکت لپارجوړ کړئ .



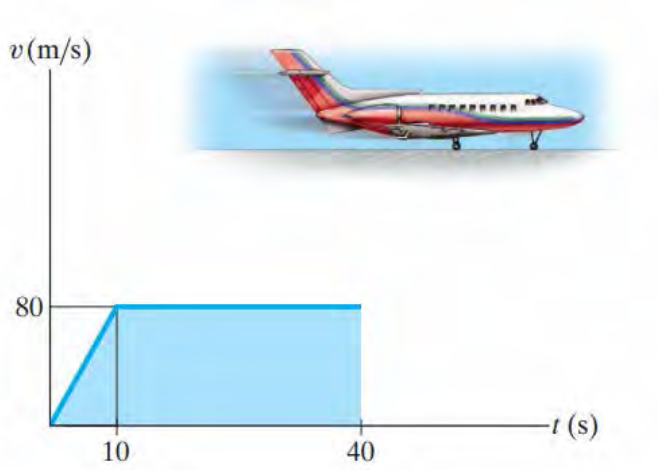
پ 12.48

12.49 . جټ موټر په اولی حالت کې په 10 m/s سرعت سره حرکت کوي کله چې دا د بنودل شوې تعجیل سره مخ کیږي. د موټر اعظمي سرعت او وخت t' وټاکئ کله چې موټرودریږي. کله چې $t = 0$ وي ، $s = 0$ وي .



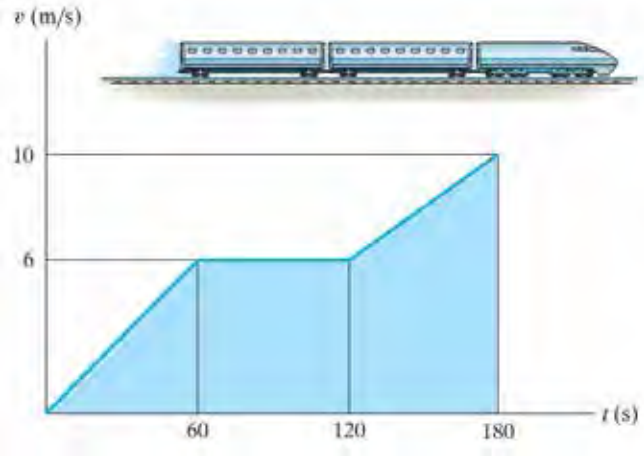
پ 12.49

12.50 . د تجریبي معلوماتو څخه، د یوی جټ الوتکې حرکت د یوی رنوی په اوږدو کې د لاندی v–t ګراف لخوا ټاکل شوی دی. د حرکت لپاره s–t او a–t ګرافونه جوړ کړئ .



پ 12.50

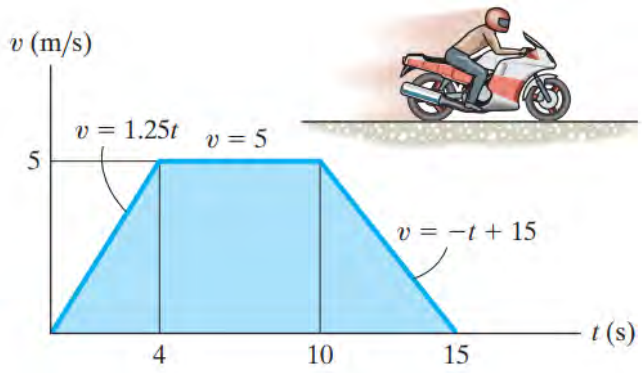
12.51 . د یومسافر وړونکې ګاډي لپاره $v–t$ ګراف په تجربیي توګه ټاکل شوی دی. د دی معلوماتو څخه، د $s–t$ او $a–t$ حرکت لپاره ګرافونه د $0 < t < 180\text{s}$ وخت لپاره جوړ کړئ. کله چې $t = 0$ وي، $s = 0$ وي .



پ 12.51

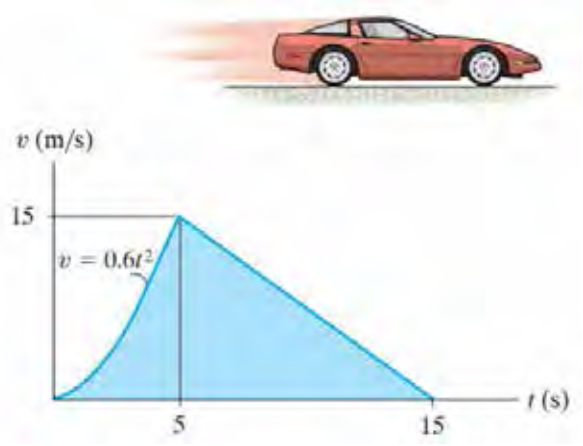
★ 12.52 . یو موټرسایکل له دریدلې حالت څخه په $s = 0$ د مستقیم سړک په اوږدو کې په تیزوالي(speed) حرکت پیل کوي . تیزوالی یې د $v–t$ ګراف لخوا ښودل شوې ده . ټول سفر شوی واټن وټاکئ تر هغه پورې چې په $t = 15\text{s}$ کې موټرسایکل ودریږي. همدارنګه د $a–t$ او $s–t$ ګرافونه رسم کړئ.

12.53 . یو موټرسایکل له دریدلي حالت څخه په $s = 0$ د مستقیم سړک په اوږدو کې په تیزوالي(speed) حرکت پیل کوي . تیزوالی یې د $v–t$ ګراف لخوا ښودل شوې ده . د موټرسایکل تعجیل او موقعیت وټاکئ کله چې $t = 8s$ او $t = 12s$ وي .



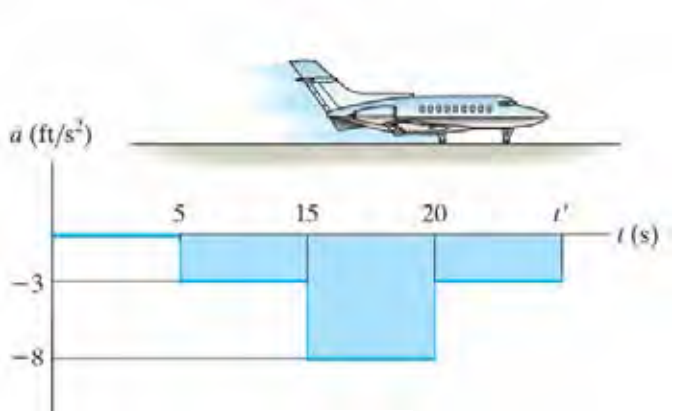
پ 12.52/53

12.54 . د یو موټر حرکت لپاره $v–t$ ګراف د یو مستقیم سړک په اوږدو کې ښودل شوې دی. د $s–t$ او $a–t$ ګرافونه رسم کړئ. همدارنګه د 15 ثانیو وخت لپاره اوسط تیزوالی او سفر شوی واټن وټاکئ. کله چې $t = 0$ وي، $s = 0$ وي .



پ 12.54

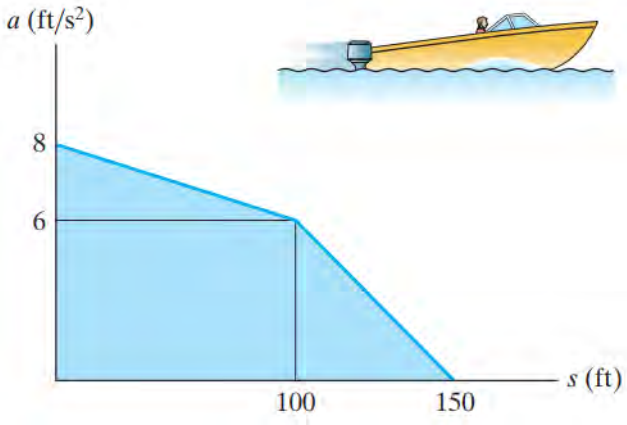
12.55 . یو الوتکه په مستقیمه رنوی بڼکته کیږی، په اول کې یی 110 ft/s تیزوالی حرکت کوی کله چې $s = 0$ وي. که دا د بنودل شوي تjeجیل سره مخ شي، د الوتکې د توقف لپاره اړین وخت t' وټاکئ او د حرکت لپاره $s–t$ ګراف جوړ کړئ .



پ 12.55

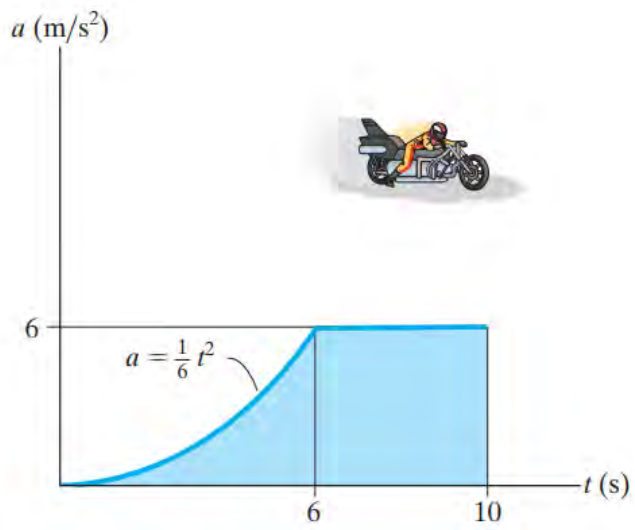
★ 12.56 . یو کښتی د سکون حالت څخه په $s = 0$ ، په مستقیم خط کې حرکت پیل کوي او تعجیل یی د $a–s$ ګراف لخوا بنودل شوي ده. د کښتی تیزوالی په $s = 50$ft ، 100 ft ، او 150 ft کې وټاکئ.

12.57 . یو کښتی د ساکن حالت څخه په $s = 0$ ، په مستقیم خط کې حرکت پیل کوي او تعجیل یی د $a–s$ ګراف لخوا بنودل شوي دی. د $v–s$ ګراف جوړ کړئ.



پ 12.56/57

12.58 . یو موټرسایکل سوار له دریدلي حالت څخه حرکت پیل کوي او په مستقیم سرک کې د 10 ثانیو لپاره د تعجیل سره چې بدلول شوي دی ځي. د $v–t$ ګراف دحرکت لپاررسم کړئ او په 10 ثانیو کې سفر شوی واټن پیدا کړئ .



پ 12.58

12.59 . د یوه ګاډي تیزوالی (speed) د لومړۍ دقیقې په جریان کې په لاندې ډول ثبت شوی دی

t (s)	0	20	40	60
v(m/s)	0	16	21	24

د $v–t$ ګراف رسم کړئ، د منحنی کرښه د ورکړل شوو ټکو تر منځ په مستقیم خطونو په توګه تخمین کړئ. ټول سفر شوی واټن وټاکئ .

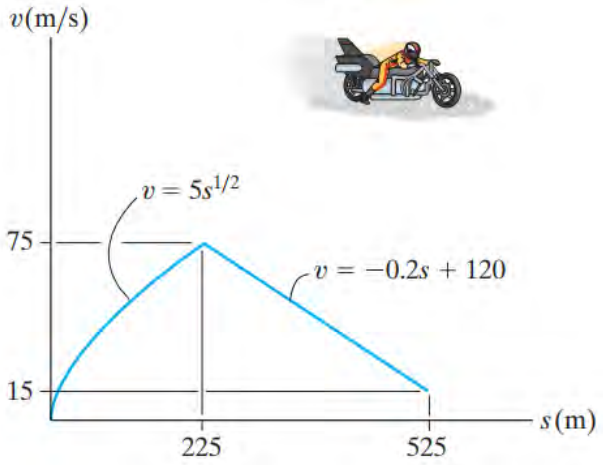
12.60* . یو سړی په یو بار وړونکی لفټ کې پورته ځي، کله چې دا له ځمکې څخه 100 فوټ لرې وي ناڅاپه یو بسته له لفټ څخه تری لویږي. که چیرې لفټ د 4 ft/s ثابت تیزوالي سره پورته حرکت وکړي، هغه وخت کې چې بسته ځمکې ته رسیږي، لفټ به له ځمکې څخه څومره پورته وي. د بسته لپاره $v–t$ ګراف رسم کړئ په هغه وخت کې چې دا په حرکت کې وي. فرض کړئ چې بسته د لفټ سره ورته په پورته سرعت سره خوشې شوې وه.

12.61 . دوه موټرونه له دریدلي حالت څخه په یوه مستقیم سرک کې یو بل سره حرکت پیل کوي. موټر A په 4 m/s² تعجیل سره د 10 ثانیو لپاره حرکت کوی او بیا یو ثابت تیزوالی ساتي.

موټر B په $5\ m/s^2$ سرعت کې چټکوالی کړي تر هغه چې $25\ m/s$ ثابت سرعت ته ورسیږي او بیا دا سرعت ساتي. د هر موټر لپاره $a–t$ ، $v–t$، او $s–t$ ګرافونه جوړ کړئ تر هغه چې $t = 15s$ ثانیې وي. کله چې $t = 15s$ ثانیې وي، د دواړو موټرونو تر منځ واټن څومره دی؟

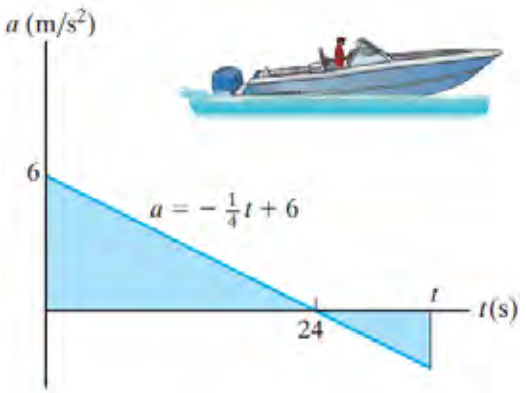
12.62 . که د یوې ذرې موقعیت د $s = (5t - 3t^2)\ ft$ په توګه تعریف شوی وي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د $0 \le t \le 2.5\ s$ ثانیووخت لپاره $s–t$ ، $v–t$، او $a–t$ ګرافونه جوړ کړئ.

12.63 . جټ بایسکل په مستقیم سرک کې چې تیزوالی یې د $v–s$ ګراف لخوا تشریح شوی دی حرکت کوي. د $a–s$ ګراف یې جوړ کړئ.



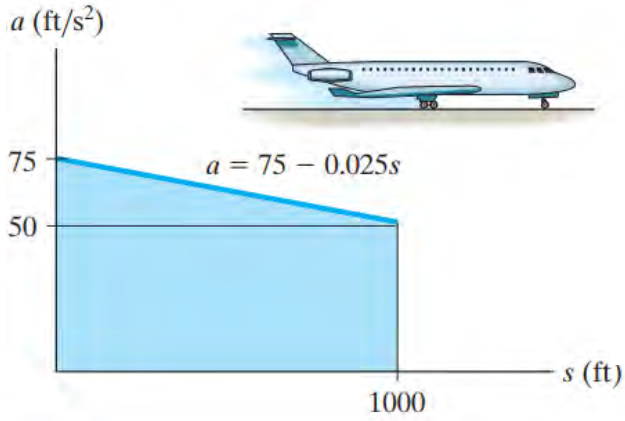
پ 12.63

* 12.64 . کښتۍ په ابتدا کې په $8\ m/s$ تیزوالي سره حرکت کړي کله چې دا د بنودل شوې تعجیل سره مخ کیږي. د کښتۍ اعظمي تیزوالي او وخت t کله چې دا ودریږي وټاکئ .



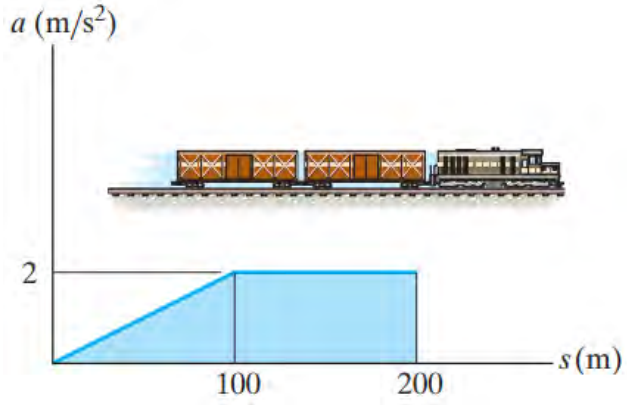
پ 12.64

12.65 . جټ الوتکه له دریدلي حالت څخه په $s = 0$ کې حرکت پیل کوي او د ښودل شوي تعجیل سره مخ کیږي. د الوتکي تیزوالي و ټاکئ کله چې دا 1000 فوټه سفر وکړي. همدارنګه، څومره وخت اړین دی چې دا 1000 فوټه سفر وکړي؟



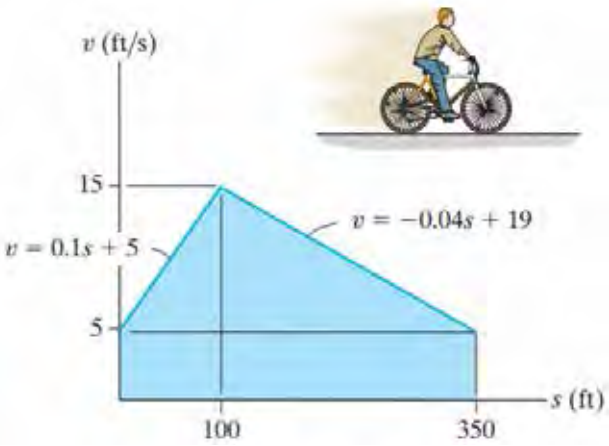
پ 12.65

12.66 . د یو بار وړونکي ګاډي لپاره $a–s$ ګراف د حرکت لومړي 200 متره لپاره ورکړل شوی دی. د $v–s$ ګراف رسم کړئ. ګاډي له دریدلي حالت څخه حرکت پیل کوي.



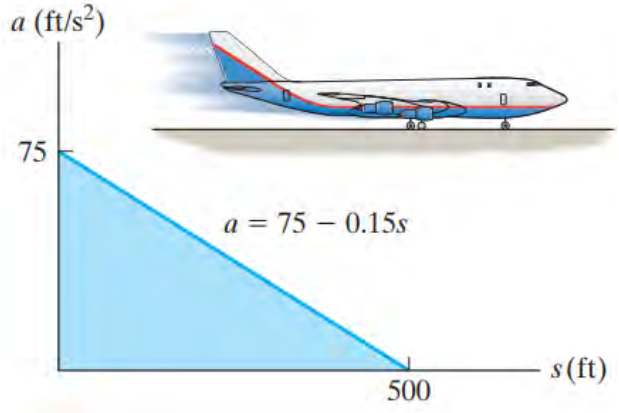
پ 12.66

12.67 . د یو بایسکل سوار لپاره $v–s$ ګراف چې په مستقیم سړک کې سفر کوي ښودل شوی دی. د $a–s$ ګراف جوړ کړئ .



پ 12.67

★ 12.68 . جټ الوتکه له دردلي حالت څخه په $s = 0$ کي حرکت پيل کوي او د ښودل شوي تعجيل سره مخ کيږي. د $v–s$ ګراف جوړ کړئ او د وخت موده چې د رنوی 500 فوټه سفر لپاره اړينه ده وټاکئ.



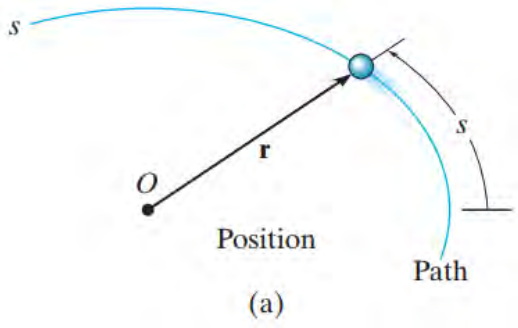
پ 12.68

12.4 دعام ډول منحني حرکت

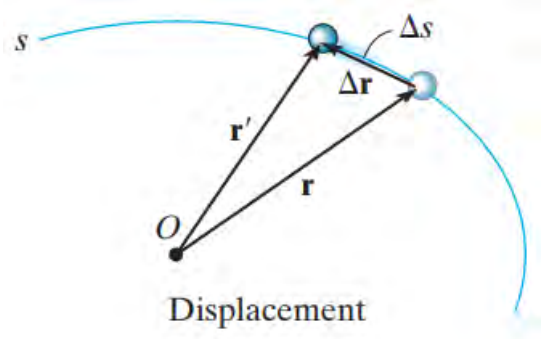
(GENERAL CURVILINEAR MOTION)

منحني يا کرولينير حرکت هغه وخت رامنځته کيږي کله چې يو ذره په يوه منحني لاره کي حرکت کوي .له هغه ځايه چې دا لاره اکثراً په دريو بعدونو کي تشريح کيږي، د ذری دځای، سرعت، او تعجيل پيداکولولپاره به د ويکتور تحليل وکارول شي.* په دې برخه کي به د منحنی حرکت عمومي اړخونه تشريح کيږي، او په راتلونکو برخو کي به مور د همداسي درې خاووکوارډينيټ سيستمونو په اړه خبرې وکړو چې اکثره د دې ډول حرکت تحليل لپاره کارول کيږي.

موقعيت (Position). يو ذره چې په يوه فضايي منحني باندې په يوه نقطه کي موقعيت لري په نظرکې ونيسئ ، دا منحني دمسيرتابع $s(t)$ لخوا تعريف شوی دي، انځور 12-16a .د ذرې موقعيت، چې له يوه ثابت ټکي O څخه اندازه کيږي، د *موقعيت ويکتور* په نوم به وښودل شی، $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$



بی ځایه کېدل (Displacement). که ذره د منحني په امتداد کې فاصله Δs نوې موقعیت ته حرکت وکړي کوم چې د $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ په واسطه تعریف شوی وي، انځور 12-16b ، بیا بی ځایه کېدنه $\Delta\mathbf{r}$ د ذرې موقعیت کې د بدلون نمایندګي کړي او د ویکتور د تفریق له لارې ټاکل کېږي؛ یعنې، $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.



(b) انځور 12.16

سرعت (Velocity). که $\Delta\mathbf{r}$ د وخت په دوران Δt کې پېښ شي، نو د ذرې *متوسط سرعت* به وي

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

آنې سرعت (instantaneous velocity) له دې معادلې څخه ټاکل کېږي کله چې $\Delta t \longrightarrow 0$ او په پایله کې د $\Delta\mathbf{r}$ لوری مماس (tangent) د منحني ته نږدې کېږي. نو،

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$$

یا

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (12\text{–}7)$$

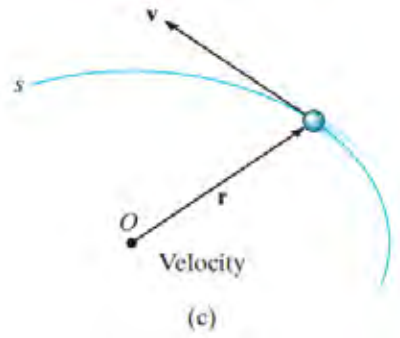
له هغه ځایه چې $d\mathbf{r}$ به د منحني مماس وي، د $\mathbf{v}$ لوری هم د منحني مماس دی، انځور 12-16c. د $\mathbf{v}$ مقدار، چې په نوم د *تیزوالي* (speed) هم یادېږي ، د دې د درک کولو سره تر لاسه کېږي چې د مستقیم کرښې $\Delta\mathbf{r}$ اوږدوالی په انځور 12-16b کې د قوس اوږدوالی Δs ته نږدې کېږي. کله چې $\Delta t \to 0$ ، نو موږ لرو

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t),$$

یا

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (12\text{–}8)$$

له دې امله، تیزوالی له مشتق کولو د تابع s مسیر سره د وخت په نسبت په واسطه تر لاسه کېدی شي.



انځور 12.16

★ د ویکتور تحلیل ځینې مهمو مفاهیمو لنډیز په ضمیمه B کې ورکړل شوی دی.

تعجیل (Acceleration) . که ذره په وخت t کې یو سرعت $\mathbf{v}$ ولري او په $t + \Delta t$ کې یو سرعت $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ ولري، انځور 12-16d، بیا د ذرې متوسط تعجیل د وخت په دوران Δt کې داسې دی:



$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

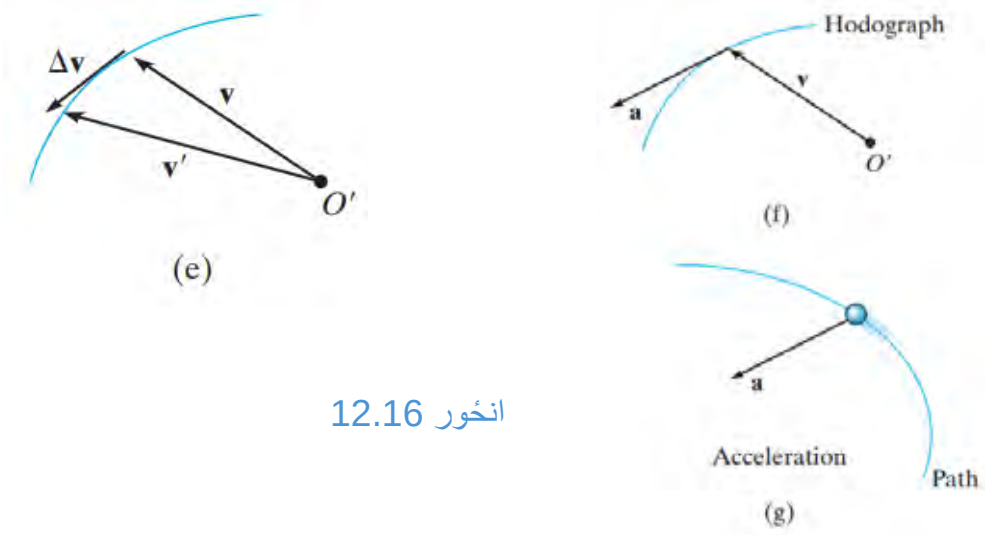
چېرته چې $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. د وخت د کچې بدلون ځیرل په انځور 12-16d کې ښودل شوي . د سرعت دوه ویکتورونه د انځور 12-16d په انځور 12-16e کې داسې رسم شوي دي چې د ویکتورونو لکۍ برخه په ثابت ټکي O' کې ځای پر ځای شوي دي او د دوی سرونه (دغیشی سر) په یوه منحني ځای نیسي. دا منحني د هوډوګراف (*hodograph*) په نوم یادیږي، او کله چې جوړ شي، دا د سرعت ویکتور د سر لپاره د نقطو لاره تشریح کوي په همدې ډول لکه څنګه چې مسیر د موقعیت ویکتور د سر لپاره د نقطو لاره تشریح کوي،انځور 12-16a .

د *آنيي تعجيل* (instantaneous acceleration) تر لاسه کولو لپاره، $\Delta t \to 0$ ته نږدې کړئ، نو:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t),$$

یا

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (12\text{–}9)$$



انځور 12.16

معادله 12-7 په دې پايله کې ځای پر ځای کوو، موږ لیکلی شو

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

د مشتق تعریف په اساس، **a** په هودګراف باندی مماس عمل کړي، انځور 12-16f، *او په عمومی حالت کې دا* حرکت د مماس په اوږدوالی نه وی، انځور 12-16g .

12.5 منحني حرکت: مستطیلي اجزاوي

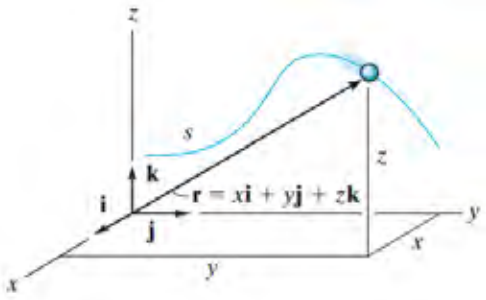
(CURVILINEAR MOTION: RECTANGULAR COMPONENTS)

کله ناکله د ذرې حرکت هغه وخت ښه تشریح کېدی شي چې لاریی د محورونو x، y، z پواسطه ښودل شوي وی.

موقعیت (Position)

که ذره په نقطه (x, y, z) د مسیرکې وي، کوم چې په انځور 12-17a کې ښودل شوی، نو ځا یی د *موقعیت ویکتور* (position vector) په مرسته ښودل کیږی.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (12\text{–}10)$$



Position

(a)

انځور 12.17

کله چې ذره حرکت کړي، نو x ، y، z اجزا وی د **r** به د وخت تابع وي؛ يعني، $x = x(t)$، $y = y(t)$، $z = z(t)$، نو $r = r(t)$ به هم د وخت تابع وي .په هره لحظه کې د **r** مقدار د معادلی B–3 په ضمیمه B کې داسې ټاکل کیږي

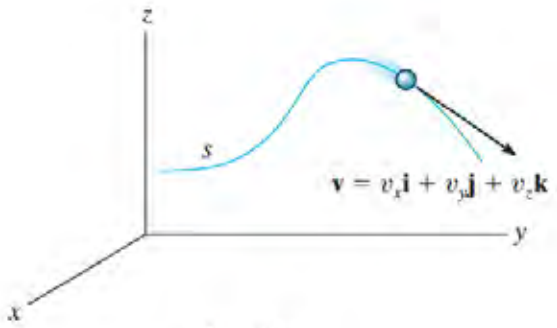
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

او د **r** *لوری* د واحد ویکتور $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ په واسطه مشخص شوی دی.

سرعت (Velocity).

د ذرې سرعت له مشتق نیولو د **r** نسبت وخت ته ترلاسه کیږي. نو:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$



Velocity

(b)

کله چې دا مشتق اخیستل کیږي، نو لازمه ده چې د ویکتور د هرې برخې د مقدار او لوري بدلونونو ته پام وکړو. د بېلګې په توګه، د **r** د **i** برخې مشتق داسې دی

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

د پورتنۍ معادلې وروستۍ برخه صفر ده، ځکه چې x ، y ، z ورکړې شوې فریم ثابت دی، او له دې امله د **i** لورې (او مقدار) د وخت سره نه بدلیږي. د **j** او **k** برخو مشتقات په ورته ډول اخیستل کیږي، نو پایله داسې ده

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad (12–11)$$

چېرته چې

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \qquad (12–12)$$

د "نقطې" نښانه $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ د لومړي مشتقاتونمایندګي کوي د $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ په ترتیب سره.

د سرعت مقدار له دې څخه موندل کیږي:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

او لورې د واحد ویکتور $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ په واسطه مشخص شوی دی. لکه څنګه چې په 12.4 برخه کې تشریح شوی، دا لورې *تل د مسیر مماس* وي، لکه څنګه چې په انځور 12-17b کې ښودل شوی.

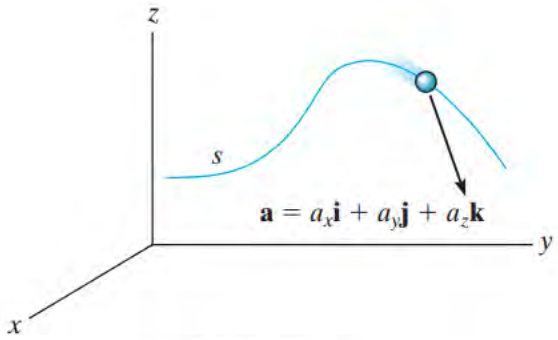
تعجیل (Acceleration).

د ذرې تعجیل د معادلې 12-11 د مشتق اخیستلو وخت ته، په واسطه ترلاسه کیږي (یا د معادلې 12-10 د دویم مشتق اخستلو وخت ته، په واسطه). مور لرو

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12–13)$$

چېرته چې

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (12–14)$$



Acceleration

(c)

دلته

انځور 12.17

دلته a_x, a_y, a_z نمایندګی د مشتقاتونیولو وخت نه د $v_x = v_x(t), v_y = v_y(t), v_z = v_z(t)$ او یا د دویم مشتق نیولو وخت ته د $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ کوی.

د تعجیل مقداردی:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

او لوری یی د واحد ویکتور $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$ په واسطه مشخص شوی دی. څرنګه چې a د سرعت د مقدار او لوري په دواړو کي د وخت د بدلون نمایندګي کوي، په عمومی حالت کي a به د مسیر مماس نه وي، لکه څنګه چې په 12-17c شکل کي ښودل شوی.

مهم ټکي

مهم ټکی IMPORTANT POINTS

- منحني (curvilinear) حرکت عموماً د ذري د موقعیت، سرعت، او تعجیل په مقدار او لوري دواړو کي بدلونونه رامنځته کوي.
- سرعت تل د مسیر په لاری مماس وي.
- په عموم کي تعجیل د مسیر مماس نه وي، بلکه د هودوګراف مماس وي
- که حرکت په مستطیلي محورونو وښودل شي، نواجزا د د x ، y، z د محورونو په امتداد لوری نه بدلوي، یوازې د دوی مقدار او خوا (الجبرایي نښه) بدلیږي.

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د تحلیل کړنلاره

کوارډ نیټ سیستم (Coordinate System)

- یو مستطیلي محوري سیستم دسوالونو حلولو لپاره ښه وسیله ده کله چې د حرکت اجزاوی د x ، y، z په خواوو په ښه توګه ښودل شوی وی.

کینماتیک مقدارونه (Kinematic Quantities)

- څرنګه چې مستطیلي یا مستقیم کرښې حرکت د هر محور سره موازي واقع کیږي، نو دا لاندې معادلې وکاروئ: سرعت : $v=ds/dt$ ، تعجیل : $a=dv/dt$ اویا

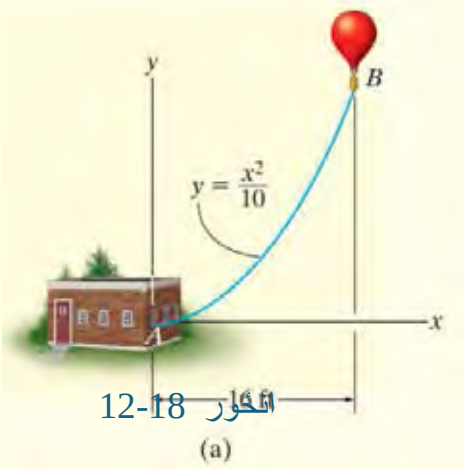
که چیرې حرکت د وخت تابع په توګه نه وي ښودل شوی، نو معادله $a\,ds = v\,dv$ وکاروئ.

- که حرکت په دووابعادو کې وي، د مسیر معادله $y = f(x)$ وکاروئ ترڅو د سرعت او تعجیل د x او y اجزاو ترمنځ اړیکه وموميئ، د دې لپاره د مشتقاتود لړۍ قاعده (Chain Rule) وکاروئ . د دې مفهوم بیاکتنه په ضمیمه C کې ورکړل شوې ده.

- کله چې د x ، y، z اجزاوی، د سرعت **v** او تعجیل **a** وموميئ، د سرعت او تعجیل مقدارونه د فیثاغورس تیورم معادله B-3 په واسطه پیدا کولای شي، او د محورونو لوریوزاویې د واحد ویکتورونو په واسطه مشخص کړئ معادلې B-4 او B-5 .

مثال 12.9

مثالونه



انځور 12-18

په انځور 12-18a کې د ښودل شوې هوایی بالون افقي موقعیت په هره شېبه کې دلته په $x = (8t)$ ft تعریف شوی دی، چې t په ثانیو کې ده. که د بالون د لارې معادله $y = x^2/10$ وي، د بالون د سرعت او تعجیل اندازې او لورې معلوم کړئ کله چې $t = 2$ s وي.

حل

سرعت (Velocity). د سرعت جز د x په لوري عبارت دی په

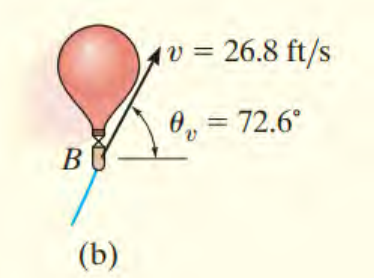
$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8\ \text{ft/s} \rightarrow$$

د سرعت د جزونو ترمنځ د اړیکو موندلو لپاره به د زنجیری قاعدی مشتقاتو څخه (Chain Rule) کار واخلو. کله چې $t = 2$ s وي، $x = 8(2) = 16$ ft وي ، لکه څنګه چې په انځور 12-18a کې ښودل شوی دی. او نو

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6\ \text{ft/s} \uparrow$$

کله چې $t = 2$ s وي، د سرعت اندازه به وي

$$v = \sqrt{(8\ \text{ft/s})^2 + (25.6\ \text{ft/s})^2} = 26.8\ \text{ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$



(b)

سرعت مماس دی په مسیر (path) ، لکه څنګه چې په انځور 12-18b کې ښودل شوی دی، چیرته چې

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6° \qquad \textit{Ans.}$$

تعجیل (Acceleration). د تعجیل جزونو ترمنځ اړیکه د زنجیری قاعدې (Chain Rule) په کارولو سره ټاکل کیږي. (په ضمیمه C کې یې وګورئ.)

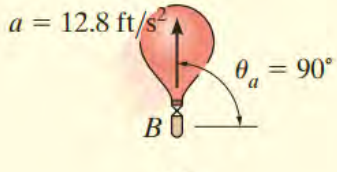
مونږ لرو:

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{a}{dt}(8) = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$
$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8\ \text{ft/s}^2 \uparrow$$

نو،

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8\ \text{ft/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$



(c)

د **a** لوری، لکه څنګه چې په انځور 12-18c کې ښودل شوی، دی

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90° \qquad \textit{Ans.}$$

انځور 12-18

یادونه: دا هم ممکنه ده چې v_y او a_y پدی ډول تر لاسه کړی چې اول $y = (8t)^2/10 = 6.4t^2$ وښیی او بیا د وخت پرله پسې مشتقونه ونیسی. $f(t) =$

مثال 12.10

د لنډ وخت لپاره، د الوتکې لاره چې په انځور 12-19a کې ښودل شوې ده، په دې ډول $y = (0.001x^2)$ m بیان شوې ده. که الوتکه د 10 متره په ثانیه کې په ثابت سرعت پورته روانه وي، د الوتکې د سرعت او تعجیل اندازې وټاکئ کله چې هغه y=100 متره ارتفاع ته ورسیږي .



حل :

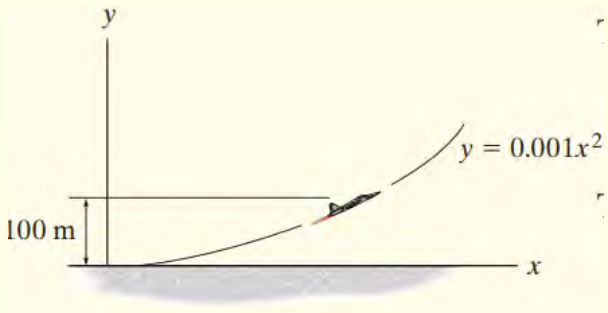
کله چې y = 100 m وي، نو
$100=0.001x^2$ یا x=316.2 m
کیږي. همدارنګه، د ثابت سرعت له مخې چې v_y=10 m/s دی، نو وخت دی:

$$y = v_y t; \qquad 100\ \text{m} = (10\ \text{m/s})\, t \qquad t = 10\ \text{s}$$

سرعت (Velocity). د زنجیر قاعدې (Chain Rule) (ضمیمه C کې معادله C-1 و ګورئ) تر څو چې د سرعت اجزاوو اړیکې په لاس رراشی، موږ لرو

$$y = 0.001x^2$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} = \frac{d}{dt}(0.001x^2) = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x \qquad (1)$$



(a) انځور 12-19

په دی توګه

$$10\ \text{m/s} = 0.002(316.2\ \text{m})(v_x)$$
$$v_x = 15.81\ \text{m/s}$$

له همدې امله د سرعت اندازه ده

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81\ \text{m/s})^2 + (10\ \text{m/s})^2} = 18.7\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

تعجيل (Acceleration).

د زنجير قاعدې (Chain Rule) له مخې يا معادله C-2 ، د وخت مشتق د معادلې 1 سره د تعجيل اجزاوو تر منځ اړيکه ورکوي

$$a_y = \dot{v}_y = (0.002\dot{x})\dot{x} + 0.002x(\ddot{x}) = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

کله چې

$$x = 316.2\ \text{m},\ v_x = 15.81\ \text{m/s},\ \dot{v}_y = a_y = 0,$$

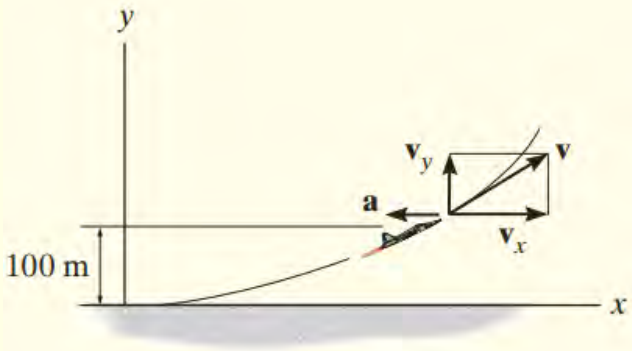
نو بيا

$$0 = 0.002[(15.81\ \text{m/s})^2 + 316.2\ \text{m}(a_x)]$$
$$a_x = -0.791\ \text{m/s}^2$$

د الوتکې اندازه د تعجيل عبارت ده په

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791\ \text{m/s}^2)^2 + (0\ \text{m/s}^2)^2}$$
$$= 0.791\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

دا پايلې په انځور 12-19b کې ښودل شوي دي.



(b)

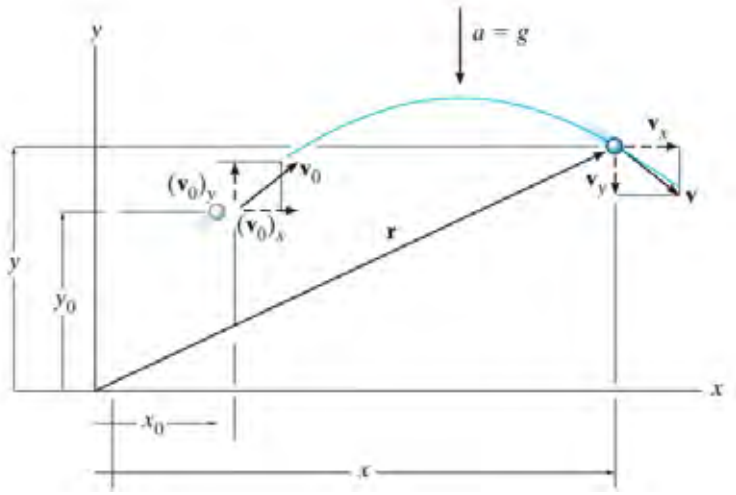
انځور 12-19

12.6 د پروجکټایل حرکت (MOTION OF PROJECTILE)

د پروجیکټایل لپاره دا مناسب دی چې د آزاد توغولو حرکت د مستطیلي اجزاو له مخې تحلیل کړو. د مثال په توګه، یو پروجیکټایل په نظر کې ونیسئ چې په (x_0, y_0) نقطه کې ، د $\mathbf{v}_0$ ابتدایي سرعت سره، توغول شوی، چې اجزاوی یې $(v_0)_x$ او $(v_0)_y$ دي، لکه په انځور 12-20 کې. کله چې د هوا مقاومت په پام کې ونه نیول شي، یواځینۍ قوه چې په پروجیکټایل عمل کوي هغه یې وزن دی، او دا پروجیکټایل ته ثابت د ښکته لورتعجیل لامل کیږي چې عبارت دی له $a_c = g = 9.81\ \text{m/s}^2$ یا $g = 32.2\ \text{ft/s}^2$ *.



هر عکس په دې سلسله کې د ورته وخت وروسته اخیستل شوی دی. په افقي لور کې، د توپ ترمنځ فاصلې یو شان دی ځکه چې د دې د سرعت برخه ثابته ده. په عمودي لور کې د توپ ترمنځ فاصله توپیر لري، ځکه چې د جاذبې له امله عمودي تعجیل -تعجیل شتون لري.



انځور 12-20

افقي حرکت (Horizontal Motion). ځرنګه چې $a_x=0$ ده، د ثابت تعجیل معادلو 12-4 تر 12-6 پورې پلي کول په لاندې ډول پایله ورکوي:

$$(\pm\rightarrow) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

لومړۍ او وروستۍ معادلې پوره دا ښيي چې د حرکت په جريان کې د سرعت افقي برخه تل ثابته پاتې کيږي.

عمودي حرکت (Vertical Motion).

ځرنګه چې $a_y = -g$ ، د معادلو 4-12 تر 6-12 نه مورِ ته راکوی:

$$(+\uparrow) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow) \qquad y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

ځرنګه چې وروستۍ معادله د لومړيو دوو معادلو څخه د وخت t په حذف کولو سره جوړيدلی شي، نو يوازې له پورته درې معادلو څخه يوازی دوی معادلی له يو بل څخه خپلواکې دي

* دا فرض کوو چې د ځمکې د جاذبې قوه د ارتفاع سره بدلون نه کوي.

په لنډيز سره ويلی شو، چې د پروجيکټايل حرکت سره تړلي پوښتنې په اعظمي ډول درې مجهولونه ولري، ځکه يوازې درې خپلواکې معادلې ليکل کيدی شي؛ يعنې، *يوه معادله په افقي* لور کې او *دوه معادلې په عمودي لور کې*. کله چې $\mathbf{v}_x$ او $\mathbf{v}_y$ ترلاسه شي، د پايلې سرعت $\mathbf{v}$ چې *تل د مسير مماس* وي، د $\mathbf{v}_x$ او $\mathbf{v}_y$ د ويکټوري جمعه کولو له لارې ټاکل کيدی شي، لکه څنګه چې په انځور 12-20 کې ښودل شوي.



کله چې د باسکیټ توپ واچول شی د پارابول ټریجکټری جوړوی

د تحلیل کړنلاره

کوردینات سیستم (Coordinate System)

- د x , y محورونه جوړ کړئ او د ذرې مسیر رسم کړئ. د مسیر په هرو دوو نقطو کې، ورکړل شوی معلومات او درې مجهوله مشخص کړئ. په ټولو حالاتو کې، د جاذبې تعجیل قوه بنکته لور ته عمل کوي چې $9.81\ m/s^2$ یا $32.2\ ft/s^2$ ده. د ذرې ابتدایي او وروستي سرعتونه باید د x او y اجزاووپه توګه وښودل شی.
- مثبت او منفي موقعیت، سرعت، او تعجیل اجزاوی تل د اړوند ه محورونو لوریو سره سم عمل کوي.

کینماتیک معادلې (Kinematic Equations)

- د ورکړ شویې ډیټا او دا چې څه شی حل شی، تر څو وکړی شو چې کومې درې معادلې د څلورو معادلو څخه د دوو نقطو په منځ کې په ورکړل شوی مسیر وکارول شی ترڅوتر ټولو مستقیم حل د سوال دپاره پلاس راشی.
- افقي حرکت (Horizontal Motion)
- سرعت په افقي یا د x جهت کی ثابت دي، د بیلګې په توګه $v_x = (v_0)_x$ او

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

عمودي حرکت (Vertical Motion)

- په عمودی یا y جهت له لاندی دریو معادلو څخه یوازی دوی معادلې د حل لپاره کارول شي.

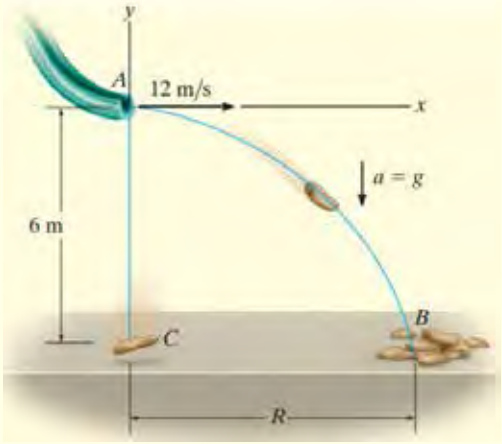
$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

مثالونه

مثال 12.11 یو بوجی له رمپ څخه، چې په انځور 12-21 کې ښودل شوې په افقي سرعت د 12 m/s کې ښوئیدلې ده. که د رمپ لوړوالی له فرش څخه 6 m وي، د هغه وخت او فاصله R معلومه کړئ کله چې بوجی ځمکې ته رسیږي.



انځور 12-21

حل

کوردینات سیستم (Coordinate System): د محورونو مبداء د لارې په پیل کې، په A نقطه کې، ټاکل شوې، لکه څنګه چې په انځور 12-21 کې ښودل شوی. د بوجی ابتدایي سرعت د اجزاوو سره $(v_A)_x = 12$ m/s او $(v_A)_y = 0$ دی . همدارنګه، د A او B تر منځ تعجیل $a_y = -9.81$ m/s² دی. له دې املې چې $(v_B)_x = (v_A)_x = 12$ m/s دی، د نامعلومه عبارت دې په R, $(v_B)_y$ او د الوتنې وخت t_{AB} . دلته موږ اړتیا نلرو چې $(v_B)_y$ معلوم کړو.

عمودي حرکت (Vertical Motion): له A څخه B ته عمودي واټن معلوم دی، له دې املې موږ کولی شو د t_{AB} لپاره د لاندې معادلې په کارولو سره مستقیم حل تر لاسه کړو

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-6\text{ m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2) t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 1.11\text{ s} \qquad \textit{Ans.}$$

افقي حرکت (Horizontal Motion) : څرنګه چې t_{AB} محاسبه شوی، R په لاندې ډول ټاکل کیږي :

$$(\pm\rightarrow) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

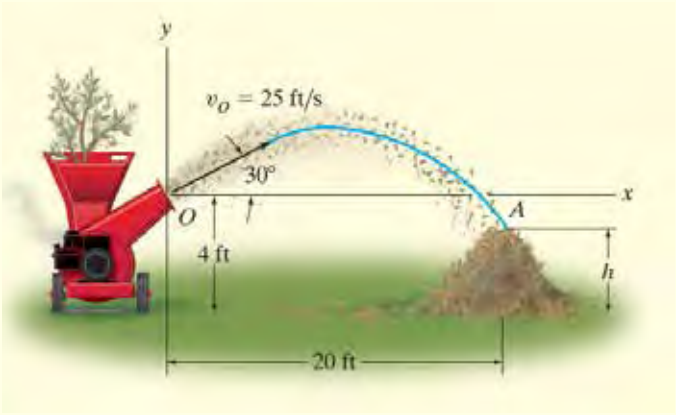
$$R = 0 + 12\text{ m/s}\,(1.11\text{ s})$$

$$R = 13.3\text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: د t_{AB} محاسبه هم دا ښیي چې که بوجی د A څخه له ساکن حالته خوشې شي، نو ځمکې رسیدو C ته، انځور 12-21 ، به همدومره وخت ونیسي.

مثال 12.12

د چپس جوړه ولو ماشين داسې ډيزاين شوی دی چې د لرګيووړی ټوټی(چپس) په v_0= 25 ft/s سرعت له تيوبه غورځوي ، لکه څنګه چې په انځور 12-22 کې ښودل شوي دي. که د چپس کولو ماشين د افقي کربنې سره په 30° کې تنظيم شوی وي، نو دا معلومه کړئ چې چپس په کوم لوړوالي h کې د چپس په کوټه لګيږي . د چپس کوټه له تيوب څخه 20 ft لرې موقعيت لري .



کوردينات سيستم (Coordinate System): دلته درې مجهوله عبارت دي په لوړوالی h ، د الوتنی وخت t_{OA} ، او د سرعت عمودي جز $(v_A)_y$. [پام وکړی چې $(v_A)_x = (v_O)_x$ دی .] څرنګه چې مبداء د محورونو په O کې ده، لکه څنګه چې په انځور 12-22 کې ښودل شوي دي، د چپس ابتدايي سرعت اجزاوې عبارت دي په :

$$(v_O)_x = (25 \cos 30°)\ \text{ft/s} = 21.65\ \text{ft/s} \rightarrow$$

$$(v_O)_y = (25 \sin 30°)\ \text{ft/s} = 12.5\ \text{ft/s} \uparrow$$

همدارنګه، $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ ft/s او $a_y = -32.2$ ft/s² . ځکه چې مورِ اړتيا نلرو چې $(v_A)_y$معلوم کړو، مورِ لرو:

افقي حرکت (Horizontal Motion) :

$$(\pm\rightarrow) \qquad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$

$$20\ \text{ft} = 0 + (21.65\ \text{ft/s}) t_{OA}$$

$$t_{OA} = 0.9238\ \text{s}$$

عمودي حرکت (Vertical Motion): د چپس ابتدايي او وروستی لوړوالی اړیکه د t_{OA} سره، مونږ لرو :

$$(+\uparrow) \quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \tfrac{1}{2} a_c t_{OA}^2$$
$$(h - 4\,\text{ft}) = 0 + (12.5\,\text{ft/s})(0.9238\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(-32.2\,\text{ft/s}^2)(0.9238\,\text{s})^2$$
$$h = 1.81\,\text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.13

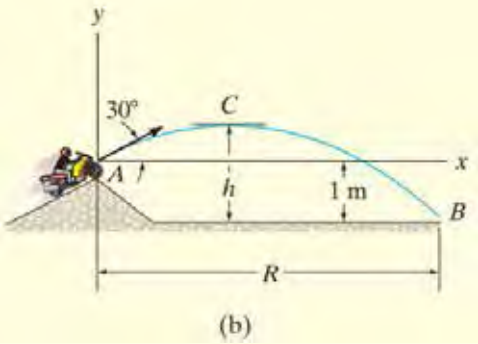
د دې مسابيقې لپاره لاره داسې ډيزاين شوی چې سواره په 30^o ميلان چې يو متر لوړوالي لری ټوپ وکړي. د يوې مسابيقې په جريان کې وليدل شول، لکه چې په انځور 12-23a کې ښودل شوی، سوار په هوا کې 1.5 ثانيې پاتې شوي. هغه سرعت معلوم کړئ په کوم کې چې سوارله رامپ (ramp) څخه حرکت کړی، هغه افقي فاصله چې سوار د ځمکې سره د لګيدو له مخې سفر کوي، اواعظمي لوړوالی چې سوار ورته رسيږي. د بايسکل او سواراندازه له پامه وغورځوئ.



(a)

حل

کوردينات سيستم (Coordinate System): لکه څنګه چې په انځور 12-23b کې ښودل شوي دي، د محورونو مبداء په A کې ټاکل شويده. د مسير د پای ټکو ABتر منځ دري مجهوله دي: ابتدايي سرعت v_A ، فاصله R ، او د عمودي سرعت جز $(v_B)_y$.



(b)

عمودي حرکت (Vertical Motion): څرنګه چې د پرواز وخت او د لاري د پایلوتر منځ عمودي واټن معلوم دی، موږ کولی شو v_A معلوم کړو

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$
$$-1\text{ m} = 0 + v_A \sin 30°(1.5\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)(1.5\text{ s})^2$$
$$v_A = 13.38\text{ m/s} = 13.4\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

افقي حرکت (Horizontal Motion) : اوس کولی شو فاصله R معلومه کړو

$$(\pm\rightarrow) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$
$$R = 0 + 13.38 \cos 30°\text{ m/s}(1.5\text{ s})$$
$$= 17.4\text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

د اعظمي لوړوالی h موندلو لپاره، موږ به مسیر AC په نظر کې ونیسو، لکه څنګه چې په انځور 12-23b کې ښودل شوي دي. دلته دري مجهوله دي: د الوتنې وخت t_{AC} ، له A څخه C ته افقي فاصله، او لوړوالی h . په اعظمي لوړوالی کې $(v_C)_y = 0$ دی ، او څرنګه چې v_A معلوم دی، موږ کولی شو په مستقیمه توګه h پرته له دې چې t_{AC} په نظر کې ونیسو د لاندې معادلې په مرسته سره .معلومه کړو

$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[y_C - y_A]$$
$$0^2 = (13.38 \sin 30°\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)[(h - 1\text{ m}) - 0]$$
$$h = 3.28\text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: وښایئ چې بایسکل به له ځمکې سره په B کې تکر وکړي د لاندې سرعت اجزاوو سره.

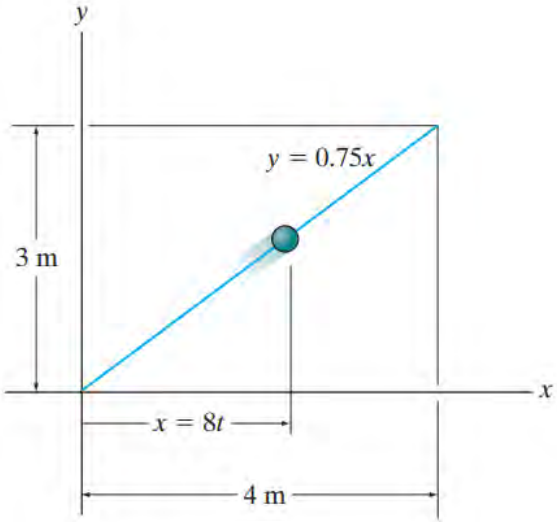
$$(v_B)_x = 11.6\text{ m/s} \rightarrow, \quad (v_B)_y = 8.02\text{ m/s} \downarrow$$

بنسټیزې پوښتنې

FUNDAMENTAL PROBLEMS

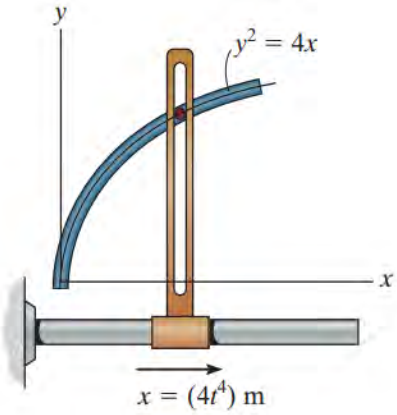
ب 12-15. که د یوې ذرې د سرعت xاو y اجزاوې راکړل شوی وی ، v_y $V_x = (32t)$ m/s = 8 m/s. د لارې $y = f(x)$ معادله معلومه کړئ، که $x = 0$ او $y = 0$ کله چې $t = 0$ وي.

ب 12-16. یوه ذره د مستقیم لارې په اوږدو کې سفر کوي. که د x محور په اوږدو کې د هغې موقعیت $x = (8t)$ m وي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د هغې سرعت معلوم کړئ کله چې $t = 2$ s وي.



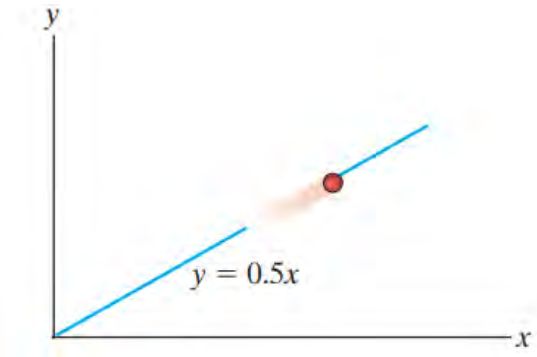
ب 12-16

ب 12-17. یوه ذره د لارې په اوږدو کې د محدودیت سره مخ ده. که $x = (4t^4)$ m وي، چیرې چې t په ثانیو کې اندازه کیږي، د ذرې د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $t = 0.5$ s وي.



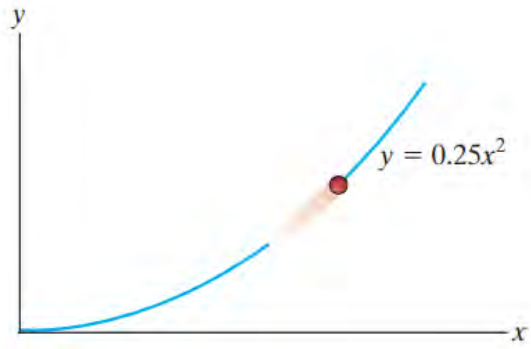
ب 12-17

ب 12-18. یوه ذره په مستقیم لاره د $y = 0.5x$ په اوږدو کې سفر کوي، که د ذرې د سرعت x جز $v_x = (2t^2)$ m/s وي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د ذرې د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $t = 4$ s وي.



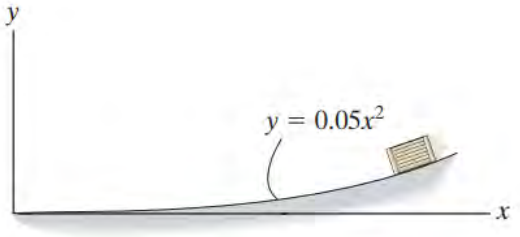
ب 12-18

ب 12-19. یوه ذره د پارابولیک لارې $y = 0.25x^2$ په اوږدو کې سفر کوي. که $x = 8$ m، $v_x = 8$ m/s، او $a_x = 4$ m/s² وي کله چې $t = 2$ s وي، د ذرې د سرعت او تعجیل مقدارونه په دې وخت کې معلوم کړئ.



ب 12-19

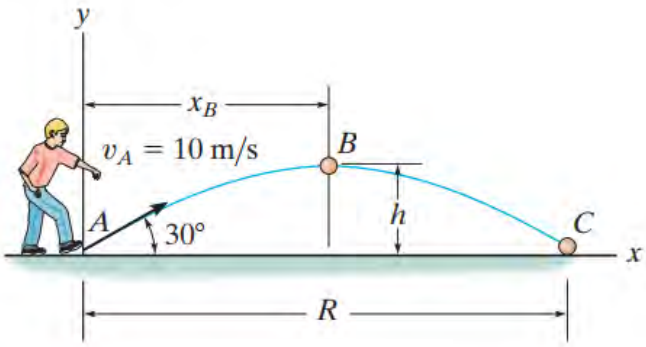
ب 12-20. یو صندوق د لارې په اوږدو کې له لارې بهیږي، لاره یې په معادله $y = (0.05x^2)$ m تعریف شوې، چیرې چې x په مترو کې دی. د صندوق د سرعت او تعجیل x اجزاوې عبارت دي په $v_x = -3$ m/s او $a_x = -1.5$ m/s² . کله چې $x = 5$ m وي، د صندوق د سرعت او تعجیل y اجزاوې په دې وخت کې معلومې کړئ.



ب 12-20

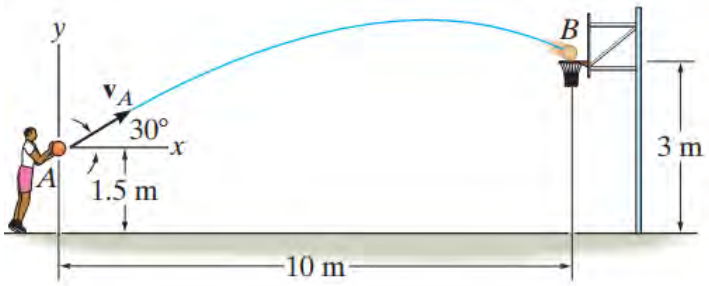
ب 12-21. توپ له A نقطې څخه د ابتدايي سرعت $v_A = 10$ m/s سره ويشتل شوی دی. اعظمي لوړوالی h چې توپ ورته رسيږي معلوم کړئ.

ب 12-22. توپ له A نقطې څخه د ابتدايي سرعت $v_A = 10$ m/s سره ويشتل شوی دی. کله چې توپ په ځمکه لګيږي فاصله R او سرعت معلوم کړئ.



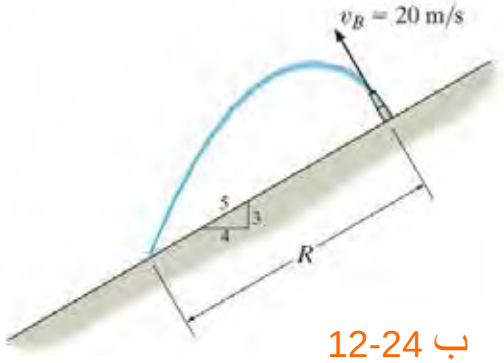
ب 12-21/22

ب 12-23. هغه سرعت معلوم کړئ په کوم کې چې باسکټبال له A څخه په 30^o زاويه کې ويشتل کيږي، ترڅو چې دا د B بسکټ ته ورسيږي.



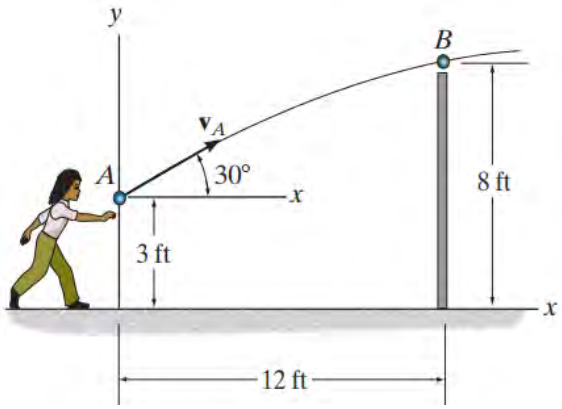
ب 12-23

ب 12-24. اوبه په 20 m/s سرعت له مايلی سطحې په ° 90 زاويه شنل کيږي. فاصله د R معلومه کړئ.



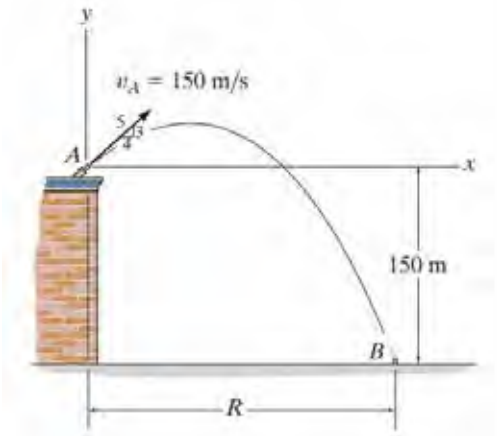
ب 12-24

ب 12-25. توپ له A څخه ویشتل کیږي. که اړتیا وي چې له دیواله په B کې تېر شي، لږ تر لږه اندازه د ابتدايي سرعت v_A معلومه کړئ.



ب 12-25

ب 12-26. یو توغندی په ابتدايي سرعت $v_A = 150$ m/s سره د ودانۍ له بام څخه توغول کیږي. فاصله R معلومه کړئ چې په B کې په ځمکه ولګیږي.



ب 12-26

پوښتنې

PROBLEMS

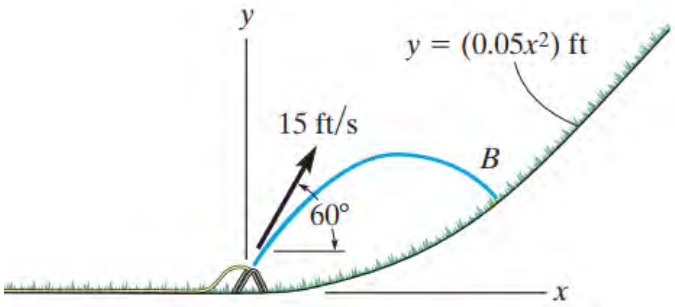
12-69. که د یوې ذرې سرعت $\mathbf{v}(t) = \{0.8t^2\mathbf{i} + 12t^{1/2}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\}$ m/s وي، د ذرې مقدار اوسمتي کوردینات زاویې (coordinate direction angles) α, β, γ د ذرې د تعجیل معلومې کړئ کله چې $t = 2$ s وي.

12-70. یوه ذره د منحني $y = e^{2x}$ په اوږدو کې حرکت کوي چې د ثابت سرعت مقداریې v = 4 ft/s=دي. د ذرې د سرعت x او y اجزاوې معلومې کړئ کله چې ذره په $y = 5$ ft کې وي.

12-71 . یوه ذره د پارابولیک لارې $y = bx^2$ په اوږدو کې ده. که د هغې د سرعت y محورپه اوږدو $v_y = ct^2$ وي، د ذرې د x او y اجزاوو تعجیل معلوم کړئ. دلته b او c ثابت اعداد دي.

*12-72 . یوه ذره د دایروي لارې $x^2 + y^2 = r^2$ په اوږدو کې سفر کوي. که د ذرې د سرعت y محور جز $v_y = 2r \cos 2t$ وي، د هغې د تعجیل x او y اجزاوې په هر وخت کې معلوم کړئ.

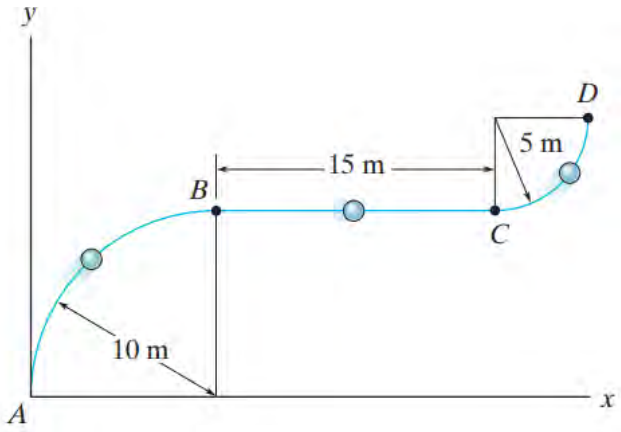
12-73 . د اوبو شیندونکی (سپرینکلر) د یوې غونډۍ په لمنه کې موقعیت لري، او دا په سرعت 15 ft/s د سره اوبو ته جریان ورکوي لکه څنګه چې په لاندې انځور کې ښودل شوي دي. هغه نقطه $B(x, y)$ معلوم کړئ چې اوبه په غونډۍ کې ځمکې ته لګیږي. فرض کړئ چې غونډۍ د $y = (0.05x^2)$ ft معادلې له مخې تعریف شوې ده او د شیندونکي اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 12-73

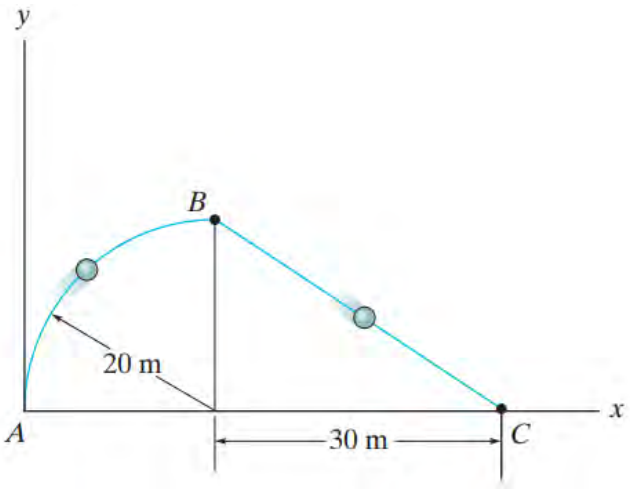
12-74 . یوه ذره د منحني $y = x - (x^2/400)$ په اوږدو کې حرکت کړي، چیرې چې x او y په ftکې دي. که د x محور په لور د سرعت جز $v_x = 2$ ft/s وي او دا ثابت پاتې شي، د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $x = 20$ ft وي.

12-75 . یوه ذره له A څخه B ته په 2 s کې سفر کوي. دا 4 s وخت نیسي ترڅو له B څخه C ته لاړ شي او بیا 3 s وخت نیسي ترڅو له C څخه D ته لاړ شي. د ذرې تیزوالی معلوم کړئ کله چې دا له A څخه D ته ځي.



پوښتنه 12-75

★ 12-76 . يوه ذره له A څخه B ته په 5 s کې سفر کوي. دا 8 s وخت نيسي ترڅو له B څخه C ته لاړ شي او بيا 10 s وخت نيسي ترڅو له C څخه A ته لاړ شي. د ذرې اوسط تيزوالی معلوم کړئ کله چې دا د ټرل شوي لارې په اوږدو کې سفر کوي.

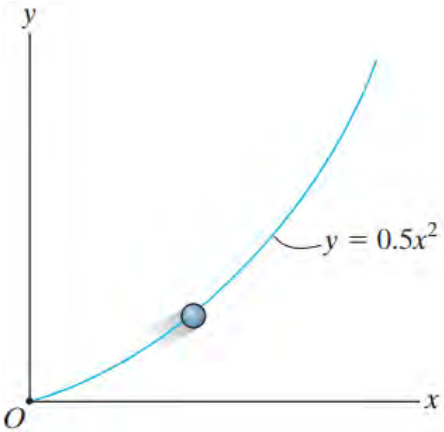


پوښتنه 12-76

12-77 . وښایئ چې که يو پروجيکټايل په q زاويه کې له افق سره د ابتدايي سرعت $\mathbf{v}_0$ سره ويشتل شوی وي، د پروجيکټايل اعظمي فاصله چې دا سفر کولی شي د $R_{max} = v_0^2/g$ په واسطه ورکړل شوې ده، چيرې چې g د جاذبې تعجيل دی. د دې شرايطو لپاره زاويه q څه ده؟

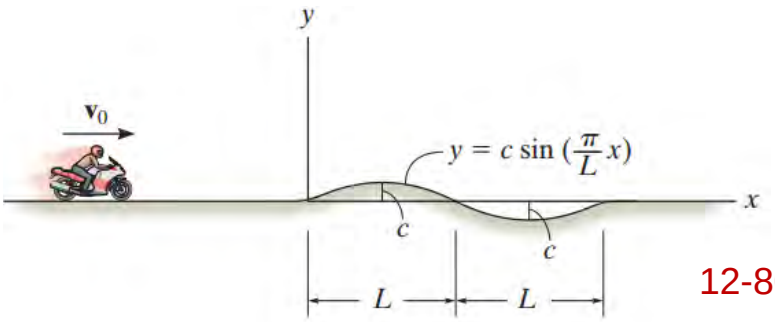
12-78 . يو راکټ د $x = 0$ څخه د آرامی حالت څخه توغول کيږي او د پارابوليک لارې y^2 = [120(10³)x] m په اوږدو کې ځي. که د تعجيل x جز a_x = (1/4 t²) m/s² وي، چيرې چې t په ثانيو کې وي، د راکټ د سرعت او تعجيل مقدارونه معلوم کړئ کله چې t =10 s وي.

12-79 . ذره د پارابوليک لارې $y = 0.5x^2$ په اوږدو کې سفر کوي. که د x محور په لور د سرعت جز $v_x = (5t)$ ft/s وي، چيرې چې t په ثانيو کې وي، د ذرې فاصله له مبداء O څخه او د تعجيل مقدار معلوم کړئ کله چې $t = 1$ s وي. کله چې $t = 0$ وي، $x = 0$ او $y = 0$.



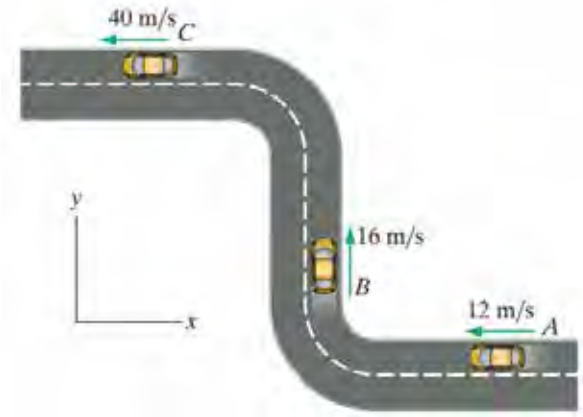
پوښتنه 12-79

*12-80 . موټرسايکل د ثابت سرعت v_0 سره د لارې په اوږدو کې سفر کوي چې د لنډ واټن لپاره د ساين منحني بڼه اخلي. د موټرسايکل د سرعت x او y اجزاوې په هر وخت کې د منحني په اوږدو کې معلوم کړئ.



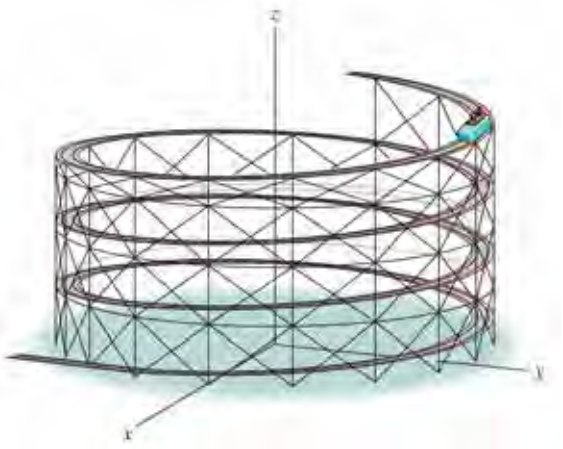
پوښتنه 12-80

12-81 . يو موټر په سړک کې سفر کوي چې په A ، B، او C ټکو کې ښودل شوي سرعتونه لري. که دا 10 s وخت نيسي ترڅو له A څخه B ته لاړ شي او بيا 15 s وخت نيسي ترڅو له B څخه C ته لاړ شي، د A او B تر منځ او د A او C تر منځ منځنی تعجيل معلوم کړئ.



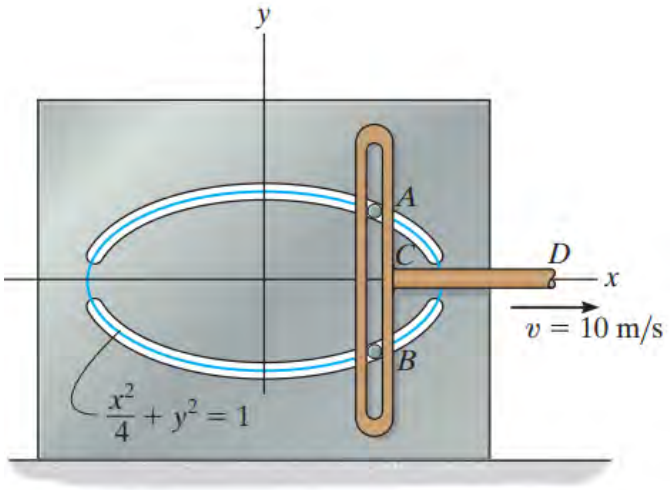
پوښتنه 12-81

12-82 . د رولر کوسټر موټر د هيليکل (helical) لارې په اوږدو کې په ثابت تيزوالي سره سفر کوي چې د هغې موقعيت د پارامتريک (parametric) معادلاتو له مخې تعريف شوی دي $x = c\sin kt$، $y = c\cos kt$، $z = h - bt$، چيرې چې c ، h، او b ثابت دي. د موټر د سرعت او تعجيل مقدارونه معلوم کړئ.



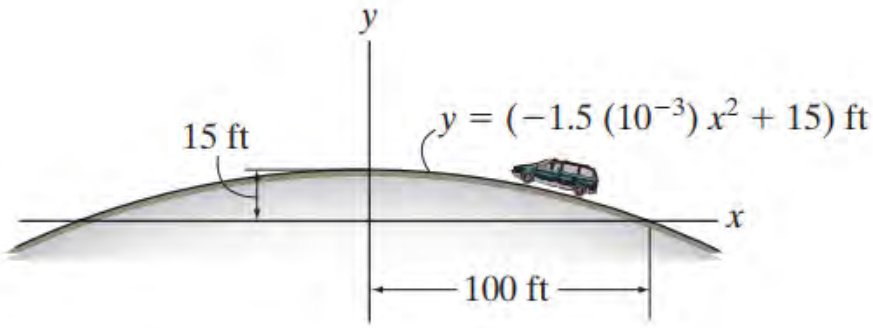
پوښتنه 12-82

12-83 . میخونه (پیګونه) A او B په بیضوی شکل غوڅه (elliptic slots) کې د غوڅی اړوند (slotted link) د حرکت له امله حرکت کوي. که لینک په ثابت تیزوالي 10 m/s سره حرکت وکړي، د میخ A د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $x = 1\text{m}$ وي.



پوښتنه 12-83

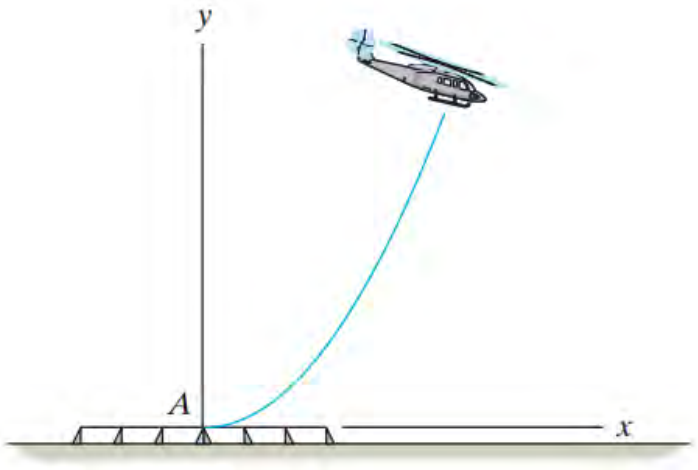
★ **12-84 .** یو ون د یوي غونډۍ په سر چې د $y = (-1.5(10 - 3)\ x^2 + 15)$ ft په واسطه تعریف شوې ده په اوږدو کې سفر کوي. که دا ثابت سرعت 75 ft/s ولري، د ون د سرعت او تعجیل x او y اجزاوي معلوم کړئ کله چې $x = 50$ ft وي.



پوښتنه 12-84

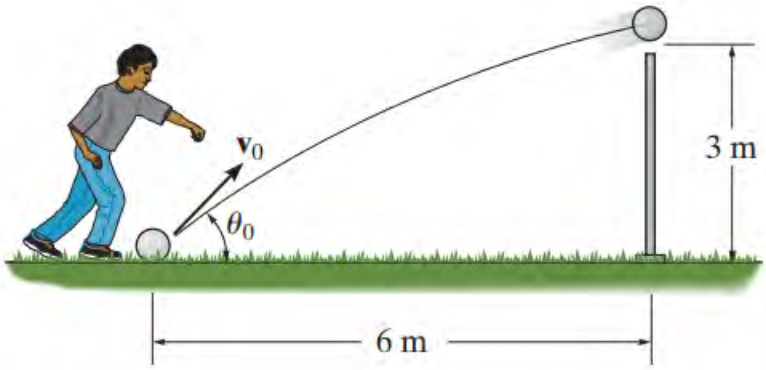
12-85 . د هیلیکاپټر د الوتنې لاره له A څخه داسې ده چې د پرامیتریک (PARAMETRIC) معادلاتو له مخې تعریف شوې ده په $X = (2\,T^2)$ M او $Y =$

$(0.04\,T^3)$ M، چیرې چې T په ثانیو کې ده. د هیلیکاپټر فاصله له A نقطې څخه او د هغې د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $T = 10$ S وي.



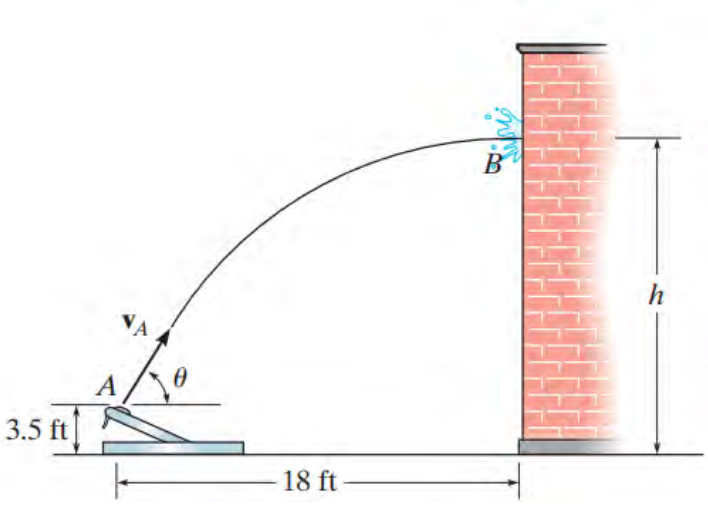
پوښتنه 12-85

12-86 . لږ تر لږه ابتدايي سرعت v_0 او اړوند زاويه q_0 معلوم کړئ په کوم کې چې توپ بايد ووهل شي ترڅو يوازې د 3 m لوړوالی کټاری څخه تير شي.



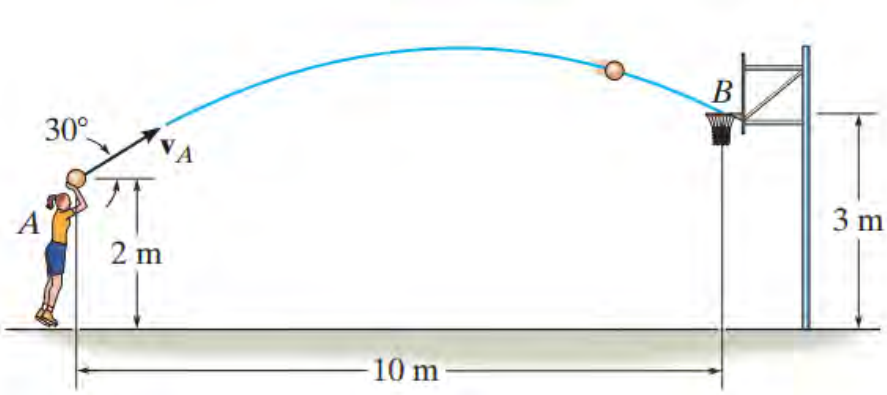
پوښتنه 12-86

12-87 . منجنيق (Catapult) د يوه توپ په ويشتلو کې کارول کيږي ترڅو توپ د هغې د حرکت په اعظمي لوړوالی کې د ودانۍ په ديوال ولګيږي. که دا توپ 1.5 s وخت نيسي ترڅو له A څخه B ته ورسيږي، ابتدايي سرعت $\mathbf{v}_a$ معلوم کړئ کله چې دا ويشتل شوی و، او هم د توپ د خوشې کيدو زاويه q ، او لوړوالی h وټاکي.



پوښتنه 12-87

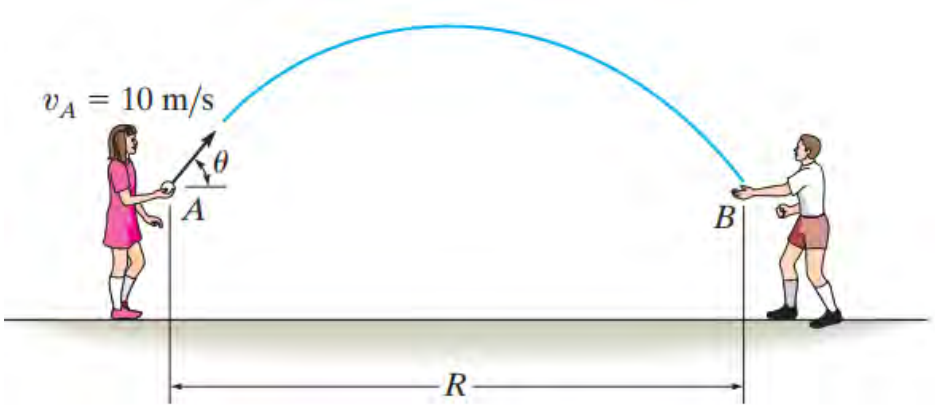
★ 12-88 . د توپ اندازه په پام کی مه نیسي ، د باسکټبال د ابتدايي سرعت مقدار v_A او هم د هغه سرعت کله چې دا د ټوکرۍ له لارې تيريږي معلوم کړئ



پوښتنه 12-88

12-89 . نجلۍ په A کې کولای شي په $v_A = 10$ m/s سره توپ وغورځوي. اعظمي ممکنه فاصله $R = R_{max}$ او اړوند زاويه θ چې بايد وغورځول شي محاسبه کړئ. فرض کړئ چې توپ په Bکې په هغه کچه لوړوالی نيول کيږي چې له کومې څخه چې غورځول شوی وا.

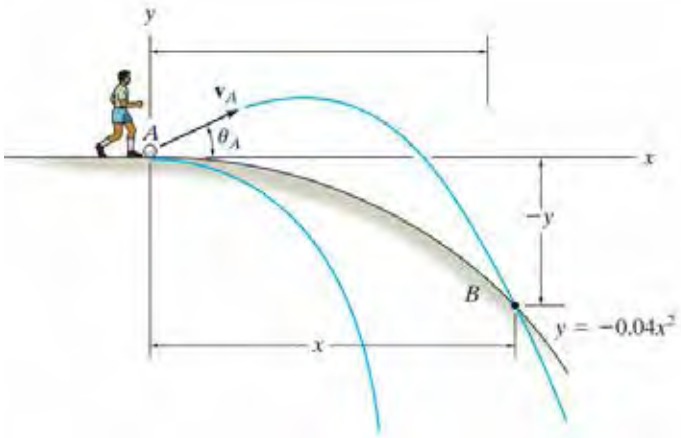
12-90 . وښیئ چې نجلۍ په A کې کولای شي توپ هلک ته په B کې وغورځوي، د توپ د غورځولو زاویې په مساوي زاویو باندې له 45° کچې څخه پورته یا ښکته اندازه شوي. که v_A = 10 m/s وي، د دې فاصلې R معلوم کړئ که دا اندازه 15° وي، یعنې $\theta_1 = 45° - 15° =$ 30° او $\theta_2 = 45° + 15° = 60°$. فرض کړئ چې توپ په هماغه سطحه کې نیول کیږي چې له کومې څخه چې غورځول شوی وي.



پوښتنې 12-89/90

12-91 . توپ په A کې په v_A = 16 ft/s او په $\theta_A = 30°$ زاویه کې وهل شوی. هغه نقطه $(x, -y)$ معلومه کړئ چېرې چې دا په ځمکه لګیږي. فرض کړئ چې ځمکه د پارابولیک شکل لري لکه څنګه چې ښودل شوي.

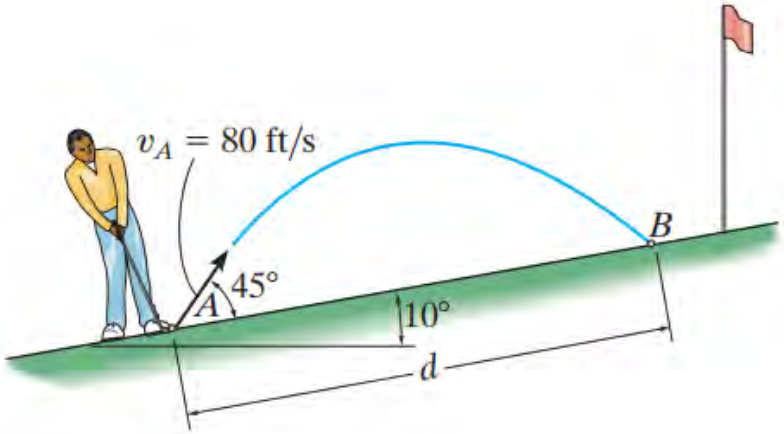
★ **12-92 .** توپ په A کې په $\theta_A = 30°$ سره وهل کیږي. دا په B کې په ځمکه په هغه ځای کې چې کوارډینات یې x = 15 ft او y = -9 ft دي لګیږي ، معلوم کړئ چې دا په کوم تیزوالي وهل شوی ، اوهم هغه تیزوالي چې په ځمکه لګیږي وتاکي.



پوښتنې 12-91/92

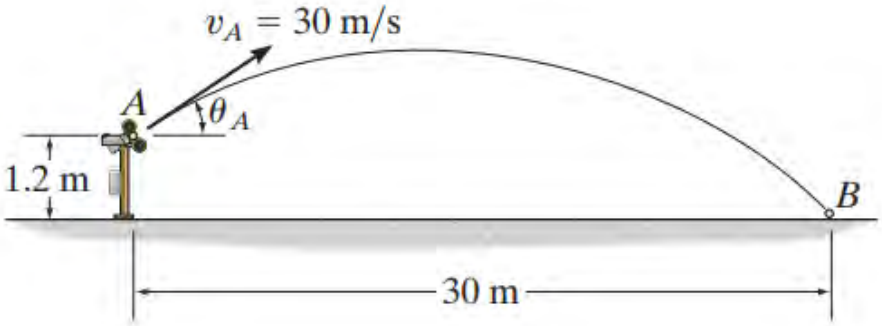
12-93 . د ګالف توپ لکه څنګه چې په لاندې انځور کې ښودل شوي په 80 ft/s سرعت سره وهل شوی. هغه فاصله d معلومه کړئ چېرې چې به ځمکه لګیږي.

12-94 . د ګالف توپ لکه څنګه چې ښودل شوي په 80 ft/s سرعت سره وهل شوی. هغه تیزوالي معلوم کړئ په کوم چې په B کې ځمکې ته لګیږي، او هم د A څخه B ته د توپ په هوا کې وخت معلوم کړئ.



پوښتنې 12-93/94

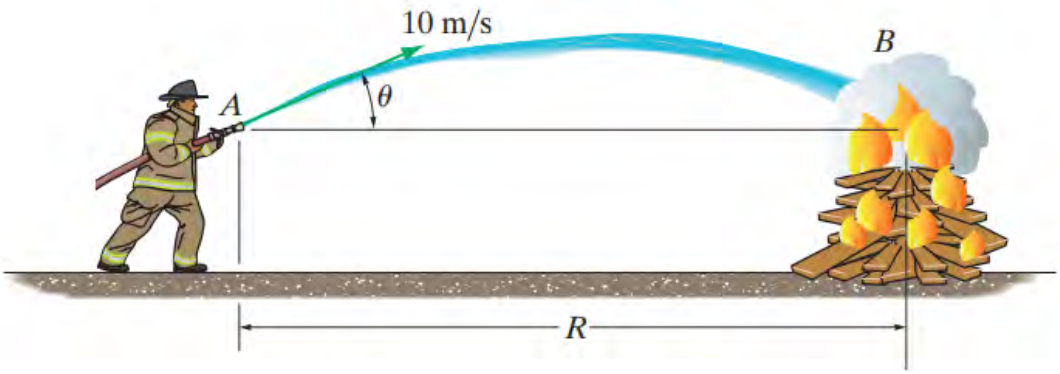
12-95 . د توپ وهلو ماشین داسې تنظیم شوی چې بیسبال په $v_A = 30$ m/s تیزوالي سره وغورځوی. که توپ په B کې په ځمکه ولګیږي، دوه ممکنې زاویې θ_A معلوم کړئ په کوم کې چې توپ غورځول شوی دی.



پوښتنه 12-95

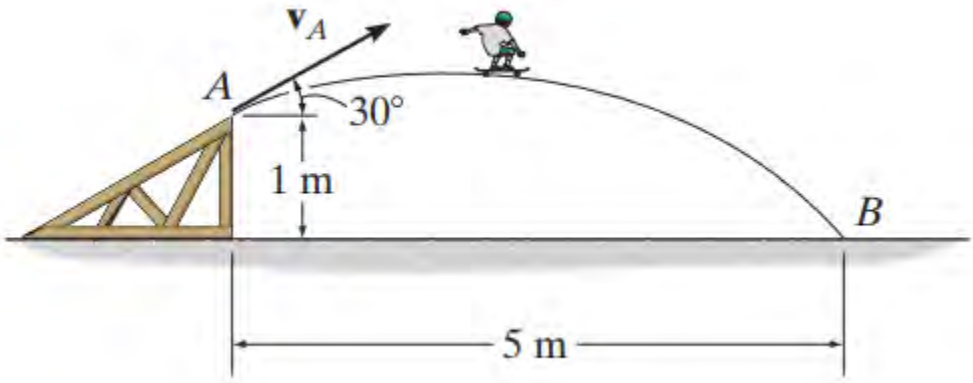
★ 12-96 . یو وور وژنکي په A کې د اوبو د پایپ سره ولاړ دی چې اوبه د پایپ نه په ثابته توګه په 10 m/s تیزوالی جریان لري. اعظمي واټن $R = R_{max}$ محاسبه کړئ چې اوبه "وغورځوي" او هغه زاویه θ چې باید داوبو پایپ ونیول شي معلومه کړئ.

12-97 . وښایئ چې اور وژنې په A کې کولی شي اوبه په B باندې "وغورځوي" د اوبو پایپ په لاندې مساوي زاویو برابرولو له لارې، په $\theta_1 = 45° - 15° = 30^0$ او $\theta_2 = 45°$ + 15°= 60^0 . اوبه په نازل (Nozzle) کې 10 m/s تیزوالي لري.



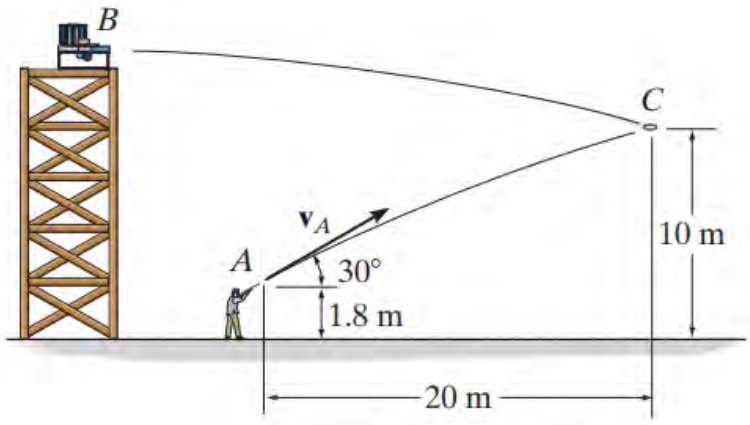
پوښتنې 12-96/97

12-98 . د سکیټ بورډ سپرلی په A کې په ابتدایي سرعت v_A او 30^0 زاویه حرکت کوی. که دی په B کې ځمکې ته ورسیږی، v_A او د الوتنې وخت معلوم کړئ.



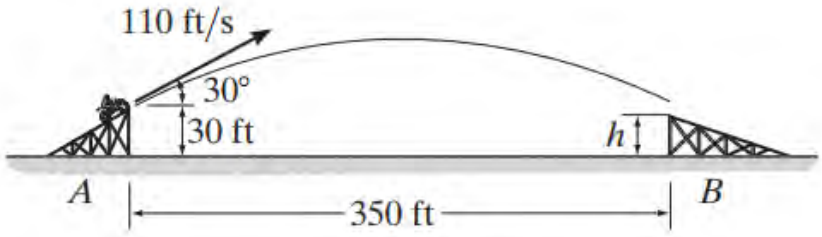
پوښتنه 12-98

12-99 . یو پروجیکټایل له B پلیټفارم څخه توغول کیږي. یویشتونکی خپل توپک په A نقطه کې په $30°$ زاویه کې واروي. د توپک د خولې مرمۍ د وتلو تیزوالی معلوم کړئ که دا په C کې په پروجیکټایل ولګیږي.



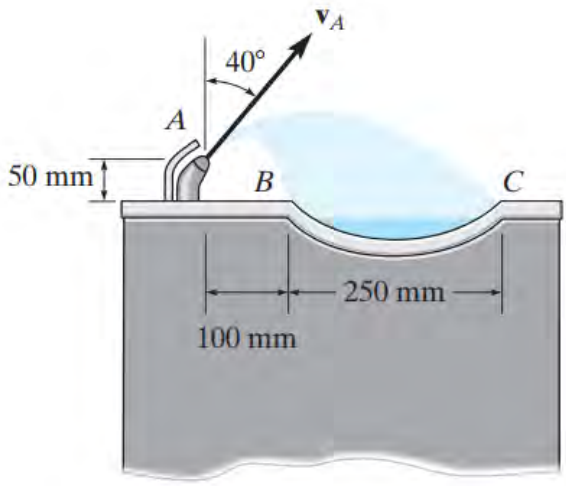
پوښتنه 12-99

★ 12-100 . که موټر سایکل له A رامپ څخه په 110 ft/s سره حرکت وکړي، د B رامپ لوړوالی h معلوم کړئ ترڅو موټر سایکل په خوندي ډول هلته ولګیږي.



پوښتنه 12-100

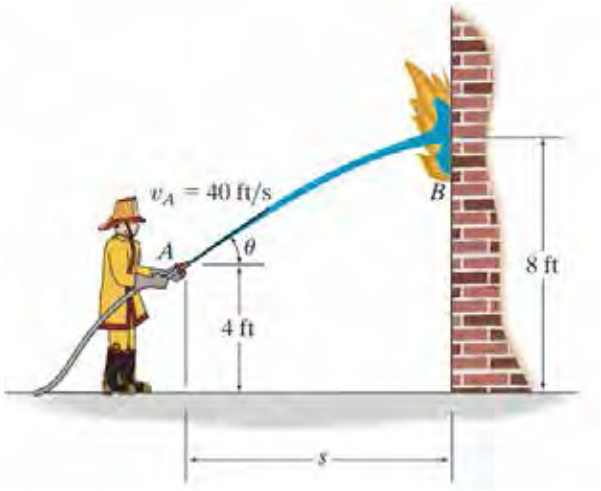
12-101 . د اوبود څښلو فواره داسې ډیزاین شوې چې د څښلو نل د حوضې د څنډې څخه لرې موقعیت لري لکه څنګه چې په لاندې انځور کې ښودل شوي. اعظمي او اصغری تیزوالي د اوبو چې د نل نه وزی معلوم کړئ ترڅو د حوض د B او C له څنډو څخه تویې نه شي.



پوښتنه 12-101

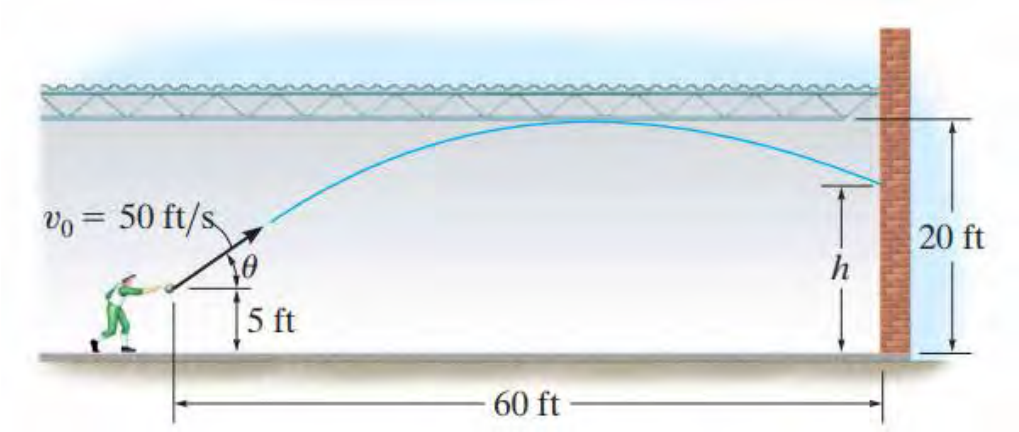
12-102 . نل په 30° زاويه کې د افق سره نيول شوی دی، او اوبه په *A* کې په 40 ft/s سرعت سره وزی. که اوبه په *B* کې په ودانۍ لګيږي، دوه ممکنه فاصلی *s* له ودانۍ څخه معلومی کړئ.

12-103 .اوبه له پايپ څخه په 40 ft/s تيزوالي سره خارج کيږي. دوه ممکنه زاويې *θ* معلومی کړئ په کوم کې چې اور وژونکی کولی شي پايپ ونيسي ترڅو اوبه په *B* کې په ودانۍ ولګيږي. فاصله *s* = 20 ft واخلئ.



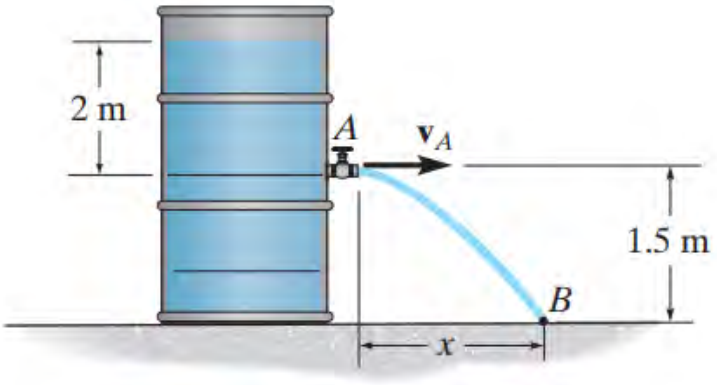
پوښتنی 12-102/103

★ 12-104 . يو سړی له دېوال څخه 60 ft فاصله لري او په 50 ft/s تيزوالي سره ورته توپ غورځوي. هغه زاويه θ معلوم کړئ په کوم کې چې بايد توپ خوشې شي ترڅو په لوړترينه نقطه کې په دېوال ولګيږي. دا لوړوالی څه دی؟ خونه د 20 ft چت لوړوالی لري.



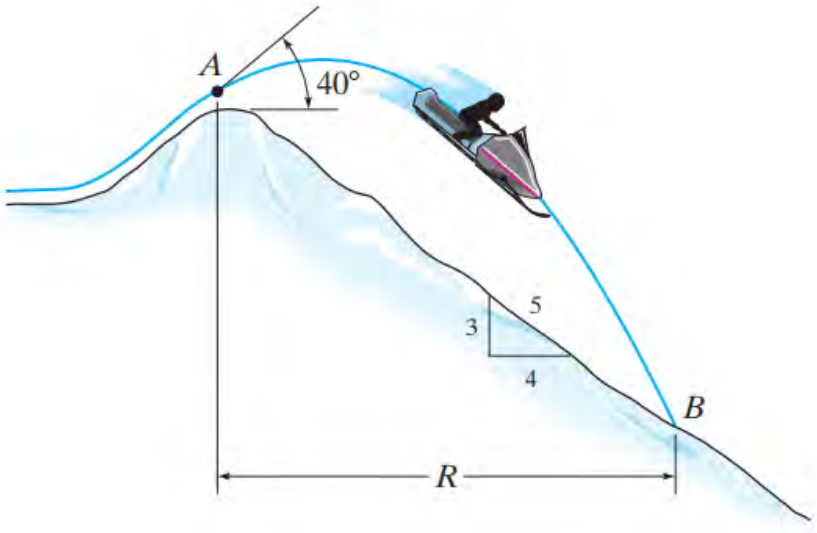
پوښتنه 12-104

12-105 . له شيردان څخه د اوبو د خارج کيدو سرعت د $v = \sqrt{2gh}$ له مخې ترلاسه کيدی شي، چيرې چې $h = 2$ m ژوروالی د اوبو د سطحې تر شيردانه دی. هغه وخت معلوم کړئ ترڅو د اوبو يوه ذره له شيردان څخه B نقطې ته ورسيږي او هغه افقي فاصله x چيرې چې دا ذره داوبو په لاندې سطحه باندې ولګيږي معلومه کړئ.



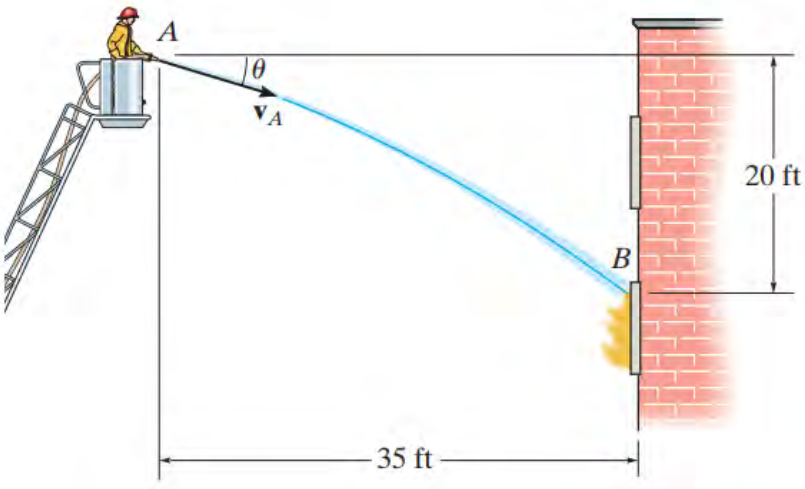
پوښتنه 12-105

12-106 . د واورې بنویدوموټر (snowmobile) کله چې دغږونډې دځوکی په A کې په 10 m/s تیزوالی سره حرکت کوي. د A ځخه B ته د الوتنې وخت او د مسیر (trajectory) فاصله R معلوم کړئ.



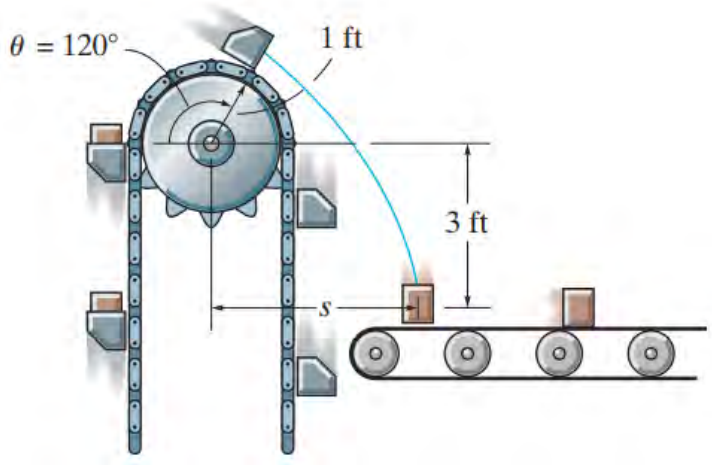
پوښتنه 12-106

12-107 . اور وژونکی غواړي چې اور په B کی د اوبود جریان هدف کړي. دوه ممکنه زاویې θ_1 او θ_2 معلومی کړئ په کوم کې چې دا کیدی شي. اوبه له پایپ نه په 80 ft/s سرعت سره وزی.



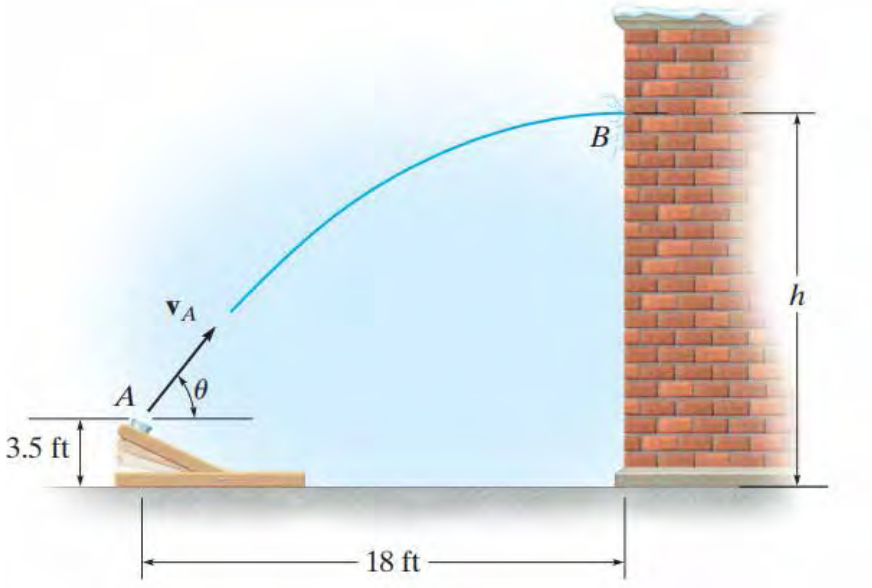
پوښتنه 12-107

★ 12-108 . ډولچی په کانویور باندې په 15 ft/s تیزوالی سره حرکت کوي. هر ډولچه یو بلاک لري چې کله $\theta = 120°$ وي بلاک له ډولچی څخه لویږی. هغه فاصله s معلوم کړئ چیرې چې بلاک په کانویور باندې لګیږي. د بلاک اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 12-108

12-109 . منجنیک د توپ په ویشتلو لپاره جوړ شوی ترڅو توپ د هغې د حرکت په اعظمي لوړوالی کې د ودانۍ په دیوال ولګوي. که دا 1.5 s وخت ونیسي ترڅو توپ له A څخه B ته ورسیږی، د ویشتل کیدو ابتدایي سرعت v_A معلوم کړئ، همدارنګه د خوشې کولو زاویه θ ، او لوړوالی h معلوم کړی.



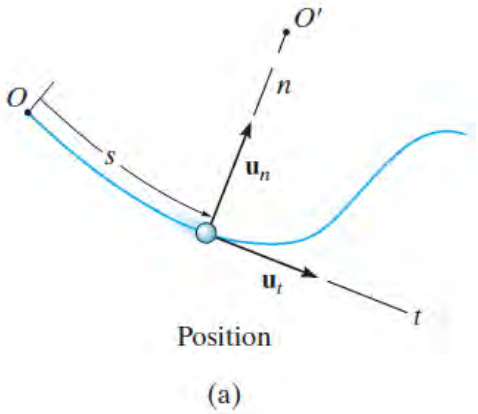
پوښتنه 12-109

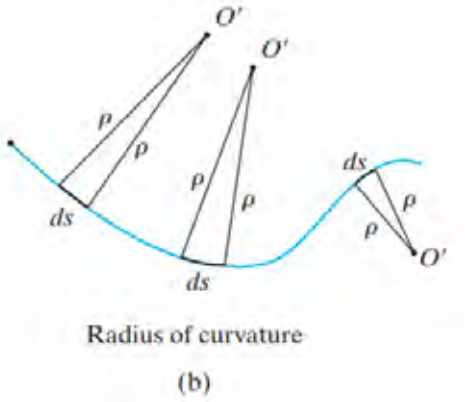
12.7 منحني حرکت : نارمل او مماسي اجزاوې

(CURVILINEAR MOTION: NORMAL AND TANGENTIAL COMPONENTS)

کله چې د ذرې د حرکت لاره معلومه وي، نو ډيرې وختونه دا مناسب دي چې حرکت د n او t محورونو په کارولو سره بيان کړو، چې په ترتيب سره نارمل او مماس په مسير محورونه دي. او په هغه شببه کې چې غور پرې کيږي د دې محورونو مبداء په ذره کې انتخاب کيږي .

سطحي حرکت (Planar Motion). د دې محورونو د ټاکلو لپاره ذره په انځور 12-24a کې په پام کې ونيسئ، کوم چې په موقعيت s کې ده اوهغه له نقطې O څخه اندازه شوی. د t محور د منحني په هغه ځای کې چې ذره موجود وي مماس دی او په هغه لوري کې مثبت دی چې د s زياتيدو لوري ته اشاره کوي. مونږ به دا مثبت لوری د $\mathbf{u}_t$ واحد ويکټور په وسيله وښيو. د نارمل محور لپاره يو ځانګړی انتخاب د دې په يادولو سره کيدی شي چې دهندسي په توګه منحني له يوې سلسلې کوچنيو قوسې برخو ds څخه جوړه شوې دی، انځور 12-24b .هره برخه ds د يوې قوس له يوې دايرې څخه جوړه شوې چې د شعاع دانحنا رو r (rho) او مرکز دانحنايي O' دي. نارمل محور n د t محور سره عمودي دی او د هغې مثبت لوری د انحنا مرکز O' په لور دی، انځور 12-24a . دا لوری چې تل د منحني د داخلي خواته يا په محراب (concave) وي، د $\mathbf{u}_n$ واحد ويکټور په وسيله وښودل شي. هغه سطحه چې د n او t محورونه لري، د embracing يا لمس کونکي سطحی يا (osculating) سطحې په نوم يادیږي، او په دې حالت کې دا د حرکت په سطحه کې ثابت دی.

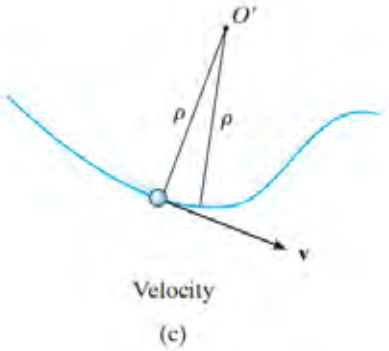




انځور 12-24

سرعت (Velocity). لکه څنګه چې په 12.4 برخه کې بنودل شوې، د ذرې سرعت **v** یو جهت لرې چې تل په د مسیر سره مماس وي، انځور 12-24c ، او اندازه يې په مشتق نیولو د مسیر تابع $s = s(t)$ نسبت وخت ته ټاکل کیږي، یعنې $v = ds/dt$ (معادله 12-8). له همدې امله،

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \qquad (12–15)$$



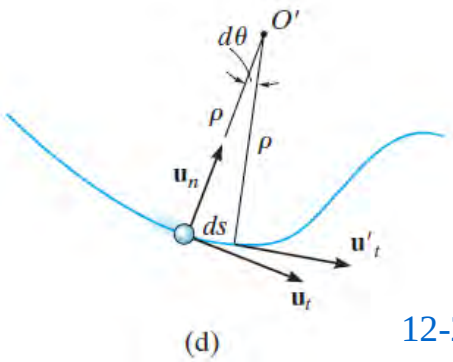
چیرې چې انځور 12-24

$$v = \dot{s} \qquad (12–16)$$

تعجیل (Acceleration). د ذره تعجیل د سرعت د بدلون کچه نسبت وخت ته ده. نو له همدې امله،

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \qquad (12–17)$$

د وخت مشتق $\dot{\mathbf{u}}_t$ د ټاکلو لپاره، پام وکړئ کله چې ذره دقوس ds په اوږدو کې په وخت dt کې حرکت کړي، $\mathbf{u}_t$ خپل واحده اندازه ساتي؛ خو د هغې *لورې* بدلیږي، او $\mathbf{u}'_t$ کیږي، لکه څنګه چې په انځور 12-24d کې بنودل شوي. لکه څنګه چې په انځور 12-24e کې بنودل شوي، مور ارتیا لرو چې $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$ چیرې چې $d\mathbf{u}_t$ تر منځ د تیرود سرونو د $\mathbf{u}_t$ او $\mathbf{u}'_t$ تر منځ عمل کوي. څرنګه چې $u_t = u'_t = 1$، نو بیا $d\mathbf{u}_t$ اندازه لرې د



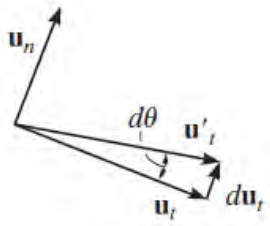
انځور 12-24

$du_t = (1)\, dq$ ، او د هغې لورې د $\mathbf{u}_n$ په وسيله تعريف شوی دی. په پايله کې، $du_t = dq\mathbf{u}_n$،
نو له همدې امله د وخت مشتق کيږي $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{q}\,\mathbf{u}_n$. څرنګه چې $ds = r\,dq$، لکه څنګه چې په
انځور 12-24d کې ښودل شوي، نو $\dot{\theta} = \dot{s}/r$ ، او له همدې امله،

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$

دا په معادله 12-17 کې ځای په ځای کوو، کيدلې شي چې $\mathbf{a}$ په مجموعه د دوو اجزاو سره په
لاندې ډول وليکو

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n \qquad (12\text{–}18)$$

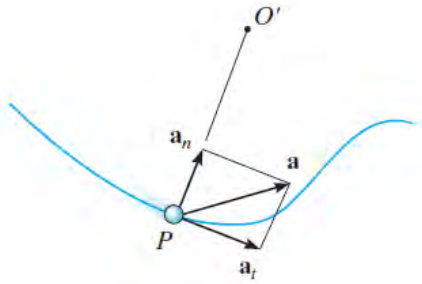


(e)

چيرې

$$a_t = \dot{v} \quad \text{or} \quad a_t ds = v\, dv \qquad (12\text{–}19)$$

او



Acceleration

(f)

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (12\text{–}20)$$

انځور 12-24

دا دوه متقابل عمودي برخې په انځور 12-24f کې ښودل شوي . له دې امله *اندازه* د تعجيل عبارت ده په

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad (12–21)$$

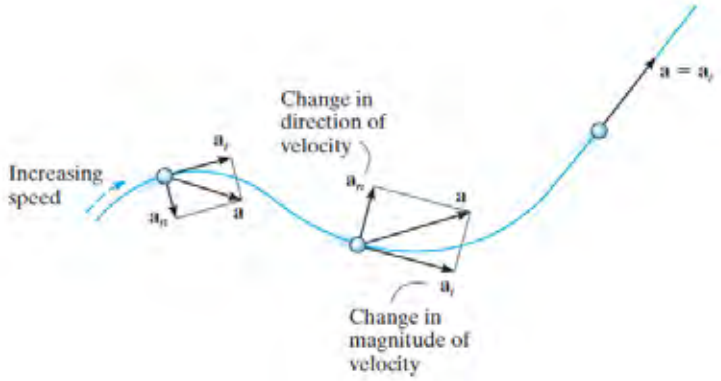
د دې پايلو د ښه پوهيدو لپاره، لاندې دوه ځانګړې حالتونه د حرکت په اړه په پام کې ونيسئ.

1. که ذره په مستقيمه کرښه حرکت کوي، نو $r \to \infty$ او د معادلې 12-20 څخه، $a_n=0$. له همدې امله، $a = a_t = \dot{v}$، نو د تعجيل مماسي جز د سرعت د اندازې د وخت بدلون د کچې نمايندګي کوي .
2. که ذره په منحني کې د ثابت تيزوالي سره حرکت کوي، نو $a_t= \dot{v} = 0$ او $a=a_n=v^2/r$. له همدې امله، د *تعجيل نارمل جز يا برخه* د سرعت په لوري د وخت د بدلون کچې نمايندګي کوي. ځرنګه چې a_n تل د انحنا مرکز په لور عمل کوي، نو دې برخې ته کله ناکله د مرکز غوښتونکي *سنتريپيټل* (centripetal) (يا مرکز ته په لور) *تعجيل* هم ويل کيږي.



کله چې هلک په يوه سرعت **v** سره پورته ځي، د هغه حرکت د *n–t* محورونو په کارولو سره تحليل کيدی شي. لکه ځنګه چې هغه پورته کيږي، د هغه د سرعت اندازه (تيزوالی) کمکيږي، نو له همدې امله a_t به منفي وي. د هغه د سرعت د لوري د بدلون کچه a_n ده، چې تل مثبته ده، يعنې د ځرخيدو مرکز په لور ده.

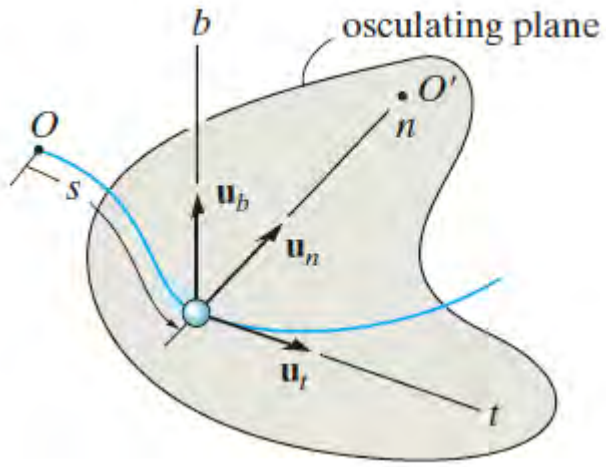
د دې تفسيرونو په پايله کې، هغه ذره چې په منحني لاره کې حرکت کوي لکه ځنګه چې په انځور12-25 کې ښودل شوي، به د ښودل شوي مسير سره سم تعجيل ولري.



انځور 12-25

درې خاوی حرکت (Three-Dimensional Motion). که چيرې ذره په يو فضايي منحني کې حرکت کوي، لکه په انځور 12-26 کې، نو په يوه ټاکلي شېبه کې د ***t*** محور په ځانګړي ډول مشخص شوی دی؛ خو يو بې شميره تعداد مستقيمي کرښې کيدی شي چې د مماس محور سره عمودي جوړې شي. لکه د سطحي حرکت په حالت کې، مورږ به د ***n*** مثبت محور انتخاب کړو کوم چې مسير يې د انحنا مرکز ***O′*** په لور وي. دې محور ته د منحني *اصلي نارمل* (***principal normal***) ويل کيږي. د دې تعريف شوي ***n*** او ***t*** محورونو سره، معادلات 12-15 تر 12-21پورې بيا کارول کيدی شي ترڅو **v** او **a** وټاکل شي. څرنګه چې $\mathbf{u}_t$ او $\mathbf{u}_n$ تل يو بل ته عمودي وي اودا په لمس کونکي سطحی (osculating) کې پراته وي، د فضايي حرکت لپاره يو دريم واحد ويکټور، $\mathbf{u}_b$، د *دوهم نارمل* (***binormal***) محور ***b*** تعريفوي کوم چې د $\mathbf{u}_t$ او $\mathbf{u}_n$ سره عمودي دی، لکه په انځور 12-26 کې.

څرنګه چې دريو واحد ويکټورونه د ويکټور کراس محصول (vector cross product) له لارې يو بل سره تړلي دي، د ښلګې په توګه، $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$، لکه په انځور 12-26 کې، دا ممکنه ده چې د دوو لوريو د پوهېدو په صورت کې د دريم محور لورى وټاکل شي. د ښلګې په توګه، په $\mathbf{u}_b$ لوري کې هيڅ حرکت نه کيږي، او که دا لورى او $\mathbf{u}_t$ معلوم وي، نو $\mathbf{u}_n$ کيدی شي له $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_t$ څخه وټاکل شي، لکه په انځور 12-26 کې.



انځور 12-26

د تحلیل کړنلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

محوري سیستم (Coordinate System)

- کله چې د ذرې لاره معلومه وي، مور کولی شو د n او t محورونه و ټاکو . دا محورونه یوه *ثابته مبداء* لري او په هغه شیبه کې چې په ذره باندی غور کیږي د هغی سره مصادف دي .
- مثبت مماسی محور د حرکت په لوري عمل کړي، او مثبت نارمل محور د انحنا مرکزپه لور موقعیت لري.



یو ځل چی ګردش ثابت شي، سوارلي بیا یوازې نارمل برخه د تعجیل ولري.

سرعت (Velocity)

- د ذرې سرعت تل دلارې سره مماس وي.
- د سرعت اندازه له مشتق نیولو د مسیر تابع نسبت وخت ته په لاس راځي

$$v = \dot{s}$$

مماسی تعجیل (Tangential Acceleration).

- د تعجیل مماسی برخه استازیتوب د سرعت د *اندازې* د کچی بدلون په وخت کی کوي. دا برخه په مثبت s لوري کې عمل کوي که د ذرې سرعت په زیاتیدو وي او په مقابل لوری که سرعت په کمیدو وي.

مماسي تعجيل (ادامه) (Tangential Acceleration)

. د a_t ، v ، t ، او s ترمنځ اړيکي د مستقيم حرکت په شان دی، يعنې

$$a_t = \dot{v} \quad a_t ds = v\, dv$$

.

. که a_t ثابت وی ، يعنی $a_t = (a_t)_c$ نو بيا

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}(a_t)_c t^2$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c (s - s_0)$$

نارمل تعجيل (Normal Acceleration)

- د تعجيل نارمل برخه استازيتوب کوي د سرعت د جهت د بدلون د وخت سره. دا برخه تل د انحنا د مرکز په مسير عمل کوي، يعنې د مثبت n محور په لور.

- د دې جزاندازه له لاندې اړيکوڅخه ټاکل کيږي

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

. که جهت په توګه د $y = f(x)$ څرګنده شوې وي، نو په هره نقطه د مسير کی د انحنا شعاع r له دی لاندې معادلی څخه ټاکل کيږي

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

د دې پايلې لاس ته راوړنه په عادی کلکولس متن کې ورکړل شوی دی.



موټرچلونکي د دې کلوورليف cloverleaf په اوږدو کی کله چی سفر کړي د سرعت د مسير دبدلون امله يو نارمل تعجيل تجربه کوي . او يو مماسي جز د تعجيل مينځ ته راځي کله چی د موټر تيزوالی کم يا زيات شي.

مثالونه

مثال 12.14

په لاندی انځور 12-27a کې یو سکیر (skier) په ټکي A کی 6 m/s تیزوالی لري، او دا تیزوالی په $2\ m/s^2$ کې زیاتیږي. په دې وخت کې د سرعت لوری او د تعجیل لوري او اندازه وټاکئ. د محاسبې په وخت کې د سکیر اندازه په پام کی مه نیسی.

حل

محوري سیستم (Coordinate System) . که څه هم مسیر د x او y ه کوارډیناټو بنودل شوی دی، مونږ لا هم کولای شو د مسیر په ثابته نقطه A کې د n، t محورونو مبدأ و ټاکو او د **v** او **a** اجزاوی په دې محورونو کې معلومی کړو، انځور 12-27a .

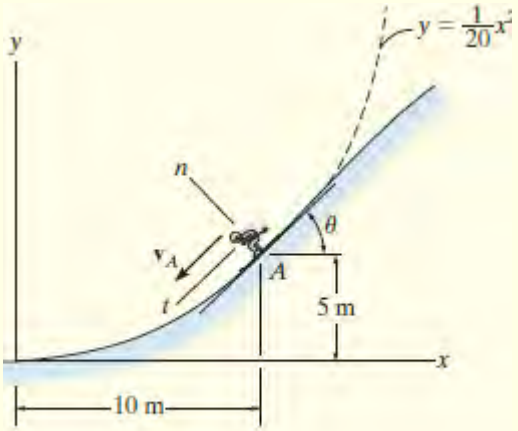
سرعت (Velocity) . له تعریف نه، سرعت تل په مسیر مماس وي. که $y = (1/20)\,x^2$ وي، نو $dy/dx = (1/10)\,x$ دی، بیا په $x = 10$ مترو کې، $dy/dx = 1$ دی. نو په A کې، **v** د x محور سره $\theta = \tan^{-1} 1 = 45^0$ زاویه لري، انځور 12-27b .

له دې امله

$$v_A = 6\ \text{m/s} \quad 45^\circ \nearrow \qquad \textit{Ans.}$$

تعجیل له معادلی د $\mathbf{a} = \dot{v}\,\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$ څخه معلومیږي. خو مونږ باید لومړی د مسیر د منحني شعاع په A (10 m, 5m) کې معلوم کړو. څکه چې $d^2y/dx^2 = (1/10)$ ، بیا لیکلي شو

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{10}\right|}\bigg|_{x=10\,\text{m}} = 28.28\ \text{m}$$

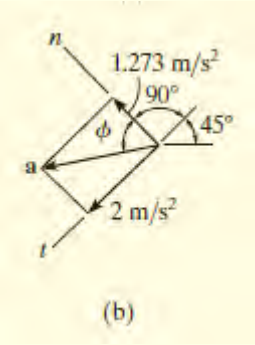


(a)

له دی امله تعجیل عبارت دي په

$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$
$$= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6\ \text{m/s})^2}{28.28\ \text{m}}\mathbf{u}_n$$
$$= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\}\ \text{m/s}^2$$

لکه څنګه چې په انځور 12-27b کې ښودل شوي،



$$a = \sqrt{(2\ \text{m/s}^2)^2 + (1.273\ \text{m/s}^2)^2} = 2.37\ \text{m/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{1.273} = 57.5°$$

نو بيا

انځور 12-27

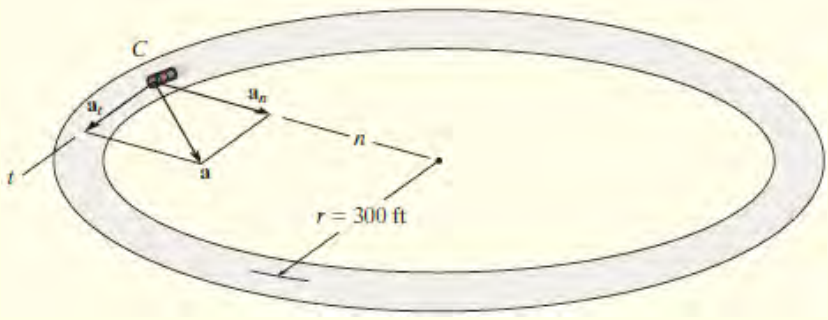
$45° + 90° + 57.5° - 180° = 12.5°$, so that

$a = 2.37\ \text{m/s}^2 \quad 12.5°\ \nearrow$ *Ans.*

مثال 12.15

حل

يو د سيالۍ موټر C د افقي حلقوي مسير سره ګرد را ګرد تاويږي، د حلقوي مسير شعاع 300 فوټه ده، انځور 12-28 . موټر له دريدلي حالته حرکت پيل کوي، که موټر خپل تيزوالی په 7 ft/s^2 ثابته اندازه کې زيات کړي، معلومه کړئ چې څومره وخت ته اړتيا لري تر څو تعجيل يې 8 ft/s^2 ته ورسيږي. په دې وخت کې يې تيزوالی څومره دی؟



انځور 12-28

حل

محوري سيستم (Coordinate System). د *n* او *t* محورونو مبدأ په هغه وخت کې چې موټر په نظر کې نيول شوی د موټر سره مصادف ده. د *t* محور د حرکت په لور کې دی، او مثبت *n* محور د حلقې مرکز په لور دی. دا محوري سيستم له دی امله غوره شوی ځکه چې مسير معلوم دی.

تعجیل (Acceleration) . د تعجیل اندازه د اجزاو سره تړل کیدی شي، او دا په کارولو د معادلی $a = \sqrt{(a_t^2 + a_n^2)}$ دلته $a_t = 7\ ft/s^2$ دی. لکه څنګه چې $a_n = v^2/r$ دی، باید لومړی سرعت تابع د وخت معلوم شي.

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

همداسي

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2\ ft/s^2$$

نو هغه وخت چې تعجیل 8 ft/s2 ته ورسیږي عبارت دی په

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8\ ft/s^2 = \sqrt{(7\ ft/s^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

د مثبت ارزښت د t لپاره دا مساوات راکوي

$$0.163t^2 = \sqrt{(8\ ft/s^2)^2 - (7\ ft/s^2)^2}$$
$$t = 4.87\ s \qquad Ans.$$

سرعت (Velocity). تیزوالی په وخت $t = 4.87\ sec$ کی عبارت دی په

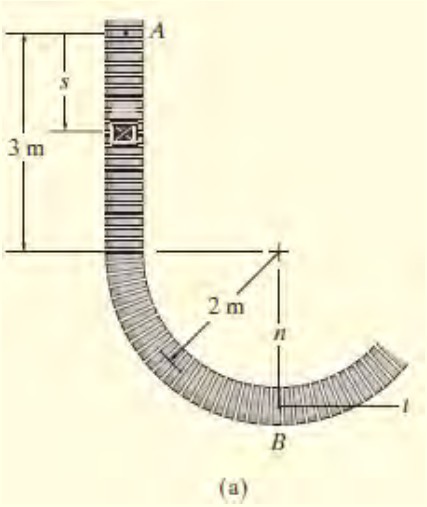
$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1\ ft/s \qquad Ans.$$

یادونه: په یاد ولري چې سرعت همیشه مماس دی په مسیر، په داسی حال کی چې تعجیل به په داخل د مسیر انحنا کی وي.

مثال 12.16

په انځور 12-29a کې ښودل شوي بکس له دريدلې حالت شروع په حرکت کړي او خپل تيزوالی داسې زياتوی چې $a_t = (0.2t)\ m/s^2$ ته رسيږی، چيرې چې t په ثانيو سره اندازه کيږي. هغه وخت چې بکس ټکی B رسيږي وښنيی، اوهم د تعجيل اندازه کله چې بکس دی ټکی ته رسيږي و ټاکي.





انځور 12-29

حل

محوري سيستم (Coordinate System). د بکس موقعيت په هر وخت کې له ثابتې نقطې A څخه د موقعيت يا مسير محور s په کارولو سره ښودل شوی، انځور 12-29a . تعجيل په ټکی B کې بايد معلوم شي، تر څو n ، t محورونو مبدأ په دې نقطه کې واقع شي.

وخت (Time). له دې امله چې $v_A=0$ کله چې $t = 0$ وي، نو:

$$a_t = \dot{v} = 0.2t \qquad (1)$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\, dt$$

$$v = 0.1t^2 \qquad (2)$$

دلته $s_B = 3 + 2p(2)/4 = 6.142\text{m}$ انځور 12-29a و ګوري، او څرنګه چې $s_A = 0$ کله چې $t = 0$ وي، مونږ لرو

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142\text{ m}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 dt$$

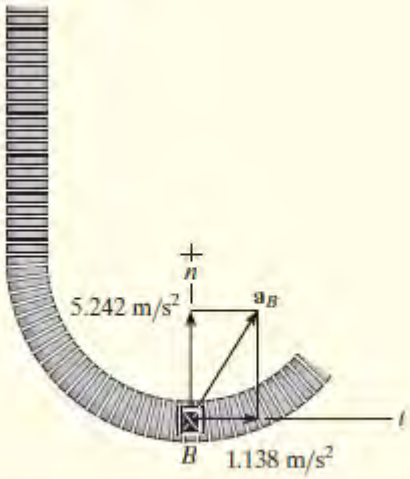
$$6.142\text{ m} = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690\text{ s} \qquad \textit{Ans.}$$

تعجيل (Acceleration). د t_B ارزښت په معادله 1 او 2 کې ځای په ځای کوو او حاصل يې عبارت دی په

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138\text{ m/s}^2$$

$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238\text{ m/s}$$



(b)

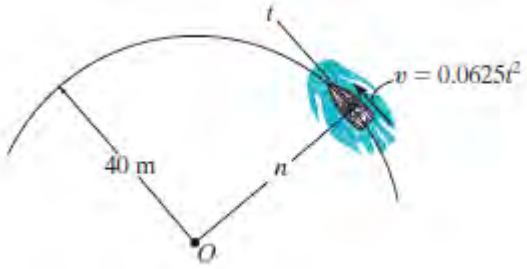
په B کې $r_B = 2\text{ m}$ نو بيا

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238\text{ m/s})^2}{2\text{ m}} = 5.242\text{ m/s}^2$$

مقدار د a_B ، انځور 12-29a کې عبارت دی په

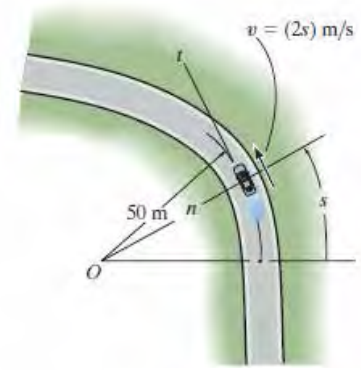
$$a_B = \sqrt{(1.138\text{ m/s}^2)^2 + (5.242\text{ m/s}^2)^2} = 5.36\text{ m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

ب 12-27 . یوه کښتۍ په دایروي لاره باندې په منظم ډول په $v = (0.0625t^2)$ m/s تیزوالي حرکت کوي، چیرې چې t په ثانیه اندازه کیږي. د تعجیل اندازه مشخص کړي کله چې $t = 10s$.



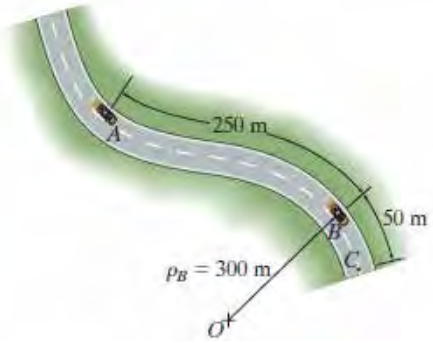
پوښتنه ب 12-27

ب 12-28 . یو موټر په سړک په $v = (2s)$ m/s تیزوالي سفر کوي، چیرې چې s په متر اندازه کیږي. د تعجیل اندازه وټاکئ کله چې $s = 10m$.



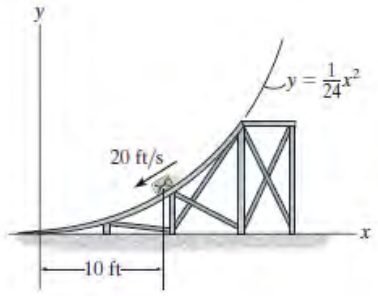
ب 12-28

ب 12-29. یو موټر په منحنی سرک پدې ډول تجیل کوی چې تیزوالیې د 25 m/s څخه په A کې تر 15متر/ثانیه په C کې کموالی ولري. د موټر تعجیل په B کې معلوم کړي.



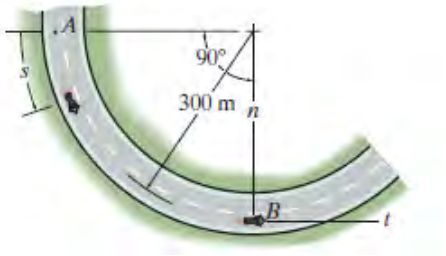
ب 12-29

ب 12-30. کله چې $x = 10$ ft وي، صندوق د 20 ft/s تيزوالۍ لري او په $6\ ft/s^2$ اندازه زياتيږي. د صندوق د سرعت لوری او په دې وخت کې د تعجيل اندازه يې معلومه کړئ.



ب 12-30

ب 12-31. که موټر سايکل $a_t = -(0.001s)\ m/s^2$ تجيل ولري او تيزوالۍ يې د A په موقعيت کې 25 m/s وي، د تعجيل اندازه يې کله چې د B نقطې څخه تيريږي معلوم کړئ.



ب 12-31

ب 12-32. يو موټر دغوندۍ په پورته لور په $v = (0.2s)\ m/s$ تيزوالي سره حرکت کوي، چيرې چې s په مترو کې له A څخه اندازه شوې. د دې تعجيل اندازه کله چې په $s = 50$ متر کې وي معلوم کړئ ، چيرې چې $r = 500$ m وي.



ب 12-32

پوښتنې

PROBLEMS

12-110 . یو ګاډی په یوه دایروی سرک باندې، چې شعاع یې 2000 فوټه ده، حرکت کوي. که د ټرین تیزوالی په یو ډول له 6 میله/ساعت څخه تر 8 میله/ساعت پورې په 1 دقیقه کې زیات شي، د تعجیل اندازه معلومه کړئ کله چې د ټرین سرعت 7 میله په یوه ساعت وی. (1 میل = 5280 فوټه)

12-111 . یوه ببړۍ لومړنی تیزوالی 16 ft/s لري. که بیا په یوه دایروی مسیر کې چې شعاع یې $r = 80$ ft ده، په اوږدو کې خپل سرعت په ثابته توګه $\dot{v} = (1.5s)$ ft/s^2 کې زیات کړي، چیرې چې s په فوټو کې دی، د تعجیل نارمل او مماسي اجزاوی معلومی کړئ کله چې s =فوټه وي 16.

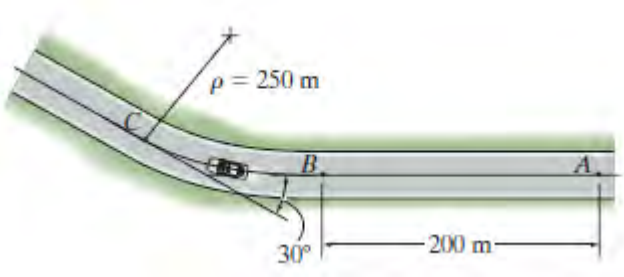
★ 12-112 . یوه ذره په منحني $y = 1 + \cos x$ باندې په د ثابت تیزوالی $v = 4$ft/s سره حرکت کوي. د دې سرعت او تعجیل نارمل او مماسي اجزاوی په هره لحظه کې معلوم کړئ.

12-113 . د ذرې موقعیت د $\mathbf{r} = \{4(t - \sin t)\mathbf{i} + (2t^2 - 3)\mathbf{j}\}$ m په توګه تعریف شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده او د ساین زاویه په ریډینو (radians) کې ده. د ذرې تیزوالی او د تعجیل نارمل او مماسي اجزاوی معلومی کړئ کله چې $t = 1$ ثانیه وي.

12-114 . د موټر سرعت په نقطه A کې 80 ft/s دی او تعجیل $\mathbf{a}$ یې 10 ft/s^2 اندازه لري، چې په بنودل شوي لورعمل کوي. د منحني شعاع په نقطه A کې معلومه کړئ او د تعجیل مماسي جز معلوم کړئ.

12-115 . یو موټر 25 m/s تیزوالی لری کله چې نقطه A ته رسیږي. که بریکونه ونیول شی، د دې سرعت په $a_t = (-\frac{1}{4}t^{1/2})$ m/s^2 سره کمیږي. د موټر د تعجیل اندازه معلومه کړئ مخکې له دې چې نقطه C ته ورسیږي.

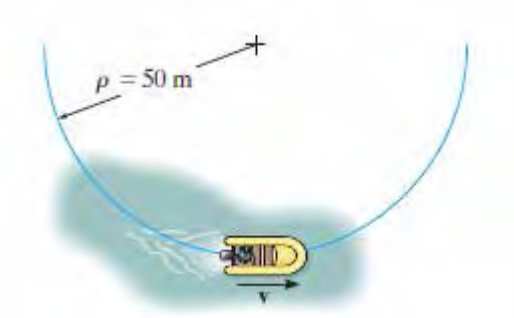
★ 12-116 . کله چې موټر نقطه A ته رسیږي، 25 m/s تیزوالی لري. که بریکونه ونیسی، تیزوالی یې په $a_t = (0.001s - 1)$ m/s² کې کمیږي. د موټر د تعجیل اندازه معلومه کړئ مخکې له دې چې نقطه C ته ورسیږي.



پوښتنې 12-115/116

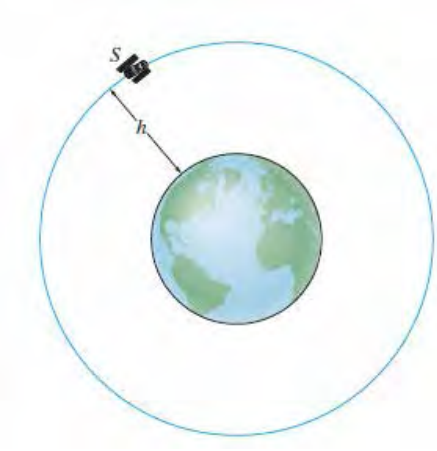
12-117 . یوه ماشین لرونکې کښتۍ له دریدلې حالت څخه حرکت پیل کوي. حرکت یې په دایروی مسیرکوم چې $r = 50$ m شعاع لري اود تیزوالی یې $v = (0.8t)$ m/s دی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د بېړۍ سرعت او تعجیل اواندازه یې معلومی کړئ کله چې 20 متره سفر کړي وي.

12-118 . یوبېړۍ له دریدلې حالت څخه حرکت پیل کوي. حرکت یې په دایروی مسیردی کوم چې $r = 50$ m شعاع لري اود حرکت تیزوالی یې $v = (0.2t^2)$ m/s دی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د بېړۍ سرعت او تعجیل اندازی معلومی کړئ کله چې $t = 3$ ثانیې وي.



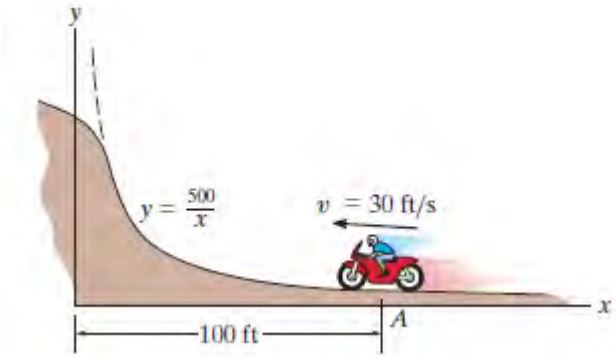
پوښتنې 12-117/118

12-119 . سیټلایټ S د ځمکې شاوخوا په دایروی مسیر کې په ثابت سرعت 20 Mm/h حرکت کوي. که تعجیل یې $2.5\ m/s^2$ وي، د ارتفاع h اندازه معلومه کړئ. فرض کړئ چې د ځمکې قطر 12,713 کیلومتره دی.



پوښتنه 12-119

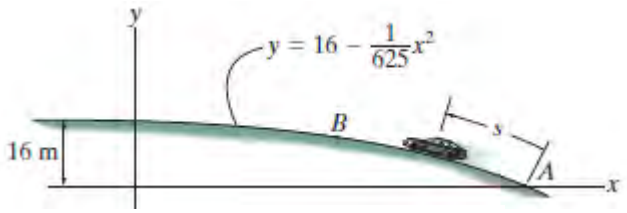
★ 12-120 . موټرسایکل په بنودلشویي منحنی کربنه په 30 ft/s ثابت تیزوالی سره حرکت کوي. دې ده د تعجیل اندازه کله چې په نقطه A کې موقعیت لري معلوم کړئ. د محاسبې لپاره د موټرسایکل او سواره اندازه په پام کی مه نیسی.



پوښتنه 12-120

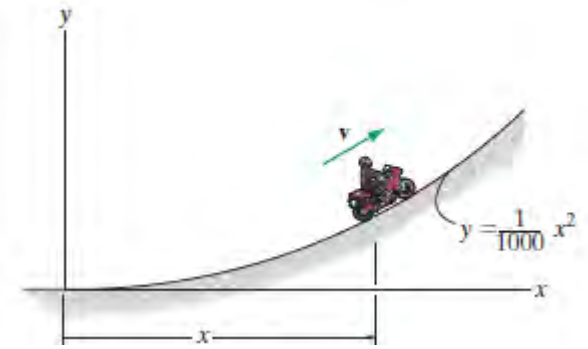
12-121 . موټر له نقطه A څخه په 25 m/s تیزوالي سره تیریږي او وروسته سرعت یی په معادله د($v = (25 - 0.15s)$ m/s تعریف شوی، چیرې چې s په مترو اندازه کیږي. د موټر تعجیل اندازه کله چې نقطه B ته رسیږي معلوم کړئ ، کله چې $s = 51.5$ متره او $x = 50$ متره دی.

12-122 . موټر له نقطه A څخه په 20 m/s تیزوالي سره تیریږي او خپل سرعت په ثابت اندازه $a_t = 0.5\ m/s^2$ زیاتوي، د موټرد تعجیل اندازه کله چې s =101.68 متره او $x = 0$ وي معلوم کړئ.



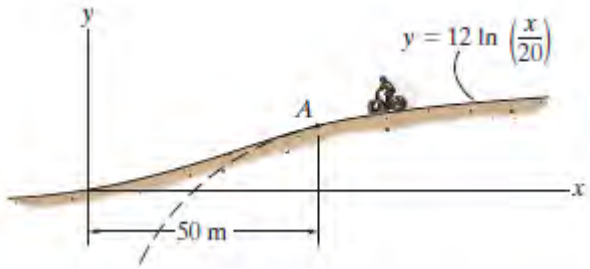
پوښتنې 12-121/122

12-123 . یو موټرسایکل په 15 m/s ثابت تیزوالي سره پورته په غونډۍ حرکت کوي. د دې تعجیل اندازه تابع د x په توګه وښیی.



پوښتنه 12-123

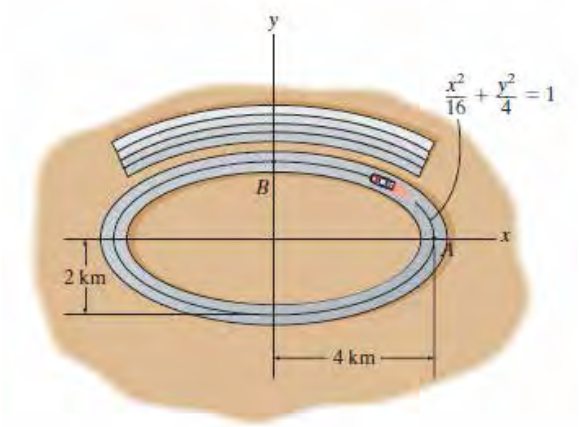
★ 12-124 . یو بایسکل کله چې له نقطې A څخه تیریږي، د 6 m/s تیزوالۍ لري، او دا تیزوالی په $\dot{v} = 0.5\ m/s^2$ سره زیاتیږي. د تعجیل اندازه کله چې په نقطه A کې وي معلوم کړئ.



پوښتنه 12-124

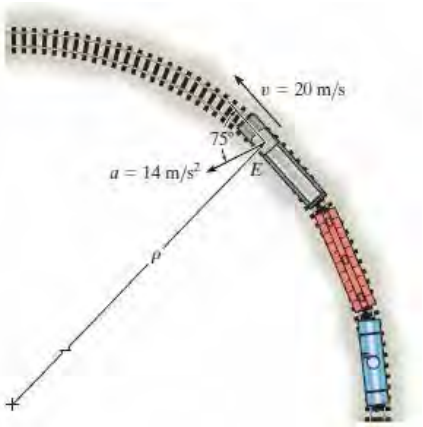
12-125 . یو د سیالۍ موټر په 240 km/h ثابت تیزوالي سره په بیضوي مسیر کې حرکت کړي. د موټرچلونکي لخوا تجربه شوې تعجیل په A کې معلوم کړئ.

12-126. یو د سیالۍ موټر په 240 km/h ثابت تیزوالي سره په بیضوي مسیر کې حرکت کړي. د موټرچلونکي لخوا تجربه شوې تعجیل په B کې معلوم کړئ



پوښتنې 12-125/126

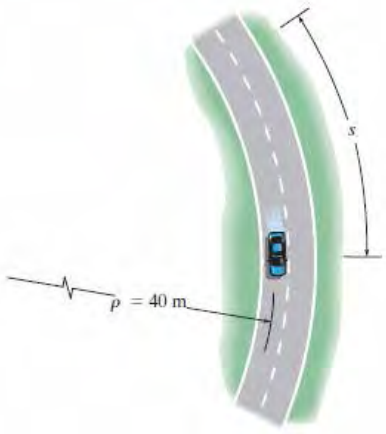
12-127 . په ټاکل شوي وخت کې د ټرين انجن په E کې 20 m/s تيزوالی او $14\ m/s^2$ تعجيل په ښودل شوي لور کې لري. د ټرين د تيزوالی زياتوالی او د مسير دانحنا شعاع، r معلوم کړئ.



پوښتنه 12-127

★ 12-128 . موټر لومړني تيزوالی $v_0 = 20$ m/s په $s = 0$ کې لري. که خپل سرعت په دايروی مسير کې په $a_t = (0.8s)\ m/s^2$ ، زيات کړی چيری چې s په متر اندازه کيږي، د موټر هغه وخت معلوم کړئ تر څو $s = 25$ متر سفر وکړي.

12-129 . موټر له دريدلی حالت څخه په $s = 0$ کې حرکت پيل کوي اوخپل تيزوالی $a_t = 4\ m/s^2$ ته زياتوي. هغه وخت معلوم کړئ کله چې د تعجيل اندازه $20\ m/s^2$ ته رسيږي. په کوم موقعيت د s کې دا پيښيږي؟



پوښتنې 12-128/129

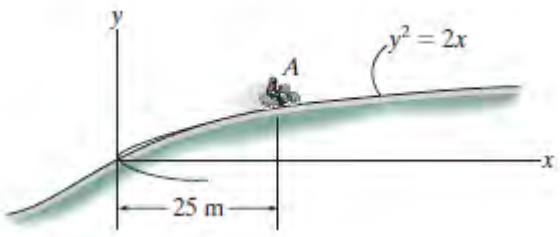
12-130 . يوه بېړۍ په دايروی مسير کې چې شعاع يې 100 فوټه دی حرکت کوي. که د دې تيزوالۍ په $t = 0$ کې 15 ft/s وي او په $\dot{v} = (0.8t)$ ft/s^2 کې زياتېږي، د تعجيل اندازه معلومه کړئ کله چې $t = 5$ ثانيې وي.

12-131 . يوه بېړۍ په دايروی مسير کې چې شعاع يې 20 متره ده حرکت کوي. د بېړۍ تعجيل اندازه معلوم کړئ کله چې سرعت يې $v = 5$ m/s وي او د سرعت زياتوالی $\dot{v} = 2$ m/s^2 وي.

*12 -132. يوه بايسکل چلونکی له دريدلي حالت څخه په افقي دايروی مسير کې چې $r = 10$ مترلري، په تيزوالي د $v = (0.09t^2 + 0.1t)$ m/s حرکت کوي، چيرې چې t په ثانيو کې ده. د سرعت او تعجيل اندازې معلومی کړئ کله چې دی $s = 3$ متر سفريي کړی وي.

12-133 . يو ذره په مدور مسير کې چې شعاع يې 50 متره ده حرکت کوي. که د دې لومړنی تيزوالۍ 10 m/s وي اوبيا يې تيزوالۍ $\dot{v} = (0.05v)$ m/s^2 ته زياتېږي، د ذرې د تعجيل اندازه څلور ثانيې وروسته معلوم کړئ.

12-134 . په دی لاندی انځور کی ښودل شوي موټر سايکل په ثابت تيزوالي 60 km/h روان دی. د دې د تعجيل اندازه په A نقطه کې وټاکئ.



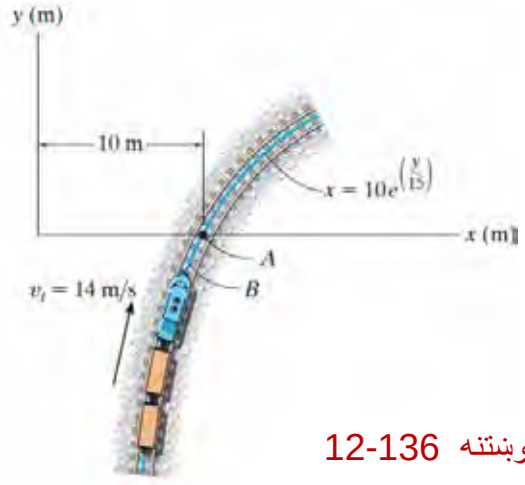
پوښتنه 12-134

12-135 . کله چې $t = 0$ وي، د ګاډی تیزوالی 8 متر په ثانیه کې دي، چې په $0.5\ m/s^2$ سره زیاتیږي. د ماشین د تعجیل اندازه په ټکی A کې وټاکئ، کله چې $t = 20s$ وي. دلته د انحنأ شعاع $r_A = 400m$ ده.



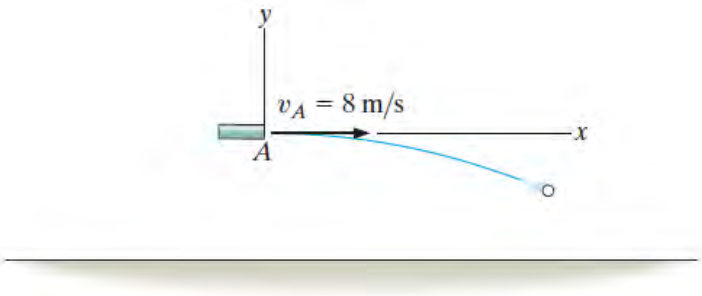
پوښتنه 12-135

12-136* . یوګاډی په ثابت تیزوالي 14 m/s په منحني لاره سفر کړي. د ګاډی د مخی B تعجیل اندازه په هغه لحظه کې چې ټکې A $(y = 0)$ ته رسیږي و ټاکي.



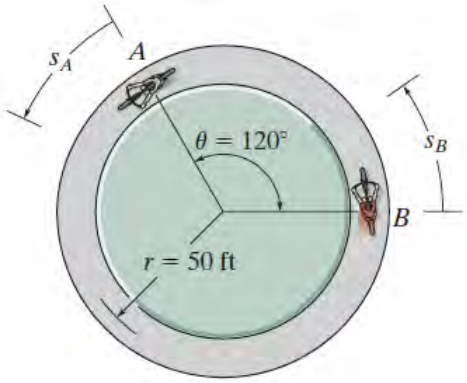
پوښتنه 12-136

12-137. توپ په افقی ډول له ټیوب څخه په 8 متر په ثانیه کې غورځول شوی. دلارې معادله، $y = f(x)$، وموميئ او بیا د توپ تیزوالی او نارمل او مماسی اجزاوی د تعجیل وموميئ کله چې $t = 0.25$ ثانیې وی.



پوښتنه 12-137

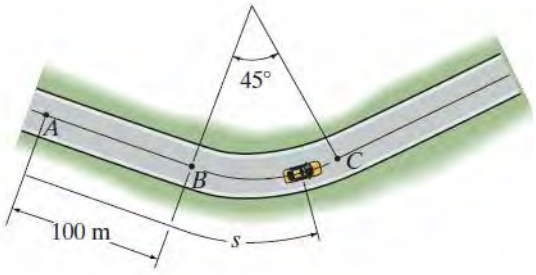
12-138. دوه سایکل چلونکي، A او B، په یوه دایروي لار کې په 8 فوټ په ثانیه ثابت تیزوالي کې د ساعت په مخالف لورحرکت کوي. که د A تیزوالی په $(a_t)_A = (s_A)$ ft/s^2 کې زیاتوالی و مومي ، چیرته چې s_A په فوټ سره اندازه کیږي . د B څخه تر A پورې د لاری فاصله د سایکل چلونکیوپه منځ کی پیداکړی کله چی $t = 1$ s . او همدارنګه د تعجیل اندزی د هر سایکل سوار و ټاکی.



پوښتنه 12-138

12-139. موټر په ثابت تیزوالي 30 متر په ثانیه کې روان دی. موټروان په A نقطه کې بریک نیسی چی د موټر تیزوالی په $a_t = (-0.08v)$ m/s^2 سره کمیږي، چیرته چې v په متراو وخت په ثانیه وي. د موټر د تعجیل اندازه په دایروي لار کې پخوا لدی چی د C ټکی ته ورسیږی پیدا کړی. موټر 15 ثانیې وخت نیسي چې له A څخه تر C پورې سفر وکړي.

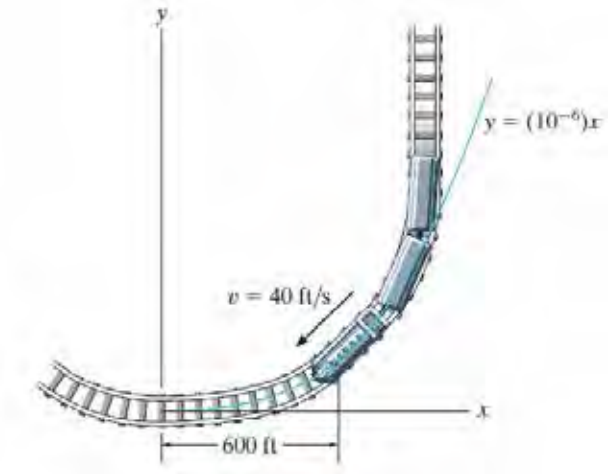
*12-140 . یو موټر په 30 متر په ثانیه کې تیزوالی لري. موټروان په A نقطه کې بریک نیسی چی په تیزوالی کی $a_t = (-18t)$ m/s^2 کموالی راځی، چیرته چې t په ثانیه اندازه کیږي. د موټر د تعجیل اندازه مخکې له دې چې موټر په دایروي لاره C نقطې ته ورسیږي،و ټاکئ. موټر 15 ثانیې وخت نیسي چې له A څخه تر C پورې سفر وکړي.



پوښتنه 12-138

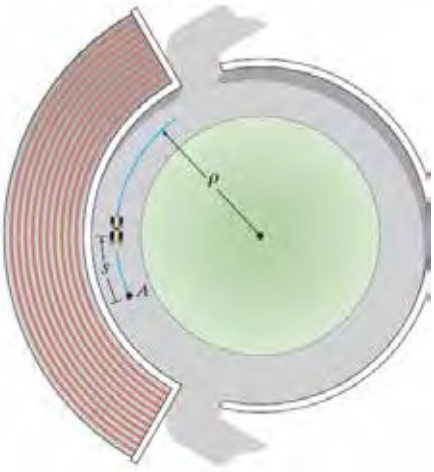
12-141 . یو سپایرل (spiral) انتقالي کړۍ د ریل پټلۍ کې په کار ده چی د ریل

ستقیمه برخه د منحني برخې پټلۍ سره ونښلوي. که سپایرل کړۍ په معادله $y = (10^{-6})x^3$ تعریف شي، چیرته چې x او y په فوټ دی، د ګاډي د انجن د تعجیل اندازه و ټاکئ کله چې دی په 40 فوټ په ثانیه تیزوالي سره $x = 600$ft ته ورسیږي.



پوښتنه 12-141

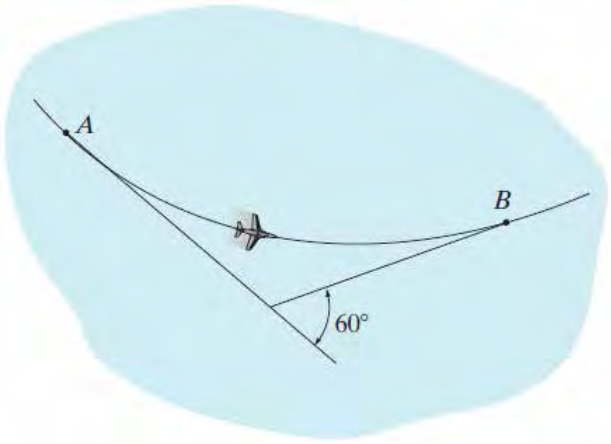
12-142 . د مسابقې موټر په A نقطه کې ابتدایي تیزوالی $v_A = 15$ m/s لري. که موټر خپل تیزوالی په دایروي لاره کې په $a_t = (0.4s)$ m/s^2 کې زیاتوي، چیرته چې s په مترو کې وي، د 20 متر سفر لپاره د وخت اندازه مشخص کړئ . دلته $r = 150$ m وکاروي.



پوښتنه 12-142

12-143 د الوتکې د تعجیل اندازه په هغه حالت کې چې ګرځي وټاکئ. دا په افقي دایروي لاره AB باندې الوتنه کوي . په داسې حال کې چې ثابت تیزوالی 300 فوټ په ثانیه کې لري.

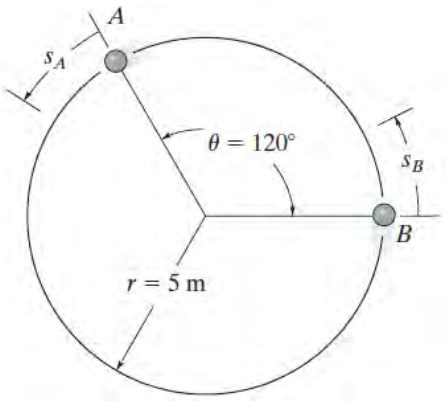
*12-144 . الوتکه په 60 ثانيو کې په افقي دايروي لاره AB باندې الوتنه کوي. که تيزوالی يې په نقطه A کې 400 فوټ په ثانيه کې وي، کوم چې په $a_t = (-0.1t)\ ft/s^2$ سره کمپږي، چيرته چې t په ثانيه کې وي، د الوتکې تعجيل اندازه کله چې دا B نقطې ته ورسيږي وټاکئ.



پوښتنه 12-142

12-145 . A او B ذرې په دايروي لاره کې په 8 متر په ثانيه کې په ضد د ساعت حرکت کوي. که په همدې شيبه کې د A تيزوالی په $(a_t)_A = (0.4s_A)\ m/s^2$ کې زيات شي، چيرته چې s_A په مترو کې وي، د B څخه تر A پورې فاصله کله چې $t = 1\ s$ کې، وټاکئ. او هم د هرې ذرې د تعجيل اندازه په دې وخت کې څه دی؟

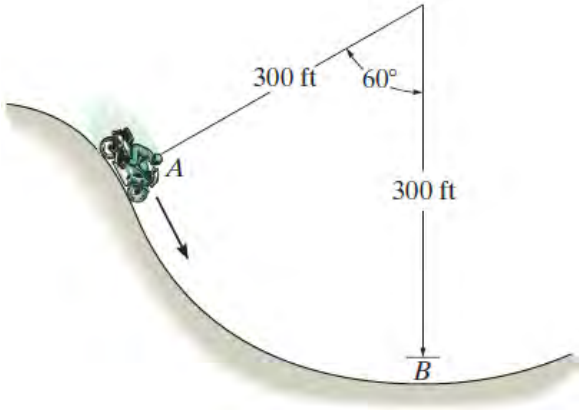
12-146 . A او B ذرې په دايروي لاره کې په 8 متر په ثانيه کې حرکت کوي. که په دې شيبه کې د B تيزوالی په $(a_t)_B = 4\ m/s^2$ سره زياتيږي، او په همدغه شيبه کې تيزوالی د A په $(a_t)_A = 0.8t\ m/s^2$ کې زياتيږي، چيرته چې t په ثانيه کې وي، څومره وخت نيسي چې ټګر رامنځته شي؟ د هرې يو ې ذرې د تعجيل اندازه مخکې له دې چې ټکر رامنځته شي څومره دي؟



پوښتنې 12-145/146

12-147 . کله چې موټرسایکل چلونکی په A نقطه کې وي، خپل تیزوالی په عمودي دایروي لاره کې په $\dot{v} = (0.3t)\ ft/s^2$ کې زیاتوي، چیرته چې t په ثانیه کې وي او $t = 0$ په A کې وي. که هغه په A کې له صفر سرعت څخه شروع وکړي، د هغه د سرعت او تعجیل اندازه په B کې وټاکئ.

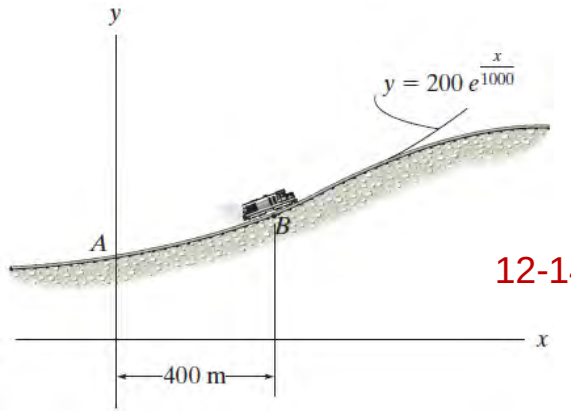
12-148* . کله چې موټرسایکل چلونکی په A نقطه کې وي، خپل سرعت په عمودي دایروي لاره کې په $\dot{v} = (0.04s)\ ft/s^2$ کې زیاتوي، چیرته چې s په فوټ کې دي او $s = 0$ په A کې دي. که هغه په $v_A = 2\ ft/s$ سرعت شروع کړي، د هغه د سرعت اندازه په B کې وټاکئ. او هم د هغه ابتدایي تعجیل وښیی.



پوښتنې 12-147/148

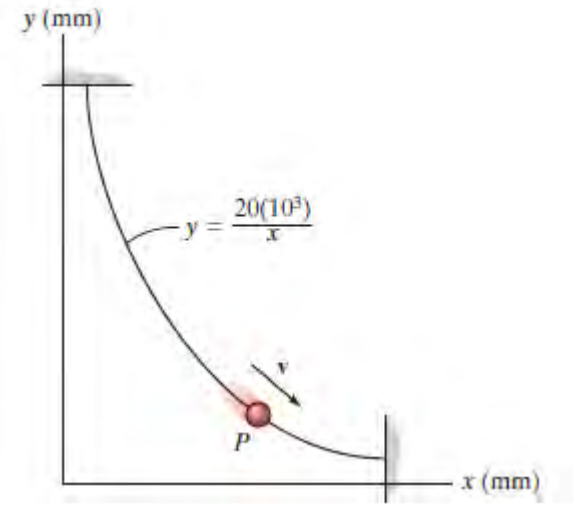
12-149 . ګاډی له B نقطی څخه د 20 متر په ثانیه کی تیزوالي سره ټرېرۍ اوشروع په کمیدو د خپل تیزوالي $a_t = -0.5\ m/s^2$ کوي. د ګاډی د تعجیل اندازه په دې نقطه کې وټاکئ.

12-150 . ګاډی په A نقطه کې د 30 متر په ثانیه تیزوالي سره ټرېرۍ اوشروع په کمیدو د خپل تیزوالي په ثابته کچه د $a_t = -0.25\ m/s^2$ کوي. د ګاډی د تعجیل اندازه په B نقطه کې وټاکئ، چیرته چې $s_{AB} = 412$ متره وي.



پوښتنې 12-148/149

12-151 . يوه ذره په 300 ملي متر په ثانيه ثابت تيزوالي سره په منحني لاره کې حرکت کوي. د ذرې د تعجيل اندازه په (200 ملي متر، 100 ملي متر) نقطو کې وټاکئ او دا ويکتور په ښودل شوي منحني رسم کړئ.

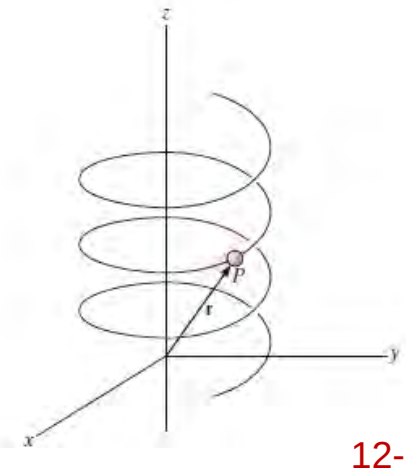


پوښتنې 12-148/149

★ 12-152 . يوه ذره P په بيضوي سپايرل (elliptical spiral) لاندې ښودل شوي لاره کې حرکت کوي ، د هغې موقعيت ويکتور **r** په

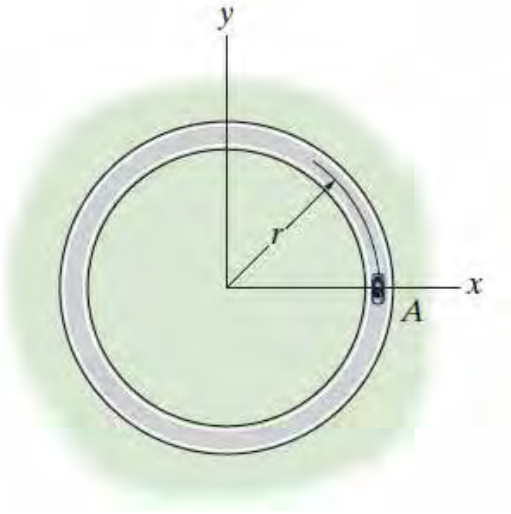
$\mathbf{r} = \{2\cos(0.1t)\mathbf{i} + 1.5\sin(o.1t)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}\}$ m کې تعريف شوی، چيرته چې t په ثانيه کې وي او د ساين او کوساين ارزښتونه په ريډيانو کې دي. کله چې $t = 8$ s (ثانيې) وي، د a، b او g محوری سمتي زاويې وټاکئ چې دوهم محور (binormal) په لمس کونکي سطحی (osculating) له محورونو د x ، y، او z سره جوړوي.

مرسته: د ذرې سرعت $\mathbf{v}_P$ او تعجيل $\mathbf{a}_P$ په **i** ، **j**، **k** اجزاوو سره حل کړئ. دوهم نارمل مواز ي په $\mathbf{v}_P \times \mathbf{a}_P$ دی. ولې؟



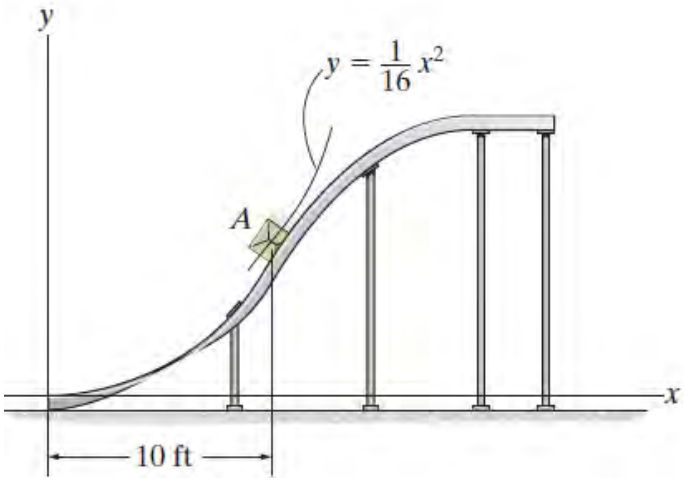
پوښتنه 12-152

12-153 . يو موټر په 300 متره شعاع لرونکې دايروي لاره کې حرکت کوي، کله چې دا په A نقطه کې وي، د 5 متر په ثانيه سرعت لري، او دا په $\dot{v} = (0.06t)\ m/s^2$ کې زياتيږي، چيرته چې t په ثانيه کې دي. د هغه د سرعت او تعجيل اندازې وټاکئ کله چې د موټر يوه درېمه برخه د لارې سفر يې کړی وي.



پوښتنه 12-153

12-154 . که د کريت تيزوالي په A نقطه کې 15 ft/s کی وي، او دا په کچه د 3 $ft/s^2 = \dot{v}$ کې زياتيږي، په دې شيبه کې د کريت د تعجيل اندازه وټاکئ.

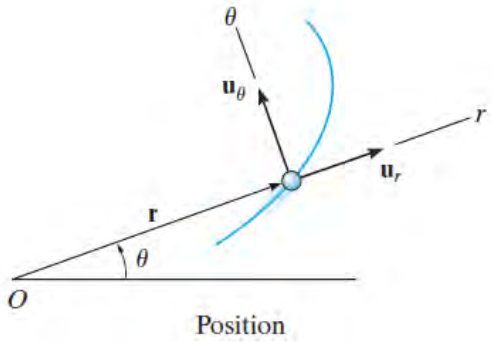


پوښتنه 12-154

*12.8 د منحني حرکت : سلندري اجزاوي
(CURVILINEAR MOTION: CYLINDRICAL COMPONENTS)

ځينې وختونه د ذرې حرکت په يوه لاره کې د خنډ سره مخامخ کيږي، چې مسيريی د سلندري (cylindrical) محورونو په کارولو سره بنه تشريح کيدي شي. که حرکت په سطحه پوری محدود وي بيا د قطبي (Polar) محوری سيستم کارول مناسب ګڼل کيږي.

قطبي محورونه (Polar Coordinates). مور کولی شو د ذرې موقعيت کوم چې په انځور 12-30a کې ښودل شوي د ***شعايي محور*** (radial coordinate) **r** په کارولو سره مشخص کړو. دا محور له يوی ثابتی مبدأ نقطې O د ذرې په لور وتليي خواته غځول کيږي، او يو ***عرضي محور*** (transverse coordinate) q، کوم چې خلاف د ساعت د عقرب لور زاويه له يوې ثابتې مرجيع کرښې او د r محور سره دي. دا زاويه عموما په درجو يا ريډينونو کې اندازه کيږي، چيرته چې $1\text{rad} = 180^0/\text{p}$. د r او q محورونو مثبت جهتونه په ترتيب سره د واحد ويکتورونو $\mathbf{u}_q$ او $\mathbf{u}_r$ لخوا تعريف شوی. دلته $\mathbf{u}_r$ په زياتوالي جهت د r کله چې q ثابت و ساتل شي، او $\mathbf{u}_q$ په جهت د زياتيوالي د q دی کله چې r ثابت و ساتل شي.



(a)

انځور 12-30

موقعيت يا ځای (Position). په هره لحظه کی د ذرې موقعيت ، انځور 13-30a د ځای ويکتور سره تعريف کيږي

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \qquad (12\text{–}22)$$

سرعت (Velocity). سرعت **v** د **r** د وخت مشتق په اخیستلو سره ترلاسه کیږي.

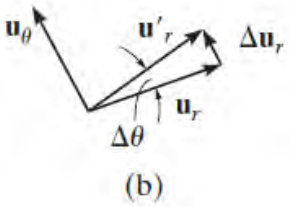
د وخت مشتق ښودلو لپاره د نقطې کارولو څخه کار اخلو اومو٫ لرو:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

د $\dot{\mathbf{u}}_r$ د ارزولو لپاره وینو چې د $\mathbf{u}_r$ جهت تنها د وخت سره تغیر مومي، ځکه چې د دې ویکتور شدت تل یو واحد دی. په دوران د وخت Δt کې یو بدلون په Δr کې لامل د بدلون د لوری د $\mathbf{u}_r$ نه کیږي؛ اما تغیر په Dt کې لامل ددی کیږي چې u_r بدلون ومومي په $\mathbf{u}`_r$ ، چیرته چې $\mathbf{u}`_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$، انځور 12-30b. په $\mathbf{u}_r$ کې د وخت بدلون بیا $\Delta\mathbf{u}_r$ کیږي. د کوچنیو زاویو لپاره Δq دا ویکتور اندازه د $\Delta u_r \approx 1(\Delta q)$ لرې او په لوري د $\mathbf{u}_q$ کې عمل کوي. نو، $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta q\mathbf{u}_q$، او داسې

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right) \mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \qquad (12\text{–}23)$$



انځور 12-30

دا پایلی په پورتنۍ معادله کې ځای په ځای کوو، تر څو چې سرعت د اجزاوو په توګه په لاندې ډول و لیکل شي

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta \qquad (12\text{–}24)$$

چیرې چې

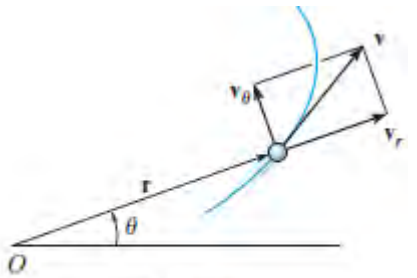
$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (12\text{–}25)$$

دا برخي په ګرافيک ډول په انځور 12-30c کې ښودل شوي. د *شعاع جز* (radial component) $\mathbf{v}_r$ په اوږدوالي کې د زياتوالي يا کميدوکچه ده ، د بيلګې په توګه، $\dot{\mathbf{r}}$; په داسې حال کې چې عرضي برخې $\mathbf{v}_q$ داسی سرعت دی چی د هغی دایری په محیط عمل کوی کوی چی r شعاع لري. په ځانګړي توګه، اصطلاح $\dot{q} = dq/dt$ ته د ***زاویی سرعت*** (angular velocity) ويل کيږي. ځکه چی دا د زاویه q د بدلون کچه نسبت په وخت سره په ګوته کوي. په عمومی توګه هغه واحدونه چې د دې اندازه کولو لپاره کارول کيږي rad/s دي.

څرنګه چې $\mathbf{v}_r$ او $\mathbf{v}_q$ په متقابل ډول عمودي دي، د سرعت يا تيزوالي اندازه يې عبارت ده په

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \qquad (12\text{–}26)$$

او د v جهت ، البته،مماس په مسير دي.



Velocity

(c)

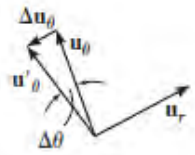
انځور 12-30

تعجيل (Acceleration). که د معادله 12-24 مشتق وخت ته ونيسو او معادله 12-25 وکاروو د ذ ری تعجيل په لاس راځي.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

د $\dot{u}_q$ ارزولو لپاره دا يوازې اړينه ده چې د جهت بدلون د u_q وموميء، څرنګه چې د هغې اندازه تل يو واحد دی. د وخت په جريان Δt کې ، بدلون په Δr کی به د u_q جهت بدل نه کړی؛

اما، بدلون په د Δq کې به لامل د دی شی چې u_q په $u`_q$ بدل شی، چیرته چې $u`_q = u_q + \Delta u_q$، انځور 12-30d . پدی توګه د وخت بدلون په u_q کې بیا Δu_q کیږی. په دې توګه د کوچنیو زاویو لپاره ددی ویکتور اندازه $\Delta u_q \approx 1(\Delta q)$ او د $-u_r$ په جهت عمل کوي؛ په بل عبارت، $\Delta u_q = -\Delta q u_r$. په دې توګه،



(d)

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \qquad (12\text{–}27)$$

دا پایلې او معادله 12-23 په پورتنۍ مساواتو کې د **a** موندلو لپاره ځای په ځای کوو تر څو وکولی شو چې تعجیل د اجزاو په بڼه داسې ولیکو

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta \qquad (12\text{–}28)$$

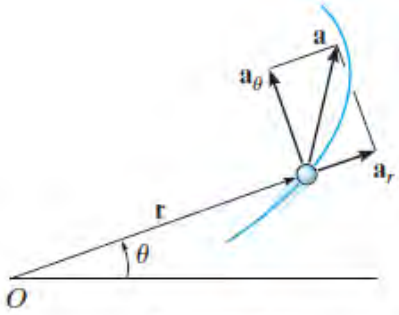
چیرې چې

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (12\text{–}29)$$

اصطلاح $q`` = d^2q/dt^2 = d/dt(dq/dt)$ په نامه د زاویي تعجیل (angular acceleration) په نامه یادول کیږي، ځکه چې دا هغه بدلون دی چې د زاویي په سرعت (angular velocity) کې په لحظ د وخت کې راغلي. واحد ددی اندازه کولو لپاره rad/s^2 دی. څرنګه چې $\mathbf{a}_r$ او $\mathbf{a}_q$ یو پر بل عمود دي، د تعجیل مقدار کیږي :

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \qquad (12\text{–}30)$$

جهت (*direction*) د ویکتوری یو ځایکولو د دوو اجزاوو له لارې ټاکل کیږي، څنګه چې په انځور 12-30e کې ښودل شوي ، په عاموم ډول **a** به په مسیر باندې مماس نه وي.

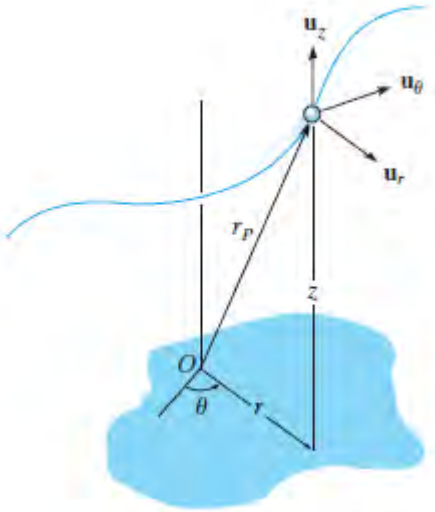


Acceleration

(e)

انځور 12-30

سلنډري محورونه (Cylindrical Coordinates)



که چیرې ذره د یوې فضايي منحني په امتداد حرکت وکړي، لکه څرنګه چې په انځور 12-31 کې ښودل شوي، نو د دې ځای موقعیت د دریو سلنډرې محورونو r, q, z له مخې ټاکل کېدی شي، چیرې چې د z محورد مستطیلو محورو سره یوشان دی. له دې امله چې د دې جهت په تعریفولو کې واحد ویکتور، $\mathbf{u}_z$، ثابت دی، نو د دې ویکتور د وخت مشتق صفر دی، او په دې اساس، د ذرې موقعیت، سرعت، او تعجیل یې د هغې په سلنډرې محورونو کې په لاندې ډول لیکل کېدی شي.

انځور 12-31

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \qquad (12\text{–}31)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z \qquad (12\text{–}32)$$

د وخت مشتقونه (Time Derivatives)

پورته معادلاتو لپاره اړینه ده چې د $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}$ او $\ddot{q}$ مهالیز مشتقونه ترلاسه کړو تر څو د r او q اجزاوی د $\mathbf{v}$ او $\mathbf{a}$ د پاره پیدا کړو. په عمومي توګه دوه ډوله مسلې پېښېږي:

1. که چیرې قطبي محورونه د وخت پارامتري معادلاتو په توګه ورکړل شوي وي،

$r = r(t)$ او $q = q(t)$ ، نو مهالیز مشتقونه په مستقیم ډول موندل کیدی شي.

2. که چیرې د وخت پارامتري معادلات نه وي ورکړل شوي، نو باید د حرکت لار

$r = f(q)$ معلومه وي. د کلکیولس زنځیري قاعدې په کارولو سره، مور کولی شو چې د $\dot{r}$ او $\dot{\theta}$ او همدارنګه د $\ddot{r}$ او $\ddot{q}$ ترمنځ اړیکه وموم.

د تحلیل کړنلاره

د تحلیل کړنلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

محوري سیستم (Coordinate System)

- کله چې د ذراتو حرکت د زاویایی حرکت د شعاعي محور r لپاره کارول شوي وي، په دی حالت کی د قطبي محورونو کارول یو مناسب انتخاب دی. همدارنګه، ځینې د حرکت لارې کیدی شي په اسانه توګه په دغو محورونو سره وښودل شی.
- د قطبي محورونو د کارولو لپاره، منشاء په یوه ثابت ټکی کې ټاکل کیږي، او شعاعي کرښه r د ذری پر لور جوړیږي .
- عرضي محوري q د ثابت مرجع کرښې څخه تر شعاعي کرښې پورې اندازه کیږي

سرعت او تعجیل (Velocity and Acceleration) .

کله چې r او څلور مهالیز مشتقونه $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}$ او $\ddot{q}$ په ټاکل شوي وخت کې ارزول شوي وي، نو د دوی ارزښتونه په معادلاتو 12-25 او 12-29 کې ځای پر ځای کیږي ترڅو د **v** او **a** شعاعي او عرضي اجزاوی ترلاسه شي .

- که اړتیا وي چې مهالیز مشتقونه د $r = f(q)$ واخیستل شي، نو باید د زنځیر قاعده وکارول شي. ضمیمه C وګورئ
- په دریو ابعادو کې حرکت د پورته کړنلارې یوه ساده پراختیا ته اړتیا لري ترڅو $\dot{z}$ او $\ddot{z}$ شامل کړي.

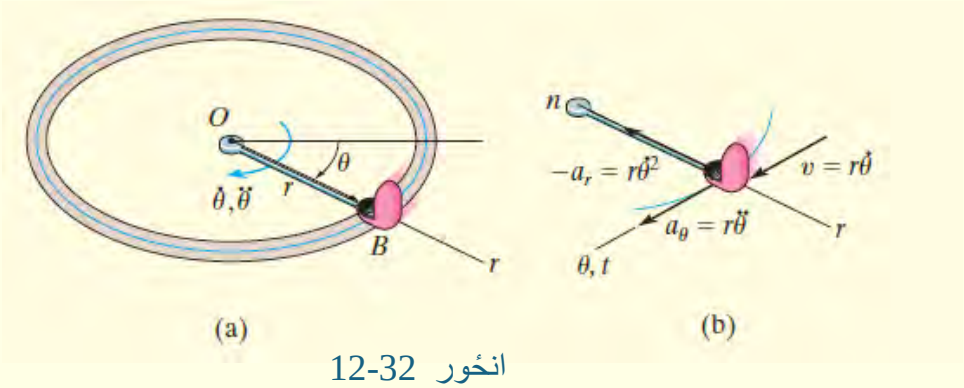


د دې نجلۍ مارپیچي حرکت د سلنډري محورونو په کارولو سره تعقیب کیدی شي. دلته شعاعي محور r ثابت دی، عرضي محور q به د وخت په تیریدو سره زیاتوالی مومي ځکه چې نجلۍ د عمودي محور شاوخوا څرخیږي، او د هغې ارتفاع z به د وخت په تیریدو سره کمیږي.

مثالونه

مثال 12.17

د تفريحي پارک د سواری په برخه کې چې په انځور 12-32 a کې ښودل شوی دی، يو څوکۍ شامله ده چې په افقي دايروي مسير کې د r شعاع په اوږدو کې څرخيږي چې لاس OB يې زاويه يې $\dot{q}$ سرعت او $\ddot{q}$ تعجيل لري. د موټر د شعاعي او عرضي اجزاوی د سرعت او تعجيل معلومې کړئ. د محاسبې په ترڅ کې د مو ټر اندازه له پامه وغورځوئ.



انځور 12-32

حل

محوري سيستم (Coordinate System). څرنګه چې د لاس زاويا يې حرکت معلوم دی، نو د حل لپاره به قطبي محورونه وکارول شي، لکه څنګه چې په انخور 12-32a کې ښودل شوي.

سرعت او تعجيل (Velocity and Acceleration) . لومړی دا اړينه ده چې د r او q لومړی او دويم مهاليز مشتقونه وټاکو. څرنګه چې r *ثابت* دی، نو مور لرو:

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

نو بيا

$$v_r = \dot{r} = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \textit{Ans.}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \qquad \textit{Ans.}$$

دا پايلې په انځور 12-32b کې ښودل شوی دي.

يادونه : د n او t محورونه هم په انځور 12-32b کې ښودل شوي، چې په دې ځانګړي حالت کې د دايروي حرکت لپاره د r او q محورونو سره مستقيم همغږي (collinear) دي. له همدې امله، ځرنګه چې $v = v_q = v_t = r\dot{q}$، نو د مقايسې له مخې:

$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

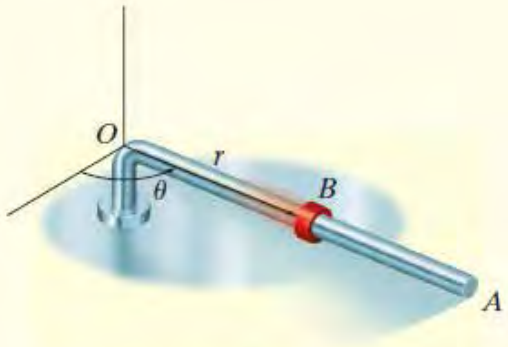
مثال 12.18

ميله OA په انځور 12-33aکې په افقي سطحه کې داسې څرخيږي چې q = (t^3) rad (ريډيان). په ورته وخت کې، کالر B د OA په اوږدو کې بهر خواته ښويږي چې $r = (100t^2)$ ملي متره. که t په ثانيو کې وي، نو د کالر سرعت او تعجيل په $t = 1$ s کې تعيين کړئ .

حل

محوري سيستم (Coordinate System).

له هغه ځايه چې د مسير د وخت پيراميټريک معادلې ورکړل شوي دي، دا اړينه نده چې r او q سره اړيکه ورکړئ .



(a) انځور 12-33

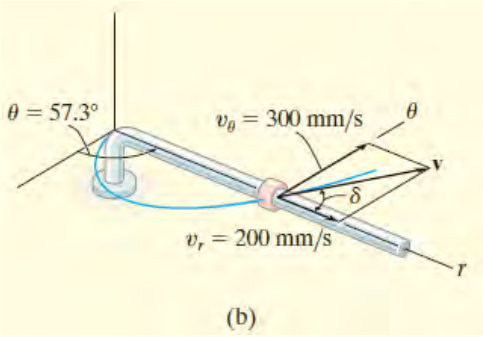
سرعت او تعجيل (Velocity and Acceleration) .

د r او q د مهاليزمشتقاتو ټاکل او دوی ته ارزونه ورکول کله چې $t = 1$ s وي، مور لرو

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,s} = 100\,\text{mm} \quad \theta = t^3\Big|_{t=1\,s} = 1\,\text{rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,s} = 200\,\text{mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,s} = 3\,\text{rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,s} = 200\,\text{mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,s} = 6\,\text{rad/s}^2$$



(b)

انځور 12-33

لکه څنګه چې په انځور 12-33b ښودل شوي

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}$$

مقدار د **v** عبارت دی په

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\ \text{mm/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3° \quad \delta + 57.3° = 114° \qquad \textit{Ans.}$$

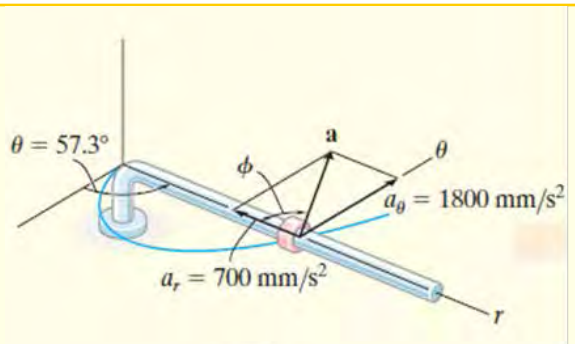
لکه څنګه چې په انځور 12-33c ښودل شوي

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\ \text{mm/s}^2$$

مقدار د **a** عبارت دی په

$$a = \sqrt{(-700)^2 + (1800)^2} = 1930\ \text{mm/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7° \quad (180° - \phi) + 57.3° = 169° \qquad \textit{Ans.}$$

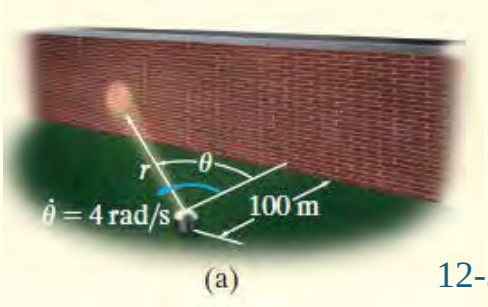


انځور 12-33

یادونه: سرعت مماس دي په مسیر ; خو تعجیل د مسیر د منحني دننه اړخ ته متوجه دی، لکه څنګه چې تمه کېده.

مثال 12.19

د لټون څراغ ، انځور 12-34a ، په دیوال کې د رڼا یوه نقطه رامنځته کوي چې د لټون څراغ څخه 100 متره لرې موقعیت لري. په هغه مهال کې چې د رڼا په دیوال کی حرکت ښکاری، قوی تکې ښکاري ، په هغه لحظه کی چې $q = 45°$ ده ، د رڼا د تګ د سرعت او د تعجیل کچه محاسبه کړئ. د لټون څراغ په ثابت ډول څرخیږي چې $\dot{q} = 4$ rad/s ده.



انځور 12-34

حل

محوري سیستم (Coordinate System).

قطبی محورونه به د دې مثال د حل لپاره وکارول شي ځکه چې د لټون څراغ زاویوي اندازه ورکړل شوی ده. د اړتیا وړ مهالیزمشتقاتو موندلو لپاره، لومړی اړینه ده چې r د u سره اړوند کړو. انځور 12-34a څخه لرو

$$r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$$

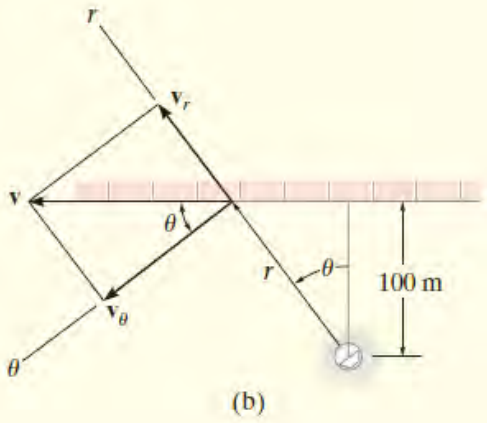
سرعت او تعجیل (Velocity and Acceleration) . زنجیری قاعده (chain rule) په کارولو سره څرنګه چې د لاندی اړیکی موجود دی نو مونږ لیکلی شو:

$$d(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta\,d\theta,\ \text{and}\ d(\tan\theta) = \sec^2\theta\,d\theta,\ \text{we have}$$

$$\dot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})$$

$$= 100\sec\theta\tan^2\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}$$



انځور 12-34

څرنګه چې ثابت $\dot{q}$ =4 rad/s = دی نو بیا0 = $\ddot{q}$ او پورتنۍ معادلې کله چې $q = 45^0$ وی، کیږي

$$r = 100\sec 45° = 141.4$$

$$\dot{r} = 400\sec 45°\tan 45° = 565.7$$

$$\ddot{r} = 1600\,(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2$$

څرنګه چې په انځور 12-34b کې ښودل شوي

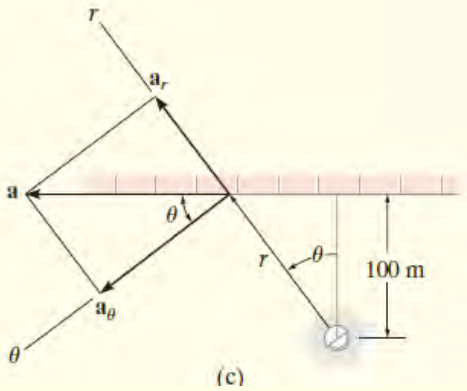
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta\}\ \text{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}$$

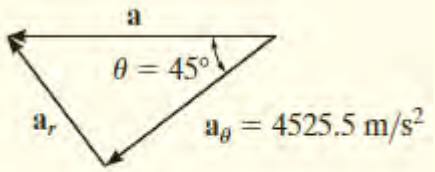
$$= 800\ \text{m/s}$$ *Ans.*



(c)

څرنګه چې په انځور 12-34c کې ښودل شوي

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{4525.5\mathbf{u}_r + 4525.5\mathbf{u}_\theta\}\ \text{m/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2}$$
$$= 6400\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$



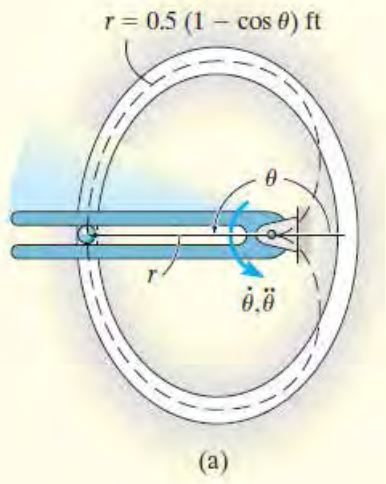
(d)

انځور 12-34

یادونه: دا هم ممکنه ده چې پرته له دې چې $\ddot{r}$ یا (a_r) محاسبه شي a پیدا شي. لکه څنګه چې په انځور 12-34d کې ښودل شوي، څرنګه چې $a_q = 4525.5\ \text{m/s}^2$ دی، بیا د ویکتور په تحلیل سره $a = 4525.5/\cos 45^0 = 6400\ \text{m/s}^2$.

مثال 12.20

د شاخی میلی د ګرزیدو له امله توپ په غوڅه برخه د میلی کی حرکت کړي ځرنګه چی په انځور 12-35a کی ښودل شوي دی. یو برخه د میلی د یوه زړه یا کارډیویډ (cardioid) په شکل ده، $r = 0.5(1 - \cos q)$ ft، چیرې چې q په رېډ ین کي ده. که چیرې د توپ سرعت $v = 4$ ft/s او د هغه تعجیل $a = 30$ ft/s² په هغه شیبه کي وي چې $q = 180°$ وي، د د میلی د شاخی د زاویي سرعت $\dot{q}$ او زاویي تعجیل $\ddot{q}$ تعین کړئ .



انځور 12-35

حل

محوري سیستم (Coordinate System).

دغه مسیر غیر معمولي دی، اوپه ریاضیاتي توګه دا غوره ده چی دا په قطبی محوری سیستم په کارولو سره وښودل شی، لکه دلته چې ترسره شوي دي، پر ځای د مستطیلي محورونو. همدارنګه، ځرنګه $\dot{q}$ او $\ddot{q}$ باید تعین شي، نو r, q محورونه ځرګند انتخاب دی

سرعت او تعجیل (Velocity and Acceleration) . د r او q د مهالیزمشتقونه د زنجیري قاعدی په کارولو سره تعین کیدلای شي .

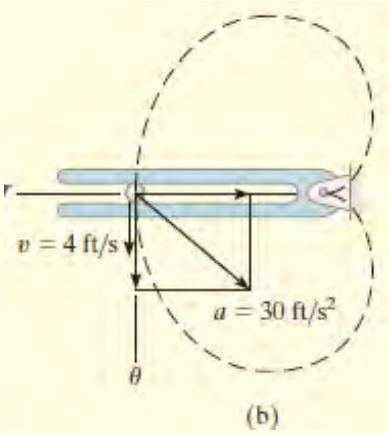
$$r = 0.5(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{r} = 0.5(\sin\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 0.5(\cos\theta)(\dot{\theta})^2 + 0.5(\sin\theta)\ddot{\theta}$$

دا پایلي د $q = 180^0$ لپاره مورِ لرو

$$r = 1\text{ ft} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = -0.5\dot{\theta}^2$$

ځرنګه چی $v = 4$ ft/s له معادلي 12-26 مورِ $\dot{q}$ پیداکولی شو چی دا لاندی راکوی:

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$
$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$
$$\dot{\theta} = 4\text{ rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 12-35

حل

په ورته ډول د $\ddot{q}$ ارزښت به معادلی 12-30 څخه په لاس راشی.

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

$$30 = \sqrt{[-0.5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$

$$30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$

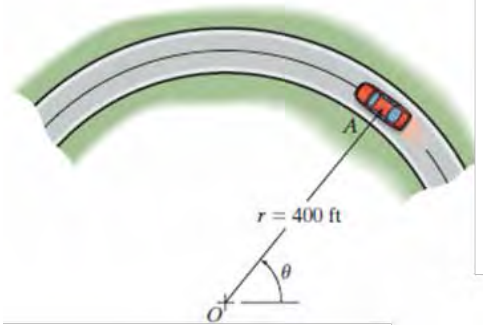
$$\ddot{\theta} = 18\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

ویکتورونه **a** او **v** په انځور 12-35b کی ښودل شوي دي.

بنسټیز پوښتنې

FUNDAMENTAL PROBLEMS

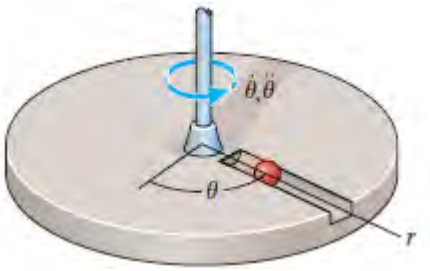
ب 12-33. موټر 55 ft/s تیزوالی لري. په دې شیبه کې د شعاعي کرښې *OA* زاویه یې سرعت $\dot{q}$ تعین کړئ



ب 12-33

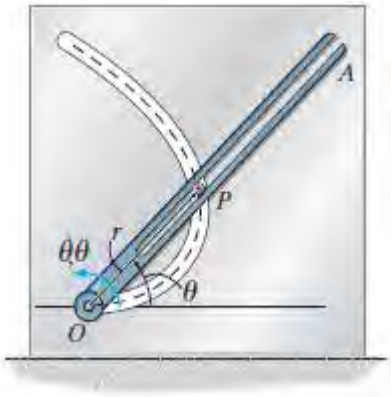
.

ب 12-34. ستېج په عمودي محور باندی داسې څرخیږی چې په هره شیبه کې د هغې زاویه یې موقعیت $q = (4t^{3/2})$ rad وي، چیرې چې t په ثانیو کې ده. یو توپ په شعاعي نالی کې بهر ته ځي چې موقعیت $r = (0.1t^3)$ m راکول شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د توپ د سرعت او تعجیل مقدارونه کله چې $t = 1.5$ s وی تعین کړئ.



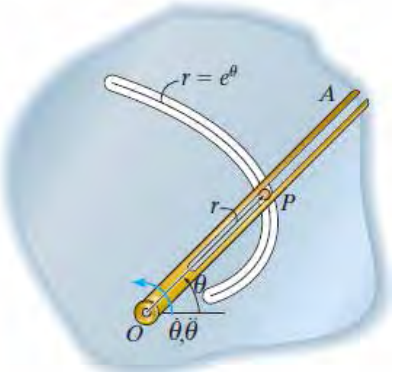
ب 12-34

ب 12-35. د P میخ ، د شاخی لاس OA په یوه منحني لاره چې د $r = (2q)$ ft په واسطه تعریف شوی خوځول کیږي. په یوه شیبه کې چې $q = \pi/4$ rad دی، د لاس زاویه یې سرعت $\dot{q} = 3$ rad/s او زاویه یې تعجیل $\ddot{q} = 1$ rad/s² دی. د میخ د تعجیل مقدار په دې شیبه کې تعین کړئ



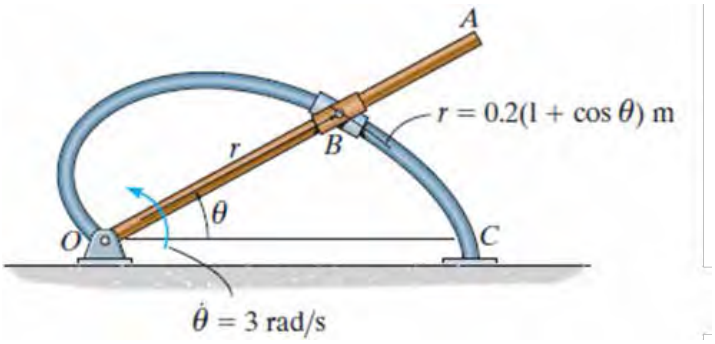
ب 12-35

ب 12-36. د P میخ ، د شاخی لاس OA په واسطه په یوه لاره چې په $r = (e^q)$ ft تعریف شوی خوځول کیږي، چیرې چې r په متر دی. کله چې $q = \pi/4$ rad ده، د لاس د زاویه یې سرعت $\dot{q} = 2$ rad/s او تعجیل یې $\ddot{q} = 4$ rad/s² دی. په دې شیبه کې د میخ د تعجیل شعاعي او عرضي اجزاوی تعین کړئ.



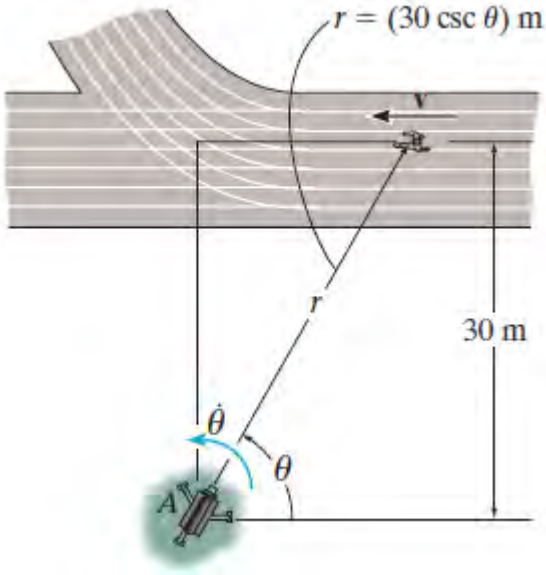
ب 12-36

ب 12-37. کالرونه په B کې په پن ټرل شوي او د OA راډ او د OC منحني لارښود په اوږدو کې په ازاده توګه د حرکت وړ دي چې د یوه زړه (cardioid) په شکل کې دی، کوم چې $r = [0.2(1 + \cos q)]$ m. ورکړل شوی دی. په $q = 30°$ کې، د OA زاویه وی سرعت $\dot{q} = 3$ rad/s دی. په دې ځای کې د کالرونو د سرعت مقدار تعین کړئ.



ب 12-37

ب 12-38. په هغه شیبه کې چې $q = 45°$ وي، لوبغاړی په 2 m/s ثابت سرعت سره ځغلي. د کامرې د څرخولو زاویه یې سرعت چې باید د حرکت تعقیبولو لپاره وکاروي، تعین کړئ.



ب 12-38

پوښتنې

PROBLEMS

12-155. که د یوې ذرې موقعیت د قطبي محورونولخوا په دې ډول بیان شي:

$r = 4(1 + \sin t)$ m او $\theta = (2e^{-t})$ rad ، چیرې چې t په ثانیو کې ده او د ساین ارزښت په رېډین دی، د ذرې شعاعي او عرضي سرعت او تعجیل اجزاوی په $t = 2$ s (ثانیو) کې تعین کړئ.

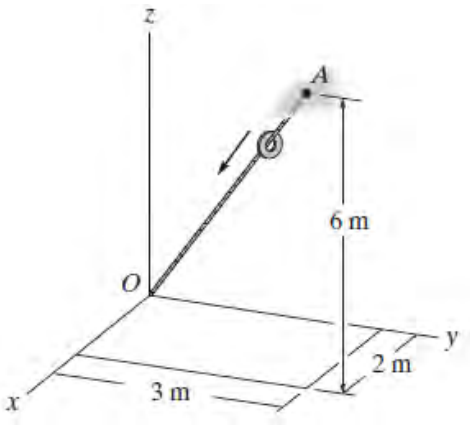
12-156*. یوه ذره په داسې مسیر کې حرکت کوي چې د قطبي محورونو لخوا تعریف شوی ده : $r = (2e^{t})$ft او $\theta = (8t^{2})$rad، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د هغې د سرعت او تعجیل اجزاوی په $t = 1$s کې تعین کړئ.

12-157. یوه ذره په یوه لیماکان (limacon) کې حرکت کوي . لیماکان په

$r = b - a\cos\theta$ معادله تعریف شوې دی، چیرې چې a او b ثابت اعداد دي. د ذرې شعاعي او عرضي سرعت او تعجیل اجزاوی تابع د θ او د هغې د مهالیز مشتقونو سره تعین کړئ.

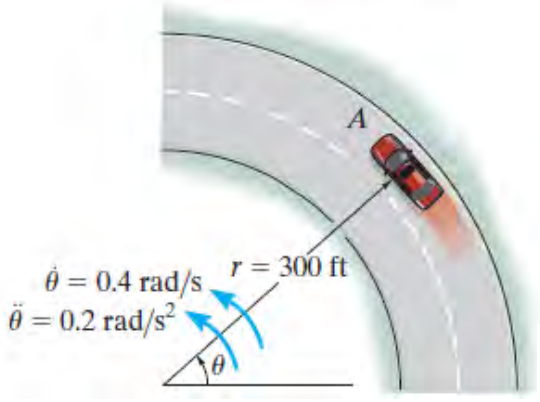
12-158. یو الوتکه په مستقیمه کرښه کې په 200 mi/h سرعت او 3 mi/h^2 تعجیل سره الوتنه کوي. که چیرې پراپیلر (propeller) یې 6 فوټه قطر ولري او په ثابت زاویه یې سرعت 120 rad/s سره څرخي، د پراپیلر په څوکه کې موقعیت لرونکي یوه ذره به په کومه اندازه سرعت او تعجیل ولري؟

12-159. یو کوچنی واشر د OA رسی په ووړدو بنویږي. کله چې دی په منځ کې وي، د هغې سرعت 28 متر/ساعت او تعجیل یې 7 m/h^2 دي. د واشرسرعت اوتعجیل په دې ځای کې د سلندري محورونو په اجزاوو بیان کړئ.



پوښتنه 12-159

*12-160. یو موټر په دایروي کربنه کې چې 300 ft شعاع لري سفر کوي. په ورکړل شوي شیبه کې، د هغې زاویه یې سرعت $\dot{q} = 0.4$ rad/s دی، چې په $\ddot{q} = 0.2$ rad/s² کې زیاتوالی مومي. د موټر د سرعت او تعجیل مقدارونه په دې شیبه کې تعین کړئ.



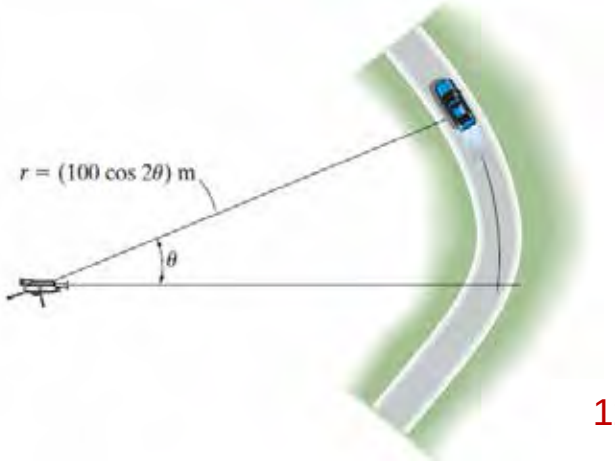
پوښتنه 12-160

12-161. که یوه ذره په داسې مسیر کې حرکت کوي چې $r = 2(\cos t)$ ft او $\theta = (t/2)$ rad ده، چیرې چې t په ثانیو کې ده، مسیر $r = f(\theta)$ رسم کړئ او د ذرې شعاعي او عرضي سرعت او تعجیل اجزاوی تعین کړئ.

12-162. که د یوی ذرې موقعیت د قطبي محورونو لخوا په دې ډول وښودل شی $r = (2\sin 2q)$ m او $\theta = (4t)$rad، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د ذرې شعاعي او عرضي سرعت او تعجیل اجزاوی په $t = 1$ s کې تعین کړئ.

12-163. موټر چلونکی یو ثابت تیزوالي 40 m/h ساتي. د کامرې زاویه وی سرعت تعین کړئ تر څو کامره موټر تعقیب کړي کله چې $\theta = 15°$ وي.

*12-164. کله چې $\theta = 15°$ وي، موټر په 50 m/h تیزوالي سره سفر کوي او په 6 m/s² کې زیاتوالی مومي. د کامرې زاویه وی سرعت چې موټر تعقیب کړي په دې شیبه کې تعین کړئ.

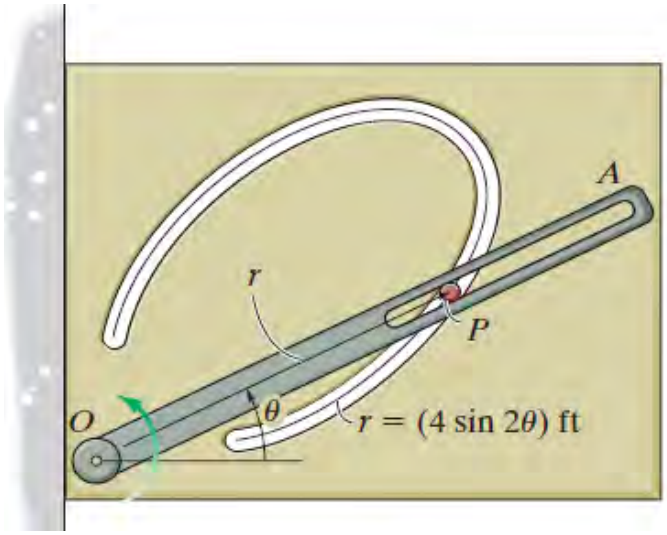


پوښتنې 12-163/164

12-165 . د تعجیل د وخت بدلون ته ټکان (*jerk*) ویل کیږي، چې زیاتره د مسافرانو د ناراحتیو د اندازه کولو لپاره کارول کیږي. دغه ویکتور $\dot{a}$ په سلندریي محورونو کې، د 12-32 معادلی په کارولو سره، محاسبه کړئ.

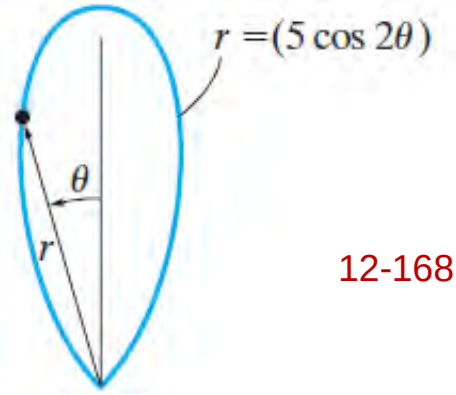
12-166 . د یوې ذرې موقعیت د قطبي محورونولخوا په دې ډول بیان شوی دی : $r=(300e^{-0.5t})$ mm او $\theta=(0.3t^2)$ ra ، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د ذرې د سرعت او تعجیل مقدارونه په $t=1.5s$ کې تعین کړئ.

12-167 . پن P په داسي مسیر کې حرکت کوي چې د لمنیسکیټ (lemniscate) معادله $r = (4 \sin 2\theta)$ft لخوا تعریف شوی ده. که د نالی شوي لاس OA زاویي موقعیت د معادله $\theta = (3\ t^{3/2})$ rad لخوا تعریف شوی وي، دلته t په ثانیو کی اندازه کیږي. د P د سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta = 60°$ کې تعین کړئ.



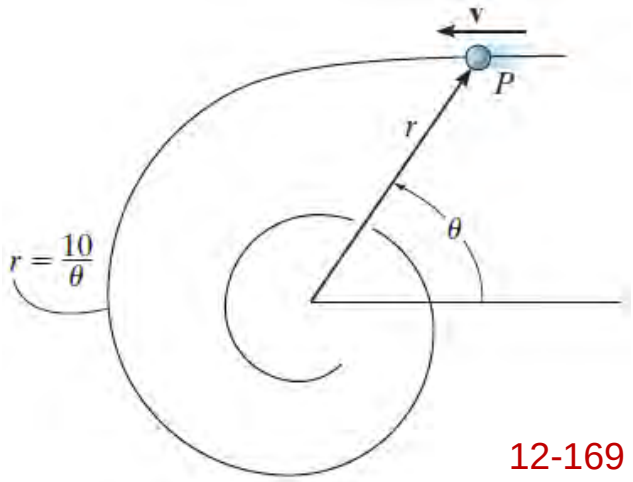
پوښتنه 12-167

12-168* . یوه ذره د څلورپاڼي ګلاب په یوه برخه کې حرکت کوي چې له $r = (5 \cos 2\theta)$m معادلی لخوا تعریف شوې دی. که د شعاعي محور د کربنې زاویه وی سرعت $\dot{\theta}=(3t^2)$ rad/s وي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د ذرې شعاعي او عرضي سرعت او تعجیل اجزاوی په $\theta=30°$ کې تعین کړئ. کله چې $t = 0$ ، $\theta = 0$ وي.



پوښتنه 12-168

12-169 . یوه ذره P په داسې مارپیچي مسیر کې حرکت کوي چې $r = (10/\theta)$ ft، چیرې چې θ په ریډین کې ده. که دا یو ثابت تیزوالي $v = 20$ ft/s وساتي، v_r او v_θ تابع د q په توګه وښیی او هر یو په θ =1rad کې تعین کړئ.

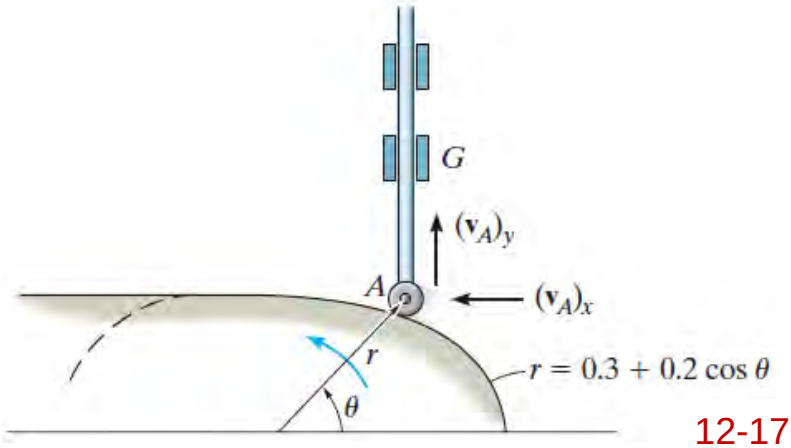


پوښتنه 12-169

12-170 . یوه ذره په x–y سطحه کې داسې حرکت کوي چې موقعیت یې د

$r = \{2\,t\,\mathbf{i} + 4t^2\,\mathbf{j}\}$ ft لخوا تعریف شوی دی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د ذرې د سرعت او تعجیل شعاعي او عرضي اجزاوی په t= 2s کې تعین کړئ.

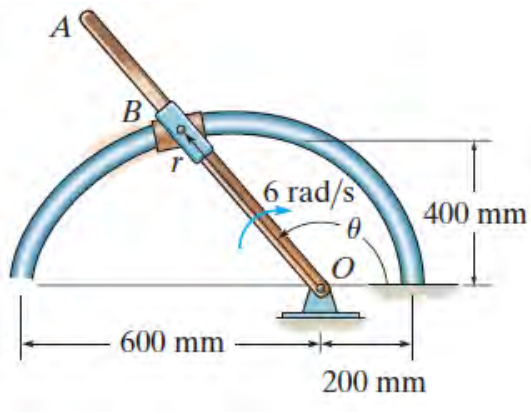
12-171 . د یو ماشین میکانیزم داسې جوړ شوی دی چې رولر په A کی د کم (cam) په سطحه حرکت کوي. د کم سطحه په معادله $r = (0.3 + 0.2 \cos q)$ m لخوا تعریف شوی ده. که $\dot{\theta}$=0.5 rad/s او $\ddot{\theta} = 0$ وي، د رولر د سرعت اوتعجیل مقدارونه په $\theta = 30°$ کې تعین کړئ. د رولر اندازه په پام کی مه نیسي . همدارنګه، د رولر د سرعت اجزاوی $(\mathbf{v}_A)_x$ او $(\mathbf{v}_A)_y$ په دې شیبه کې تعین کړئ. هغه راډ چې رولر ته نښلول شوی دی عمودي پاتې کیږي او کولای شي پورته یا ښکته حرکت وکړي، پداسې حال کې چې لاربښوونکي په افقي ډول کینې خواته حرکت کوي.



پوښتنه 12-171

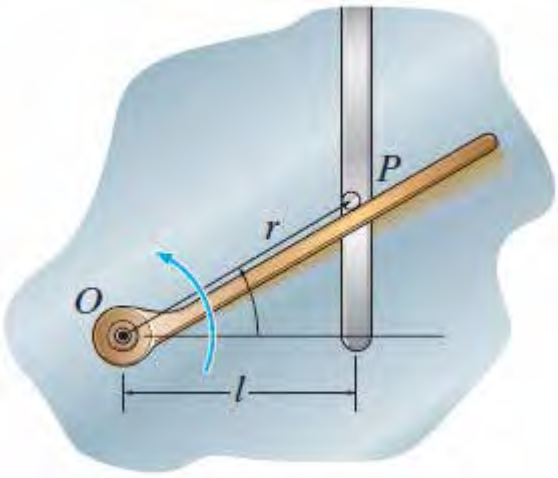
*12-172 . د OA میله د ساعت په لوري په ثابت زاویوی سرعت 6 rad/s کې څرخیږی. دوه پن ټرل شوي بښویدونکي بلاکونه، چې په B کې موقعیت لري، په آزاد ډول په OA او منحني میله چې د لیمکن په شکل ده او د معادلې $r = 200(2 - \cos\theta)$ mm لخوا تعریف شوی دی، حرکت کوي. د بښویدونکیو بلاکونو تیزوالي په $\theta=150°$ کې تعین کړئ.

12-173 . د بښویدونکیو بلاکونو د تعجیل مقدار په پوښتنه 12-172 کې، کله چې $\theta =150°$ وي، تعین کړئ.



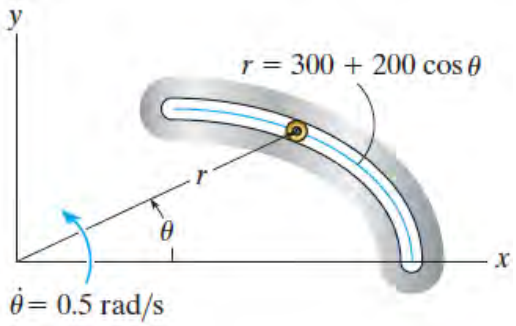
پوښتنه 12-173

12-174 .لاس په O کې پن شوی دی، او د هغې د څرخیدو په نتیجه کې، میخ P په عمودي لاربښود کې حرکت کړي. د P د سرعت او تعجیل مقدارونه، کله چې $\theta = ct$ rad وي، محاسبه کړئ . c یو ثابت عدد دی .



پوښتنه 12-174

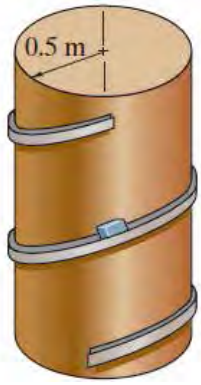
12-175 . د لاندی ماشین میکانیزم داسې جوړ شوی دی تر څو پن هغه مسیر تعقیب کړي چې د $r = (300 + 200\cos\theta)$ mm معادلې لخوا بیان شوی دی. که $\dot{\theta}=0.5$ rad/s او $\ddot{\theta}=0$ وي، د پن سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta=30°$ کې تعین کړئ. د پن اندازه له پامه وغورځوي. همدارنګه، د پن د سرعت اجزاوی $(v_A)_x$ او $(v_A)_y$ په دې شیبه کې تعین کړئ.



پوښتنه 12-175

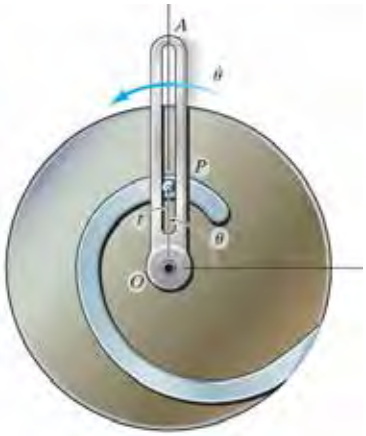
*12-176 . یو بکس په هیلیکل رمپ کی په ثابت تیزوالیر v= 2 m/s سره ښکته کیږي. د هغې د تعجیل مقدار تعین کړئ. ریمپ د هر بشپړ څرخیدو لپاره په 1 متر عمودي فاصله ښکته ځي. د رمپ اوسطه شعاع 0.5 متره ده.

12-177 . یو بکس په هیلیکل رمپ کې داسې ښکته کیږي چې $r = 0.5$ m ,
$\theta = (0.5t^3)$ rad ، او $z = (2 - 0.2\ t^2)$m ، چیرې چې t په ثانیو کې ده . د بکس سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta = 2\pi$ rad کې تعین کړئ.



پوښتنې 12-176/177

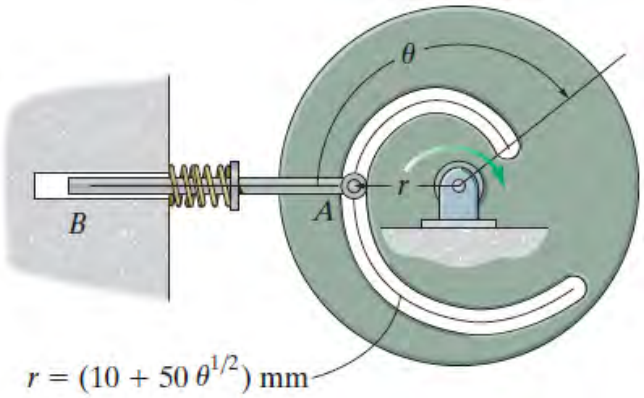
12-178 . د پن P حرکت د OA منځ خالی لاس په څرخیدو سره کنټرول کیږي. که لاس په ثابت زاویوي سرعت $\dot{\theta} = 6$ rad/s کې څرخي، د P سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta = \pi/2$ ریډین کې تعین کړئ. د سپایرل مسیرمعادله $r = (40\ \theta)$ mm ، ده چیرې چې θ په ریډین اندازه کیږي.



پوښتنه 12-178

12-179 . که دایروي تخته د ساعت په لوري په ثابت زاویوي سرعت $\dot{\theta} = 1.5$ rad/s خرخي، د AB تعقیبی راډ د سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta = 2/3\pi$ rad/s کې تعین کړئ.

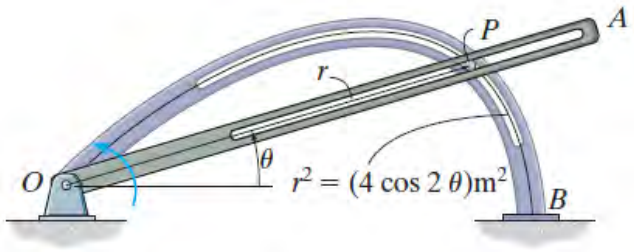
*12-180 . کله چې $\theta = 2/3\ \pi$ rad وي، د دایروي تختی زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په ترتیب سره $\dot{\theta} = 1.5$ rad/s او $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2 دي. د AB راډ د سرعت او تعجیل مقدارونه په دې شیبه کې تعین کړئ.



پوښتنې 12-179/180

12-181 . د میخ P حرکت د لمنیسکت OB منحني شکل اوږد سوري او OA سوري شوی لاس لخوا محدود شوی دی. که OA د ساعت خلاف لوري په ثابت زاویوي سرعت $\dot{\theta} =$ 3 rad/s کې خرخي، د P میخ سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta = 30°$ کې تعین کړئ.

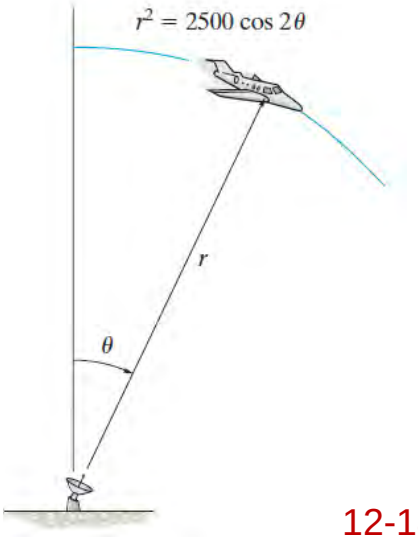
12-182 . د میخ P حرکت د لمنیسکت OB منحني شکل اوږد سوري او OA سوري شوی لاس لخوا محدود شوی دی. که OA د ساعت خلاف لوري په زاویوي سرعت rad/s $\dot{\theta}=(3t^{3/2})$ کې خرخي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د P میخ سرعت او تعجیل مقدارونه په θ=30° کې تعین کړئ. کله چې $t = 0$ ، $\theta = 0°$ وي.



پوښتنې 12-181/182

12-183 . یو موټر په داسې سړک سفر کوي چې د لنډې فاصلې لپاره د معادلې $r = (200/\theta)$ft لخوا تعریف شوی، چیرې چې θ په رېډین ده. که دا یو ثابت تیزوالی v= 35 ft/s وساتي، د سرعت شعاعي او عرضي اجزاوی په $\theta = \pi/3$ رېډین کې تعین کړئ.

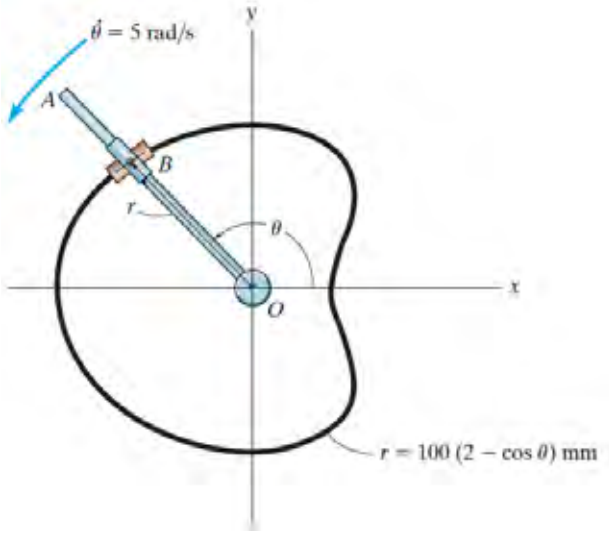
*12-184 . د لنډې مودې لپاره جټ الوتکه په یوه مسیر کې حرکت کوي چې د لمینسکټ په شکل کې دی، او د معادلې $r^2=(2500\cos 2\theta)\ km^2$ لخوا تعریف شوې دی. په $\theta=30°$ کې، د رادار تعقیبي وسیله په $\dot{\theta}=5\times10^{-3}\ rad/s$ سرعت او $\ddot{\theta}=2\times10^{-3}\ rad/s^2$ تعجیل سره څرخي. د الوتکې د سرعت او تعجیل شعاعي او عرضي اجزاوی په دې شیبه کې تعین کړئ.



پوښتنه 12-184

12-185 . د OA میله د ساعت په خلاف لوري کې په ثابت زاویوي سرعت $\dot{\theta}=5rad/s$ کې څرخي. دوه په پن ټرل شوي بنویدونکي بلاکونه، چې په B کې موقعیت لري، په آزاد ډول په OA او منحني میله چې د لیمکن په شکل کې ده او د معادلې $r=100(2-\cos\theta)\ mm$ لخوا تعریف شوی ده، حرکت کړي. د بنویدونکیو بلاکونو سرعت په $\theta=120°$ کې تعین کړئ.

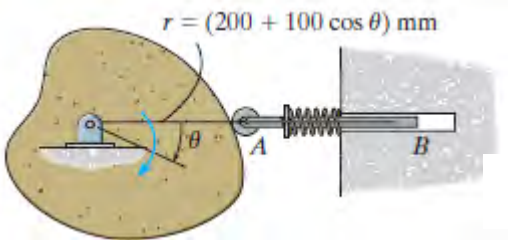
12-186 .1 د بنویدونکیو بلاکونود تعجیل مقدار په پوښتنه 12-185 کې، کله چې $\theta=120°$ وي، تعین کړئ.



پوښتنې 12-185/186

12-187 . که کم د ساعت په خلاف لوري کې په ثابت زاویوي سرعت $\dot{\theta}=5$ rad/s کې څرخي، د AB تعقیبي راډ د سرعت او تعجیل مقدارونه په $\theta=30°$ کې تعین کړئ. د کم سطحه د لیمکن په شکل کې ده او د معادلی $r=(200+100\cos\theta)$ mm خوا تعریف شوې ده.

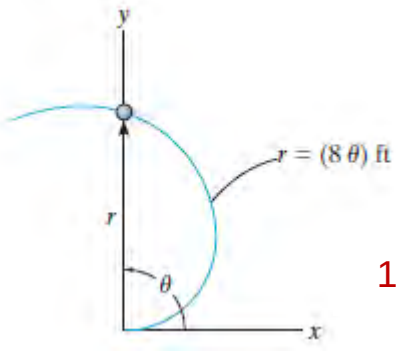
12-188*. $\theta = 30°$ کې، کم په ($\dot{\theta}=5$ rad/s) زاویوي سرعت اوپه ($\ddot{\theta}=6$ rad/s^2) زاویوي تعجیل سره څرخي. د AB تعقیبي راډ د سرعت او تعجیل مقدارونه په دې شیبه کې تعین کړئ. د کم سطحه د لیمکن په شکل کې ده چې دمعادلی $r = (200 + 100\cos\theta)$ mm لخوا تعریف شوې ده.



پوښتنې 12-187/188

12-189. یوه ذره په آرکیمیدین (Archimedean) مارپیچی مسیر کې حرکت کوي چې معادله یې $r = (8\theta)$ ft , چیرې چې θ په رېډین کې ده. که $\dot{\theta}=4$ rad/s (ثابت) وي، د ذرې شعاعي او عرضي اجزاوی د سرعت او تعجیل په $\theta = \pi/2$ rad کې تعین کړئ. منحني یې رسم کړئ اواجزاوی یې په منحني وښیی.

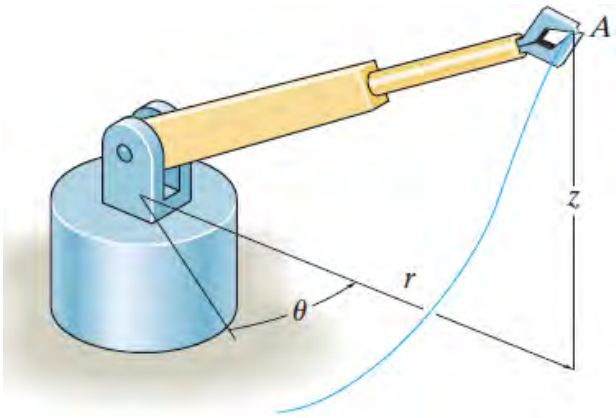
12-190. پوښتنه 189 حل کړئ که د ذرې زاویوی تعجیل $\ddot{\theta}=6$ rad/s^2 وي، کله چې $\dot{\theta}=4$ rad/s په $\theta = p/2$ rad وي .



پوښتنې 12-189/190

12-191. د روباټ لاس داسې حرکت کوي چې $r = 3$ ft ثابت وي، او د هغه نیونکی ځای A په مسیر $z = (3\sin 4q)$ ft، په اوږدو کې حرکت کوي چیرې چې q په رادینو کې ده. که $q = (0.5t)$ rad وي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د نیونکې سرعت او تعجیل اندازی وټاکئ کله چې $t = 3$ s وي.

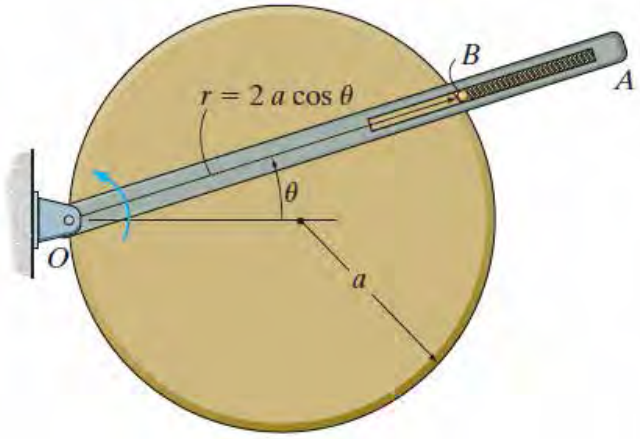
*12-192 . د لنډ وخت لپاره د روبات لاس داسی اوږدیږي چې $\dot{r} = 1.5$ ft/s کله چې $r = 3$ ft , $z = (4t^2)$ ft او $q = 0.5t$ rad دلته t په ثانیو کې دی. د روبات د نیونکی A سرعت او تعجیل اندازې وټاکئ کله چې $t = 3$ s وي.



پوښتنې 12-191/192

12-193. چاک لاس OA په O باندی د ساعت خلاف په ثابت زاویوی سرعت د $\dot{\theta}$ څرخیږی. د پن B حرکت داسې محدود شوی چې په ثابته دایروي سطحه او د OA د چاک په اوږدو کې حرکت کوي. د پن B سرعت او تعجیل اندازې د q تابع په توګه وټاکئ.

12-194. د OA چاک لاس چې په O باندی د ساعت خلاف داسی ګرزی کله چې $q = \pi/4$ وي، د OA لاس په $\dot{\theta}$ زاویوي سرعت او د $\ddot{\theta}$ زاویوي تعجیل سره حرکت کوي. په دې لحظه کې د پن B سرعت او تعجیل اندازې وټاکئ. د B پن حرکت داسې محدود شوی چې په ثابته دایروی سطحه او د OA په اوږده چاک کې حرکت کوي.



پوښتنې 12-193/194

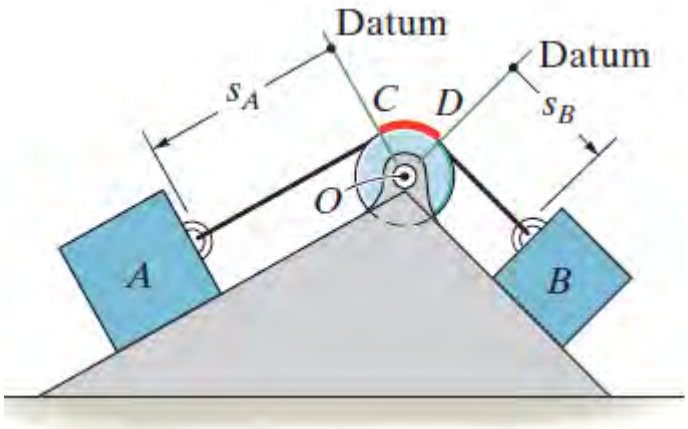
12.9 د دوو ذراتو مطلق تابع حرکت تحلیل

(ABSOLUTE DEPENDENT MOTION ANALYSIS OF TWO PARTICLES)

په ځینو پوښتنو کی د یوی ذری حرکت د بلی ذری په اړونده حرکت پورې تړلی وي. دا ترون عموماً هغه وخت پیښیږي که چیرې ذری، چې دلته په بلاکونو سره ښودل شوي، د نه وړدیدونکیو تارونو په واسطه چې په څرخکیو (pulleys) باندې تاو شوي وي، سره نښلول شوي وي. د مثال په توګه، په انځور 12-36 کې د بلاک A حرکت په ښکته لور په مایله سطحه به د بلاک B په بله مایله سطحه باندې د هغه د پورته لوری د حرکت سره اړیکه ولري.

که څه هم دا ممکن څرګنده ښکاري، مور کولی شو دا د ریاضی له لارې وښیو، چې لومړی د بلاکونو د ځای کوارډینټونو s_A او s_B په کارولو سره مشخص کړو، چیرې چې هر یو د کوارډینټ محورونه (1) له یو ثابت نقطې (O) یا ثابتې کرښې څخه اندازه کیږي، (2) د هر بلاک د حرکت په لور د هر مایل په اوږدو کې اندازه کیږي، او (3) مثبت جهت له ثابتوکرښو څخه تر A او B پورې لري. که چیرې د ټول تار اوږدوالی l_T وي، نود دوو موقعیت کوارډینټونه د لاندې معادلې په واسطه سره تړلی کیدی شي.

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$



انځور 12-36

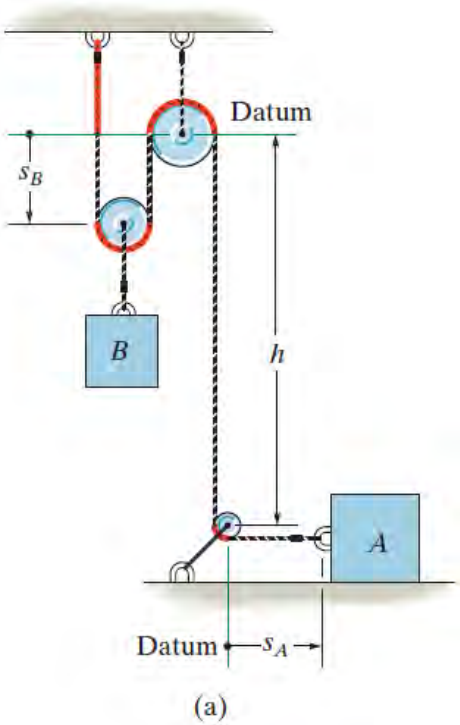
دلته l_{CD} د تار اوږدوالی دی چې په قوس CD باندې تیروي. د دې عبارت د وخت مشتق اخیستل، په دې پوهیدل چې l_{CD} او l_T ثابت پاتې کیږي، پداسې حال کې چې s_A او s_B د تار هغه برخې اندازه کوي چې په اوږدو کې بدلون راځي، مور لرو.

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \qquad \text{or} \qquad v_B = -v_A$$

منفي نښه ښیي چې کله بلاک A ښکته لورسرعت ولري، یعني د s_A په مثبت لور، دا د بلاک B سره اړوند د پورته سرعت لامل کیږي؛ یعنې B په منفي s_B لور حرکت کوي. په ورته ډول، د

سرعتونو د وخت مشتق اخیستل د تعجیلو تو ترمنځ اړیکه ورکوي، یعنی

$$a_B = -a_A$$



انځور 12-37

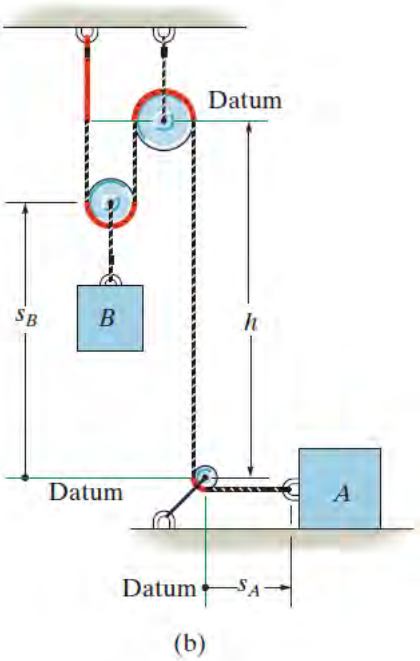
یو پیچلی مثال په انځورa12-37 کې ښودل شوی. په دې حالت کې، د بلاک A موقعیت په s_A سره مشخص شوی، او د تار د پای موقعیت چې بلاک B څرول شوی دی په s_B سره تعریف شوی. لکه پورته، مور د موقعیت کوارډینټونه غوره کړي دي چې (1) د ثابتو نقطو یا کرښو څخه پیل لري، (2) د هر بلاک د حرکت په لور اندازه کیږي، او (3) له ثابتو کرښو څخه s_A لپاره ښي لور ته مثبت او s_B لپاره ښکته لورمثبت دي. د حرکت په جریان کې، د انځورa12-37 کې د تار سور رنګه برخې اوږدوالی *ثابت پاتې کیږي*. که چیرې l د ټول تار اوږدوالی منفي دا برخې وي، نو د دوو موقعیت کوارډینټونه د لاندی معادلې په واسطه سره تړلی کیدی شی

$$2s_B + h + s_A = l$$

څرنګه چې l او h د حرکت په جریان کې ثابت دي، د دوو د وخت مشتقونه ورکوي

$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$

له دې امله، کله چې B لاندې حرکت کوي($+s_B$) ، A په چپ لور ($-s_A$)دوه چنده حرکت سره حرکت کوي



انځور 12-37 (ادامه)

دا مثال هم د دې له مخې حل کیدی شي چې د بلاک B موقعیت د لاندې څرخکی له مرکز څخه (یوه ثابت نقطه)، په انځور-12 37b کې تعریف کړو. په دې حالت کې

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

د وخت مشتق اخیستل

$$2v_B = v_A \qquad 2a_B = a_A$$

دلته علامې د دواړو یو شان دي ، ځکه چې کله A په ښي لو حرکت وکړي ($+s_A$)، نوپه پورته لور ($+s_B$) حرکت کړي.

د تحلیل کړنلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

د موقعیت - کوآرډینټ سیستم معادله (Position-Coordinate System)

- دهر موقعیت کوآرډینټ د مبداء سره چې له یوی ټاکلي ثابتی نقطې یا کرښی څخه وی وټړی.
- دا *اړینه نه* ده چې د هر یوه کوآرډینټ لپاره *مبداء یو شان* وي؛ خو دا *مهمه ده* چې هر کوآرډینټ د ذرې د حرکت *مسیر سره سم* وټاکل شي .
- د هندسي یا مثلثاتي کارولو سره، د موقعیت کوآرډینټونه د مزی د ټول اوږدوالی، T*/*، یا دهغه برخې */* سره اړیکه ولری. هغه اوږدوالی چې د ذرو په حرکت سره نه بدلیږي، لکه هغه برخې چې په څرخکیو باندې نغښتل شوې دي باید په */* کی شاملی نه شي.
- که دوه یا زیات مزي په څرخکیو باندې نغښتل شوي وي، نو د یوه مزي په یوه نقطه کې موقعیت باید د بل مزي په یوه نقطه کې موقعیت سره د پورته پروسیجر په کارولو سره تړاو ولری. د هر مزي لپاره جلا معادلې لیکل کیږي اود دوو ذرو موقعیتونه بیا د دې معادلو په وسیله اړیکه پیداکوی (د بیلګی په توګه مثال 12.22 او12.23 وګورئ).



کیبل د دې کرین په څو څرخکیو باندې نغښتل شوی دی ترڅو د بار پورته کولو لپاره اړین قوه کم کړي.

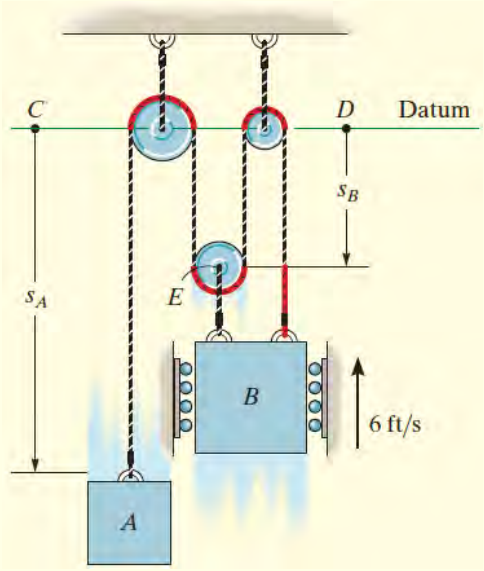
د وخت مشتقونه (Time derivatives)

- د موقعیت- کوآرډینټ معادلو دوه پرله پسې وخت مشتقونه به د سرعت او تعجیل معادلې ورکړي چې د ذرو دحرکت سره اړیکه لري.
- د دې معادلو د برخونښې به د هغو سره سمون ولري چې د موقعیت کوآرډینټونو مثبت او منفي جهتونه مشخصوي.

مثالونه

مثال 12.21

په انځور 12-38 کی ښودل شوی بلاک B پورته خوا ته په 6 ft/s حرکت کړي، د بلاک A تیزوالی معلوم کړی.



انځور 12-38

حل

د موقعیت - کوآرډینټ معادله (Position-Coordinate Equation).

په دې سیستم کې یو مزی شته چې برخې یې اوږدوالی بدلوي. د موقعیت کوآرډینټونه s_A او s_B به وکارول شي ځکه چې هر یو د یو ثابت نقطې (C) یا (D) څخه اندازه کیږي او د هر بلاک د حرکت د مسیر سره اوږدیږي. دلته، s_B د E نقطې په لور ټاکل شوی ده څرنګه چې د Bاو E حرکت یو شان دی.

.په انځور 12-38 کې د مزي څلور سره رنګ شوي برخې یو ثابت اوږدوالی ساتي او کله چې بلاکونه حرکت کوي، اړتیا نه لري چې په پام کې ونیول شي. د مزي پاتې اوږدوالی، l، هم ثابت دی او د s_A او s_B د کوآرډینټونو د بدلون په موقعیت سره د دې لاندی معادلې په وسیله تړاو لري.

$$s_A + 3s_B = l$$

د وخت مشتق (Time Derivative).

د وخت مشتق نیسو

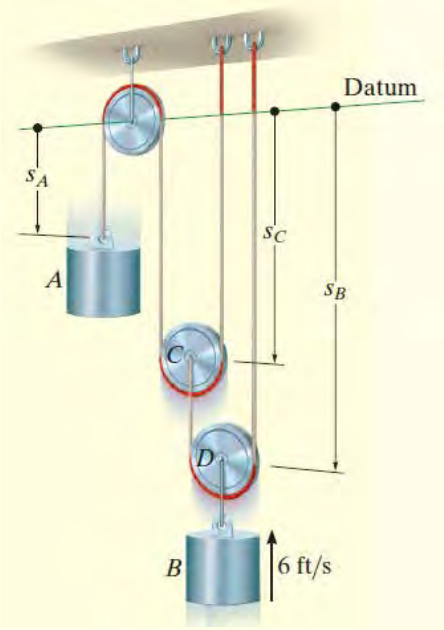
$$v_A + 3v_B = 0$$

نو بیا کله چې v_B = -6 ft/s (پورته خواته وی)

$$v_A = 18\ \text{ft/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.22

بلاکونه A او B په دی لاندی انځور کی ښودل شوی دی، د بلاک A تیزوالی مشخص کړي کله چی بلاک B په پورته لور په 6 ft/s تیزوالي حرکت وکړي.



انځور 12-39

حل

د موقعیت - کوآرډینټ معادله (Position-Coordinate Equation).

لکه څنګه چې ښودل شوي، د A او B موقعیتونه د s_A او s_B کوآرډینټونو په کارولو سره تعریف شوي دي. څرنګه چې سیستم دوه مزې لري چې برخې یې اوږدوالی بدلوي، نو اړینه به وي چې یو درېیم کوآرډینټ، s_C، وکارول شي ترڅو د s_A سره اړیکه ونیسي. په بله وینا، د یوه مزي اوږدوالی د s_A او s_C په اصطلاحاتو کې څرګندیدلی شي، او د بل مزي اوږدوالی د s_B او s_C په اصطلاحاتو کې څرګندیدلی شي.

په انځور 12-39 کې د مزیو سره رنګ شوي برخې اړتیا نه لري چې په تحلیل کې په پام کې ونیول شي. ولې؟ د پاتې مزي اوږدوالی لپاره، د مثال په ډول l_1 او l_2 ، مونږ لرو:

$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

د وخت مشتق (Time Derivative).

د وخت مشتق د پورته معادلو څخه دا لاندی په لاس راځي

$$v_A + 2v_C = 0 \qquad 2v_B - v_C = 0$$

کله چې v_C حذف کړود حرکت ټرون د هر سلنډر په مینځ کی پیدا کیږي.

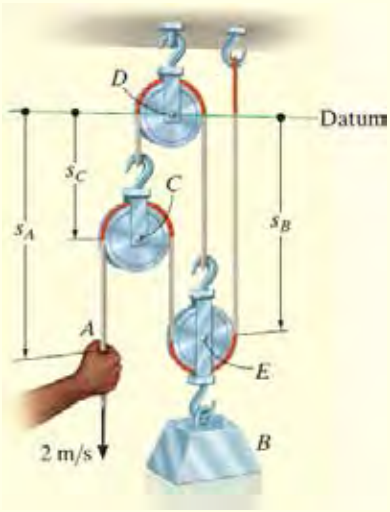
$$v_A + 4v_B = 0$$

نو کله چې v_B = -6 ft (پورته لورته)

$$v_A = +24 \text{ ft/s} = 24 \text{ ft/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.23

په انځور 12-40 کی د مزي پای د بلاک A په 2 m/s زیاتوالي سره ښکته کش کیږي. د B بلاک تیزوالی معلوم کړئ.



انځور 12-40

حل

د موقعیت - کوآرډینټ معادله (Position-Coordinate Equation).

موقعیت د A په واسطه د s_A تعریف شوی دی، اود بلاک B موقعیت د s_B په واسطه مشخص شوی دی ځکه چې نقطه E د څرخکي د بلاک سره *یو شان* حرکت لری. دواړه کوآرډینټونه له یو افقي کرښی څخه اندازه کیږي چې د څرخکي D له ثابت پین څخه تیریږي.

څرنګه چې سیسټم له دوو مزیو څخه جوړ شوی دی، کوآرډینټونه s_A او s_B مستقیمه اړیکه نه لري. پر ځای یې، د درېیم موقعیت کوآرډینټ s_C په ټاکلو سره، مونږ اوس کولی شو د یوه مزي اوږدوالی د s_B او s_C په اصطلاحاتو کې او د بل مزي اوږدوالی د s_A، s_B او s_C په اصطلاحاتو کې څرګند کړو.

هغه څلور سره رنګ شوي برخي د مزیو، لکه څنګه چې په انځور 12-40 کی ښودل شوي، نه شاملیږی، د مزیو پاتې ثابت اوږدوالی l_1 او l_2 (د چنګګ او لاس ابعادو سره) په لاندې ډول څرګندیدلی شي:

$$s_C + s_B = l_1$$

$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

د وخت مشتق (Time Derivative). د وخت مشتق دهری معادلی نه دا لاندی په لاس راځي

$$v_C + v_B = 0$$

$$v_A - 2v_C + 2v_B = 0$$

کله چې v_C حذف کړو مونږ لرو

$$v_A + 4v_B = 0$$

نو کله چې $v_A = 2$ m/s (پورته لورته وی)

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow \qquad \textit{Ans.}$$

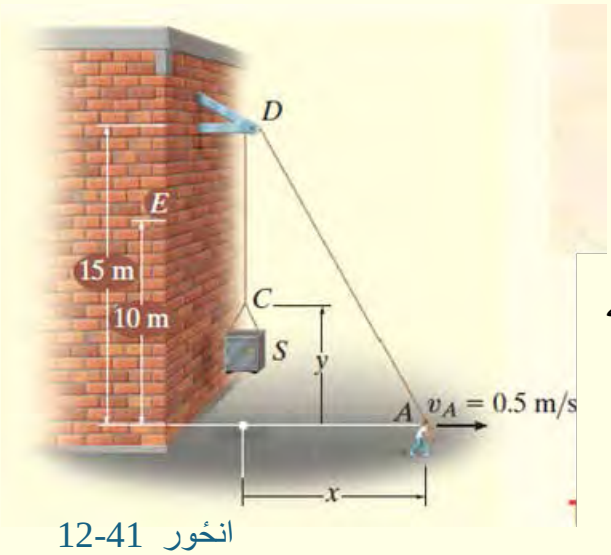
مثال 12.24

یو شخص په ټکی A کی د صندوق S پورته کولو لپاره په ثابت سرعت $v_A = 0.5$ m/s سره بني لور ته حرکت کوي . د صندوق سرعت او تعجیل کله چی لوړوالي 10 m ته ورسیږي وټاکی. رسی 30 m اوږدوالی لري او په کوچنی څرخکی په D کی تیریږي.

حل

د موقعیت - کوآرډینټ معادله (Position-Coordinate Equation).

دا پوښتنه د پخوانیو مثالو سره توپیر لري ځکه چې د رسی DA برخه دواړه ، سمتونه او اندازی بدلوي. په هر حال، د رسی پایلی، A او C ، په ترتیب سره د x او y محورونو په اوږدو کي حرکت کوي.



انځور 12-41

دا محورونه کیدای شي په دې ډول اړوند شي چې رسی یو ثابت اوږدوالی $l = 30$ m لري، چې په هر وخت کې اوږدوالی یې مساوی په په برخه DA جمع اوږدوالی د برخی CD دی. دفیتاګورین (Pythagorean) قضی له مخی، د l_{DA} معلومولو لپاره، موږ لرو:

$$l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}. \text{ Also, } l_{CD} = 15 - y, \text{ and so}$$

نو

$$l = l_{DA} + l_{CD}$$

$$30 = \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y)$$

$$y = \sqrt{225 + x^2} - 15 \qquad (1)$$

د وخت مشتق (Time Derivative).

د وخت مشتق په کلارولو د زنجیری قاعدی (ضمیمه C وګوري) ، چیری چې $v_S = dy/dt$ او $v_A = dx/dt$ موږ لرو:

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A \qquad (2)$$

په $y = 10$ m ، د x ارزښت له معادلی 1څخه x =20 m. نو له معادلی 2 بیا $v_A = 0.5$/s

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4\ \text{m/s} = 400\ \text{mm/s} \uparrow \qquad \textit{Ans.}$$

د معادلی 2 مشتق نیول نسبت وخت ته تعجیل په لاس راځي. ځرنګه چې v_A ثابت دی نو بیا

حل $a_A = dv_A/dt = 0$ نو بیا

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

په $x = 20$ m سرعت $v_A = 0.5$ m/s او تعجیل کیږي

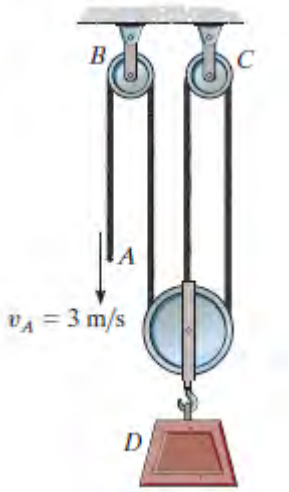
$$a_S = \frac{225(0.5\ \text{m/s})^2}{[225 + (20\ \text{m})^2]^{3/2}} = 0.00360\ \text{m/s}^2 = 3.60\ \text{mm/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: ثابت سرعت په A کی لامل د تعجیل په پای C د رسۍ کی کیږي، ځکه چې v_A سبب کیږی چې د DA برخی جهت او اوږدوالی ته تغیر ورکا.

بنسټیزې پوښتنې

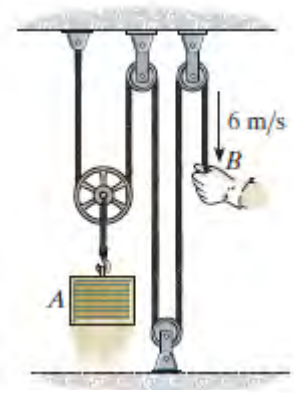
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 12-39. د بلاک D سرعت وټاکئ که د رسۍ پای A په 3 m/s سرعت سره ښکته کش شي.



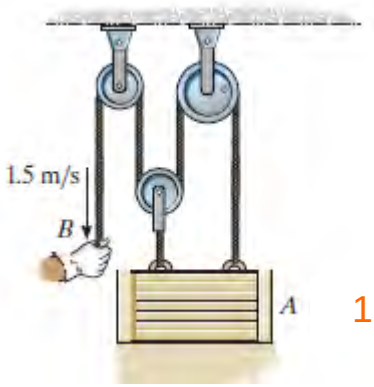
ب 12-39

ب 12-40. د بلاک A سرعت وټاکئ که د رسۍ پای B په 6 m/s سرعت سره ښکته کش شي.



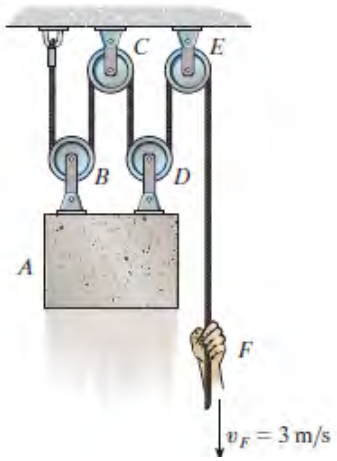
ب 12-40

ب 12-41. د بلاک A سرعت وټاکئ که د رسۍ پای B په 1.5 m/s سرعت سره ښکته کش شي.



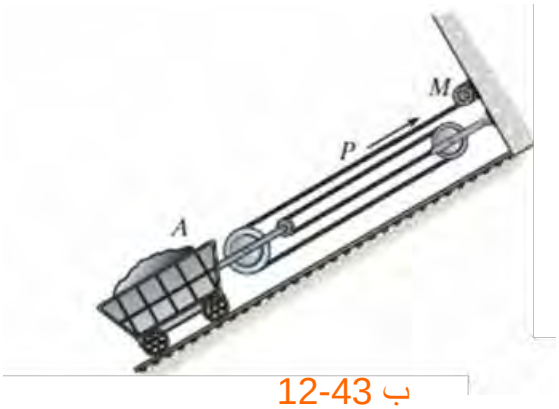
ب 12-41

ب 12-42. بلاک A سرعت وټاکئ که د رسۍ پای F په $v_f = 3$ m/s تیزوالي سره ښکته کش شي.



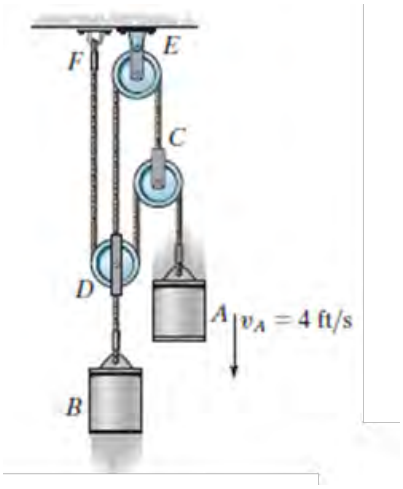
ب 12-42

ب 12-43. د موټر A سرعت وټاکئ. موټر M رسۍ داسې کش کوي چې $v_P = 4$ m/s دی.



ب 12-43

ب 12-44. د بې بلاک B سرعت وټاکئ که بلاک A په $v_A = 4$ ft/s تیزوالي سره بښکته حرکت وکړي.

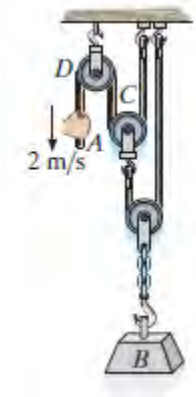


ب 12-44

پوښتنې

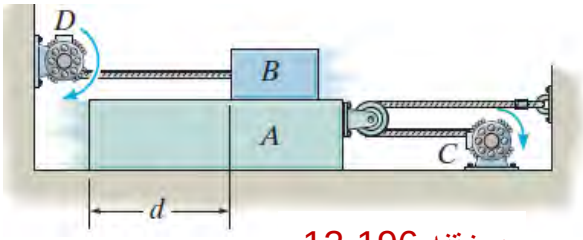
PROBLEMS

12-195. د کیبل A پای په 2 m/s تیزوالي سره په بښکته لور کش کیږي، د B بلاک تیزوالی په پورته لوروټاکئ.



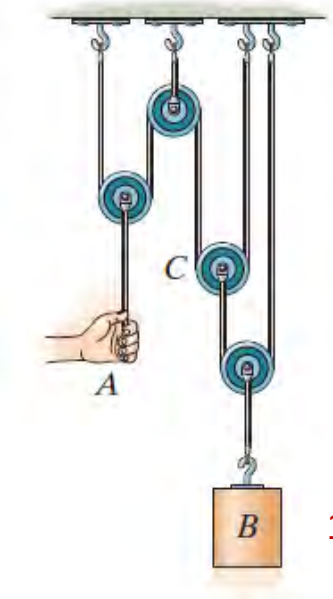
پوښتنه 12-195

*12-196. موټر په C کې په رسۍ کې $a_C = (3t^2)\ m/s^2$ تعجیل جوړوی، چیرې چې t په ثانیو اندازه کیږي. موټر په D کې په $a_D = 5\ m/s^2$ سره رسۍ کش کوي. که چرې دواړه موټرونه په یوه وخت کې له دریدلی حالت شروع وکړي کله چې $d = 3\ m$ وي ،و ټاکئ (a) هغه وخت چې $d = 0$ وښیی، او (b) د A بلاک سرعت نسبت B بلاک ته کله چې دا واقع کیږي.



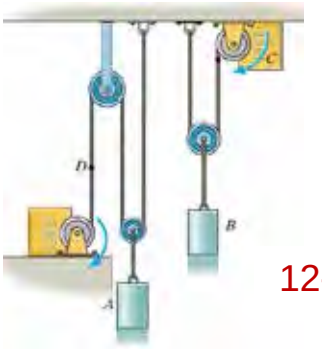
پوښتنه 12-196

12-197. د بلاک B بیځایه کیدنه و ټاکی کله چې A په کښته لور 4ft کش شي.



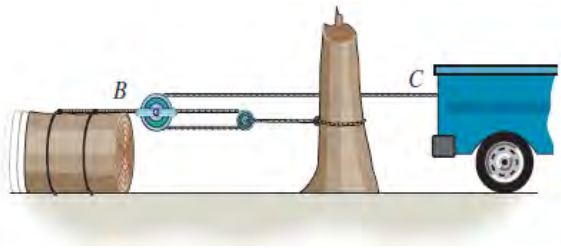
پوښتنه 12-197

12-198. په C کې موټر رسۍ په ثابت سرعت $v_C = 4\ m/s$ سره کش کوي. موټر په D کې رسۍ په ثابت تعجیل $a_D = 8\ m/s^2$ سره کش کوي. که $v_D = 0$ وي کله چې $t = 0$ ، وټاکئ (a) هغه وخت چې بلاک A, 3 m پورته کیږي، او (b) د بلاک A نسبي سرعت نسبت بلاک B ته کله چې دا واقع کیږي.



پوښتنه 12-198

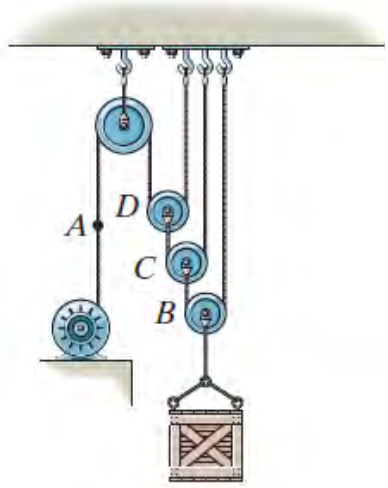
12-199 . د کوندی بیځایه کیدل وټاکئ که چیری کیبل په C کې د لارۍ پواسطه 4 ft ښیې لور ته کش شي.



پوښتنه 12-199

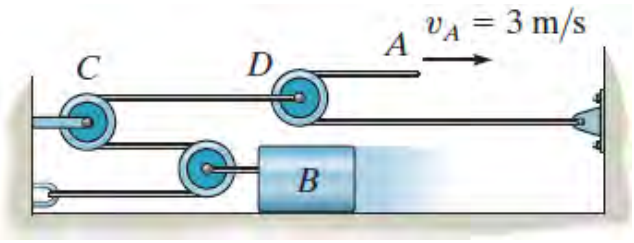
*12-200 . هغه ثابت تیزوالی وټاکئ ، په کوم چې رسۍ په A کې د موټر لخوا کش شي ترڅو چې بار 6 m په 1.5 s کې پورته کړي.

12-201 . کیبل د موټر په ډرم کې له دریدلی حالت څخه په $v_A = (3t^2)$ m/s تاویدلی شي چیرې چې t په ثانیو کې ده. هغه وخت وټاکئ چې بار 7 m پورته کړي.



پوښتنې 12-200/201

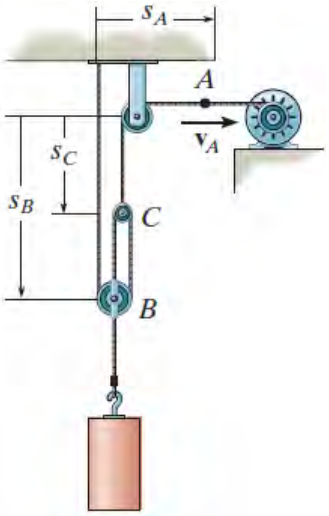
12-202 . که د کیبل پای A په $v_A = 3$ m/s حرکت وکړي، د B بلاک تیزوالی وټاکئ.



پوښتنه 12-202

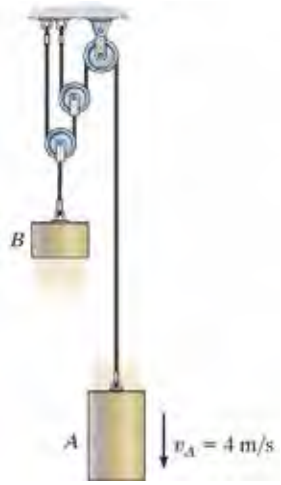
12-203 . موټر له آرام حالت څخه په $3\ m/s^2$ تعجیل سره پیل په کشکولو د کیبل کوي. هغه وخت وټاکئ چې د بار تیزوالی په B کی $10\ m/s$ ته رسیږي.

12-204* . کیبل په A کې د موټر په لور په $v_A = 8\ m/s$ تیزوالی سره کش کیږي. د بلاک سرعت وټاکئ.



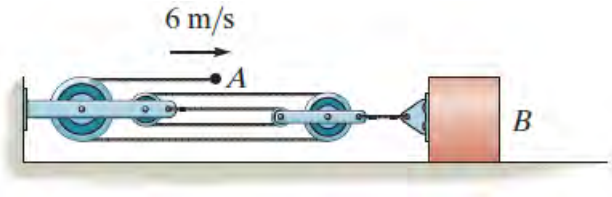
پوښتنې 12-203/204

12-205 . د بلاک B تیزوالی په هغه شیبه کی وټاکئ که چیرې A په ښکته لور په $4\ m/s$ تیزوالی حرکت وکړی.



پوښتنه 12-205

12-206 . د بلا ک B تیزوالی وټاکئ.



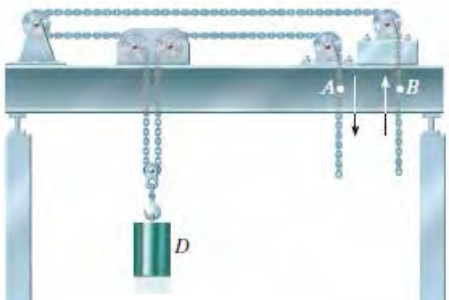
پوښتنه 12-206

12-207 . هغه ثابت تیزوالی وټاکی په کوم چې کیبل په A کې د موټر لخوا کش شي ترڅو چې بار په B کې 15 ft په 5 ثانیو کې پورته کړي.



پوښتنه 12-207

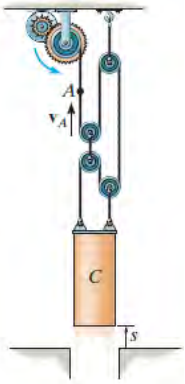
*12-208 . هویسټ (hoist) کارول کیږي چې بار په D کې پورته کړی. که د زنځیر A پای په 5 ft/s سرعت سره ښکته حرکت وکړي ، او پای B په 2 ft/s سرعت سره پورته حرکت وکړی، د بار سرعت په D کې وټاکئ.



پوښتنه 12-208

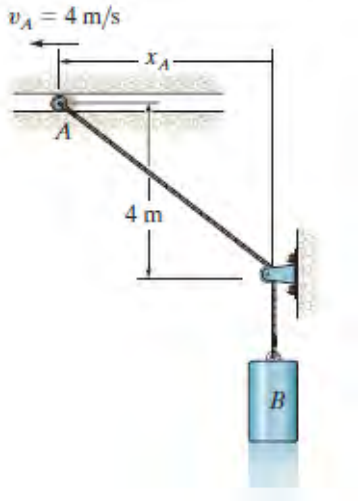
12-209 . سلنډر C د کیبل او څرخکی سیستم په کار اچولو سره پورته خیږول کیږي. که نقطه A د کیبل په 2 m/s تیزوالی سره د درم (drum) په لور کش شی، د سلنډر تیزوالی وټاکئ .

12-210 . سلنډر C د $a_C = 3\ m/s^2$ اعظمي تعجیل سره پورته کیدی شي پرته لدې چې کیبلونه وشکیږی. هغه سرعت وټاکئ په کوم کې چې نقطه A د درم په لور حرکت کړي کله چې $s = 4\ m$ وي او که سلنډر له آرام حالت څخه په لږ وخت کی پورته شی.



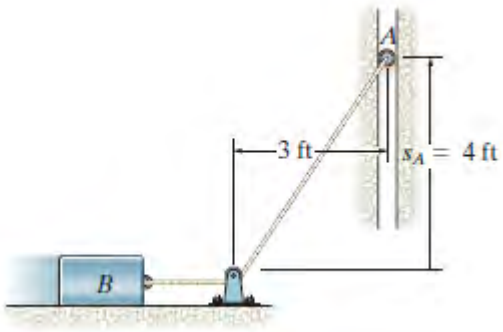
پوښتنې 12-209/210

12-211 . رولر په A کې په $v_A = 4$ m/s سرعت سره حرکت کوي او تعجیل یې $a_A = 2$ m/s² دی کله چې $x_A = 3$ m وي. د بلاک B سرعت او تعجیل په دې شیبه کې وټاکئ.



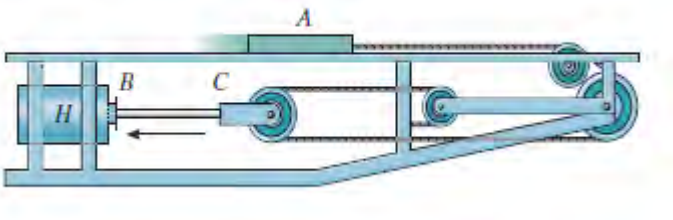
پوښتنه 12-211

12-212* . رولر په A کې په $v_A = 3$ ft/s سرعت سره پورته حرکت کوي او تعجیل یې $a_A = 4$ ft/s² وي کله چې $s_A = 4$ ft . د بلاک B سرعت او تعجیل په دې شیبه کې وټاکئ.



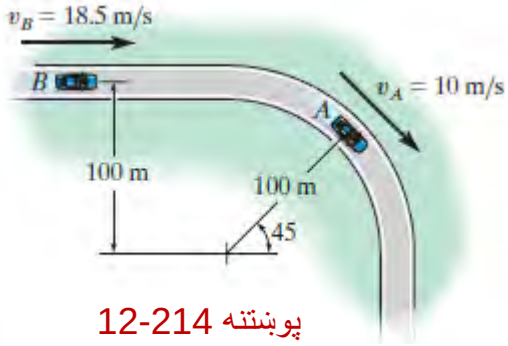
پوښتنه 12-212

12-213 . که هیدرولیک سلنډر H د BC راډ په 2 ft/s سرعت سره کش کړي، د سلایډر A سرعت وټاکئ.



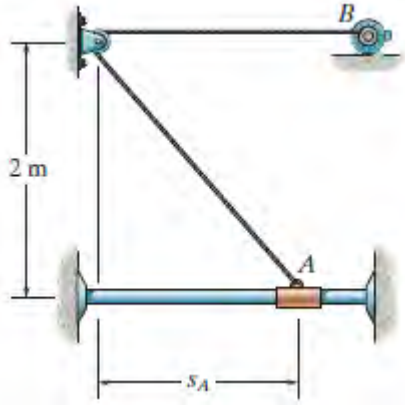
پوښتنه 12-213

12-214. په ښودل شوي شیبه کې، موټر په A کې د 10 m/s سره په منحني کرښه کې حرکت کوي، او پداسې حال کې خپل تیزوالی په $5\ m/s^2$ سره زیاتوي. موټر په B کې په 18.5 m/s سرعت سره په مستقیمه لاره حرکت کوي او خپل تیزوالی په $2\ m/s^2$ سره زیاتوي. د A نسبي سرعت او نسبي تعجیل نسبت B ته په دې شیبه کې وټاکئ.



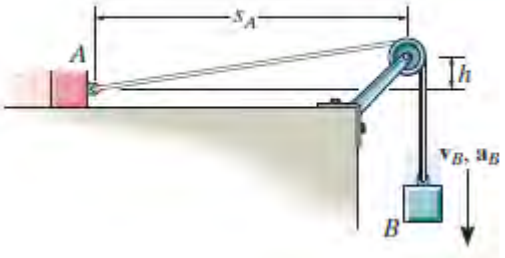
پوښتنه 12-214

12-215. موټر رسۍ په B کې په $a_B = 2\ m/s^2$ تعجیل سره کش کوي. کله چې $s_A = 1.5$ m، او $v_B = 6$ m/s وي، د پټې A سرعت او تعجیل په دې شیبه کې وټاکئ.



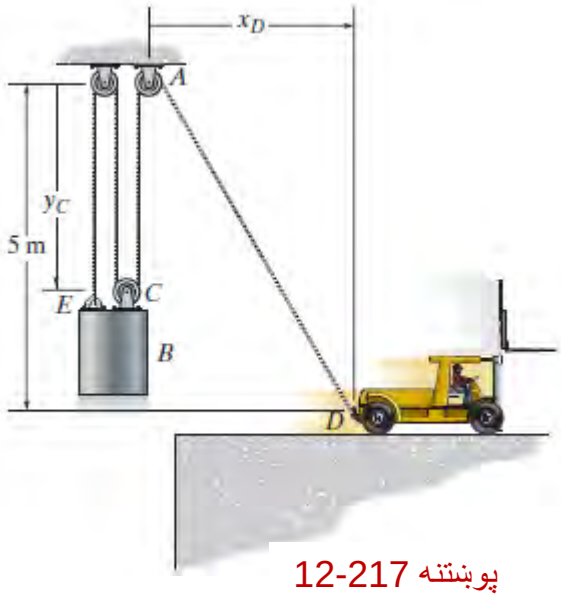
پوښتنه 12-215

*12-216. که بلاک B په v_B سرعت سره ښکته حرکت کړي او a_B تعجیل ولري، د A بلاک سرعت او تعجیل د ښودل شوي پارامیټرونو په اساس وټاکئ.



پوښتنه 12-216

12-217 . بلاک B د رسۍ څخه ځوړند دی ، په E کې هم دا رسۍ د بلاک سره ټرل شوی. رسۍ له دريو څرخګيو شاوخوا تاو شوی، او بيا د يوه ټرک سره ټرل شوی ده. که ټرک کله چې x_D صفر دی له آرام حالت څخه په ثابت تعجيل $0.5\ m/s^2$ سره مخې ته حرکت پيل کړي، د بلاک تيزوالی په هغه شيبه کې چې $x_D = 2\ m$ دی وټاکئ . په حساب کې د څرخکيو اندازه په حساب کی مه نيسئ. کله چې $x_D = 0$ ، $y_C = 5\ m$، ترڅو چې Cاو D نقطې په يوه ارتفاع کې وي.



پوښتنه 12-217

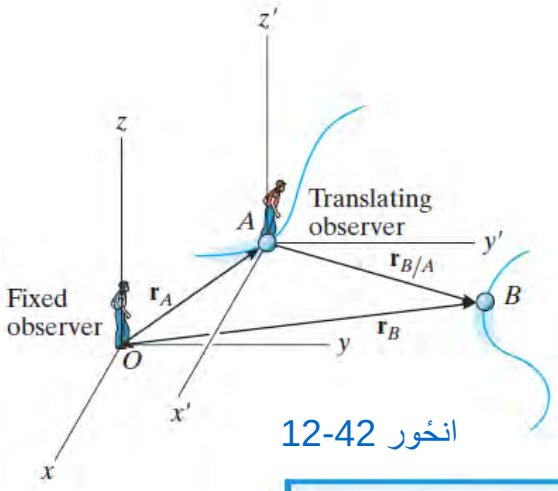
12.10 د دوو ذرو نسبي حرکت د متحرکومحورونو له لارې

(RELATIVE MOTION OF TWO PARTICLES USING TRANSLATING AXES)

په ټول دی فصل کې، د يوې ذرې مطلق حرکت د يوی ثابتی مرجع څخه ټاکل شوی دی. په هرصورت، ډيری قضيې شتون لري چيرې چې د يوې ذرې د حرکت لاره پيچلې وي، نو دا ممکن ده چې حرکت په برخو کې د دوو يا زياتو محورې مراجعو په کارولو سره تحليل شي. د بيلګې په توګه، د يوې ذرې حرکت چې د الوتکې د پروپيلر (propeller) په څوکه کې ځای پر ځای شوی، په داسې حال کې چې الوتکه په الوتنه کی وی، په اسانۍ سره توضيح کيدی شي که يو څوک لومړی د ثابتې مرجع څخه د الوتکې حرکت وګوري او بيا د الوتکې سره له ټرلې مرجع څخه د ذرې دايروي حرکت د ويکتوری (vectorially) تحليل له مخې معلوم کړي. په دې برخه کې به د مراجعو د بدلولو په تحليل بحث وشي.

موقعيت (Position). ذرات A او B په پام کې ونيسئ، کوم چې په انځور 12-42 کې ښودل شوي، اوپه اختياري لاروحرکت کوي. د هری ذرې مطلق موقعيت، r_A او r_B ، د ثابتی مرجع

O څخه د x ، y، z محورونو له مخې اندازه کيږي. د حرکت کوونکي محورونو مرجع x′ ، y′، z′ مبداء د A ذري سره ټرلې ده او د A ذري سره حرکت کوي. د B موقعيت چې د A په نسبت اندازه کيږي د *نسبي موقعيت ويکتور* $\mathbf{r}_{B/A}$ په نامه يادېږي. په انځور 12-42 کې دري ويکتورونه د ويکتورنو د يوځايکولو له لارې سره ټرل شوي دي.



انځور 12-42

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad (12–33)$$

سرعت (Velocity). هغه معادله چې د ذراتو سرعتونه سره تړي، د دې معادلې د وخت مشتق اخيستلو له لارې ټاکل کيږي؛ يعنې،

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (12–34)$$

دلته $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ او $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ *مطلق سرعتونو* ته اشاره کوي، ځکه چې دوی د ثابتې مرجعې څخه ليدل کيږي؛ په داسې حال کې چې *نسبي سرعت* $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ د حرکت کوونکي محورونو له چوکاټ څخه ليدل کيږي. دا مهمه ده چې يادونه وکړو، ځرنګه چې x′ ، y′، z′ محورونه حرکت کوي، د $\mathbf{r}_{B/A}$ *اجزاوې* به د جهت له مخې بدلون ونه کړي او له همدې امله د دې برخو مهاليزمشتق به يوازې د دوی په اندازه کې د بدلون حساب وکړي. معادله 12-34 له همدې امله بيانوي چې د B سرعت د A له سرعت سره مساوي دی جمع (ويکتورې) سرعت د " B په نسبت د A " ته، لکه څنګه چې د حرکت کوونکي مرجع چوکاټ x′ ، y′، z′ ليدونکي لخوا اندازه کيږي.

تعجيل (Acceleration). د سرعت معادلې مهاليزمشتق د ذراتو A او B د *مطلق* او *نسبي تعجيلونو* ترمنځ ورته اړيکه وړاندې کوي

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad (12–35)$$

دلته $\mathbf{a}_{B/A}$ د B تعجیل دی لکه څنګه چې حرکت کوونکي مرجع لیدونکي د A په موقعیت کې ځای پر ځای شوي د x' ، y'، z' په چوکاټ کې .*

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د تحلیل کړنلاره

- ذره(A) چې د x' ، y'، z' بدلیدونکیومحورونو لپاره مبداء ده، مشخص کړئ. معمولا دا نقطه یو معلوم سرعت یا تعجیل لري .
- څرنګه چې د ویکتور یو ځایکول یومثلث جوړه وي، نو په زیاتې توګه به ممکن دوه نامعلومه وي، چې د ویکتور مقدارونو او/ یا جهتونو استازیتوب وکړي .
- دا نامعلوم کیدي شي ، د مثلثاتو په کارولو سره په ګرافیکي ډول حل شي (د ساین قانون ، د کوسیان قانون)، یا، لکه څنګه چې مورِ به وښیو، د دریو ویکتورونو، هر یو په مستطیلي یا کارتیژن (Cartesian) جزونو سره اړه ول، چې په دې توګه د سکېلر معادلو یو مجموعه تولیدوي.



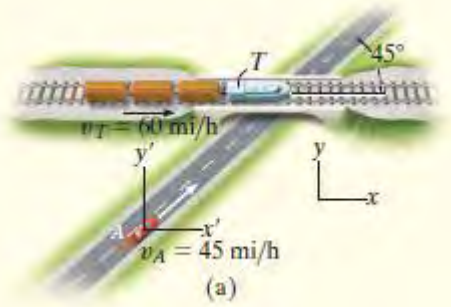
د دی نړدې الوتکوالوتنی پیلوټانو ته په کار دی چې تل دوی له نسبی موقعیت اوسرعت څخه په هره لحظه کی خبروی تر څو د تصادم مخه ونیسي.

* په آسانۍ سره د یادولو یوه لاره چې دا معادلې جوړې کړي دا ده چې د دوو اصطلاحاتو تر منځ یونامعلوم لکه A له منځه یوسی لکه $a_B = a_A + a_{B/A}$.

مثالونه

مثال 12.25

یو اورګاډی په ثابت تیزوالي د 60 mi/h سره سفر کوي او په یوه سرک باندی تیریږي لکه څنګه چې په انځور 12-43a کې ښودل شوی. که موټر A په 45 mi/h سرعت سره د سرک په اوږدو سفر وکړي، د اورګاډي سرعت اندازه او جهت نسبت موټر ته تعین کړئ .



انځور 12-43

حل I

ویکټوري تحلیل (Vector Analysis). نسبي سرعت $\mathbf{v}_{T/A}$ له بدلیدونکیو محورونو x′ ، y′ څخه چې د موټر سره ټینګول شوي دي، اندازه کیږي، لکه څنګه چې په انځور 12-43aکې ښودل شوی. دا د $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$ څخه تعین کیږي. څرنګه چې د $\mathbf{v}_T$ او $\mathbf{v}_A$ دواړو مقدارونه او جهتونه معلوم دي، نو نامعلوم به د $\mathbf{v}_{T/A}$ د x او y اجزا وي وی. په انځور12-43a کې د x او y محورونو په کارولو سره، مونږ لر

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

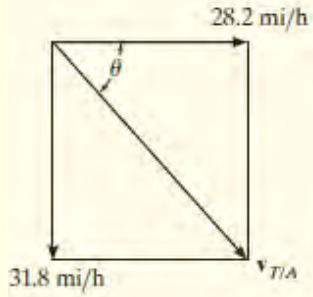
$$60\mathbf{i} = (45\cos 45°\mathbf{i} + 45\sin 45°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\}\ \text{mi/h}$$

د $\mathbf{v}_{T/A}$ مقدار کیږي

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5\ \text{mi/h} \qquad \textit{Ans.}$$

د هر جز له جهت نه، انځور 12-43b ، جهت د $\mathbf{v}_{T/A}$ عبارت دی په



(b)

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5° \measuredangle \qquad \textit{Ans.}$$

حل II

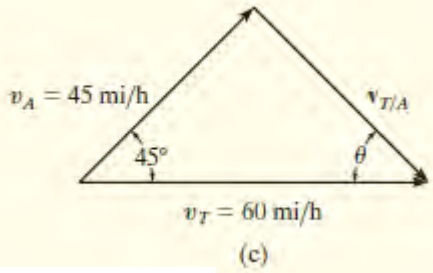
مقداری تحلیل (Scalar Analysis). نا معلومی اجزاوی د $\mathbf{v}_{T/A}$ هم د مقداري تحلیل په مرسته معلومېدای شي.

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60\ \text{mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45\ \text{mi/h} \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

مور به فرض کړو چې دغه اجزاویو د x او y په مثبت جهت عمل کړی. له دې امله که هر ویکتور په x او y اجزاوو ویشو، دا لاندې په لاس راځي

$$(\pm\rightarrow) \quad 60 = 45\cos 45° + (v_{T/A})_x + 0$$
$$(+\uparrow) \quad 0 = 45\sin 45° + 0 + (v_{T/A})_y$$



انځور 12-43

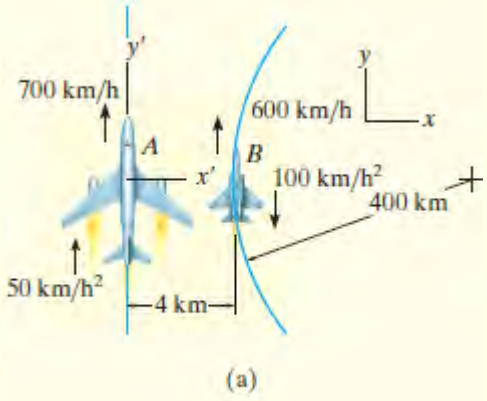
له حل کولو وروسته مور پخوانی پایلې تر لاسه کوو

حل

$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow$$
$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow$$

مثال 12.26

په انځور 12-44a کې، الوتکه A په مستقیمه کرښه کې الوتنه کوي، په داسې حال کې چې الوتکه B په یوه دائروي لاره چې د انحنا شعاع یې $r_B = 400$ کیلومتره ده الوتنه کړي. د الوتکې B سرعت او تعجیل کوم چې دالوتکې A پیلوټ لخوا اندازه کیږي و ټاکي.



انځور 12-44

حل I

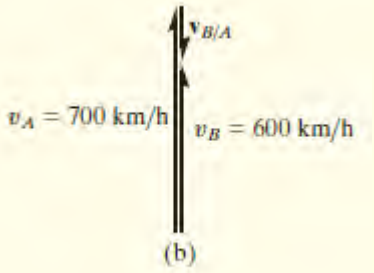
سرعت (Velocity).

له دې امله چې د A الوتکې په نسبت حرکت ټاکل کيږي، ليږديدونکی *ريفرينس فريم* x', y' ورپورې تړل شوی، لکه څنګه چې په انځور 12-44a کی ښودل شوي دی. د *نسبي سرعت معادله* په مقداري (scalar) بڼه کې پلي کوو، څرنګه چې د دواړو الوتکو د سرعت ويکتورونه په ښودل شوي شيبه کې موازي دي، مور لرو

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$
$$600\,\text{km/h} = 700\,\text{km/h} + v_{B/A}$$
$$v_{B/A} = -100\,\text{km/h} = 100\,\text{km/h}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

د ويکتورونو يو ځای کيدل په انځور 12-44b کی ښودل شوي.

تعجيل (Acceleration). څرنګه چې الوتکه B په منحني لاره الوتنه کوی نو دواړی، مماسي او نارمل اجزاوې لري. له معادلې 12-30 څخه، د نارمل جز اندازه عبارت ده په



$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600\,\text{km/h})^2}{400\,\text{km}} = 900\,\text{km/h}^2$$

کله چې د نسبي-تعجيل معادله پلي کړو مور لرو

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

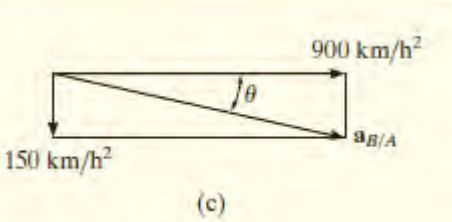
نو بيا

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\}\,\text{km/h}^2$$

له انځور 12-44c مقدار او جهت د $\mathbf{a}_{B/A}$ عبارت دی په

$$a_{B/A} = 912\,\text{km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46^\circ \nwarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: د دې پوښتنې حل ممکن و ځکه چې د حرکت لیږدیدونکیوریفرینس چوکاټ وکارول شو، ځکه چې د *A* الوتکې پیلوټ "لیږدونکی" دی. د الوتکې *A* حرکت د *B* الوتکې د پیلوټ ته ، بیا هم، باید د ځرخیدونکی محورونو په کارولو سره ترلاسه شي چې د *B* الوتکې سره تړل شوی دی . (دا البته، فرض کوي چې د *B* پیلوټ په ځرخیدونکي چوکاټ کې ثابت دی، نو هغه خپلې سترګې نه اړوي چې د *A* حرکت تعقیب کړی). د دې قضیې تحلیل ډیر ستونزمن دی او په مثال 16.21 کې ورکړل شوی دی.

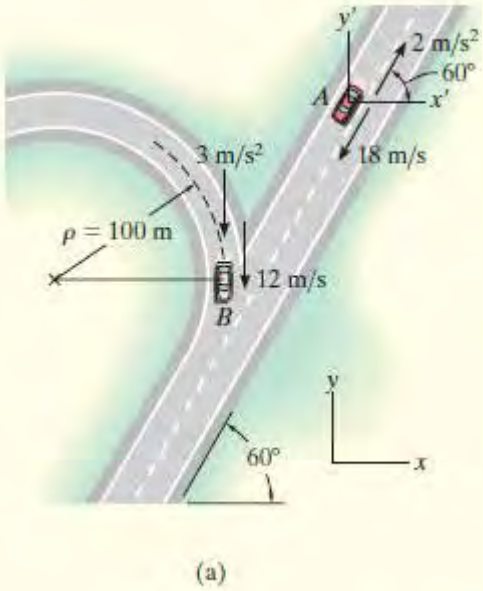


انځور 12-44

مثال 12.27

په هغه شېبه کې چې په انځور 12-45a کې ښودل شوي، موټرونه *A* او *B* په ترتیب سره په 18 متره په ثانیه او 12 متره په ثانیه تیزوالي سره روان دي. همدارنګه په دې شېبه کې، *A* په تیزوالي کې $2\ m/s^2$ کموالی راځی او د *B* په تیزوالي کې $3\ m/s^2$ متره په ثانیه مربع زیاتوالی لري. د *B* سرعت او تعجیل د *A* په نسبت معلوم کړئ.

حل



انځور 12-45

سرعت (Velocity): ثابت *x*, *y* محورونه په ځمکه کې په یوه اختیاري ټکي کې ټاکل شوي دي، او بدلیدونکی محورونه *x′*, *y′* د موټر *A* سره نښلول شوي دي، لکه څنګه چې په انځور 12-45aکې ښودل شوي. ولې؟ نسبي سرعت د $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ له لارې معلومیږي. دوه نامعلومه څه دي؟ د کارتیزین ویکتور تحلیل کارولو سره، مورِ لرو

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$-12\mathbf{j} = (-18\cos 60°\mathbf{i} - 18\sin 60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

له دې امله

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

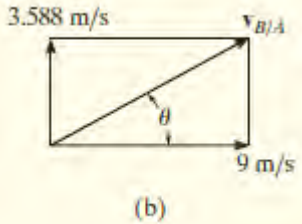
لیدل کیږی چی $\mathbf{v}_{B/A}$ د **i+** او **j+** اجزاوی لری، انځور , 12-45b وګوری، او جهت يې عبارت دی په

$$\tan\theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9}$$

$$\theta = 21.7^\circ \measuredangle \qquad \textit{Ans.}$$

تعجیل (Acceleration): د B موټر دوارې مماسی او نارمل اجزاوي د تعجیل لري. ولې؟ مقدار د نارمل جز دی

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{100\ \text{m}} = 1.440\ \text{m/s}^2$$



(b)

د نسبی تعجیل معادله پلی کوواو هغه راکوي

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$(-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2\cos 60^\circ\mathbf{i} + 2\sin 60^\circ\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

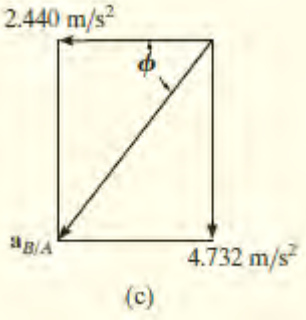
دلته $\mathbf{a}_{B/A}$ د **i-** او **j-** اجزاوی لري. له دی امله له انځور 12-45c څخه موږ لرو

$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tan\phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$

$$\phi = 62.7^\circ \measuredangle \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: آیا دا ممکنه ده چې د $\mathbf{a}_{A/B}$ نسبي تعجیل په دې طریقه سره ترلاسه شي؟ د مثال 12-26 په پای کې تبصرې ته مراجعه وکړئ.



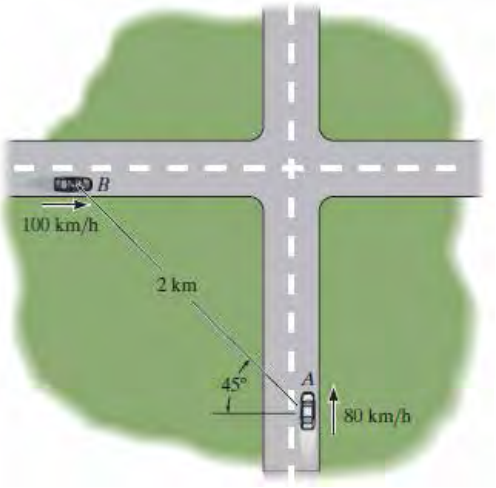
(c)

انځور 12-45

بنسټیزې پوښتنې

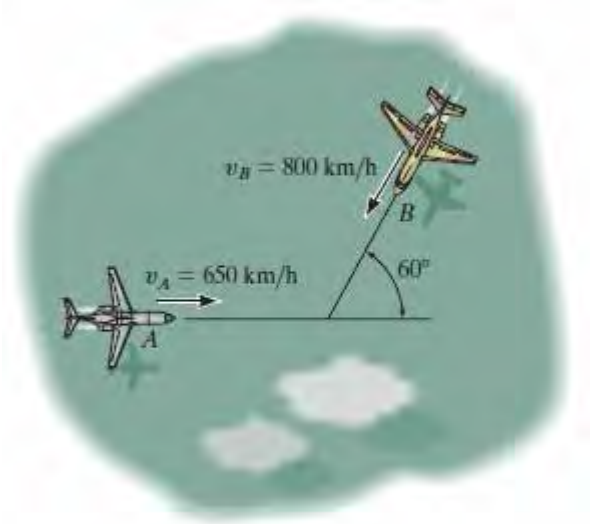
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 12-45. موټر A په شمال لور په 80 km/h په ثابت تیزوالي سره روان دی، پداسې حال کې چې موټر B په ختیځ لور په 100 km/h په ثابت تیزوالي سره روان دی. د موټر B سرعت د موټر A په نسبت معلوم کړئ.



ب 12-45

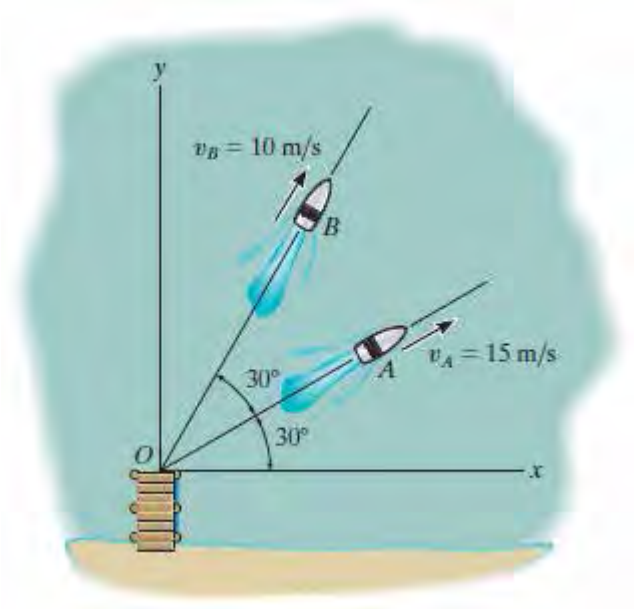
ب 12-46. دوه الوتکې A او B په بنودل شوي ثابت سرعتونو سره روانې دي. د الوتکې B سرعت او جهت، نسبت الوتکې A ته معلوم کړئ.



ب 12-46

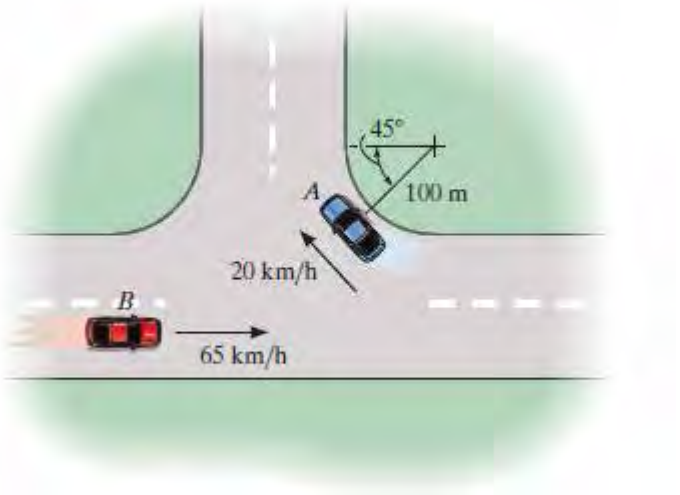
ب

12-47. کښتۍ A او B په ثابت تیزوالي 15 m/s او 10 m/s سره روانې دي، چې دوی په یوه وخت کې د O پیرځخه حرکت کړی. کله چې $t = 4$ s وي، د دوی ترمنځ فاصله معلومه کړي.



ب 12-47

12-48. دوه موټره A او B په ښودل شویو تیزوالي سره روان دي. که B په 1200 km/h² سره تعجیل وکړي، په داسې حال کې چې A ثابت تیزوالي ساتي، د A سرعت او تعجیل د Bپه نسبت معلوم کړي.

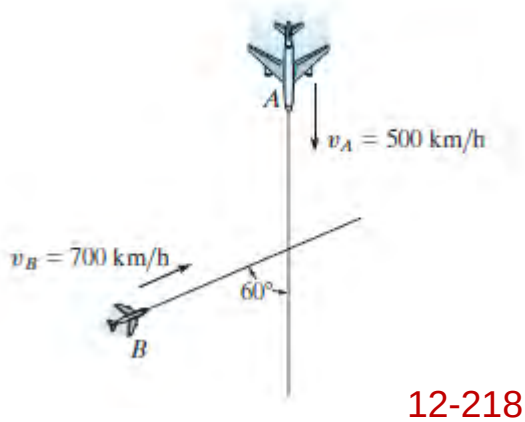


ب 12-48

PROBLEMS

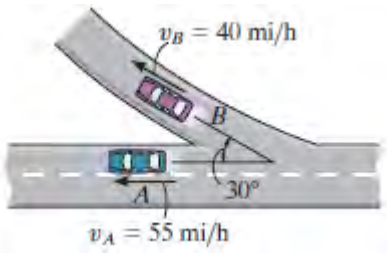
پوښتنې

12-218. دوی الوتکې A او B په یوه ارتفاع کې الوتنه کوي. که د دوی سرعتونه $v_A = 500$ km/h او $v_B = 700$ km/h وي او د دوی مستقیمو لارو ترمنځ زاویه $\theta = 60°$ وي، نو د B سرعت د A په نسبت معلوم کړئ.



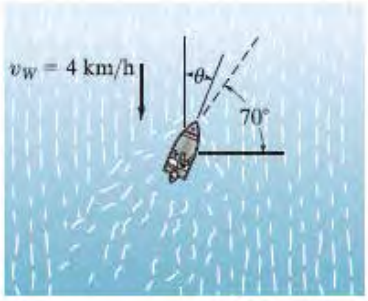
پوښتنه 12-218

12-219 . په بنودل شوي حالت کې، موټرونه A او B په ترتیب سره په 55 mi/h او 40 mi/h تیزوالی سره روان دي. که B په 1200 mi/h² سره خپل تیزوالی زیاتوی، پداسې حال کې چې A ثابت تیزوالی ساتي، د B سرعت او تعجیل د A په نسبت معلوم کړئ. موټر B په یوه منحني لاره کې حرکت کوي چې د هغې د منحنی شعاع 0.5 mi ده.



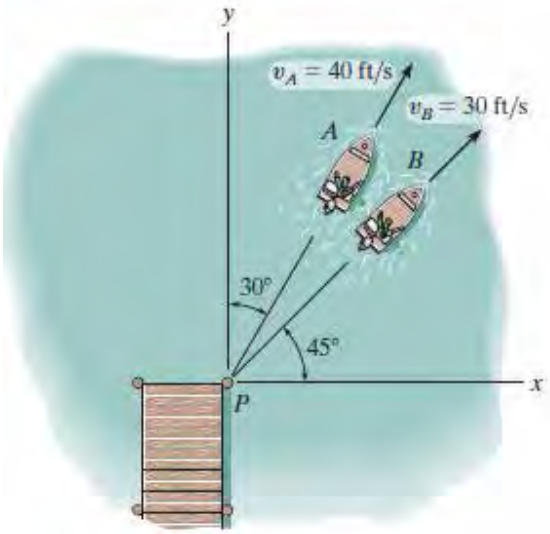
پوښتنه 12-219

***12-220.** کښتۍ کولی شي په ولاړو اوبو کې په 16 km/h تیزوالی سره حرکت وکړي. د تګ هدف د غوڅ شوي خط په اوږدو کې موقعیت لري. که اوبه په 4 km/h سره حرکت ولري، د بیړینګ زاویه θ معلومه کړئ چې کښتۍ باید په هغه زاویه حرکت وکړي چې په خپل مسیر کې پاتې شي.



پوښتنه 12-220

12-221. دوه کښتۍ په یو وخت کې د P پیر څخه په بنودل شویو لارو خپل سفر شروع کوي. که $v_A = 40$ ft/s او $v_B = 30$ ft/s وي، د کښتۍ A د سرعت اندازه د کښتۍ B په نسبت معلوم کړئ. څومره وخت وروسته چې له پیر څخه حرکت وکړی د دوی ترمنځ به فاصله 1500 ft وي؟



پوښتنه 12-220

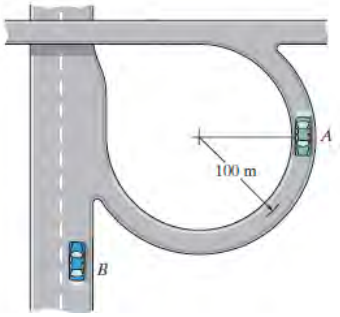
12-222. موټر A په 25 m/s تیزوالي سره په مستقیمه لاره حرکت کوی چې 1.5 m/s² تعجیل کوی. په همدی وخت کی ، موټر C په مستقیمه لاره په 30 m/s تیزوالی سره حرکت کوي چې 3 m/s² تجیل لری. د موټر A سرعت او تعجیل د موټر C په نسبت معلوم کړئ.

12-223. موټر B په منحني لاره په 15 m/s تیزوالی سره حرکت کوي او خپل تیزوالی په 2m/s² تجیل سره کموي. په دې هم وخت کې، موټر C په مستقیمه لاره په 30 m/s تیزوالي سره حرکت کوي او په 3 m/s² تجیل سره خپل تیزوالی کموي. د موټر B سرعت او تعجیل نسبت موټر C ته معلوم کړئ.



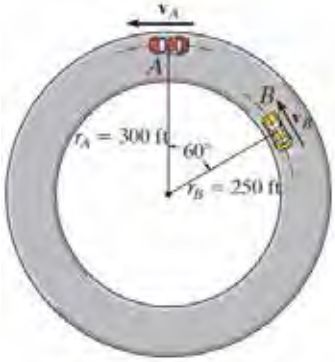
پوښتنې 12-222/223

*12-224. په بنودل شوي حالت کې، موټر A په 20 km/h تیزوالي سره حرکت کوي او کله چې موټر لویي لارې ته داخلیږي خپل تیزوالی په $300\ km/h^2$ اندازه زیاتوي. په همدې وخت کې، موټر B په 100 km/h سرعت سره پرمخ روان دی او په $250\ km/h^2$ تجیل سره په تیزوالی کی کموالی راولي . د موټر A سرعت او تعجیل د موټر B په نسبت معلوم کړئ.



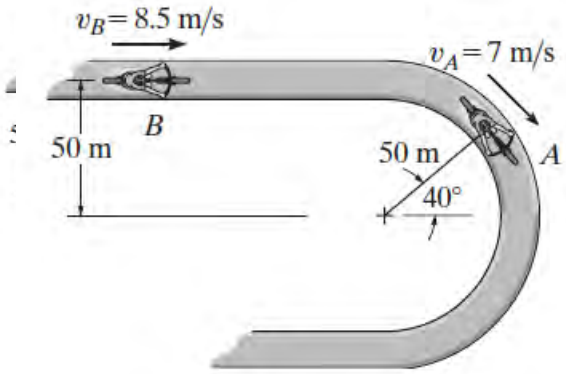
پوښتنه 12-224

12-225 دوه موټره A او B د مسابقی په دایروي مسیر کې سفر کوي. په بنودل شوي حالت کې، A په 90 ft/s تیزوالي سره روان دی او خپل سرعت په $15\ ft/s^2$ زیاتوي، په داسې حال کې چې B په 105 ft/s تیزوالي سره روان دی او خپل تیزوالي په $25\ ft/s^2$ کموي. د موټر A نسبی سرعت او نسبی تعجیل د موټر B په نسبت په دی وخت کی معلوم کړئ.



پوښتنه 12-225

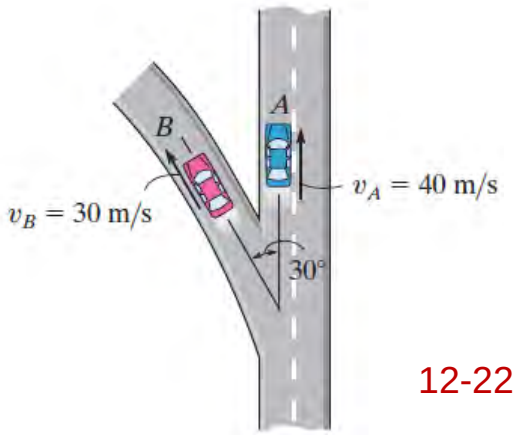
12-226 . په بنودل شوي حالت کې، بایسکل سوار A په 7 m/s سرعت سره د مسابقې سرک په منحني لاره کې روان دی او خپل تیزوالی په $0.5\ m/s^2$ سره زیاتوي. بایسکل سوار B په مستقیمه لاره کې په 8 m/s سرعت سره روان دی او خپل تیزوالی په $0.7\ m/s^2$ زیاتوي. د A نسبی سرعت او نسبی تعجیل د B په نسبت په دی وخت کی معلوم کړئ.



پوښتنه 12-226

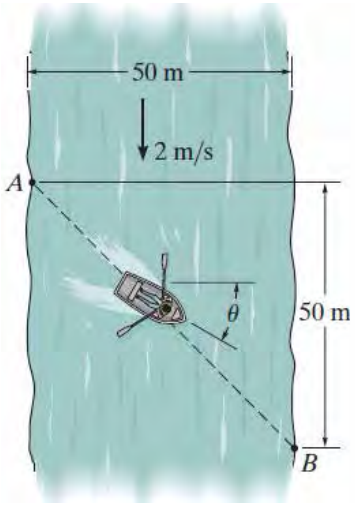
12-227. په بنودل شوي حالت کې، موټرونه A او B په ترتیب سره په 40 m/s اوs 30 m/ سرعت سره روان دي. B خپل سرعت په $2\ m/s^2$ سره زیاتوي، پداسې حال کې چې A خپل سرعت ثابت ساتي، د B سرعت او تعجیل د A په نسبت معلوم کړئ. د منحنی شعاع په B کی $r_B = 200m$ ده.

12-228*. په بنودل شوي حالت کې، موټرونه A او B په ترتیب سره په 40 m/s اوs 30 m/ سرعت سره روان دي. که A خپل سرعت په $4\ m/s^2$ سره زیات کړي، په داسې حال کې چې B سرعت په $3\ m/s^2$ کموي، د B سرعت او تعجیل د A په نسبت معلوم کړئ. د منحنی شعاع په B کی $r_B = 200m$ ده.



پوښتنې 12-227/228

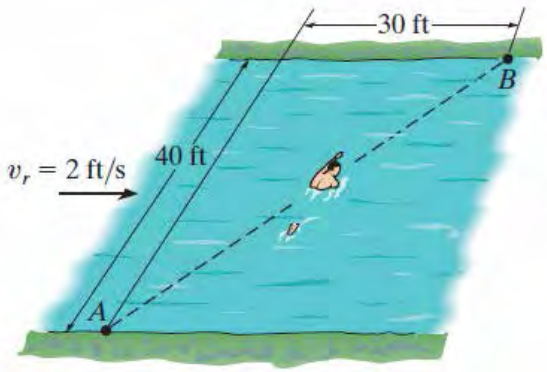
12-229. یو سړی کولی شي په دریدلیو اوبو کې په 5 m/s سرعت سره کښتۍ وچلوي. هغه غواړي چې دیو 50 m سورور سیند څخه تیر شی تر څو د B نقطی ته چې 50 m ښکته واقع ده ورسیږي. که سیند اوبه په 2 m/s سرعت سره حرکت کوي، د کښتۍ تیزوالی او د سیند نه د تیریدو وخت معلوم کړئ.



پوښتنه 12-229

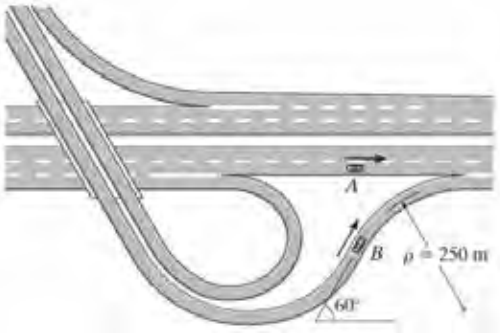
12-230 . یو سړی کولی شي په دریدلیو اوبو کی په 4 ft/s سرعت سره لامبو وکړي. هغه غواړي چې د یوه 40 ft سورورسیند نه تیر شی تر څو B نقطی ته چی 30 ft ښکته واقع ده ورسیږي. که سیند اوبه په 2 ft/s سرعت سره حرکت کوي، د سړي تیزوالی او د سیند نه د تیریدو

وخت معلوم کړئ. یادونه: پداسې حال کې چې په اوبو کې دی، هغه باید ځان B نقطې ته حرکت وه نه کړی تر څو چې دې نقطې ته ورسیږي. ولې؟



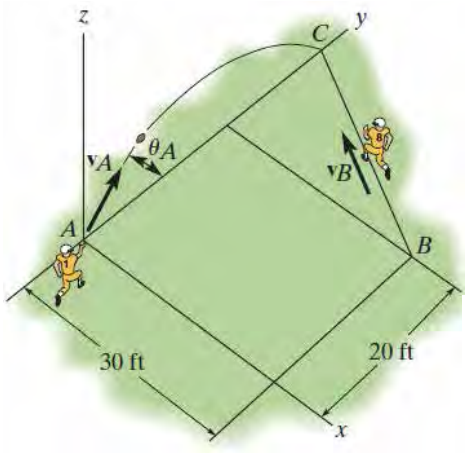
پوښتنه 12-230

12-231. په ه ښودل شوي حالت کې، موټر A په لویه لاره کې 30 m/s سرعت او 2 m/s² تعجیل لري. په همدې وخت کې، B د ټرمپیټ انټرچینج (trumpet interchange) منحنی باندې په 15 m/s تیزوالي سره روان دی او خپل سرعت په 0.8 m/s² تجیل سره کموي. د B نسبی سرعت او نسبی تعجیل د A په نسبت په دی وخت کې معلوم کړئ.



پوښتنه 12-231

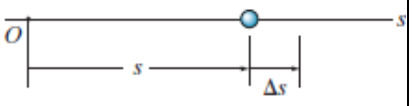
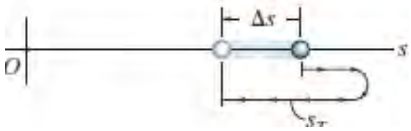
*12-232.د فوټبال لوبغاړی په A کې توپ په y–z سطحه کې په 50 ft/s تیزوالي او په 60 درجې افقی زاویه کې اچوي. په هغه حالت کې چې توپ اچول شوی، لوبغاړی په B کې دی او په ثابت تیزوالي سره د BC خط په اوږدو کې ځي تر څو توپ ونیسي. دی ده تیزوالی v_B معلوم کړئ، تر څو چې هغه توپ په هماغه ارتفاع چې توپ اچول شوی ونیسي.

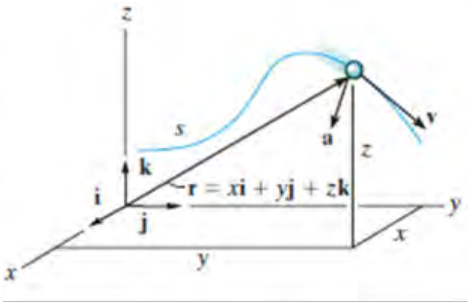
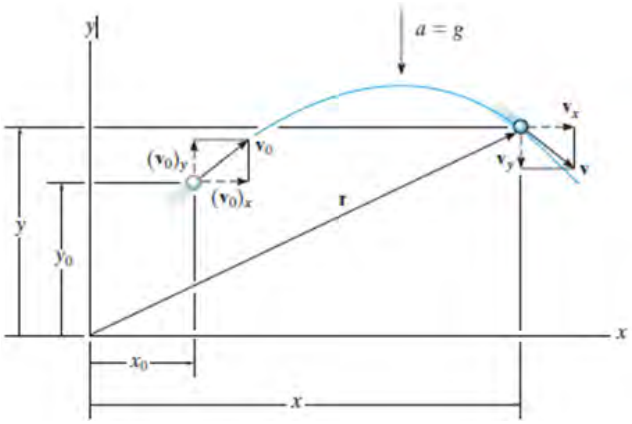


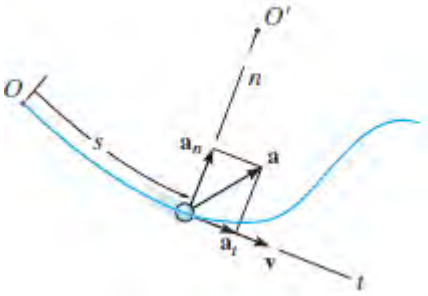
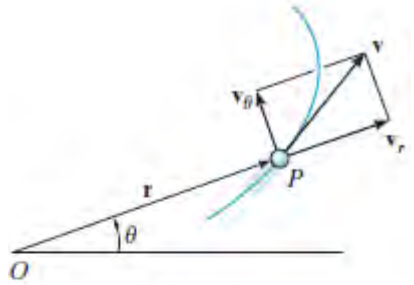
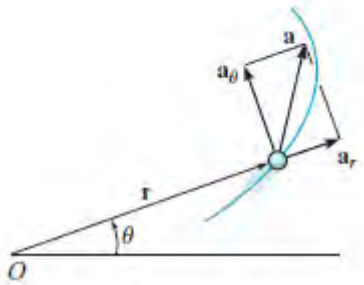
پوښتنه 12-232

د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW د فصل بيا کتنه

مستقيم کينماتيک Rectilinear Kinematics مستقيم حرکت په هغه حرکت ته وايي چې په مستقيمه کرښه وي. د موقعيت کوردينات s د کرښې په اوږدو کې د ذرې موقعيت ټاکي، او بيځايه کيدل Δs د ځای بدلون دی.		
د منځنۍ سرعت اندازه يو ويکتوري کميت دی، چې په بيځايه کيدنه تقسيم په تير شوی وخت ښودل کيږي.	$v'_{avg} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	
منځنۍ تيزوالی يوسکلر اندازه ده، او دا د سفر ټول فاصله تقسيم په وخت د سفر.	$(v_{sp})_{avg} = \frac{s_T}{\Delta t}$	
وخت، موقعيت، سرعت، او تعجيل د دريو تفاضلي معادلو له مخې ترلاو لري.	$a = \frac{dv}{ds}, \quad v = \frac{ds}{dt},$ $a\,ds = v\,dv$	
که چيرې تعجيل معلوم او ثابت وی، نو تفاضلي معادلې چې وخت، موقعيت، سرعت، او تعجيل سره اړيکه جوړوی، انتيګرت کيدی شي.	$v = v_0 + a_c t$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$	
ګرافيکي حلونه (Graphical Solutions) که حرکت بې نظمه وي، نو دا د يوه ګراف په واسطه ښودل کيدی شی. که	$a = \frac{dv}{dt},$ $v = \frac{ds}{dt},$ $a\,ds = v\,dv$	

منحنی حرکت، x، y، z (Curvilinear Motion, x,y,x) منحنی حرکت په لاره کې کیدای شي په مستقیم حرکت په x ، y، او z محورونو حل شي. د لارې معادله د هر محور په اوږدو کې د حرکت د اړیکې لپاره کارول کیږي.	$v_x = \dot{x} \quad a_x = \dot{v}_x$ $v_y = \dot{y} \quad a_y = \dot{v}_y$ $v_z = \dot{z} \quad a_z = \dot{v}_z$ 
د پروژیکټایل حرکت (Projectile Motion) د پروژیکټایل آزاد حرکت په هواکی یو پارابولیک مسیر تعقیبوي. دا په افقي لوري کې یوه ثابت سرعت لري، او په عمودي لوري کې د $g = 9.81$ m/s² یا 32.2 ft/s² د ثابت ښکته تعجیل سره حرکت کوي. د ثابت تعجیل دپاره له دریو معادلو څخه دوی معادلی په عمودي لوري کې پلي کیږي، او په افقي لوري کې یوازې یوه معادله پلي کیږي.	$(+\uparrow) \quad v_y = (v_0)_y + a_c t$ $(+\uparrow) \quad y = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_c t^2$ $(+\uparrow) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$ $(\pm\rightarrow) \quad x = x_0 + (v_0)_x t$ 

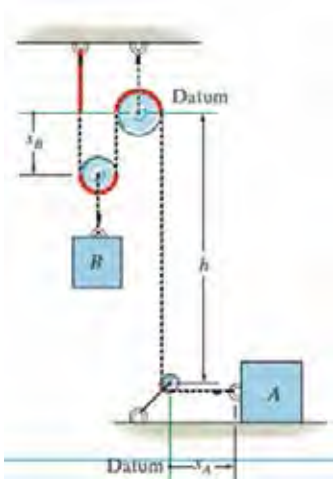
منحنی خطي حرکت n ، t (Curvilinear Motion n,t) که د تحليل لپاره د نارمل او مماسی محورونو څخه استفاده وشي، نو **v** به تل د مثبت ***t*** په لوري کي وي. تعجيل دوی اجزاوی لری. مماسی جز، $\mathbf{a}_t$ ، د سرعت د اندازې د بدلون لپاره ده؛ چی د منفي t په لوري کي کمیږی، او په مثبت t لوري کي زیاتیږی. نارمل جز د $\mathbf{a}_n$ د سرعت د لوري بدلون لپاره ده. دا جزتل د مثبت ***n*** په لوري کي وي.	$a_t = \dot{v} \quad \text{or} \quad a_t\,ds = v\,dv$ $a_n = \frac{v^2}{\rho}$	
منحنی خطي حرکت *r* ، *θ* (Curvilinear Motion *r, q*) که د حرکت مسیر په قطبي محورونو کي وښودل شی، نو د سرعت او تعجيل اجزاوی به د ***r***او ***θ*** د وخت له مشتقونو سره تړاو ولری. د اجزاوو د معلومولو لپاره، دا اړینه ده چې r ، $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dot{\theta}$ ، $\ddot{\theta}$ په هغه شببه کي وپېژندل شي. که مسیر $r = f(\theta)$ ورکړل شوی وي، نو د کلکولس ځنځیری قاعده باید د دې مشتقونو د ترلاسه کولو لپاره وکارول شي. (ضمیمه C وګورئ).	$v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r\dot{\theta}$ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$	 Velocity  Acceleration

د دوو ذراتو تړلي مطلق حرکت (Absolute Dependent Motion of Two Particles)

د هغو بلاکونو تړلي حرکت چې د څرخګيو او کيبلونو څخه ځړول شوي وي، د سيستم په هندسه پوري اړه لري. دا کار د موقعيت کوارډيناتوپه ټاکلو سره ترسره کيږي، چې له يوې ثابتې مبدا څخه اندازه کيږي او د هر بلاک د حرکت د کربنې په امتداد بنودل کيږي.

د هندسي او/يا مثلثاتو کارولو سره، کوارډيناتونه د کيبل د اوږدوالی سره تړل کيږي ترڅو د موقعيت کوارډيناتومعادله جوړه کړي.

د دې معادلې د وخت مشتقونه د بلاکونو د سرعتونواوتعجيل تر منځ اړيکې ورکوی.



$$2s_B + h + s_A = l$$

$$2v_B = -v_A$$

$$2a_B = -a_A$$

د نسبي حرکت تحليل د متحرکو محورونو په کارولو سره (Relative-Motion Analysis Using Translating Axes)

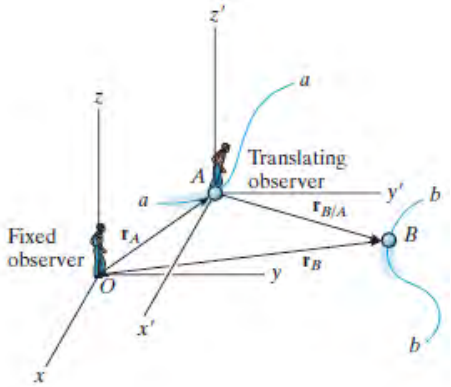
که دوی ذری A او B خپلواک حرکتونه ولری، نو دا حرکتونه د *متحرکو محورونو* په کارولو سره چې له يوی ذری (A) سره نښلول شوي وي، د دوی نسبي حرکت سره تړل کيدلی شي.

د سطحی حرکت لپاره، هره ويکتوري معادله دوی سکېلر اجزاوی معادلې توليدوي، چی يوه يی د x په لوري، او بله يی د y په لوري وی. د حل لپاره، ويکتورونه په کارتېزين بڼه کې څرګندید لی شي، يا د x او y سکېلر اجزاوی په مستقيم ډول ليکل کيدی شي.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



د بیا کتنې پوښتنې

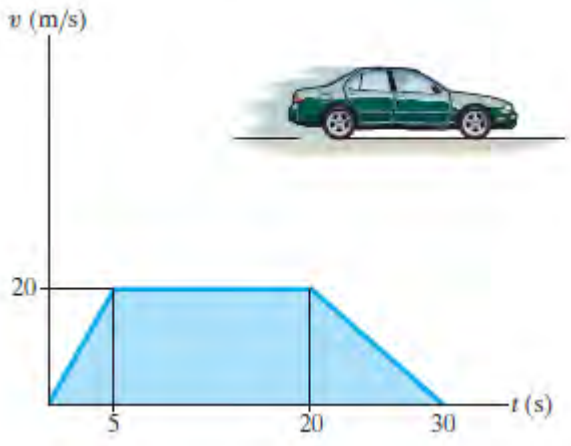
REVIEW PROBLEMS د بیا کتنې پوښتنې

ب 12-1. د یوی ذرې موقعیت د یوې مستقیمې کرښې په امتداد کی په لاندی معادله کی ورکړل شوی دی، چیرته چې t په ثانیو کې ده. د دې اعظمي $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ ft تعجیل او اعظمي سرعت په منځ د وخت $0 \le t \le 100$ s کې معلوم کړئ .

ب 12-2. که یو ذره لومړنی سرعت $v_0 = 12$ ft/s بنې لور ته ولړي، او ثابت تعجیل 2 ft/s² چپ لور ته وي، د ذرې بې ځایه والی په 10 ثانیو کې معلوم کړئ. اولی حالت $s_0 = 0$ دی.

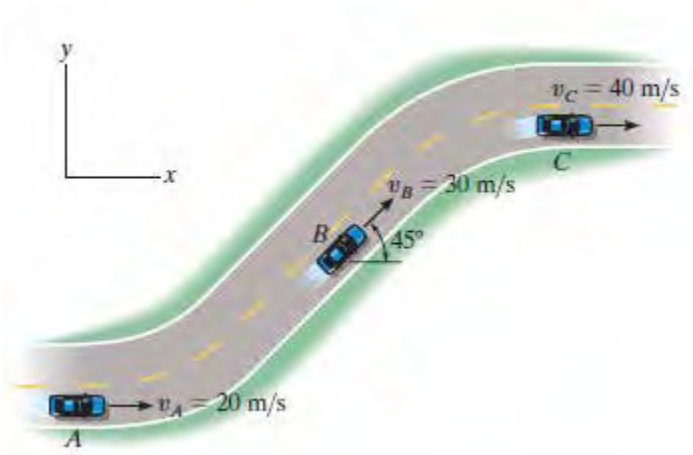
ب 12-3. یو پروژیکټایل، چې په پیل کې په مبداء کې دي، د یوې مستقیمې کرښې مسیر په اوږدو کې د یوی مایع د منځ له لارې داسې حرکت کوي چې سرعت یې $v = 1800(1 - e^{-03t})$ mm/s دی چیرته چې t په ثانیو کې ده. د پروژیکټایل بې ځایه والی د لومړیو 3 ثانیو په اوږدو کې معلوم کړئ.

ب 12-4. د یوه موټر د v–t ګراف په داسې حال کې چې په سړک باندې سفر کوي لاندی انځور کې ښودل شوی دی. تعجیل یې معلوم کړئ کله چې $t = 2.5$ ثانیې، 10 ثانیې، او 25 ثانیې وي. همدارنګه که $s = 0$ وي کله چې $t = 0$ وي، موقعیت یې معلوم کړئ کله چې $t = 5$ ثانیې، 20 ثانیې، او 30 ثانیې وي.



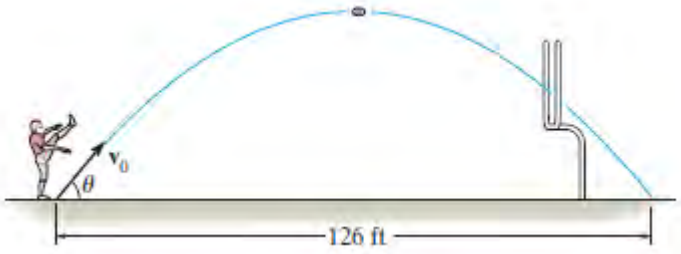
پوښتنه ب 12-4

ب 12-5. یو موټر چې په مستقیمو برخو د سړک کې سفر کوي، نو سرعتونه یې په لاندې انځورکې، کله چې دا د A ، B، او C نقطو ته رسیږي، ښودل شوي. که دا 3 ثانیې وخت ونیسي له A څخه B ته د تللو لپاره، او بیا 5 ثانیې له B څخه C ته نیسی ، نو د A او B نقطو ترمنځ او د A او C نقطو ترمنځ منځنۍ تعجیل معلوم کړئ.



پوښتنه ب 12-5

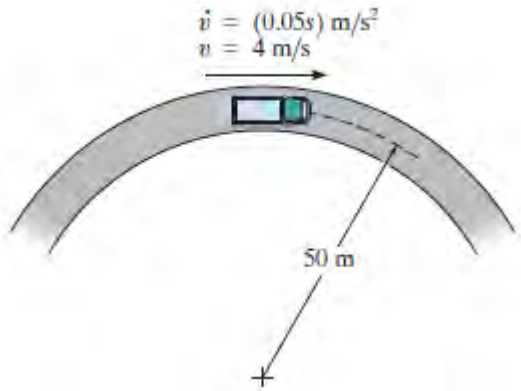
ب 12-6. له یوه ویډیو ټیپ څخه ولیدل شول چې یوه لوبغاړي یود فوټبال توپ په 3.6 ثانیو کې 126 ft لرې وواهه. د توپ لومړنی سرعت او زاویه θ معلوم کړئ په کومه کې چې دا توپ ووهل شو.



پوښتنه ب 12-6

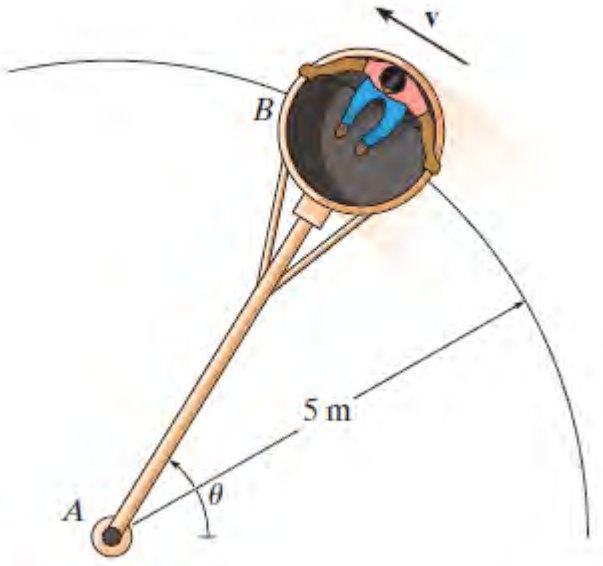
ب 12-7. یو ټرک په حلقوي مسیر کې سفر کوي چې شعاع یې 50m ده او موټر $v = 4$ m/s تیزوالی لري. په لنډه فاصله له $s = 0$ کې یې تیزوالی $\dot{v} = (0.05s)$ m/s² زیات شوی

، چیرته چې s په مترو کې دی. تیزوالی او اندازه د تعجیل یی معلوم کړئ کله چې $s = 10$ m ته لاړ شي.



پوښتنه ب 12-7

ب 12-8. موټر B داسې تاویدل کړي چې تیزوالی یی پدی ډول $(a_t)_B = (0.5e^t)$ m/s^2 زیات شوی، چیرته چې t په ثانیو کې ده. که موټر له ارام حالت څخه حرکت وکړی کله چې $q = 0°$ وي، اندازی د سرعت او تعجیل یی معلومی کړئ کله چې $t = 2$ s وي. د موټر اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه ب 12-8

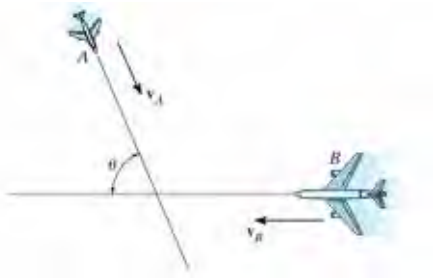
ب 12-9. یوه ذره د 2 مترو شعاع په حلقوي مسیر کې حرکت کوي داسې چې د دې موقعیت د وخت د تابع په توګه د $q = (5t^2)$ rad لخوا ورکړل شوی دی، چیرته چې t په ثانیو کې ده. د ذرې تعجیل مقدار معلوم کړئ کله چې $q = 30°$ وي. ذره له ارام حالت څخه پیل کوي کله چې $q = 0°$ وي.

ب 12-10. د بار لپاره په B کې هغه وخت معلوم کړي چې 8 m/s تیزوالی ترلاسه کړي، کله چې له ارام حالت څخه پیل کوي، که چیرې کیبل موټر ته په 0.2 m/s² تعجیل سره ننوزی.



پوښتنه ب 12-10

ب 12-11. دوه الوتکې، A او B ، په ورته لوړوالی کې الوتنه کوي. که چیرې د دوی سرعتونه $v_a = 600$ km/h او $v_b = 500$ km/h په ترتیب سره وي، داسې چې د دوی د مستقیموالوتنو کربنو ترمنځ زاویه $q = 75°$ وي، د الوتکې B سرعت د الوتکې A په پرتله معلوم کړئ.



پوښتنه ب 12-11

دیارلسم فصل

(CHAPTER 13)



د دې نانوایۍ لپاره د کنویرونو ډیزاین د ډوډۍ په ټوټو باندې د اغیزې کونکي قواوواو د دوی سرعت پوهیدلو ته اړتیا لري لکه څنګه چې حرکت کړي.

د يوې زرې کنټيکس
(قوه او تعجيل)

KINETICS OF A PARTICLE:)
(FORCE AND ACCELERATION

د فصل موخې

د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

- § د نيوټن د حرکت دوهم قانون بيان او د کتلې او وزن تعريف .
- § د يوې ذرې د تعجيل شوي حرکت تحليل او د مختلفو محورونو کارول.
- § د مرکزي قوه د حرکت تحليل او کارول يې هغو پوښتنو ته چې د فضايي ميخانيک سره تړاو لري.

13.1 د نیوټن د حرکت دوهم قانون (NEWTON'S SECOND LAW OF MOTION)

کینیټکس (Kinetics) د ډینامیک یوه څانګه ده او پر هغو اړیکو چې د یوه جسم د حرکت د بدلون په هکله اوهغو قواوو چې سبب ددی بدلون کیږی بحث کوي. د کینیټیکس بنسټ د نیوټن دوهم قانون دی، چې وایي کله چې یو غیر متوازن قوه په یوه ذره پلي شي، ذره د قوی په لور تعجیل کوي چې مقدار یي متناسب په قوه دي.



جیپ د خپل انرشیا له امله شاته ټیټیږي،اود وړاندې تګ تعجیل نه مخنیوی کوي

مونږ کولای شو د تناسب د ثابت عدد موندلو لپاره یوه معلومه قوه **F** په یوه ذره تطبیق کړو او بیا یې تعجیل **a** اندازه کړو. څرنګه چې قوه مستقیماً متناسب به تعجیل ده، نو د تناسب ثابت عدد m له $m = F/a$ نسبت څخه ټاکل کیږي. دا مثبت سکلر m د ذرې کتله یا مس بلل کیږي. لکه څنګه چې دا ثابته ده، m د ذرې د سرعت په بدلون کې یو اندازه مقاومت منځ ته راوړی، او دا د هغی ***انرشیا ده***.

د m کتلې لرونکي ذرې لپاره، د نیوټن د حرکت دوهم قانون په ریاضي بڼه کې داسي لیکل کیدی شي:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

دا معادله د حرکت د معادلی (equation of motion) په نوم یادیږي، او دا یو له خورا مهموفورمولونو په میخانیک* کی دی. په هرصورت، په 1905 کې، البرټ اینسټاین د نسبتیت تیوري (theory of relativity) رامنځته کړه او د نیوټن د دوهم قانون په کارولو کې محدودیتونه وړاندې کړل، په ځانګړې توګه کله چې د ذرې سرعت د رڼا سرعت (0.3 Gm/s) ته نږدې شي. اروِن شرودینګر(Erwin Schrodinger) او نورو لخوا د کوانټم میخانیک (quantum mechanics) تیوري پرمختګونه نور هم دا ښیي چې کله ذری د اټوم اندازی ته نږدې کیږي او یو بل ته نږدې حرکت کوي، د دې معادلې کارول ناسمې پایلې رامنځته کوي. په هرصورت، په عمومي توګه، د ذرې سرعت او اندازه په انجنیرۍ کارونو کی نه لیدل کیږي، نو په دې کتاب کې به د دوی اغیزې په پام کې ونه نیول شي.

د نیوټن د جاذبې قانون (Newton's Law of Gravitational Attraction): د

خپلو دریو د حرکت قوانینو له جوړولو وروسته، نیوټن د هرو دوو ذرو ترمنځ د متقابل جذبولو قانون وړاندې کړ. په ریاضي بڼه کې دا قانون داسي څرګندولی شو:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (13–1)$$

چېرته چې

F = د دوو ذرو ترمنځ د جذب قوه

G = د جاذبې نړیوال ثابت ارزښت؛ د تجربې له مخې $G=66.73\times10^{-12}\ m^3\ (kg\cdot s^2)$

m1,m2 = د دوو ذرو د هر یوه کتله

r = د دوو ذرو د مرکزونو ترمنځ فاصله

* ځکه چې m ثابته ده، مور کولی شو د حرکت معادله په بله بنه کې هم ولیکو $\mathbf{F}=d(m\mathbf{v})/dt$ ، چیرې چې $m\mathbf{v}$ د ذرې خطي مؤمنتم (linear momentum) دی. په بل عبارت، مور کولی شو ووایو چې په ذرې باندې اغیزه کوونکی غیر متوازن قوه د ذرې خطي مؤمنتم د وخت د بدلون سره متناسب دی.

په هغه حالت کې چې یوه ذره د ځمکې په سطحه یا نږدې موقعیت ولري، یوازینی د پام وړ جاذبې قووه هغه ده کوم چې د ځمکې او ذرې ترمنځ شتون لري. دې قوه ته تول یا "وزن" ویل کیږي او زمور لپاره، دا به یوازینی د جاذبې قوه وي چې په پام کې نیول کیږي.

د معادلې 13-1 په اساس، مور کولای شو د ذرې د وزن W پیداکولو د پاره کوم چې کتله یې عبارت ده په $m_1 = m$ یو عمومي څرګندونه رامنځته کړو. راځئ چې $m_2=M_e$ د ځمکې کتله او r د ځمکې د مرکز او ذرې ترمنځ فاصله وي. بیا، که مور $g = GM_e/r^2$ وټاکو، نو مور لرو:

$$W = mg$$

که دا پرتله کړو له د $F = ma$ سره ، مور ګورو چې g استازیتوب د تعجیل د جاذبې له امله کوي. د انجینري حسابونو لپاره، g د ځمکې سمندرپه سطحه او په 45 ° عرض البلد کې اندازه کیږي، او دا د "معیاري موقعیت" په توګه ګڼل کیږي. دلته $g=9.81\ m/s^2=32.2\ ft/s^2$ دی.

په SI سیستم کې د بدن کتله په کیلوګرامونو بنودل کیږي، نو وزن باید د پورته معادلې په کارولو سره محاسبه شي، لکه څنګه چې په انځور 13-1a کې بنودل شوی.

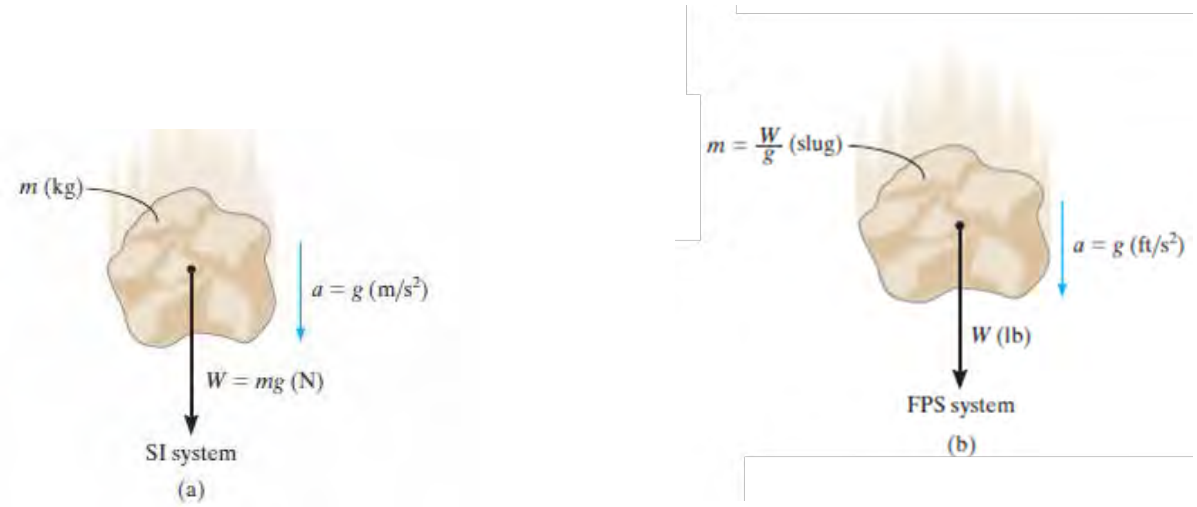
نو:

$$W = mg\ (\mathrm{N}) \quad (g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}) \qquad (13–2)$$

نو، یو 1 کیلوګرامه بدن 9.81 نیوټن وزن لري؛ یو 2-کیلوګرامه بدن 19.62 نیوټن وزن لري؛ او همداسې نور.
په FPS سیستم کې د بدن وزن په پونډو کې ښودل شوی، او کتله په سله ګونو (slugs) کې اندازه کیږي، یو اصطلاح چې د "سستۍ" څخه اخیستل شوې او د بدن انرشیا ته اشاره کوي. دا باید د انځور 13-1b په کارولو سره محاسبه شي.

$$m = \frac{W}{g}\ (\text{slug}) \quad (g = 32.2\ \text{ft/s}^2) \qquad (13\text{–}3)$$

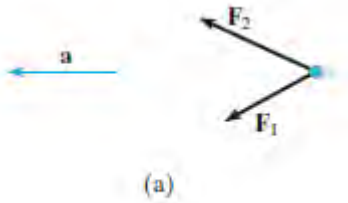
له همدې امله، یو 32.2-lb بدن وزن د یوه سلګ کتله لري. یو 64.4-lb د بدن وزن د 2 سلګه کتله لري ، او همداسې نور.



انځور 13-1

13.2 د حرکت معادله (THE EQUATION OF MOTION)

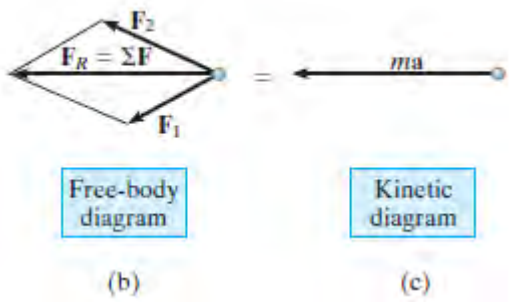
کله چې له یوې قووی څخه ډیرې په یوه ذره عمل وکړي، پایله لرونکی قوه د ټولو قواوو د ویکتور د مجموعې په واسطه ټاکل کیږي؛ یعنې، $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$.



(a)

د دې عمومي حالت لپاره، د حرکت معادله په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (13\text{–}4)$$



انځور 13-2

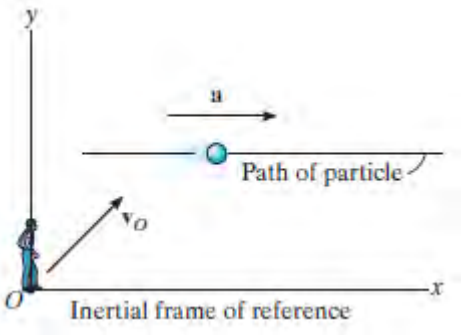
د بېلګې په توګه، یوه ذره چې په انځور 13-2a کې ښودل شوې په پام کې نیسو. دا ذره یو کتله m لري او دوی قوې $\mathbf{F}_1$او $\mathbf{F}_2$ وربانډی پلې شوې دي. موږ کولی شو د ذرې د ازاد بدن ډیاګرام په رسمولو سره په ګرافیک ډول د هر قوه اندازه او لوري یې چې په ذره عمل کوي حساب کړواو دا په انځور 13-2b کې ښودل شوي.

لکه څنګه چې د دې قوو نتیجه لرونکی قوی ویکتور $m\mathbf{a}$ جوړه وي ، د دې اندازه او لوری په ګرافیک ډول په کینیټیک ډیاګرام (kinetic diagram) کې ښودل کیدی شي، لکه څنګه چې په انځور 13-2c کې ښودل شوي. د ډیاګرامونو ترمنځ لیکل شوی مساوي نښه د ازاد بدن ډیاګرام او کینیټیک ډیاګرام ترمنځ ګرافیکی مساوات دي؛ یعنې $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$* .

*د حرکت معادله هم په لاندې بڼه کې بیا لیکل کیدی شي $\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$. ویکتور $-m\mathbf{a}$ ته د انرشیا قوی ویکتور ویل کیږي. که له دی سره "قوی ویکتور" په ځیر چلند شي، نو هغه حالت چې "توازن" رامنځته کوي د **ډ ینمیک توازن** (dynamic equilibrium) په نوم یادیږي. دا ډول طریقه، چې په دې کتاب کې نه کارول کیږي، ډیرې وخت د ډالیمبرټ (D'Alembert) اصول په نوم پیژندل کیږي، چې د فرانسوي ریاضي پوه، ژان لو روند ډالیمبرټ (Jean Rond D'Alembert) په نوم نومول شوی.

انرشيا يي ريفرينس فريم (Inertial Reference Frame)

کله چې د حرکت معادله پلي کوو، دا مهمه ده چې د ذرې تعجيل له يو داسې مرجع څخه اندازه شي چې *يا ثابت* وي او يا *په ثابت سرعت سره په* حرکت کې وي. په دې توګه، کتونکی به تعجيل نه کړي او د ذرې تعجيل اندازه کول به له هرې مرجع څخه يو شان وي. داسې مرجع عموما د ***نيوټونين*** (Newtonian) يا ***انرشيايي ريفيرينس مرجع*** (inertial reference frame) په نوم پيژندل کيږي، لکه څنګه چې په انځور 3-13 کې ښودل شوي.



انځور 3-13

کله چې د راکټونو او سپوږمکيو حرکتونه څيړو، دا موجه ده چې انرشيايي مرجع د ستورو سره ثابت وګڼو، پداسې حال کې چې ډينامیک پوښتنې د ځمکې په سطحه يا نږدې د ځمکې سطحې ته په کارولو د يو انرشيا يي چوکاټ چې د ځمکې سره تړل شوي وي، حل کيدی شي. حتی که ځمکه د خپل محور شاوخوا تاويږي او د لمر شاوخوا ګرځي، د دې تاويدو له امله رامنځته شوي تعجيلونه نسبتا کوچني دي او له همدې امله د ډيرو پوښتنولپاره له پامه غورځول کيدی شي.

مور ټول د هغې احساس سره اشنا يو چې څوک په يوه موټر کې ناست وي او د مخ په وړاندې تعجيل تجربه کړي. ډيرې وخت خلک فکر کوي چې دا د يو "قوه" له امله رامنځته کيږي چې په دوی باندې عمل کوي او دوی شاته په خپلو چوکيو کې ټيل وهي؛ خو دا داسې نه ده. بلکه، دا احساس د دوی د انرشيا يا مقاومت د دوی د کتلې د سرعت د بدلون له امله رامنځته کيږي.

د مثال په توګه، هغه مسافر په پام کې ونيسئ چې د يو راکټ په چوکۍ کې ناست دی. که فرض کړو چې راکټ په استراحت کې وي يا د ثابت سرعت سره حرکت کوي، نو د هغه په شا باندې هيڅ قوه عمل نه کوي لکه څنګه چې په هغه آزاد بدن ډياګرام کې ښودل شوي.



کله چې د راکټ انجن زور ونيسي چې سليډ تعجيل وکړي، نو هغه څوکۍ چې دی پرې ناست دی په هغه باندې يو قوه **F** واردوي چې هغه د سليډ سره مخې ته تېل وهي. په عکس کې وګورئ، د هغه د سر انرشيا (د حرکت مقاومت) د دې بدلون (تعجيل) سره مخالفت کوي، نو ځکه د هغه سر د څوکۍ په مقابل کې شاته حرکت کړي او د هغه مخ، چې نرمه بڼه لري، شا ته بڼه بدليږي.



کله چې تعجيل په کموالي وي، د + قوه (seatbelt) **F′** هڅه کوي چې د هغه بدن ودروي، خو د هغه سر د څوکۍ له شا څخه اړيکه پرې کوي ، يو ځل بيا د هغه انرشيا يا د حرکت د دوام له امله او مخ يې مخې لور ته بدليږي. هېڅ قوه هغه مخې ته نه کشوي، که څه هم هغه داسې احساس کوي.



13.3 د حرکت معادله د ذراتو یو سیستم لپاره (EQUATION OF MOTION FOR A SYSTEM OF PARTICLES)

اوس به د حرکت معادله د ذرود یوه سیستم لپاره پراخه شي کوم چې د فضاء په یوه سیمه کې ترل شوي وي، لکه څنګه چې په انځور 13-4a کې ښودل شوي. په یوه ټاکل شوي شیبه کې ذره i ، چې یو کتله m_i لري، یوه محصله دداخلي قوه $\mathbf{f}_i$ او یوه محصله خارجي قوه $\mathbf{F}_i$ ور باندی پلي شوي. *داخلي قوه* د ټولو هغو قوو نتیجه ده چې نوري ذري په i ذره باندې وارد وي. *محصله خارجي قوه* د بېلګې په توګه د جاذبې، بریښنایی، مقناطیسي، یا د تماس قوواغیزه ښیي چې د i ذری او نږدې ذرو چې په سیستم کې شاملی نه دي ترمنځ جوړیږي دي.

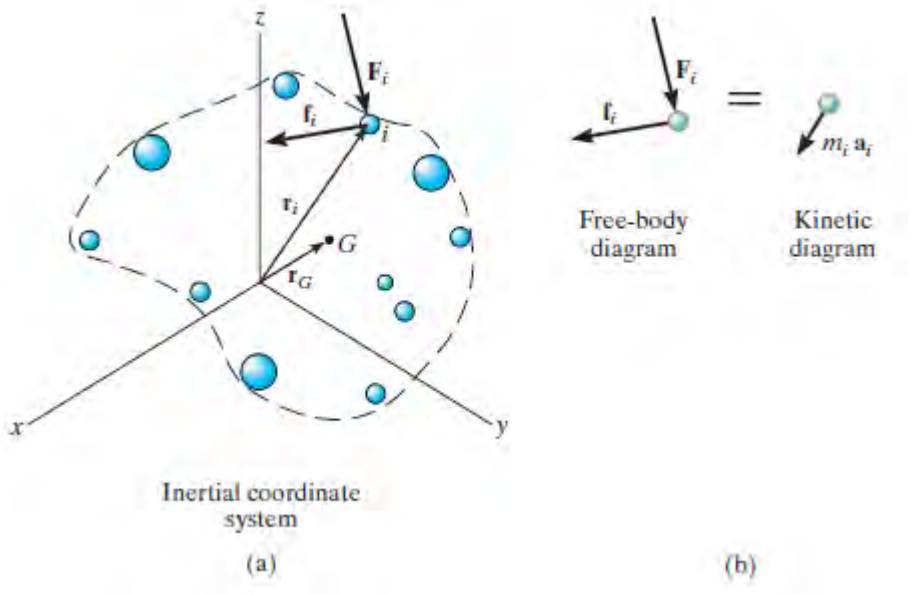
د ازاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه د i ذری لپاره په انځور 13-4bکې ښودل شوي دي. د حرکت معادلی د پلی کولو سره:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$$

ټول سیستم لپاره د حرکت معادله

کله چې د حرکت معادله د سیستم د نورو ذرو د سیستم لپاره تطبیق شي، ورته معادلې به پایله ورکړي، او که دا ټولې معادلې سره یو ځای کړو، نو مور ترلاسه کوو:

$$\sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_i = \sum m_i\,\mathbf{a}_i$$



انځور 13-4

که داخلي قواوی سره جمع شي، نو به صفر ته برابری شي، ځکه چې د هر دوو ذرو ترمنځ داخلي قواوی په مساوي خو مخالفو جهتونو د جوړی په شان رامنځته کیږي. له همدې امله:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \qquad (13–5)$$

که $\mathbf{r}_G$ هغه موقعیتی ویکتور وي کوم چې د ذراتو د کتلی مرکز G موقعیت ټاکي، لکه څنګه چې په انځور 13-4a کې ښودل شوي، نو د کتلی مرکز په تعریف کې، مونږ لرو:
$m\mathbf{r}_G = \sum m_i \mathbf{r}_i$:، چېرته چې $m=\sum m_i$ د ټولو ذراتو ټوله کتله ده. که دا معادله دوه ځله د وخت په لحاظ مشتق و نیول شي ، دا فرض کړو چې هیڅ کتله نه داخلیږي او نه وځي له سیستم څخه، مونږ ترلاسه کوو $m\mathbf{a}_G = \sum m_i \mathbf{a}_i$: . دا نتیجه په معادله 13-5 کې ځای په ځای کړوموږ لرو:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad (13–6)$$

که د ذرو چې پدی سیستم کی دی یو بدن په پام کې ونیسو، مونږ کولی شو ووایو چې په بدن باندې د خارجي قواوو مجموعه چې په بدن عمل کوی مساوی ده د بدن د کتلی او د هغې د کتلی مرکز Gد تعجیل سره.

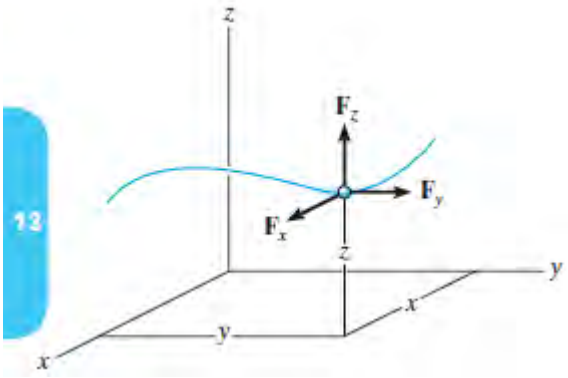
مهم ټکی.

- د حرکت معادله په تجربي شواهدو باندې ولاړه ده او یوازې هغه وخت معتبره ده چې په یو انرشیایي چوکاټ کې پلي شي.
- د حرکت معادله وایي چې په یوه ذره باندې نامتوازن قواوی لامل د ذری د تعجیل کیږي
- یو انرشیایي چوکاټ نه څرخي، بلکه د دې محورونه یا د ثابت سرعت سره حرکت کوي یا به ارام حالت کی وي.
- کتله د مادې یوه ځانګړتیا ده چې د سرعت بدلون په وړاندې یو مقداري اندازه مقاومت وړاندې کوي. دا یوه مطلقه اندازه ده او له یوې ځای نه بل ځای ته نه بدلیږي.
- تول یا وزن یو قوه ده چې لامل یې د ځمکې جاذبه ده. دا مطلق نه ده؛ بلکه دا د کتلې په لوړوالی چې د ځمکې له سطحې څخه یې لرې ټراو لرې.

13.4 د حرکت معادلې: مستطیلي محورونه (EQUATIONS OF (MOTION: RECTANULAR COORDINATES

کله چې یو ذره د انرشیایي x ، y، z په چوکاټ کې حرکت کوي، نو په دې ذره باندې عمل کوونکي قواوی او د دې تعجیل کولای شو د i ، j، k اجزاوو په توګه څرګند کړو، لکه څنګه چې په انځور 13-5 کې ښودل شوي دي. د حرکت معادله پلي کولو سره، موږ لرو:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$



انځور 13-5

د دې معادلې د پوره کولو لپاره، اړوند i ، j، k اجزاوې په چپ لوري بايد د ورته اجزاوو په ښي لوري سره برابرې وي. له همدې امله، مور لاندې دري د سکلر معادلې ليکلی شو:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$\Sigma F_z = ma_z \qquad (13\text{–}7)$$

که چيری ذره تنها په x,y سطحه کی حرکت کړي وی بيا تمها د ا اول دوی معادلی د حرکت ښودلو لپاره کارول کيږي.

د تحلیل کړنلاره

د تحلیل کړنلاره

د حرکت د معادلو تحلیل او پلي کولود پاره دا لاندې مرحلی ترسره کیږي:

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram)

- انرشیایي محوری سیستم و ټاکئ. که ذره مستقیم حرکت لري د ذری لپاره مستطیلی یا د x, y, z محورونه وټاکئ.
- د ذری د جسم آزاد ډایګرام رسم کړئ ترڅو ټولی هغه قواوی (**ΣF**) چې پر ذره باندې عمل کوي شاملی کړئ.
- د ذری د تعجیل **a** لوری او حس هم باید وټاکل شي. که د حس په اړه معلومات نه وي، د ریاضي د آسانتیا لپاره، د هغې اجزاوی فرض کړئ چې د مثبت کوردیناتو په جهتو عمل کوي.
- تعجیل په کینتیک (kinetic) ډایګرام کې د ***ma*** وکتور په توګه څرګندېدای شي.
- په پوښتنه کې ناپېژندل شوي توکي وپېژنئ.

د حرکت معادلې (Equations of Motion) .

- که قواوی په مستقیم ډول د جسم آزاد ډایګرام څخه حل کیدلی شي، نو د حرکت معادلې د هغوی د سکلر اجزاوو په بڼه وکاروئ.
- که د پوښتنی هندسه پیچلې ښکاري، چې ډیری وخت په دریو ابعادو کې پیښیږي، د حل لپاره د کارټېژن (Cartesian) ویکتور تحلیل کارول کیږی.
- *اصطحکاک (friction)*. که ذره په یوه ناهمواره سطح باندې ښویږي، نو د *اصطحکاک معادله* وکاروئ، کوم چې د اصطحکاک او عمودی قواوو د کینیټیک اصطحکاک د ضریب سره اړیکه لری، یعنې $F_f = \mu_k N$.
- *فنر* (*spring*). که ذره د یو *انعطاف منونکي فنر* (*elastic spring*) سره تړل شوې وي چې د پام وړ وزن نلري، د *فنر قوه* F_s د فنر د پراختیا یا غونجید و s سره د معادلې

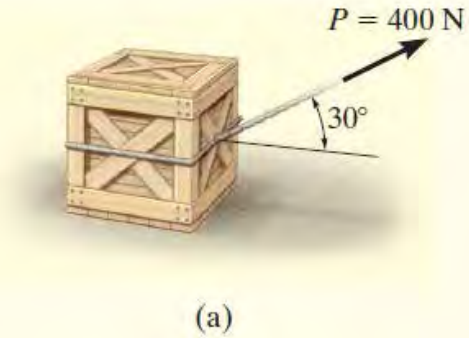
$F_s = ks$ په واسطه تړلی دی. دلته k د فنر د سخته والي اندازه ده چې د قوی پریوه واحد اوږدوالی اندازه کیږي.

کینماتیک (Kinematics)

- کله چې د ذرې تعجیل معلوم شي، د هغوسرعت یا موقعیت د کینماټیک معادلې په کارولو سره موندل کېدی شي.
- کله *تعجیل* د وخت تابع وي، نو انتیګرال د $a = dv/dt$ او $v = ds/dt$ سره جوړکړئ ترڅو $v = v(t)$ او $s = s(t)$ ترلاسه کړئ.
- کله *تعجیل* تابع د بې ځایه کېدو وي، نو انتیګرال د $a\,ds = v\,dv$ ونیسی ترڅو $v = f(s)$ ترلاسه کړئ.
- که *تعجیل ثابت* وي، $v = v_0 + a_c t$، $s = s_0 + v_0 t + 1/2\, a_c t^2$ ، $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ وکاروئ ترڅو v او s وټاکئ.
- که پوښتنه د څو ذرو چې حرکتونه یې سره تړلی وی مطرح وی، هغه طریقه چې په (12.9) برخه کې وړاندې شوې د هغود تعجیلونو اړیکو لپاره وکاروئ.

مثالونه

مثال 13.1

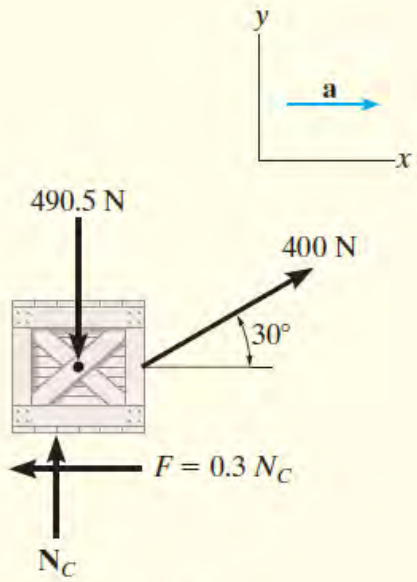


(a)

یو 50 کیلو ګرامه صندوق چې په انځور 13-6aکې ښودل شوی، په یوه افقي سطحه پروت دی چې د کینیټیک اصطحکاک ضریب یې $\mu_k = 0.3$ دی. که چیرې صندوق د 400 نیوټن د کشیدونکې قوه په واسطه حرکت کوي، د صندوق سرعت په 3 ثانیو کې له دریدلي حالت څخه پیدا کړئ.

حل

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):



(b)

انځور 13-6

د صندوق وزن $W = mg = 50\ kg \times 9.81\ m/s^2$ =490.5 N دی. لکه څنګه چې په انځور 13-6bکې ښودل شوي، د اصطحکاک قوه $F = \mu_k N_C$ دی او کینې لوري ته عمل کوي، ځکه چې دا د صندوق حرکت مخه نیسي. تعجیل **a** افقي او په مثبت x لور کې فرض شوی. دلته دوه ناپېژندل شوي توکي دي، یعنې N_C او **a** .

د حرکت معادلې (Equations of Motion):

له هغه ډیتا چې په د جسم آزاد ډایګرام کې ښودل شوي دا لاندې لیکلې شو

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 400\cos 30° - 0.3N_C = 50a \qquad (1)$$

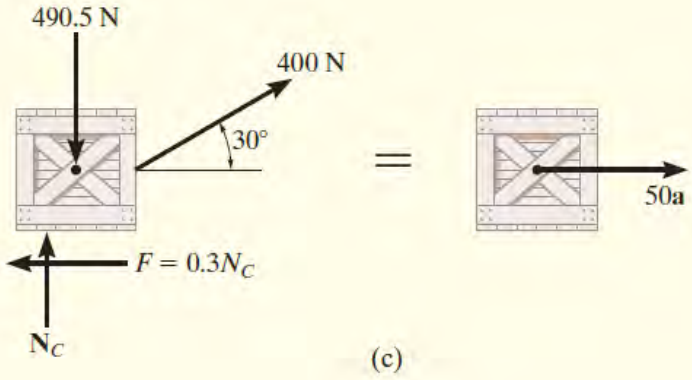
$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400\sin 30° = 0 \qquad (2)$$

معادله 2 د N_C لپاره حل کوو، پایلې په معادلعه 1 کې ځای په ځاي کوو او د **a** ارزښت په لاس راځي

$$N_C = 290.5\ N$$
$$a = 5.185\ m/s^2$$

کینماتیکس (Kinematics): تعجیل ثابت دي ځکه چې پلي شوي قوه P ثابته ده. له دی امله چې اولینی سرعت صفر دی ، د صندوق سرعت په 3 ثانیو کی عبارت دی په

$$(\pm\rightarrow) \qquad v = v_0 + a_c t$$
$$= 0 + 5.185(3)$$
$$= 15.6\ \text{m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

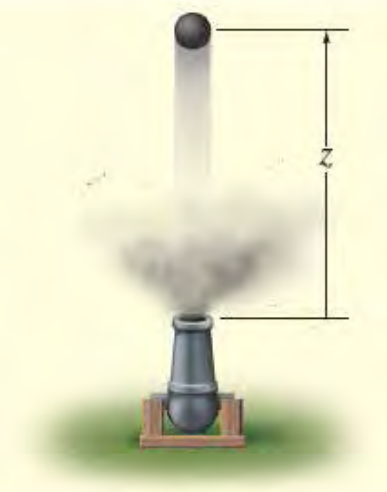


انځور 13-6 (ادامه)

یادونه: یو بله طریقه به دا وي چې د حرکت معادلو د پلي کولو څخه مخکې، د بکس د جسم آزاد او کینیتیک ډیاګرامونه رسم شي، لکه څنګه چې په انځور 13-6c کې ښودل شوي.

مثال 13.2

یوه 10 کیلو ګرامه توغندی د ځمکې څخه عمودي پورته ویشتل کیږي، د پیل سرعت 50 متر په ثانیه کې دي، لکه څنګه چې په انځور 13-7aکې ښودل شوي. تاکل شوی اعظمي لوړوالی پیدا کړئ چې دا به سفر وکړي شي که (a) د فضا مقاومت له پامه وغورځول شي؛ او (b) د فضا مقاومت د $F_D = (0.01v^2)$ N په توګه اندازه کیږي، چیرې چې v د توغندي سرعت دی په هره شېبه کې، او په متر په ثانیه کې اندازه کیږي.



(a)

حل.

برخه (a) د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):

لکه څنګه چې په انځور 13-7b کې ښودل شوي، د توغندي تول $W = mg = 10(9.81) = 98.1$ N .

موږ به فرض کړو چې مجهول **a** تعجیل په پورته لور د مثبت z په سمت عمل کړي.

د حرکت معادله (Equation of Motion):

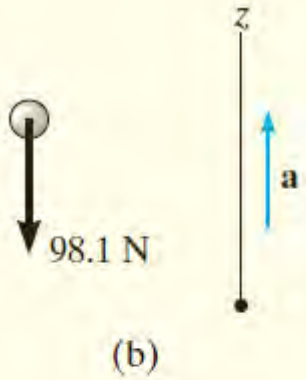
انځور 13-7

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -98.1 = 10a, \qquad a = -9.81\ \text{m/s}^2$$

نتیجه دا ښیي چې توغندی ، لکه هر بل شی چې د ځمکې د سطحې په نږدې والي کې آزاد پرواز لري، د 9.81 متر په ثانیه مربع ثابت کښته لور ته د تعجیل تابع دی.

کینمټیکس (Kinematics): اولینی یا ابتدایي $z_0 = 0$ او $v_0 = 50$m/s دی. په اعظمی لوړوالي کې $z = h$, $v = 0$ دي. ځکه چې تعجیل ثابت دی، نو بیا

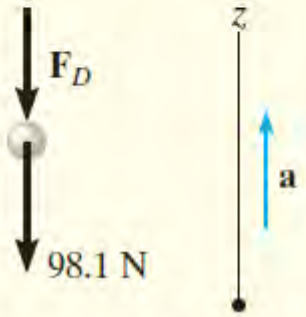
$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$
$$0 = (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0)$$
$$h = 127 \text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$



(b)

برخه (b) د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):

څرنګه چې قوه $F_D = (0.01v^2)$ N د توغندي پورته حرکت ته مخنیوی کوي، نو دا ښکته لورعمل کوي لکه څنګه چې د آزاد بدن په ډیاګرام کې ښودل شوي، انځور 13-7c کې.



(c)

انځور 13-7 (ادامه)

د حرکت معادله (Equation of Motion):

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \quad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \quad a = -(0.001v^2 + 9.81)$$

کینماتیکس (Kinematics): دلته *تعجیل ثابت نه دی* ځکه چې F_D په سرعت پورې اړه لري. څرنګه چې تعجیل د سرعت تابع دي، نو موقعیت یې معلوم کیدی شي له :

$$(+\uparrow)\, a\, dz = v\, dv; \qquad -(0.001v^2 + 9.81)\, dz = v\, dv$$

متغیرونه جدا کوو او انتیګرال یې نیسو، پوهیږو چې اولي $z_0 = 0$, او $v_0 = 50$ m/s (مثبت په پورته لور) نو په $z = h$, $v = 0$ کی لرو

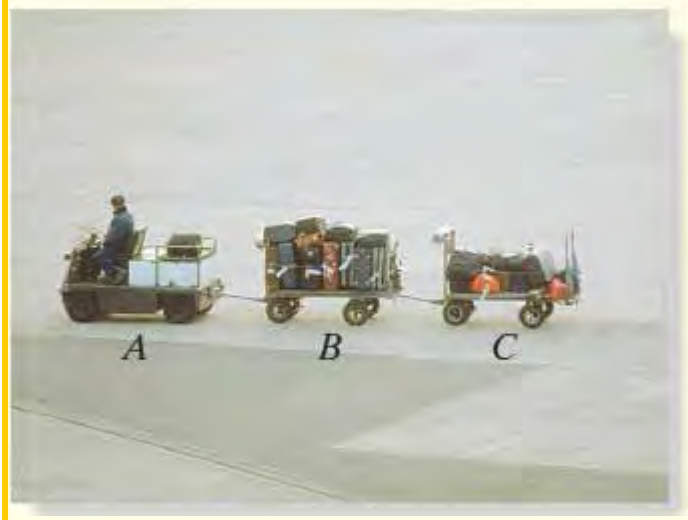
$$\int_0^h dz = -\int_{50\text{ m/s}}^0 \frac{v\,dv}{0.001v^2 + 9.81}$$

$$h = -500 \ln(v^2 + 9810)\Big|_{50\text{ m/s}}^0$$

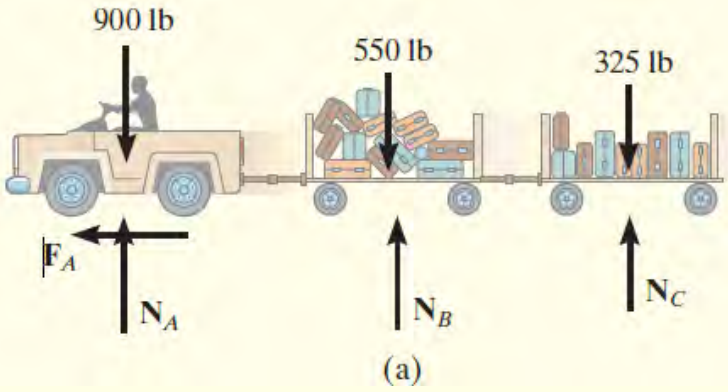
$$h = 114\text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: دلته لوړ والی په پرتله د برخی a کم ښیي، او دا د فضا د مقاومت له امله دی.

مثال 13.3



په انځور کې ښودل شوي د بار وړونکي ټرک A وزن 900 پونډه دی او دا یو 550 پونډه ګاډی B او یو 325 پونډه ګاډی C په ځان پسې کش کوي. د یوې لنډې مودې لپاره د ټرک په څرخونو کې د حرکت کولو اصطحکاکی قوه په ټیرو کی $F_A = (40t)$ پونډه ده، چیرته چې t په ثانیو کې ده. که ټرک له آرامه حرکت پیل کړي، په 2 ثانیو کې یې سرعت معلوم کړئ. همدارنګه، په دې شیبه کې د ټرک او ګاډي B ترمنځ په کپلینګ کی افقي قوه څو ده؟ د ټرک او ګاډیو اندازه له پامه وغورځوئ.



انځور 13-8

حل.

د بدن آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram): لکه څنګه چې په انځور 13-8aکې ښودل شوي، دا اصطحکاکی حرکت قوه ده چې ټرک او ګاډیو دواړو ته تعجیل ورکوي. دلته موږ دري واړه وسایط د یوه واحد سیستم په توګه ګڼلي دي.

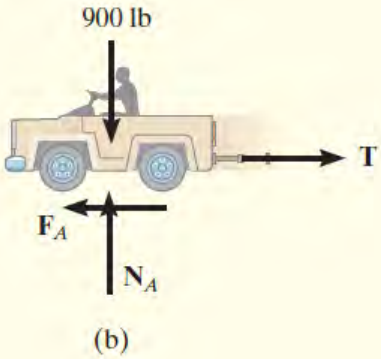
د حرکت معادله (Equation of Motion): یوازی افقي حرکت دلته ښودل شوی:

$$\pm \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40t = \left(\frac{900 + 550 + 325}{32.2}\right)a$$

$$a = 0.7256t$$

کینمتیکس (Kinematics): ځکه چې تعجیل تابع د وخت دی، د ټرک سرعت پیدا کیدی شی له $a = dv/dt$ ، دلته اولنی حالت $v_0 = 0$ په $t = 0$ کی دی. موږ لرو

$$\int_0^v dv = \int_0^{2\,s} 0.7256t\,dt; \qquad v = 0.3628t^2\Big|_0^{2\,s} = 1.45\ \text{ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$



د بدن آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram): د دې لپاره چې د ټرک او ګاډي B ترمنځ قوه معلومه کړو، موږ به د ټرک یو آزاد بدن ډیاګرام وځیړو ترڅو د کپلینګ قوه **T** د آزاد بدن ډیاګرام څخه یوه خارجی قوه ښکاره کړو، لکه څنګه چې په انځور 13-8bکې ښودل شوي.

د حرکت معادله (Equation of Motion): کله چې $t =$ 2 s، نو بیا لرو

انځور 13-8 (ادامه)

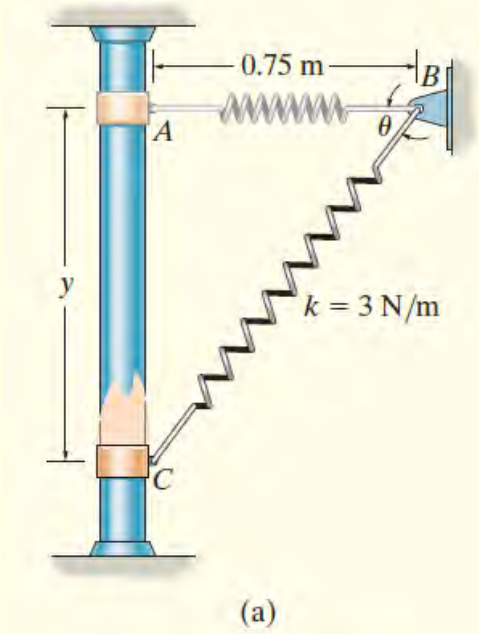
$$\pm \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40(2) - T = \left(\frac{900}{32.2}\right)[0.7256(2)]$$

$$T = 39.4 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: کوښښ وکړي چې همدا شان پایلې له آزاد ډایګرام د ګاډیو B او C څخه پیدا کړي.

مثال 13.4

یو اوار 2 کیلو ګرامه کالر، لکه څنګه چې په انځور 13-9a کې ښودل شوي، له یو فنر سره تړل شوی. د فنر سختۍ $k = 3$ N/m ده او نه کش شوی (unstretched) اوږدوالی یې 0.75 m مترہ دی. که کالر A له آرام حالت څخه خوشې شي، د هغې تعجیل او په کالر باندې د راډ نارمل قوه په هغه شېبه کې کله چې $y = 1$ متر وي وموموئ.



حل

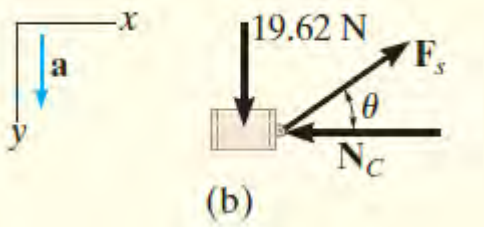
د بدن آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):

د کالر آزاد بدن ډیاګرام کله چې دا په اختیاري موقعیت y کې موقعیت لري، په انځور 13-9b کې ښودل شوي. سربیره پردې، فرض شوی چې کالر تعجیل کوي نو "**a**" په مثبت y لور کې ښکته خواته عمل کړي. دلته څلور نامعلومه شته، یعنی N_C ، F_s، a ، او θ .

د حرکت معادلی (Equations of Motion):

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$+\downarrow\Sigma F_y = ma_y; \qquad 19.62 - F_s\sin\theta = 2a \qquad (2)$$



انځور 13-9 (ادامه)

له معادلی 2 څخه داسی ښکاري چې تعجیل دفنر د قوی مقدار او لوري پورې اړه لري. د Nc او a حل ممکن دی کله چې F_s او θ معلوم وي .

د فنر دقوی مقدار د فنر د اوږدوالی s تابع دی؛ یعني، $F_s = k\,s$. دلته نه کش شوی اوږدوالی $AB = 0.75$ m دی، انځور 13-9a ، نو بیا

$$s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$$

څرنګه چې $k = 3$ N/m نو بیا

$$F_s = ks = 3(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75) \qquad (3)$$

له انځور 13-9a نه، زاویه q مثلثاتی ارتباط د y سره لری.

$$\tan\theta = \frac{y}{0.75}$$

ارزښت د $y = 1$ m په معادلو 3 او 4 کی ځای په ځای کوو، دا راکوي $F_s = 1.50$ N او $q = 53.10$. دا پایلی په معادلو 1 او2 کی ځای په ځای کوو مونږ لرو

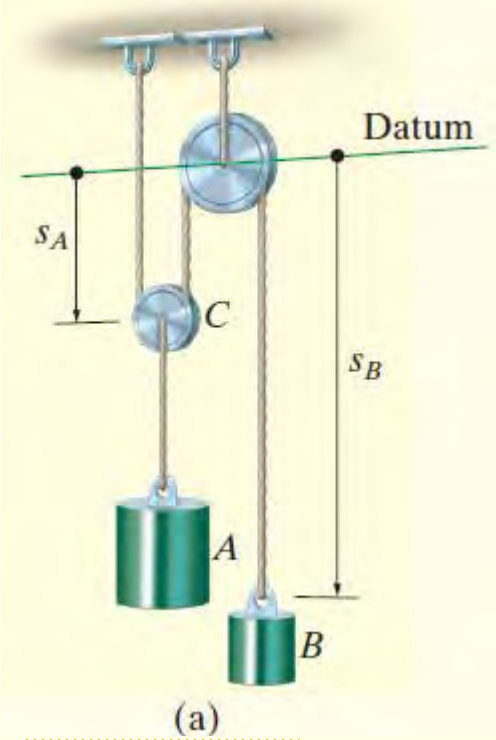
$$N_C = 0.900 \text{ N} \qquad Ans.$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow \qquad Ans.$$

یادونه: دلته تعجیل ثابت نه دی ، کله چی کالر په بنکته لور حرکت وکړي د فنرد قوی مقدار او جهت دواړه يې بدلون مومي.

مثال 13.5

د 100 کیلو ګرامه بلاک A ، لکه څنګه چې په انځور 13-10a کې ښودل شوی، له آرامه حالت نه خوشی کیږي. که د څرخکیو او د تارونو کتلی له پامه وغورځول شي، د 20 کیلو ګرامه بلاک B تعجیل معلوم کړئ.



(a)

انځور 13-10

حل

د بدن آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):

څرنګه چې د څرخکي C کتله له پامه غورځول شوی ده

لکه څنګه چې په $\dot{T} = 2T$ نو، ($m_c = 0$)
انځور 13-10b کې ښودل شوي. د بلاکونو A او B آزاد بدن ډیاګرامونه په انځور 13-10، c او d کی په ترتیب ښودل شوي. که A ځای په ځای پاتې شي، نو بیا $T = 490.5$ N ؛ پداسې حال کې چې د B د ځای په ځای پاتې کیدو لپاره، $T = 196.2$ N . له همدی امله A به بنکته ځي پداسې حال کې چې B پورته ځي. سره له دې چې

داسي ده، موږ به فرض کړو چې دواړه بلاکونه د s_A+ او s_B+ په لور ښکته تعجيل کوي.

دري نامعلومه څيزونه T ، a_A، او a_B دي.

د حرکت معادلی (Equations of Motion): بلاک A

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 981 - 2T = 100a_A \qquad (1)$$

Block B,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 196.2 - T = 20a_B \qquad (2)$$

کینماتیکس (Kinematics):

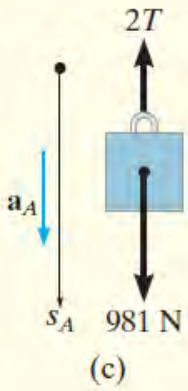


(b)

درېيمه ضروري معادله د a_A او a_B ترمنځ د اړيکو په واسطه ترلاسه کيږي چې د متکي حرکت تحليل نه، لکه څنګه چې په 12.9 برخه کي بحث شوی. په انځور 13-10a کي s_A او s_B ، د A او B موقعيتونه له ثابت ځای څخه اندازه کوي. دا ښکاري چې

$$2s_A + s_B = l$$

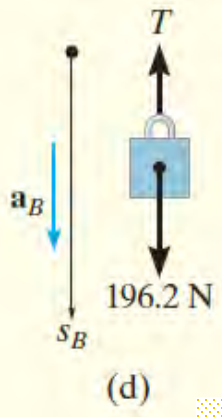
چيرې چې l ثابت دی او د تار د ټول عمودي اوږدوالی نمايندګي کوي. نسبت وخت ته يې دوه ځلی مشتق نيسو او دا لاندی په لاس راځي:



(c)

$$2a_A = -a_B \qquad (3)$$

معادلې 1 تر 3 پورې ټولې داسې لیکل شوي چې *مثبت لوری تل ښکته فرض شوی دی*. دا خورا مهم دی ځکه چې مورږ د معادلو یوځای حل غوښتنه کوو. پایلې یې په لاندې دي



$$T = 327.0\ \text{N}$$
$$a_A = 3.27\ \text{m/s}^2$$
$$a_B = -6.54\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

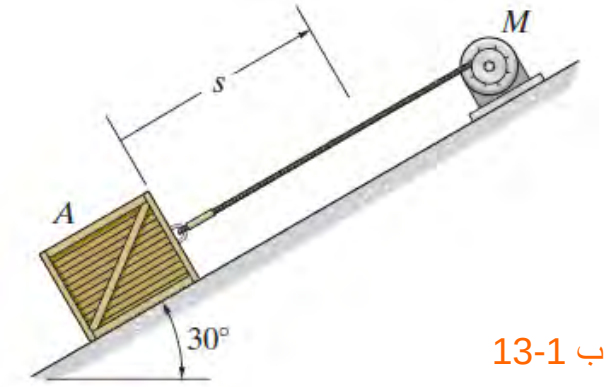
له همدې امله کله چې بلاک A په ښکته لور تعجیل لري پورته لور تعجیل نیسي، لکه څنګه چې تمه کیده.

انځور 13-10 (ادامه)

بنسټیزې پوښتنې

FUNDAMENTAL PROBLEMS

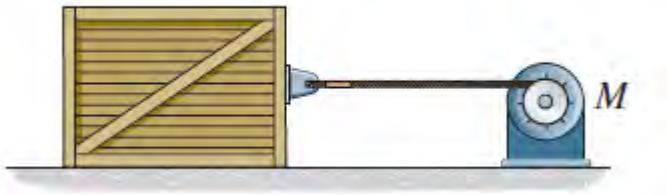
ب 13-1. دا لاندې موټور کیبل په ثابت تعجیل سره تر ځان تاوه وي، په داسې حال کې چې 20 کیلو ګرامه صندوق په 3 ثانیو کې 6 متره واټن طی کوي، د صندوق حرکت د استراحت څخه پیل کیږي. په کیبل کې د کشش قوه وټاکئ. د صندوق اوسطحی ترمنځ د حرکتی اصتحکاک ضریب $m_k = 0.3$ دی.



ب 13-1

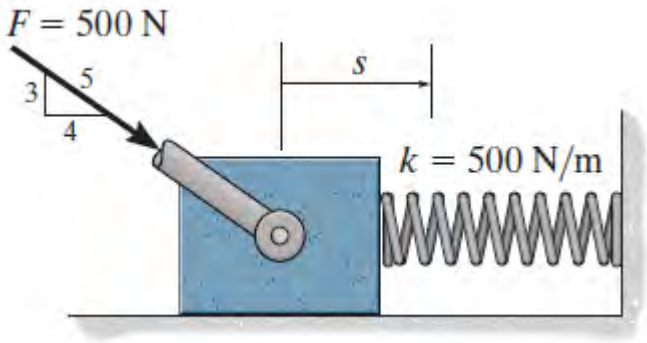
ب 13-2. که موټور M په کیبل باندې $F = (10t^2 + 100)$ N قوه پلیی کوی، چیرته چې t په ثانیو کې وي، کله چې $t = 4$ ثانیې وي، د 25 کیلو ګرامه صندوق سرعت وټاکئ. د صندوق او

سطحی ترمنځ د سټیټیک او کینیټیک استحکاک ضریبونه $m_s = 0.3$ او $m_k = 0.25$، په ترتیب سره دی. صندوق په لومړي وخت کې په استراحت کې دی.



ب 13-2

ب 13-3. یو فنر چې $k = 500$ N/m سختی لري د 10 کیلو ګرامه بلاک سره نصب شوی. که بلاک د $F = 500$ N قوی سره مخ شي، کله چې $s = 0.5$ متره وي، د دې سرعت وټاکئ. کله چې $s = 0$ وي، بلاک په استراحت کې دی او فنر غونج شوی نه دي. د تماس سطحه هواره ده .



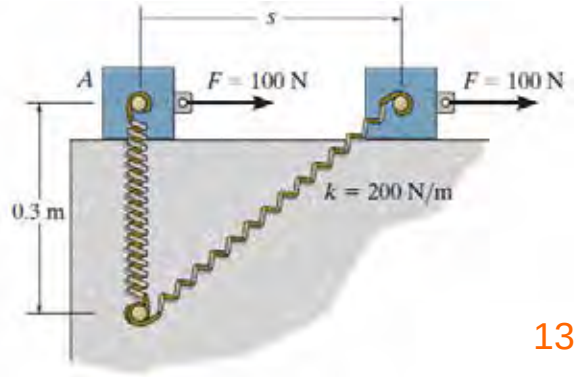
ب 13-3

ب 13-4. موټر د ونچ (winch) لخوا راښکل کیږي. که ونچ په کیبل کې د قوه پیل کړیوی، چیرته چې s د موټر د بې ځایه کیدل په متر کې $T = 100(s + 1)$N وي، کله چې $s = 10$ متره وي، د موټر تیزوالی وټاکئ. پیل کیدل له استراحت حالت نه دي. د موټر د اوښتلو مقاومت پریږدئ.



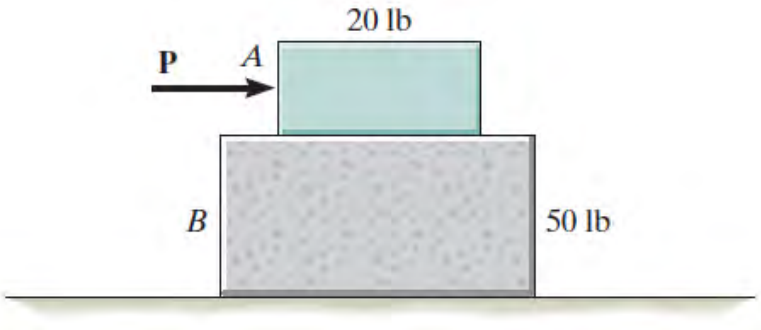
ب 13-4

ب 13-5. فنر $k = 200\ N/m$ سختۍ لري او کله چې د 25 کیلو ګرامه بلاک په A کې وي، کش شوې نه دي. کله چې $s = 0.4$ متره وي، د بلاک تعجیل وټاکئ. د بلاک اوسطحی ترمنځ د تماس سطحه اواره ده.



ب 13-5

ب 13-6. بلاک B په اواره سطحه کې پروت دی. که د A او B ترمنځ د سټیټیک او کینیټیک استحکاک ضریبونه $m_s = 0.4$ او $m_k = 0.3$ په ترتیب سره وي ، که $P = 6\ lb$ وي، د هر بلاک تعجیل وټاکئ.



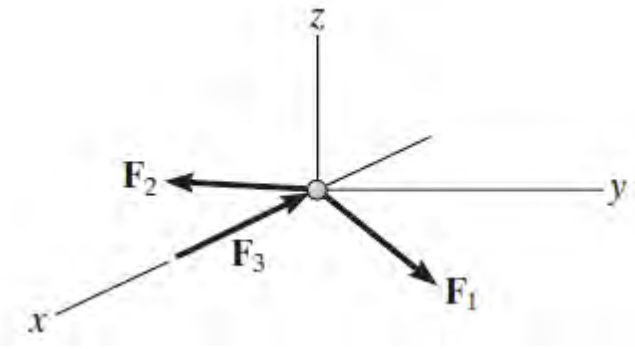
ب 13-6

پوښتنې

PROBLEMS

تول حلونه باید د بدن آزاد ډیګرام ولري.

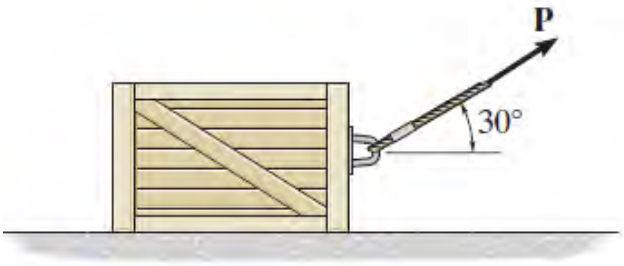
13-1. یو 6 پونډه ذره د خپل وزن او $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\}$ lb ، $\mathbf{F}_2 = \{t^2\,\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}$ lb، او $\mathbf{F}_3 = \{-2t\mathbf{i}\}$ lb قواوو تراغیزی لاندی ده، چیرته چې t په ثانیو کې وي. هغه فاصله وټاکئ چې توپ(ذره) له مبداءځخه 2 ثانیې وروسته له آرام حالت ځخه خوشې شوي وي.



پوښتنه 13-1

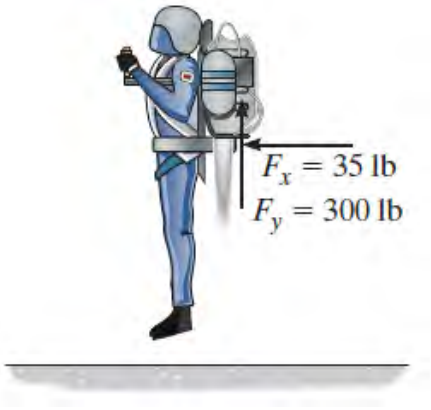
13-2. که د 50-کیلو ګرامه صندوق او ځمکې ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ وي، هغه فاصله وټاکی کله چې صندق یی په $t = 3$ ثانیبو کی وهی او هم یې سرعت په دی وخت کی معلوم کړي . صندوق له آرام حالت ځخه پیل کوي او $P = 200$ N ده.

13-3. که 50-کیلو ګرامه صندوق له آرام حالت ځخه حرکت پیل کړي او $v = 4$ m/s سرعت ترلاسه کړي، کله چې 5 متره ښې خوا ته سفر وکړي، په صندوق باندې عمل کوونکی قوه **P** وټاکئ. د صندوق او ځمکې ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.



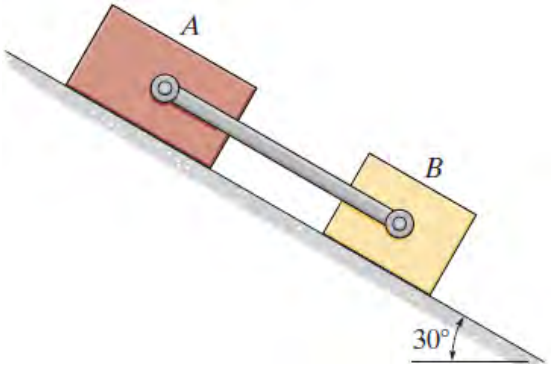
پوښتنی 13-2/13-3

13-4*. د جټ کمربند اود سړي ټول وزن 210 پونډه دی. که انجونه د ثابت زور سره د x او y اجزاوی ولري چې $F_x = 35$ lb او $F_y = 300$ lb دي. په $t = 5$ ثانیو کی له پورته کیدو وروسته ، د سړي ټول واټن وټاکئ. په دې وخت کې يې سرعت څه دی؟ د هوا مقاومت او د تیلو ضایع کیدل له پامه وغورځوی.



پوښتنه 13-4

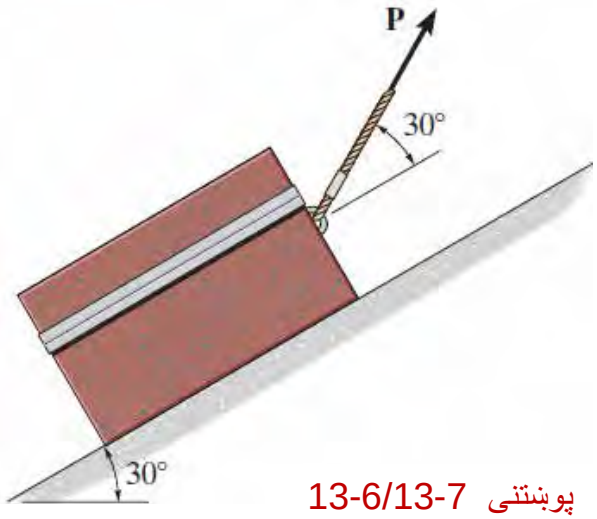
13-5. که بلاکونو A او B په ترتیب سره 10 کیلو ګرامه او 6 کیلو ګرامه کتله ولري، په یوه مایل شوی سطحه کې ایښودل شوي او خوشې کیږي، په ټرونکی میله کې جوړه شوي قوه وټاکئ. د بلاکونو اومایل سطحی ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریبونه $m_A = 0.1$ او $m_B = 0.3$ دي. د ټرونکی میلی کتله پریږدئ.



پوښتنه 13-5

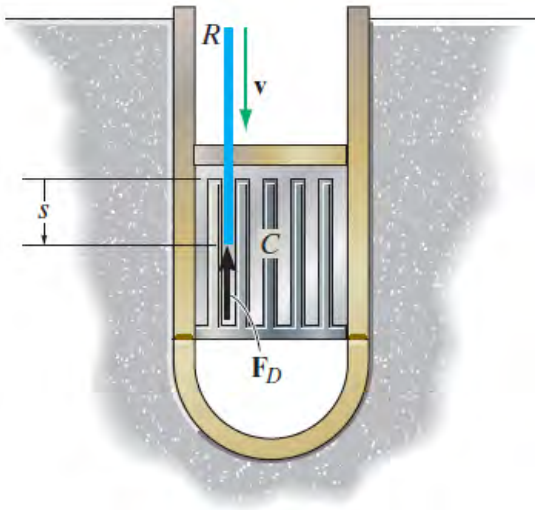
13-6. که $P = 400$ N وي او د 50-کیلو ګرامه صندوق او مایل سطحی ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریب $m_k = 0.25$ وي، کله چې صندوق په مایله سطحه 6 متره پورته سفر وکړي، سرعت يې وټاکئ. صندوق له آرام حالت څخه حرکت پیل کوي.

13-7. که 50-کیلو ګرامه صندوق له آرام حالت څخه حرکت پیل کړي او په 4 ثانیو کې 6 متره پورته په مایله سطحه سفر وکړي، په صندوق باندې عمل کوونکی قوه **P** وټاکئ. د صندوق او ځمکې ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریب $m_k = 0.25$ دی.



پوښتنې 13-6/13-7

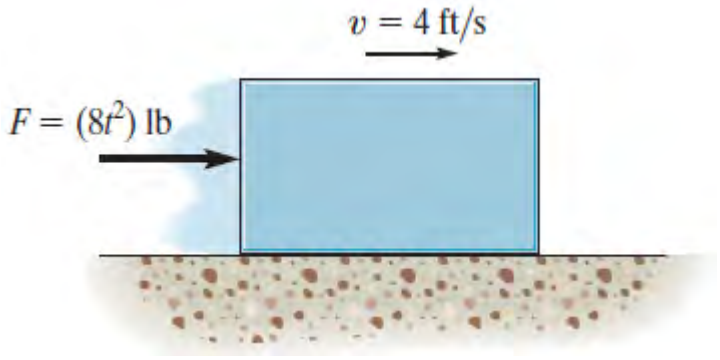
13-8*. د اتومي ریکټر په بیړني حالت کې، یو د کنټرول راډ R چې 20 پونډه وزن لري، د ریکټر کور C ته غورځول کیږي تر څو ریکتور بند شي. که راډ په "درنو" اوبو کې ډوب شی، د ښکته حرکت لپاره یو کښیدو نکی مقاومت $F_D = (0.25v)$ lb وړاندې کوي، چیرته چې v د راډ سرعت په ft/s کې دی، هغه فاصله s وټاکئ چې راډ د ریکټر په کور کې ښکته شي تر څو چې 15 ft/sتیزوالی ترلاسه کړي. راډ له آرام حالت څخه خوشې کیږي کله چې $s = 0$ وي. د اوبو د بوینسي اغیزې پریږدئ.



پوښتنه 13-8

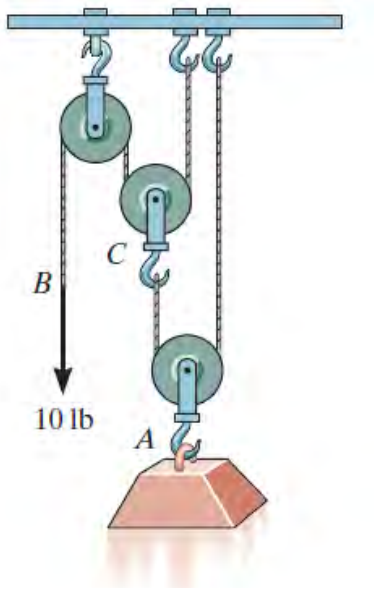
13-9. د 10 پونډه بلاک 4 ft/s تیزوالی لري کله چې د $F = (8t^2)$ lb قوه وربانده پلی شي. کله چې $t = 2$ ثانیې وي د بلاک سرعت وټاکئ . په سطحه کې د کینیټیک اصتحکاک ضریب m_k 0.2 =دی.

13-10. د 10 پونډه بلاک 4 ft/s تیزوالی لري کله چې د $F = (8t^2)$ lb قوه وربانده پلیی شي.. د بلاک سرعت وټاکئ کله چې دا $s = 30$ ft حرکت کوي. په سطحه کې د کینیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دی.



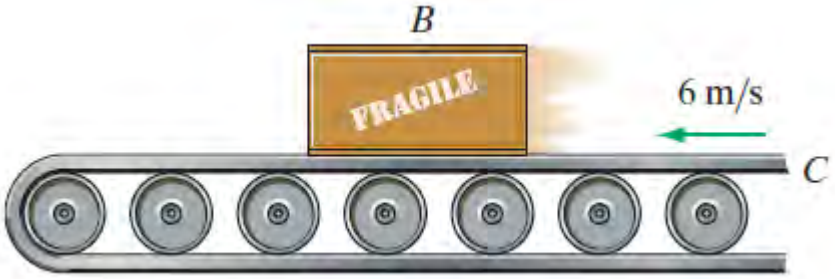
پوښتنې 13-9/13-10

13-11. کله چې په کیبل په B کې یوه 10 lb قوه تطبیق شي کیبل له آرام حالت څخه 4 ft په ښکته لور حرکت کړي، ددی واټن وهلو وخت وټاکی. دښودل شوی بلاک A وزن 20 lb دي. د څرخګیو او کیبلونو کتله پریږدئ.



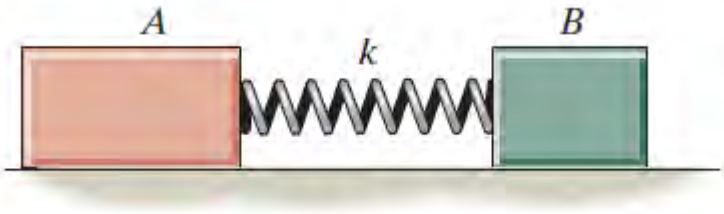
پوښتنه 13-11

*13-12. کنویر بیلټ C په 6 m/s حرکت کړي. که د کنویر بیلټ او 10-کیلو ګرامه بکس B ترمنځ د ستیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.2$ وي، تر ټولو هغه لنډ وخت وټاکئ چې کنویر ودرپږي ترڅو بکس په بیلټ کې ونه ښویږي یا حرکت ونه کړي.



پوښتنه 13-12

13-13. د بلاک A وزن 8 پونډه دي اود بلاک B وزن 6 پونډه دي. دوی په یوه سطحه کې پراته دي چې د کینیتیک اصتحکاک ضریب یې $\mu_k = 0.2$ دی. که فنر 20 lb/ft سختۍ ولري، او دا 0.2 ft غونج شوی دي، کله چې دوی خوشې شي د هر بلاک تعجیل وټاکئ.



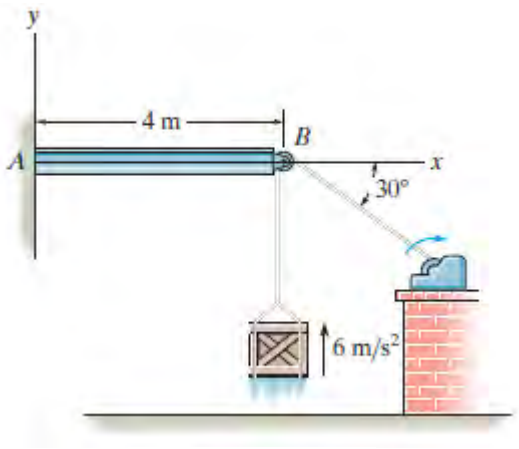
پوښتنه 13-13

13-14. د 2- Mg ټرک په 15 m/s حرکت کوي کله چې په ټولو ټایرونو باندې بریکونه پلی شي، او دا لامل د 10 متره ښویدو شی مخکې له دې چې ودرپږي. هغه ثابته افقی قوه چې په کپلینګ C کې جوړیږی وټاکئ، او په دې وخت کې د ټرک او سړک ترمنځ اصتحکاکی قوه وټاکئ. د کښتۍ او ټریلر ټوله کتله 1 Mg ده.



پوښتنه 13-14

13-15. دا لاندې ښودل شوی موټور یو 50-کیلو ګرامه صندوق په $6\ m/s^2$ تعجیل سره پورته کوي. په ټینګه اتکاء A کی د ریکشن اجزاوی او مؤمنت اندازه وټاکئ.



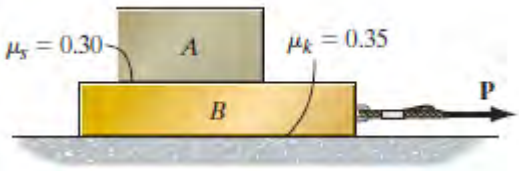
پوښتنه 13-15

13-16*. ټیم A او ټیم B هر یو څلور غړي لري چې ټوله ګټله یې په ترتیب سره 320 kg او 330 kg ده. د ټیم A لپاره د سټیټیک او کینیټیک اصتحکاک اوسط ضریبونه $m_s = 0.52$ او $m_k = 0.5$ دي، او د ټیم B لپاره، $m_s = 0.48$ او $m_k = 0.46$ دي، کوم ټیم به دا د کشکیدو مسابقه وګټي؟ همدارنګه، د بایلونکي ټیم تعجیل به څه وی که د ګټونکی ټیم خپل اعظمي سټیټیک اصتحکاک قوه رامینځته کړي؟



پوښتنه 13-16

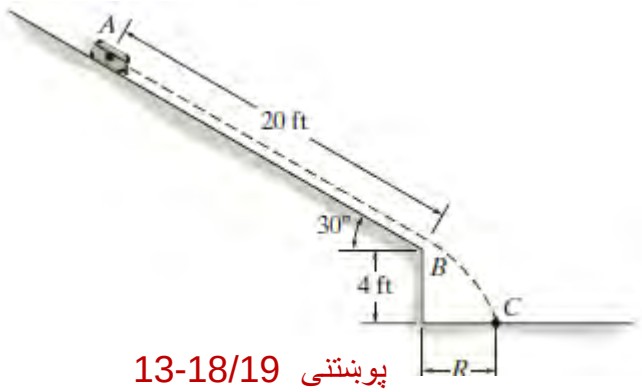
13-17 . د لاندی ښودل شوی بلاک A کتله 60 کیلو ګرامه او په بلاک B باندې پروت دی، کوم چې 30 کیلو ګرامه کتله لري. د سټیټیک او کینیټیک اصتحکاک ضریبونه په شکل کې ښودل شوي دی، تر ټولو لویه افقی قوه P وټاکئ چې په بلاک B باندې پلیی شي او بلاک A په بلاک B باندې ونه ښویږي، پداسې حال کې چې بلاک B ښویږي .



پوښتنه 13-17

13-18. یو 40 پونډه بکس له آرام حالت څخه په رمپ ښکته لور ته 20 ft حرکت کړي . هغه نقطه چیرته چې دا په *C* کې ځمکې ته لویږي وټاکئ. له *A* څخه *C* ته د تللو وخت څومره دی؟

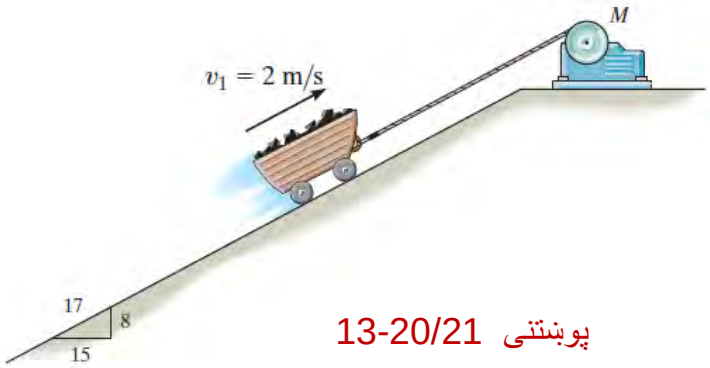
13-19. پوښتنه 13-18 حل کړی، که بکس په رمپ کې په لومړني سرعت $v_A = 10$ ft/s سره حرکت پیل کړي وی او د *AB* په اوږدو کې د کینیټیک اصتحکاک ضریب $m_k = 0.2$ وی.



پوښتنې 13-18/19

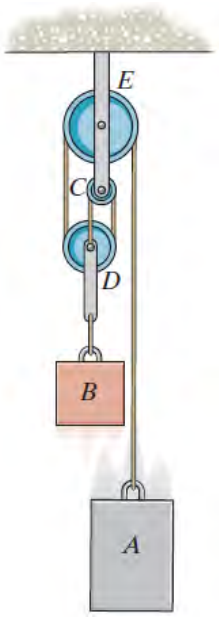
***13-20.** 400 کیلو ګرامه کان کیندونکی موټر په مایل سطحه د کیبل او موټور *M* په کارولو سره پورته کیږي. د لنډ وخت لپاره، په کیبل کې قوه $F = (3200t^2)$ N ده، چیرته چې *t* په ثانیو کې ده. که موټر په $t = 0$ یو لومړني سرعت $v_1 = 2$ m/s ولري ، کله چې t = 2 ثانیې وي، سرعت یې وټاکئ.

13-21. 400 کیلو ګرامه کان کیندونکی موټر په مایل سطحه د کیبل او موټور *M* په کارولو سره پورته کیږي. د لنډ وخت لپاره، په کیبل کې قوه $F = (3200t^2)$ N ده، چیرته چې *t* په ثانیو کې ده. که موټر په $t = 0$ یو لومړني سرعت $v_1 = 2$ m/s ولري ، کله چې t = 2 ثانیې وي، هغه فاصله چې په سطحه پورته کیږي وټاکئ.



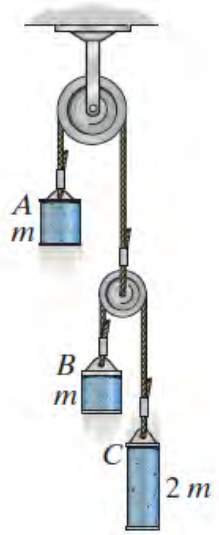
پوښتنې 13-20/21

13-22. بلاک A چې 50 کیلو ګرامه دی، له آرام حالت څخه خوشې کیږي. د 15-کیلو ګرامه بلاک B سرعت په 2 ثانیو کې وټاکئ.



پوښتنه 13-21

13-23. د هر بلاک سرعت وټاکئ که A او B د m کتله ولري او C د 2 m کتله ولري. د کیبلونو او څرخګیو کتله پریږدئ.

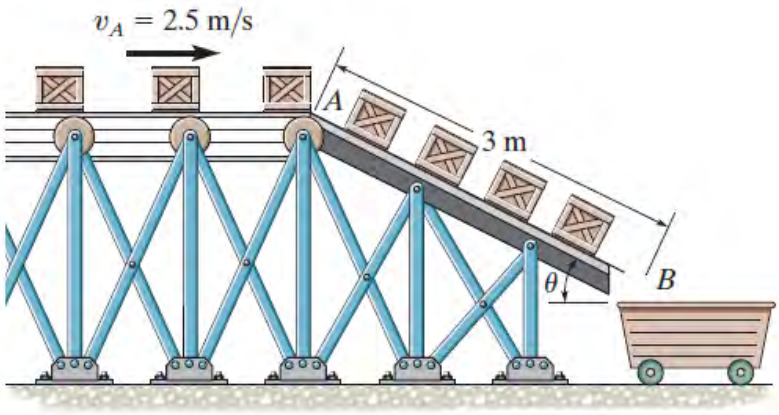


پوښتنه 13-23

***13-24.** د کنویر تسمه هر 12 کیلو ګرامه صندوق A ته داسې رسوي چې د صندوق سرعت په شروع د رمپ بښکته لوري ته $v_A = 2.5$ m/s دي. که د هر صندوق او رمپ ترمنځ د کینیټیک

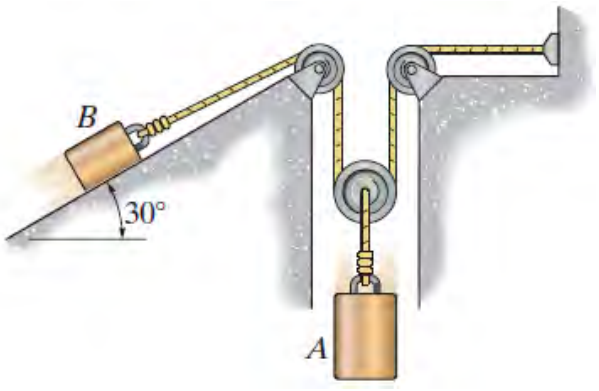
اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ وي، په B کې د رمپ څخه د هر صندوق د بنویدو تیزوالی وټاکئ. فرض کړئ چې هیڅ اوښتل د صندوق نه پیښیږي، $\theta = 30°$، واخلئ.

13-25. د کنویر تسمه هر 12 کیلو ګرامه صندوق A ته داسې رسوي چې د صندوق سرعت په شروع د رمپ بښکته لوري ته $v_A = 2.5$ m/s دي. که د هر صندوق او رمپ ترمنځ د کینیتیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ وي، د رمپ تر ټولو کوچنی زاویه θ وټاکئ ترڅو صندوقونه بښکته وښویږي او په ګاډۍ کې ولویږي.



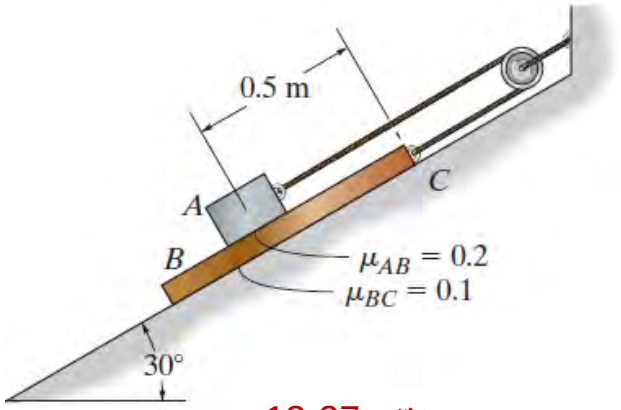
پوښتنې 13-24/25

13-26. په یوه ټاکلي شېبه کې 10 پونډه بلاک A په 6 ft/s تیزوالي سره بښکته حرکت کوي. د دې سرعت 2 ثانیې وروسته وټاکئ، که د بلاک B وزن 4 پونډه وي، او د دې او مایلی سطحی ترمنځ د کینیتیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دي. د څرخکیو او کیبلونو وزن پریږدئ.



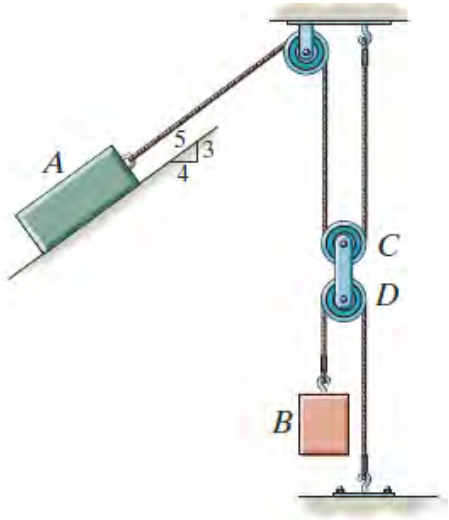
پوښتنه 13-26

13-27. دا لاندی 20 کیلو ګرامه بلاک A په 60 کیلو ګرامه تخته B باندې په بڼودل شوي حالت کې پروت دی. د رسۍ او څرخکیو وزن پریږدئ، او د بڼودل شویو کینیټیک اصټحکاک ضریبونو په کارولو سره، هغه وخت وټاکئ چې بلاک A په تخته باندې 0.5 متره وښویي، سیستم له آرام حالت څخه خوشې کیږي.



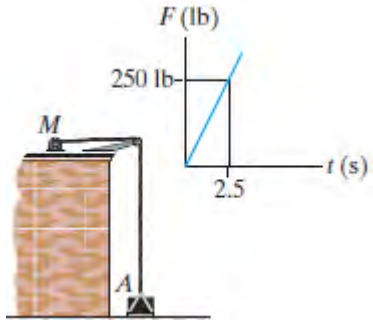
پوښتنه 13-27

***13-28.** په بڼودل شوي شپبه کې 100 پونډه بلاک A په مایله سطحه کې په 5 ft/s سره بڼکته حرکت کوي پداسې حال کې چې په 50 پونډه بلاک B پورې تړل شوی دی. که د بلاک او د مایل سطحې ترمنځ د کینیټیک اصټحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ وي، د A تعجیل او هغه فاصله مخ لدی چې A ودریږي وټاکی. د څرخکیو او کیبلونو وزن پریږدئ.



پوښتنه 13-28

13-29. هغه قوه چې د موټور M لخوا په کیبل باندې پلیی کیږی په لاندی ګراف کې ښودل شوی. کله چې $t = 2.5$ ثانیې وي، د 200 پونډه بلاک A سرعت وټاکئ.



پوښتنه 13-29

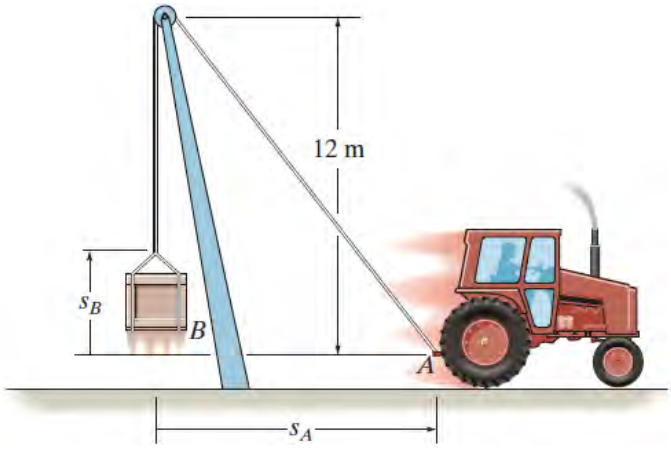
13-30. څلور 2 کیلو ګرامه فلزي تختې یو پر بل باندې ایښودل شوي دي. که د هرو دوو تختو ترمنځ د سټاټیک اصتحکاک ضریب $m_s = 0.3$ وي، تر ټولو کوچنی افقي قوه F وټاکئ چې په لاندې تخته باندې پلې شي ترڅو یوه (هر یوه) تخته د بلی تختی په پرتله وښویږي. ځمکه ښویه ده.



پوښتنه 13-30

13-31. ټراکټر د 24-متره اوږدی رسۍ، بوم (boom)، او څرخکي سیسټم سره 150 کیلو ګرامه بار B پورته کوي. کله چې ټراکټر په ثابت سرعت 4 m/s سره ښي خوا ته ځي، په رسۍ کې کشش داسی وټاکئ کله چې $s_A = 5$ m وي. کله چې $s_A = 0$ وي، $s_B = 0$ وي.

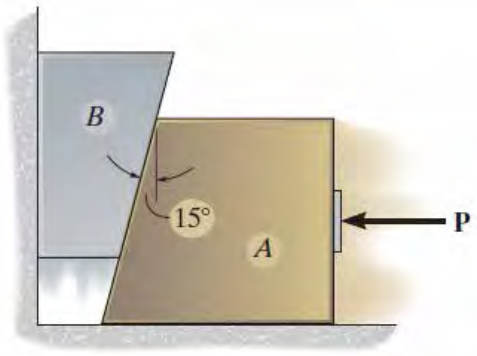
***13-32.** ټراکټر د 24 متره اوږدی رسۍ، بوم، او څرخکي سیسټم سره 150 کیلو ګرامه بار B پورته کوي. که ټراکټر په $3\ m/s^2$ تعجیل سره ښي طرف ته ځي او په $s_A = 5$ m کې د 4 m/s سرعت ولري، په دې شېبه کې په رسۍ کې کشش وټاکئ. کله چې $s_A = 0$ وي، $s_B = 0$ وي.



پوښتنې 13-31/32

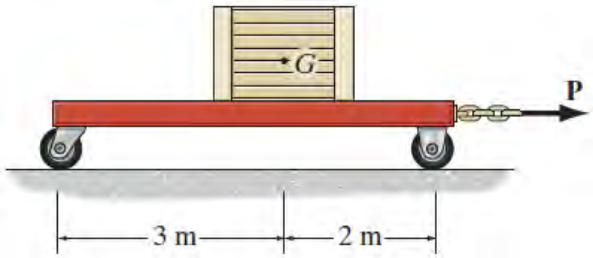
13-33. که یوه افقي قوه $P = 35$ lb په بلاک A باندې پلي شي، د بلاک B تعجیل وټاکئ. اصتحکاک پریږدئ. د بلاک A وزن 15 lb دی، او بلاک B وزن 8 lb دی.

مرسته: وښیی چې $a_A = a_B \tan 15°$.



پوښتنه 13-33

13-34. 3 کیلو ګرامه صندوق په 10 کیلو ګرامه کراچۍ کې پروت دی چې د سټاټیک او کینیتیک اصتحکاک ضریبونه په تر تیب سره $m_s = 0.25$ او $m_k = 0.2$ دي. د پرله پسې تر ټولو کوچنی مقدار د قوه **P** وټاکئ چې صندوق له کراچۍ نه وښویږي. ځومره وخت نیسي چې صندوق له کراچی نه ولویږی؟



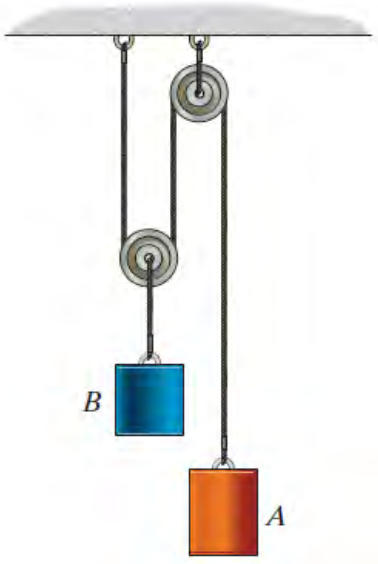
پوښتنه 13-34

13-35. د لاری د تختو او د 200 کیلو ګرامه صندوق ترمنځ ستاتیک اصتحکاک ضریب m_s = 0.3 دی. ټرک له آرام حالت نه حرکت شروع کوي. تر ټولو هغه لنډ وخت داسی وټاکئ کله چی لاری په ثابت تعجیل سره 60 km/h ثابت تیزوالی ته ورسیږي او صندوق و نه ښویږي.



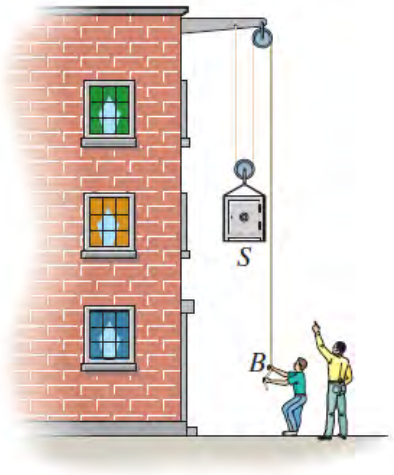
پوښتنه 13-35

***13-36.** په دی لاندی انځور کی سلنډر *A* د 8 کیلو ګرامه کتله لري او سلنډر *B* د 6 کیلو ګرامه کتله لري. کله چې t = 4 s وي دا لاندی سیستم له آرام حالت څخه خوشې کیږي.د سلنډر *A* سرعت وټاکئ د څرخکیو او کیبلونو کتله مه حسابوی.



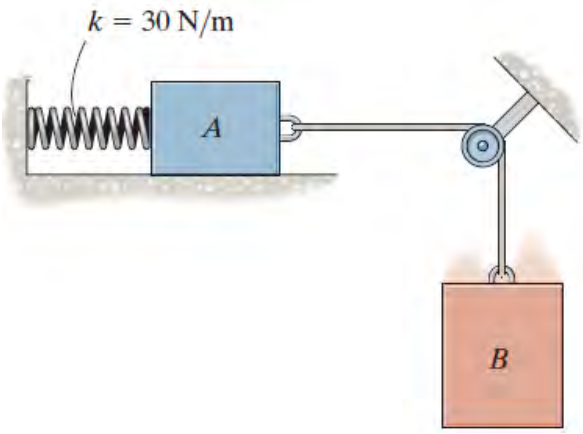
پوښتنه 13-36

13-37. خوندي صندوق *S* ، 200 پونډه وزن لري اود ښودل شویي رسۍ او څرخکیو سیستم پواسطه د یو بل سره تړاو لری. د رسۍ پای یوه هلک *B* ته چې 90 پونډه وزن لري ورکړل شوي، که چیری د ګډوډۍ حالت را منځ ته شي او هلک د رسۍ پای خوشۍ نه کړي په دی حالت کی د هلک تعجیل و ټاکی. د څرخګیو او رسۍ کتله مه حسابوی.



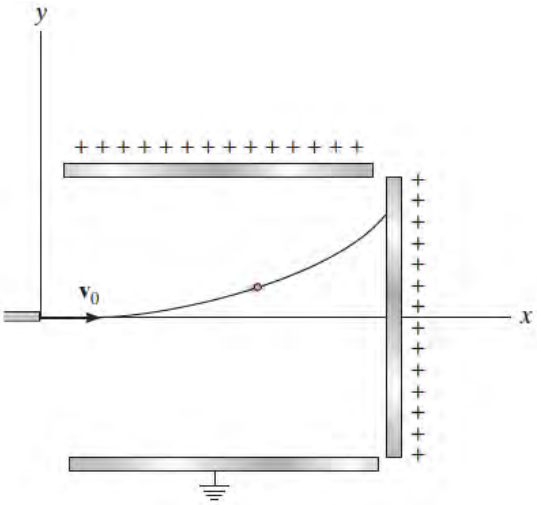
پوښتنه 13-37

13-38. بلاک A د 20 کیلو ګرامه کتله لري او بلاک B د 50 کیلو ګرامه کتله لري. که د بنودل شوي شپبې په وخت کې فنر 0.2 متره اوږد شوی وي، په دې شپبه کې د بلاک B تعجیل وټاکئ که بلاک (a) په ابتدا کې په آرام حالت کې وي، (b) په 3 m/s تیزوالی سره بنکته حرکت کوي. اصتحکاک مه حسابوی.



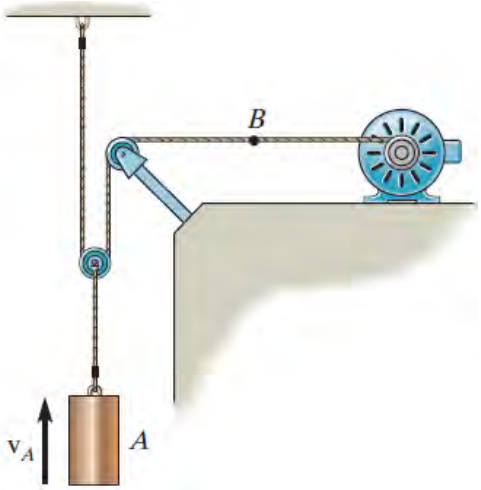
پوښتنه 13-38

13-39. یوه الیکترون چې کتله یې m ده په $\mathbf{v}_0$ لومړني افقي سرعت سره خوشې کیږي. که دا د دوو قوو په ساحه کې وي چیرې چې $F_x = F_0$ او $F_y = 0.3F_0$ وي، د الکترون دلارې معادله او تیزوالی یې په هر وخت t کې وټاکئ. F_0 یو ثابت رقم دي.



پوښتنه 13-39

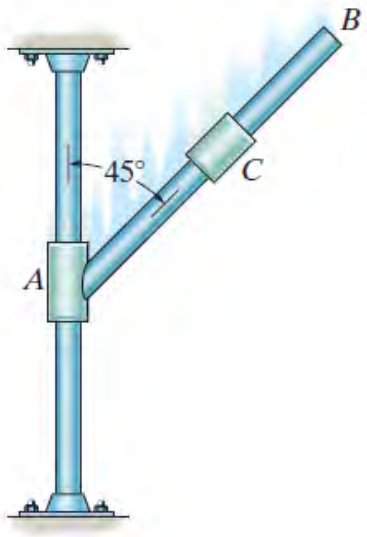
*13-40. دا لاندی ښودل شوي 400 پونډه سلنډر، A، د موټوراو څرخکیو سیستم په کارولو سره پورته کیږي. که د B قطی تیزوالی په کیبل کی په ثابت تناسب سره د صفرنه ته $v_B = 10$ ft/s په $t = 5s$ ته زیات شي، د حرکت لپاره په B کي د کیبل کشش وټاکئ.



پوښتنه 13-40

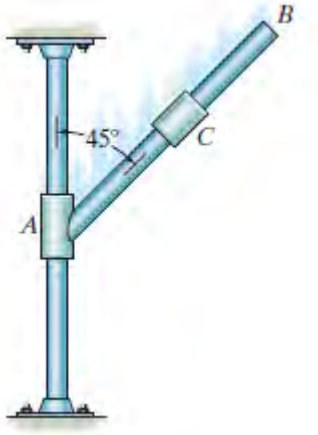
13-41. دا لاندی 2 کیلو ګرامه دغاړی پټي C په آزاد ډول په په ښوی شافټ AB کي حرکت کړي. دغاړی پټي C تعجیل وټاکئ (a) که شافت کلک ټرل شوی وی او حرکت نکړي. (b) دغاړی پټي A چی د شافت AB سره کلک ټرل شوي په ثابت سرعت کښته لور ته په عمود میله

حرکت کړي. (c) پټي A په ښکته لور په $2\ m/s^2$ تعجیل کی ده . په ټول حالتونو کی پټي حرکت په سطحه کی دی.



پوښتنه 13-41

13-42. دا لاندی 2 کیلو ګرامه دغاړی پټی C په آزاد ډول په ښوی شافټ AB کې حرکت کړي. دغاړی پټي C تعجیل وټاکئ کله چی پټی A، $4\ m/s^2$ تعجیل په پورته لور ولري.



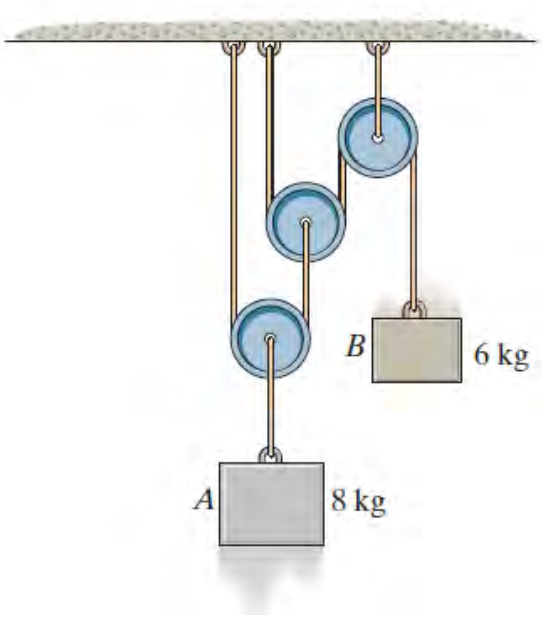
پوښتنه 13-42

13-43. یوه پراشوتیست چی کتله یې m ده خپل پراشوت د ډېری لوړ ارتفاع څخه له آرام حالت نه خلاصوی. که د فضا مقاومت $F_D = kv^2$ وي، چیرې چې k یو ثابته ده، د هغه سرعت وټاکئ کله چې هغه د یوې ټاکلې مودې t لپاره ښکته کیږي. د هغه سرعت کله چې په ځمکی ته رسیږی څه دی؟ دا سرعت د ټرمینل سرعت (terminal velocity) په نوم یادیږي، کوم چې د وخت د مودې په پای $t \to \infty$ کې موندل کیږي.



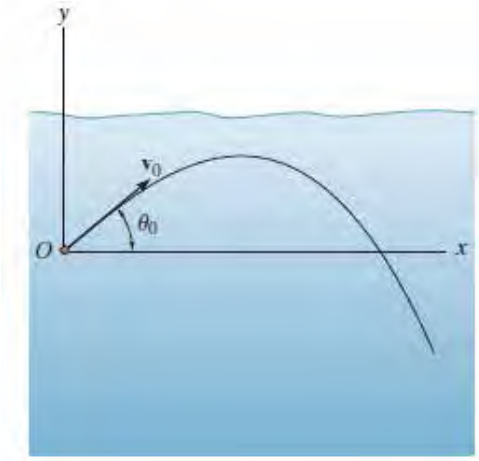
پوښتنه 13-43

*13-44. په هر بلاک پوري تړلو رسيو کې د کشش قوه او د بلاکونو تعجيل وټاکئ. د څرخکيو او رسيو کتله مه حسابوی.



پوښتنه 13-44

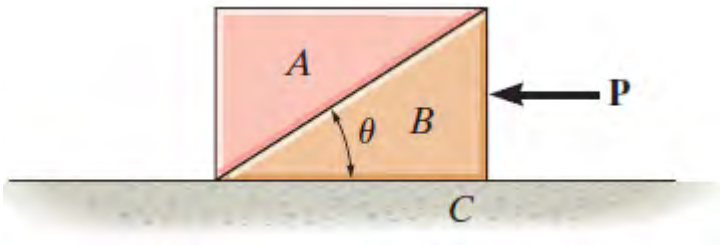
13-45. یو پروجیکټایل چې کتله یې m ده په یوه مایع کې په q_0 زاویه او v_0 لومړني سرعت سره ویشتل کیږي. که مایع په پروجیکټایل باندې یو اصتحکاکي یا کشیدونکی مقاومت چې متناسب په سرعت دی، یعنی $F = kv$ پلی شی، چیرې چې k یو ثابت دی، د دې د موقعیت x او yاجزاوی په هره لحظه د وخت کې وټاکئ. همدارنګه، تر ټولو لویه فاصله x_{max} چې پروجکټایل سفر کوي څه ده؟



پوښتنه 13-45

13-46. بلاکونه A او B هر یو د m کتله لري. تر ټولو لویه افقي قوه P وټاکئ چې په B باندې پلیی شی شي ترڅو A په پرتله د B حرکت ونه کړي. ټولې سطحې ښویی دي.

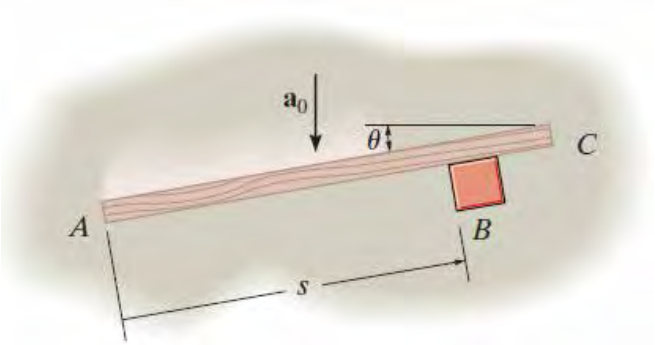
13-47. بلاکونه A او B هر یو د m کتله لري. تر ټولو لویه افقي قوه P وټاکئ چې په B باندې پلیی شی ترڅو A په پرتله د B ونه ښویږي . د A او B ترمنځ د سټاټیک اصتحکاکي ضریب m_s دی. د B او C ترمنځ اصتحکاک مه حسابوی.



پوښتنه 13-46/47

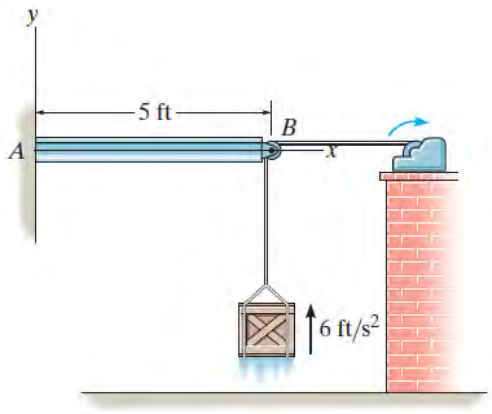
13-48*. ښوی بلاک B چې د پام وړ اندازه نلري د m کتله لري او په افقي سطحه باندې پروت دی. که تخته AC په بلاک چې د q زاویه جوړه وي او په یوه ثابت تعجیل $\mathbf{a}_0$ سره په تخته فشار

راوړي، د بلاک سرعت د تختی په اوږدوالی او هغه فاصله s چې بلاک په تخته طی کوی د وخت تابع يي و ټاکی. بلاک له آرام حالت څخه شروع کوی، کله چې $s = 0$ وي، $t = 0$ وي.



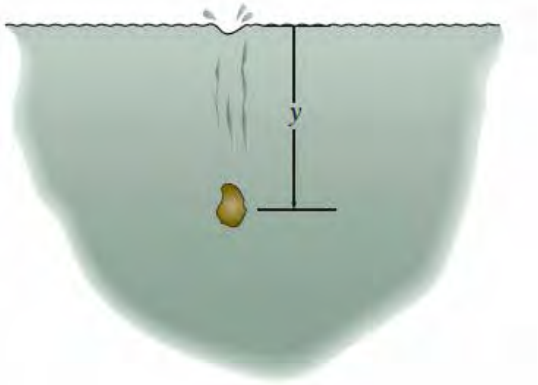
پوښتنه 13-48

13-49. یو 30 پونډه صندوق په ثابت تعجیل د $6\ ft/s^2$ سره پورته خیږول کیږي. که چیرې د بیم AB وزن 200 پونډه وي، په اتکاء A کې د ریکشنو اجزاوې معلومې کړئ. د B په نقطه کې، کتله او اندازه د څرخکی له پامه وغورځوئ. مرسته: لومړی د کیبل کشش پیدا کړئ، بیا د ستاتیک تحلیل له مخې په بیم کې قواوې وټاکي.



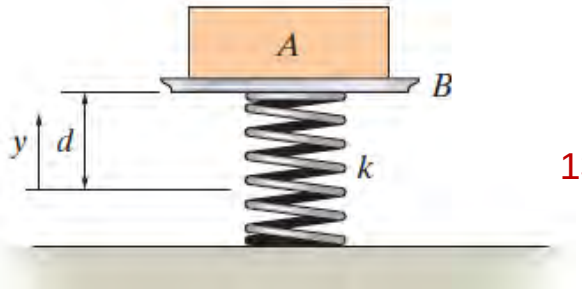
پوښتنه 13-49

13-50. یو ډبره له آرام حالت څخه په یوه غلیظه مایع کې خوشې کیږي. که په دې عمل کې کشیدونکی (drag) قوه چې په مقابل د ډبرې عمل کړي $F = cv$ وي، چیرې چې c یو ثابت دی، د ډبرې سرعت او موقعیت د وخت په لحاظ وټاکئ. د سرعت او موقعیت د وخت ګرافونه رسم کړئ.



پوښتنه 13-50

13-51. بلاک A ، m_A کتله لري او په قاب B کې پروت دی، کوم چې د m_B کتله لري. دواړه په یو فنر باندې ایښودل شوي دي. دفنرد سختی ثابت k دي، فنر د قاب د بیخ او ځمکې سره تړل شوی دی. هغه فاصله d وټاکئ چې قاب باید له متوازن موقعیت څخه ښکته ټیله شي او بیا له آرام حالت څخه خوشې شي ترڅو بلاک د قاب له سطحې څخه جلا او په دی شېبه کې فنرپه نه غزیدلی حالت کی وی.



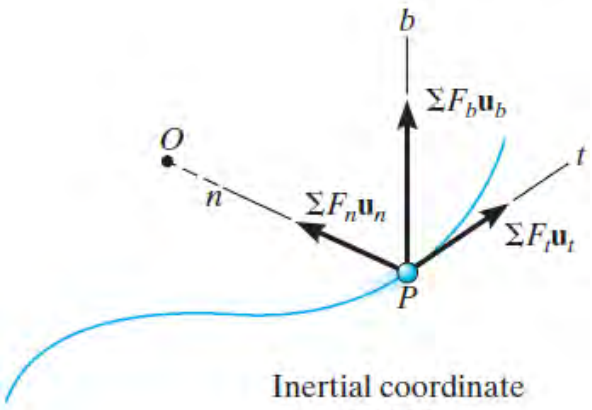
پوښتنه 13-51

13.5 د حرکت معادله : نارمل (عمودي) او مماسي کوردیناتونه (EQUATIONS OF MOTION: NORMAL AND TANGENTIAL COORDINATES)

کله چې یوه ذره په یوه پېژندل شوي منحني لاره حرکت کوي، د ذره د حرکت معادله کېدای شي د مماسي، عمودي او دوهم نارمل لوریو په اجزاوو کې څرګنده شي، لکه څنګه چې په انځور 13-11 کې ښودل شوي. په دوهم نارمل لوري کې د ذرې هیڅ حرکت نشته، ځکه چې ذره په دی لوري له له حرکته محدود شوي. له دې امله

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$



دا معادله په دې شرط پوره کيږي که چېرې

$$\Sigma F_t = ma_t$$
$$\Sigma F_n = ma_n$$
$$\Sigma F_b = 0 \qquad (13\text{–}8)$$

انځور 13-11

په یاد ولرئ چې $a_t = dv/dt$ د سرعت د اندازې بدلون نسبت په وخت کې دی. نو که د قواوو محصله $\sum \mathbf{F}_t$ د حرکت په لوري عمل وکړي، د ذرې سرعت به زیات شي؛ په داسې حال کې که دا په مخالف لوري عمل وکړي، ذره به ورو شي. همدارنګه، a_n $(= v^2/r)$ نمایندګي د د وخت د بدلون کچه د سرعت په لوري کوي. دا د مرکزی قوې (centripetal force) یا د محصلې $\sum \mathbf{F}_n$ قوې له امله رامنځته کیږي، چې تل په مثبت n لوري کې عمل کوي، یعنې د منحني لارې د مرکز په لوري .



کله چې یو رولر کوسټر په لاره باندې
ښکته ځي، موټرونه د تعجیل دوارې
عمودي او مماسی برخې لری

د تحلیل کړنلاره

که د یوې ذرې حرکت په یو *پیژندل شوي منحني لاره* کې ، باید د تحلیل لاره عمودي او مماسی کواردیناتونه په پام کې ونیول شي، ځکه چې د تعجیل اجزاوی په اسانۍ سره جوړېدای شي. د حرکت معادلو پلي کولو طریقه کوم چې قواوی د تعجیل سره اړیکه لري، کړنلاره یې په 13-4 برخه کې تشریح شوې ده. په ځانګړي توګه، د *t, n, b* کواردیناتو لپاره په داسې لاندی ډول بڼودل کیدی شي.

د آزاد - جسم ډیاګرام (Free-Body Diagram).

- د ذرې په ځای کې انرشیایي د *t, n, b* کواردیناتي سیستم جوړ کړئ او د ذرې د آزاد جسم ډیاګرام رسم کړئ.
- د ذرې عمودي تعجیل $\mathbf{a}_n$ تل په مثبت *n* لوري کې عمل کوي.
- که مماسی تعجیل $\mathbf{a}_t$ نامعلوم وي، فرض کړئ چې په مثبت *t* لوري کې عمل کوي.
- تعجیل په *b* لوري کې نشته.
- په پوښتنه کې نامعلوم وپیژنئ.

. **د حرکت معادلی (Equations of Motion).** د حرکت معادلی 8-13 پلي کړئ.

کینیمتیک (Kinematics).

. د تعجیل مماسې او عمودي اجزاوی جوړې کړئ؛ لکه $a_t = dv/dt$ یا $a_t = v dv/ds$ او $a_n = v^2/r$.

. که لاره داسې تعریف شوې وي $y = f(x)$ ، نو په هغه ځای کې چې ذره موقعیت لري د منحني شعاع یې تر لاسه کیدی شي له $r = [1+(dy/dx)^2]^{3/2}/|d^2y/dx^2|$

مثالونه

مثال 13.6

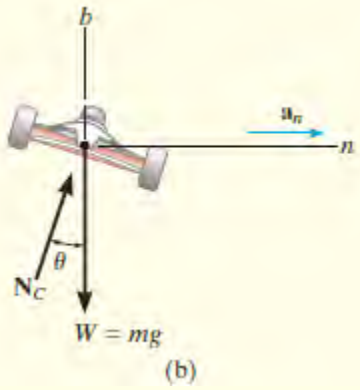
د دې لپاره چې د ریس ټراک د میلان (banking) زاویه θ معلومه شي (انځور 13-12a و ګورئ) ترڅو د ریسینګ موټرونو ټایرونه اصتکاک ته اړ نه وي چې د پورته یا ښکته ښویدو څخه مخنیوي وکړي. فرض کړئ چې موټرونه کوچني دي، یو کتله m لري، او د منحني شعاع r سره په په ثابت تیزوالي حرکت کوي.



(a)

حل

حل دمخه، فکر وکړئ چې ولې دا باید د t ، n، b محورونو په کارولو سره حل شي.



(b)

انځور 13-12

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram):

لکه څنګه چې په انځور 13-12bکې ښودل شوي، او هم لکه څنګه چې په پوښتنه کې ویل شوي، په موټر باندې هیڅ اصتکاک قوه عمل نه کړي. دلته N_C د ځمکې محصله قوه پهلورو ټایرونو باندې ده. څرنګه چې a_n محاسبه کیدی شي،او نامعلومې عبارت دی په N_C او q دي.

د حرکت معادلې (Equations of Motion). د n,b محورونه کارول چې ښودل شوی:

$$\pm \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_C \sin\theta = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \qquad N_C \cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

معادله 1 تقسیم په معادله 2 کوو تر څو N_C او m له مینځه ولاړ شي او مونږ لرو.

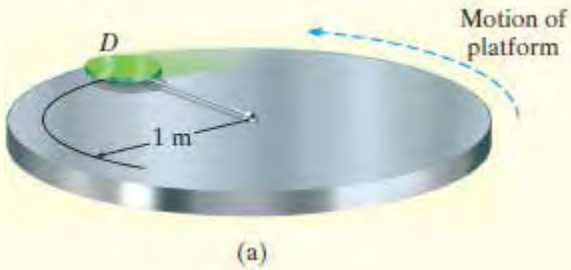
$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right) \qquad Ans.$$

یادونه: نتیجه د موټر د کتلې نه مستقل ده. همدارنګه، په مماس لوري د قواوو مجموعه د حل لپاره هیڅ اهمیت نلري. که دا په پام کې ونیول شي، بیا $a_t = dv/dt = 0$ وي، ځکه چې موټر په ثابت تیزوالي سره حرکت کوي. د دې پوښتنې لا نور تحلیل په پوښتنه 21-53 کې به بحث وشی.

مثال 13.7

د 3 کیلو ګرامه ډیسک (Disk) D د یوه تار په پای کې تړل شوی دی لکه څنګه چې په انځور 13-13a کې ښودل شوی. دتار بل پای په یو بال-او ساکټ غوټه تړل شوی چې د پلیټ فارم په مرکز کې موقعیت لري. که پلټ فارم په چټکۍ سره وګرځي، او ډیسک پرې له ارام حالت نه خوشې شي، د تار د شکیدو لپاره اړین سرعت ته د رسیدو وخت معلوم کړئ. د تار اعظمي کش چې تحمل کولی شي 100 نیوټنه دی، او د ډیسک او پلټ فارم ترمنځ د کینیټیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.1$ دی



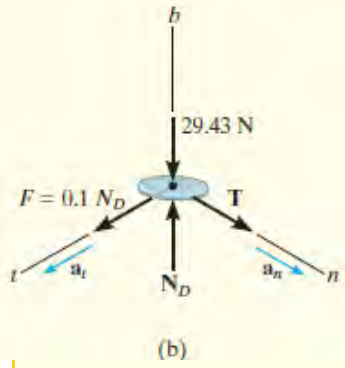
(a)

حل

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram): د اصطحکاک قوه د $F = \mu_k N_D =$ $0.1N_D$مقدار لري او د ډیسک او پلټ فارم تر منځ د نسبي حرکت مخالف لوري ته متوجه دی. دا همدغه قوه ده چې ډیسک ته د مماسی تعجیل یو جز ورکوي، او د سرعت (v) زیاتوالي سبب

کيږي، او په دې توګه د T زياتوالي تر 100 نيوټنه پورې رسوي. د ډيسک تول $W =$ 29.43=(9.81)3نيوټنه دی. ځکه چې a_n د v سره تړاو لري، مجهولونه دلته N_D ، a_t ، او v دي.

د حرکت معادلي (Equations of Motion).



$$\Sigma F_n = ma_n; \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \qquad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0.1N_D = 3a_t \qquad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29.43 = 0 \qquad (3)$$

په معادله 1 کی ارزښت د T=100 نيوټن ايږدو تر څو د ډيسک ماتوونکي سرعت v_{cr} چې تار غوڅ کړي په لاس راشی. د ټولو معادلو د حلولو سره، مونږ ترلاسه کوو:

$$N_D = 29.43\ \text{N}$$
$$a_t = 0.981\ \text{m/s}^2$$
$$v_{cr} = 5.77\ \text{m/s}$$

الخور 13-13

کينماتيک (Kinematics).

څرنګه چې a_t ثابت دی، د تار د غوڅولو وخت عبارت دی په:

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$
$$t = 5.89\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 13.8



که د سکي جمپ د يوه پارابولا پواسطه فرض شي، انځور 13-14a ، هغه نارمل قوه معلومه کړی، چې په 150 پونډه سکيکونکيی باندې کله چې هغه د جمپ په پای، نقطه *A* ، کې وی او سرعت يی 65 ft/s وی. همدارنګه، د هغې تعجيل په دې نقطه کې څومره دی؟

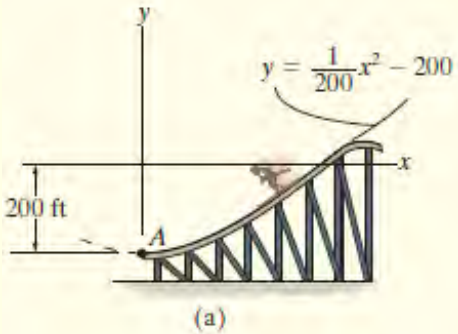
حل

ولې د *t* ، *n* محوری سيستم د دې پوښتنې د حل لپاره کارول کيږی؟

د جسم آزاد ډايګرام (Free-Body Diagram):

له دې امله چې $dy/dx = x/100 \mid_{x=0} = 0$ ، ميلان په *A* کې افقي دی. له همدې امله، د سکيکونکی ر ازاد جسمي ډياګرام کله چې هغه په *A* کې وي په انځور 13-14b کې ښودل شوی. له دې امله چې لاره د منحنی په توکه ده، دوی اجزا وی د تعجيل شتون لري، $\mathbf{a}_n$ او $\mathbf{a}_t$.

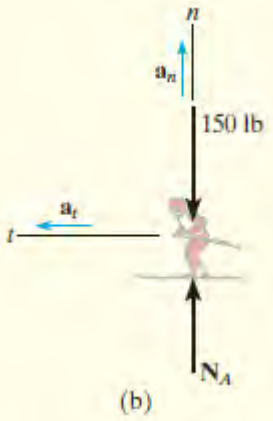
دلته موږ کولی شو a_n حساب کړو نو نامعلومونه a_t او N_A دي



د حرکت معادلې (Equations of Motion).

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 150 = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(65)^2}{\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\pm \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{150}{32.2}a_t \qquad (2)$$



انځور 13-14

د انحنا شعاع r ددی لازی لپاره په نقطه A (0, -200 ft) کی باید معلوم شي. دلته

$$y = \tfrac{1}{200}x^2 - 200,\ dy/dx = \tfrac{1}{100}x,\ d^2y/dx^2 = \tfrac{1}{100},$$

تر څو په $x = 0$ کيږي:

$$\rho = \left.\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}\right|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{100}|} = 100 \text{ ft}$$

دا په معادله 1 کی ځای په ځای کوو او د N_A ارزښت په لاس راځي

$$N_A = 347 \text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

کینماتیک (Kinematics). له معادله 2 لرو

$$a_t = 0$$

نو بیا

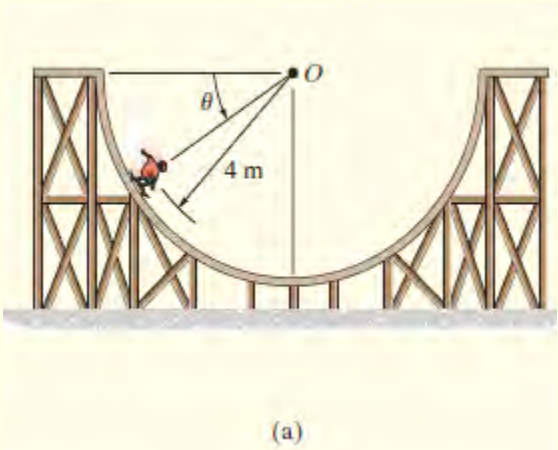
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42.2 \text{ ft/s}^2$$

$$a_A = a_n = 42.2 \text{ ft/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: د حرکت معادله په y لوري کي تطبیق کړئ او وښیئ چې کله چې سکیکونکی په هوا کي وي، د هغې ښکته تعجیل ft/s^2 32.2 دی.

مثال 13.9

60 کیلو ګرامه سکیټ بورډر په انځور 13-15a کې په دایروي ټرک کې ښکته ځي. که هغه له استراحت حالت نه پیل کړي کله چې $q = 0°$ وي، هغه وخت کې د ټرک د نارمل ریکشن شدت چې په ده یې راوړی معلوم کړئ کله چې $q = 60°$ وي. د سکیټ بورډر اندازه د محاسبې لپاره له پامه وغورځوي.



(a)

حل

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram): د سکیټ بورډر ازاده بدنه ډایاګرام کله چې هغه په یوه اختیاري حالت q کې وي په انځور 13-15b کې ښودل شوی دی

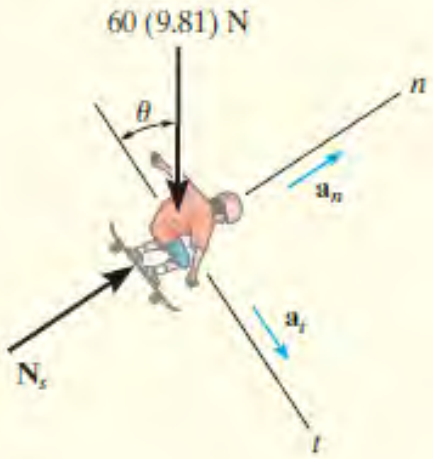
په $q = 60°$ کې درې نامعلومه شتون لري N_s ، a_t، او a_n (یا v).

د حرکت معادلې (Equations of Motion).

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_s - [60(9.81)\ \text{N}] \sin\theta = (60\ \text{kg})\left(\frac{v^2}{4\ \text{m}}\right) \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \quad [60(9.81)\ \text{N}] \cos\theta = (60\ \text{kg})\, a_t$$

$$a_t = 9.81 \cos\theta$$

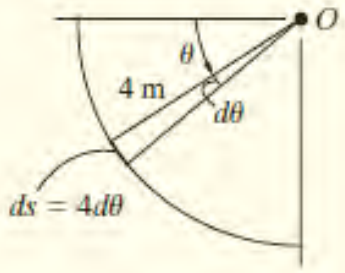


(b)

کینمتیک (Kinematics).

له هغه ځایه چې د تیزوالي زیاتوالی a_t د q په ټراو څرګند شوی دی، معادله $v\,dv = a_t\,ds$ باید د سکیټ بورډر د سرعت معلومولو لپاره وکارول شي کله چې $q = 60°$ وي. د هندسي اړیکې $s = qr$ څخه چیرې،

چې $ds = rdq = (4\text{m})\,dq$ دی، انځور 13-15c ، او د لومړني حالت $v = 0$ په $q = 0°$ کې، مورِ لرو:



(c)

انځور 13-15

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{60°} 9.81\cos\theta(4\,d\theta)$$

$$\frac{v^2}{2}\bigg|_0^v = 39.24\sin\theta\bigg|_0^{60°}$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = 39.24(\sin 60° - 0)$$

$$v^2 = 67.97\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

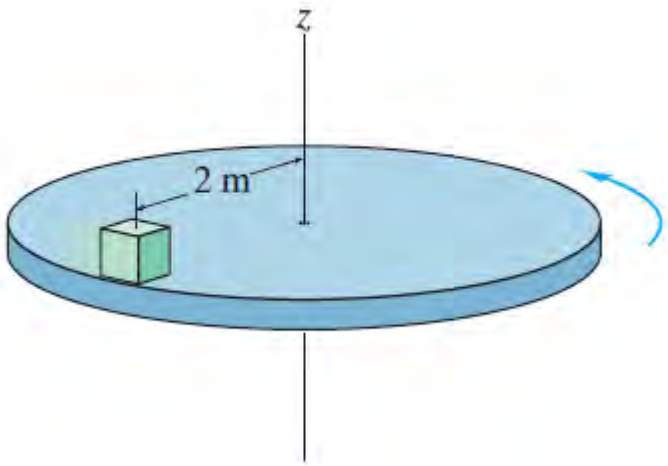
دا پيلي او $q = 60^0$ په معادله 1 کی ځاي په ځای کوو او دا لاندی په لاس راځي.

$$N_s = 1529.23\ \text{N} = 1.53\ \text{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

بنسټيزې پوښتنې

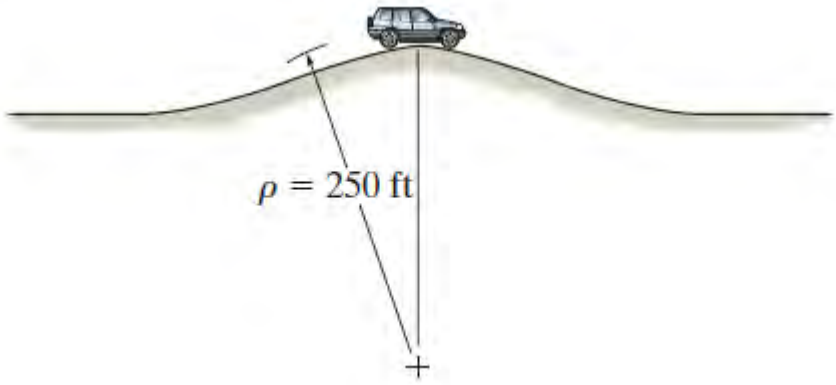
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 13-7. يو بلاک د پلټ فارم له مرکزه په 2 متره فاصله کې پروت دی. که د بلاک او پلټفارم ترمنځ د ستېټيکې اصتحکاک عدد $\mu_s = 0.3$ وي، نو د بلاک اعظمي تيزوالی معلوم کړئ چې تر څو دی په خپل ځای پاتې شي او ونه ښويږي. فرض کړئ چې د ډسک زاويه يې حرکت ورو ورو زياتېږي.



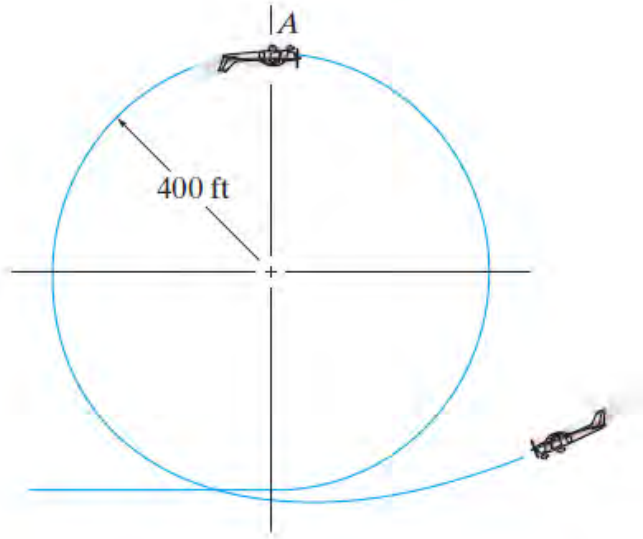
ب 13-7

ب 13-8. اعظمي سرعت معلوم کړئ چې جيپ يې کولی شي د غونډۍ له سر څخه په تېزۍ تېر شي او له سړک سره تړاو ونه بايلي.



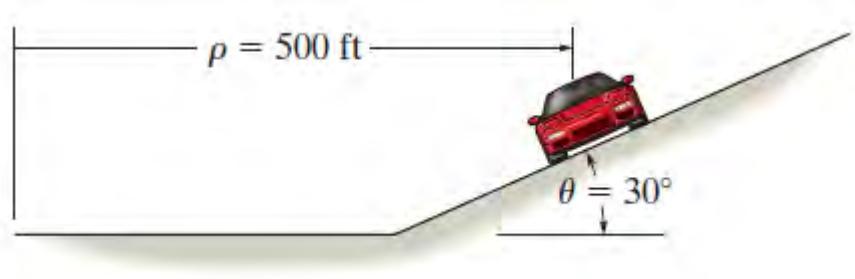
ب 13-8

ب 13-9. یو پایلوټ چې 150 پونډه وزن لري په ثابت تیزوالي 120 ft/s کې سفر کوي. معلومه کړئ چې په نقطه A کې، کله چې پیلوټ نسکور ناست وي، هغه په چوکۍ باندې څومره نارمل قوه واردوي. دا حلقه 400 فټه د انحنا شعاع لري.



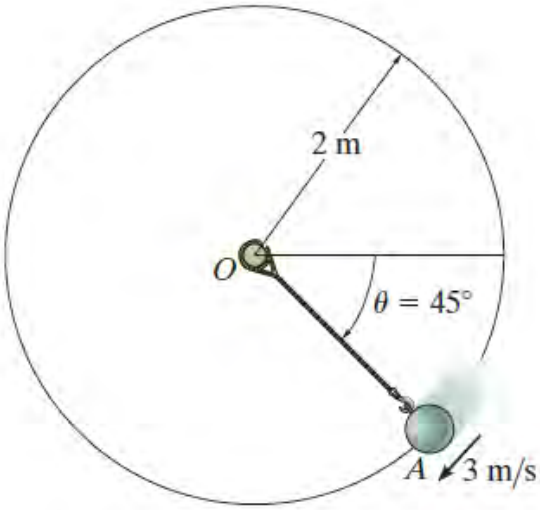
ب 13-9

ب 13-10. سپورتی موټر په 30^0 مایل سړک باندې سفر کوي چې د انحنا شعاع یې 500 ft ده. که د ټیرونو او سړک ترمنځ ستاتیکي اصتحکاک $\mu_s = 0.2$ وي، نو اعظمي تیزوالی د موټرمعلوم کړئ په کوم کې چې هیڅ بنویدل نه وي. د موټر اندازه له پامه وغورځوئ.



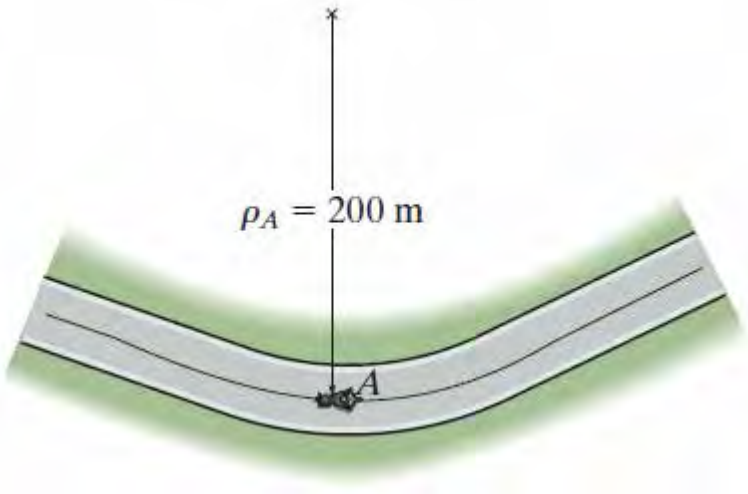
ب 13-10

ب 13-11. که 10 کیلو ګرامه توپ کله چې په عمودی حالت کی وی د 3 m/s سرعت لري، نو معلومه کړئ چې په موقعیت د A کې په تار کی څومره کشش راځی او د توپ په سرعت کې څومره زیاتوالی راغلی.



ب 13-11

ب 13-12. موټرسایکل 0.5 Mg کتله لري او د بدن اندازه یې د حساب وړ نه ده. دا په 15 m/s تیزوالی سره له نقطې A تېرېږي، اوتیزوال یی په ثابته کچه $1.5\ m/s^2$ سره زیاتېږي. په دې حالت کې د سړک لخوا په ټایرونو باندې د اصتکاکي محصله قوه معلومه کړئ.



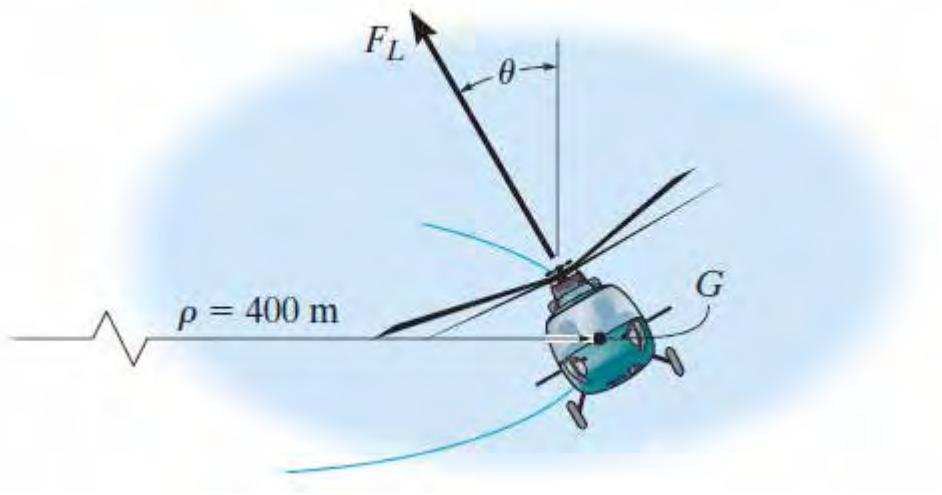
ب 13-12

پوښتنې

PROBLEMS

تول حلونه باید د بدن آزاد ډیګرام ولري.

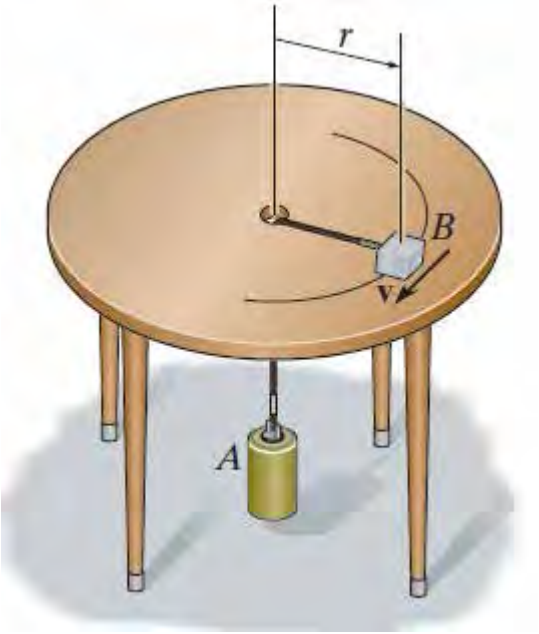
13-52*. دا لاندی 4 مېګاګرامه هلیکوپټر یو افقي ګرځونکي حرکت ترسره کوي چې د انحنا شعاع یې $r = 400$ m مترە دی. هغه د پورته کیدوقوه F_L چې اړتیا ده او هم د کوربډو (banking) زاویه θ معلوم کړئ ، په داسې حالت کې چې هلیکوپټر په افقي توګه اوپه ثابت سرعت $v = 40$ m/s سره الوتنه کوي. دا هم وښیی چې زاویه θ زیاتیږي که v زیات شي، او همدارنګه θ معلومه کړئ کله چې $v = 60$ m/s وي.



پوښتنه 13-52

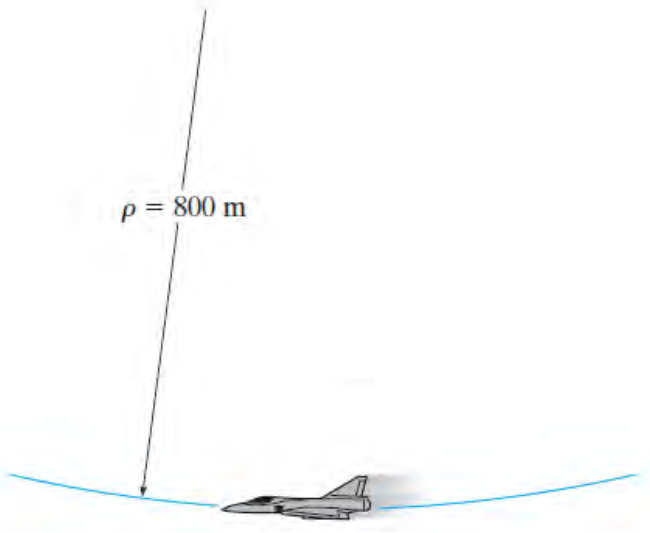
13-53. د 2 کیلو ګرامه بلاک B او 15 کیلو ګرامه سلنډر A په یوه سپک تار سره وصل شوي چې د اوارمیز په مرکز کې له یوې سورۍ څخه تېرېږي. که بلاک ته د $v = 10$ m/s تیزوالي ورکړل شي، نو د هغه دائروي مسیر شعاع r معلومه کړئ په کوم چې بلاک حرکت کوي.

13-54. د 2 کیلو ګرامه بلاک B او 15 کیلو ګرامه سلنډر A په یوه سپک تار سره وصل شوي چې د اوار میز په مرکز کې له یوې سورۍ څخه تېرېږي. که بلاک په دایروی لاره چې شعاع یې $r = 1.5$ m حرکت کړي ، د بلاک سرعت معلوم کړئ.



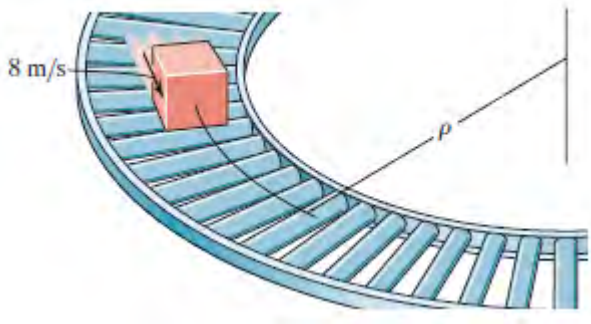
پوښتنی 13-53/13-54

13-55. اعظمي ثابت تيزوالی د پيلوټ معلوم کړئ په کوم کې چې پيلوټ د عمودي منحني چې شعاع يې $r = 800$ m ده، په اوږدوالی سفر کوی، ترڅواعظمي تعجيل $a_n = 8g = 78.5$ m/s^2 ته ورسيږی. که د پيلوټ کتله 70 kg وی، نو هغه نارمل قوه معلومه کړئ چې هغه يی په دې سرعت کې په چوکۍ باندې واردوي کله چې طياره په خپل تر ټولو ټيټه نقطه کې وي.



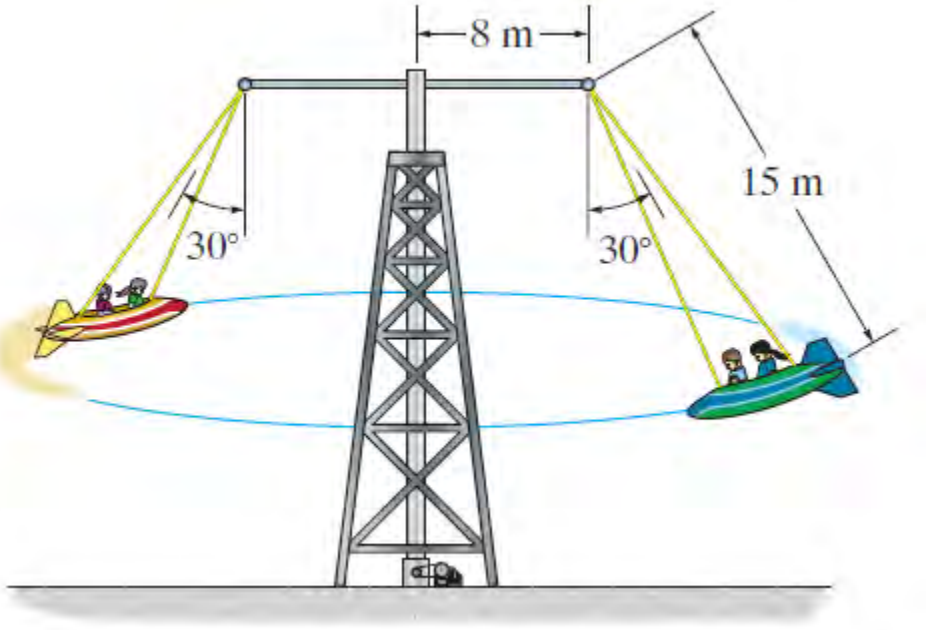
پوښتنه 13-55

*13-56. کارټنونه چې 5 کیلو ګرامه کتله لري اړین دي چې په اسمبلۍ کربنه په ثابت تیزوالي $v = 8$ m/s کې حرکت وکړي. د کښته کېدو لپاره د کنویر تر ټولو کوچنۍ د انحنا شعاع r معلومه کړئ تر څو چې کارټنونه له کنویر تسمې نه ونه ښویږي. د سټیټیک او کینټیک استحکاک د کارټن او کنویر تسمې تر منځ $\mu_s = 0.7$ او $\mu_k = 0.5$ ، په ترتیب سر دی.



پوښتنه 13-56

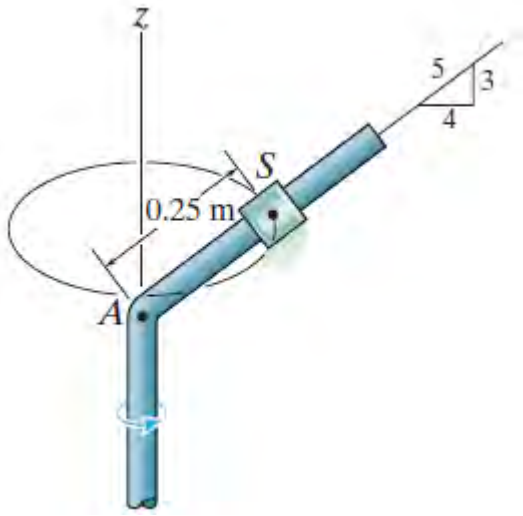
13-57. د ساعتتیرۍ په پارک کې د سورلۍ موټرو ثابت تیزوالۍ محاسبه کړئ ، په هغه وخت کې چې کیبلونه له عمودي حالت نه 30 درجې زاویه لري. هر موټر د خپلو سپرلیو سره 550 کیلو ګرامه کتله لري. همدارنګه، د هغو قواوو اجزاوی چې یو 60 کیلو ګرامه سورلۍ یې د حرکت په وخت کې په موټر د n ، t ، او z سمتونو کې واردوی، معلوم کړئ.



پوښتنه 13-57

13-58 2 کیلو ګرامه ګوټک S (spool) په یوه مایل راډ چې ازاد پرې حرکت کولی شی په یوه ځای کې ایښودل شوي چې د سټیټیک اصتکاک یې $\mu_s = 0.2$ دي. که د ګوټک موقعیت له Aځخه په 0.25 متره فاصله کې وي، نو د ګوټک هغه لږ تر لږه ثابت تیزوالی معلوم کړئ چې ګوټک په راډ ښکته وه نه ښویږی.

13-59. **2** کیلو ګرامه ګوټک S (spool) په یوه مایل راډ چې ازاد پرې حرکت کولی شی په یوه ځای کې ایښودل شوي چې د سټیټیک اصتکاک یې $\mu_s = 0.2$. که د ګوټک موقعیت له A ځخه په 0.25 متره فاصله کې وي، نو د ګوټک هغه اعظمی ثابت تیزوالی معلوم کړئ چې ګوټک په راډ پورته وه نه ښویږي.

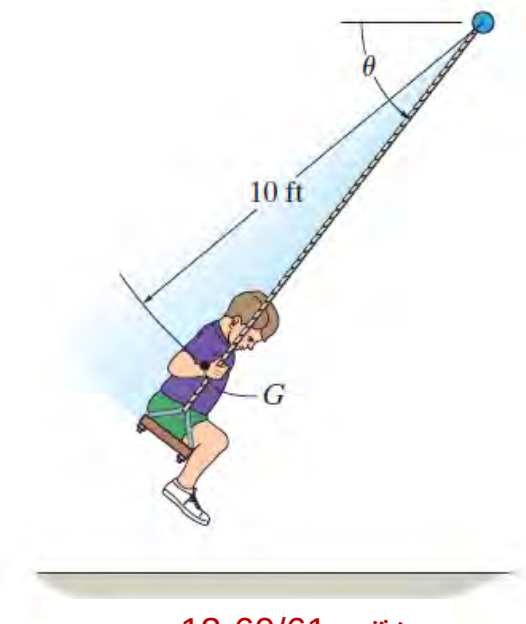


پوښتنې 13-58/13-59

.

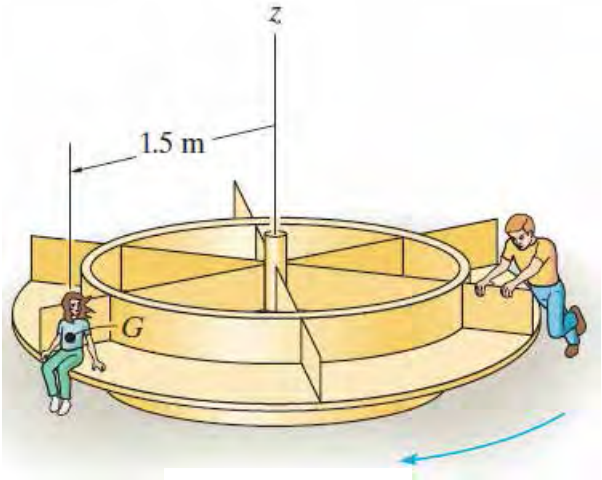
13-60*. په هغه وخت کې چې زاویه $\theta = 60°$ وي، د هلک د کتلې G د ثقل مرکز سرعت په لاندی لور $v_G = 15$ ft/s وي. د هغه د تیزوالي د زیاتوالي کچه او د زانګو د هر یوه د د وو تارونو کشش په دې وخت کې معلوم کړئ. هلک 60 پونډه وزن لري. د هغه اندازه او د څوکې او تارونو کتله له پامه وغورځوئ.

13-61. په هغه وخت کې چې زاویه $\theta = 60°$ وي، د هلک د کتلې G د ثقل مرکز لنډمهاله په استراحت کې دی. د هغه تیزوالي او د زانګود هر یو د وو تارونوکشش معلوم کړئ کله چې $\theta = 90°$ وي. هلک 60 پونډه وزن لري. د هغه اندازه او د څوکۍ او تارونو کتله له پامه وغورځوئ.



پوښتنې 13-60/61

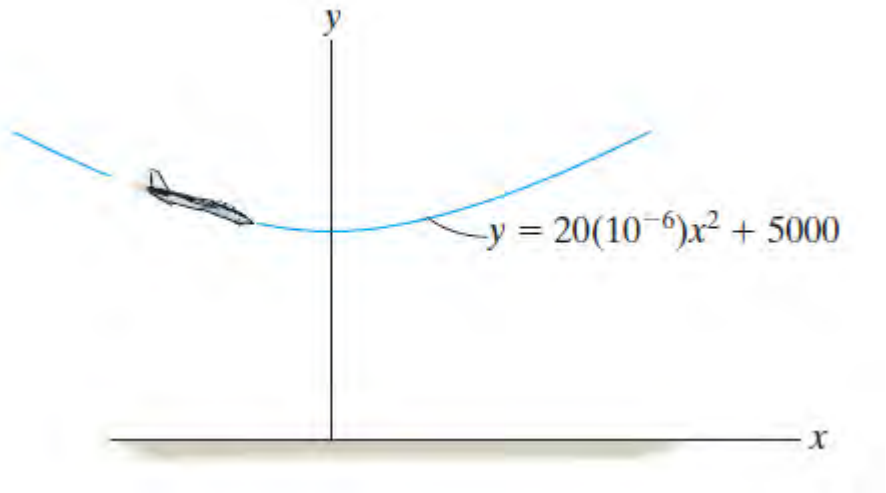
13-62. یوه نجلۍ چې 25 کیلو ګرامه کتله لري د مېړې ګو روند (merry-go-round) په څنډه کې ناسته ده چې د هغې د ثقل مرکز G فاصله د ګردش له محور څخه 1.5 متره ده. که د پلیټفارم زاویه وی حرکت ورو ورو زیات شي تر څو د نجلۍ مماسی برخه د تعجیل له پامه وغورځول شي، نو اعظمي تیزوالی د میرۍ ګو روند معلوم کړئ چې نجلۍ ونه ښویږي. د نجلۍ او مېړې ګو روند ترمنځ د سټیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ دی.



پوښتنه 13-62

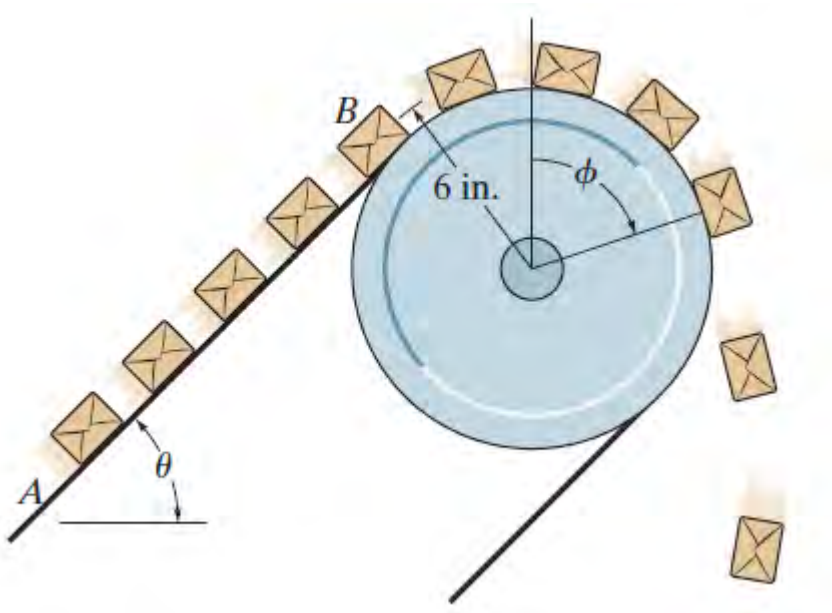
13-63. الوتکه په یوه ثابت تیزوالی $v = 800$ ft/s په یوه منحنی کرښه چې معادله یې $y = 20(10^{-6})x^2 + 5000$ ده، الوتنه کوی، چیرته چې x او y په فټو اندازه کیږي. که پیلوټ 180 پونډه وزن ولري، نو هغه نارمل او مماسی اجزاوی د قووی چې څوکۍ یې په پیلوټ باندې واردوي معلومی کړئ، کله چې طیاره په خپل تر ټولو ټیټه نقطه کې وي.

*13-64. جیټ الوتکه په یوه ثابت تیزوالی $v = 1000$ ft/s په یوه منحنی کرښه چې معادله یې $y = 20(10^{-6})x^2 + 5000$ ده، الوتنه کوی، چیرته چې x او y په فټو اندازه کیږي. که پیلوټ 180 پونډه وزن ولري، نو هغه نارمل او مماسی اجزاوی د قووی چې څوکۍ یې په پیلوټ باندې واردوي معلومی کړئ، کله چې $y = 10,000$ ft وي.



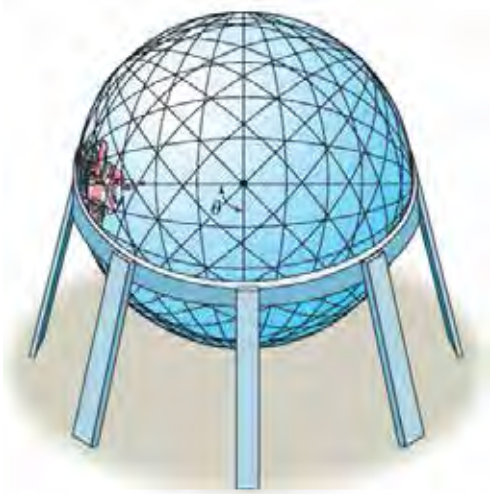
پوښتنې 13-63/64

13-65. په لاندی انځور کی د 5 پونډو کڅوړې د کنویر تسمه په سطحه سفر کوي. که تسمه له استراحت څخه پیل وکړي او د 2 ثانیو په موده کې سرعت یې 2 ft/s ته زیات شي، نو اعظمي زاویه θ معلومه کړئ چې هیڅ یوه کڅوړه د تسمی په مایله سطحه AB کې ونه ښویږي. د تسمی او کڅوړې ترمنځ د سټیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ دی. په کومه زاویه ϕ کې کڅوړې په لومړي ځل د تسمی له سطحې څخه ښویږي کله چې تسمه په ثابت تیزوالي 2 ft/s^2 کې حرکت کوي؟ د کڅوړو اندازه له پامه غورځوئ.



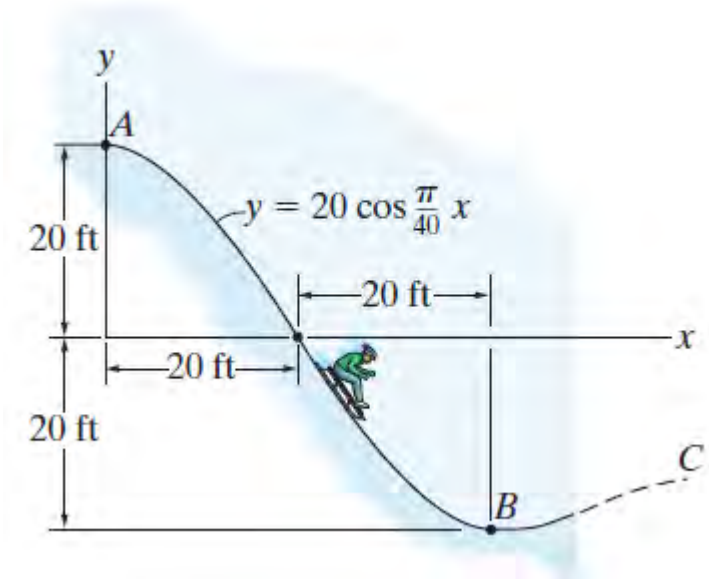
پوښتنه 13-65

13-66. یو موټر سایکل چلونکی په سرکس کې خپل موټر سایکل د یوی خالي کری (sphere) په داخلی دیوالونو کې چلوي. که د موټر سایکل د ټایرونو او کری ترمنځ د سټیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.4$ وي، که هغه په $\theta=90°$ کې د دیوال سره خپل موټرسایکل وچلوي نو لږ تر لږه سرعت یې معلوم کړئ. د موټر سایکل او چلونکي ټوله کتله 250 کیلو ګرامه ده، او د انحنا شعاع تر مرکز ثقل پورې $r = 20$ m متره دی. د محاسبې لپاره د موټر سایکل اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 13-66

13-67. یوه ښویدونکي تخته (slid) او سور یی چې 30 پونډه او 150 پونډه وزن په ترتیب سره لري، په یوه ښوی میلان کي ښکته کیږي چې شکل یې د لاندی انځور کی ښودل شوی. که سورد تختې څنډی وه نه نیسي، نو هغه نارمل قوه معلومه کړئ چې سوریې په تخته باندې واردوي کله چې تخته (a) په B نقطه کې وي، چیری چې سرعت یی 15 ft/s دي او (b) په یوه اختیاری ټکي C په هوا کی.

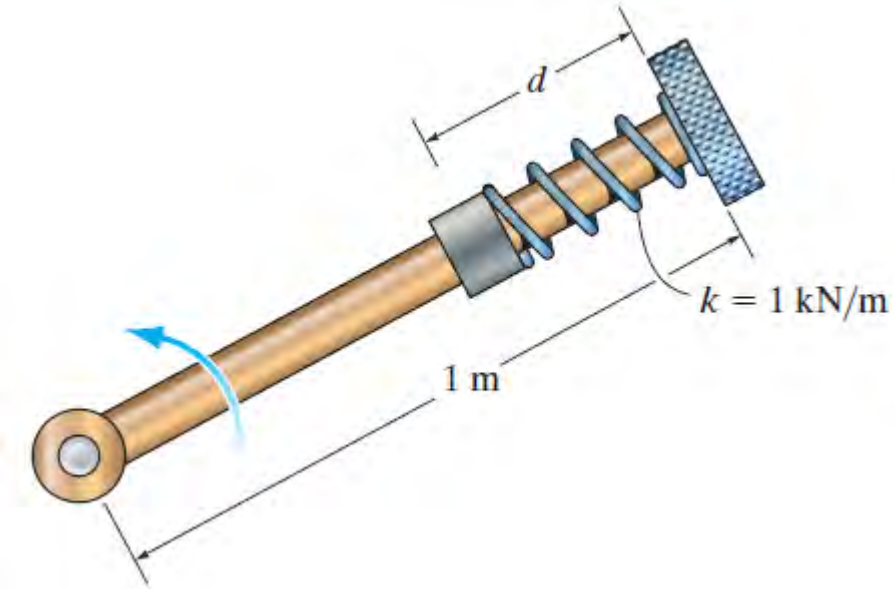


پوښتنه 13-67

*13-68. غړوندی(collar) چې 2 کیلوګرامه وزن لري، په آزاده توګه د ښویی میلی په اوږدو کې حرکت کړي، چې په افقي سطحه کې څرخیږي. له دې سره تړلې فنر چې (k = 1 kN/m) سختی لری، او کله چې پر فنر باندې کومه قوه نه وی، نه غزیدلی اوږدوالی یی d= 0.5m دی. هغه قوه معلوم کړئ چې فنر په په غړوندی واردوي کله چې غړوندی د راډ په اړوند په استراحت کې وي، مګر د راډ د څرخېدو له کبله چې په ثابت تیزوالي v = 6 m/s سره حرکت کوي.

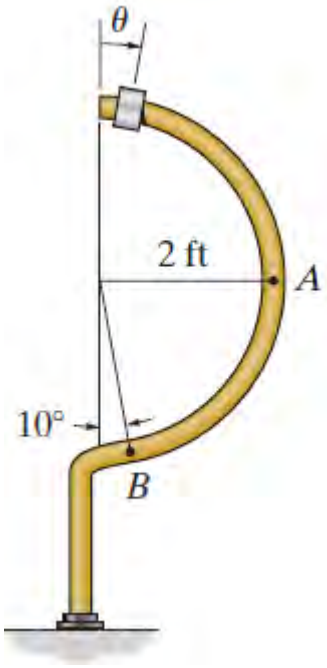
13-69. یو غړوندی چې 2 کیلوګرامه کتله لری، په آزاده توګه د ښویی میلی په اوږدو کې حرکت کوي اومیله په افقي سطحه کې څرخیږي. له دې سره تړلې فنر (k = 1 kN/m) سختی لري، او کله چې پر فنر باندې کومه قوه نه وي، نو د ده نه غزیدلی اوږدوالی d= 0.5m دی.

اوږدوالی d معلوم کړئ، که غړوندی د راډ په اړوند په استراحت کې وي، مګر د راډ له څرخېدونه چې په ثابت $v = 6$ m/s تیزوالي سره حرکت کوي.



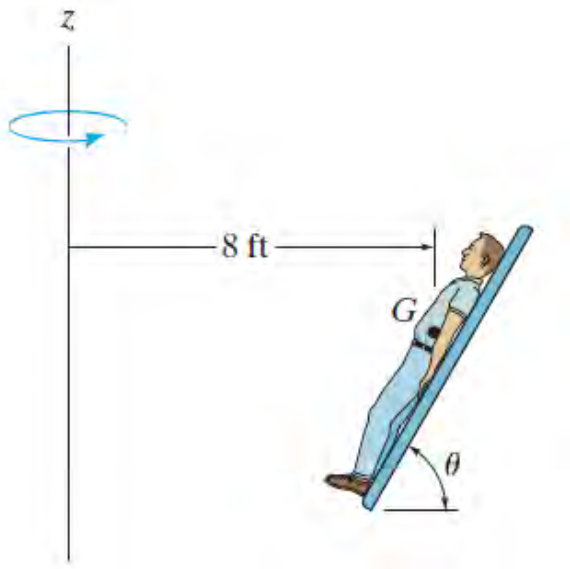
پوښتنی 13-68/69

13-70. یوکوچنی، 6 پونډه غړوندی په عمودي، دایردی بنویه میله بنوییږی. که غړوندی د استراحت نه پرېښودل شي کله چې $\theta = 10°$ وي، هغه عمودی قوه معلومه کړئ چې غړوندی یې په راډ باندې واردوي کله چې دی په A او B نقطو کې وي.



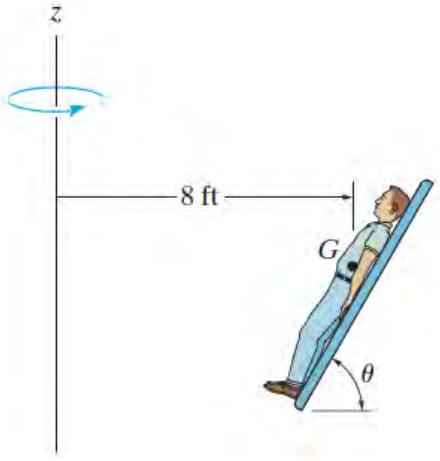
پوښتنه 13-70

13-71. په دی لاندی انځور کی ښودل شوي 150-lb سړی په یوه نرمه تخته باندې پروت دی چې د ستاتیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.5$ دی. هغه نارمل او اصتحکاکی قواوې چی نرمه تخته په سړی د z محورد ګرزیدو له املې واردوی معلوم کړئ . سړی په ثابت تیزوالی $v = 20$ ft/s سره حرکت کوي. د سړي اندازه له پامه وغورځوئ او $\theta = 60°$ واخلئ.



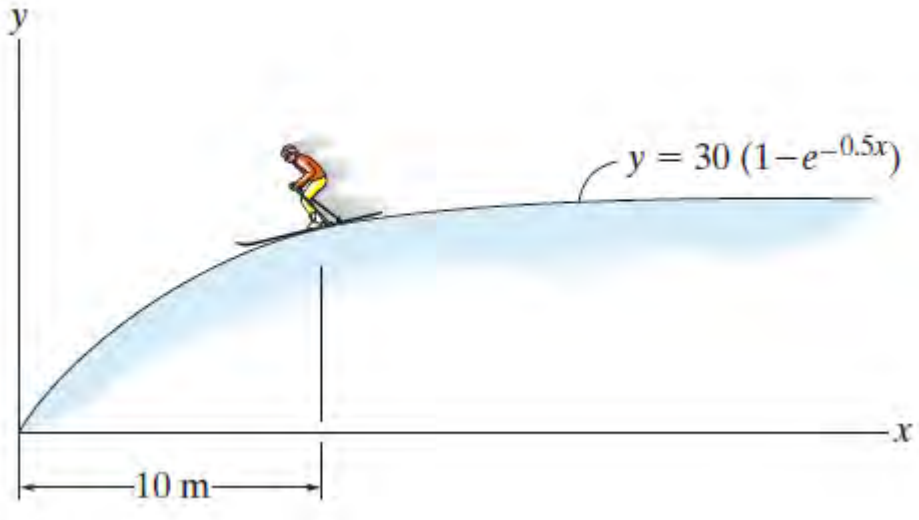
پوښتنه 13-71

*13-72. په دی لاندی انځور کی ښودل شوي 150-lb سړی په یوه نرمه تخته باندې پروت دی چې د ستاتیک اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.5$ دی. که دی د z په محورپه ثابت تیزوالي $v =$ 30 ft/s سره څرخیږي، هغه کوچنی زاویه θ د تختی معلومه کړئ په کوم وخت کې چی سړی له تختې څخه وښویږی.



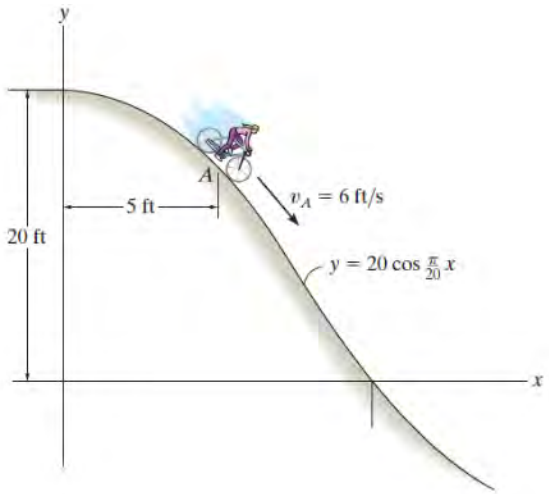
پوښتنه 13-72

13-73. يو 52-kg سکی کونکی په آزاده توګه د غونډۍ په ښکته لور په 4 متره په ثانیه تیزوالي سره کله چې $x = 10\text{m}$ وی ښکته ځي. په مځکه باندې نامل ریکشن او د تیزوالي زیاتوالي اندازه په راکړل شوی حالت کی معلوم کړئ. اصتحکاک او د سکي کونکی اندازه له پامه وغورځوئ.



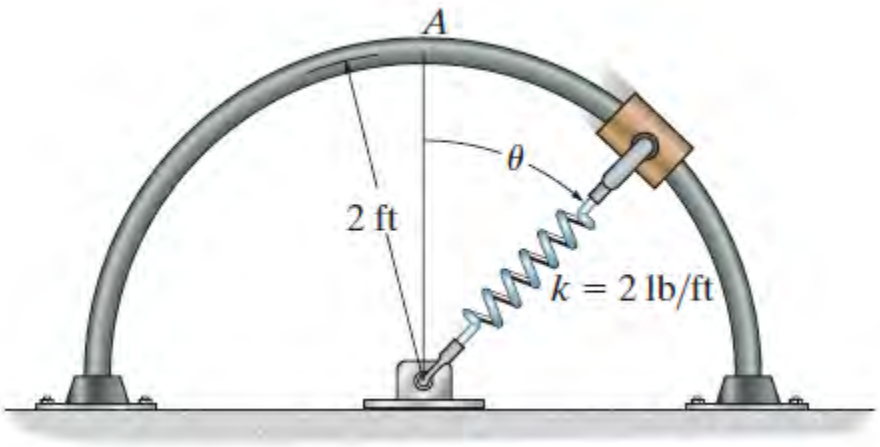
پوښتنه 13-73

13-74. که د بایسکل او سور یې 180 پونډه وزن ولري، او په $v_A = 6$ ft/s تیزوالی سره په آزاده توګه کوز ښکته ځي، هغه محصله نارمل قوه معلومه کړئ چې په بایسکل باندې په نقطه A کې وارد یږي. همدارنګه په دې نقطه کې د بایسکل سور تیزوالي زیاتوالی محاسبه کړئ. د باد اصتحکاک او د بایسکل او سور اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 13-74

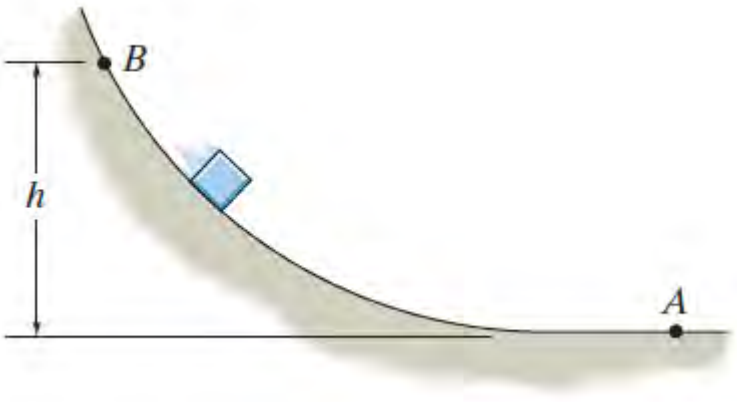
13-75. دا لاندی 2 پونډه غړوندی په A نقطه کې له ارام حالت نه پرېښودل شوې او په ښویه میله باندې ښکته ښوییږی. که ترڅو فنر (k =2 lb/ft) سختی ولري، د فنر نه غزیدونکی (unstretched) اوږدوالی معلوم کړئ کله چې غړوندی د میلی د پاس له برخی نه جدا نشی تر څو چې θ = 60° ته ورسیږي.



پوښتنه 13-75

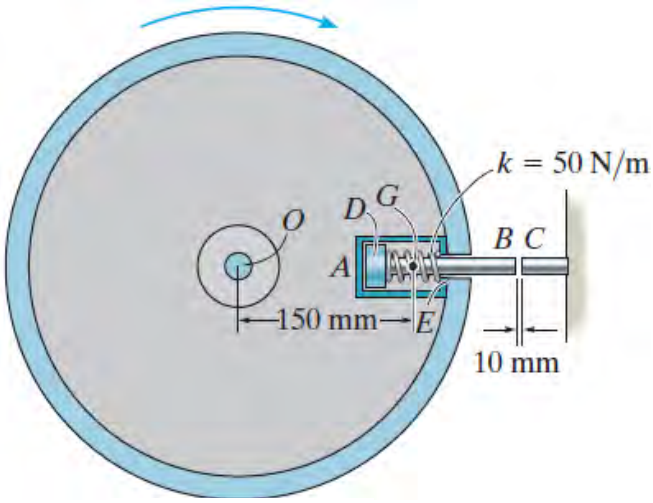
13-76*. دا ثابته کړئ چې که یوه بلاک په B نقطه کې له ساکن حالت څخه په یوه ښویه لار د اختیاری مسیرپه اوږدوالی پرېښودل شي، هغه سرعت چې دا په A نقطه کې ترلاسه کوي، د هغه سرعت سره برابر دی که بلاک د h فاصلی څخه په آزاده توګه خوشی شی. یعنې،

$$v=\sqrt{2gh}$$



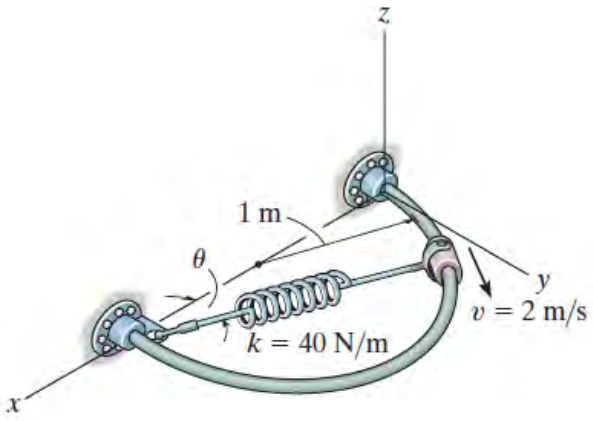
پوښتنه 13-76

13-77. د ډيسک د څرخېدو سرعت د 30 ګرامه ښوی تماس بازو AB لخوا کنټروليږي چې په ډيسک باندې د يوه فنر په وسيله ټرل شوي دي. کله چې ډيسک په آرام حالت کې وي، د بازو کتلی G مرکز له مرکز O (انځور وګوري) څخه 150 ملي متره ليرې وي، او په فنر کې ټاکل شوې غونجيدل (compression) 20 ملي متره دی. که د B او تماس C ترمنځ لومړنی چاوده (gap) 10 ملي متره وي، د بازو د مرکز G کتلی کنټرولی تيزوالی v_G معلوم کړئ چې په دې سره به چاوده يا خلا وټرل شي. ډيسک په افقي سطحه کې څرخيږي.د فنر سختی $k =$ 50N/m ده اوپايلې يی دتماس بازو په D اود ډيسک سره په E کی ټرل شوې دي.



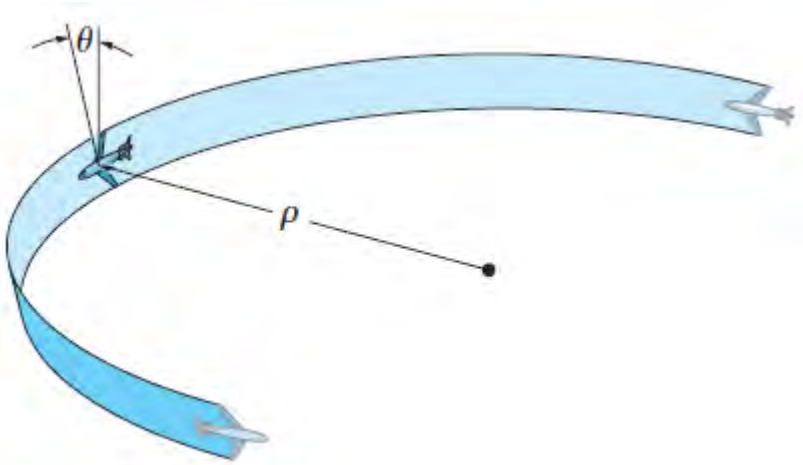
پوښتنه 13-77

13-78. غړوندی (کالر) 5 کيلوګرامه کتله لري او په يوه ښويه دايروی ميله چې په افقي سطحه کې پرته ده، خوځيږي. ټرلې فنر د 200 ملي متره نه غوڑيدلی اوږدوالی لري. که په $\theta = 30°$ کې غړوندی 2 متره په ثانيه کی تيزوالی ولري، د ميلی د نارمل قوی اندازه په غړوندی باندی او د غړوندی تعجيل معلوم کړئ.



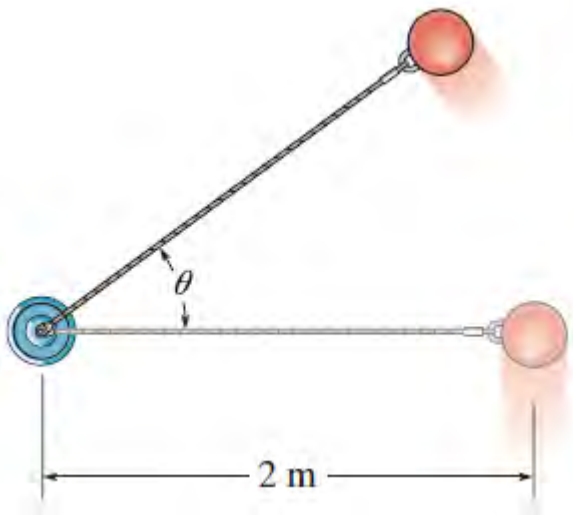
پوښتنه 13-78

13-79. الوتکه په ثابت تیزوالي $v = 50\text{m/s}$ سره یو افقي کرزیدا ترسره کوي. که الوتکه په $\theta = 15°$ کې کږه شوې وي، کله چې پیلوټ یوازې نارمل قوه د الوتکې په څوکۍ واردوی، د کرزیدو د منحني شعاع r معلومه کړئ. همدارنګه، هغه نارمل قوه معلوم کړئ چې څوکۍ یې په پیلوټ باندې واردوي که نومورې 70 کیلوګرامه کتله ولري.



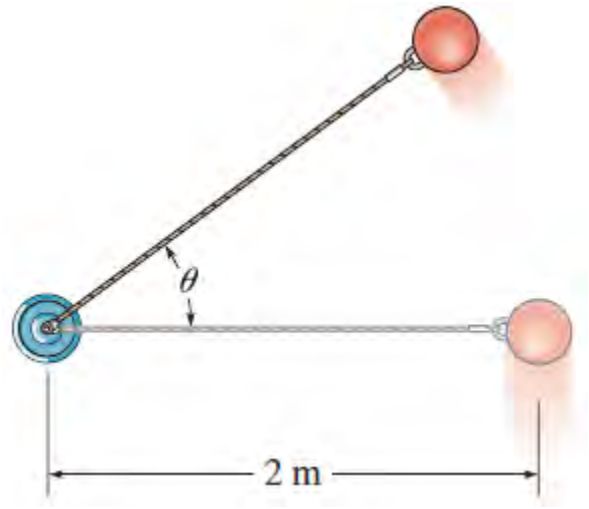
پوښتنه 13-79

*13-80. دا لاندې بښودل شوې 2 کیلوګرامه پینډولم توپ په عمودي سطحه کې د $q = 0°$ په وخت کې په 8 متره په ثانیه سرعت سره حرکت کوي. د تار لومړنۍ کشش او کله چې توپ $q =$ $30°$ ته رسیږي معلوم کړئ. د توپ اندازه له پامه وغورځوئ.



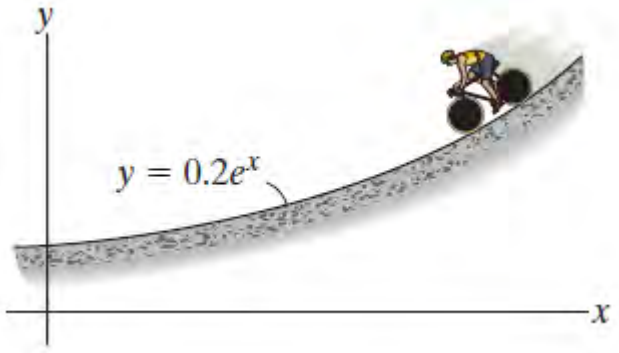
پوښتنه 13-80

13-81. دا لاندی ښودل شوی 2 کیلوګرامه پینډولم توپ په عمودي سطحه کې د $q = 0°$ په وخت کې په 6 متره په ثانیه سرعت سره حرکت کوي. هغه زاویه q معلومه کړئ په کوم وخت کې چې د تاری کشش صفر شي.



پوښتنه 13-81

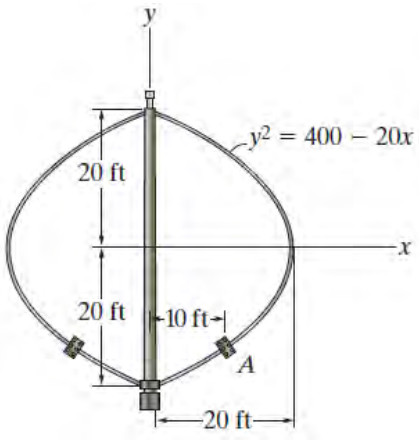
13-82. سایکل سور په آزاده توګه په غونډۍ ښکته په 15 متره په ثانیه تیزوالي سره په $y = 0.2$ m کی حرکت کوی. په سایکل باندې د نارمل ریکشن اندازه اود تیزوالي زیاتوالی په هغه لحظ کی چې ښودل شوي معلوم کړئ. سایکل او سور یې 80 کیلوګرامه کتله لری. اصتحکاک، د ټیرونو کتله، او د سایکل اندازه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 13-82

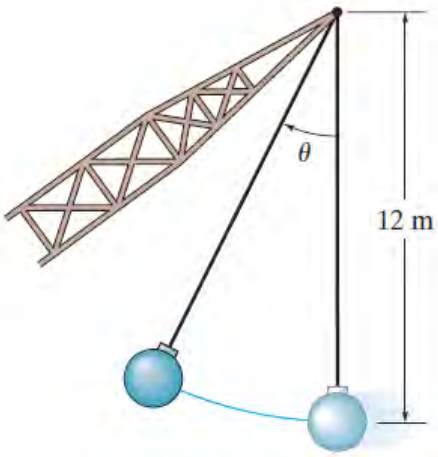
13-83. دا لاندی ښودل شوي د هګی ګډونکونکی "eggbeater" د سپویلرونو (spoilers) په کارولو سره له ځرخیدو درول کیږي. دا سپویلرونه 20 پونډه بلاکونو لري او په تیغونو کی یی بیرون ته خوځیږی کله چې تیغونه په ځرخیدو کی وی. کله چې سپویلرونه د تیغونو

په اوږدو خوځیږی دوی په تیغونو کې یو مقاومت (drag) رامنځته کوي چې د تیغونو د څرخېدو سرعت کموي او په پای کې یې ودروي. که ولیدل شی چې سپویلرونه نقطې A ته په تیغونو کې ورسی، د سپویلرو د اړتیا وړ لږ تر لږه تیزوالی معلوم کړئ چې په دې موقعیت کې پاتې شي، او همدارنګه هغه عمودی قوه چې دوی په دې موقعیت کې په تیغونو باندی واردوي معلومه کړئ.
تیغونه د یوه پارابولا په شکل دي لکه چې په انځور کې ښودل شوي. د سپویلرو او تیغونو ترمنځ د ساکن اصتحکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ دي.



پوښتنه 13-83

*13-84. دا لاندی 600 کیلو ګرامه ویجاړونکي توپ په کرین پورې په داسې یوه کیبل پورې ځړول شوی چې د کیبل کتله د پام وړ نه ده. که توپ په $v = 8$ m/s یزوالي سره په داسې حالت کې وي چې توپ په خپل ټیټ ځای کې وي، $q = 0°$. په دې حالت کې د کیبل کششی قوه معلومه کړئ. همدارنګه، هغه زاویه q معلومه کړئ چې توپ تر هغې پورې حرکت کوي مخکې له دې چې ودریږي.



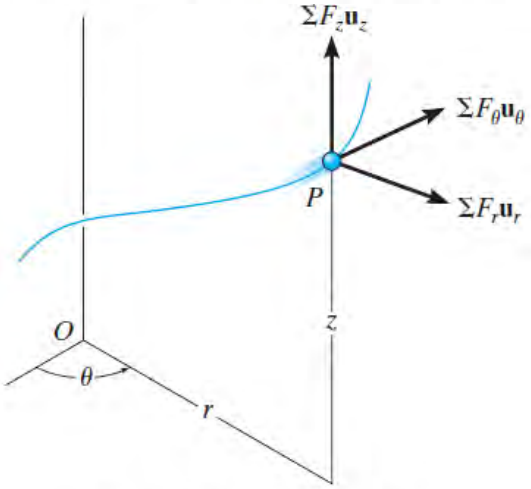
پوښتنه 13-84

13.6* د حرکت معادله : استوانه يي محورونه (EQUATIONS OF MOTION CYLINDRICAL COORDINATES)

کله چې په يوه ذره باندې ټول قواوې په سلنډريکي (يا استوانه يی) اجزاوو، يعنې د واحدو – وکتورنو په جهتونو $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$، او $\mathbf{u}_z$ و ويشل شی، لکه څنګه چې په انځور 13-16 کې ښودل شوي، د حرکت معادله په لاندې ډول ليکل کيدی شی:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r\mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta\mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z\mathbf{u}_z = ma_r\mathbf{u}_r + ma_\theta\mathbf{u}_\theta + ma_z\mathbf{u}_z$$



انځور 13-16

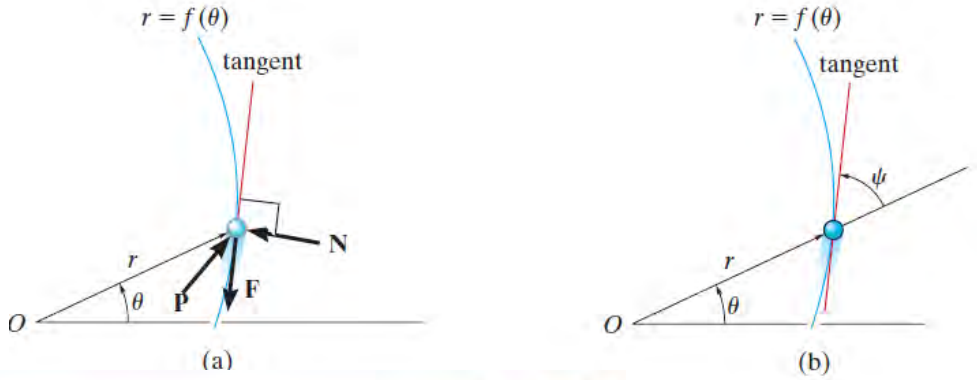
د دې معادلې د پوره کولو لپاره، موږ اړتيا لرو

$$\Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta$$
$$\Sigma F_z = ma_z \qquad (13\text{–}9)$$

که ذری حرکت یوازې په r - θ سطحه کې محدود وي، نو یوازې د 13-9 معادلې لومړي دوی برخې د حرکت د ټاکلو لپاره کارول کیږي.

مماسی او عمودي قواوې(Tangential and Normal Forces) . کله چې یوه ذره د یوه مسیر په اوږدو کې د حرکت لپاره محدوده وي، لکه څنګه چې په انځور 13-17aکې ښودل شوي، نو د ذ ری د آزاد-بدن ډیاګرام باید یوه عمودي قوه N ولري چې مسیر یې په ذره باندې وارده وی. همدارنګه، که چیرې مسیر زیږ وي، نو د اصتحکاک قوه **F** باید شامله شي. لکه څنګه چې ښودل شوي، دا قواوی د مسیرد تماس په کرښه عمودي او د مماس په اوږدوالی اود حرکت په مخالف لوري عمل کوی. کله چې مسیر د $r = f(\theta)$ په توګه توصیف شي، نو د **N** او **F** لارښوونې د

شعاعي محور په اړه د زاویه ψ ، انځور 13-17b په کارولو سره مشخص کیدای شي، چې د غځول شوی شعاعی خط او منحني ته مماس ترمنځ تعریف شوې ده.

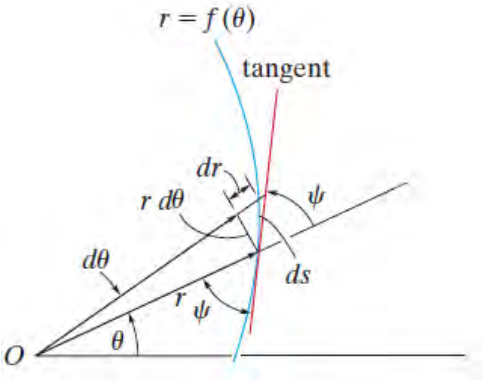


انځور 13-17



د دي مارپیچ په اوږدو کې د رولر کوسټر حرکت د استوانه يي محورونو په کارولو سره مطالعه کیدای شي.

دا زاويه د دې په پام کې نيولو سره ترلاسه کيدای شي چې کله ذره د مسير په اوږدو کې يو فاصله ds سره بې ځايه شي، لکه څنګه چې په انځور 13-17c کې ښودل شوي، بې ځايه شوي برخه په شعايي لاره dr او بې ځايه شوی برخه په عرضي لار کې $rd\theta$ دي. ځکه چې دا دوه برخې په خپلمنځي ډول يو پر بل عمود دي ،او زاويه ψ د $\psi = rd\theta/dr$ څخه ترلاسه کيدای شي،



(c)

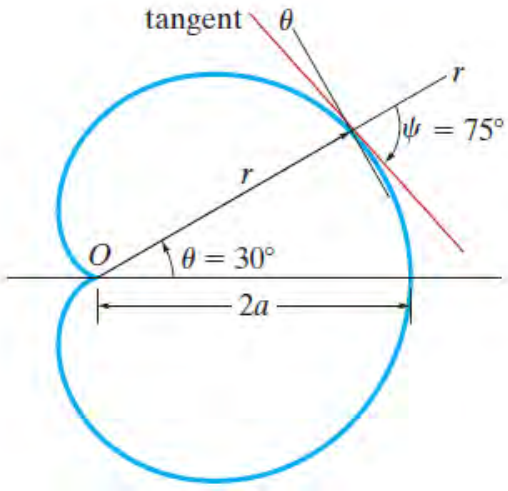
$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \qquad (13\text{–}10)$$

انځور 13-17 (ادامه)

که ψ د يوې مثبتې اندازې په توګه محاسبه شي، نو دا له غځولشوی شعاع خط څخه مماس ته د ساعت په مخالف لوري يا د θ په مثبت لوري کې اندازه کيږي، لکه څنګه چې په انځور 13-17c کې ښودل شوي. که دا منفي وي، نو دا د مثبت θ په مقابل لوري کې اندازه کيږي. د بيلګې په توګه، د کارډيويد (cardioid) منحني په پام کې ونيسئ $r = a(1+\cos\theta)$، لکه څنګه چې په انځور 13-18 کې ښودل شوي. څرنګه چې $dr/d\theta = -a\sin\theta$ ، نو کله چې $\theta = 30°$

$$\tan\psi = a(1+\cos 30°)/(-a\sin 30°) = -3.732$$

يا $\psi = -75°$ چې د ساعت په لوري کې اندازه کيږي، د θ+ په مقابل کې، لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوي.



انځور 13-18

د تحلیل کړنلاره

استوانه يي يا قطبي محورونه د يوې پوښتنې د تحلیل لپاره مناسب انتخاب دی چې په هغې کې د زاویوی حرکت په اړه د شعاع r کربنی معلومات ورکړل شوي وی، یا په هغه حالاتوکې چې لاره یا مسیر په آسانه توګه د دې محورونو په اصطلاحاتو کې بنودل کیدی شی.

د جسم آزاد ډایګرام (Free-Body Diagram)

- د r ، θ ، z انرشیایي محوري سیستم ټاکل او د ذری آزاد- بدن ډیاګرام رسم کړئ.
- فرض کړئ چې a_r، a_θ a_z، د r ، θ ، z په مثبتو لوریو عمل کوی که چیرې دا نا معلوم وي.
- په پوښتنه کې نامعلوم وپیژنئ.

د حرکت معادلې (Equations of Motion) .

- د حرکت معادلې وکاروئ، معادله 13-9 .

کینماتیکس (Kinematics) .

- د برخې 12.8 طریقې وکاروئ تر څو r او د وخت مشتقونه $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$، $\dot{\theta}$ ، $\ddot{\theta}$، $\ddot{z}$ و ټاکئ، او بیا د تعجیل اجزاوی محاسبه کړئ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$.
- کله چې د $r = f(\theta)$ د وخت مشتقات اخلی، دا خورا مهمه ده چې زنجیر قانون وکاروئ، کوم چې په ضمیمه C کې بحث شوی دی.

مثالونه

مثال 13.10

په دی لاندی انځور 13-19a کی ښودل شوي 0.5 کیلو ګرامه دوه ګوني غړوندی په لاس ABاو دایروی لارښود میله باندی په آزاده توګه حرکت کولی شي. که چیرې لاس په ثابت زوایوی سرعت $\dot{\theta} = 3$ rad/s سره وګرځي، نو کله چې $\theta = 45°$ ، وی هغه قوه چی لاس په غړوندی واردوی معلومه کړی. حرکت په افقي سطحه کې دی.

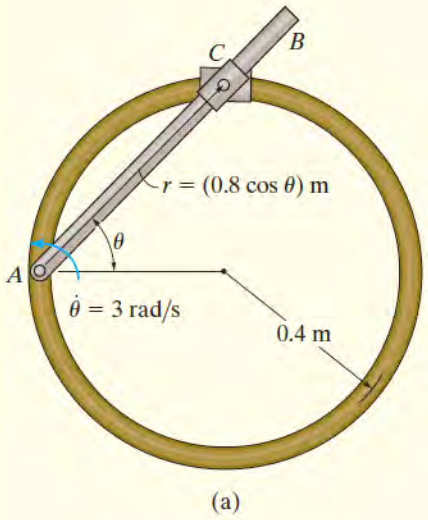
حل:

د بدن آزاد- ډیاګرام (Free-Body Diagram). یوازې د لارښود د عمودی ریکشن N_C او د لاس AB قوه F په غړوندی عمل کوي، لکه څنګه چې په انځور 13-19b کې ښودل شوي. دلته F په لاس AB عمودي عمل کوي، چی د θ محور په لوري دی، پداسې حال کې چې N_C عمود په مماس د دایروی لارې عمل کوي کله چې $\theta = 45°$. د تعجیل اجزاوی $\mathbf{a}_r$ او $\mathbf{a}_\theta$ فرض کیږي چی د r او θ په مثبت لوریوعمل کړي . څلور مجهوله عبارت دی په F، N_C، a_r، a_θ .

د حرکت معادلې (Equations of Motion).

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r; \qquad -N_C \cos 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_r \qquad (1)$$

$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F - N_C \sin 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_\theta \qquad (2)$$



انځور 13-19

کینماتیکس (Kinematics). د زنجیر قانون په کارولو سره (ضمیمه C وګوری)، د r لومړی او دویم مهالیز مشتقات کله چې $\theta=45^\circ$، $\dot{\theta}=3$ rad/s ، $\ddot{\theta}=0$ عبارت دي په:

$$r = 0.8\cos\theta = 0.8\cos 45^\circ = 0.5657\ \text{m}$$

$$\dot{r} = -0.8\sin\theta\,\dot{\theta} = -0.8\sin 45^\circ(3) = -1.6971\ \text{m/s}$$

$$\ddot{r} = -0.8\left[\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

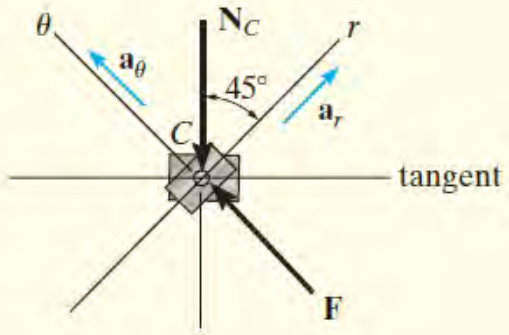
$$= -0.8[\sin 45^\circ(0) + \cos 45^\circ(3^2)] = -5.091\ \text{m/s}^2$$

مونږ لرو

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -5.091\ \text{m/s}^2 - (0.5657\ \text{m})(3\ \text{rad/s})^2 = -10.18\ \text{m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5657\ \text{m})(0) + 2(-1.6971\ \text{m/s})(3\ \text{rad/s})$$

$$= -10.18\ \text{m/s}^2$$



(b)

انځور 13-19 (ادامه)

دا پایلی په معادلو1 او 2 کی ځای په ځای کوو، په لاس راځي

$$N_C = 7.20\ \text{N}$$

$$F = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 13.11

په انځور 13-20a کې 2 کیلو ګرامه سلندر C لیدل کیږي چې پن P په مرکز کې لري او د OA لاس د جرې له لارې تیریږي. که چیرې لاس په عمودي سطحه کې د ثابتې اندازې $\dot{\theta}=0.5$ rad/s سره حرکت وکړي، نو کله چې $\theta = 60^\circ$ وي، هغه قوه چې په پن واردوي معلومه کړئ.

حل:

ولې د دې پوښتنې د حل لپاره د قطبي محورونه کارول ښه فکر دی؟

د جسم آزاد- ډیاګرام (Free-Body Diagram) : د سلندر لپاره د آزاد- بدن ډیاګرام په انځور 13-20b کې ښودل شوی. په پن باندې قوه $\mathbf{F}_P$ د لاس په جرې په عمودي توګه عمل کوي. لکه څنګه چې معمولا وي، a_r او a_θ فرض کیږي چې د r او θ په مثبت لوریو په ترتیب سره عمل کوي. څلور نامعلوم ځواکونه وپیژنئ.

د حرکت معادلې (Equations of Motion): د انځور 13-20b کې موجوده معلومات په کارولو سره، موږ لرو:

$$+\swarrow \Sigma F_r = ma_r; \quad 19.62 \sin\theta - N_C \sin\theta = 2a_r \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad 19.62 \cos\theta + F_P - N_C \cos\theta = 2a_\theta \qquad (2)$$

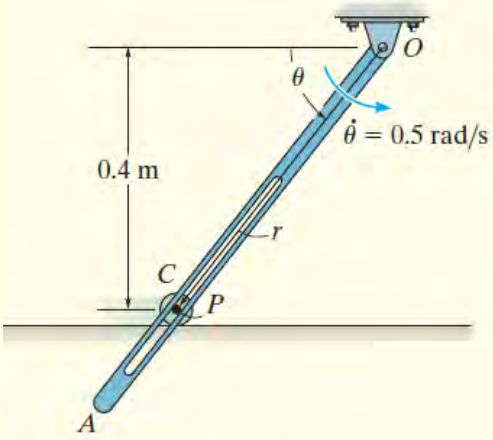
کینمټیکیس (Kinematics):

له انځور 13-20a څخه، r د θ سره د لاندې معادلې په واسطه اړیکه لري:

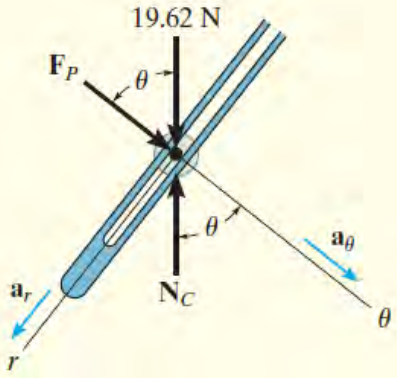
$$r = \frac{0.4}{\sin\theta} = 0.4 \csc\theta$$

څرنګه چې $d(\csc\theta) = -(\csc\theta \cot\theta)d\theta$ او $d(\cot\theta) = -(\csc^2\theta)d\theta$، نو r او اړین مهالیز مشتقات دا ډول کیږي

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.4 \csc\theta$$
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.4(\csc\theta \cot\theta)\dot{\theta}$$
$$= -0.2 \csc\theta \cot\theta$$
$$\ddot{r} = -0.2(-\csc\theta \cot\theta)(\dot{\theta}) \cot\theta - 0.2 \csc\theta(-\csc^2\theta)\dot{\theta}$$
$$= 0.1 \csc\theta(\cot^2\theta + \csc^2\theta)$$



(a)



(b)

13-20 انحور

په دی معادلو کی $q=60^0$ ځای په ځای کوو او لرو

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.462$$
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.133$$
$$\ddot{r} = 0.192$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

دا پایلی په 1 او 2 معادلو کی چی $q = 60^0$ وی ځای په ځای کوو، تر څو لاندی حل پلاس راشی:

$$N_C = 19.4\ \text{N} \qquad F_P = -0.356\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

منفي نښه دا ښيي چې F_P په انځور 13-20b کې ښودل شوي لوري په خلاف عمل کوي

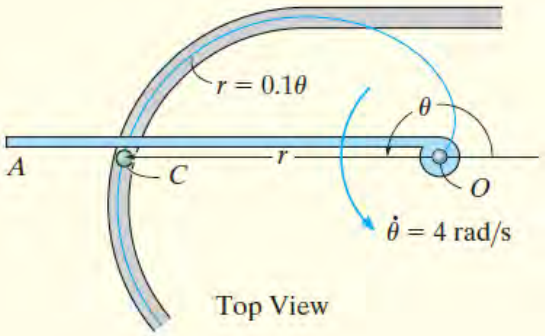
مثال 13.12

یو کوتې C چې د 0.5 کیلو ګرامه کتله لري، لکه څنګه چې په انځور 13-21a کی ښودل شوي، د یوی افقي جری په اوږدو کې حرکت کوي. جری مارپیچی شکل لري چې د معادلې $r = (0.1\theta)$ m له لارې تعریف کیدي شي، چیرې چې θ په ریډین اندازه ګیږي. که چیرې لاس OA په ثابته کچه $\dot{\theta}=4$ rad/s وګرزی، نو په هغه وخت کې یی چې $\theta = \pi$ rad وي، دلاس له خوا په کوتې باندی عمل کوی معلومه کړی. اصتحکاک او د کوتې اندازه په نظرکی مه نیسی.

حل:

د جسم آزاد- ډیاګرام (Free-Body Diagram) : چلونکې قوه $\mathbf{F}_C$ په لاس OA عمودي عمل کوي، پداسې حال کې چې د جری قوه $\mathbf{N}_C$ په کوتی د منحني پر مماس عمودی عمل کوي کله چې $\theta = \pi$ rad وي، لکه څنګه چې په انځور 13-21b کې ښودل شوي. لکه څنګه چې معمول دی، $\mathbf{a}_r$ او $\mathbf{a}_\theta$ فرض کیږي چې د *مثبت* r او θ په *لوریو* عمل کوي. له هغه ځایه چې لاره مشخصه ده، زاویه ψ ، چې غزیدلیی شعاع r د مماس سره جوړوي، انځور 13-21c کې د معادلې 13–10 له لارې ټاکل کیدی شي. موږ لرو $r = 0.1\theta$ ، نو $dr/d\theta = 0.1$ ، او له دې امله:

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0.1\theta}{0.1} = \theta$$

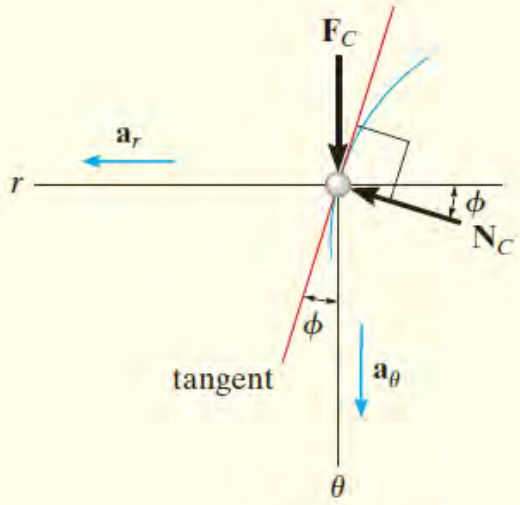


(a)

انځور 13-21

کله چې $\theta = \pi$ ، نو $\psi = \tan^{-1}(\pi) = 72.3°$ ، نو $f = 90° - \psi = 17.7°$ ، لکه څنګه چې په انځور 13-21c کې ښودل شوي. په انځور 13-21bکې څلور نامعلومه قواوې وپیژنئ.

د حرکت معادلې (Equations of Motion) : د $f = 17.7°$ او په انځور 13-21b کې ښودل شوي معلوماتو په کارولو سره، موږ لرو



(b)

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_r = ma_r; \qquad N_C \cos 17.7° = 0.5a_r \qquad (1)$$

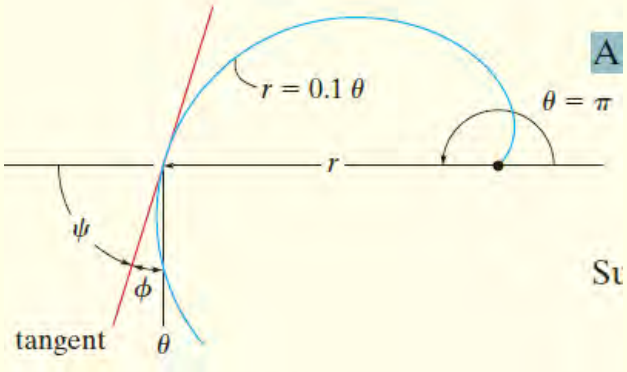
$$+\downarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F_C - N_C \sin 17.7° = 0.5a_\theta \qquad (2)$$

کینمټیکیس (Kinematics): د r او θ مهالیز مشتقات عبارت دي له:

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad r = 0.1\theta$$
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = 0.1\dot{\theta} = 0.1(4) = 0.4 \text{ m/s}$$
$$\ddot{r} = 0.1\ddot{\theta} = 0$$

په هغه لحظه کې چې $\theta = \pi$ rad ،

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.1(\pi)(4)^2 = -5.03 \text{ m/s}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0.4)(4) = 3.20 \text{ m/s}^2$$



(c)

انځور 13-21 (ادامه)

دا پایلی په 1 او 2 معادلو کی ځای په ځای کوو، په لاس راځي

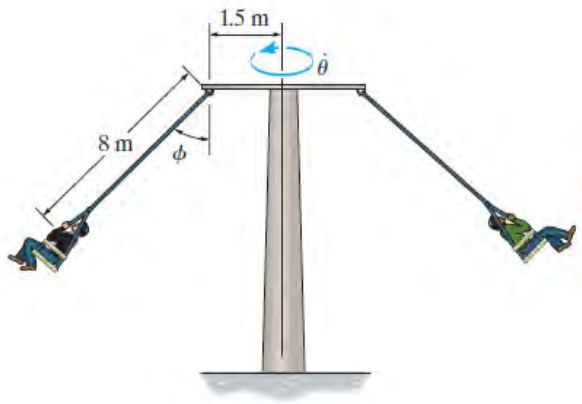
$$N_C = -2.64 \text{ N}$$
$$F_C = 0.800 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

د N_C لپاره منفي نښه څه معنی لري؟

بنسټیزې پوښتنې

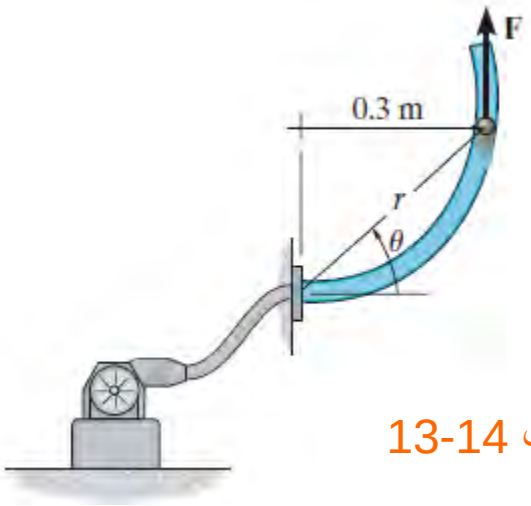
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 13-13. د پارک دساعت تیرید ود سورلی وسیلی دعمودی شافت ثابت زاویه یې سرعت $\dot{\theta}$ ومومئ کله چې $f = 45°$ وي. د کیبلونو او د سورو کتله په نظر کې مه نیسی.



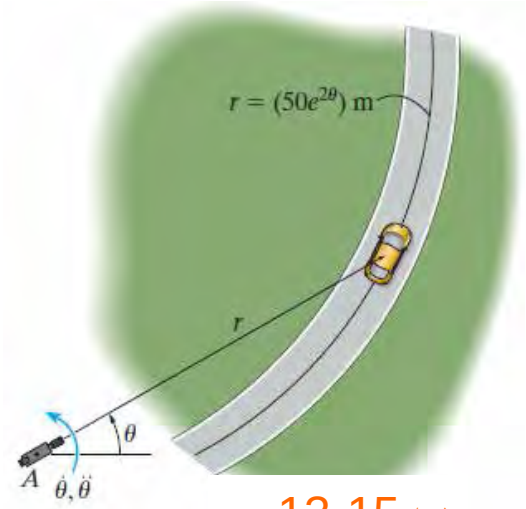
ب 13-13

ب 13-14. په د لاندی انځور کی 0.2 کیلو ګرامه توپ په بنودل شوي عمودی ګردي ټیوب کی پوه شوی دی چی د تیوب څیره په $r = (0.6 \sin q)$ m ډول تعریف شوی، چیرې چې q په ردیین کې وي. که $q = (\pi t^2)$ rad وي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د قوه **F** اندازه ومومئ چې په توپ باندې د پوه کونکی لخوا په $t = 0.5s$ ثانیو کې تطبیق کیږي.



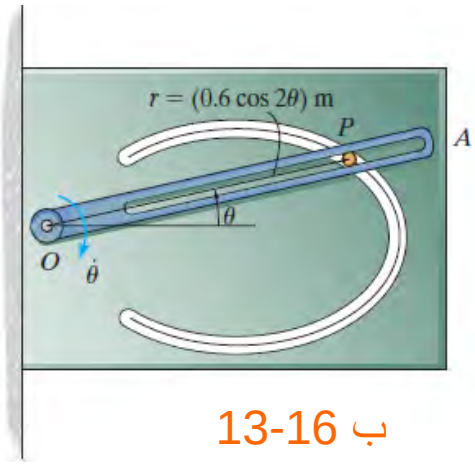
ب 13-14

ب 13-15. دا لاندی انځور کی ښودل شوی 2 Mg موټر د منحني لارې په اوږدو کې سفر کوي چې په $r = (50\ e^{2q})$m تعریف شوی، چیرې چې q په ریډین اندازه شویی. که یوه کامره په A کې ځای پر ځای شوې وي او په زاویې سرعت $\dot{\theta} = 0.05$ rad/s او زاویوی تعجیل $\ddot{\theta} = 0.01$ rad/s² سره وګرزی، په $q = \pi/6$ rad کې د ټایرونو او سړک تر منځ په دې وخت کې جوړه شویی د اصتحکاک قوه وموموئ.



ب 13-15

ب 13-16. د 0.2- کیلو ګرامه پن P د ښوی منحنی په جری کی حرکت کولو ته مجبوره شوې دی، کوم چې د حرکت لاره یې د لیمینسکیټ $r = (0.6 \cos 2q)$ m په توګه تعریف شوی. حرکت یې د لاس OA د جری لخوا کنټرولیږی، کوم چې د ثابت زاویې سرعت $\dot{\theta} =$ −3 rad/s د ساعت د حرکت په لورلري. هغه قوه چې لاس OA په پن P باندې وارده وی کله چې $q = 0°$ وي، وموموئ. حرکت په عمودی سطحه کې دی.



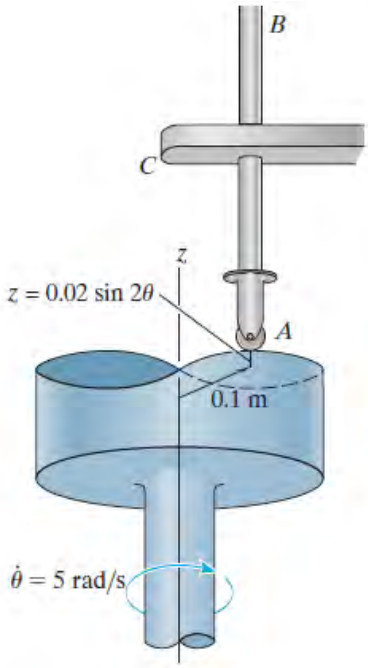
ب 13-16

پوښتنې

PROBLEMS

تول حلونه باید د بدن آزاد ډیګرام ولري.

13-85د ا لاندی ښودل شوي 2 کیلو ګرامه راډ AB پورته او ښکته حرکت کوي کله چې د هغې پای د کیم (cam) په ښویه کانټور شویي سطحه د کیم (cam) باندې ښویږي ، چیرې چې $r =$ 0.1 m او $z = (0.02 \sin 2q)$ m دي. که کیم په یو ثابت حرکت 5 rad/s وګرزی، نو د کیم په راډ باندې د وارد شویي اعظمي او اصغری قوی اندازه وموموئ.



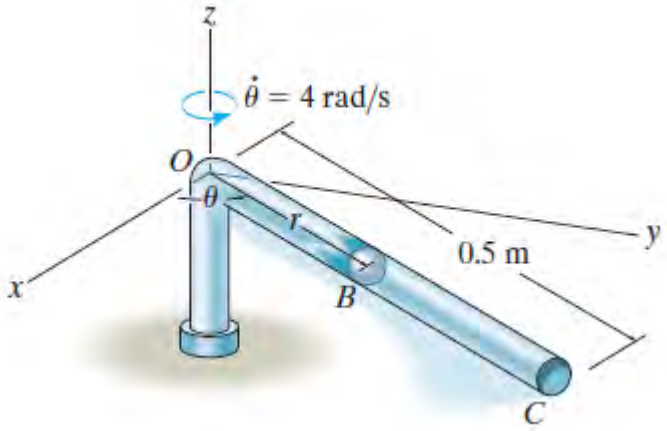
پوښتنه 13-85

13-86. په یو 5 کیلو ګرامه ذره باندې د قوی مجموعی اندازه وموموئ ، په هغه وخت کې چې t = 2 s ثانیې وي. او ذره په یوه افقي لاره حرکت کوي چې معادلې یې $r =(2t + 10)$ m متر او $q = (1.5t^2 - 6t)$ rad ده، چیرې چې t په ثانیو کې ده.

13-87. د یو 5 پونډه ذري د حرکت لاره یې په افقی سطحه کې په قطبي محورونو کې داسې ښودل شویی چې $r = (2t + 1)$ ft او $q = (0.5t^2 - t)$ rad ده، چیرې چې t په ثانیو کې ده. دغیر متوازن قوی اندازه وموموئ چې په ذره باندې په وخت t = 2 ثانیو کې پلیی کیږي.

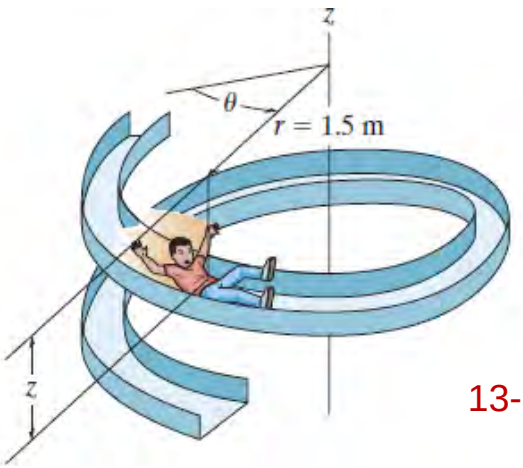
*13-88. دا لاندی تیوب په افقی سطحه کې په ثابته کچه $\dot{\theta} =$ rad/s کې ګرځي. که یو 0.2 کیلو ګرامه توپ B د O له مرکزځخه په ابتدايي شعاعي سرعت $\dot{r} =1.5$ m/s سره د تیوب له لارې بهر ته حرکت وکړي، د شعاعي او عرضي سرعت اجزاوې وموموئ په هغه وخت کې چې توپ په C کې بهرنی پای ته رسیږي، چیرې چې $r = 0.5$ m دی.

مرسته: وښیی چې د حرکت معادله د r په لوری $\ddot{r}-16r = 0$ ده. حل یې په $r = Ae^{-4t} + Be^{4t}$ ډول ده. ارزښت د انټیګریشن ثابت اعداد A او B پیدا کړئ، او وخت t پیدا کړئ کله چې $r = 0.5$m وي. بیا v_r او v_q وټاکئ.



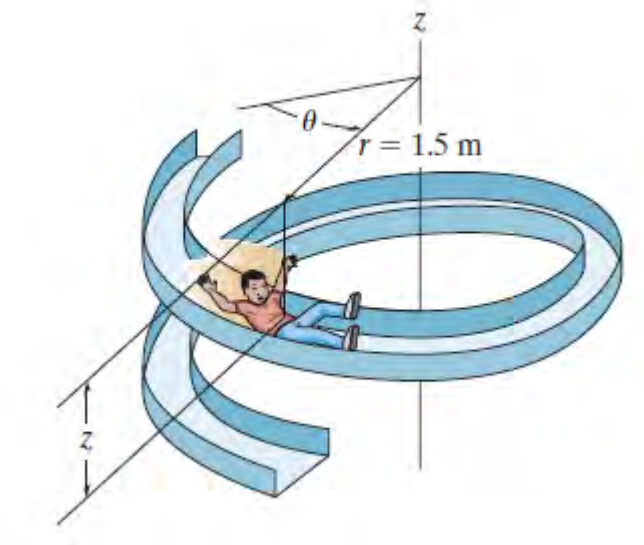
پوښتنه 13-88

13-89. یو 40 کیلو ګرامه هلک په یو مارپیچی سلایډ کې په یوه ثابت تیزوالی سره په ښکته لور ښویږي داسې چې د هغه موقعیت، چې د پورتنۍ برخی د مارپیچی څخه اندازه کیږي، اجزاوې یې عبارت دی په $r = 1.5$ m ، $q=(0.7t)$ rad، او $z = (-0.5t)$ m ، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د Fr ، Fq ، او Fz اجزاوې پیدا کړئ چې سلایډ یی په هلک باندې پلیی کوي په وخت t=2 ثانیو کې. د هلک اندازه په پام کی مه نیسئ.



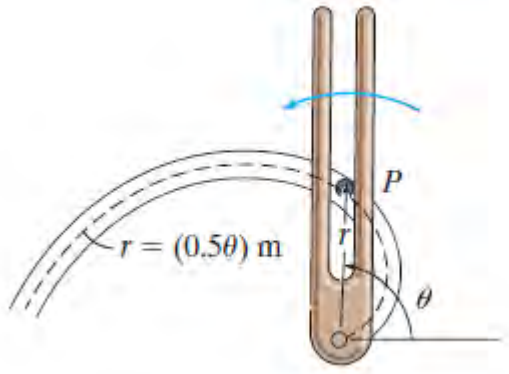
پوښتنه 13-89

13-90. یو 40 کیلو ګرامه هلک په ښوی مارپیچی سلایډ کې ښوییږی، چې z =- 2 m/s وي کله چې $q = 360°$ ګرزی او د هغه تیزوالی z = 2m/s وي. د r ، u ، z اجزاوې پیدا کړئ چې سلایډ ي په هلک باندې پدی وخت کی پلیی کوي. د هلک اندازه په پام کی مه نیسئ.



پوښتنه 13-90

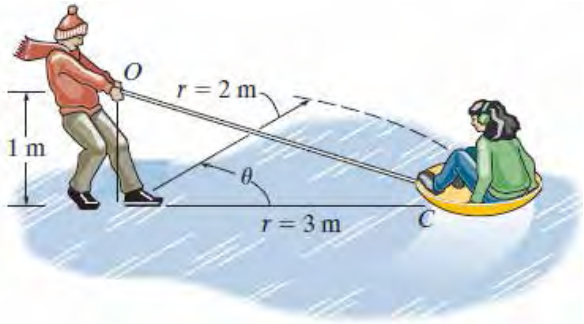
13-91. په یوه دوه شاخه میلیه کی یو 0.5 کیلو ګرامه ښوی میخ P مجبوره کیږي چې په عمودی جری لار r = (0.5 q) m، حرکت وکړي چیرې چې q په رډین کې دی. که زاویوی موقعیت د لاس $q = (\frac{\pi}{8}t^2)$ rad وي، چیرې چې t په ثانیو کې ده. په t = 2 s کې د راډ په میخ باندې پلیی شویې قوه او د جری عمودی قوه په میخ باندې پیدا کړئ. میخ په هر وخت کې یوازې د میلی او جری د یوې څنډې سره په هروخت کی تماس لري.



پوښتنه 13-91

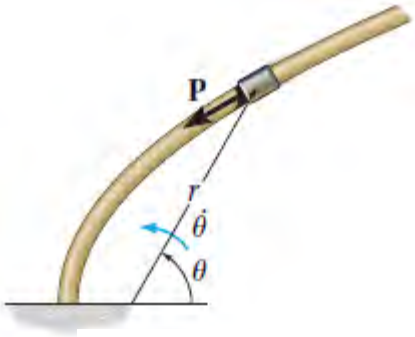
*13-92. یو هلک چې په یوه ځای کلک ولاړ دی، یوه نجلۍ په یو ګردي "قاب" یا ښویدو تخته باندې د دایروی مسیر په اوږدو کې څرخوي، چې شعاع یې $r_0 = 3$ m ده او زاویوي سرعت یې $\dot{\theta} = 0.1$ rad/s دی. که وصل شوی کیبل OC دننه خواته کش کیږی چې شعاعي محور r په ثابت تیزوالی $\dot{r} = -0.5$ m/s کې بدلیږي، په ښویدو تخته وارده شوي د کشش قوه په $\dot{r} = 2$ m کې پیدا کړئ. د ښویدو تخته او نجلۍ په مجموعي توګه 50 کیلو ګرامه کتله لري. د نجلۍ اوښویدو تختی اندازه او د ښویدو تختی او یخ ترمنځ د اصتحکاک اغیزې په نظراکی مه نیسئ.

مرسته: په q لوری کې د حرکت معادله داسې ښودل شوې چې $a_q = rq^{\cdot\cdot} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)\, d/dt\,(r^2q^{\cdot}) = 0$ ده. کله چې یې انټیګرال یې واخیستل شي، $r^2q^{\cdot} = C$ کیږي، چیرې چې ثابت عدد C د پوښتنې له معلوماتو څخه ټاکل کیږي.



پوښتنه 13-92

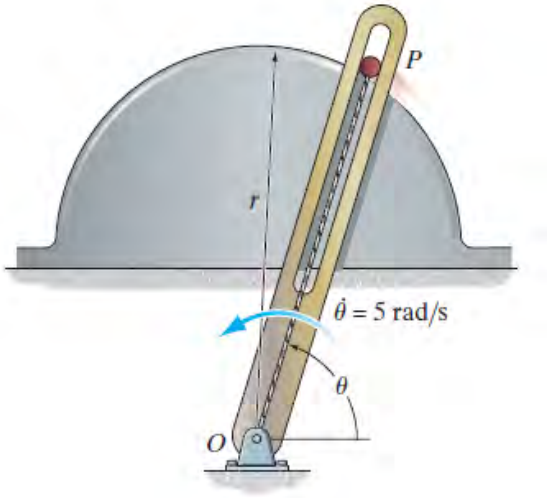
13-93. غاړه کی، چې 3 پونډه وزن لري، په ښوي راډ حرکت کوي چې په افقی سطحه کې پروت دی او د یوه پارابولا ، $r = [4/(1-\cos q)]$ ft ، بڼه لري چیرې چې q په رډین کې ده. که دغاړه کی زاویوي سرعت ثابت او د $\dot{q} = 4$ rad/s سره برابر وي، د حرکت د سبب لپاره لازمه مماسی قوه P او دعمودی قوی اجزاوي چې غاړکی په راډ باندې واردوي په $q = 90°$ کې پیدا کړئ.



پوښتنه 13-93

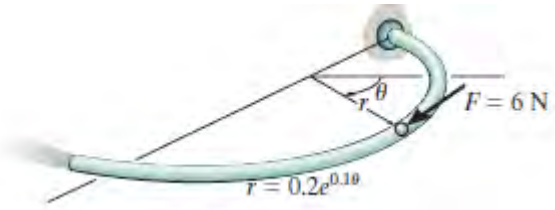
13-94. ښوی میخ P پوره 80 ګرامه کتله لري. په یوه الاسټیکی تار چې له O څخه P ته غزیدلی دي وصل شوی اود لاس د اوږد ی جری له املې، په افقی دایروی مسیر کې حرکت کوي، چې مسیر یې په $r = (0.8\sin q)$ m تعریف شوي دی. که د تار سختي $k = 30$kN/m او یو

نه غزيدلی اوږدوالي يی 0.25 متره وی، په ميخ باندې د جری قوه او د دايروی مسير عمود ی قوه پيدا کړئ کله چې $q = 60°$ وي. جری يو ثابت زاويوی سرعت $\dot{q} = 5$ rad/s لري.



پوښتنه 13-94

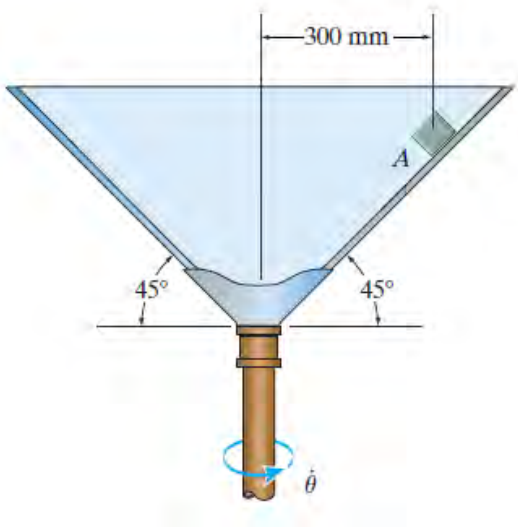
13-95. د هوا د فشار په کارولو سره، يو 0.5 کيلو ګرامه توپ په يوه تيوب کی حرکت کوی. تيوب په افقی سطحه کی پروت دی او د يوه لوګاريتميک مارپيچی بڼه لري. که مماسی قوه په توپ باندې د هوا فشار له امله 6 نيوټنه وي، په هغه وخت کې کله چې $q = \pi/2$ وي د توپ په تيزوالی کی د زياتوالي اندازه پيدا کړئ. همدارنګه، هغه زاويه ψ چې له پراخ شوي شعاعي محور r څخه تر هغه کرښې پورې چې 6 نيوټنه قوه پرې پلی کيږي، پيدا کړئ.



پوښتنه 13-95

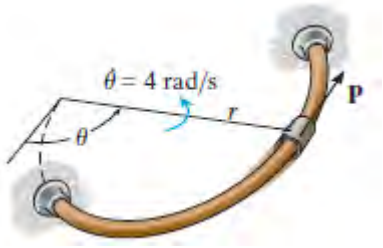
*13-96. که د ستاتيک اصتحکاک ضريب دمخروطي سطحی او بلاک ترمنځ چی کتله يی m ده، $\mu_s = 0.2$ وي، هغه لږترلږه ثابت زاويوی سرعت $\dot{q}$ پيدا کړئ چې بلاک ښکته ونه ښويږي.

13-97. که د ستاتيک اصتحکاک ضريب د مخروطی سطحی او بلاک ترمنځ $\mu_s = 0.2$ وي، هغه اعظمي ثابت زاويوي سرعت $\dot{q}$ پيدا کړئ چې بلاک پورته ونه ښويږي.



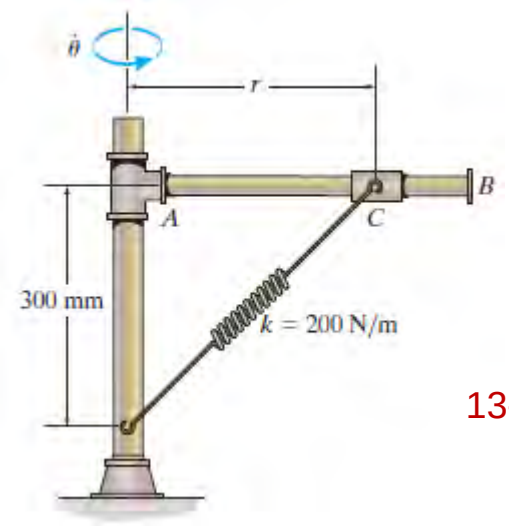
پوښتنه 13-96/97

13-98. دا 2 پونډه ګوټ (spool) د ښوی افقی مارپیچی میلی په اوږدو کې ښویږي، چې د هغې معادله یی $r = (2q)$ ft ده، چیرې چې q په رډین کې ده. که د ده د زاویوی څرخیدو نسبت یی ثابت او $\dot{q} = 4$ rad/s وي، هغه افقی مماسي قوه P چې د حرکت د تولید لپاره اړینه ده محاسبه کړئ ، او هغه افقی عمودي قوی جزچې ګوټ یی په $q = 90°$ کې په راډ باندې واردوي، هم محاسبه کړئ



پوښتنه 13-98

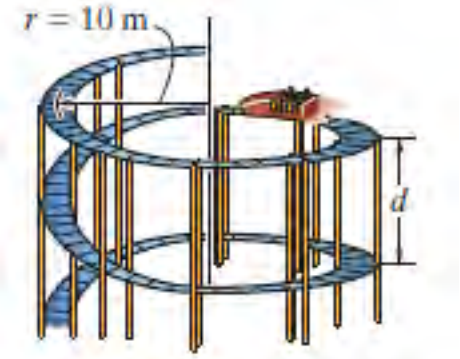
13-99. که د 3-کیلو ګرامه غاړه کی C په ښوی راډ AB کې په $r = 720$ mm کې موقعیت وساتلی شي، د ثابت زاویوي سرعت $\dot{q}$ تعیین کړئ چې دا میکانیزم د عمودي محور په شاوخوا وڅرخیږي. د فنر نه غزیدلی اوږدوالی 400 میلی متره دي. د راډ کتله او د غاړکی اندازه له پامه وغورځوي.



پوښتنه 13-99

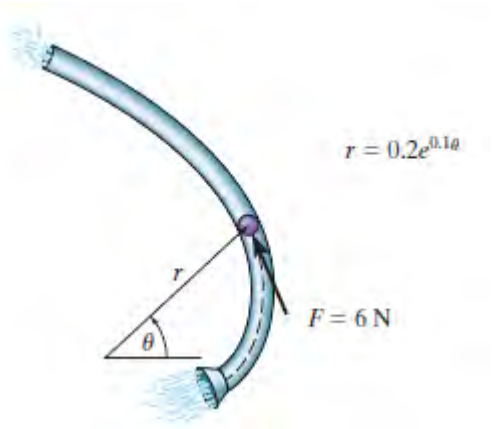
*13-100. د لنډ وخت لپاره ، 250 کیلو ګرامه رولر کوسټر موټر د مسافرو سره په مار پیچی لاره باندې په ثابت سرعت $v = 8$ m/s کې حرکت کوي. که چیرې لاره په هره بشپړه دوره کې $q = 2\pi$ rad، $d = 12$ m بښکته کیږی، د r ، q، او z سمتونو د قوې اجزاووانداز چې د سواری ټرک په موټر باندې واردوی، تعیین کړئ. د موټر اندازه له پامه وغورځوی.

13-101. په لنډ وخت کې، 250 کیلو ګرامه رولر کوسټر موټر د مسافرو سره په مارپیچ لاره باندې په ثابت تیزوالی حرکت کوي په داسې ډول چې د لاری د سریا ټرک څخه یې د موقعیت اجزاوی $r = 10$ m ، $q = (0.2t)$ rad، او $z = (-0.3t)$ m وي، چیرې چې t په ثانیو کې ده. په r ، q، او z سمتونو کې د قوې اجزاوو اندازه چې لاره یا ټرک په موټر باندې په $t = 2$ s کې واردوی، تعیین کړئ. د موټر اندازه له پامه وغورځوي.



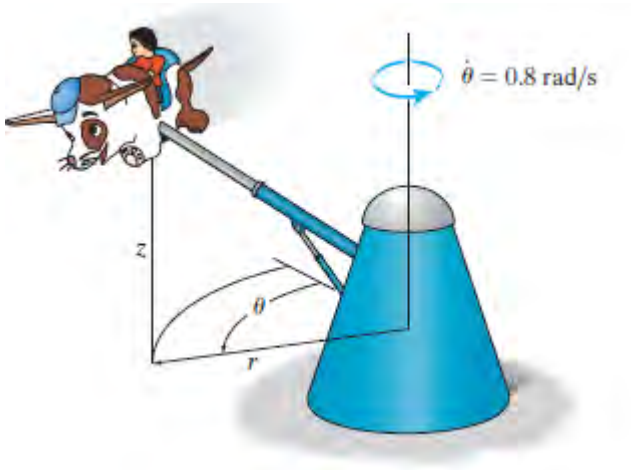
پوښتنې 13-100/101

13-102. د هوا په فشار سره، 0.5 کیلو ګرامه توپ دې ته اړ کیږی چې د افقي تیوب په داخل کې چې د لګارتمي مارپیچی په شکل دی حرکت وکړي. که چیرې د هوا لخوا په توپ باندې وارده شوی مماسي قوه 6 N وي، په $q = \pi/2$ کې د توپ د تیزوالی د زیاتیدو کچه تعیین کړئ. مماسي قوه په کوم لوري کې عمل کوي؟



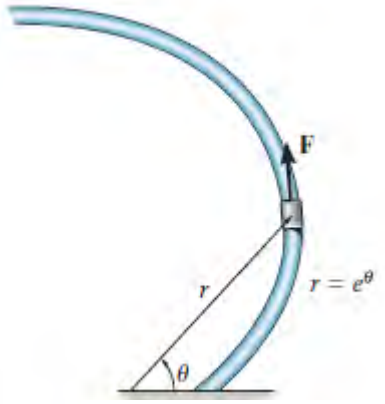
پوښتنه 13-102

13-103. د تفریح پارک کی دسواری لوبه په ثابت زاویوي سرعت $\dot{q} = 0.8$ rad/s سره ګرزی. که چیرې د لوبې مسیر په $r = (3 \sin q + 5)$ m او $z = (3 \cos q)$ m سره تعریف شوی وي، کله چې $q = 120°$ وی د څوکۍ لخوا په 20 کیلو ګرامه ماشوم باندې د واردی شویی قوی اجزاوی د r ، q، او z سمتونو کې تعیین کړئ.



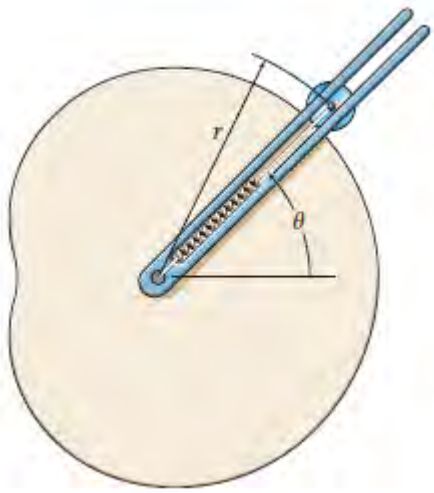
پوښتنه 13-103

*13-104. غاړکی 2 کیلو ګرامه کتله لری او په بنوی افقي راډ باندې چی په مساوی-زاویوی مار پیچی (equiangular) توګه بنودل شوی، کوم چی $r = (e^{q})$ m ، او q په رډین کی ده، سفر کوي. هغه مماسي قوه F او عمود ی قوه N چې په غاړکی باندې په $q = 45°$ کې عمل کوی، تعیین کړئ، که چیرې قوه F په ثابت زاویوي حرکت $\dot{q} = 2$ rad/s وساتي.



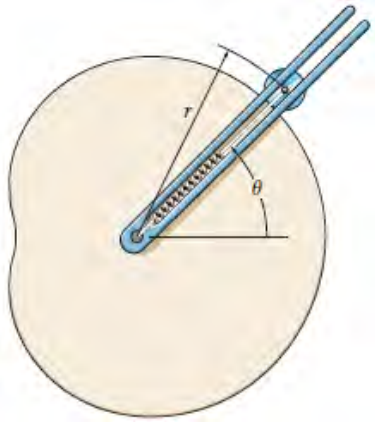
پوښتنه 13-104

13-105. د عمودي کم (cam) بنویی سطحی یوه برخه په $r = (0.2 \cos q + 0.3)$ m منحنی تعریف شوې ده. دوه شاخه راډ د په زاویوي تعجیل $\ddot{q} = 2$ rad/s² سره حرکت کوي، او کله چې $q = 45°$ وي، زاویویي سرعت یې $\dot{q} = 6$ rad/s دي. په دې حالت کې د کم او راډ لخوا په 2 کیلو ګرامه رولر باندې وارده شوی قوه تعیین کړئ. د ټرل شوی فنر سختي $k =$ 100 N/m او نه غزولشوي اوږدوالی یې 0.1 متره دی.



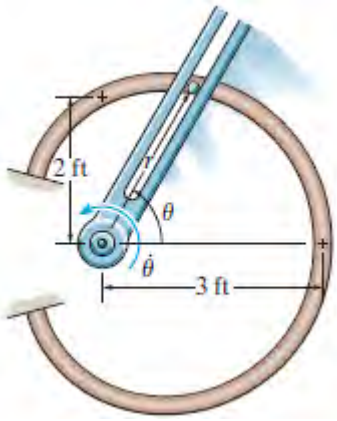
پوښتنه 13-105

13-106. د عمودي کم ښویی سطحی یوه برخه په $r = (0.2 \cos q + 0.3)$ m منحنی سره تعریف شوې ده. که دوه شاخه راډ په ثابت زاویوییِ سرعت $\dot{q} = 4$ rad/s سره حرکت کوي، په $q = 30°$ کې د کم او راډ لخوا په 2 کیلو ګرامه رولر باندې وارده شویی قوه تعیین کړئ. د ټرل شوی فنر سختي $k = 30$ N/m ده او نه غزولشوي اوږدوالی يې 0.1 متره دی.



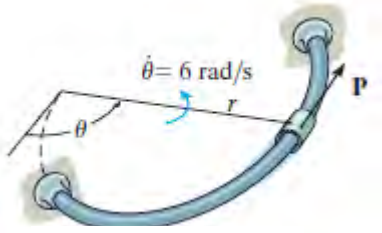
پوښتنه 13-106

13-107. دوه شاخه راډ د ښوی 2 پونډه دری په افقي مسیر چې شکل يې د لیماسن منحني r = (2 + cos q) ft=دی. که $q = (0.5t^2)$ rad وي، د حرکت کړلو لپاره اچول شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د راډ لخوا په ذره باندې په $t = 1$ s کې وارده شویی قوه تعیین کړئ. دوه شاخه او مسیر یوازې په یوه اړخ کې له ذرې سره تماس نیسي.



پوښتنه 13-107

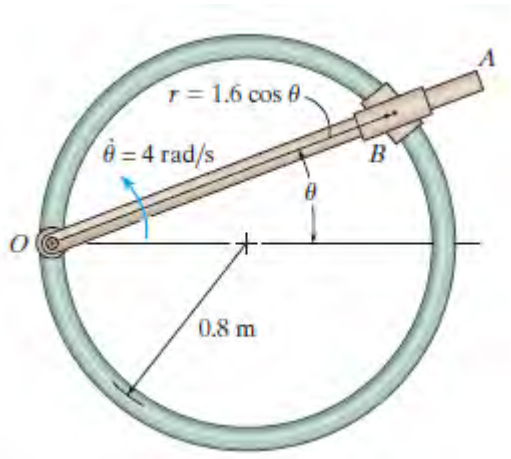
*13-108. ګوټک چې 2 کیلو ګرامه کتله لري، په بنوی افقي مارپیچی راډ باندې ، $r =$ (0.40 q) m، بنوییږی چیرې چې q په رډین کی ده. که چیرې د ګوټک زاویوي سرعت ثابت وي او برابر وي په $\dot{q} = 6$ rad/s ، د حرکت د رامنځته کولو لپاره اړینه افقي مماسی قوه Pاو هغه افقي عمودي قوه چې ګوټک یی په راډ باندې په $q = 45°$ کې واردوی، تعیین کړئ.



پوښتنه 13-108

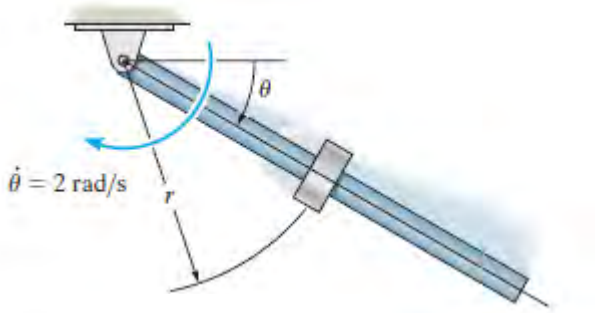
13-109. OA راډ د ساعت په مخالف لوری په ثابت زاویوي سرعت $\dot{q} = 4$ rad/s کې حرکت کوي. د دوه ګونې غاړکی B د یوه میخ (پن) په واسطه یوځای ټرل شوی دی چې یوه غاړکی د ګرځیدونکي راډ په شاوخوا بنوییږي او بله غاړکی د دایروی راډ په شاوخوا بنوییږي چې په $r = (1.6 \cos q)$ m معادلعه تعریف شوی. که چیرې دواړی غاړکی 0.5 کیلو ګرامه کتله ولري، د دایروی راډ لخوا په یوه غاړکی باندې وارده شویی قوه او د OA لخوا په بله غاړکی باندې وارده شویی قوه په $q = 45°$ کې تعیین کړئ. حرکت په افقي سطحه کې دی.

13-110. د 13-109 پوښتنه حل کړئ که حرکت په عمودي سطحه کې وي.



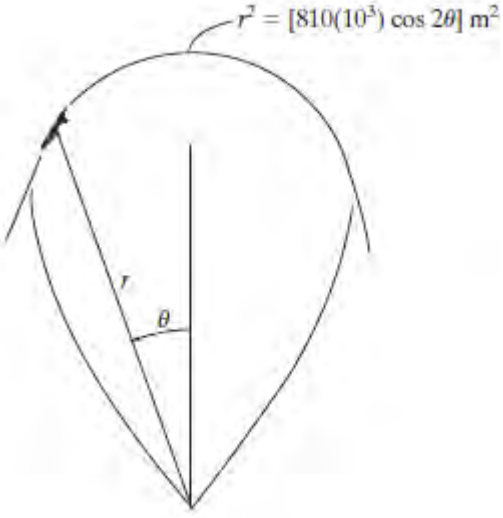
پوښتنې 13-109/110

13-111. یو 0.2 کیلو ګرامه ګوټک په ښوی راډ باندې ښکته کیږي. که چیرې راډ په عمودي سطحه کې د زاویوي ثلبته ګرزیدا $\dot{q} = 2$ rad/s حرکت وکړي، ښکاره کړئ چې د ګوټک لپاره د حرکت معادلې $r'' - 4r - 9.81 \sin q = 0$ او $0.8\, \dot{r} + N_s - 1.962 \cos q = 0$ دي، چیرې چې N_s د راډ په ګوټک باندې د عمودی قوی مقدار دی. د ډیفرینشل (differential) معادلو په طریقو کارول سره، ښودل کیدای شي چې د دې معادلې لومړنی حل $r = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - (9.81/8) \sin 2t$ دی. که چیرې r ، $\dot{r}$، او q په $t = 0$ کې صفر وي، C_1او C_2 ثابتونه پیدا کړی او په $q = \pi/4$ rad کې r تعیین کړئ.



پوښتنه 13-111

13-112*. الوتکه د عمودي حلقی په تعریف شوي لاره $r^2 = [810(10^3)\cos 2q]\ m^2$ کې حرکت کوي. که چیرې پیلوټ په ثابت تیزوالي $v = 120$ m/s کې په مسیر کې حرکت وساتي، په $q = 0°$ کې د ځوکۍ لخوا په هغه باندې عمودی وارده شویی قوه تعیین کړئ. پیلوټ 75 کیلو ګرامه کتله لري.

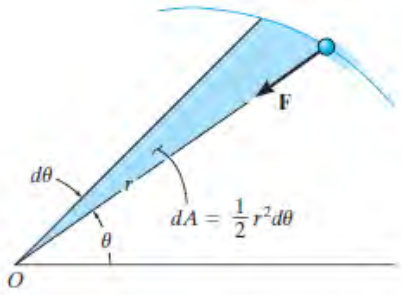


پوښتنه 13-112

13.7* دمرکزي قوی حرکت او فضايي ميکانيک (CENTRAL-FORCE MOTION AND SPACE MECHNAICS)

که يوه ذره يوازي د يوې داسې قوی **F** تر اغيزی لاندې حرکت وکړي چې هميشه يوې ټاکلې نقطې ته جهت ولری، لکه څنګه چې په انځور13-22a کې ښودل شوي، نو دغه حرکت ته د **مرکزي قوی حرکت** ويل کيږي. دا ډول حرکت عموماً د اليکټروستاتيکي او جاذبتي قواوو لخوا رامنځته کيږي.

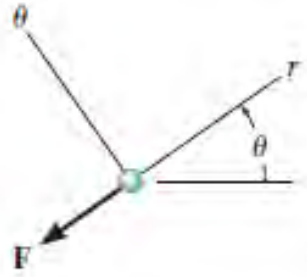
د دې حالت لپاره، د ذرې د جسم -آزاد ډايګرام په انځور 13-22b کې ښودل شوی دی. د قطبي محورونو (r , q) په کارولو سره، د حرکت معادلې، 13-9 ، داسې کيږي



(a)

$$\Sigma F_r = ma_r; \qquad -F = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \qquad (13\text{–}11)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad 0 = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)$$



(b)

انځور 13-22

د دغو معادلاتو دويمه معادله په دې شکل ليکل کيدی شي

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

انټګريشن کول دا لاندې نتيجه ورکوي

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad (13\text{–}12)$$

دلته h د انټګريشن ثابت عدد دی

په انځور 13-22a کې وګورئ چې د شعاع r لخوا توصيف شوی رنګه ساحه، لکه څنګه چې r يوه زاويې dq له لارې حرکت کوي، يوه مثلث دی چې دوه خواوې يې r دي، اود لوړو کچې مشتقاتو ته پام نه کول، د دې مثلث ښکته ضلعه يې rdq ده. د دې مثلث ساحه په دې توګه لبکلې شو $dA = ½ r^2 dq$. که چيرې **ساحوي سرعت** تعريف شي لکه

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \qquad (13–13)$$

نو، دا څرګند پېرې چې دا اصطلاح ثابته ده. په بل عبارت داسی هم ويلې شو، ذره به د وخت په هر واحد کې يوه اندازه ساحه طي کړي لکه څنګه چې د لارې په اوږدو کې حرکت کوي.

د حرکت د لارې ترلاسه کولو لپاره، $r = f(q)$، بايد خپلواکه متغير t له معادلی 13-11 نه حذف شي. د ذنجيرې قاعدې په کارولو سره، د وخت مشتق d^2r/dt^2 کيدی شي په لاندی ډول وليکل شی:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{h}{r^2}$$

د دې معادلې لپاره يوه نوې متغيرتابع $\xi = 1/r$ (xi) ځای پر ځای کولو سره، مورِ لرو:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

همدا رنګه دمربع کيدلو د معادلی 13-12 څخه دا لاندی پلاس راځی:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2\xi^4$$

په پای کې، دا دوه معادلې په معادله 13–11 کې ځای په ځای کولو سره، مورِ ترلاسه کوو:

$$-h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2} - h^2\xi^3 = -\frac{F}{m}$$

او يا

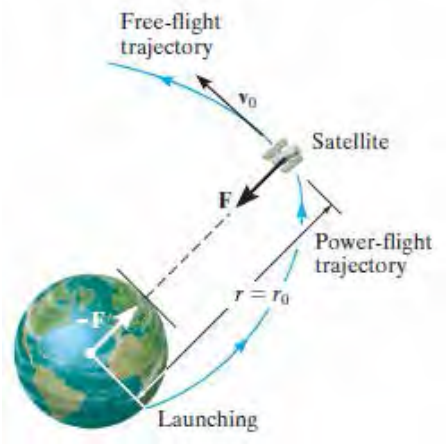
$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2\xi^2} \qquad (13–14)$$

دا تفاضلي معادله هغه لاره ټاکي چې ذره پرې سفر کوي کله چې مرکزي قوه **F** ورباندې عمل کړي.



دا سپوږمۍ د مرکزي قوی تر تاثیر لاندې ده او د دې مداري حرکت د دې برخې دمعادلاتو په کارولو سره په نړۍ توګه وړاندوینه کیدی شی
Group/Getty Images Universal Images

د يوې عامې کارونې د څرګندولو لپاره، د يو فضايي سپوږمکۍ يا فضايي وسايطو مسير په پام کې ونيسئ چې د ابتدايي سرعت $\mathbf{v}_0$ سره د ازاد پرواز مدار ته توغول شوي، لکه څنګه چې په انځور 13-23 کې ښودل شوي. دلته به فرض شي چې دا سرعت په ابتدا کې د ځمکې د سطحې د مماس سره موازي دی، لکه څنګه چې په انځورکې ښودل شوي*.
همدارنګه، کله چې سپوږمکۍ خوشې شي، يوازې د ځمکې د جاذبې قوه به د هرځه د پام وړ کچه لرونکی وي. د نيوټن د جاذبې قانون له مخې، دا قوه به تل د ځمکې او سپوږمکۍ د کتلې مرکزونو ترمنځ عمل کوي، لکه څنګه چې په انځور 13-23 کې ښودل شوي، او له معادلې 13-1 څخه، دا ځواک يوه معينه کچه لري



انځور 13-23

$$F = G\frac{M_e m}{r^2}$$

چيرته چې M_e او m په ترتيب سره د ځمکې او سپوږمکۍ د کتلې نمايندګي کوي، G د جاذبې ثابت عدد دی، او r د کتلې د مرکزونو ترمنځ فاصله ده. د مدار مسير ترلاسه کولو لپاره، مورِ $\xi = 1/r$ په پورته معادله کې ټاکو او پايله يې په معادله 13-14 کې ځای په ځای کوو. دا لاندې پايله ورکوي

*هغه حالت چې v_0 په يو لومړني زاويه q کې د تماس سره عمل کوي، د زاويوي مومنتم د ساتنې په کارولو سره ترټولو ښه تشريح کېدای شي. وګورئ پوښتنه 113-15 .

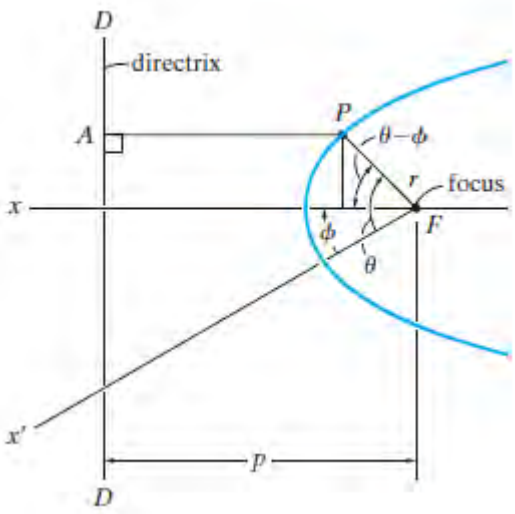
$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \qquad (13–15)$$

د دې دويم درجه تفاضلي معادلې حل د تکميلي (complementary) او ځانګړو (particular) حلونو مجموعه ده چې په لاندې ډول ورکړل شوي دي.

$$\xi = \frac{1}{r} = C\cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \qquad (13–16)$$

چيرته چې C او f د انټيګريشن ثابت عداد دي.

کله چې په ګراف کې رسم شي، دا د قطبي مختصاتو په شرايطو کې د يو مخروطي برخې معادلې نمايندګي کوي. لکه څنګه چې په انځور 13-24 کې ښودل شوي، مخروطي برخه د يو نقطې P لوکس (locus) دی چې داسې حرکت کوي چې د هغې فاصلې FP له يوه ***تمرکز***، يا ثابتې نقطې F ، څخه تر هغې عمودي فاصلې PA پورې چې د ثابتې کرښې DD پورې چې د مستقيم الخط (directrix) په نوم يادېږي، په ثابته توګه د تناسب سره برابر وي. دا ثابت تناسب به په e سره ښودل کېږي او د ايکسنټرسيټی (eccentricity) په نوم يادېږي. نو ځکه



انځور 13-24

$$e = \frac{FP}{PA}$$

له انځور 13-24 لرو

$$FP = r = e(PA) = e[\,p - r\cos(\theta - \phi)]$$

يا

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

دا معادله د معادله 13-16 سره پرتله کوو ، دا ښکاري چې د تمرکز څخه تر مستقيم الخط پورې ثابت فاصله دا ده:

$$p = \frac{1}{C} \qquad (13–17)$$

او د مخروطي برخې ايکسنتريسيتي دا ده:

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} \qquad (13–18)$$

کله چې په انځور 13-24 کې قطبي زاويه q د x محور څخه اندازه شي نه د x' محورڅخه، نو بيا زاويه ϕ صفر ده، او له دې امله، معادله 13-16 په لاندې ډول راکمپږي

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{GM_e}{h^2} \qquad (13–19)$$

ثابت اعداد h او C د سپوږمکۍ د پيل ځای له موقعيت او سرعت ارزښتونو څخه د دې د پرواز د مسير پای ته رسيدو وروسته معلوميدلی شي. د بيلګې په توګه، که چيرې ابتدايی ارتفاع يا د فضايي وسيلې فاصله r_0 وي، چې د ځمکې له مرکز څخه اندازه کيږي، او د دې خپل آزاد پرواز ابتدايی تيزوالی يی v_0 وي ، لکه څنګه چې په انځور 13-25 کې ښودل شوي، نو ثابت عدد h ممکن له معادلی 13-12 څخه ترلاسه شي. کله چې $q = \phi = 0°$، نو سرعت v_0 هيڅ شعاعي جز نه لري؛ له دې امله، له معادله 12-25 څخه، $v_0 = r_0(dq/dt)$ نو دا کيږي

$$h = r_0^2\frac{d\theta}{dt}$$

يا

$$h = r_0 v_0 \qquad (13–20)$$

د C معلومولو لپاره، معادله 13-19 د $q = 0°$ ، $r = r_0$ سره وکاروئ او د h لپاره معادله 13-20 ځای په ځای کړئ. مونږ ترلاسه کوو

$$C = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right) \qquad (13\text{–}21)$$

نو د آزاد- پرواز د مسير معادله په دې توګه کيږي

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2} \qquad (13\text{–}22)$$

د سپوږمکۍ (satellite) لخوا تګلاره د مخروطي برخې د ايکسنتريستي ارزښت له مخې ټاکل کيږي لکه څنګه چې په معادله 13-18 کې ورکړل شوي. که چيرې

$$\begin{aligned} e &= 0 \quad \text{free-flight trajectory is a circle} \\ e &= 1 \quad \text{free-flight trajectory is a parabola} \\ e &< 1 \quad \text{free-flight trajectory is an ellipse} \\ e &> 1 \quad \text{free-flight trajectory is a hyperbola} \end{aligned} \qquad (13\text{–}23)$$

هر يوه د دې مسيرونو په انځور 13-25 کې ښودل شوي دي.

پارابولي لاره (Parabolic Path). دا ښکاري چې کله سپوږمکۍ يوه هايپر بولي مدار تعقيبوي، $e > 1$، نو دا به هيڅکله خپلې د پيل نقطې ته راستنه نه شي. کله چې $e = 1$ ، نو مدار پارابولي دی، او دا د نه راستنيدو په "سرحد" کې دی. دا د توغولو سرعت (launch velocity)، $\mathbf{v}_0$ ، د ***تښتيدو سرعت*** (escape velocity)، v_e، په نوم يادېږي. دا د دوهمې معادلې، د معادله 13-23 په کارولو سره، $e = 1$، د معادلې 13-18، 13-20، او 13-21 سره معلوميدلی شي. دا د دې د ثبوت لپاره د تمرين په توګه پرېښودل کيږي چې وښيی

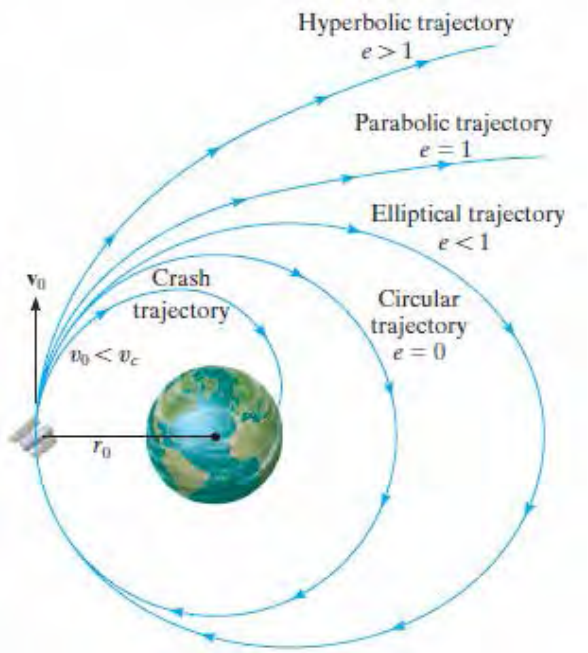
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \qquad (13–24)$$

دايروی مدار(Circular Orbit). هغه سرعت v_c چې د سپوږمکۍ په دايروی مدار کې د ځای پر ځای کولو لپاره اړين دی، د لومړنی معادلی دمعادلې 13-23 څخه موندل کيدی شي، چيرې چې $e = 0$ ده. لکه څنګه چې e د h او C سره تړاو لري، د معادلې 13-18 له مخې، C بايد صفر وي ترڅو دا معادله پوره کړي (د معادلې 13-20 له مخې، h نشي کيدی صفر وي)؛ نو له دې امله، د معادلې 13- 21 په کارولو سره، موږ لرو:

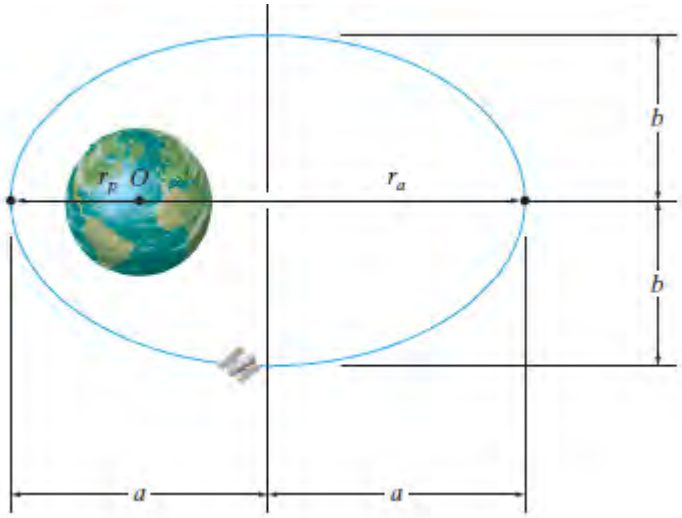
I

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \qquad (13–25)$$

هر هغه سرعت چې په توغولو کی د v_c څخه لږ وي هغه به د دې لامل شي چې سپوږمکۍ د ځمکې په فضاء کې بيرته داخل (reenter) شي چی يا به وسوځي يا به په مځکه ولويږی، لکه څنګه چې په انځور 13-25 کې ښودل شوي



انځور 13-25



انځور 13-26

بيضوي مدار (Elliptical Orbit). ټول هغه مسيرونه چې سيارې او ډيرۍ سپوږمکۍ پرې حرکت کوی بيضوي دي، لکه څنګه چې په انځور 13-26 کې ښودل شوي. د سپوږمکۍ لپاره، د مدار او د ځمکې مرکز O څخه ترټولو لږ فاصله r_p ده (چې د بيضوي په يوه مرکز (foci) موقعيت لري) او دا فاصله د معادله 13-22 په کارولو سره موندل کيدی شي کله چې $q = 0°$ ده. نو له دې امله مورږ لرو

$$r_p = r_0 \qquad (13–26)$$

دا فاصله د مدار د نږدې والي نقطه يا **"پيريجي"** perigee" بلل کيږي. د **"اپوجي"** apogee" يا اعظمي فاصله r_a د معادلې 13-22 په کارولو سره چې $q = 180°$ * وی موندل کيدی شي. له همدې امله مورږ لرو:

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0v_0^2) - 1} \qquad (13–27)$$

له انځور 13-26 څخه، د بيضوي د لوی محور نيمايي اوږدوالی دی:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad (13–28)$$

د تحليلي جيومیټري په کارولو سره، دا ښودل کيدی شي چې د کوچني محور نيمايي اوږدوالی د معادلې له مخې ټاکل کيږي

$$b = \sqrt{r_p r_a} \qquad (13–29)$$

*په حقيقت کې، اصطلاحات "پيريجي" او "اپوجي" يوازې د ځمکې په شاوخوا مدارونو پورې تړاو لري. که هر بل اسماني جسم د بيضوي مدار په فوکس کې موقعيت ولري، نو لږ تر لږه او اعظمي فاصله په ترتيب سره د مدار "پيرياپسيس***periapsis*** " او "اپوآپسيس ***apoapsis*** " بلل کيږي.

په پای کې، د مستقيم انتيګريشن له مخې، د بيضوي ساحه ده

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \qquad (13–30)$$

او څرنګه چې ساحوي سرعت د معادلې 13-13 له مخې تعريف شوی دی، $dA/dt = h/2$، نو په انتيګريشن سره مور ترلاسه کوو $A = h\,T/2$، چيرې چې T هغه ***موده*** ده چې د يوه مداري حرکت لپاره اړينه ده. د معادلې 13-30 څخه، نو موده د

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \qquad (13–31)$$

د ځمکې د سپوږمکيو مداري مسير وړاندوينې سربيره، په دې برخه کې رامينځته شوې نظريه د لمر په شاوخوا کې د سيارو د حقيقي حرکت وړاندوينې لپاره هم د حيرانتيا وړ نږدېتوب سره اعتبار

لري. په دې حالت کې کله چې مناسبه فورمولونه کارول کیږي ، د لمر کتله M_s باید د ځمکې کتله M_e پر ځای واچول شي.

حقیقت دا دی چې سیارې واقعاً د لمر په شاوخوا کې بیضوي مدارونه تعقیبوي، د المانې ستورپوه جوهانس کیپلر لخوا په اولسمه پیړۍ کې وموندل شو. له دې چې دا کشف د نیوټن د حرکت قوانین او د جاذبې قانون رامینځته کولو څخه مخکې شوی و، نو د دې قوانینو د اعتبار لپاره یې مهم ثبوت وړاندې کړ.

د کیپلر درې قوانین، چې د شل کلونو سیاروي مشاهدو وروسته رامینځته شوي دي، په لاندې ډول لنډیز شوي دي:

1. هره سیاره په خپل مدار کې داسې حرکت کوي چې له لمر څخه ورته اندازه شوې شعاعي کربنه په مساوي وختونو کې مساوي ساحې طي کوي.
2. د هرې سیارې مدار یوه بیضوي ده چې لمر یې په یو فوکس کې ځای پرځای شوی دی.
3. د هرې سیارې د مودې مربع مستقیم تناسب لري د هغې مدار د لوی محور د مکعب سره.

د لومړي او دوهم قانون د ریاضي ښوونې له مخې په ترتیب سره د معادلو 13-13 او 13-22 لخوا ورکړل شوی دی. دریم قانون له معادلې 13-31 څخه په لاس راځي کله چې معادلې 13-19، 13-28، او 13-29 وکارول شي. (پوښتنه 13-117 وګورئ)

مثالونه

مثال 13.13

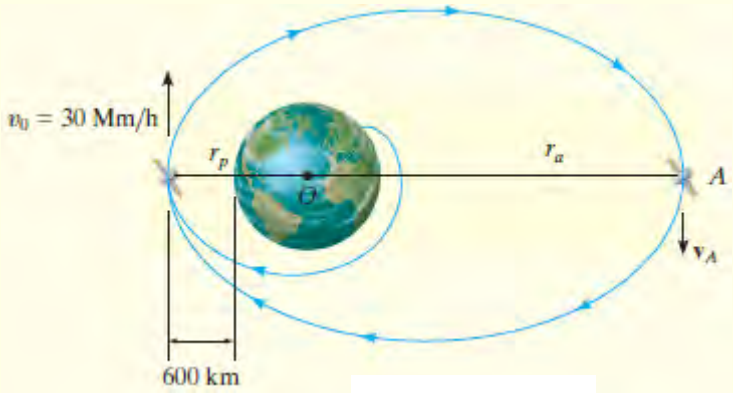
یوه سپوږمکۍ د ځمکې له سطحې څخه 600 کیلومتره پورته په لومړني سرعت 30 Mm/h (میګا میتره) په ساعت کې په موازي توګه د ځمکې د مماس د برخې سره توغول شوی ده، لکه څنګه چې په انځور 13-27 کې ښودل شوی. فرض شوی چې د ځمکې قطر 6378 کیلومتره دی او د ځمکې کتله (10^{24}) 5.976 کیلو ګرامه ده، لاندې محاسبې وکړئ: (a) د مدارې لارې ایکسنټریسټي(eccentricity) ، او (b) د سپوږمکۍ سرعت په اپوجي کې.

حل

(a) د مدار اکسنټریسیټي (eccentricity) د معادلې 13-18 په کارولو سره ترلاسه کیږي. لومړی، ثابتونه h او C له معادلو 13-20او 13-21 څخه ټاکل کیږي. څرنګه چې

$$r_p = r_0 = 6378\ \text{km} + 600\ \text{km} = 6.978(10^6)\ \text{m}$$

$$v_0 = 30\ \text{Mm/h} = 8333.3\ \text{m/s}$$



انځور 13-27

نو بيا

$$h = r_p v_0 = 6.978(10^6)(8333.3) = 58.15(10^9)\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$C = \frac{1}{r_p}\left(1 - \frac{GM_e}{r_p v_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6.978(10^6)}\left[1 - \frac{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2}\right]$$

$$= 25.4(10^{-19})\ \text{m}^{-1}$$

له همدی امله

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} = \frac{2.54(10^{-8})[58.15(10^9)]^2}{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]} = 0.125 < 1 \quad \textit{Ans.}$$

د معادلی 13-23 په لیدنه ښکاری چی مدار بیضوي دي.

(b) که چيرې سپوږمکۍ په اپوجي A کې چې په انځور 13-27 کې ښودل شوی، د $\mathbf{v}_A$ په سرعت سره توغول شوي وی، نو هماغه مدار به ساتل کيږي، په دې شرط چې

$$h = r_p v_0 = r_a v_A = 58.15(10^9)\,\mathrm{m^2/s}$$

په کارولو د معادلی 13-27 مور لرو

$$r_a = \frac{r_p}{\frac{2GM_e}{r_p v_0^2} - 1} = \frac{6.978(10^6)}{\frac{2[66.73(10^{-12})][5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2} - 1} = 10.804(10^6)\,\mathrm{m}$$

په دی توګه

$$v_A = \frac{58.15(10^9)}{10.804(10^6)} = 5382.2\,\mathrm{m/s} = 19.4\,\mathrm{Mm/h} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: څومره چې سپوږمکی له ځمکې څخه لرې وي، هغومره يې حرکت کمیږي، چې دا تمه کیدی شي ځکه چې h ثابت دی

پوښتنې

پوښتنې

PROBLEMS

په لاندې پوښتنو کې، پرته له هغه ځایه چې بل ډول ښودل شوی وی، فرض کړئ چې د ځمکې قطر 6378 کیلومتره دی، د ځمکې کتله (10^{24}) 5.976 کیلو ګرامه ده، د لمرکتله (10^{30}) 1.99 کیلو ګرامه ده، او د جاذبې ثابت $G = 66.73 \times 10^{-12}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$ دی.

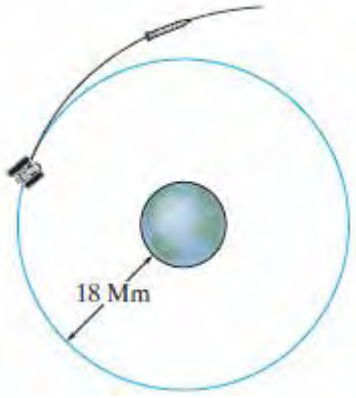
13-113. ځمکه د لمر شاوخوا د 0.0167 ایکسنتریستی (eccentricity) لرونکی مدار لري. په دې پوهیږو چې د ځمکې لږ تر لږه واټن له لمر څخه (10^6) 146 کیلومتره دی، هغه سرعت وموموئ په کوم کې چې ځمکه د دې واټن پر مهال سفر کوي. د ځمکې د مدار معادله د لمر په شاوخوا په قطبي محورونو (polar coordinates) سره وټاکئ.

13-114. یو مخابراتي سپوږمکی په دایروي مدار په مځکه داسې ګرزی چې تل د ځمکې سطحې باندی مستقیمه په یوه نقطه په فضا کی پاتې کیږي. د پایلې په توګه، د سپوږمکی د مدار

موده باید د ځمکې د حرکت سره برابره وي، چې نږدې 24 ساعته دی. د سپوږمکۍ لوړوالی h د ځمکې له سطحې څخه او د هغې مداري سرعت وټاکئ.

13-115. د سپوږمکۍ تیزوالی، چې په دایروي مدارکی له ځمکې توغول شوي، په 13-25 معادله ورکړل شوی. د یوې سپوږمکۍ سرعت وټاکئ کله چې د ځمکې سطحې سره موازي په داسې ډول وتوغول شي چې په دایروی مدار کی سفر کوی او د مځکی له سطحی 800 کیلومتره فاصله لری.

***13-116.** راکټ د سپوږمکۍ څنګ ته ځای په ځای شوی چې 18 Mm د ځمکې له سطحې څخه پورته ده. که سپوږمکۍ په دایروي مدار کې سفر کوي، د راکټ هغه انی تیزوالي چې مماس د ځمکی د سطحی سره وی، نسبت سپوږمکی ته، وټاکئ کوم چې په ازاده توګه له سپوږمکی نه جلاو د پارابولیک مدار په لوري سفر وکړي.، لکه چې ښودل شوی.

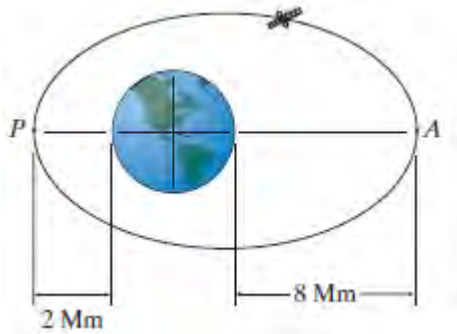


پوښتنه 13-116

13-117. د کیپلردحرکت دریم قانون ثابت کړئ.

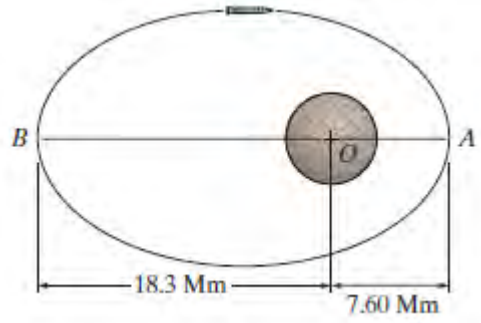
مرسته: د معادلو 13-29 ,13-28 ,13-19، او13-31 څخه کار واخلئ.

13-118. سپوږمکۍ په بیضوي مدار کې د ځمکې شاوخوا ده لکه څنګه چې ښودل شوي. په اپوجي A او پیریجي P کې د سپوږمکۍ سرعت وټاکئ، او د سپوږمکۍ موده (period) محاسبه کړئ.



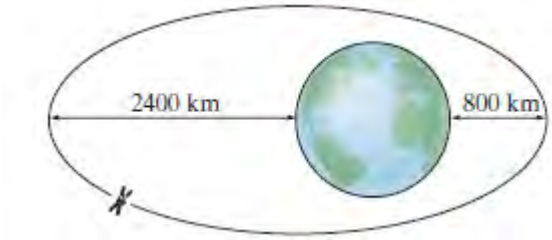
پوښتنه 13-118

13-119. راکټ په ازاد پرواز کې په بیضوي مدار کی سفر کوي. سیاره هیڅ فضا نه لري، او د هغې کتله 0.60 د ځمکې په اندازه ده. که چیرې راکټ په دی مدارکی وی، په نقطه *A* او *B* کې د راکټ تیزوالی وټاکئ.



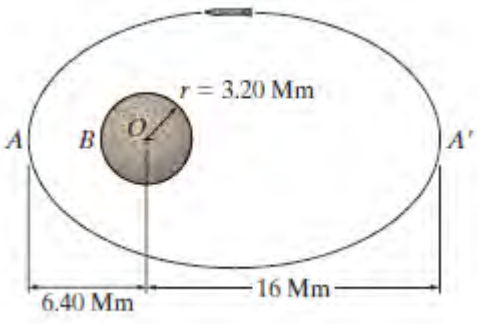
پوښتنه 13-119

***13-120.** یو سپوږمکی باید د ځمکې شاوخوا په بیضوي مدار کې ځای پرځای شي په داسې ډول چې په خپل مدار کې په پیریجي کې د هغې *لوړوالی* 800 کیلومتره وي، او په اپوجي کې د هغې *لوړوالی* 2400 کیلومتره وي. د هغې د توغولو اړین سرعت مماس د مځکی سره په پیریجي کی وټاکئ، او د هغې مدار موده (پیریډ) محاسبه کړئ.



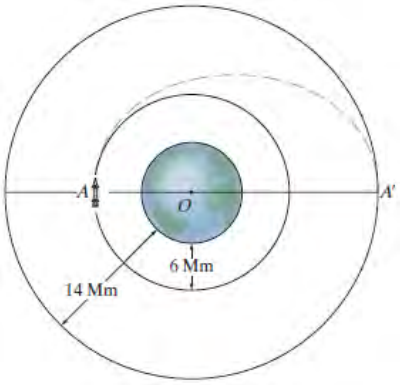
پوښتنه 13-120

13-121. راکټ په ازاد پرواز کې د بیضوي مدار سره *ÀA* شاوخوا سفر کوي. سیاره هیڅ فضا نه لري، او د هغې کتله د ځمکې د 0.60 په اندازه ده. که راکټ ډیره لری (apoapsis) او ډیره نیږدی(periapsis) فاصلی د څق له مرکزه ولری لکه چی په انځور کی ښودل شوی، د راکټ تیزوالی په *A* نقطه کی وټاکی.



پوښتنه 13-121

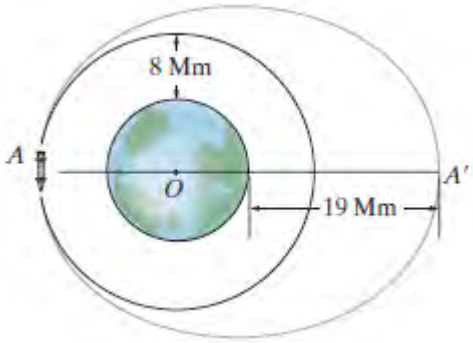
13-122. راکټ لمړي په دایروي مدار کی دی چی 6 Mm پورته د ځمکې سطحې څخه موقعیت لري. اړینه ده چې راکټ په بل دایروي مدار کې سفر وکړي چې لوړوالی یې 14 Mm دی. د دې لپاره، راکټ ته په A کې بریښناي قوه ورکړل کیږي ترڅو دا د اولی مدار څخه دویم مدار ته د نښه شوي بیضوي لاری په امتداد سفر وکړي. هغه لازمي سرعت وټاکئ چې باید راکټ په A کې ولري وروسته له هغه چې بریښناي قوه پری پلیی شی، او هغه وخت چی د $AA`$ له لاری نښه شوي مدار رسیدلو ته اړین دي محاسبه کړئ. په $A`$ کې د تیزوالییه هکله څه بدلون راوړل شي ترڅو دویم دایروی مدار وساتلی شي؟



پوښتنه 13-122

13-123. راکټ لمړي په ازاد پرواز کې په دایروي مدارد ځمکی شاوخوا سره سفر کوي. په A کې د راکټ تیزوالی وټاکئ. په A کې د سرعت په اړه څه بدلون راوړل شي ترڅوراکټ په بیضوي مدار کې حرکت وکړي ترڅو نقطه A' ته ورسیږي؟

13-124. راکټ په ازاد پرواز کې په دایروي مدار شاوخوا د ځمکې سره سفر کوي. هغه وخت محاسبه کړئ چې راکټ ته اړتیا ده ترڅوله داخلي مدار A څخه په خارجي مدار A' کې سفر وکړي.

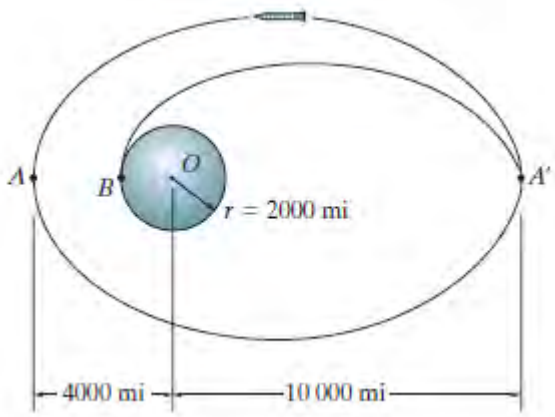


پوښتنی 13-123/124

13-125. راکټ په ازاد پروازپه بیضوي مدار $\grave{A}A$ کی سفر کوي. سیاره هیڅ فضا نه لري، او د هغې کتله د ځمکې د 0.60 په اندازه ده. که چیرې مدار دا اپوپسس (apoapsis) او

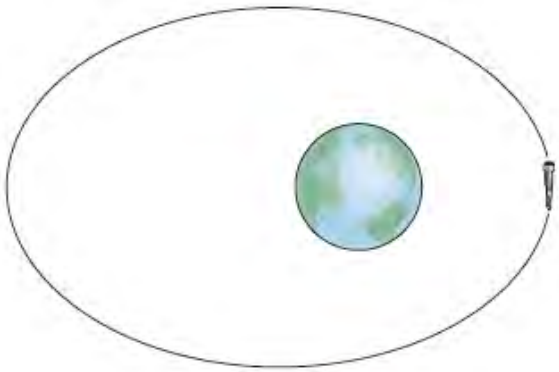
پیریاپس (periapsis) ولري چې په انځور کې ښودل شوي، په A کې د راکټ سرعت وټاکئ . $G = 34.4(10^{-9})(lb\cdot ft^2)/slug^2$، $Me = 409 \times 10^{21}$ slug، او $1\ mi = 5280$ ft ونیسئ.

13-126. که چیرې راکټ په سیاره کې د ځمکې پر مخ د ناستې لپاره وي، په A` کې اړین ازاد پرواز تیزوالی وټاکئ ترڅو ناسته په $B$ کې وشي. څومره وخت نیسي ترڅو راکټ له $A$` څخه لاړ شی او په B کی ناسته وکړي؟ سیاره هیڅ فضا نه لري، او د هغې کتله د ځمکې د 0.60 په اندازه ده $G = 34.4(10^{-9})(lb\cdot ft^2)/slug^2$. ، $Me = 409 \times 10^{21}$ slug ، 1 mi = 5280 ft ونیسئ.



پوښتنې 13-125/126

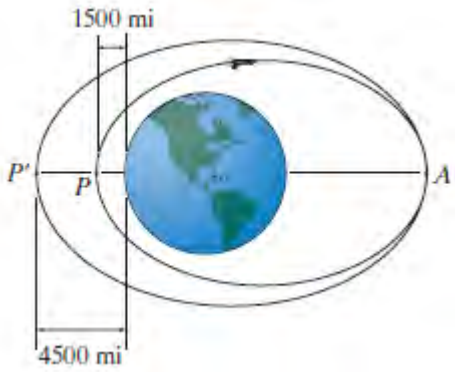
13-127. راکټ په ازاد پرواز په بیضوي مدار سره د ځمکې شاوخوا په داسې ډول ګرزی چې د هغې د مدار ایکسنتریستی e او د هغې پیریجي r_0 دی. هغه لږترلږه د سرعت اندازه وټاکئ چې راکټ یې ولري ترڅو د ځمکې د جاذبې ساحې څخه خلاص شي کله چې راکټ په دې نقطه د مدار کې وي.



پوښتنه 13-127

13-128*. فضایي بیړی په 17,500 mi/h سرعت سره د ځمکې د سطحې د مماس سره موازی په نقطه P کې توغول کیږي او بیا په بیضوي مدار کی سفر کوي. کله چې دا A ته ورسیږي، د هغې ماشینونه فعالیږي او د هغې سرعت ناڅاپه زیاتوالی کوي. د سرعت هغه لازمي

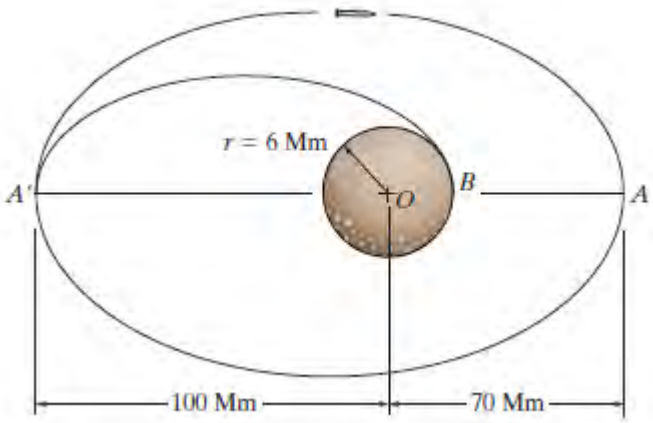
زياتوالی وټاکئ ترڅو دا په دويم بيضوي مدار کې داخله شي. $G = 34.4(10^{-9})\ ft^4/lb\cdot s^4$ ، $M_e = 409 \times 10^{21}$ slug، او $r_e = 3960$ mi ونيسئ، چې 1 mi = 5280 ft دی.



پوښتنه 13-128

13-129. راکټ په ازاد پرواز کې د بيضوي مدار $A'A$ شاوخوا سره سفر کوي. سياره هيڅ هوا نه لري، او د هغې کتله د ځمکې د 0.60 په اندازه ده. که چيرې راکټ دا مدار ولري، په نقطه A کې د راکټ سرعت وټاکئ.

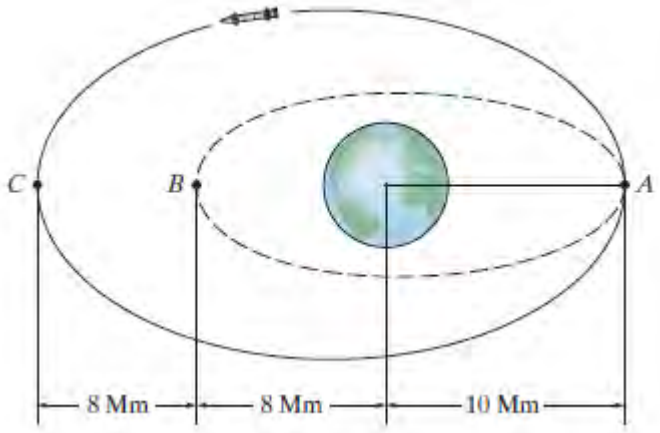
13-130. که چيرې راکټ د سياری پر مخ د ناستې لپاره وي، په A' کې د اړين ازاد پرواز سرعت وټاکئ ترڅوپه B کې ناسته وشي. څومره وخت نيسي ترڅو راکټ له A' څخه په B کی ناسته وکړي؟ سياره هيڅ هوا نه لري، او کتله يی د ځمکې 0.60 په اندازه ده.



پوښتنی 13-129/130

13-131. راکټ د ځمکې شاوخوا په ازاد پرواز په بيضوي مدار AC کی سفر کوي. که راکټ دا مدار ولري، په نقطه A کې د راکټ سرعت وټاکئ.

*13-132. راکټ د ځمکې شاوخوا په ازاد پرواز په بيضوي مدار AC کی سفر کوي. د تيزوالی بدلون وټاکئ کله چې دا A ته ورسيږي ترڅو بيا بيضوي مدار AB کې سفر وکړي



پوښتنی 13-131/132

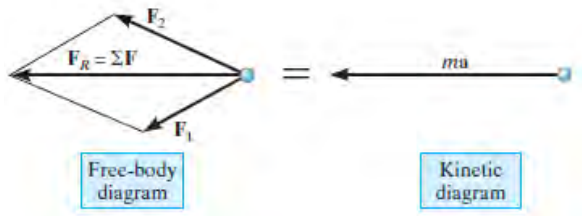
د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW

کينيټکس(Kinetics)

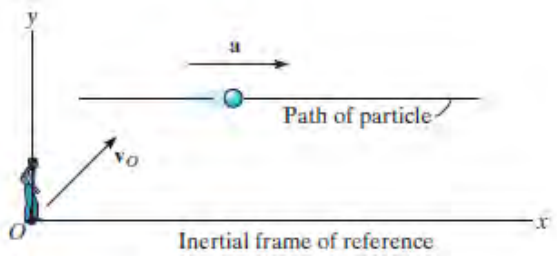
کينيټکس د قوو او د دوی له امله د رامنځته شوي تعجيل د اړيکو مطالعه ده. دا اړيکه د نيوټن دويم قانون د حرکت په اساس ده، چې د رياضي له مخې $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ په توګه څرګندېږي.

د حرکت د معادلې له پلي کولو دمخه، مهمه ده چې د ذرې ازاد-بدن ډياګرام رسم شي ترڅو هغه ټولې قوی چې په ذره باندې عمل کوي حساب شی. دا ډياګرام ګرافيکي ډول د کينيټيک ډياګرام سره مساوي دی، چې د قوو پايله ښيي، يعنې د $m\mathbf{a}$ ويکتور.



انرشيل محوري سيستم (Inertial Coordinate System)

کله چې د حرکت معادله پلي کيږي، مهمه ده چې تعجيل د يوه انرشيل محوری سيستم څخه اندازه کړئ. دا سيستم داسی محورونه لري چې نه څرخيږي بلکې يا خو ثابت وي يا په ثابت سرعت سره حرکت کوي. مختلف ډوله انرشيل محوری سيستمونه کارول کيدی شي ترڅو $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ په اجزاوي بڼه تطبيق شي



مستطيل x ، y، z محورونه په کار اچول کيږی تر څو حرکت د هر يوه مستقيمه کرښی په اوږدوالی تشريح شی.

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z$$

عمودي، مماسي، او د دوه عمود محورونو n، t، b عموماً هغه وخت کارول کيږي کله چې لاره معلومه وي. د تعجيل عمودي جز a_n تل د $+n$ په لوري جهت لری. دا د سرعت د لوري بدلون بنيي. مماسي جز a_t د لارې مماس دی. دا د سرعت د کچې بدلون بنيي.

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \qquad \Sigma F_b = 0$$

$$a_t = dv/dt \quad \text{or} \quad a_t = v\,dv/ds$$

$$a_n = v^2/\rho \quad \text{where} \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

استوانه يي محوری سيستمونه هغه وخت ګټوروي، کله چې د شعاع کرښې r زاويوي حرکت معلوم وي يا کله چې لاره په مناسبه توګه په دې محوری سيستمونو سره تشريح کيدی شي

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$\Sigma F_z = m\ddot{z}$$

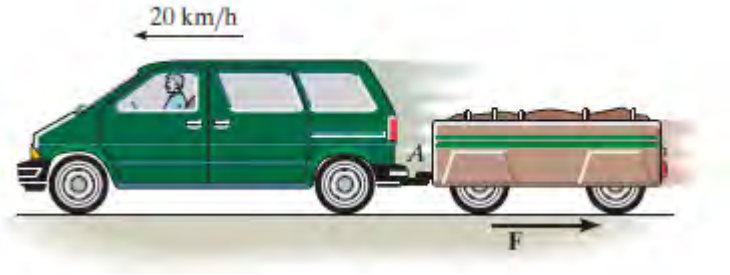
د مرکزی قوی حرکت (Central-Force Motion)

کله چې يوازينۍ قوه په يوه ذره باندې عمل کوي، لکه د سپوږمکۍ د آزاد پرواز مسير په جاذبي ساحه کې، نو دا حرکت د مرکزي قوی حرکت بلل کيږي. مدار د هغې په ايکسينتريستي e پورې اړه لري؛ او د دې پايلې په توګه، مسير کيدی شي دايروي، پارابوليک، بيضوي، يا هايپربوليک وي.

د بیا کتنې پوښتنې

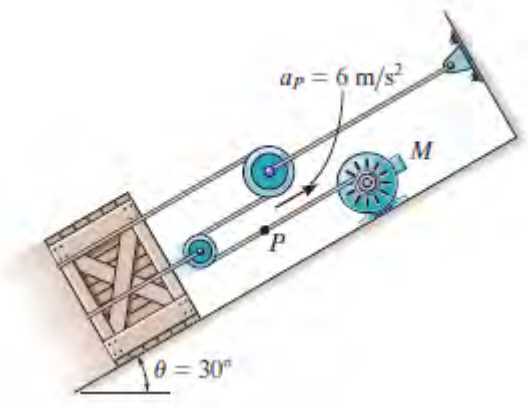
REVIEW PROBLEMS

ب 13-1. دا لاندی ښودل شوي ون (Van) په 20 km/h سرعت سره حرکت کوي په A نقطه کې د ټریلر کپلینګ ماتیږي. که ټریلر د 250 کیلو ګرامه کتله ولري او د 45 متره واټن کی درپرې، هغه ثابته افقي قوه F وټاکئ چې د ټایرونو د استحکاک له مخې رامینځته کیږي تر څو ټریلر یې ودریږي.



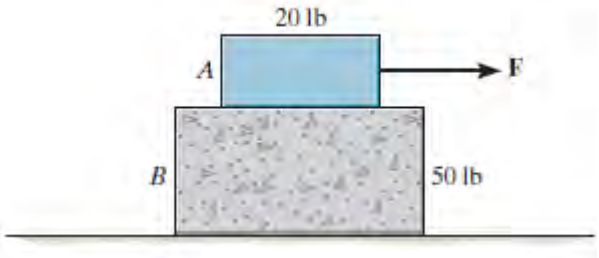
پوښتنه ب 13-1

ب 13-2. ماشین M خپله ټرلۍ رسۍ په تعجیل $a_p = 6\ m/s^2$ سره راکشکوي . هغه قوه چې ماشین M یې په رسۍ واردوی تر څو 50 کیلو ګرامه صندوق په مایله سطحه پورته کړي، وټاکی. د صندوق او سطحی ترمنځ د کینیټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی. د څرخکي او رسۍ کتله د حساب وړ نه ده.



13-2 پوښتنه

ب 13-3. بلاک B په يوه ښويه سطحه باندې پروت دی. که د A او B ترمنځ د اصتحکاک ضريب $\mu_s = 0.4$ او $\mu_k = 0.3$ وي، د هر بلاک تعجيل کله چې قوه $F = 50$ lb پلي شي وټاکئ.



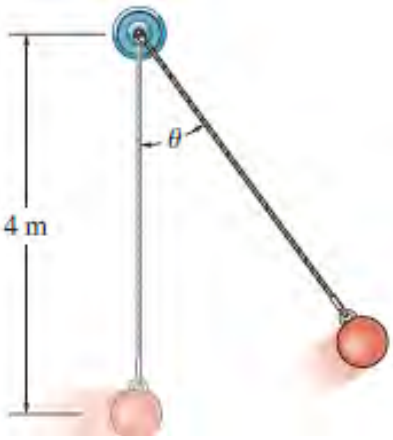
پوښتنه ب 13-3

ب 13-4. که ماشين کيبل په $v = (0.05\ s^{3/2})$ m/s سرعت سره راکشکوي، چيرې چې s په مترو ده، کله چې $s = 10$ m وي په کيبل کې د کشش قوه وټاکئ. صندوق 20 کيلو ګرامه کتله لري، او د صندوق او ځمکې ترمنځ د کينيټيک اصتحکاک ضرې $\mu_k = 0.2$ دی.



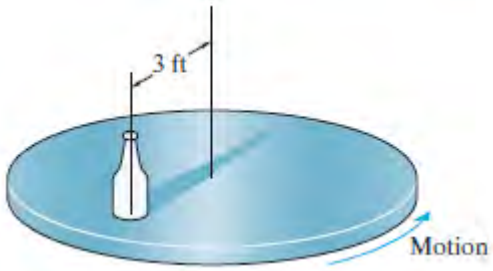
پوښتنه ب 13-4

ب 13-5. دا لاندې ښودل شوی توپ 30 کيلو ګرامه کتله لري اوکله چې $q = 0^0$ وی، توپ په ټيټه برخه کې موقعيت لری او تيزوالی يې $v = 4$ m/s دی. کله چې $q = 20°$ وي په کيبل کې دکشش قوه او د توپ د تيزوالي د کميدو کچه وټاکئ. د توپ اندازه له پام و غورځوي.



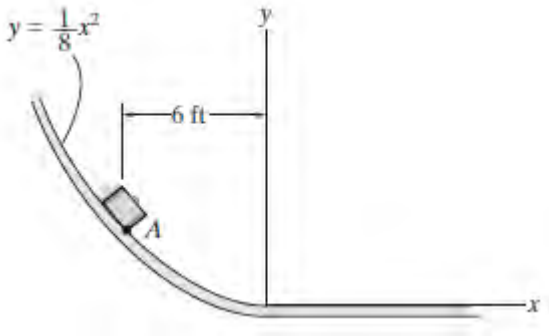
پوښتنه ب 13-5

ب 13-6. بوتل د افقي تختې له مرکز څخه 3 ft ليرې موقعيت لري. که د بوتل او تختې ترمنځ د ستاتيکي اصتحکاک ضريب $\mu_s = 0.3$ وي، د بوتل تربښويدومخکې د هغه ترلاسه کيدونکی اعظمي سرعت وټاکئ. د تختې زاويوي حرکت ورو ورو زياتيدونکی وګڼئ.



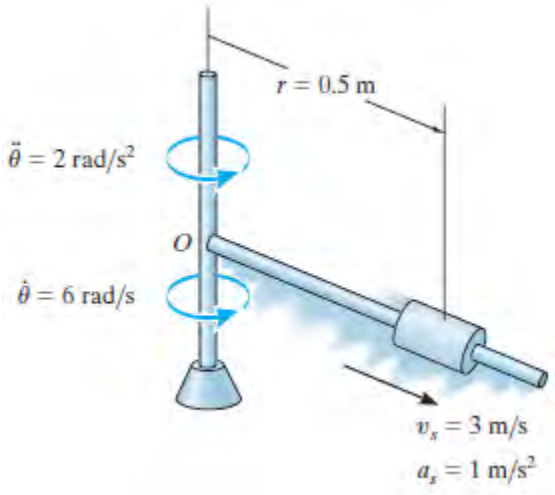
پوښتنه ب 13-6

ب 13-7. يو د 10 lb بکس په کاږه رمپ باندې ښکته خيرې چيرې چې د کينيټيک اصتحکاک ضريب $\mu_k = 0.2$ دی. که په هغه لحظه کې چې دا د A نقطې ته رسي، تيزوالي يې 5ft/s دي، په بکس عمودي قوه او د تيزوالي زياتيدو کچه يې وټاکئ.



پوښتنه ب 13-7

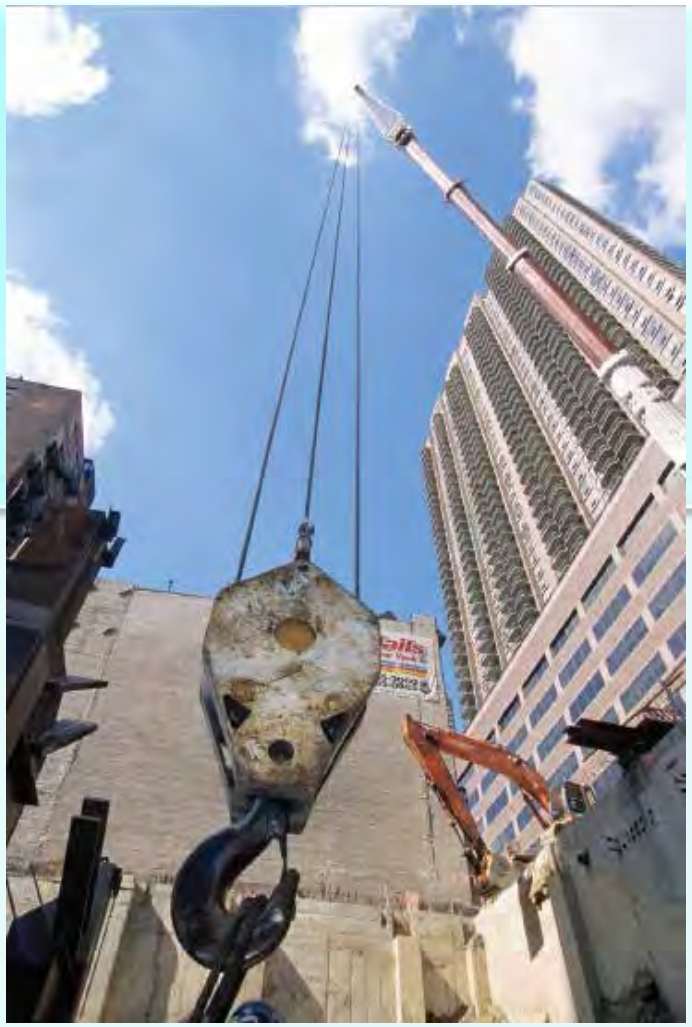
ب 13-8. ګوټک، چې 4 کيلو ګرامه کتله لري، په دوراني راډ ښويږي. په هغه وخت کې چې د راډ زاويوي حرکت $q = 6$ rad/s دی او دا ګرزيدا په $\ddot{q} = 2$ rad/s² سره زياتيدونکی ده. په همدې وخت کې ګوټک 3 m/s سرعت او 1 m/s² تعجيل لري، دواړه د راډ په نسبت اندازه شوي او د مرکز O څخه بيرون ته جهت لری کله چې $r = 0.5$ m دي. پدی وخت کی د راډ لخوا په ګوټک باندې د شعاعي اصتکاک قوی اوعمودی قوی اندازه وټاکئ.



پوښتنه ب 13-8

څوارلسم فصل

(CHAPTER 14)



د دې کرين د توانايي اړتياوې او د دې چنګک حرکت د کار او انرژي اصولو په کارولو سره تحليل کېدای شي او په دې فصل کې به دا ميتودونه تشريح شي.

د ذرې کینیټکس: کار او انرژي

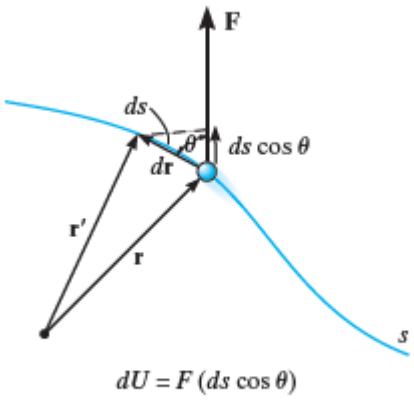
(KINETICS OF A PARTICLE: WORK AND ENERGY)

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

- د کار او انرژي اصلو ته وده ، او د کینټیک پوښتنو د حل لپاره یې پلي کول.
- دهغه پوښتنو مطالعه ، چې قوه او مؤثریت (efficiency) پکې شامل دي.
- د قوی ساتنې معرفي او د کینټیک پوښتنو د حل لپاره د انرژي ساتنې د قضیې پلي کول.

14.1 د يوې قوی کار (THE WORK OF A FORCE)

په دې فصل کې، به موږ د ذرې حرکت ، د کاراو انرژي د مفاهيمو په کارولو سره تحليل کړو. خو د دې د ترسره کولو څخه مخکې، موږ بايد لومړی د يوې قوی کار تعريف کړو. په ځانګړې توګه، يو قوه يوازې هغه وخت په يوه ذره باندې کار کوي کله چې ذره د قوی په لور بيځايه شي . د بېلګې په توګه، که چيرې قوه **F** په انځور 14-1a کې ذره مجبوره کړي چې د **r** څخه تر **r′** پورې د **s** په لاره حرکت وکړي، نو بيځايه کيدل بيا **dr = r′ - r** دي. د **dr** اندازه به *ds* ښودل شوي، چې د لارې په اوږدو کې د تفريقي(differential) برخې اوږدوالی دی. که د **dr** او **F** د کرښوتر منځ زاويه *q* وي، لکه څنګه چې په انځور 14-1a کې ښکاره ده، نو هغه کار *dU* چې د F په واسطه ترسره کيږي يو سکيلر مقدار دی، چې د قوی د اندازه **F** ، ضرب د هغې جز د فاصلی سره چې د قوی په لور ده، تعريف کيږي ، يعنې *ds cos q*



$$dU = F(ds\ \cos\theta)$$

$dU = F\,(ds\cos\theta)$

(a)

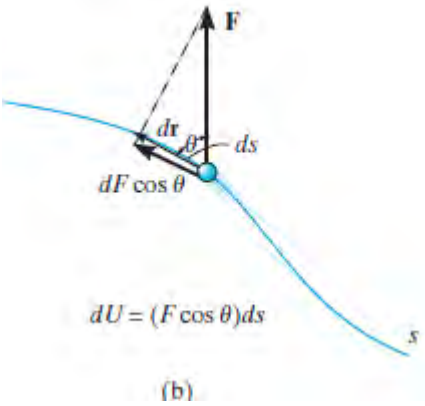
موږ همدارنګه کار داسې هم تشريح کولې شو چې دا د بيځای کيدو *ds* او د قوی د جز *F* cos *q* ، د بيځای کيدو په لور د ضرب محصول دی. $dU = (F\cos q\,ds)$ په ياد ولرئ که چيرې *q* زاويه له 0^0 څخه تر 90^0 پورې وي، نو د قوی جز او بيځای کيدل يو شان جهت لري، نو کار مثبت دی؛ په داسې حال کې که *q* زاويه له 90^0 څخه تر 180^0 پورې وي، دا ويکتورونه به مخالف جهت ولري، او له دې امله کار منفي دی. همدارنګه، $dU = 0$ دی که چيرې قوه د بيځای کيدو سره عمودي وي، ځکه چې $\cos 90° = 0$ دی، يا که چيرې قوه په ثابت ځای کې تطبيق شوی وي، په دې صورت کې بيځايکيدنه صفر ده.

د ډاټ محصول د تعريف له مخې وګورئ معادله (B–14) هريوله پورته معادلو په لاندې ډول ليکل کيدی شي

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

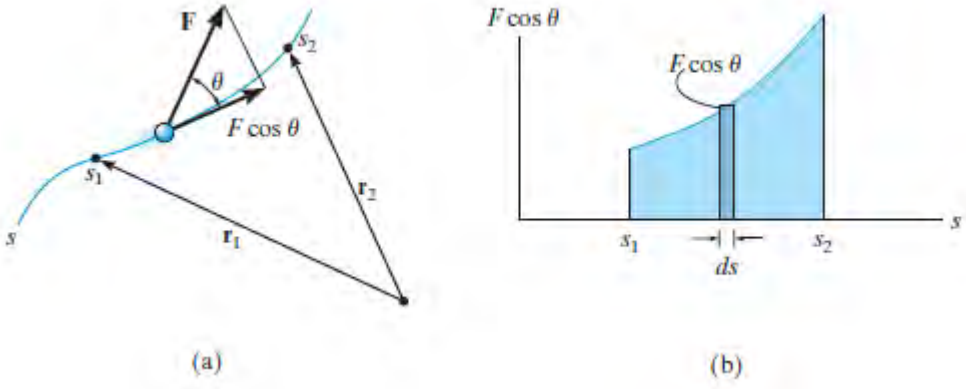
په SI واحدونو کې د کار واحد جول (J) دی، چې دا هغه اندازه د کار ده چې یو نیوټن قوه یې ترسره کوي کله چې دا په لوري د قوی یو متر فاصله حرکت وکړی(1 J = 1 N . m) . په FPS سیستم کې، کار په فوټ-پونډونو (ft . lb) سره اندازه کیږي، چې دا هغه کار دی چې یو پونډ قوه یې ترسره کوي کله چې دا د قوی په لوري یو فوټ فاصله حرکت وکړی. *

د متغیر قوی کار (Work of Variable Force): که چیرې په ذره باندې چې قوه **F** وربانديې عمل کوي په خپل مسیر کې له $\mathbf{r}_1$ څخه تر $\mathbf{r}_2$ پورې یا له s_1 څخه تر s_2 پورې یو محدود بیځای کیدل وکړي، لکه څنګه چې په انځور 14-2a کې ښودل شوی، نو د قوی **F** کار د انټیګرال په واسطه ټاکل کیږي. په دې شرط چې **F** او q د موقعیت تابع په توګه څرګند کیدی شي، نو بیا



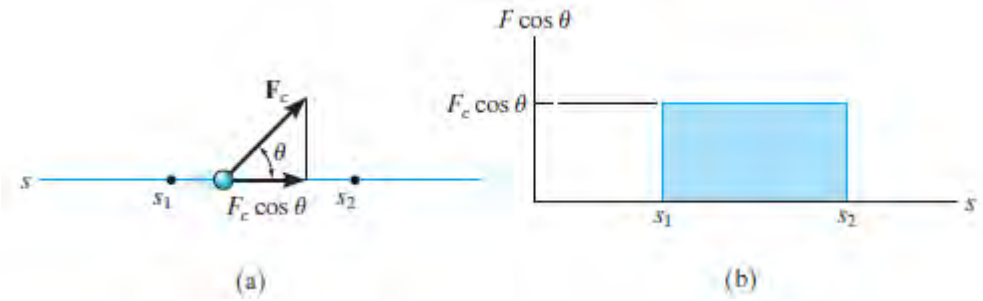
$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta \, ds \qquad (14\text{–}1)$$

ځینې وختونه، دا اړیکه د تجربوي معلوماتو په کارولو سره ترلاسه کیدی شي، چې د $F \cos q$ په مقابل کې د s ګراف رسم کړي. بیا په دې ګراف کې د s_1 او s_2 ترمنځ د ساحې لاندې سیمه د ټول کار استازیتوب کوي، لکه څنګه چې په انځور 14-2b کې ښودل شوی.



انځور 14-2

*د دود له مخې، د یوی قوی مؤمنټ (moment) یا تورک واحدونه lb . ft لیکل کیږي، تر څو دوی له هغو واحدونو څخه جلا شي چې د کار د نمایندګۍ لپاره کارول کیږي lb . ft .



انځور 14-3

د يوې ثابتې قوې کار چې په مستقيمه کرښه په حرکت کې وي

(Work of a Constant Force Moving Along a Straight Line):

که چيرې قوه $\mathbf{F}_c$ ثابته اندازه ولري او په يوه ثابت زاويه q د خپل مستقيمې کرښې لارې څخه عمل وکړي، لکه څنګه چې په انځور 14-3a کې ښودل شوی، نو د $\mathbf{F}_c$ جزيه هغه لوري کې چې بيځای کيږي تل به $\mathbf{F}_c \cos q$ وي. هغه کار چې د $\mathbf{F}_c$ لخوا ترسره کيږي کله چې ذره په دې حالت کې له s_1 څخه تر s_2 پورې بيځای کيږي د معادلې 14-1 څخه ټاکل کيږي، په دې حالت

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

يا

$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1)} \qquad (14\text{–}2)$$



کرېن بايد د پايپ د وزن پورته کولو لپاره کار وکړي

لته د $\mathbf{F}_c$ کار په انځور 14-3b کې د مستطيلي ساحې استازيتوب کوي.

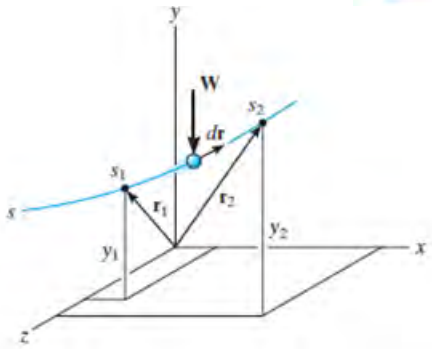
د تول کار (Work of a Weight): د يو ذرې په اړه فکر وکړئ چې وزن يا تول يې **W** دی، او دا د **s** په مسير کې له s_1 څخه تر s_2 پورې پورته ځي لکه څنګه چې په انځور 14-4 کې ښودل شوی. په يو منځني ټکي کې، بيځايه کيدل $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ دی. ځکه چې $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$ دی، د معادلې 14-1 په تطبيق سره مورږ لرو

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\, dy = -W(y_2 - y_1)$$

يا

$$U_{1-2} = -W\,\Delta y \qquad (14\text{–}3)$$



انځور 14-4

دلته کار د لارې څخه مستقل دی او د ذرې د تول اندازه ضرب د هغې عمودي انتقال سره برابردی. په دې مثال کې، کار منفي دی، ځکه چې W ښکته خوادی او Δy پورته دی. که ذره ښکته لورته (-Δy) ولاړه شي، نود تول کار مثبت دي

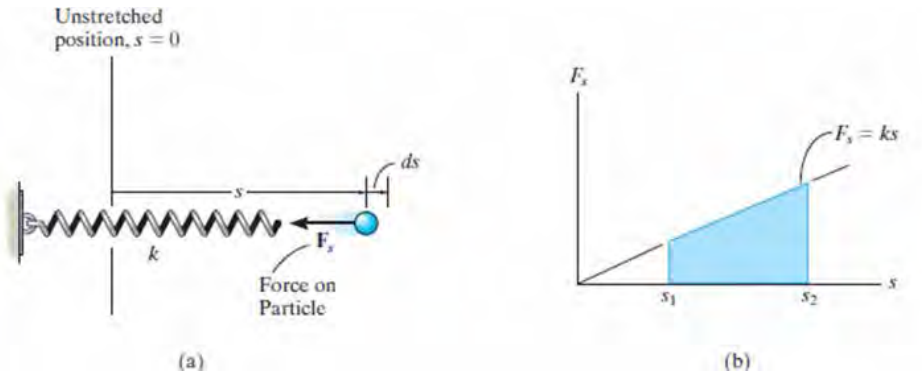
د فنر د قوې کار(Work of a Spring Force). که يوه الاستيکی فنر په يوه فاصله **ds** سره اوږد شي، لکه څنګه چې په انځور 14-5a کې ښودل شوی، نو هغه کار چې د قوې لخوا په ټرل شوې ذرې ترسره کيږي عبارت دي په $dU = -F_s\,ds = -\,ks\,ds$ دی. کار منفي دی ځکه چې F_s د **ds** په خلاف جهت کې عمل کوي. که ذره د s_1 څخه s_2 ته بيځايه شي، نو د $\mathbf{F}_s$ کار به بيا دا وي

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds$$

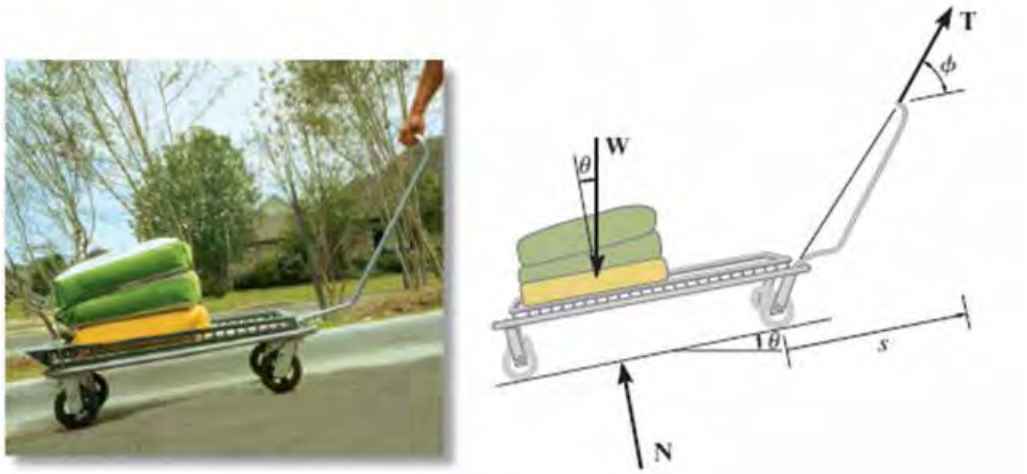
$$U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \qquad (14\text{–}4)$$

دا کار د $F_s = ks$ کربنې لاندې دذوذنقې سيمه ښيي، لکه څنګه چې په انځور 14-5b کې ښودل شوی.

د دې معادلې پلې کولو سره د نښې د غلطۍ مخنيوی کيدی شي که يوازې د فنر قوه چې په ذره باندې عمل کوی جهتونه يې پرتله شي — که دواړه په يوه شان جهت ولری، مثبت کار نتيجه ورکوي؛ که جهتونه يې مخالف وی، نو کار منفي دی.



انځور 14-5



په کارټ باندې هغه قوه چې دمايل په اوږدو پرتە د s فاصلې بيځايه کيدو لپاره پلې شويې، د آزاد بدن ډياګرام په توګه ښودل شوي دي. د کشولوڅابنه قوه T مثبت کار کوي چې $U_T = (T \cos \varphi)s$ دی، ټول منفي کار کوي چې $U_W = -(W \sin \theta)s$ دی، او عمودی قوه N هيڅ کار نه کوي ځکه چې د دې قوی په جهت کومه بيځايه کيدنه نشته.

مثالونه

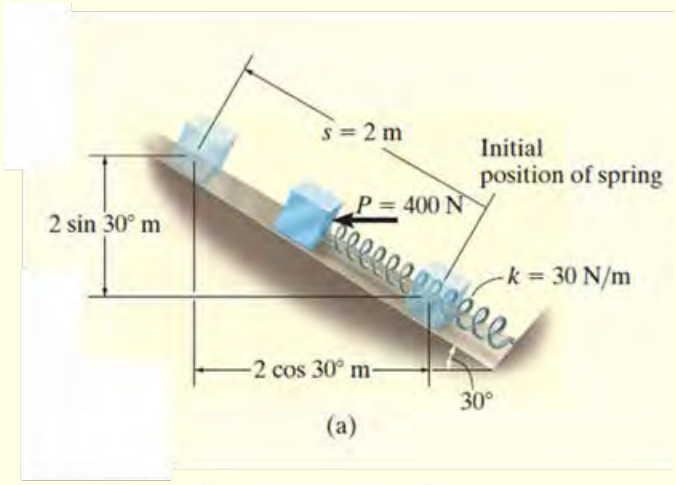
مثال 14.1

په انځور 14-6a کې يو 10 کيلو ګرامه بلاک په ښويه مايله سطحه پروت دي. که فنر په لمړۍ حالت کې 0.5 m متره اوږد شوی وي، د ټولو هغو قووچې په بلاک عمل کړي، کاريي محاسبه کړئ کله چې يوه افقی قوه P = 400 N بلاک د مايلی سطحې پورته لور ته 2 متره ټيلوهي.

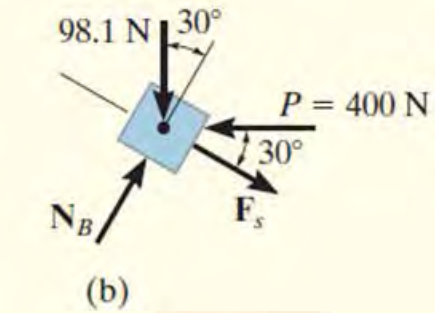
حل (SOLUTION)

لومړۍ د بلاک آزاد بدن ډياګرام رسم کړئ ترڅو ټولی هغه قوی وښيی چې په بلاک يی عمل کړي، انځور 14-6b .

افقي قوه *P* (Horizontal Force *P*): له هغه ځايه چې دا قوه ثابته ده، کارد معادلی 14-2 په کارولو سره ټاکل کيږي. پايله قوه ضرب د هغه بيځايه کيدنی چې د قوی په جهت کې وي محاسبه کيدی شي؛ يعنې،



$$U_P = 400\ \text{N}\,(2\ \text{m}\cos 30°) = 692.8\ \text{J}$$



يا بيځايه کيدنه ضرب د قوی د هغه جز چې د بيځايه کيدنی په جهت کې وي، يعنې

$$U_P = 400\ \text{N}\cos 30°(2\ \text{m}) = 692.8\ \text{J}$$

انځور 14-6

د فنر قوه F_s (Spring Force) . په لمړي موقعيت کې فنر $s_1 = 0.5$ متره اوږدشوي او د پايلې موقعيت کې فنر $S_2 = 0.5\ m + 2\ m = 2.5\ m$ اوږديږي . مور پوهيږو چې کار منفي دي ځکه چې قوه او حرکت د يو بل سره په مقابل کې دي. د فنر دقوی کارعبارت دی:

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(2.5\ \text{m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(0.5\ \text{m})^2\right] = -90\ \text{J}$$

تول W (Weight) .له دې امله چې تول د خپل عمودي حرکت سره په مخالفه جهت کې عمل کوي، نو کار منفي دی؛ يعني،

$$U_W = -(98.1\ \text{N})\,(2\ \text{m}\sin 30^\circ) = -98.1\ \text{J}$$

ياد ولرئ چې د تول هغه جز چې د حرکت په جهت کې دی، هم په پام کې نيول کيدی شي؛ يعني،

$$U_W = -(98.1\sin 30^\circ\ \text{N})\,(2\ \text{m}) = -98.1\ \text{J}$$

عمود قوه N_B (Normal Force N_B) . دغه قوه هيڅ کار نه کوي ځکه چې دا تل د حرکت د جهت سره عمودي ده .

ټول کار (Total Work). د ټولو قوو کار کله چې بلاک 2 متره حرکت وکړي، له دې امله دی:

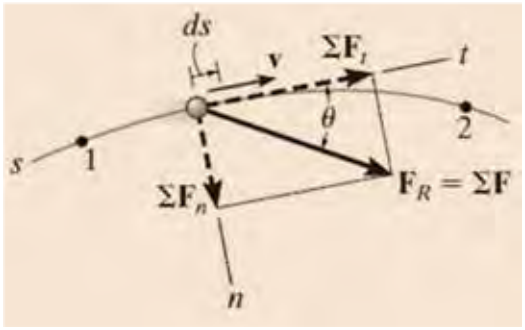
$$U_T = 692.8\ \text{J} - 90\ \text{J} - 98.1\ \text{J} = 505\ \text{J} \qquad \textit{Ans.}$$

14.2 د کار اود انرژۍ اصول (PRINCIPPLE OF WORK AND ENERGY)

په انځور 14-7 کې ښودل شوي يوه ذره چې کتله يې m ده اود بهرنيو قواو سيستم ورباندې عمل کړي چې د قوومحصله $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ ده، نو د ذرې د حرکت معادله په مماسي خوا کې عبارت ده له $\Sigma F_t = ma_t$. کينماتيکي معادله $a_t = v\,dv/ds$ گورو، او دواړې خواوې يې انتيگريت کوو ، په دې فرضيه سره چې په پيل کې ذره موقعيت او $s = s_1$ سرعت لري، او $v = v_1$ وروسته موقعيت او $s = s_2$ سرعت لري، نو مور لرو:

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{–}5)$$



انځور 14-7

له انځور 14-7 څخه، یاد ولرئ چې $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$ او له دې امله چې ټول کار د معادلې 14-1 له مخې تعریف شوی دی، پایله داسې لیکل کیدی شي:

$$\Sigma U_{1-2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{–}6)$$

دا معادله د ذرې لپاره ***د کار او انرژۍ اصول*** (*principle of work and energy*) بلل کیږي.

په کینه خوا کې اصطلاح د ټول کار مجموعه ده چې د ټولو قوو لخوا ترسره کیږي او پرذره باندې عمل کوي کله چې ذره له نقطې 1 څخه نقطې 2 ته حرکت کوي. د بښې خوا دوه اصطلاحات، چې شکل د $T = \frac{1}{2} m v^2$ لري، چې د ذرې پایلنې او لمړنۍ **کینیټیک انرژي** تعریفوي. لکه کار، کیینیټیک انرژي هم یوه سکیلر مقداردی او د ژول (J) او فټ - پونډ (ft . lb) واحدونه لري. خو د کار برعکس، چې مثبت یا منفي کیدی شي، کینیټیک انرژي تل مثبت وی، پرته له دې چې ذره په کوم لور حرکت کوي. البته، یاد ولرئ چې دا مهمه ده چې سرعتونه د انرشیل محورونو سیستم څخه اندازه شي.

کله چې معادله 14-6 تطبیق شي، دا اکثره په لاندې شکل کې څرګندیږي

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \qquad (14\text{–}7)$$

دا وایي چې د ذرې لمړنۍ کینیټیک انرژي جمع د ټولو قواوو لخوا ترسره شوی کار، چې پر ذره باندې عمل کوي کله چې ذره له خپل ابتدائي ځای څخه تر پای ځای پورې حرکت کوي، برابر دی د ذرې پایلنۍ کینیټیک انرژي ته.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د کار او انرژۍ اصول د هغو پوښتنو د حل لپاره کارول کیږي چې قوه، حرکت، او سرعت په کې شامل وي، ځکه چې دغه اصطلاحات د معادلې په جوړولو کې شامل دي. د تطبیق لپاره د لاندې کړنلاره وړاندیز کیږي:

کار (آزاد - بدن ډایګرام) (Free-Body Diagram) .

. انرشیل محوري سیستم وټاکئ او د ذرې آزاد بدن ډایګرام رسم کړئ ترڅو ټولې هغه قواوې حساب کړئ چې په ذره باندې عمل کوي کله چې ذره د خپلې لارې په اوږدو کې حرکت کوي.

د کار او انرژۍ اصول: (Principle of Work and Energy)

. د کار او انرژۍ اصول تطبیق کړئ $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$.

. په ابتدائي او پایلنې ټکو کې کینیټیک انرژي *تل مثبت* وي، ځکه چې دا د سرعت مربع حالت شاملوي $T = \frac{1}{2} m v^2$.

. یو قوه هغه وخت کار کوي کله چې په خپل جهت کې بیځایه کیدنه وکړي.

. کار مثبت دی کله چې د قوې جز د حرکت په سمت کې وي، که نه، نو منفي دی.

. هغه قواوې چې تابع د حرکت وي باید انتیګریټ شي ترڅو کار ترلاسه شي. په ګرافیکي توګه، کار عبارت دی په هغه ساحه چې د قوې اود حرکت منحنی لاند ی وی.

. د تول کار عبارت دی په تول ضرب د عمودي حرکت $U_W = \pm Wy$. دا مثبت دی کله چې تول پښکته حرکت وکړي.

. د فنر کار په دې ډول دی $Us = \frac{1}{2} ks^2$ ، چې k د فنر سختي ده او s د فنر د اوږدېدو یا غونجیدو مقدار دی.

د دې کړنلارې د تطبیق شمیرنې مثالونه د 14.3 برخې څخه وروسته څرګند شوي دي



که یو راتلونکی موټر د دې ټګر بیلرو سره ټکر وکړي، د موټر کینیټیک انرژي به په کار بدله شي، چې دا بیلرونه او تر یوه حده پورې موټر، به کارې کا. د دې سره چې د جذبېدونکی انرژي معلومه وي، دا امکان لري چې یو مناسب ټکر خنډ ډیزاین شي.

14.3 د ذرو د یوه سیسټم لپاره د کار او انرژۍ اصول (PRINCIPLE OF WORK AND ENERGY FOR A SYSTEM OF PARTICLES)

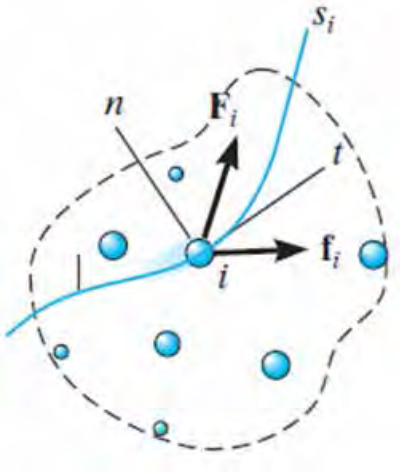
د کار او انرژۍ اصول د هغو ذرو سیسټم ته پراخېدلی شي چې په یوه ورکړل شویی فضا کې نغښتی وي لکه څنګه چې په انځور 8-14 کې ښودل شوي دي. دلته، د iم یوه انتخابی ذره، چې کتله یې m_i ده، د یوی محصلی بهرني قوی $\mathbf{F}_i$ او داخلی محصله قوه چې د نورو ټولو ذرولە خوا پرې عمل کوی $\mathbf{f}_i$ ده چې په iم ذره باندې عمل کوي. که مونږ د کار او انرژۍ دا اصول په دی او نوروټولوذرو باندې تطبیق کړو، نو کله چې کار او انرژي سکلر مقدارونه دي، معادلې کولی شي په الجبري توګه سره جمع شي، چې نتیجه یې دا وي:

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \qquad (14–8)$$

په دې حالت کې، د سیسټم ابتدائي کینیټیک انرژي او د ټول بهرني او داخلي قواوو لخوا ترسره شوی کار سره د سیسټم پایلنې کینیټیک انرژي سره برابر دی.

که چیرې سیسټم د یوه *سخت بدن خوځیدل* (*translating rigid body*) یا د یو لړۍ متصلو بدنوخوځیدل وی، نوپه دی حالت کې به ټولی ذری په هر بدن کې به په ورته اندازه خوځیدلیی وی.

له دې امله، د ټولو داخلي قواوو کار به مساوي خو مخالف خطي جوړه کې واقع شي او له دې امله یو بل به لغوه کړي. له بلې خوا، که بدن سخت نه وي (*nonrigid*)، د بدن ذرې ممکن په *مختلفو لارو* سره وغځول شي، او د قوې د تعاملاتو له امله ځینې انرژي به د تودوخې په توګه ضایع شي او د دایمي بدلونونو په حالت کې به په بدن کې ذخیره شي. موږ به په راتلونکي برخه کې او په برخه 15.4 کې د دې اغیزو په اړه لنډ بحث وکړو. په دې کتاب کې، د کار او انرژۍ اصول به هغو ستونزو ته تطبیق شي چېرته چې د دې ډول انرژي ضایعاتو مستقیم حسابول باید په پام کې ونه نیول شي.



انرشیایي محوري سیستم

انځور 14-8

د اصتکاک کار د ښویدو له امله (Work of (Friction Caused by Sliding

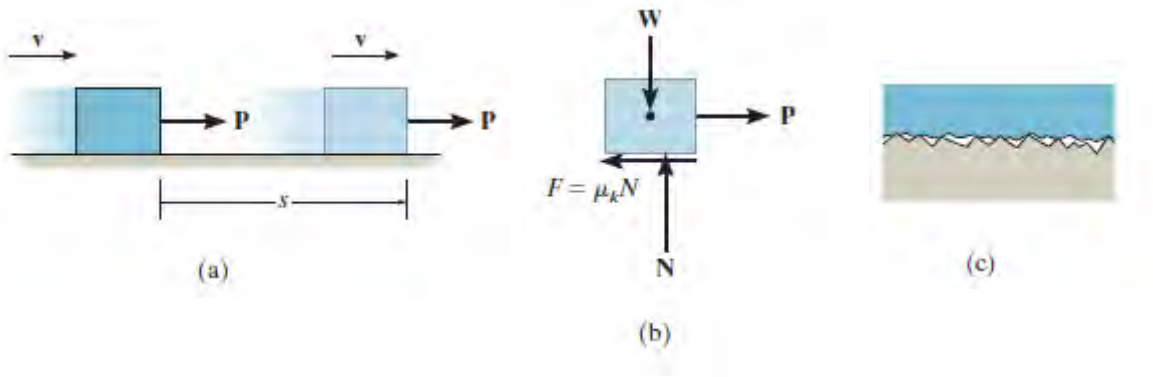
هغه ځانګړې پوښتنې به اوس وپلټل شي چې د پاملرنې سره معادلې 14-8 تطبیق ته اړتیا لري. دا ډول پوښتنې هغه حالتونه شاملوي چیرې چې اصتکاک واقع کیږي لکه څنګه چې یو بدن د بل بدن د تماس د سطحې په اوږدو کې ښویدل تجربه کړي . د مثال په توګه، په انځور 14-9a کې ښودل شوي یو بلاک په زیره سطحه باندې په فاصله د **s** حرکت کوي. که تطبیق شوی قوه ***P*** یوازې د اصتکاک محصلې قوی ***μkN*** سره متوازنه وي، لکه څنګه چې په انځور 14-9bکې ښودل شوي، نو د توازن له امله یو ثابت سرعت **v** ساتل کیږي، او یو به تمه وکړي چې معادله 14-8 په دې ډول تطبیق شي:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \frac{1}{2}mv^2$$

واقعاً، دا معادله تطبیق کیږي که $P = \mu_k N$ ؛ مګر، لکه څنګه چې د تجربې څخه پوهیږو، چې د ښویدلو حرکت تودوخه تولیدوي، چې یو ډول انرژي ده چې د کار-انرژۍ په معادله کې حساب شویی نه ده. د دې تناقض د توضیح لپاره او د اصتکاک نړدې استازیتوب کولو لپاره، موږ باید بلاک داسې موډل کړو چې د تماس سطحې ناسختی (nonrigid) وي.* یاد ولرئ چې د بلاک برخه زیره او د "غاښونو" په توګه عمل کوي، او کله چې بلاک وربانده وښویږي ، دا غاښونه لږ څه وازه وي او یا به مات شي یا به د تماس سطحې څخه د "غاښونو" سره جلا شي، لکه څنګه چې په انځور 14-9cکې ښودل شوي. د دې په پایله کې، د دې نقاطو په نړدې اصتکاکی قواوی چې

عمل کړي د ځای بدلولو له امله لږ څه حرکت کوي، او وروسته د نورو ټکو سره د تماس په جوړولو سره نوراصتکاکی قواوې ځای پر ځای کیږي. هر وخت، د دې ټولو اصتکاکی قواو محصله **F** اساساً ثابت پاتې کیږي، یعنې $\mu_k N$؛ مګر د ډیرو ځایې بیځایه کیدنو له امله، د $\mu_k N$ اصلي بیځایه کیدنه s' د تطبیق شوي قوه **P** د حرکت s سره ورته نه دی. پرځای، s' د s څخه کم وي($s' < s$) ، او له دې امله د نتیجوي اصتکاک قوه لخوا ترسره شوی خارجي کار به $\mu_k N s'$ وي او نه $\mu_k N s$ پاتې کار، $\mu_k N(s-s')$ د *داخلي انرژۍ په توګه* څرګندیږي، چې په حقیقت کې د بلاک د تودوخې زیاتوالي لامل کیږي.

په لنډ ډول، معادله 14-8 کولی شي د بنویدو اصتکاک سره پوښتنو ته تطبیق شي؛ مګر، باید په بشپړ ډول پوه شي چې د محصلوی استحکاک قوه کار د $\mu_k N s$ لخوا استازیتوب نه کوي؛ پرځای، دا اصطلاح د استحکاک خارجي کار ($\mu_k N s'$) او داخلي کار ($\mu_k N(s-s')$) دواړه استازیتوب کوي چې په مختلفو ډولونو کې داخلي انرژي ته بدلیږي، لکه تودوخه.#



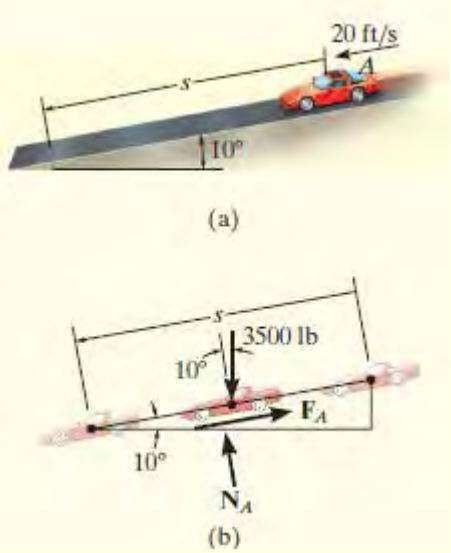
انځور 14-9

* فصل 8 د انجینری میخانیک ستاتیک وګوري.

د B.A. Sherwood او W.H. Bernard لیکنه “ Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction,” *Am. J. Phys.* 52, 1001 (1984).

مثالونه

مثال 14.2



انځور 14-10

یو 3500-lb موټر په انځور 14-10a کې ښودل شوی، د 10^o مایل سړک باندی په 20 ft/s سرعت سره حرکت کوي. که چیرې چلوونکی بریکونه ونیسی او د ټیرو څرخیدل بند شي، وښیی چې د موټر ټایرونه به څومره په فاصله s د سړک په سرو ښویږي . د ټایرونو او سړک تر منځ د کیینیټیک اصتحکاک ضریب μ_k=0.5 دی.

حل

دا پوښتنه د کار او انرژۍ اصولو په کارولو سره حل کیدی شي، ځکه چې دا د قوی، سرعت، او حرکت سره تړاو لري.

کار : آزاد بدن ډایګرام (Work : Free-Body Diagram) لکه څنګه چې په انځور 14-10 b کې ښودل شوي، عمودي قوه N_A هیڅ کار نه کوي ځکه چې دا هیڅکله د عمل کرښې اوږدو کې بیځایه کیدنه نه کوي. تول، 3500 پونډه، د $s \sin 10^\circ$ په اندازه حرکت کوي او مثبت کار کړي. ولې؟ د استحکاک قوه F_A کله چې s بیځایه کیدنه کړي دواړه خارجی او داخلی کار ترسره کوي . دا کار منفي دی ځکه چې د بیځایه کیدنی سره په مخالف سمت کې دی. د توازن معادله عمود په سړک سره تطبیق کوو ، مونږ لرو:

$$+\nwarrow \Sigma F_n = 0; \qquad N_A - 3500 \cos 10^\circ \text{ lb} = 0 \qquad N_A = 3446.8 \text{ lb}$$

له دې سره:

$$F_A = \mu_k N_A = 0.5\,(3446.8 \text{ lb}) = 1723.4 \text{ lb}$$

د کار او انرژۍ اصول: (Principle of Work and Energy)

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{–}2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(20 \text{ ft/s})^2 + 3500 \text{ lb}(s \sin 10^\circ) - (1723.4 \text{ lb})s = 0$$

حل کولو سره s لپاره:

$$s = 19.5 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : که چیرې دا پوښتنه د حرکت معادلی کارولو سره حل شي، دوی مرحلې شاملی دي.
لومړی، د آزاد بدن ډایګرام، انځور 14-10bکې، د حرکت معادله د مایل سره تطبیق کیږي ترڅو د تعجیل سستي (deceleration) ترلاسه شي. دا په لاندې ډول ده:

$$+\swarrow \Sigma F_s = ma_s; \qquad 3500 \sin 10^\circ \text{ lb} - 1723.4 \text{ lb} = \frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} a$$

$$a = -10.3 \text{ ft/s}^2$$

بیا، ځکه چې a ثابت دی، موږ لرو

$$(+\swarrow) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$$
$$(0)^2 = (20 \text{ ft/s})^2 + 2(-10.3 \text{ ft/s}^2)(s - 0)$$
$$s = 19.5 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.3

په انځور 14-11aکې کرین د لنډ و خت لپاره د 2.50 Mg (مګاګرامه) بیم د پورته کولو لپاره یوه قوه $F = (28 + 3s^2)$ kN کاروي . کله چې بیم $s = 3$ m پورته شي د بیم تیزوالي و ټاکئ. همدارنګه، د دې لوړوالی ترلاسه کولو لپاره د پیل څخه څومره وخت نیسي؟



(a)

انځور 14-11

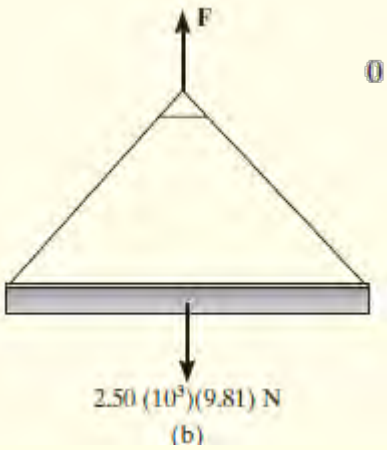
حل

موږ کولی شو د دې پوښتنې یوه برخه د کار او انرژۍ اصولو په کارولو سره حل کړو ځکه چې دا د قوې، سرعت، او حرکت سره تړاو لري. د وخت ټاکلو لپاره باید کینماتیک وکارول شي. یاد ولرئ چې په s=0 کې،
$F = 28\times10^3$ N > $W=2.50\times10^3\times9.81$N
نو حرکت به پیښ شي.

کار آزاد بدن ډایګرام (Work : Free-Body Diagram)

لکه څنګه چې په آزاد بدن ډایګرام انځور 14-11b کې ښودل شوي، د پورته کولو قوه ، **F** مثبت کار کوي، چې باید د انټګریشن له لارې معلوم شي ځکه چې دا قوه متغیر ده. همدارنګه، تول ثابت دی او منفي کار کوي ځکه چې حرکت پورته دی.

د کار او انرژی اصول: (Principle of Work and Energy)



$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)\,ds - (2.50)(10^3)(9.81)s = \tfrac{1}{2}(2.50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24.525(10^3)s = 1.25(10^3)v^2$$

$$v = (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

کله چې s =3 m

$$v = 5.47\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

انځور 11-14 (ادامه)

کینماتیکس (Kinematics) : **څرنګه** چې موږ سرعت تابع د حرکت ښودلی شو، معادله 1، نو وخت د $v = ds/dt$ په کارولو سره معلومیدلی شي. په دې حالت کې:

$$(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

$$t = \int_0^3 \frac{ds}{(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

دا انټګریشن په کارولو سره د وخت موندل ترسره کیدی شي. پایله ده:

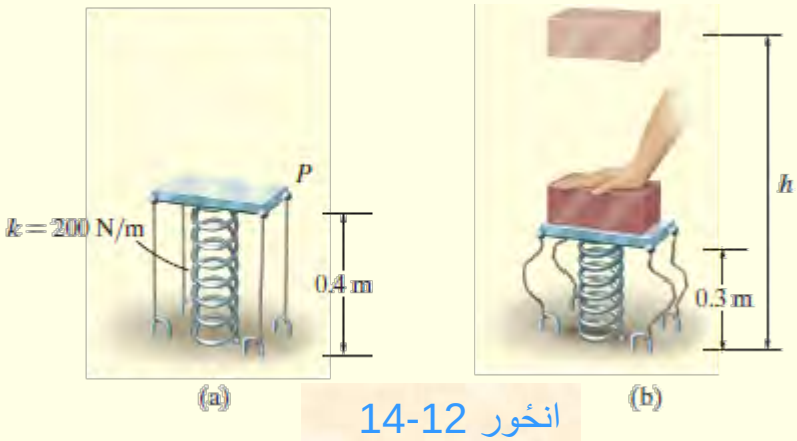
$$t = 1.79\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : د بیم د تعجیل ټاکل د معادلې 1 د انټګریشن له لارې ترسره کیدی شي چې

$v\,dv = a\,ds$ وکارول شی، او یا مستقیماً د حرکت معادله وکاروو $\Sigma F_Y = m\,a_Y$.

مثال 14.4

یوه تخته P ، چې په انځور 14-12aکې ښودل شوی، د پام وړ کتله نلري اوپه 0.4m اوږدو تارونو ټینګه شوی ده، تر څو 1 متر اوږد فنر په اندازه د 0.6 m (متر) غونج و ساتي، کله چې په تخته باندې هیڅ شی نه وي. که یو 2 کیلو ګرامه بلاک په تخته باندې کیښودل شي او له آرامه حالته خوشې شي وروسته له هغه چې تخته 0.1 متره ټیټه شوي، انځور 14-12b، د دې بلاک تر ټولو لوړه لوړوالی h چې له ځمکې نه اندازه کیږي، معین کړئ



انځور 14-12

حل

کار آزاد بدن ډایګرام (Work : Free-Body Diagram) **:** لکه څنګه چې بلاک له آرامه خوشې کیږي او وروسته یې تر ټولو لوړه لوړوالی ته رسیږي، د پیل او پای سرعتونه صفر دي. د بلاک آزاد بدن ډایګرام کله چې دی لا هم د تختی سره تماس لري، په انځور 14-12c کې ښودل شوی دی. یاد ولرئ چې وزن منفي کار کوي او د فنر قوه مثبت کار کوي. ولې؟ په ځانګړي ډول، د فنر د پیل غونجیدل $s_1 = 0.6\ m + 0.1\ m = 0.7\ m$ دی. د تارونو له امله، د فنر وروستی غونجیدل $s_2 = 0.6\ m$ دی (وروسته له دې چې بلاک د تختی نه لرې شي). د بلاک ښکته برخه د $(0.4\ m - 0.1\ m) = 0.3$ څخه تر پایلې لوړوالي h ته پورته کیږي.

د کار او انرژی اصول: (Principle of Work and Energy)

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \left[-\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - W\,\Delta y\right] = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

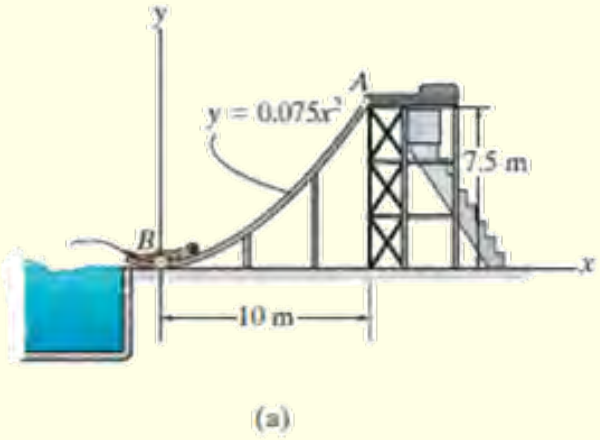
وګورو چې دلته $s_1 = 0.7\ \text{m} > s_2 = 0.6\ \text{m}$ دي، او د فنر کار د معادلې 14-4 له مخې به مثبت وي کله چې محاسبه ترسره شي. نو،

$$0 + \{-[\tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.6\ \text{m})^2 - \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.7\ \text{m})^2] - (19.62\ \text{N})[h - (0.3\ \text{m})]\} = 0$$

حل دا لاندې په لاس راځي

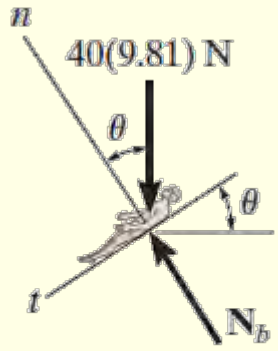
$$h = 0.963\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.5



(a)

40 کیلوګرامه هلک چې د اوبو بنویدلوتختی (water slide) باندې بښکته بنویږي تر څو له A موقعیت نه B موقعیت ته لاړ شي. که دهغه بنویدل له آرام حالت څخه پیل شي، د ده تیزوالی وټاکئ کله چې هغه د B موقعیت ته ورسیږي، او هغه عمودی ریکشن چې بنویدونکی تخته یې په دې موقعیت کې په هلک وارده وي معلوم کړئ



(b)

انځور 14-13

حل

کار آزاد بدن ډایګرام (Work : Free-Body Diagram) :

د آزاد-بدن ډیاګرام په اساس، چې په انځور 14-13bکې بنودل شوی، په هلک باندې دوی قواوي عمل کوي کله چې هغه په بنویدونکی تخته بښکته ځي. دلته عمودی قوه کار نه کړي.

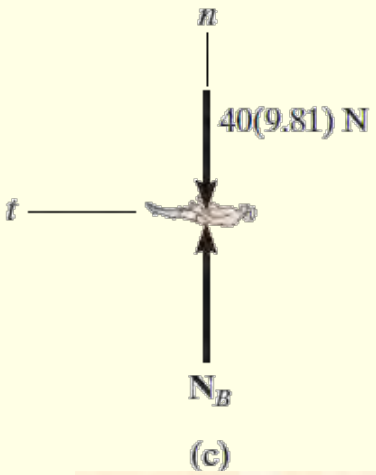
د کار او انرژۍ اصول: (Principle of Work and Energy): د کار او انرژۍ اصول کارول کیږي ترڅو د هلک سرعت په B موقعیت کې معلوم شي

$$T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$$
$$0 + (40(9.81)\text{ N})(7.5\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(40\text{ kg})v_B^2$$
$$v_B = 12.13\text{ m/s} = 12.1\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

د حرکت معادله (Equation of Motion) :

کله چې هلک په B نقطه کې وي، د آزاد - بدن ډیاګرام ته په اشاره انځور 14-13c ، د عمودی ریکشن $\mathbf{N}_B$ د حرکت له معادلې نه ترلاسه کیدی شي چې د n محور په اوږدو د حرکت معادله تطبیق شي. دلته د منحني مسیر شعاع په لاندې ډول ده:

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{[1 + (0.15x)^2]^{3/2}}{|0.15|}\right|_{x=0} = 6.667\text{ m}$$



(c)

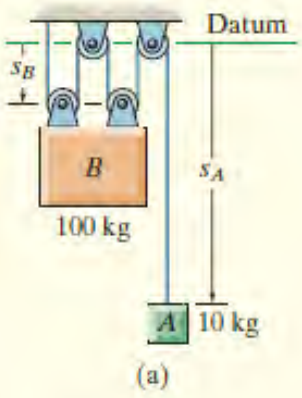
انځور 14-13 (ادامه)

په دی توګه

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N_B - 40(9.81)\ \text{N} = 40\ \text{kg}\left(\frac{(12.13\ \text{m/s})^2}{6.667\ \text{m}}\right)$$

$$N_B = 1275.3\ \text{N} = 1.28\ \text{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

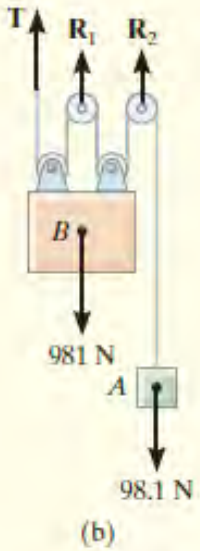
مثال 14.6 بلاکونه A او B چې په انځور 14-14a کې ښودل شوي دي، د هر یوه تول 10 کیلوګرام او 100 کیلوګرامه په ترتیب سره دی. د دې لپاره چې د B تیزوالی 2 متر پر ثانیه شي وروسته له دی چه له آرام حالت خوښی شي، بلاک B څومره فاصله طي کوي.



(a)

حل

ددې پوښتنې د حل لپاره بلاکونه په جلا توګه وګورو او د هر بلاک لپاره د کار او انرژۍ اصول به پلي کړو. مګر، دا اسانه ده چې د رسیو د کشش کار له تحلیل څخه له منځه وباسو او بلاکونه A او B د یو واحد سیستم په توګه وګورو.



(b)

کار: آزاد بدن ډایګرام (Work : Free-Body Diagram) : لکه څنګه چې په انځور 14-14b کې د آزاد بدن ډایګرام کې ښودل شوي، د رسۍ قوه **T** او ریکشنونه $\mathbf{R}_1$ او $\mathbf{R}_2$ کار نه کوي، ځکه چې دا قواوی د اتکا ځایونو کې ریکشنونه دي او په دې توګه حرکت نه کړي کله چې بلاکونه بیځایه کیږی. تولونه دواړه مثبت کار کوي که مونږ فرض کړو چې دواړه ښکته لور حرکت کوي، یعنی s_A او s_B د مثبت سمت په توګه، په انځور 14-14a کې.

د کار او انرژۍ اصول: (Principle of Work and Energy): د دې پوهیدو سره چې بلاکونه د استراحت نه خوشې شوي دي، مونږ لرو

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\left[\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right] + \left[W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\right] = \left[\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right]$$

$$[0 + 0] + [98.1\text{ N}\,(\Delta s_A) + 981\text{ N}\,(\Delta s_B)] = [\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2] \qquad (1)$$

کینماتیکس (Kinematics) : د کیماتیکس د طریقو په کارولو سره، چې په برخه 12.9 کې بحث شوي، د انځور 14-14a کې د ټولو عمودي رسیو ټول اوږدوالی l د موقعیتي محورونو s_A او s_B په واسطه سره څرګندیدلی شی.

$$s_A + 4s_B = l$$

له دې امله، د موقعیت د بدلون سره د بیځایه کیدنې معادله ترلاسه کیږي:

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0$$

$$\Delta s_A = -4\,\Delta s_B \qquad (2)$$

دلته د یوه بلاک لاندې بیځایه کیدل د بل بلاک پورته کیدو بیځایه کیدنه جوړه وي. د معادلې 2 مهالیز مشتق لاندې پایله ورکوي:

$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s} \qquad (3)$$

د معادلې 2 منفي نښه ساتل او په معادله 1 کې ځای پر ځای کول، دا لاندې پایله ورکوي:

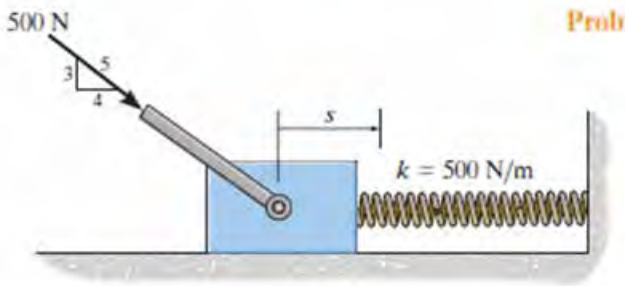
$$\Delta s_B = 0.883\text{ m}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : له دې امله چې مورږ اړ وو چې معادلې 3-1 په یو وخت کې حل کړو، دا مهمه ده چې دا معادلې ورته محورونوجهتونه د s_A او s_B لپاره ولیکئ.

بنسټیز پوښتنې

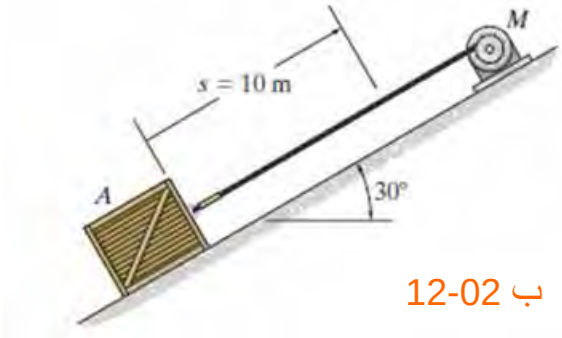
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 14.1 . یو فنر د دېوال او 10 کیلو ګرامه بلاک ترمنځ ایښودل شوی دی. که چیرې په بلاک یوه قوه $F = 500$ N عمل وکړي، د بلاک سرعت وټاکئ کله چې $s = 0.5$ متره وي. کله چې $s = 0$ وي، بلاک په ارام حالت کې دی او په فنر فشار نه وي.د تماس سطحه ښویه ده.



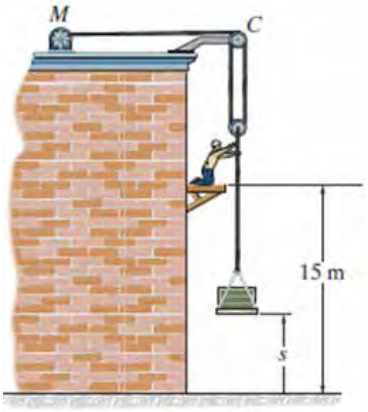
ب 14-01

ب 14.2 . که چیرې ماشین په کیبل یوه ثابت قوه 300 N وارده کړي، د 20 کیلو ګرامه صندوق سرعت وټاکئ کله چې هغه $s = 10$ متره پورته حرکت وکړي او له ارام حالت څخه پیل وکړي. د صندوق او سطحې ترمنځ د کینټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.



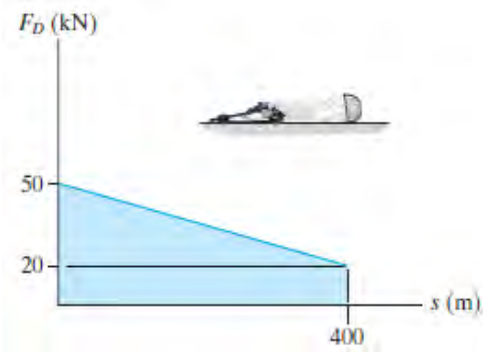
ب 12-02

ب 14.3 . که چیرې ماشین په کیبل یو قوه $F = (600 + 2s^2)$ N وارده کړي، د 100 کیلو ګرامه صندوق سرعت وټاکئ کله چې هغه $s = 15$ مترو پورې پورته شي. صندوق په لومړحالت کې په ځمکه باندې په ارام حالت کی دي.



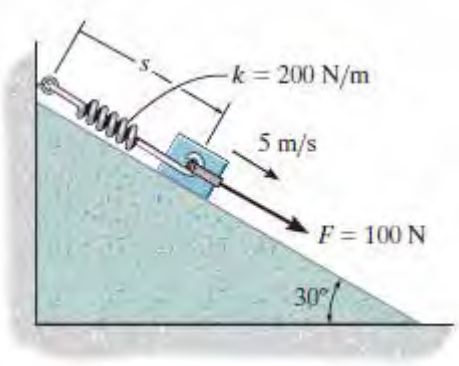
ب 12-03

ب 14.4 . دا لاندی 1.8 Mg(میګاګرامه) ډرګستر موټر کله چې ماشین يې ګول او پراشوټ يې خوشې شي په 125 m/s (متره/ثانیه) سرعت سره حرکت کوي. که د پراشوټ قوه د ګراف په توګه نږدې وښودل شی، د ډرګستر تیزوالی وټاکئ کله چې هغه 400 متره سفر وکړي.



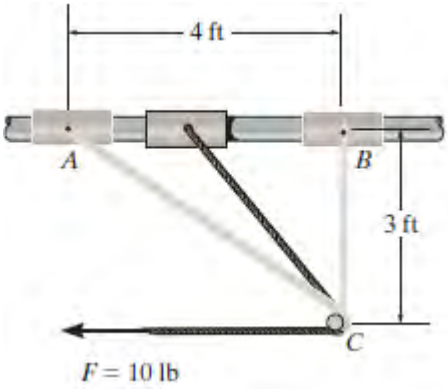
ب 12-04

ب 14.5 . :کله چې $s = 0.6$ متره وي، فنر بېخی نه دي غزیدلی او 10 کیلو ګرامه بلاک په ښویه سطحه باندې په 5 m/s (متره/ثانیه) تیزوالی ښکته کیږي. هغه فاصله وټاکئ کله چې بلاک ودریږي.



ب 14-5

ب 14.6 . 5 پونډه غاړه کی په رسی باندې کشیږي چې په C کی د میخ نه تاو شوی. که په رسی باندی ثابته قوه 10 lb وارده شي او غاړه کی په A کې په آرام حالت کی وي، د هغې سرعت وټاکئ کله چې هغه B ته نږدې کیږي. اصتحکاک په نظر کې مه نیسئ.



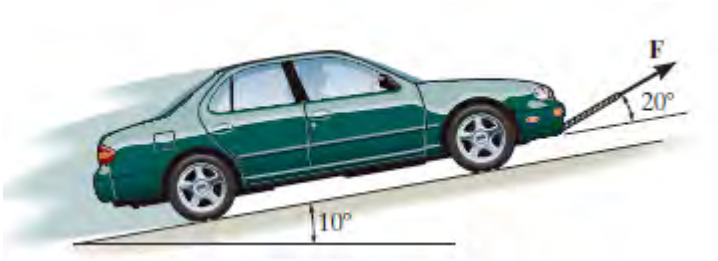
ب 14-6

PROBLEMS

پوښتنې

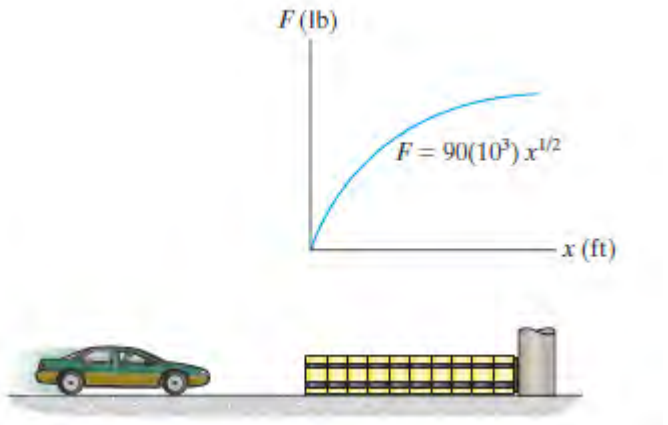
تول حلونه باید آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram)

14-1 . موټر چې 2 میګاګرامه کتله لري په لومړیو کې په 2 متره/ثانیه سره حرکت کوي. هغه فاصله وټاکئ چې په $F = 4$ kN قوه سره کش شي ترڅو د 5 متره/ثانیه تیزوالی ته ورسیږی. اصتحکاک او د ټیرونو کتله په نظر کې مه نیسئ.



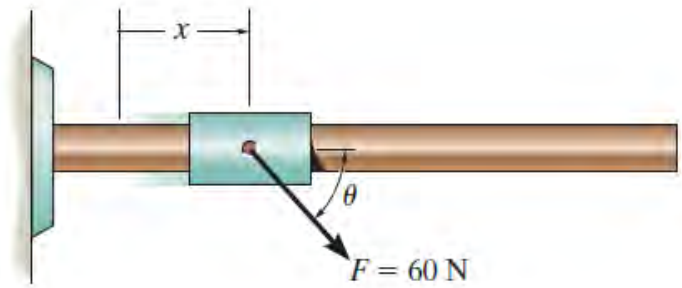
ب 14-1

14-2 . د پله د ستنیی د ساتنی د پاره، د خنډ ببرل یی مخې ته ایښودل شوی دي. که د خنډ د قوی او بیځایه کیدنې ترمنځ دا $F = (90(10^3)x^{1/2})$ lb اړیکه وي، چیرې چې x په فټو کې دی، د موټر اعظمي ننوتل په خنډ کې وټاکئ. موټر 4000 پونډه تول لري او کله چې خنډ ته نږدې کیږي په 75 ft/s (فوټو/ثانیه) تیزوالی سره حرکت کوي.



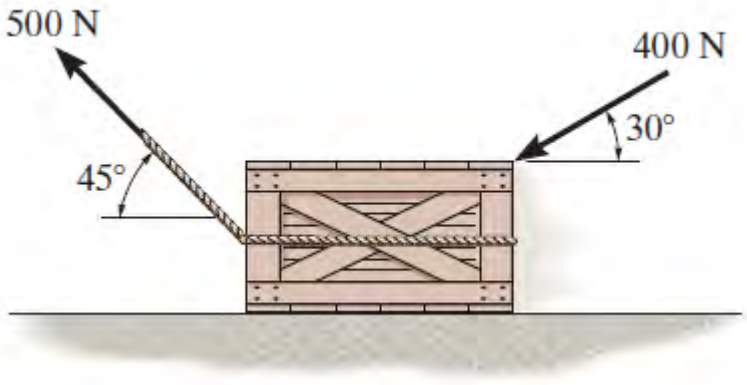
ب 14-2

14-3. غاړکی 5 کیلوګرامه کتله لري او کله چې $x = 0$ وي او 60 نیوټنه قوه وربانديځ وارده شي په 8 m/s سره حرکت کوي . د دې قوی سمت تغیر کوی چی په $q = 10x$ سره تعریف شوي، کله چې x په مترو کې دی او q د ساعت په لور په درجو اندازه کیږي. د غاړکی تیزوالی وټاکئ کله چې $x = 3$ متره وي. د غاړکی او راډ ترمنځ د کینټیکي اصتحکاک ضریب $\mu_k =$ 0.3 دی.



ب 14-3

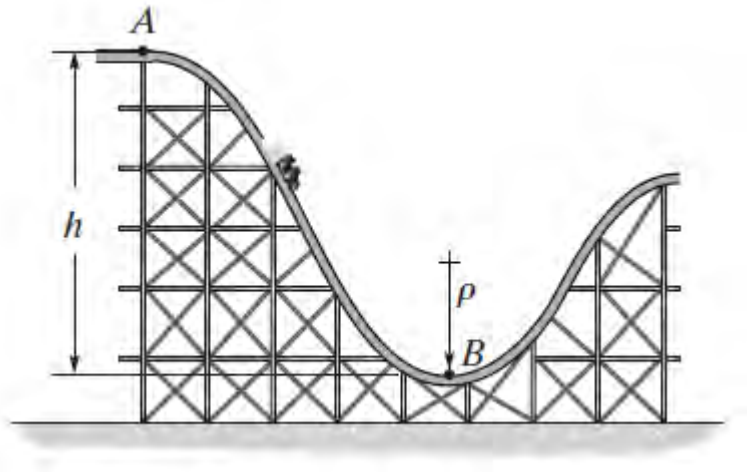
14-4. په د لاندی 100 کیلو ګرامه صندوق ښودل شوي قواوو عمل کړي دی. که دا په لومړی حالت کې په ارام حالت کې وي، هغه فاصله وټاکئ چې دا وښویږي ترڅو د 8 متره/ثانیه تیزوالی ترلاسه کړي. د صندوق او سطحې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دی.



ب 14-4

14-5. د رولر کوسټر اړین لوړوالی h وټاکئ ترڅو کله چې دا په دریدلي حالت کې په A غونډۍ کې وي، په B کې د 100 کیلومتره/ساعت تیزوالی ترلاسه کړي. همدارنګه، د منحني اړین

لږترلږه شعاع r په B کی وټاکئ ترڅو سواره له $4mg = (39.24m)\ N$ څخه ډیر عمودي قوه تجربه نه کړي. د موټر اندازه په نظر کې مه نیسئ .



ب 14-5

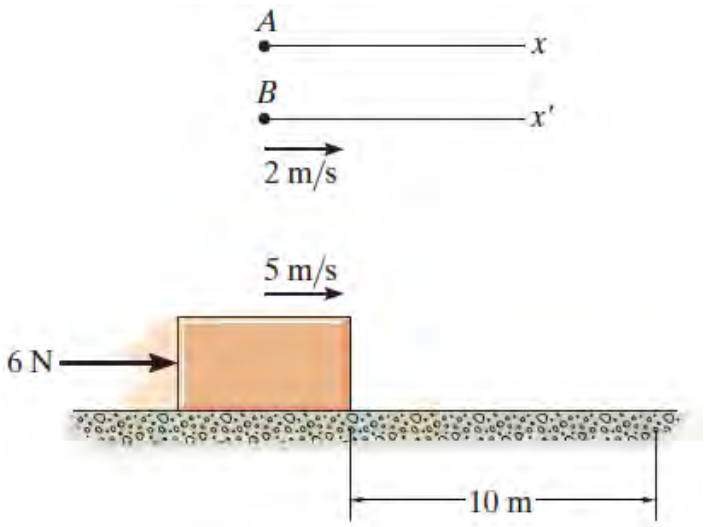
14-6. کله چې ډریور د یوې کوچنۍ لارۍ چې په 40 کیلومتره/ساعت حرکت کوي په بریکونو یې فشار وارد کړي ، نود درېدو څخه مخکې به 30 متره وښویږي. څومره به لارۍ وښویږي که چیرې دا په 80 کیلومتره/ساعت حرکت کوي او بریکونه فعال شي؟



ب 14-6

14-7. لکه څنګه چې د مشتق له مخې ښودل شوي، د کار او انرژي اصولو په چوکاټ کی د هرې انرشیال چوکاټ له مخی د لیدونکیو له خوا د قناعت وړ بلل کیږی. تاسو وښایاست چې دا اصول څنګه تطبیق کیږي کله چې یو 10 کیلو ګرامه بلاک په لاندی انځور کی چې په ښویه سطحه باندې پروت دی او 6 نیوټنه افقي قوی وربانډی عمل کړي دي. که لیدونکی A په ثابت چوکاټ x کې وي، د بلاک وروستی تیزوالی وټاکئ که لومړنی تیزوالی 5 متره/ثانیه ولري او 10 متره سفر وکړي، دواړه ښیي خوا ته دي او د ثابت چوکاټ څخه اندازه شوي دي. پایله د B لیدونکی سره پرتله کړئ، چې د x' محور پورې ټرلی دی او د A په نسبت په ثابت 2 متره/ثانیه سرعت سره حرکت کوي.

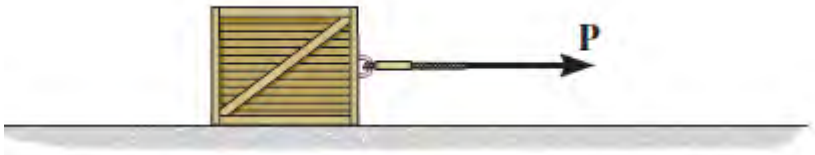
مرسته: د بلاک سفر فاصله به لومړی د B لیدونکی لپاره محاسبه شي مخکې له دې چې د کار او انرژۍ اصول تطبیق شي.



ب 14-7

***14-8.** که په 50 کیلو ګرامه صندوق د $P = 200$ N قوه عمل کړي وي، د هغه تیزوالی وټاکئ کله چې دا له دریدلي حالت څخه 15 متره حرکت کړي وي. د صندوق او ځمکې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.

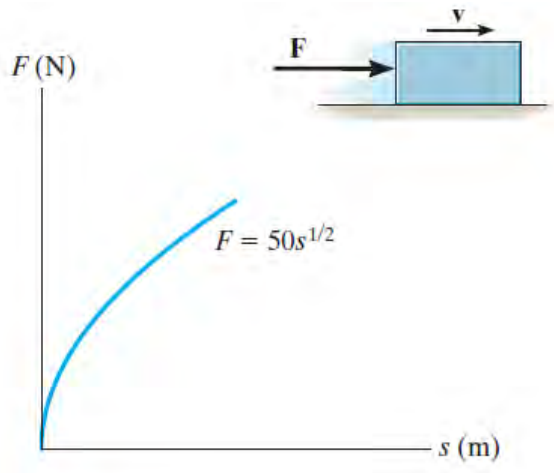
14-9. که 50 کیلو ګرامه صندوق له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کړي او د 6 متره/ثانیه سرعت ولري کله چې دا 15 متره فاصله حرکت وکړي، هغه قوه P وټاکئ چې په صندوق عمل کوي. د صندوق او ځمکې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.



ب 14-8/9

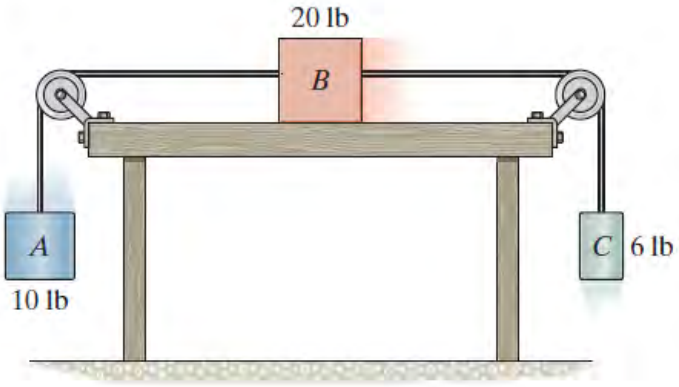
14-10. قوه **F** ، چې په ثابت سمت کې په 20 کیلو ګرامه بلاک باندې عمل کوي، د قوی اندازه د بلاک د موقعیت **s** سره توپیر مومي. بلاک څومره وښویږي ترڅو سرعت یې 15 m/s شی.

کله چې $s = 0$ وي بلاک په بڼي لور په $v = 6$ m/s حرکت کړي. د بلاک او سطحې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی



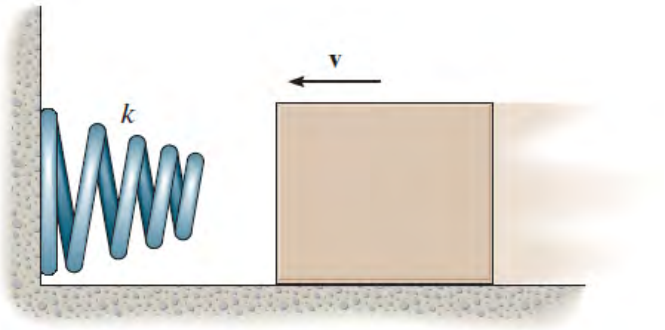
ب 14-10

14-11. په لاندی انځور کی بښودل شوي 20 پونډه بلاک B د میز په سطحه پروت دی چې د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.1$ دی. د 10 پونډه بلاک A تیزوالی وټاکئ کله چې دا له دریدلی حالت څخه 2 فوټ بښکته ولاړ شی. د څرخکیو او رسۍ کتله په نظر کې مه نیسئ.



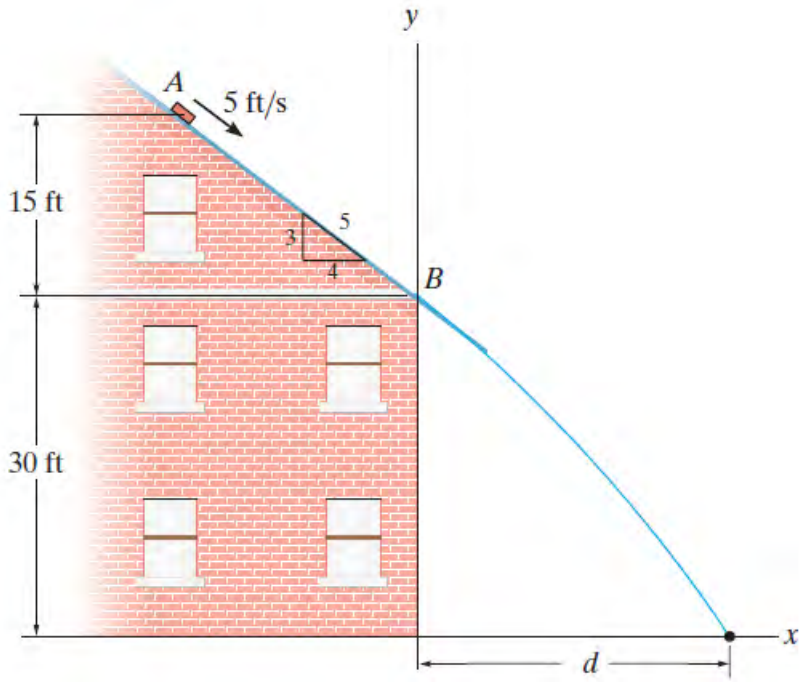
ب14-11

14-12. په لاندی انځورکی 1.5 کیلو ګرامه بلاک په بنویه سطحه باندې بنویږي او په $v = 4$ m/s تیزوالي سره په یوه غیرخطی (nonlinear) فنر ټکر کوي. فنر "غیرخطی" بلل کیږي ځکه چې $F_s = ks^2$ مقاومت لري، چیرې چې $k = 900$ N/m^2 دی. دبلاک تیزوالی وټاکئ کله چې فنر د بلاک له کبله $s = 0.2$ متره غونج شوی.



ب 14-12

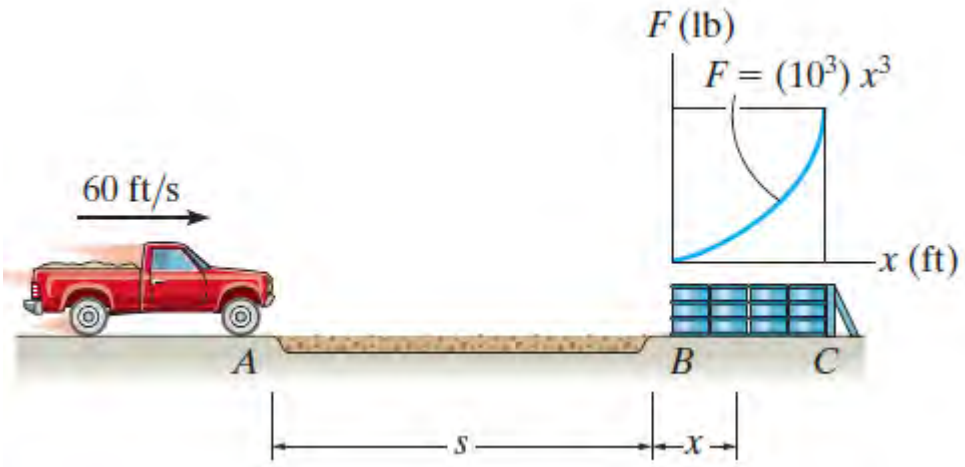
14-13. په دی لاندی انځور کی 2 پونډه خښته په یوه ښوی بام ښویږی، کله چې په A کې وي، سرعت یې 5 فوټو/ثانیه دی. د خښتی تیزوالی کله چې د B نه تیریږی، هغه فاصله d له دیوال څخه چې په مځکه لګی، اوهغه تیزوالی چې به مځکه لویږی وټاکی.



پ 14-13

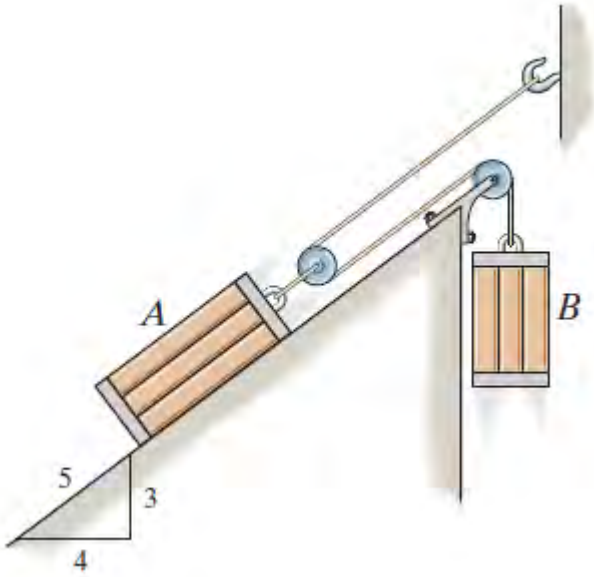
14-14. د ټرک حرکت د AB سطحی ډبرو او د BC ټکر بېرلونو په واسطه درول شوي. که تجربو ښودلي وي چې ډبرې په هر څرخ باندی 160 پونډه مقاومت واردوی اود ټکر بېرلونه داسی مقاومت چمتو کوي لکه څنګه چې په لاندی ګراف کې ښودل شوی، هغه فاصله x وټاکئ چې

4500 پونډه ټرک په ښارلونو کې ننوځي کله چې دی A ته نږدې کیږي په 60 ft/s حرکت کوي. دلته $s = 50$ ft واخلئ او د ټرک اندازه په نظر کې مه نیسئ.



ب 14-14

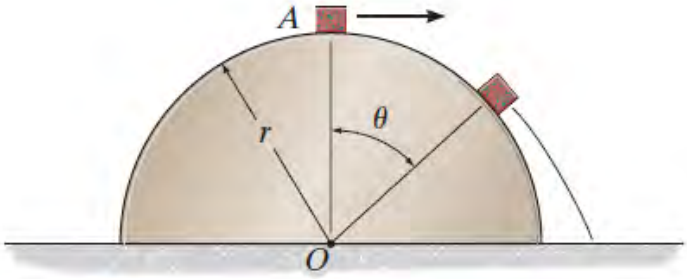
14-15. دوه بلاکونه A او B د $W_A = 60$ lb او $W_B = 10$ lb تول لري. که د مایلی سطحې او A بلاک ترمنځ متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ وي، د A تیزوالی وټاکئ وروسته له دې چې دا له دریدلي حالت څخه 3 فوټه ښکته حرکت وکړی. د رسۍ او څرخکیو کتله په نظر کې مه نیسئ.



ب 14-15

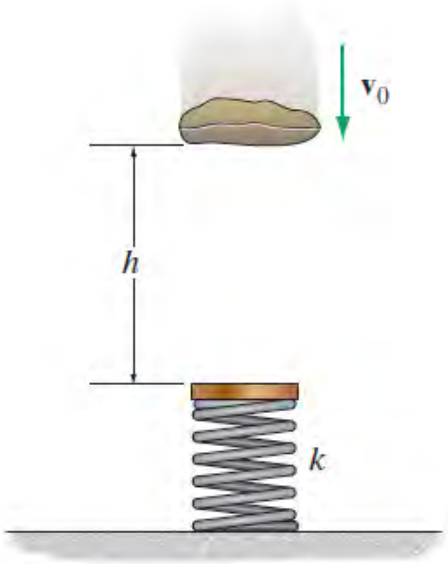
***14-16.** یو کوچنی صندوق چې m کتله لري، د یوه ښوي نیمه سلنډر په پورته برخه باندې په

$v = \sqrt{\frac{1}{4} gr}$ تیزوالی سره ایښودل شوی. هغه زاویه q وټاکئ چې صندوق له سطحې څخه جدا شی.



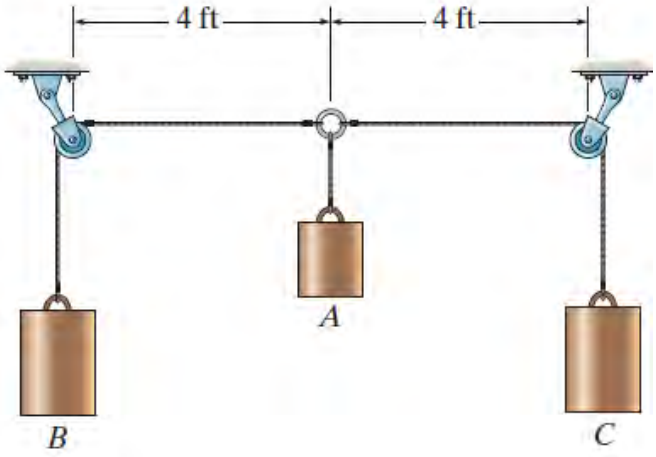
ب 14-16

14-17. یو بوجی چې m کتله او v_0 سرعت لري او په لوړوالي h له یوه نه غزیدلی فنرڅخه موقعیت لري. د فنر اعظمي غونجیدل وټاکئ که چیرې د k سختی ولري.



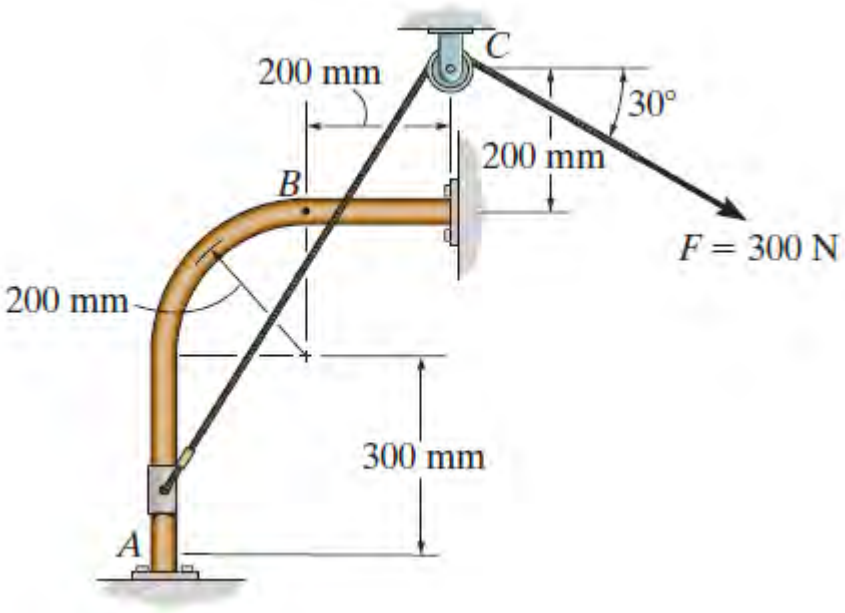
ب 14-17

14-18. کله چې د 12 پونډه بلاک *A* له دریدلی حالت نه خوشې شي، دا د 15 پونډه تول لرونکي *B* او *C* پورته کوي. هغه اعظمي فاصله وټاکئ چې *A* به ښکته شي مخکې له دې چې حرکت يې لنډ مهاله ودريږي. د رسۍ تول او دځرخکيو اندازه په نظر کې مه نيسئ.



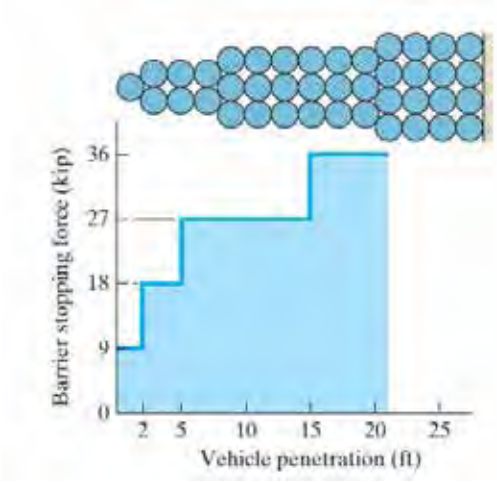
ب 14-18

14-19. که په رسۍ ثابت 300 نيوټن قوه وارد شي او 15 کيلو ګرامه ښويه غاړه کی له دريدلي حالت څخه په *A* کې پيل وکړي، د غاړه کی سرعت وټاکئ کله چې دا *B* نقطې ته ورسيږي. د څرخکي اندازه په نظر کې مه نيسئ.



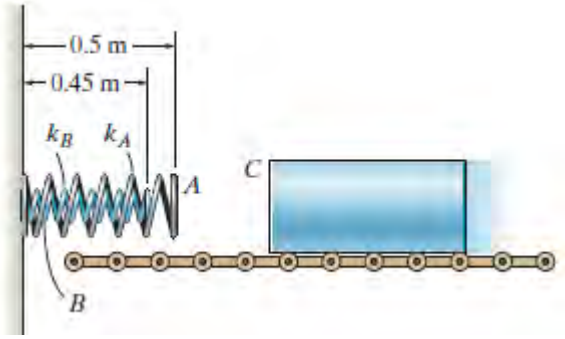
ب 14-19

*14-20. د لوېي لارې د خنډ جذبونکی قوی لپاره، د خنډ ښېرلونو چی د داسی موادو څخه ډک دی چی د ټکر دپاره مقاومت لری جوړ شوی. د خنډ دریدلو قوه کومه چی اندازی شوی نسبت هغه فاصلی ته چی موټر په بیرلو کی ننوزی له تجربی څخه په ګراف کی ښودل شویي. یو موټر چې 4000 پونډه تول لري او په 55 فوټو/ثانیه حرکت کي لومړي بیرل وهي. ددی موټر په خنډ کې د ننوتلو فاصله وټاکئ .



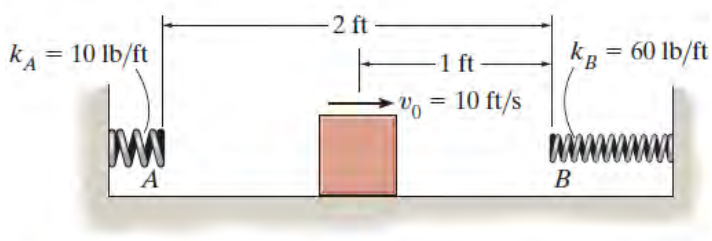
ب 14-20

14-21. د فولادو خښته (ingot) 1800 کیلو ګرامه کتله لري. دا په $v = 0.5$ m/s تیزوالي سره په لیږدونکي باندې حرکت کوي او دا له یوځای شوي "nested" فنر سره ټکر کوي. د هر فنر اعظمي بیځایه کیدل ترڅو چې د خښتې حرکت ودروي وټاکئ . $k_A = 5$ kN/m ، $k_B = 3$ kN/m و کاروئ.



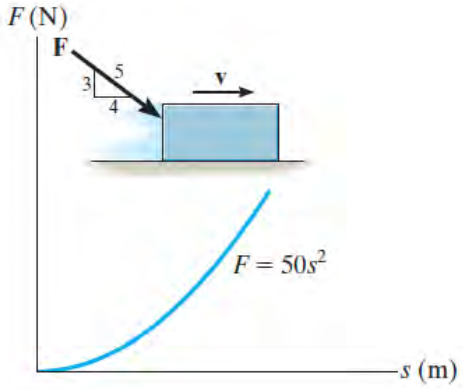
ب 14-21

14-22. دا لاندی ښودل شوي 25-lb بلاک د A او B فنرونو ترمنځ په لمړی تیزوالی $v_0 = 10$ ft/s حرکت لري. وروسته له دې چې په B فنر باندې ټکر کوي، دا بیرته را ګرځي او په افقی سطحه باندې د A فنرپه لور حرکت کوي، او دی مخ په وړاندې او بیرته تګ ته دوام ورکوي. که د سطحې او بلاک ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu k = 0.4$ وي، هغه ټوله فاصله چې بلاک به یې طي کړي، مخکې له دې چې په ارامې حالت کې ودریږي، وټاکئ.



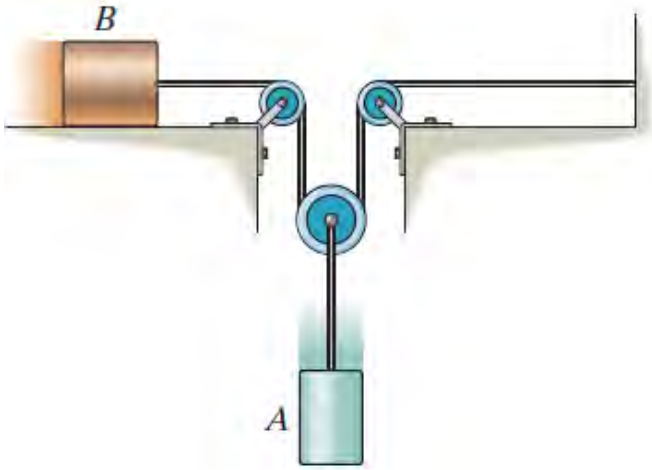
ب 14-22

14-23. قوه **F** ، په ثابت سمت کې په 20 کیلو ګرامه بلاک باندې عمل کوي، د قوی مقدار د بلاک د موقعیت s سره په ګراف کی ښودل شوي دي. د بلاک سرعت وټاکئ وروسته له دې چې دی 3 متره وښوییږی. کله چې $s = 0$ وي، بلاک ښي خوا ته په 2 متره/ثانیه سره حرکت کوي. د بلاک او سطحې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.



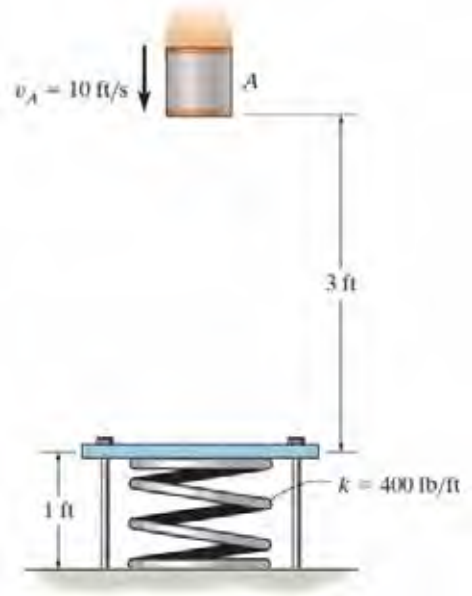
ب 14-23

***14-24.** په یوې ټاکلې شیبه کې 10 پونډه بلاک A په 6 فوټو/ثانیه تیزوالی سره ښکته کیږي. د ده تیزوالی 2 ثانیې وروسته وټاکئ. بلاک B 4 پونډه وزن لري، او د افقی سطحې او ده ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu k = 0.2$ دی. د رسۍ او څرخکیو کتله په نظر کې مه نیسئ.



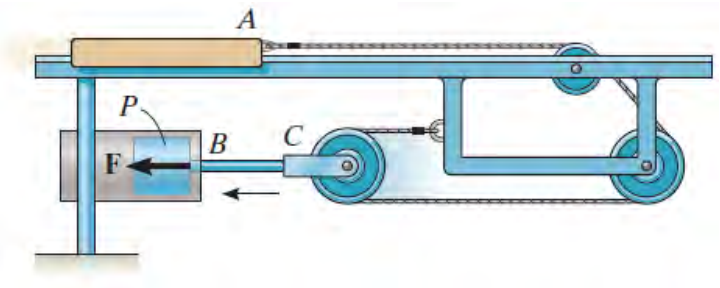
ب 14-24

14-25. 5 پونډه سلنډر له A څخه په $v_A = 10$ ft/s تيزوالي سره په تخته باندې لويږي. د تختې اعظمي بې ځايه کيدل د ټکر له امله وټاکئ. فنر 1.75 فوټه صلی اوږدوالی لري او د تختې سره په 1 فوټه رسيو ټرل شوی چې تر فشار لاندی غونج شوی. د تختی او فنر کتله او له لاسه تللې انرژي د ټکر په جريان کې په نظر کې مه نيسئ.



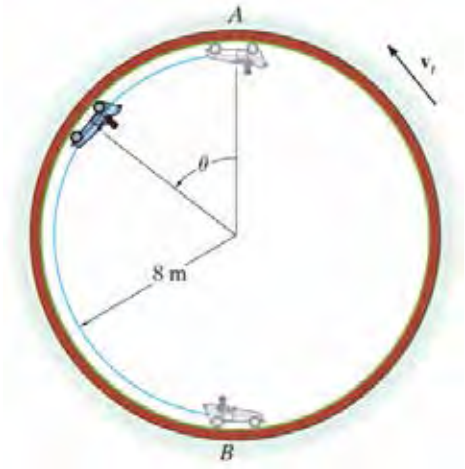
ب 14-25

14-26. د منجنیق میکانیزم د دې لپاره کارول کیږي چې 10 کیلوګرامه سلایډر *A* په بنویه لار باندې بنې خوا ته وغورځوي. د غورځولو عمل د څرخکیو په چټکی کشکول چې د *BC* راډ سره ټرل شوي چپې خوا ته د پیستون *P* په واسطه ترسره کیږي.که پیستون ثابته قوه $P = 20\ kN$ په *BC* راډ واړده کړی ترڅو چې دی 0.2 متره حرکت وکړي، د سلایډر ترلاسه شوی تیزوالی وټاکئ که دی لومړی په دریدلی حالت کې وي. د څرخکیو، رسۍ، پیستون، او *BC* راډ کتلی په نظر کې مه نیسئ.



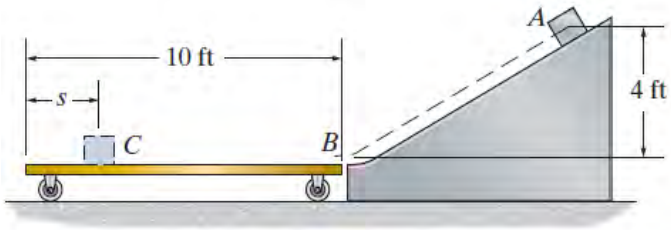
ب 14-26

14-27. " الوتونکی موټر" یو ډول لوبه ده چې په یوه ساعتتیری پارک کې موقعیت لري. دا له داسی موټر څخه جوړشوی چې تیرونه (Wheels) لري چې په یوه پټلی (Track) کې ګرزی چې د څرخیدونکی ډرم د دننه نصب شوی ده. ددیزاین له مخې موټر نشي کولی له پټلی ولولیږي، مګر د موټر حرکت د بریک په تطبیقولو سره رامینځته کیږي، او موټرچی د پټلی سرپښ دی په v_t *v*= 3 m/s ثابت تیزوالی سره حرکت کوي. که موټر چلوونکی بریک ونیسی چې د *B*نه *A*ته ولاړ شی او بیا یې د ډرم په لوړه څوکه کې، *A* ، خوشې کړي، ترڅو چې موټر په آزاد ډول په پټلی کې *B* ته ورسیږی، په *B* کې د موټر سرعت او هم هغه عمودی ریکشن چې ډرم په *B* کې په موټر واردوی وټاکئ. د *A* څخه *B* پورې په حرکت کې اصتحکاک په نظر کې مه نیسئ. موټر چلوونکی او موټر، ټول 250 کیلوګرامه کتله لري، او د موټر او موټر چلوونکي د ثقل مرکز په یوه دایره وی لاره کې حرکت کوي چې 8 متره شعاع لري.



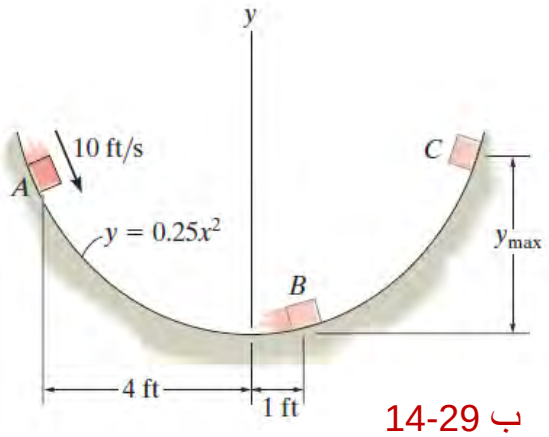
ب 14-27

*14-28. په لاندی انځور کی یو 30 پونډه بکس A له دریدلي حالت څخه او په یوې ښویی مایلی سطحې باندې خوشې کیږي او د یوی ګاډي په سطحه کی لویږي . که د ګاډی له حرکت څخه مخنیوی شوی وي، هغه فاصله s د ګاډي له آخر څنډی تر بکس پورې چې بکس به ودریږي وټاکی. د ګاډي او بکس ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.6$ دی.



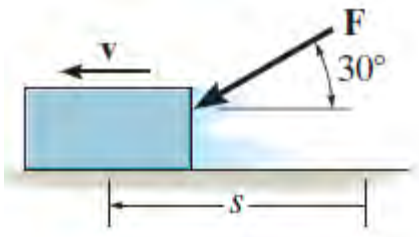
ب 14-28

14-29. یو 2 پونډه بلاک په ښویه پارابولیک سطحه باندې ښویږي ، داسې چې کله چې دی په A کې وي، په 10 فوټو/ثانیه تیزوالي سره حرکت کوي. د بلاک سرعت او تعجیل وټاکئ کله چې دی B ته ورسیږي، او هم اعظمي لوړوالی y_{max} چې بلاک ورته ورسیږي معلوم کړي.



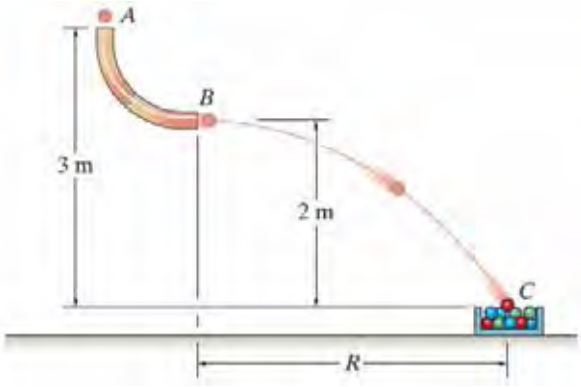
ب 14-29

14-30. په یو 2 کیلو ګرامه بلاک باندی یوه قوه چې ثابت جهت لري او اندازه د قوی په معادله $F = (300/(1 + s))$ N تعریف شوی، وارده شویی چیرې چې s په مترو کې دی. کله چې $s = 4$ متره وي، بلاک په کین طرف 8 متره/ثانیه تیزوالی سره حرکت کوي. کله چې $s = 12$متره وي، د بلاک تیزوالی وټاکئ. د بلاک او ځمکې ترمنځ د متحرک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.25$ دی.



ب 14-30

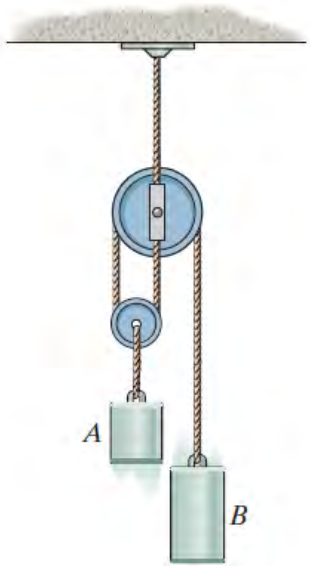
14-31. مردکی چې 5 ګرامه کتله لري له ارام حالت څخه په A کې خوشې کیږي او په ښوی شیشې ټیوب کې ښکته کیږي او په C کې په یوه ډبلې کې راټولیږي. د ټیوب د پای څخه د ډبلې فاصله R او هم هغه سرعت چې په کوم سره مردکی په ډبلې کې غورځیږي وټاکئ. د ډبلې اندازه په نظر کې مه نیسئ.



پ 14-31

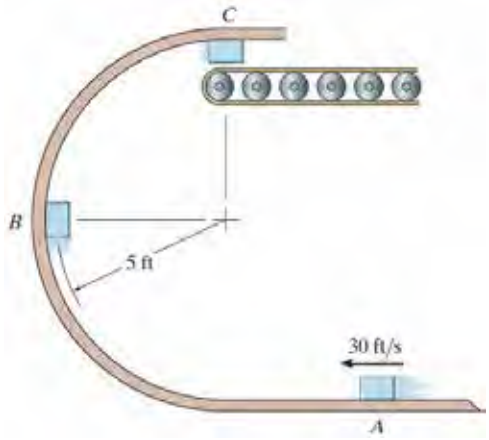
14-32*. یو 8 کیلوګرامه سیلنډر A او 3 کیلوګرامه سیلنډر B له دریدلی حالت څخه خوشې شوي. د A د تیزوالي اندازه وروسته له دې چې دا د د دریدلی حالت نه 2 متره حرکت کړي، وټاکئ. د تار او څرخکیو کتلې ته پام مه کړي.

14-33. سیلنډر A 3 کیلوګرامه کتله لري او سیلنډر B د 8 کیلوګرامه کتله لري. د A تیزوالی معلوم کړئ وروسته له دې چې دی د دریدلی حالت نه 2 متره حرکت وکړي. د تار او څرخکیو کتلې ته پام مه کړي.



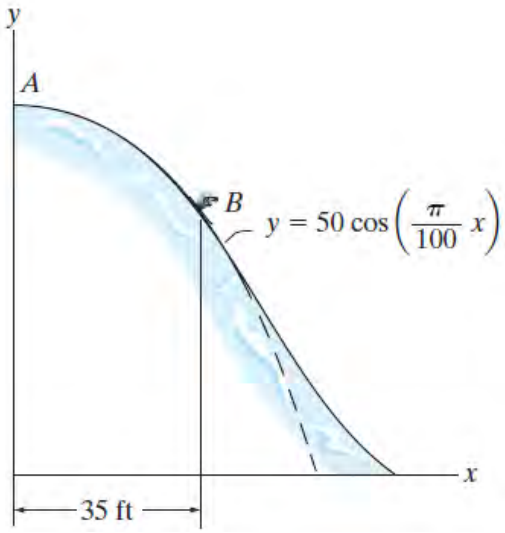
ب 14-32/33

14-34. یو 2 پونډه صندوق پر ښویه دایره‌ای منحنی لاره باندې ښویږي. که صندوق په نقطه A کې 30 فټ/ثانیه سرعت ولري، د صندوق سرعت او په منحنی لاره باندې د عمودی قوی اندازه معلومه کړئ کله چې صندوق په نقطه B او C کې وي. فرض کړي چې د مسیر د انحنا شعاع په C کې 5 فټه پاتې دی.



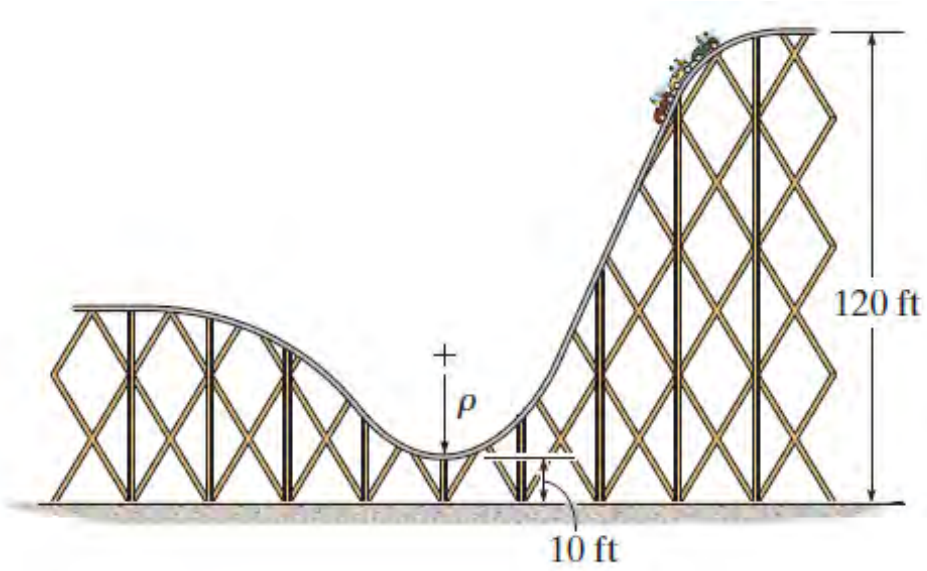
ب 14-34

14-35. کله چې 150 پونډه سکی کونکی(skier) په نقطه A کې وي، هغه د 5 فټ/ثانیه تیزوالی لري. د هغه تیزولی معلوم کړئ کله چې هغه په ښوی میلان نقطه B ته ورسیږي. د دې فاصلی لپاره، میلان د کوساین منحنی چې ښودل شوی تعقیبوي. همدارازه، په نقطه B کې د ده په سکیو باندې د عمودي قوه اندازه څه ده، او د تیزوالي زیاتوالي کچه یې څه ده؟ د اصتحکاک او د هوا مقاومت ته پام مه کوئ.



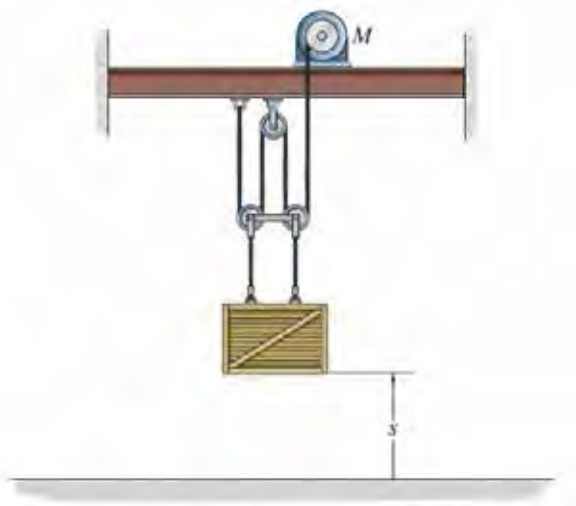
ب 14-35

*14-36. رولر کوسټرونه داسې ډیزاین کیږي تر څو سواره پر څوکیو باندې له 3.5 برابرد خپل تول زیاته عمودی قوه د موټر په چوکی تجربه نه کړي. د لارې په ټیټه برخه کې د انحنا ترټولو کوچنی شعاع r معلوم کړئ که چیرې موټر د 5 فټ/ثانیه تیزوالی د ډګ په سر کی ولري. اصتحکاک په بام کی مه نیسی.



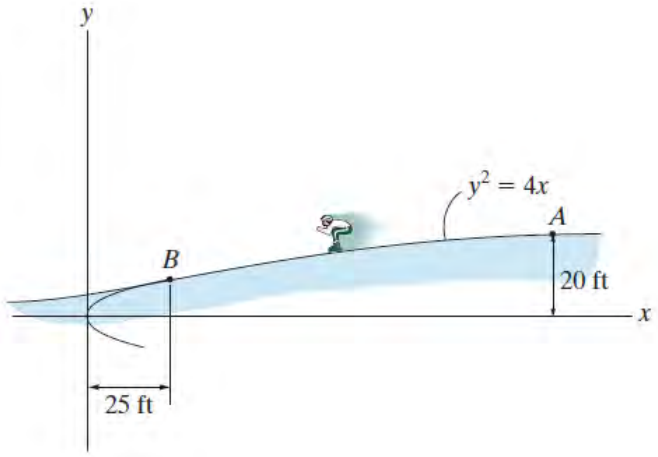
ب 14-36

14-37. که د موټر M لخوا په کیبل باندې لګول شوې قوه 250 N وي، د 100 kg صندوق تیزوالی معلوم کړئ کله چې دی $s = 3$ m لوړ شي. کله چې $s = 0$ کې وي سندوق په دریدلی حالت کی دی.



ب 14-37

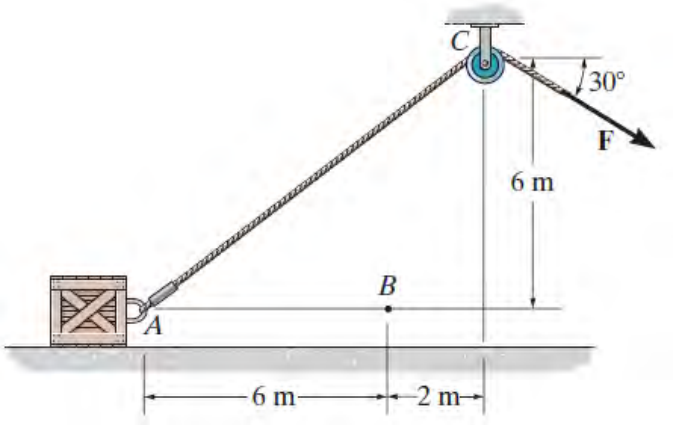
14-38. 150 پونډه سکی کونکی په نقطه A کې د 6 ft/s تیزوالی سره تیریږي. د هغه سرعت معلوم کړئ کله چې هغه نقطه B ته ورسیږي او هم په دې نقطه کې هغه عمودی قوه چې د پټلی نه په ده واردیږی وټاکی. اصتکاک ته پام مه کوئ.



ب 14-38

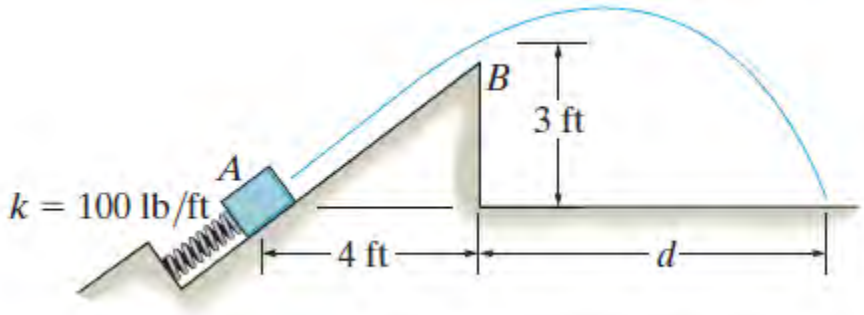
14-39. که 75 کیلوګرامه بکس د A نه د دریدلی حالت څخه پیل وکړي، د ده سرعت معلوم کړئ کله چې B نقطی ته رسیږي. په کیبل باندی یوی ثابتی قوی $F = 300$ نیوټنه عمل کړي. اصطحکاک او د څرخکیوانداز ي ته پام مه کوئ.

***14-40.** که 75 کیلوګرامه بکس د A نه د دریدلی حالت څخه پیل وکړي، او د ده سرعت کله چې د B نقطې څخه تیریږی 6 متر/ثانیه کې وي، په کیبل باندې لګول شوې ثابته قوه F معلومه کړئ. اصطکاک او د څرخکیوانداز ي ته پام مه کوئ



ب 14-39/40

14-41. په دی لاندی انځور کی ښودل شوي 10 lb بلاک په نقطه *A* کی فنر تر فشار لاندی نیولی دي اود هغه اوږدوالی يي 2 ft کم کړي. که سطحه ښويه وی، فاصله *d* ، چې د دیوال څخه اندازه شوي چيرې چې بلاک په ځمکه لويږی، معلوم کړئ. د بلاک اندازې ته پام مه کوئ.



ب 14-41

14.4 قدرت او مؤثريت (POWER AND EFFICIENCY)

قدرت (Power). د "قدرت" اصطلاح يو ګټور بنسټ وړاندې کوي چې د دې په اساس د مطلوب موټور يا ماشين ډول غوره کيدل دی چی يو ځانګړي مقدار کار ترسره کړلی شی. د مثال په توګه، دوه پمپونه کيدای شي هر يو د يوې ذخيرې خالي کولو وړ وي که چيرې ورته کافي وخت ورکړل شي؛ مګر، هغه پمپ چې زيات قدرت لري هغه به کار په لنډ وخت کې پای ته ورسوي.

هغه ***فوري قدرت*** (*instantaneous power*) چې د يوې قوی لخوا جوړيږي تر څو يو اندازه کار *dU* په ټاکلي وخت تيريدو *dt* کې ترسره کوي عبارت دی په:

$$P = \frac{dU}{dt}$$

که د ΔU کار په يو ټاکلي وخت Δt کې ترسره شي، نو **منځنی قدرت** (*average power*) د لاندې څخه ټاکل کيږي :

$$P_{avg} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad (14–9)$$

مورِ کولای شو چې د یوې قوې **F** لحظه یی قدرت هم داسی تر لاسه کړو، کله چې د کار په توګه $dU = F \cdot dr$ وښودل شی. نو:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

یا

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (14–10)$$

نو، قدرت یو سکلر دی، چیرې چې په دې معادله کې **v** د یوی قوې **F** سرعت څرګندوي کوم چې په یوه ذره باندې عمل کوي

.په SI او FPS سیستمونو کې د قدرت اساسي واحدونه واټ (W) او هارسپاور (hp) په ترتیب سره دي. دغه واحدونه داسې تعریف شوي دي:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{N \cdot m/s}$$

$$1\ \mathrm{hp} = 550\ \mathrm{ft \cdot lb/s}$$



د دې انجن د قدرت تولید د هغه ویلونو داصتحکاک دقوو څخه ر رامنځته کیږی چې په حرکت کې د ی. دا همدغه قوه ده چې د ورپسی واګونونو د اصتحکاکي مقاومت مخه نیسي او کولی شي د اورګاډي وزن څه پورته کړي.

د دواړو سیستمونو د واحدونو تر منځ د بدلون لپاره، $1\ \mathrm{hp} = 746\ \mathrm{W}$.

مؤثریت (Efficiency): د یوې ماشین میخانیکی مؤثریت داسی تعریف شوی چی هغه د ماشین لخوا تولید شوي ګټور قوه نسبت په ورکړل شوي قوه ماشین ته دي .

$$\varepsilon = \frac{\text{power output}}{\text{power input}} \qquad (14–11)$$

که چیرې ماشین ته ورکړل شوې انرژي په همغه وخت کې وی چی مصرف کیږی، نو موثریت هم په دې تناسب کې څرګندیدی شي.

$$\varepsilon = \frac{\text{energy output}}{\text{energy input}} \qquad (14–12)$$

څرنګه چې ماشینونه د یو لړ خوځنده برخو څخه جوړ شوي دي، نو د ماشین دننه به تل د اصطکاک قوې پیدا کیږي، او په پایله کې، د دې قوو د له منځه وړلو لپاره اضافي انرژي یا قدرت ته اړتیا وي. له همدې امله، د ماشین قدرت محصول به له هغه قوی څخه چې ماشین ته ورکړل کیږي کم وي ، او له همدې کبله د *ماشین* مؤثریت به تل له 1 څخه کم وي.

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د تحليل کړنلاره

د يوې قوې لخوا ترلاسه کولو د رامينځته شوي قدرت لپاره لاندې طريقه وکاروئ:

- هغه قوه **F** چې په بدن (يا ذره) باندې عمل کړي او حرکت رامينځته کوي، شدت يې وټاکئ. دا قوه عموماً د يوه ماشين يا انجن لخوا چې په بدن کې دننه يا بهر ځای پرځای شوی وي، رامينځته کيږي.

- که بدن (يا ذره) تعجيل ولري، نو ممکن اړينه وي چې د هغې د آزاد بدن ډياګرام رسم کړئ او د حرکت معادله ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) تطبيق کړئ ترڅو **F** وټاکل شي.

- کله چې **F** او د هغې سرعت v وټاکل شي، نو قدرت په ضرب کولو د قوه د سرعت د برخې سره ترلاسه کيږي چې د **F** په لور عمل کوي، يعنې. $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta$

- په ځينو مسايلو کې منځنی قدرت له کار چې د قوه **F** لخوا په يو ټاکلي وخت Δt کې ترسره شوي وی پيدا کيداي شي. دا دی $P_{avg} = \Delta U / \Delta t$

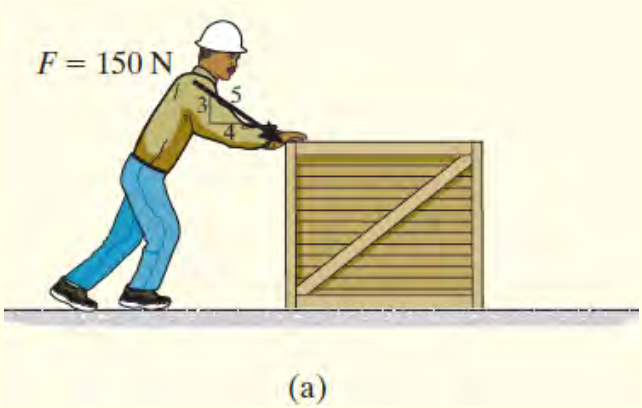


پورته کوونکي قدرت ته اړتيا په هغه عمودي قوه **F** پورې اړه لري چې په لفټ باندې عمل کوي او دا پورته حرکت ته اړ باسي. که د لفټ سرعت **v** وي، نو لحظه ای قدرت محصول $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ دی.

مثالونه

مثال 14.7

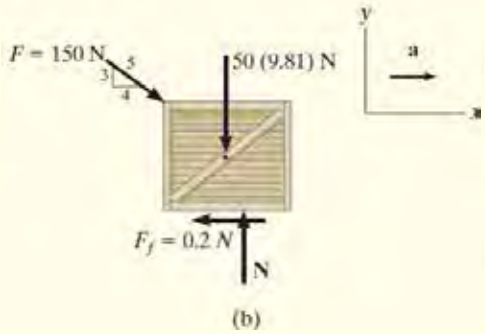
په انځور 14-15a کې ښودل شوي یو سړی 50 kg صندوق په 150 N قوه سره ټیله کوی. په $t = 4$ s کې د سړي لخوا ورکړل شوی لحظه ای قدرت وټاکئ او په څلورو ثانیو کې منځنی قدرت معلوم کړئ. د فرش او صندوق ترمنځ د حرکت داصطکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دی. په پیل کې صندوق په ارام حالت کې دی.



(a)

حل:

لحظه یی قدرت (Instantaneous Power): د سړي لخوا تولید شوي قدرت د ټاکلو لپاره، د 150 N قوې سرعت باید په t = 4 ثانیو کې ترلاسه شي. د صندوق د آزاد بدن ډیاګرام په انځور 14-15bکې ښودل شوی دی. د حرکت معادلو پلي کولو سره:



(b)

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N - \left(\tfrac{3}{5}\right)150\ \text{N} - 50(9.81)\ \text{N} = 0$$

$$N = 580.5\ \text{N}$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \qquad \left(\tfrac{4}{5}\right)150\ \text{N} - 0.2(580.5\ \text{N}) = (50\ \text{kg})a$$

$$a = 0.078\ \text{m/s}^2$$

انځور 14-15

سرعت د صندوق په t =4 s کی عبارت دی په

$$v = v_0 + a_c t$$

$$v = 0 + (0.078\,\text{m/s}^2)(4\,\text{s}) = 0.312\,\text{m/s}$$

قدرت چی سړي يي په t =4 s په صندوق وارد وي عبارت ده په

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v = \left(\tfrac{4}{5}\right)(150\,\text{N})(0.312\,\text{m/s})$$

$$= 37.4\,\text{W} \qquad \textit{Ans.}$$

منځنی قدرت (Average Power): د صندوق خوځيدل معلوميدای شي ځکه چې تعجيل معلوم دي.

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$s = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.078)(4)^2 = 0.624\,\text{m}$$

نو د 150 N قوې لخوا ترسره شوی کار عبارت دی:

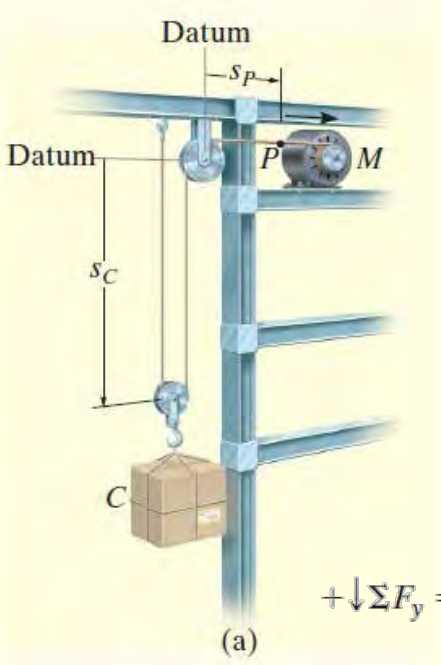
$$U = 150\left(\tfrac{4}{5}\right)(0.624) = 74.88\,\text{J}$$

نو، منځنی قدرت کيږي:

$$P_{\text{avg}} = \frac{U}{\Delta t} = \frac{74.88}{4} = 18.7\,\text{W} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.8

په انځور 14-16a کې د پورته کولو موټر M د 75 lb بکس C پورته کوي، ترڅو په P نقطه کې تعجیل $4\ ft/s^2$ وي. معلومه کړئ په هغه شیبه کې چې د P سرعت $2\ ft/s^2$ وي، موټر ته څومره قدرت ورکړل شوي. د څرخکیو او کیبل کتله له پامه وغورځوئ او $e = 0.85$ واخلئ.

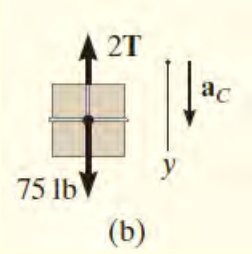


حل

دې لپاره چې د موټور د قدرت تولید وموندل شي، لومړی دا اړینه ده چې د کیبل کشش معلوم شي ځکه چې دا قوه د موټر لخوا رامنځته شوی ده.

له آزاد بدن ډیاګرام څخه، انځور 14-16b کې، مورِ لرو :

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -2T + 75\ \text{lb} = \frac{75\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2} a_C \qquad (1)$$



انځور 14-16

د صندوق تعجیل د حرکت د کینماتیک سره تړلاسه کیدی شي چې د نقطې P د معلوم تعجیل سره تړاو لري، انځور 14-16a . د مطلقې متحرکې طریقو کارولو سره، د s_C او s_P کوآرډینیټونه د کیبل د ثابت اوږدوالي l سره تړاو لري چې په عمودي او افقي لوروکي تغیر مومي. مورِ لرو $2s_C + s_P = l$. د دې معادلې د وخت دوهم مشتق اخیستل عبارت دی په :

$$2a_C = -a_P \qquad (2)$$

څرنګه چې $a_P = +4\ ft/s^2$ ده، نو $a_C = -(4\ ft/s^2) / 2 = -2\ ft/s^2$ ، منفي نښه څه ته اشاره کوي؟ دا پایله په معادله 1 کې ځای پرځای کړئ او منفي نښه وساتئ ځکه چې تعجیل په 1 او 2 معادلو کې مثبت ښکته ګڼل شوي، مونږ لرو :

$$-2T + 75\ \text{lb} = \left(\frac{75\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(-2\ \text{ft/s}^2)$$
$$T = 39.83\ \text{lb}$$

د قدرت محصول چې په هارسپاور (horsepower) واحد سره ښودل کیږی، اړین لرې چې کیبل په کچه د 2 ft/s سرعت سره کښ کړي ، نو بیا

$$P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (39.83\ \text{lb})(2\ \text{ft/s})[1\ \text{hp}/(550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s})]$$
$$= 0.1448\ \text{hp}$$

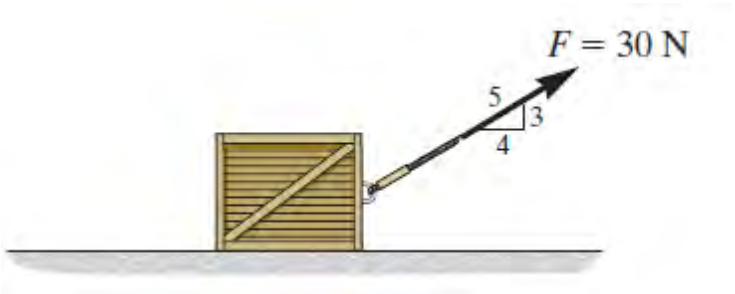
دا قدرت محصول اړتیا لري چې موټور په لاندی ډول قدرت ورکړلی شی:

$$\text{power input} = \frac{1}{\varepsilon}(\text{power output})$$
$$= \frac{1}{0.85}(0.1448\ \text{hp}) = 0.170\ \text{hp} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: څرنګه چې د صندوق سرعت په دوامداره توګه بدلیږي، د تونایي اړتیا لحظه ای (instantaneous) ده.

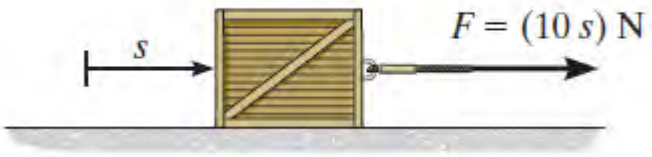
بنسټیز پوښتنې FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 14-7. که د 20-کیلوګرامه صندوق او ځمکې ترمنځ تماس سطحه ښویه وي، نو کله چې $t = 4s$ وي، د قوې **F** قدرت وټاکئ. په پیل کې، صندوق په ارام حالت کې دی.



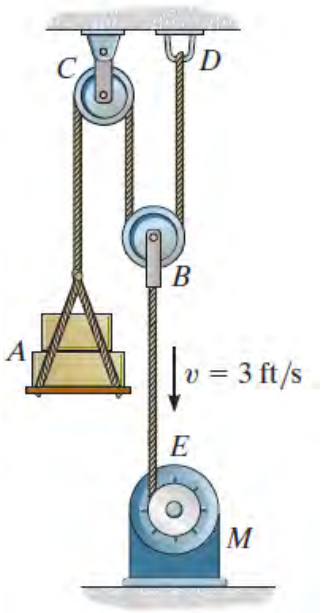
ب 14-7

ب 14-8. که $F = (10s)$ N ، چیرې چې s په مترو کې دی، او د 20 کیلوګرامه صندوق او ځمکې ترمنځ تماس سطحه ښویه وي، نو کله چې $s = 5$ m وي، د قوې **F** قدرت وټاکئ. کله چې $s = 0$ وي، صندوق په $v = 1$ m/s سره حرکت کوي.



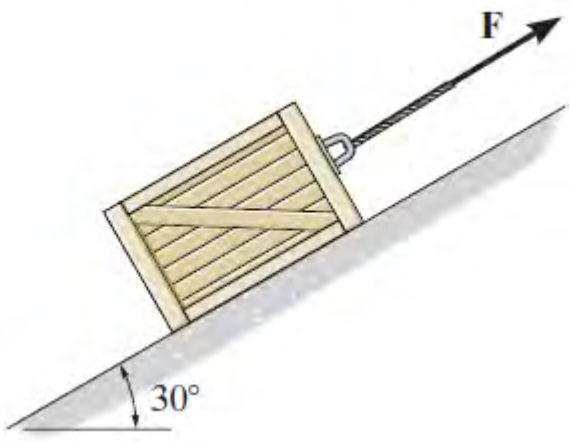
ب 14-8

ب 14-9. که موټر په ثابت تیزوالی $v = 3$ ft/s کیبل را نغاړی، نو په دې وخت کې موټر ته ورکړل شوی قدرت وټاکئ. د بار تول 100 lb دی او د موټر مؤثریت $e = 0.8$ دی. د څرخکیو کتله مه حسابوی.



ب 14-9

ب 14-10. د 20 کیلوګرامه صندوق اومایلی سطحې ترمنځ د متحرک اصطحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دی. که صندوق د مایلی سطحې په پورته لور په $v = 5$ m/s ثابت سرعت سره حرکت کوي، د قوې **F** قدرت وټاکئ.



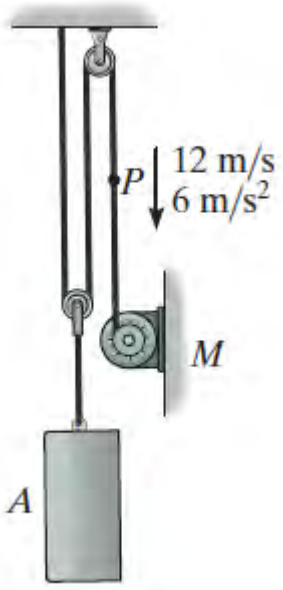
ب 14-10

ب 14-11. **1:** که 50 کیلوګرامه بار A د موټور M لخوا پورته شي ترڅو بار په ثابت سرعت $v = 1.5$ m/s سره حرکت وکړي، نو د موټر ته ورکړل شوی قدرت وټاکئ، موټر په $e = 0.8$ مؤثریت سره کار کوي.



ب 14-11

ب 14-12. په هغه وخت کې چې بنودل شوي، په نقطه P کې د کیبل سرعت $v_P = 12$ m/s دی، او هغه په کچه $a_P = 6$ m/s² سره زیاتوالی مومي . په دې وخت کې موټور M ته ورکړل شوی قدرت وټاکئ، کله چې موټور په موثریت $e = 0.8$ سره کار کوي. د بلاک کتله 50 kg ده.



ب 14-12

PROBLEMS

پوښتنې

ټول حلونه بايد د آزاد بدن ډياګرام (Free-Body Diagram) ولري.

14-42 . جيپ چې وزن يې 2500 lb دی او انجن يې 100 hp توانايي ټولوټيرونوته لېږدوي. که چېرې ټيرونه د ځمکې په سطحه سليپ ونه کړي، نو د هغه تر ټولو لويه د ميلان زاويه q وټاکئ چې جيپ کولی شي په ثابت تيزوالی v = 30 ft/s سره وختلی شي.



پ 14-42

14-43 . د 300 lb تول پورته کولو لپاره چې په ثابته کچه 5 ft/s سره حرکت کوی، د موټور اړتيا وړ توانايي وټاکئ. د موټور موثريت، e = 0.65 دی.

*14-44. يوه موټر چې د 2 Mg کتله لري، په 7^0 ميلان په ثابت تيزوالی v = 100 km/h سره پورته کيږي. که د موټر مؤثريت e = 0.65 وي او که چېرې ميخانيکی اصتکاک اود باد مقاومت په نظر کی ونه نيول شي، د انجن لخوا توليد شوی توانايي وټاکئ.



پ 14-44

14-45. د میلکن هوایي شرکت د ټربوجټ یو انجن جوړکړي چې په 13000 lb وزن لرونکي الوتکې کې ځای پرځای شوي. که انجن 5200 lb ثابت زور (thrust) تولید کړي، نو د الوتکې توانایي محصول وټاکئ کله چې دا په 600 mi/h تیزوالی سره الوتلوته تیاره وی.

14-46. د انرژي ضایع کیدل ، کله چې د یوه موټر د دریدلو پر مهال منځ ته راځي دلته په تعجبی توګه ښودل کیږي. فرض کړئ د موټر وزن 5000 lb دی او په 35 mi/h سره حرکت کوي. که موټر ودریږي، نو یوه 100 W ځراغ باید څومره وخت وسوځوي تر څو په همدی مقدار انرژي مصرف کړي(1 mi = 5280 ft.) .

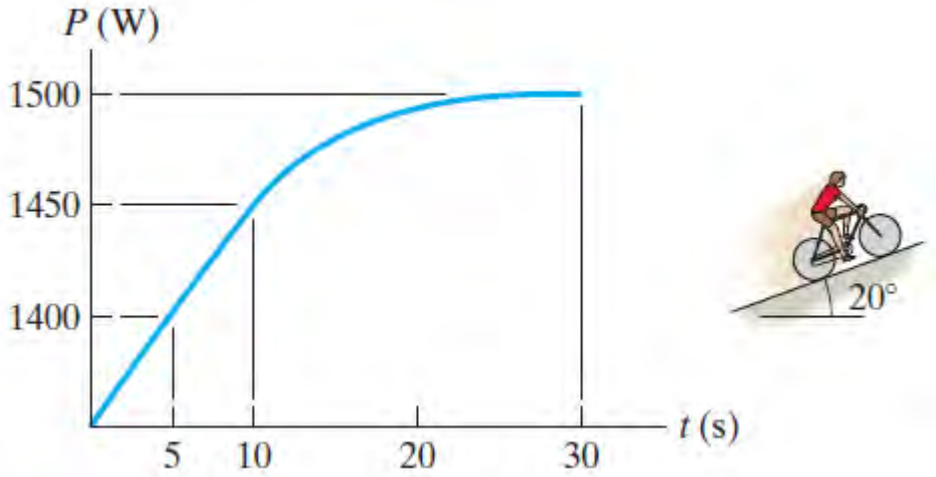
14-47. یوه اسکېلیټر په 2 ft/s تیزوالی سره مخ پورته حرکت کوي. که چېرې د زینو پټې 8 انچه لوړې او 15 انچه اوږدی وي، د موټر اړتیا وړ هارسپاور وټاکئ ترڅو په هره پټه زینه 180 lb اوسط بار پورته کړي. اسکېلیټر د فرش څخه 20ft لوړوالی ته رسیږي.

*14-48. سړی چې وزن یې 150 lb دی په 4 ثانیو کې د 15 ft لوړوالی ته په زینو کی پورته خیږي. تولید شوي توانایي وټاکئ. څومره وخت باید یو 100 W ځراغ وسوځی ترڅو په همدې مقدار انرژي مصرف کړي؟ پایله: مهرباني وکړئ ځراغونه ګل کړی کله چې نه کارول کیږی.



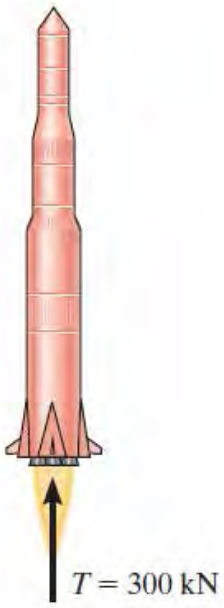
پ 14-48

14-49. د بایسکل او سواره مجموعي کتله 92 kg ده چې په 20^0 مایله لاره سره د دریدلي حالت څخه پورته ځی، د تلو پرمهال دا لاندی بایومیکانیکي توانایي ګراف وکاروي ترڅو د سواره او بایسکل ترلاسه شوی اعظمي تیزوالی وټاکئ.



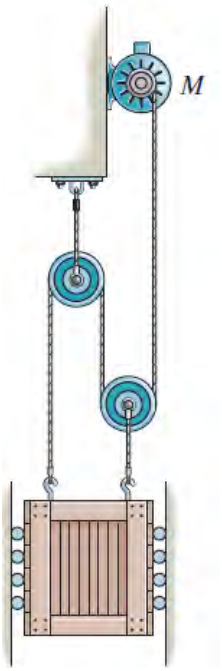
پ 14-49

14-50. یوه راکیټ چې ټوله کتله یې 8 Mg ده، په عمودي ډول د دریدلی حالت څخه فیر کیږي. که انجنونه د $T = 300$ kN ثابت زور (thrust) وړاندې کوي، د انجنونو توانایي محصول د وخت د تابعي په توګه وښیی. د ډرګ (drag) مقاومت او د سون توکي د کتلی ضایع کیدلواغیزه په پام کی مه نیسی.



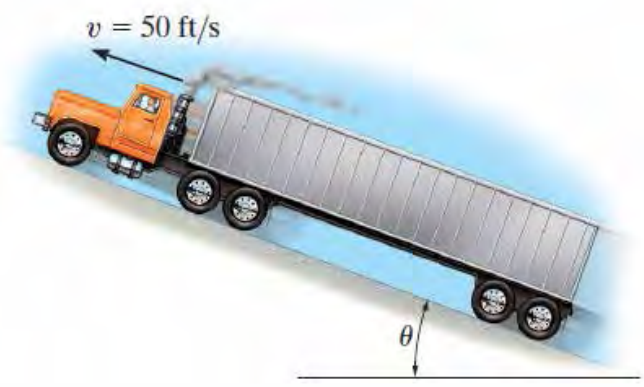
پ 14-50

14-51. 1000-lb لیفټ د څرخکیو سیستم او موټر M لخوا پورته کیږي. که موټور په کیبل باندی د 500 lb ثابته قوه وارده کړی، نود موټر اړتیا وړقدرت وټاکئ کله چې بار د دریدلی حالت نه $s = 15$ ft پورته شوی وي. د موټور مؤثریت $e = 0.65$ دی



پ 14-51

*14-52. یوه ټرک چې وزن یې 25000 lb دی او انجن یې 350 hp توانایي لري چې ټولو تیروته لیږدول کیږی. که چیرې ټیرونه د ځمکې په سطحه سلیپ ونه کړي، د هغه تر ټولو لویه د میلان زاویه q وټاکئ چې ټرک وکولی شي په ثابت تیزوالی $v = 50$ ft/s سره وخیږي.



پ 14-52

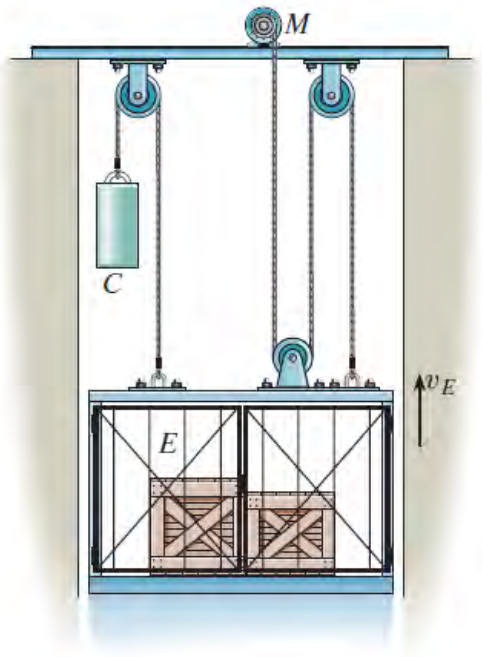
14-53.د سپورټ موټر چې د 2.3 Mg کتله لري، او کله چې د 28 m/s سره حرکت کوي، چلوونکی يې د 5 m/s² تعجیل ته اړوي. که د باد له امله د موټر د ډرګ قوه ($F_D = (0.3v^2)$ وي، چیرې چې v په m/s سرعت سره دی، په دې وخت کې انجن ته ورکړل شوی توانايي وټاکئ. د انجن موثریت $e = 0.68$ دي.

14-54. سپورټ موټر چې 2.3 Mg کتله لري او د 6 m/s² تعجیل سره له دریدلی حالت څخه يې پیل کړي. که د باد له امله د موټر د ډرګ قوه $F_D = (10\ v)$ N وي، چیرې چې v سرعت په m/s کې دی، د 5 ثانیو په وخت کې انجن ته ورکړل شویی توانايي وټاکئ. د انجن موثریت $e = 0.68$ دي .



پ 14-53/54

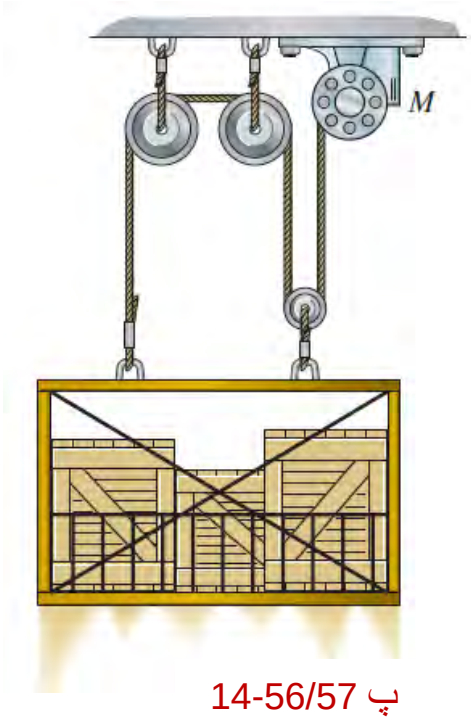
14-55. د لیفټ E او د هغه د بار ټوله کتله 400 kg ده. پورته کول يې د دواړو د موټر M او 60 kg بلاک C لخوا ترسره کیږي. که مؤثریت د موټر $e = 0.6$ وي، نو د موټر اړتیا وړ توانايي وټاکئ کله چې لیفټ په ثابت سرعت $v_E = 4$ m/s سره پورته شي.



پ 14-55

*14-56. موټور د بارشوي لیفټ لپاره چې 500 kg دی په کار اچول شوی چې په ثابت سرعت v_E =8 m/s پورته حرکت وکړي. که موټر 60 kW بریښنایي قوه واخلی، د موټر مؤثریت وټاکئ. د څرخکیو او کیبل کتله د محاسبې وړ ندي.

14-57. 500-kg لیفټ د سکون څخه پورته خوا په ثابت تعجیل $a_c = 2$ m/s² حرکت پیل کوي. کله چې $t = 3$ s وي د موټور M تولید شوي توانایي وټاکئ. د څرخکیو او کیبل کتلی د محاسبې وړ ندي.



پ 14-56/57

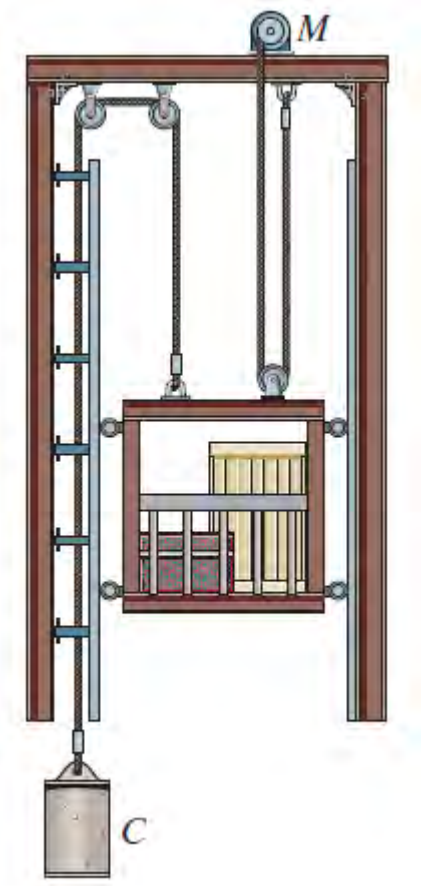
14-58. 50-lb بلاک په زیره سطحه باندې پروت دی چې د متحرک اصتکاک ضریب یې $m_k = 0.2$ دی. یوه قوه $F = (140 + s^2)$ lb ، چیرې چې s په ft کې دی، په بلاک په ښودل شوی سمت عمل کوي. که فنر اصلاً کش شوی نه وي ($s = 0$) او بلاک په دریدلی حالت کې وي، کله چې بلاک $s = 1.5$ ft حرکت کړي هغه توانایی وټاکی چې د قوی له کبله تولید شویی.



پ 14-58

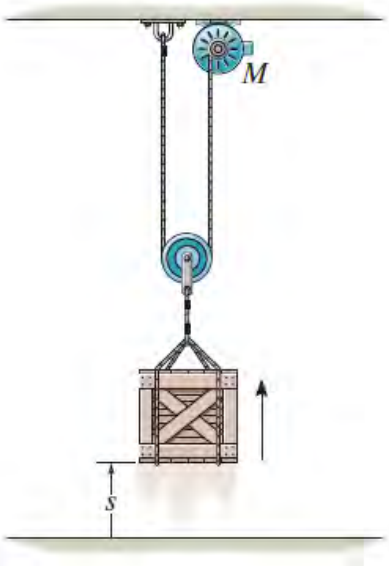
14-59. د موادو پورته کولو سیستم اود بار مجموعي کتله 800 kg ده اود متقابل (counterweight) C کتله 150 kg ده. په یوه ټاکلي وخت کې د ټول سیستم د پورته کولو سرعت 2 m/s او تعجیل یې 1.5 m/s² دي. د موټر M لخوا تولید شوی توانایي وټاکئ که چېرې مؤثریت یې $e = 0.8$ وي.

14-60*. د موادو پورته کولو سیستم اود بار مجموعي کتله 800 kg ده اود متقابل (counterweight) C کتله 150 kg ده. که د پورته کولو تیزوالی یې په 1.5 ثانیو کې له 0.5 m/s څخه 1.5 m/s ته په یو شان زیات شي، د موټر M لخوا منځنۍ توانایي چې په دې وخت کې تولید شوی ده وټاکئ. موټر د $e = 0.8$ موثریت لري.



پ 14-59/60

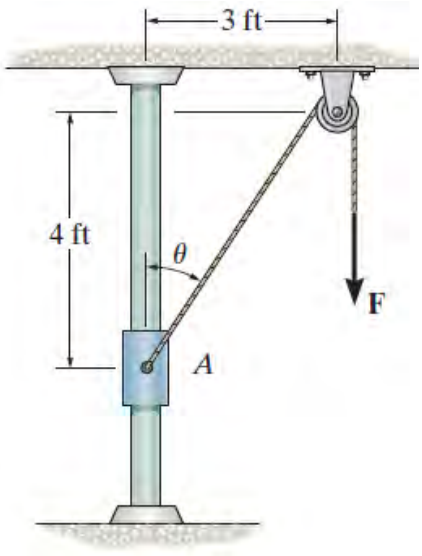
14-61. د 50 lb صندوق د دریدلی حالت څخه په $t = 4$ s کې 10 ft/s تیزوالی ته رسیږی. که تعجیل یې ثابت وي، نو د موټور لخوا اړینه توانایي کله چې $t = 2$ s وي وټاکئ. د موټر مؤثریت $e = 0.76$ دی. د څرخکیو او کیبل کتله د پام وړنه دي.



پ 14-61

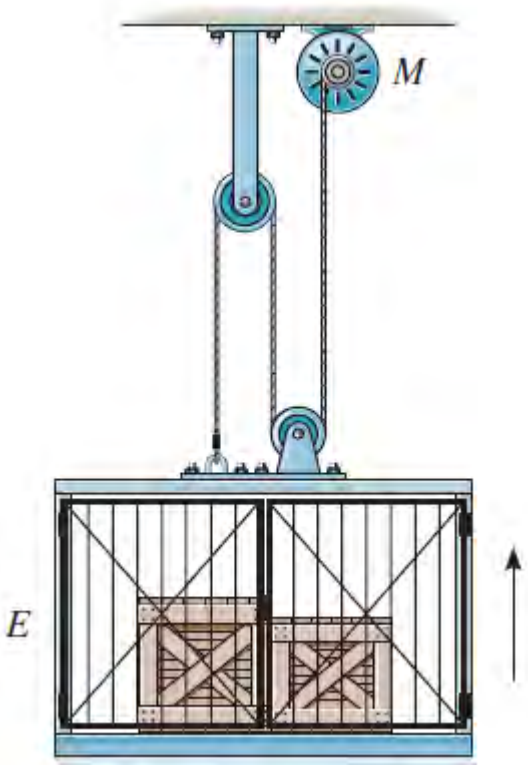
14-62. 10 lb غاړکی د دریدلی حالت نه د A نقطې څخه حرکت پیل کوي، او په ثابته عمودي قوه $F = 25$lb چې په رسی یې عمل کړي پورته کیږي. که چیرې راډ ښوی وی، نو کله چې $q = 60°$ وي د قوی لخوا تولید شوی توانایي وټاکئ.

14-63. 10 lb غاړکی د دریدلی حالت نه د A نقطې څخه په ثابت تیزوالي 2 ft/s پورته لور په ښوی راد حرکت پیل کوي . د قوی **F** لخوا تولید شوی توانایي په ښودل شوی حالت کی وټاکئ.



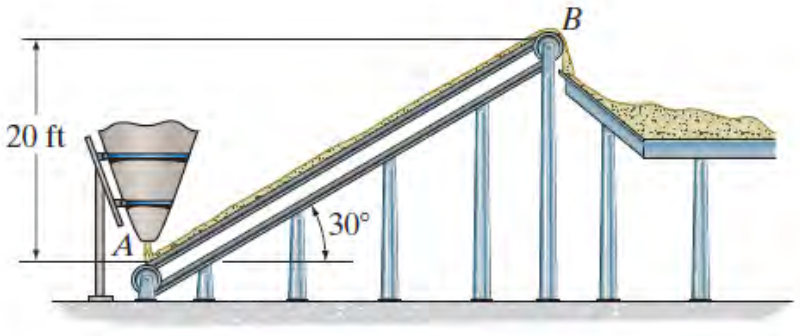
پ 14-62/63

*14-64. موټور M یو 500 kg لیفټ په ثابت سرعت v_E = 8 m/s سره پورته کوي. که موټور 60 kW بریښنایي قوه واخلی، د موټور مؤثریت وټاکئ. د څرخکیو او کیبل کتلی مه حسابوئ.



پ 14-64

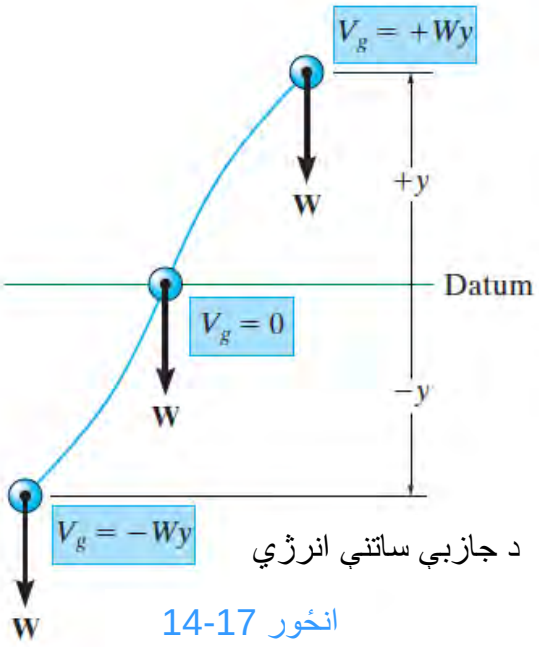
14-65.ریګ د سیلو A څخه کانویرته لویږي او د ذخیره کولو تختې ته په 360,000 lb/h سره لیږدول کیږي. یو بریښنایي موټور د کانویئر سره وصل شوی ترڅو د تسمې سرعت په 3 ft/s کې وساتي. د موټور لخوا تولید شوی منځنی توانایي وټاکئ.



پ 14-65

14.5 دساتنې قواوې او پوتنشيل انرژي

(CONSERVATIVE FORCES AND POTENTIAL ENERGY)



د جاذبې ساتنې انرژي

انځور 14-17

د ساتنې قوه (Conservative Force): که د يوې قوی کار د هغې د لارې څخه مستقل وي او يوازې د قوی د لمړنی اوښايلی په موقعيتونو پورې اړه ولري، نو دا قوه د ***ساتنې قوه*** (*conservative force*) بلل کيږي. د ساتنی قواوو مثالونه د يوی ذری تول او د فنر لخوا توليد شوی قوه ده. د تول لخوا ترسره شوی کار يوازې د تول په عمودي بيځايه کيدنه پورې اړه لري، او د فنر قوه لخوا ترسره شوی کار يوازې د فنرپه کشکولو او يا غونجولو پورې اړه لري.

د ساتنې قوه پرخلاف، د اصتکاک قوه چې د يوی ثابتی سطحی له خوا په جسم باندې چې ښويږي عمل کړي. کار په لاره پورې اړه لري — څومره چې لاره اوږده وي، کار زيات دی. په دې توګه، د اصتکاک قوی ساتونکي قوی نه دی (nonconservative).

کار د جسم څخه د تودوخې په شکل له منځه ځي.

انرژي (Energy): د انرژي تعريف عبارت دی په ظرفيت د کار کړلو. اساساً دوه ډوله انرژي ده، کينيتيک او پوتنشيل. کينيتيک انرژي د ذری د حرکت سره تړاو لري. د مثال په توګه، که يوه ذره په اصل کې په دريدلی حالت کې وي، نو د کار او انرژي اصول له مخې $\Sigma U_{1\rightarrow 2} = T_2$. په بل عبارت، په ذره باندی ترسره شوی کارپه کينيتيک انرژي بدليږی، چې ذری ته د v سرعت ورکوي. کله چې انرژي د ذری په موقعيت پورې اړه ولري، چې د يوې ټاکلې مرجع يا ښودل شويی سطحی څخه اندازه کيږي، دا پوتنشيل انرژي بلل کيږي. په دې توګه، پوتنشيل انرژي د ساتنې قوی لخوا د کار اندازه ده چې ذره د يوه ورکړل شوې موقعيت نه تر مرجع پورې يوسی. په ميخانيک کې، د جاذبې (تول) او يوه ايلستيکی فنر لخوا جوړه شويی پوتنشيل انرژي مهمه ده.

د جاذبې پوتنشيل انرژي (Gravitational Potential Energy) : که يوه ذره د يوی انتخاب شوي ځای څخه y فاصله ولري، لکه څنګه چې په انځور 14-17 کې ښودل شوي، د



ذری تول **W** د جاذبی مثبت پوتنشیل انرژي V_g لري، ځکه چې **W** د مثبت کار کولو ظرفیت لري کله چې ذره بیرته ټاکلی ځای ته ولیږدول شی. همدارنګه، که ذره د ټاکلی ځای نه ښکته په y فاصله کی ځای ولری، V_gمنفي ده ځکه چې تول منفي کار کړي کله چې ذره بیرته ټاکلی ځای ته پورته ولاړه شی. په ټاکلی ځای کی $V_g = 0$* ده.

په عمومي توګه، که y پورته خواته مثبت وي، د ذری د تول W د جاذبي پوتنشیل انرژي ده

$$V_g = Wy \qquad (14–13)$$

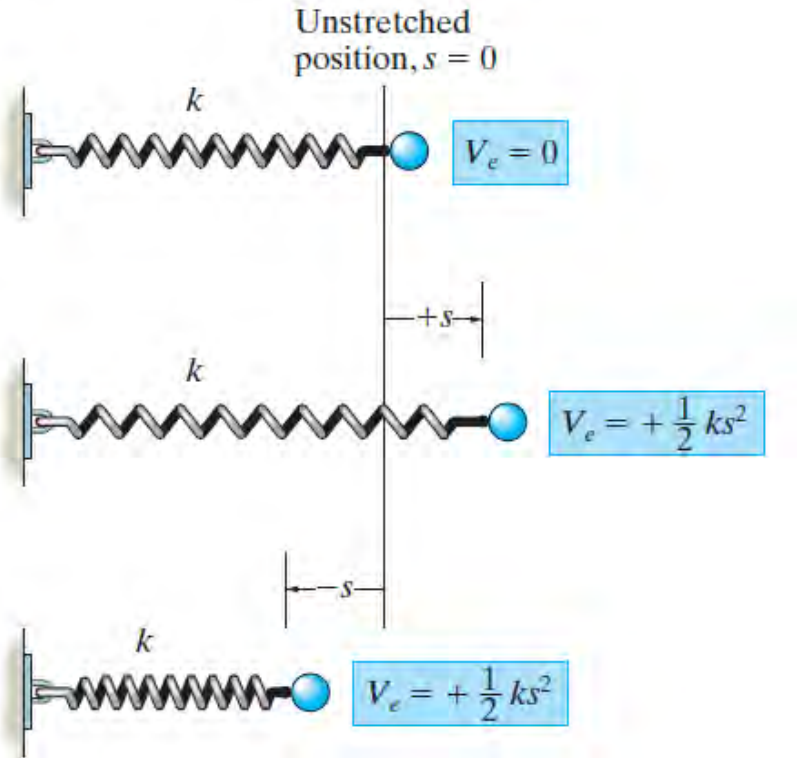
*دلته وزن ثابت فرض شوی دی. دا فرضیه د کوچنیولوړوالی توپیرونو Δy لپاره مناسبه ده. که چیرې د لوړوالی بدلون لوی وي، نو باید د لوړوالی سره د تول بدلون په پام کې ونیول شي (وګورئ: پوښتنه 82-14)

د دې تول د جاذبي پوتنشل انرژي هغه وخت زیاتیږي کله چې دی پورته کړی شي.

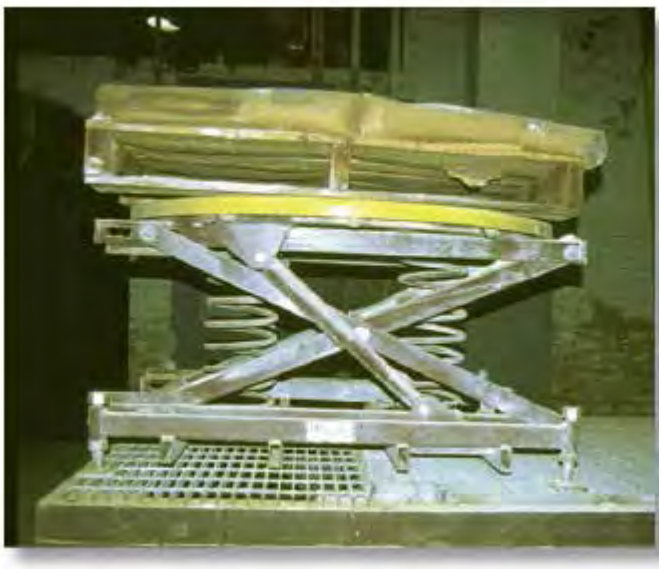
ایلستیک پوتنشیل انرژي (Elastic Potential Energy): کله چې یوه ایلستیکی فنر د خپل بې کش شوی حالت څخه په فاصله د s اوږد یا غونج شي، نو قوه په فنر کار کوي او د ایلستیکی پوتنشیل انرژي V_e په فنر کې ذخیره کیږي. دا انرژي ده:

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \qquad (14–14)$$

دلته V_e همیشه مثبت وي ځکه چې، په بیځایه شوي حالت کې، د فنر قوه د ذرې لپاره د همیشه مثبت کار کولو ظرفیت یا "پوتنشیل" لري کله چې فنر بېرته خپل بې کش شوی حالت ته راګرځي، لکه څنګه چې په انځور 18-14 کې ښودل شوی.



انځور 18-14



د دې تختو پر سر د کڅوړو تول په ملاتړونکیو فنرونو کې پوتنشیل انرژي ذخیره کوي. کله چې هر کڅوړه لرې شي، تخته به لږ څه پورته شي ځکه چې د سپرینګونو دننه یوه اندازه پوتینشیل انرژي به د پاتې کڅوړو د جاذبې پوتنشیل انرژۍ زیاتوالي ته واړول شي. داسې وسیله ګټوره ده ترڅو د کڅوړو لرې کول اسانه کړي پرته له دې چې ټیټ شي او وایی خلي کله چې هغه خالی کیږی.

پوتنشیل تابع (Potential Function) : په عمومي حالت کي، که يو ذره د دواړو، جاذبي او ايلستيکی قواوو لاندې وي، د ذری پوتنشيل انرژي د ***پوتنشيل تابع*** په توګه څرګندېدای شي، چې الجبری جمعه کول دی:

$$V = V_g + V_e \qquad (14–15)$$

د V اندازه کول د ذری په موقعيت پورې اړه لري چې د ټاکل شوي مرجع څخه وی، لکه په 14-13 او 14–14 د معادلو کی.

د جاذبي او ايلستيکی قواوو لخوا کار، چې د ذری لېږدول د يوی نقطي نه بلې نقطي ته دی، د لاندی تابع د توپير له مخې اندازه کيږي، يعنې:

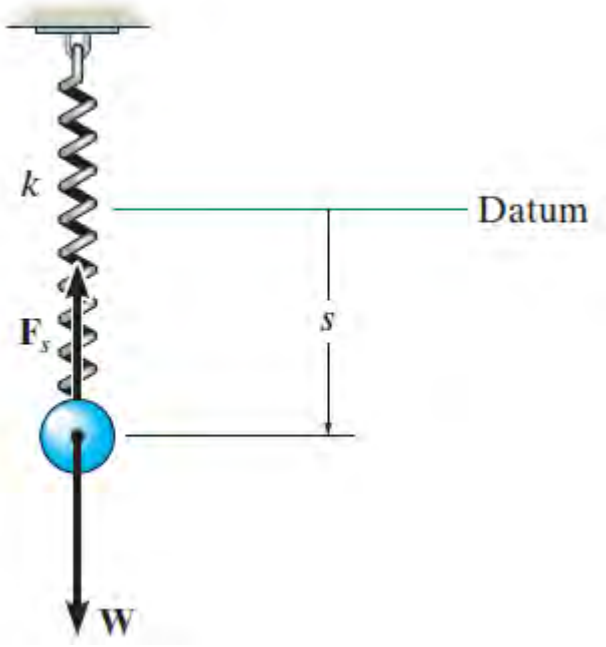
$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \qquad (14–16)$$

د مثال په توګه، د W وزن لرونکي ذری چې د فنر نه ځړول شوې وي، د دې موقعيت s سره تړاو لری، چې د فنر د نه کش شوي اوږدوالی مرجع نه اندازه کيږي، لکه څنګه چې په انځور 14-19 کې ښودل شوی دی. موږ لرو:

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \tfrac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

که ذره د s_1 نه يوه ښکته ځای s_2 ته لاړه شي، نو د معادلې 14-16 له مخې، د **W** او $\mathbf{F}_s$ کار دی:

$$\begin{aligned} U_{1-2} = V_1 - V_2 &= \left(-Ws_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - \left(-Ws_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2\right) \\ &= W(s_2 - s_1) - \left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \end{aligned}$$



انځور 14-19

کله چې د لارې پر اوږدوالي انتقال ډیر لږ وي، یعنې د نقطې (x, y, z) نه (x + dx, y + dy, z + dz) ته، معادله 14-16 داسې کیږی:

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \qquad (14–17)$$

که مور دواړه، قوه او د هغې بیځایه کیدنه، د کارتیزین ویکټورونو په توګه وړاندې کړو، نو کار هم په لاندې ډول څرګندېدای شي:

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \end{aligned}$$

دا نتیجه په معادله 14-17 کې ځای پر ځای کولو سره او د $dV(x,y,z)$ مشتق په خپل جزوي مشتقاتو (partial derivatives) څرګندولو سره، مور لرو:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

لکه څنګه چې dx ، y، او z تغییرات له یو بل سره ببل دي، دا معادله منل کیږی کله چې:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (14–18)$$

پدې توګه:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (14–19)$$

دا معادله يو قوه **F** د هغې پوتنشيل تابع *V* سره تړاو لري او په دې توګه يو رياضي معيار وړاندې کوي چې ثابتوي چې **F** د ساتنی قوه ده.

د مثال په توګه، د تول د جاذبې پوتنشيل تابع چې د يوې منبع نه لوړه فاصله *y* لري، $V_g = Wy$ دی. د دې ثابتولو لپاره چې W د ساتنې قوه ده، لازمي ده چې دا وښيي چې دا معادله 14-18 (يا معادله 14-19) سره سمون خوري، چې په دې صورت کې:

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

منفي نښه ښيي چې **W** په ښکته لورعمل کوي، چې مخالف د مثبت *y* دی چې پورته دی. د فنر قوه، $F = kx$ ، د ساتنې قوی په توګه ښودلو لپاره، د معادلې 14-19 څخه کار واخلئ

14.6 د انرژی ساتنه (CONSERVATION OF ENERGY)

کله چې پر يوه ذره د ساتنې او نه ساتنې قوو سيستم عمل وکړي، د *ساتنې قواوو* لخوا د ترسره شوې کار دهغوی د پوتنشيل انرژيو د توپير په توګه وليکل کيدی شي، چې 14-16 د معادله وکارول شی، يعنې، $(\Sigma U_{1-2})_{cons} = V1 - V2$. د دې پايلې په توګه، د کار او انرژی اصول داسې ليکل کيدی شي:

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{noncons.} = T_2 + V_2 \qquad (14–20)$$

دلته $(\Sigma U_{1-2})_{noncons}$ د نه ساتنی قواوو لخوا پر ذره ترسره شوی کار ښيي. که يوازې د *ساتنې قوی* کار وکړي، نو مونږ لرو:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (14–21)$$

دا معادله د ***میخانیکي انرژی ساتنې*** (conservation of mechanical energy) یا په ساده ډول د انرژۍ ساتنې په توګه یادیږي. دا څرګنده وي چې د حرکت پر مهال د ذرې کینیتیکي او پوتنشیلی انرژۍ مجموعه ثابته پاتې کیږي. د دې لپاره چې دا واقع شي، کینیتیکي انرژي باید په پوتنشیلی انرژۍ بدله شي، او برعکس یې.

د مثال په توګه که یو توپ له لوړوالي h د ځمکې (منبع) څخه وغورځول شي، د توپ پوتنشیل انرژي د غورځولونه مخکې اعظمي وي، چې په هغه وخت کې د توپ کینیتیکي انرژي صفر ده. د توپ ټوله میخانیکي انرژي په لمړنۍ موقعیت کې داسې ده:

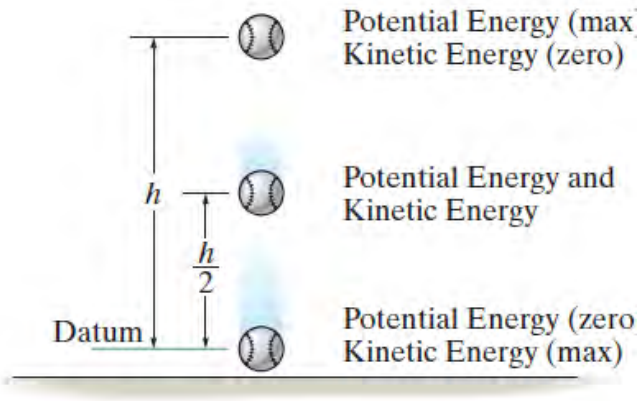
$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

کله چې توپ د $h/2$ فاصلې ته وورسیږي، د ده سرعت به له $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$ لارې محاسبه کیدی شي، چې $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$ ورکوي. د توپ انرژي په منځنۍ لوړوالي موقعیت کې داسې ده:

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\sqrt{gh}\right)^2 + W\left(\frac{h}{2}\right) = Wh$$

پوښتنه لدی چې توپ د ځمکې سره تماس وکړي، پوتنشیل انرژي یې صفر ده او سرعت یې $v = \sqrt{2gh}$ دی. دلته بیا، د توپ ټوله انرژي داسې ده:

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\sqrt{2gh}\right)^2 + 0 = Wh$$



انځور 14-20

وګوری کله چې توپ د ځمکې سره تماس کوي، دا یوه اندازه تغیر د شکل کوی، کله چی ځمکه کافي کلکه وي، توپ به د سطحي نه بیرته پورته شی، چې نوي لوړوالی h' ته ورسي، چې له لومړي وخت د خوشیدلولوړوالي h څخه کم دی. د هوا د اصتکاک نه پرته، د لوړوالي توپیر د انرژي ضایعکیدل بنیی چی د $E_l = W(h-h')$ په توګه حساب کیږي، چې د ځمکی ټکر پر مهال پیښیږي. د دې ضایع برخې، د غږ، د توپ او ځمکې حصوی د شکل بدلون او تودوخې لامل کیږي.

د ذرو سیستم (*System of Particles*): که چیرې د ذرو سیستم یوازې د ساتنی قواوو لاندې وي، نو یوه معادله چې معادلې 14-21 ته ورته وي، د ذرو لپاره لیکل کیدی شي. د مخکښې بحث نظریې تطبیقولو سره، معادله 14-8، ($\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$) داسې کیږی.

$$\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2 \qquad (14\text{–}22)$$

دلته، د سیستم لمړنی کینیتیکي او پوتنشیل انرژیو مجموعه د سیستم د پایلنی کینیتیکي او پوتنشیل انرژیو مجموعې سره برابره ده. په بل عبارت، د سیستم لپاره $\Sigma T + \Sigma V = \text{const}$.

د تحلیل کړنلاره

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د انرژۍ ساتنې معادله، د سرعت، بیځایه کیدنه، او د ساتنی قواوو د سیستمونو په اړه، د پوښتنو د حلولو لپاره کارول کیدی شي. دا معمولا د کار او انرژۍ تګلاری په پرتله اسانه ده ځکه چې دا معادله اړتیا لری چې د ذری یا سیستم کینیتیکي او پوتنشیل انرژي یوازې په دوو نقطو د لاری په اوږدو کې وټاکل شي، نه دا چې کار پیدا کړي کله چې ذره بیځایه کیدنه د لاری په اوږدو کی کوی. د تطبیق لپاره وړاندیز کیږي چې لاندې کړنلاره وکارول شي.

پوتنشیل انرژي(Potential Energy).

. دوه ډایګرامونه رسم کړئ چې ذره یا سیستم په لمړنی او پایلنی موقعیت کې ښیي.

. که ذره یا سیستم عمودي بیځایه کیدنه کوی، نوثابته افقی معیاری کړښه وټاکی چی د ذری جاذبی پوتنشیل انرجی، V_g ، تری اندازه شی.

. د ذره لوړوالی y د معیاری کړښی څخه وټاکئ او د تړلي فنرونو پراخوالی یا غونجوالی s مشخص کړئ.

. یاد ولرئ چې $V_g = Wy$، چیرې چې y د معیاری کړښی نه پورته مثبت دی او د هغه نه ښکته منفي دی؛ همدارنګه د فنر لپاره، $V_e = \frac{1}{2} ks^2$، چې تل مثبت دی.

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy).

. معادله وکاروئ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

. کله چې کینیتیک انرژۍ ټاکل کیږي، $T = \frac{1}{2} mv^2$، یاد ولرئ چې د ذری تیزوالی v باید د انرشیل معیاری چوکاټ څخه اندازه شي.

. د تول کار عبارت دی په تول ضرب د عمودي حرکت $U_W = \pm Wy$. دا مثبت دی کله چې وزن ښکته حرکت وکړي.

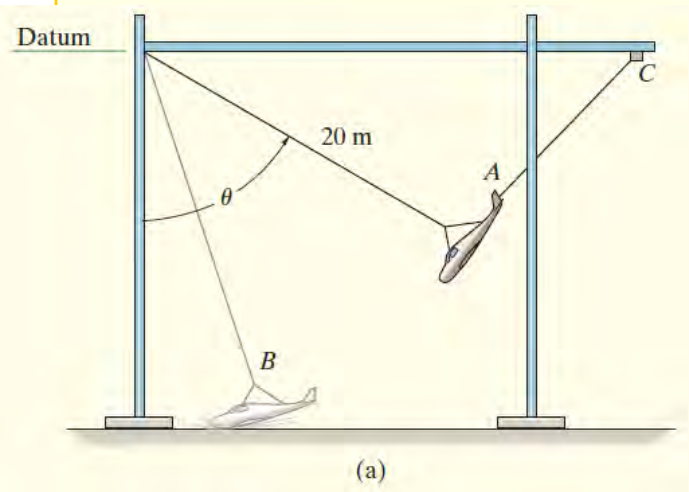
. د فنر کار په دې ډول دی $Us = \frac{1}{2} ks^2$ ، چې k د فنر سختي ده او s د فنر د اوږدېدو یا غونجیدو مقدار دی.

مثالونه

مثال 14.9



په عکس کې د ګنټري (gantry) جوړښت د الوتکې عکسلعمل آزمو ینې لپاره چې په ټکرکې پیښیږی جوړشوی. لکه څنګه چې په انځور 14-21a کې ښودل شوي، الوتکه چې د 8 میګا ګرامه کتله لري، تر هغه چې زاویه q = 60° شي، پورته کیږي، او بیا د په څټ کشکولو کیبل AC پرېښودل کیږي تر څو الوتکه آرام حالت کې شی. مخکې له دی چې الوتکه په مځکه و لګیږی تیزوالی یی وټاکی، q = 15°. همدارنګه، د دې شېبې په جریان کې د ملاتړ کیبل کې د رامنځته شوي اعظمي کشش مقدار څه دی؟ د الوتکې اندازه اود هغه لفت (lift) تاثیرچې د وزرونوله املې منځته راځی له پامه وغورځوی.

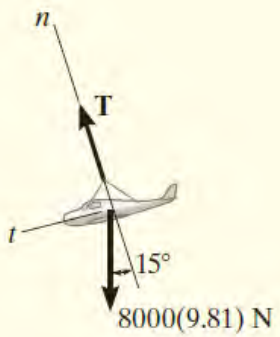


(a)

حل :

څرنګه چې د کیبل قوه په الوتکه کار نه کوي، نو دا باید د حرکت معادلې له لارې ترلاسه شي. لومړی، موږ باید د الوتکې تیزوالی په B نقطه کې وټاکو.

پوتینشیل انرژي (Potential Energy) : د سهولت لپاره، د ګینټري په سر کې د دیتام یا معیاری کربنه ټاکل شوی ده، انځور 14-21a .



(b)

انځور 14-21

د انرژي ساتنه (Conservation of Energy) :

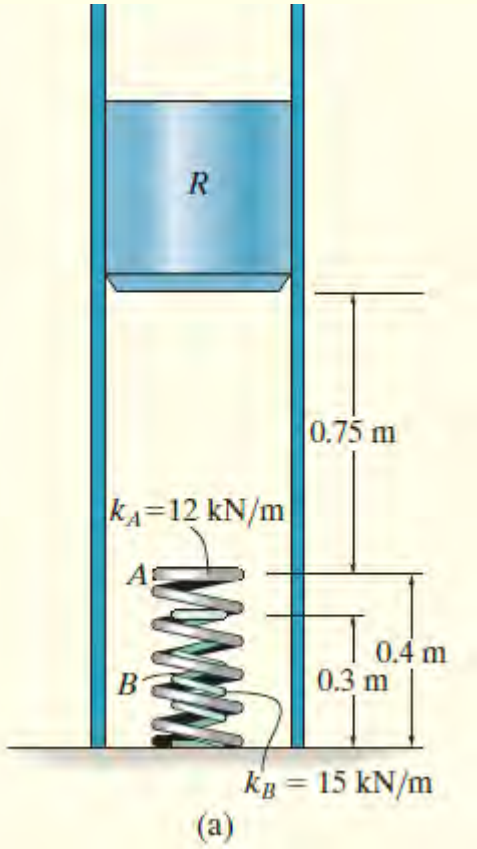
$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 - 8000\text{ kg}\,(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 60°\text{ m}) =$$
$$\tfrac{1}{2}(8000\text{ kg})v_B^2 - 8000\text{ kg}\,(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 15°\text{ m})$$
$$v_B = 13.52\text{ m/s} = 13.5\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

د حرکت معادله (Equation of Motion) : د آزاد بدن ډایګرام له مخې، کله چې الوتکه په B کې وي، انځور 14-21b ، مورِ لرو:

$$+\nwarrow \quad \Sigma F_n = ma_n;$$
$$T - (8000(9.81)\text{ N})\cos 15° = (8000\text{ kg})\frac{(13.52\text{ m/s})^2}{20\text{ m}}$$
$$T = 149\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.10

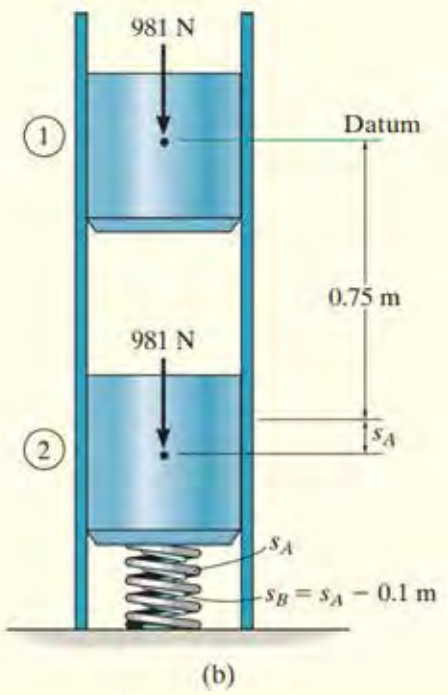


یو ضربه وهونکې تول R چې په انځور 14-22aکې ښودل شوی، 100 کیلو ګرامه کتله لري او له 0.75 متره لوړوالي څخه په یوه فنر A چې سختي یې $k_A = 12$ kN/mده رالوېږي.که یو دویم فنرB ، چې سختي یې $k_B = 15$ kN/mده، د A په مینځ کې "ایښودل یا ځای په ځای" شوی وي، نو د A اعظمي بې ځایه کیدل معلومه کړئ چې د ضربه وهونکی تول ښکته حرکت ودروي. د هر فنر راکړل شوی اوږدوالی په انځورکې ښودل شوی. د فنرونو کتله د پام وړ نه دي.

حل :

دلته به مورِ سیستم ضربه وهونکی تول او دواړه فنرونه وګڼو.

پوتنشیل انرژي (Potential Energy): مورِ به فرض کړو چې ضربه وهونکی تول په هغه



انځور 14-22

وخت کې چې ودریږی دواړه فنرونه غونجوی. د ډاټم یا معیاری کربنه د ضربه وهونکي توپ د ثقل په مرکزکی د هغې په اولي حالت کې ټاکل شوی، لکه څنګه چې په انځور 14-22b کې ښودل شوی. کله چې کینیټیک انرژي صفر ته راټیټه شي($v_2 = 0$) ، A به په اندازه د s_A غونج شویی او B ، $s_B = s_A - 0.1$ m غونج شویی.

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy).

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{2}{A} + \frac{1}{2}k_B(s_A - 0.1)^2 - Wh]$$

$$000\ \text{N/m})s_A^2 + \frac{1}{2}(15\,000\ \text{N/m})(s_A - 0.1\ \text{m})^2$$

$$- 981\ \text{N}\ (0.75\ \text{m} + s_A)]$$

دا بیا له ترتیبولو سره کیږي:

$$13{,}500s^2_A - 2481s_A - 660.75 = 0$$

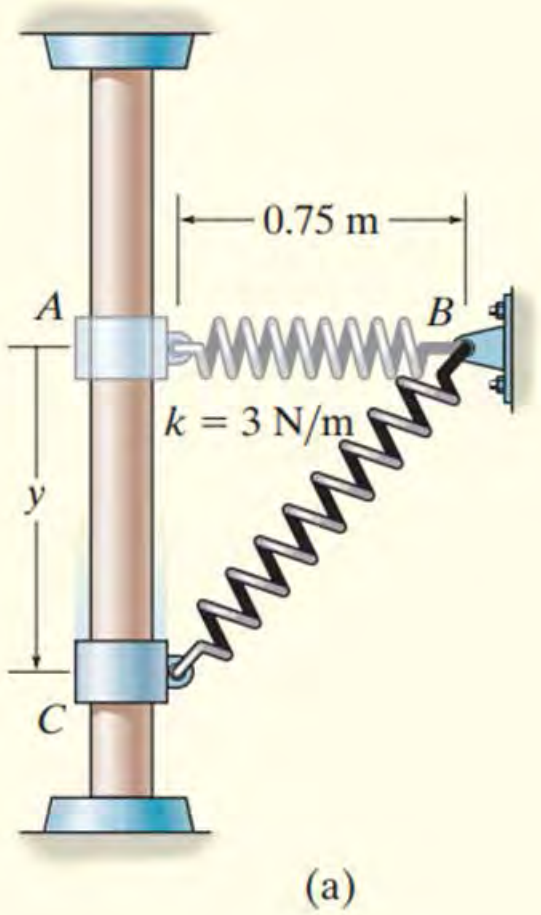
د مربع فورمول په کارولو سره او د مثبت جذر حل کولو سره، مونږ لرو:

$$s_A = 0.331\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

څرنګه چې $s_B = 0.331\ \text{m} - 0.1\ \text{m} = 0.231\ \text{m}$ مثبت دی، نودا فرضیه چې ضربه وهونکی توپ دواړه فنرونه غونجوی سمه ده.

یادونه: دویم جذر $s_A = -0.148$ m ، فزیکي حالت نه ښیي. له دې چې مثبت s په ښکته خوا کې اندازه کیږي، منفي نښه دا ښیي چې فنر A باید "وغځول" شي د 0.148 مترو په اندازه، د ضربه وهونکی توپ د درولو لپاره.

مثال 14.11



په انځور 14-23a کې ښودل شوی یوه ښویه 2 کیلو ګرامه غاړه کی په عمودي شافټ کې په پراخه حالت (loosely) ځای په ځای شوي ده. کله چې غاړه کی په A موقعیت کې وي فنر په طبعی حالت کی دی، د غاړه کی تیزوالی معلوم کړئ کله چې غاړه کی حرکت پیل کړي کله چې $y = 1$ m وي، که (a) دا په A کې له درېدلي حالت څخه خوشې شوی وي، او (b) دا په A کې په پورته خوا سرعت $v_A = 2$ m/s سره خوشې شوی وي.

حل :

دلته سیستم د غاړه کی او پفنر څخه جوړ دی.

برخه (a) پوتنشیل انرژي (Part a: Potential Energy):

د اسانتیا لپاره، ډیټم یا معیاری کربنه د AB له لارې تاکل شوی، لکه څنګه چې په انځور 14-23b کې ښودل شوی. کله چې غاړه کی په C کې وي، د جاذبې پوتنشیل انرژي $-(mg)y$ ده، ځکه چې غاړکی د ډیټم کربنی نه ښکته ده. د الاستیکی پوتنشیل انرژي $\frac{1}{2}ks^2_{CB}$ ده، چیرې چې $s_{CB} = 0.5$ m دی، چې دا د فنر وورډیدل، لکه څنګه چې په انځورکی ښودل شوي ، ښیي.

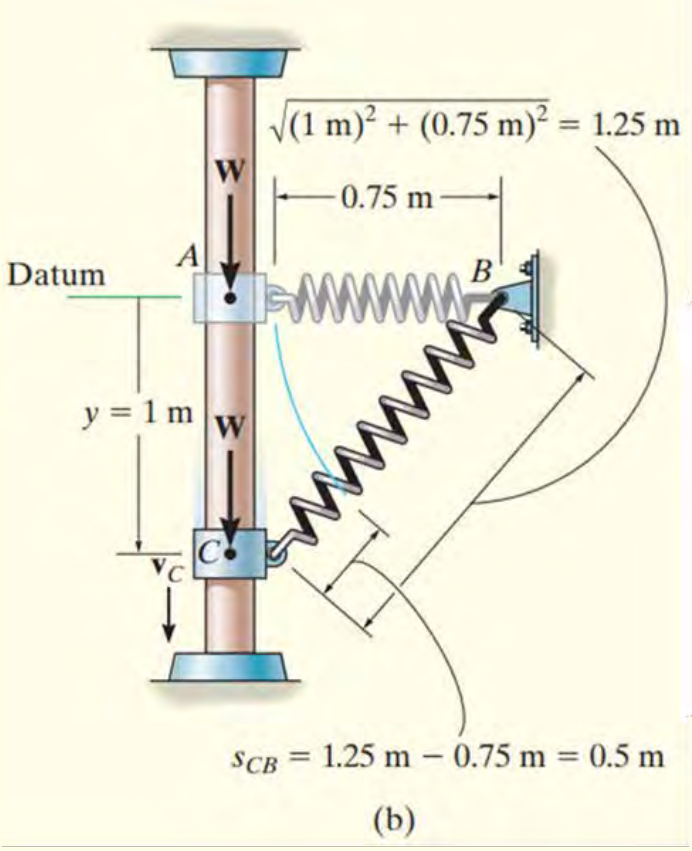
د انرژي ساتنه (Conservation of Energy):

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + [\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy]$$

$$0 + 0 = [\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2] + [\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})]$$

$$v_C = 4.39\text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$



که دا مسله د حرکت د معادلې یا د کار او انرژي د اصولو په کارولو سره حل شوې وای، نو د دې دواړو طریقو لپاره به د فنر د قوی اندازه او لوري بدلون په پام کې نیول شوی وای (وګورئ مثال 13.4). مګر دلته پورته حل څرګندې ګټې لري، ځکه چې یوازې د پیل او پیلنی ټکیو کی د انرژي ټاکل پکار دی.

برخه (b) د انرژی ساتنه (Par b: Conservation of Energy):

که $v_A = 2\text{ m/s}$ وي، د انځور 14-23b معلوماتو په کارولو سره، مونږ لرو:

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \left[\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\right]$$

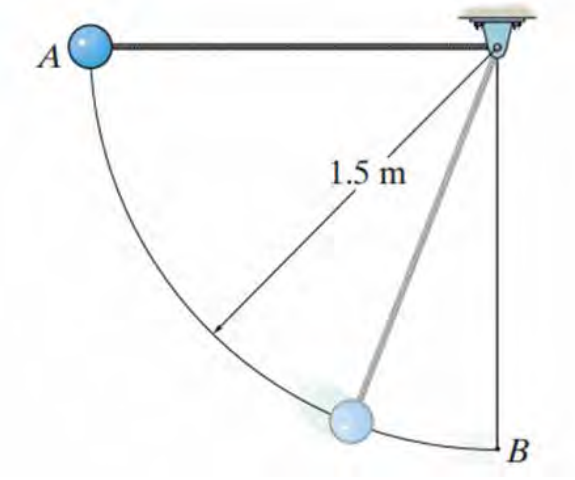
$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + [\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})]$$

$$v_C = 4.82\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: د غاړه کی کینیټیک انرژي یوازې د سرعت پر کچه پورې اړه لري، او له دې امله دا مهمه نه ده که چیرې غاړه ګی پورته یا ښکته په 2 m/s سرعت سره کله چې په A کې وی خوشې کیږي .

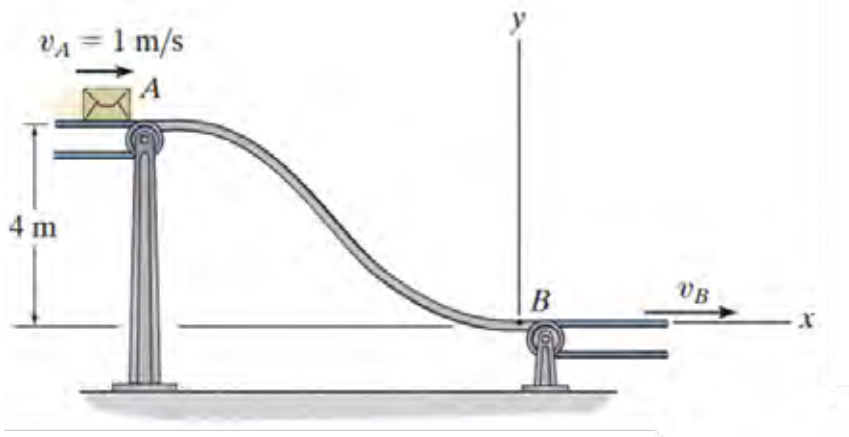
FUNDAMENTAL PROBLEMS
بنسټیز پوښتنې

ب 14-13. د 2 کیلو ګرامه پنډولم توپ له A نقطې څخه له دریدلی حالت نه خوشې کیږي. معلوم کړئ د توپ تیزوالی او په رسۍ کې به کشش څومره وي کله چې توپ د خپل ترټولو ښکته حالت، B، څخه تیریږي.



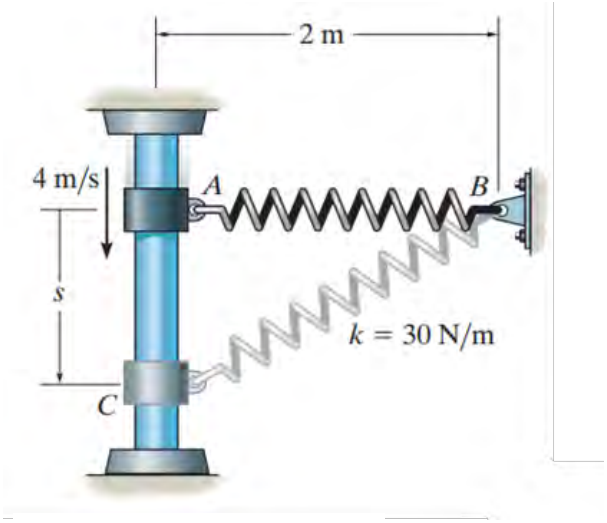
ب 14-13

ب 14-14. د 2 کیلو ګرامه ټرلیی د A نقطې څخه په تیزوالي $v_A = 1$ m/s سره د کنویرله تسمې جلا کیږي او د ښوی رمپ په اوږدو کې ښکته ښویږي. د کنویر تسمې اړین سرعت په B کې معلوم کړئ ترڅو ټرلیی پرته له ښوییدو هغه بلی تسمې ته ورشی. همدارنګه، هغه عمودی ریکشن چې د رمپ منحني برخه په B کې په ټرلیی واردوی، که $r_B = 2$ m وي، وټاکی.



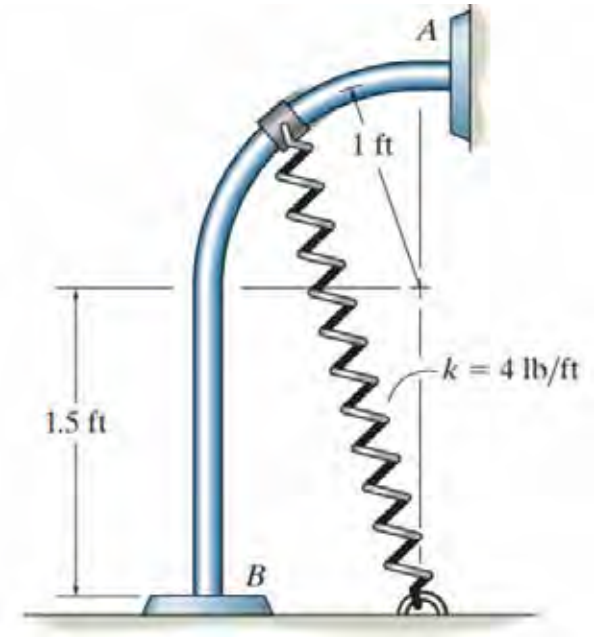
ب 14-14

ب 14-15. په لاندی انځور کې ښودل شوي، 2 کیلو ګرامه غاړکی ته په ټکي A کې 4 m/s سرعت په ښکته خوا ورکړول شوی. که د فنر ناغځیدلي اوږدوالی 1 m اود سختی ضریب یی $k = 30$ N/m وي، نو په $s = 1$ m کې د غاړکی سرعت معلوم کړئ.



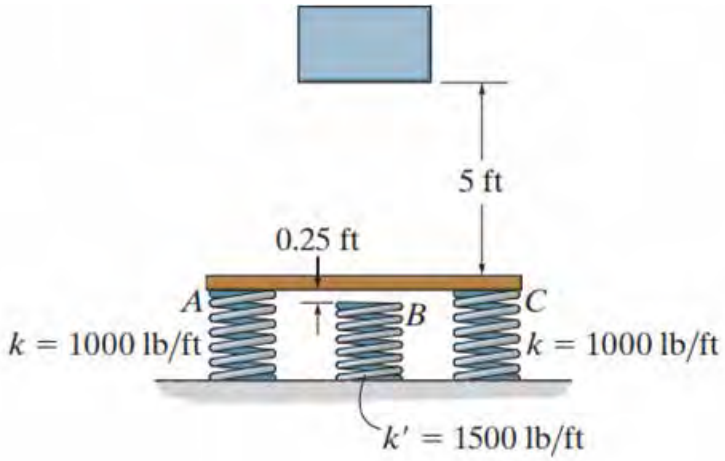
ب 14-15

ب 14-16. دا لاندې 5 پونډه ښویه غاړکی له A نقطې څخه په دریدلی حالت کی خوشې کیږي. د دې سرعت معلوم کړئ کله چې دا په B باندې ولګیږي.د فنر نه غځیدلي اوږدوالی 0.5 دي.



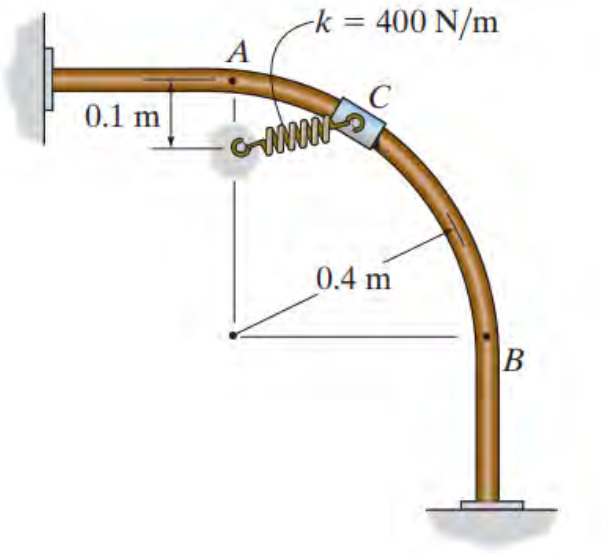
ب 14-16

ب 14-17. دا لاندی 75 پونډه بلاک له د تختې څخه په 5 ft لوړوالي خوشې کیږي. د هر فنر غونجیدل معلوم کړئ کله چې بلاک په تخته و لګیږي او د لنډ وخت لپاره ودریږی. د تختې کتله له پامه وغورځوئ. فنرونه په پیل کې کش شوي نه دي.



ب 14-17

ب 14-18. د 4 کیلو ګرامه غاړکی C په A کې $v_A = 2\text{m/s}$ سرعت لري. که لاربنود راډ بنوی وي، نود غاړکی تیزوالی معلوم کړئ کله چې دا په B کې وي. فنرنه غځیدلې اوږدوالی $l_0 =$ 0.2 m لري.

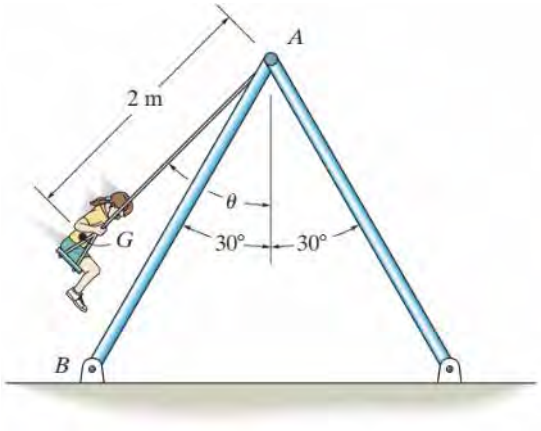


ب 14-18

پوښتنې

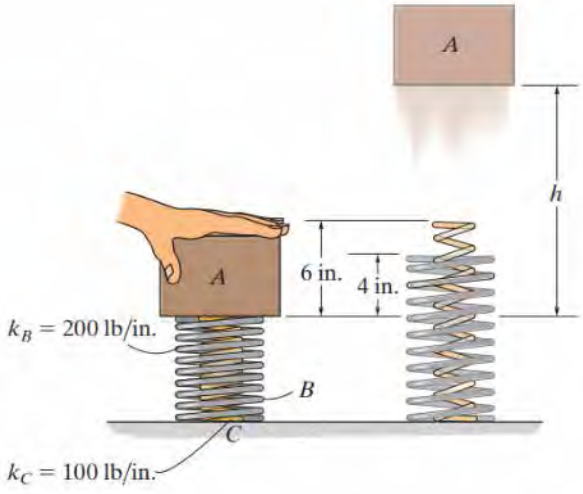
PROBLEM

14-66 . یوه نجلۍ 40 کیلو ګرامه کتله لري او د هغې د کتلې مرکز په G کې دی. که هغه یوه اعظمی لوړوالی ته چې د $\theta = 60°$ په واسطه ټاکل شوی ټال وه وهی، نو معلومه کړئ چې په هره څلورو د اتکأ په ستنیوکې لکه AB په هغه شېبه کې څومره قوه جوړیږي کله چې $\theta = 0°$. د زانګو په مرکزي برخه د ستنیو ترمنځ ځای پر ځای شوې ده.



پ 14-66

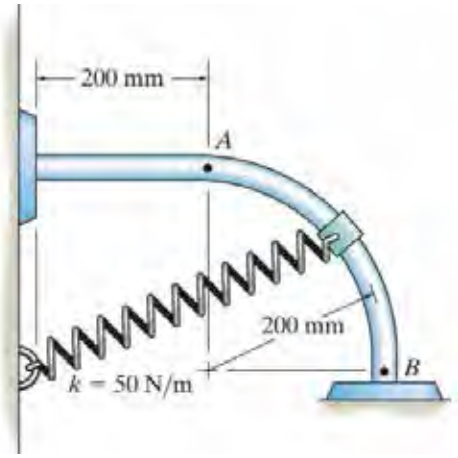
14-67. د 30 پونډه بلاک A د دوو ځاله شویو فنرونو B او C په سر باندې ایښودل شوی، او بیا د فشار له کبله نورښکته شوي دي. که فشار لرې شی، نو معلومه کړئ چې بلاک به ترکوم اعظمي لوړوالي h پورې پورته ولاړ شي.



پ 14-67

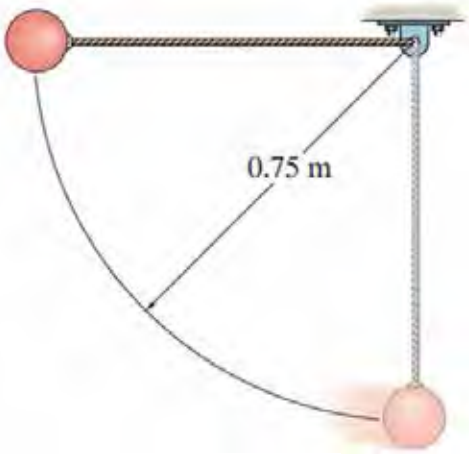
14-68. د 5 کیلو ګرامه غاړکی په A کې په 5 m/s سرعت سره ښي طرف ته روانه ده. دابیا د ښوی راد په اوږدو کې ښکته ځي. هغه تیزوالي معلوم کړئ کله چې غاړکی B نقطې ته ورسیږي، کوم چې د راډ د منحني برخې پای ته رسیدو دمخه موقعیت لري. فنر 100 mm نه غځیدلی اوږدوالی لري او د B نقطه د راډ د منحني برخې پای ته رسیدو دمخه موقعیت لري. همدارنګه، په دې شیبه کې په غاړکی باندې عمودې قوه څه ده؟

14-69 د 5 کیلو ګرامه غاړکی په A کې په 5 m/s سرعت سره ښي طرف ته روانه ده. دا بیا د ښوی راد په اوږدو کې حرکت کوی. هغه تیزوالي معلوم کړئ کله چې غاړکی B نقطې ته ورسیږي، کوم چې د راډ د منحني برخې پای ته رسیدو دمخه موقعیت لري، او هغه عمودې قوه چې دا په دې نقطه کې په راډ باندې واردوي معلومه کړي. فنر 100 mm نه غځیدلی اوږدوالی لري.



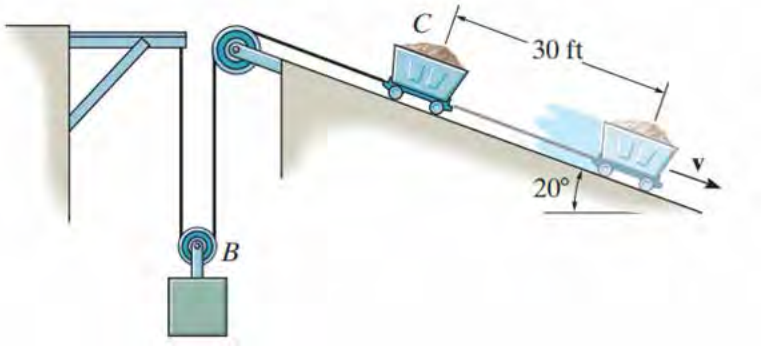
پ 14-68/69

14-70. د پنډولم د توپ کتله 0.2 کیلو ګرامه ده او کله چې دا د افقي حالت څخه خوشې کیږي، معلوم کړئ چې تیزوالی او په رسۍ کې کشش په هغه شیبه کې چې توپ د خپل ترټولو ښکته حالت څخه تیریږي څه دي .



پ 14-70

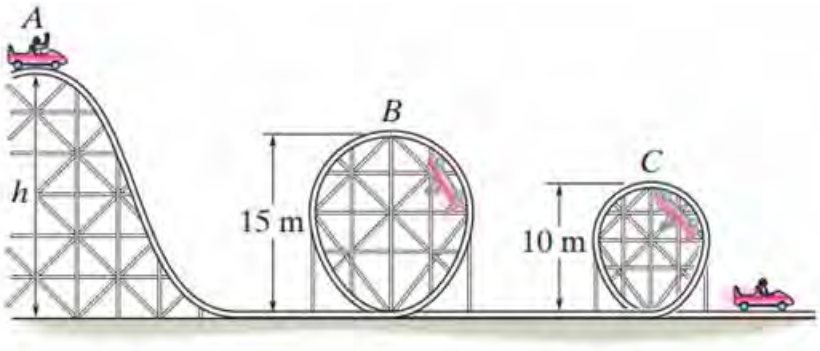
14-71 . موټر C او د هغې منځپانګې ټول ټول 600 پونډه دی، پداسې حال کې چې د بلاک B ټول 200 پونډه دی. که چیرې موټر له دریدلی حالت څخه خوشې شي، معلومه کړئ چې کله موټر 30 فټه په 20^0 میلان ښکته حرکت وکړي، د ده تیزوالی به څه وي. وړاندیز: د جاذبې پوتنشیل انرژي اندازی پیداکولو د پاره، د B او C د پیل ارتفاعاتو لپاره جلا دیټم یا معیاری کربنی وټاکی.



پ 14-71

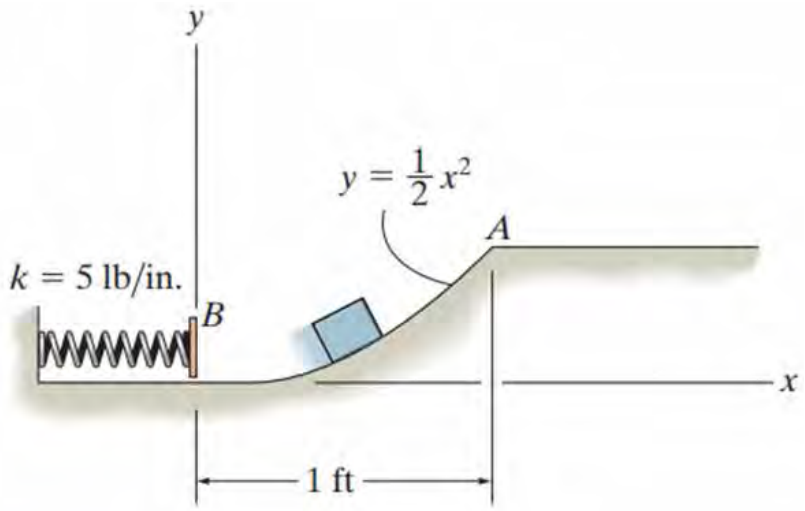
*14-72. د رولر کوسټر موټر د مسافر په ګډون 700 کیلو ګرامه کتله لري. که دا د غونډۍ A له سرځخه په سرعت $v_A = 3\ m/s$ سره حرکت پیل کړي، نو د غونډۍ د څوکی لږ تر لږه لوړوالی h معلوم کړئ ترڅو موټر په داخلي حلقو کې پرته له دې چې له لاری څخه جلا شي سفر وکړي. اصطکاک، د ټیرو کتله، او د موټر اندازه له پامه وغورځوئ. کله چې موټر په B او C کې وي، په موټر عمودي ریکشنونه څه دی؟ $r_B = 7.5\ m$ او $r_C = 5\ m$ وکاروي.

14-73. د رولر کوسټر موټر د مسافر په ګډون 700 کیلو ګرامه کتله لري. که دا د غونډۍ A له سرځخه په دریدلی حالت سره حرکت پیل کړي، نو د غونډۍ د څوکی لږ تر لږه لوړوالی h معلوم کړئ ترڅو موټر په دواړوداخلي حلقو کې پرته له دې چې له لاری څخه جلا شي سفر وکړي. اصطکاک، د ټیرونو کتله، او د موټر اندازه له پامه وغورځوئ. کله چې موټر په B او C کې وي، په موټر عمودي ریکشنونه څه دی؟ $r_B = 7.5\ m$ او $r_C = 5\ m$ و کاروي.



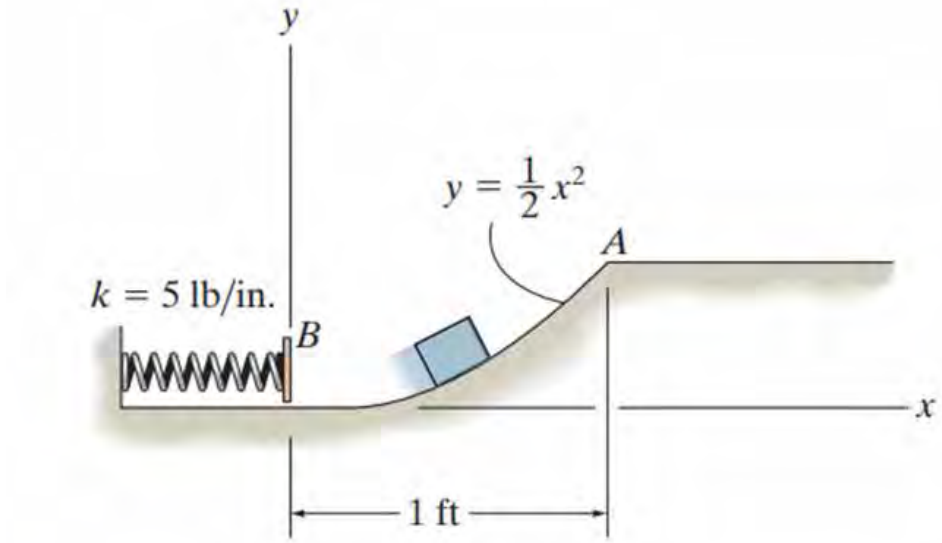
پ 14-72/73

14-74. لږ تر لږه اندازه د فنر کمپرس کیدل وښیی کله چې د 0.5 پونډه بلاک سره خوشی شی، تر څو بلاک له B په ښویه سطحه و ښویږی او A نقطې ته ورسیږي .



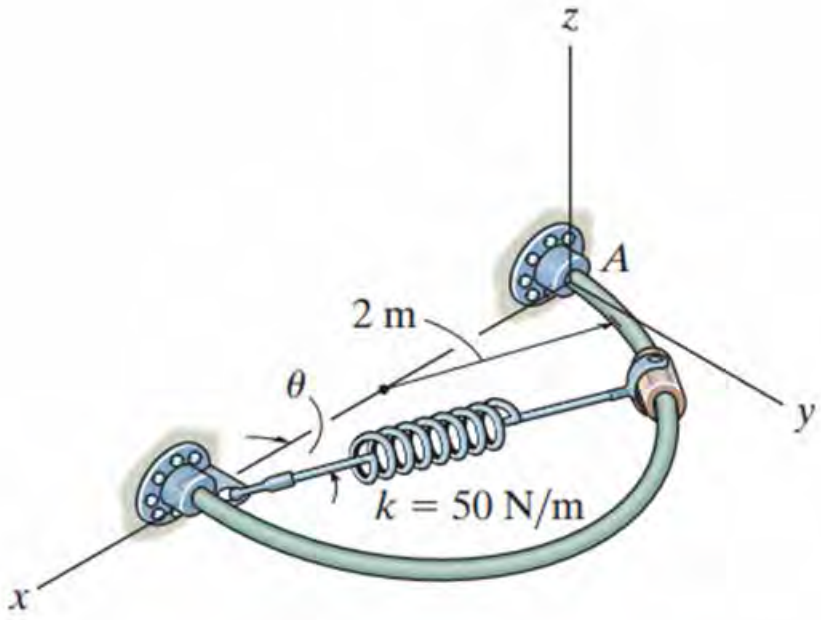
پ 14-74

14-75. یو فنر د 3 انچو په اندازه د 0.5 پونډه بلاک په مقابل کی غونج شوی او بلاک له دریدلی حالت څخه خوشې شوي، نو معلومه کړئ هغه عمودی قوه چې د ښویی سطحی له خوا په بلاک باندی واردیږی کله چې بلاک د $x = 0.5$ ft نقطې ته ورسیږي.



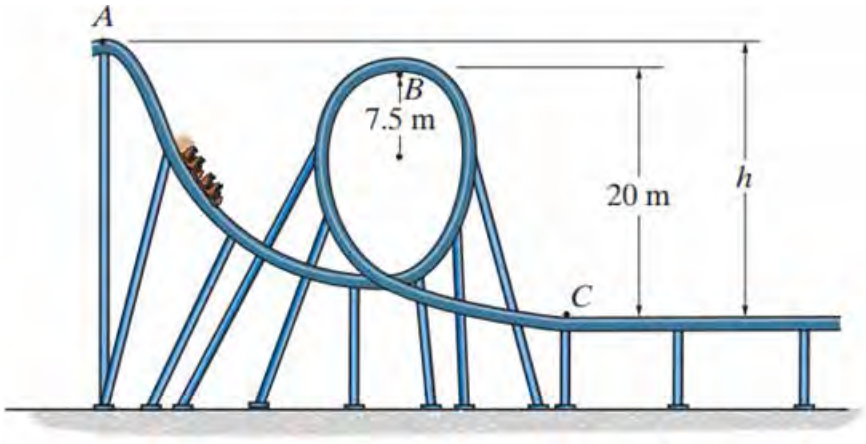
پ 14-75

14-76. فنر د $k = 50\ \text{N/m}$ سختۍ لري او نه غځيدلې اوږدوالی يې 0.3 m دی. که دا د 2 کيلو ګرامه بنويی غاړکی سره ټرل شوی وي او غاړکی په A کې له دريدلی حالت څخه خوشې شي ($\theta = 0^\circ$)، نو کله چې $\theta = 60^\circ$ شی، د غاړکی تيزوا لۍ معلوم کړئ. حرکت په افقي سطحه کې رامنځته کيږي. د غاړکی اندازه له پامه وغورځوئ.



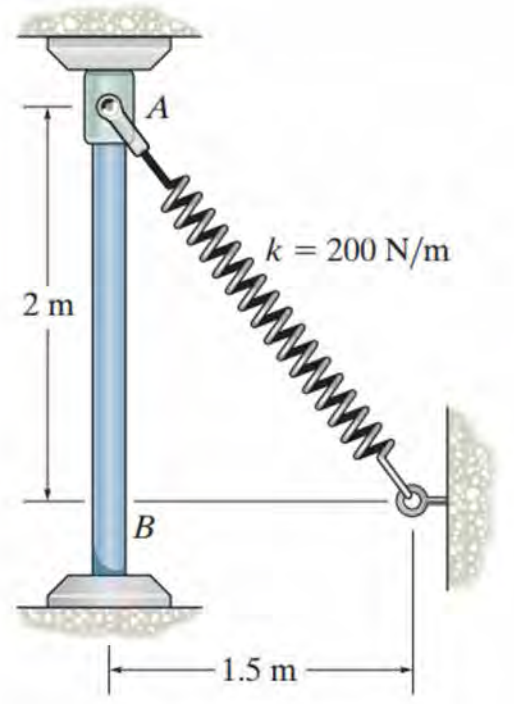
پ 14-76

14-77. د رولر کوسټر موټر د m کتله لري او له دريدلی حالت څخه په A نقطه کې خوشې کيږي. که ټرک يا لاره داسې ډيزاين شي چې موټريی په B کې پرې نږدي، نو اړين لوړوالی h معلوم کړئ. همدارنګه، د موټرهغه تيزوالی معلوم کړئ کله چې دی C نقطې ته ورسيږي. اصتکاک له پامه وغورځوئ.



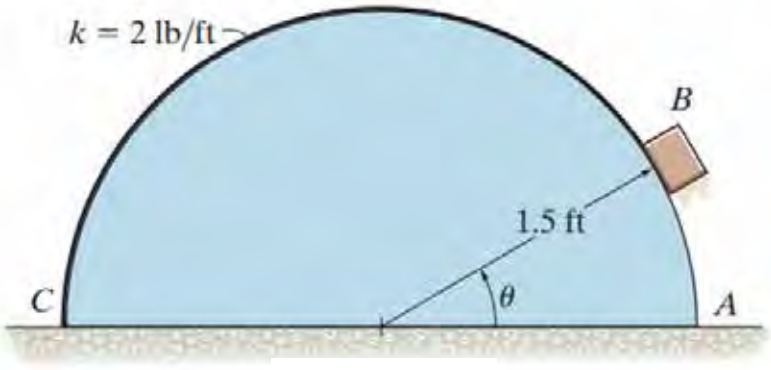
پ 14-77

14-78. یو فنر $k = 200\ \text{N/m}$ سختي لري او نه غځيدلې اوږدوالی يې $0.5\ \text{m}$ دی. که دا د 3 کيلو ګرامه ښويی غاړکی سره ټرل شوی وي اوغاړکی له دريدلی حالت څخه په A کې خوشې شي، نو کله چې غاړکی B ته ورسيږي د غاړکی تيزوالی معلوم کړئ. د غاړکی اندازه له پامه وغورځوئ.



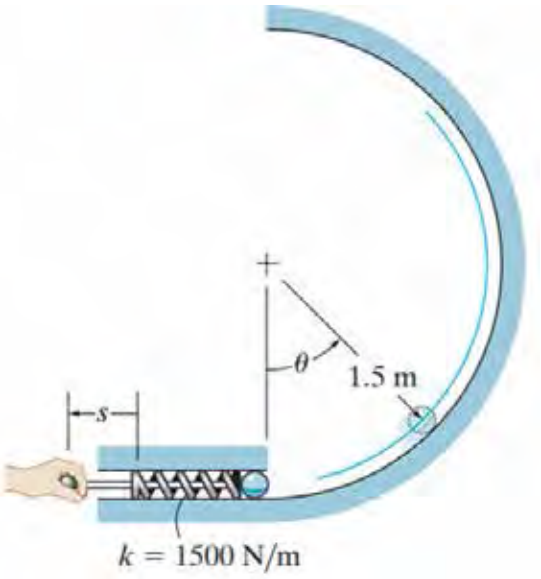
پ 14-78

14-79. يو 2 پونډه بلاک په ښويه نيمه سلنډري سطحه په A کې پروت دی. يو الاستيک رسی چې $k = 2\ \text{lb/ft}$ سختی لري، په بلاک، په B او د نيمه سلنډرپه بيخ په C کې ټرل شوی ده. که بلاک له دريدلی حالت څخه په $\theta = 0$، A، کې خوشې شي، نو د رسی تر ټولو اوږد نه غځيدلی اوږدوالی معلوم کړئ ترڅو بلاک نيمه سلنډر په هغه شيبه کې چې $\theta = 45°$ وی پريږدي. د بلاک اندازه له پامه وغورځوئ.



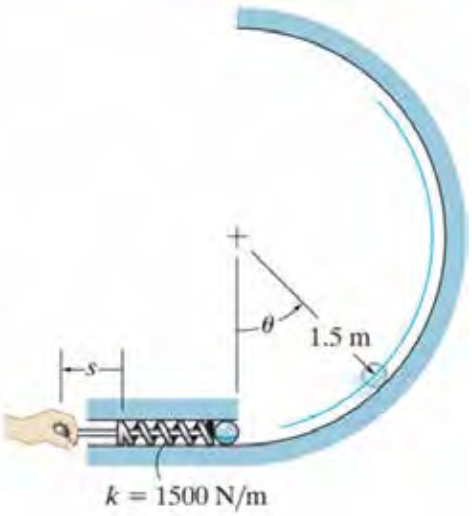
پ 14-79

14-80. کله چې $s = 0$ ، د ویشتلومیکانیزم فنر غځیدلی نه وي. که چېرې لاس شاته کش شي چې $s = 100\ mm$ وي او بیا خوشې شي، د 0.3 کیلو ګرامه توپ تیزوالی او په توپ باندې د دایروی ټرک عمودي ریکشن په $\theta = 60°$ کې معلوم کړئ. فرض کړئ چې د تماس ټولې سطحې ښویی دی. د فنر کتله اود توپ اندازه له پامه وغورځوئ .



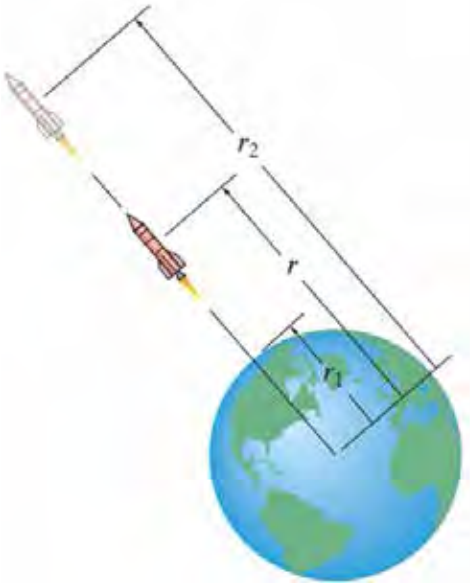
پ 14-80

14-81. کله چې $s = 0$، د ویشتلو میکانیزم فنر غځیدلی نه وي. که چېرې لاس شاته کش شي چې $s = 100\ mm$, وي او بیا خوشې شي، معلوم کړئ چې 0.3 کیلو ګرامه توپ به د دایروی ټرک څخه د ببلبدو پرته تر ټولو زیاته زاویې θ ته سفر وکړي. فرض کړئ چې د تماس ټولې سطحې ښویی دي. د فنرکتله او توپ اندازه له پامه وغورځوئ .



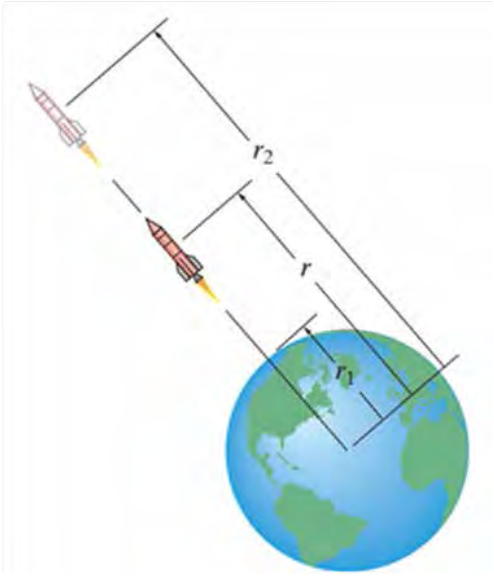
پ 14-81

14-82. که د ځمکې کتله M_e وي، وښیی چې د m کتله لرونکي جسم جاذبي پوتنشیل انرژي چې د ځمکې له مرکز څخه د r په فاصله کې ځای لري، عبارت ده په $V_g = -GM_em/r$. په یاد ولرئ چې د ځمکې او جسم تر منځ د جاذبي قوه $F = G(M_em/r^2)$, ده، معادله 13-1. د محاسبې لپاره ډیټم په $r \to \infty$ انتخاب کړئ. همدارنګه، دا وښیی چې F یوه د ساتنې قوه ده.



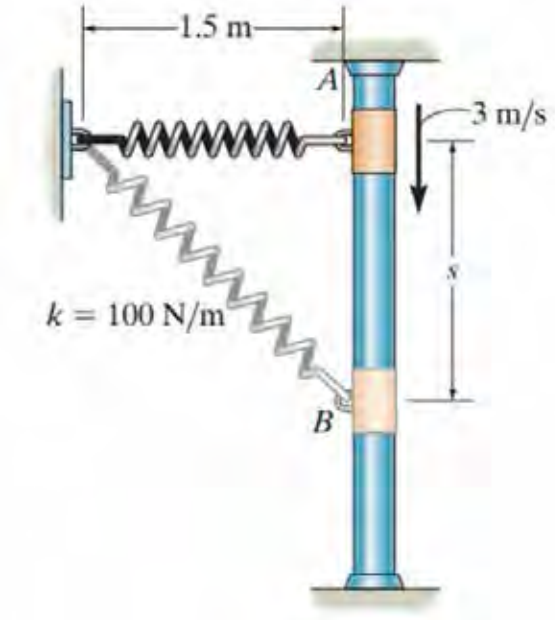
ب 14-82

14-83. یو راکټ چې کتله یې m ده، د ځمکې له سطحې څخه عمودي توغول کیږي، یعنې په $r = r_1$ کې. فرض کړئ چې په لوړیدو کې هیڅ کتله له لاسه نه ورکوي، معلوم کړئ چې د جاذبې خلاف څومره کار باید وکړي ترڅو r_2 فاصلې ته ورسیږي. د جاذبې قوه $F=GM_em/r^2$ (Eq. 13-1) ده، چېرته چې M_e د ځمکې کتله ده او r د راکټ او د ځمکې د مرکز ترمنځ فاصله ده.



ب 14-83

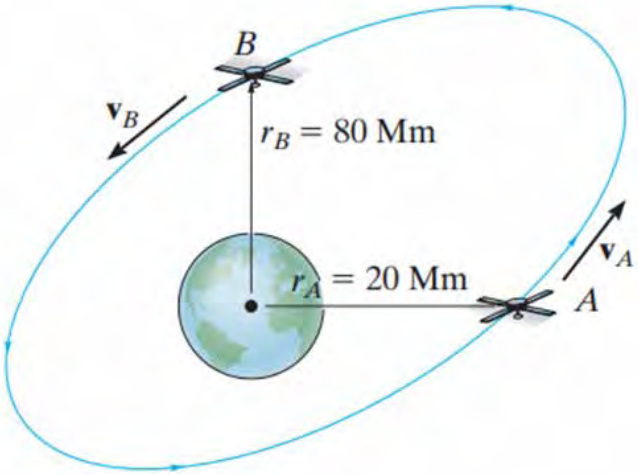
14-84. د 4 کیلو ګرامه بنویی غاړکی تیزوالی 3 m/s دی کله چې دا په $s = 0$ کې وي. معلوم کړئ چې اعظمي فاصله s څومره ده چې غاړکی به ولاړه شي مخکې له دې چې لحظوی ودریږي. فنرنه غځیدلې اوږدوالی 1 m لري.



ب 14-84

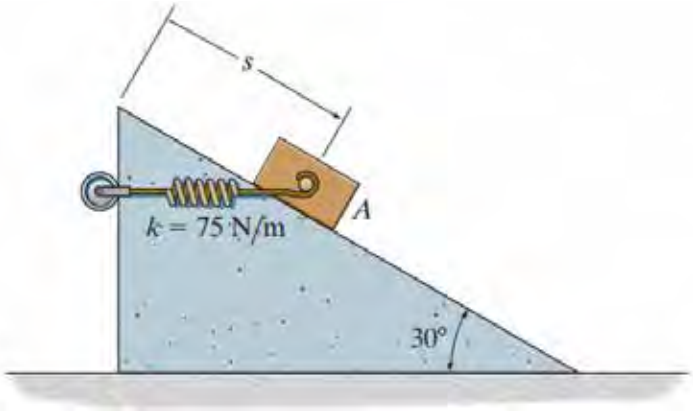
14-85. یو 60 کیلو ګرامه جوړه شویی سپوږمی په ازاد بیضوي مدار کې حرکت کوي لکه په A کې، چیرې چې $r_A = 20$ Mm وي، او تیزوالی یی $v_A = 40$Mm/h دي. د سپوږمی تیزوالی معلوم کړئ کله چې دا B نقطې ته ورسیږي، چیرې چې $r_B = 80$ Mm دي؟

مرسته: پوښتنه 14-82 وګورئ، چیرته چې $M_e = 5.976\times10^{24}$ kg, او $G = 66.73\times(10^{-12})\ m^3/(kg\cdot s^2)$ دی.



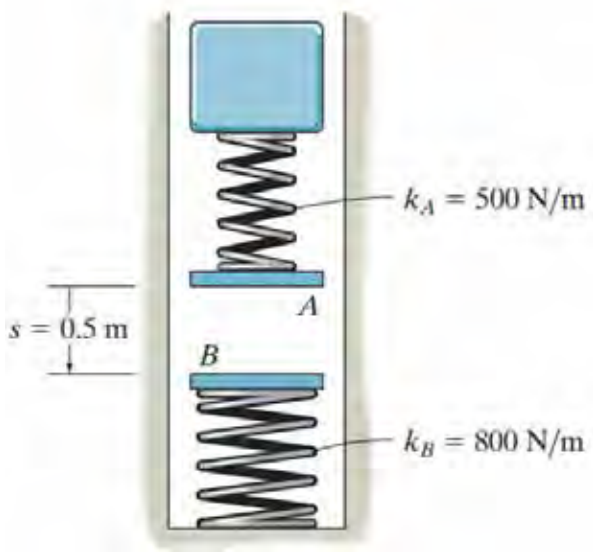
ب 14-85

14-86 . فنرغځیدلی نه دی کله چې $s = 1\ m$ وي، او 15 کیلو ګرامه بلاک له دې ځایه له دریدلی حالت څخه خوشې شوی. د بلاک تیزوالی معلوم کړی کله چې $s=3$ وی. فنر د حرکت په وخت کی افقی پاتیکیږیو او د بلاکی په ښویه مایله سطحی پاتی کیږی.



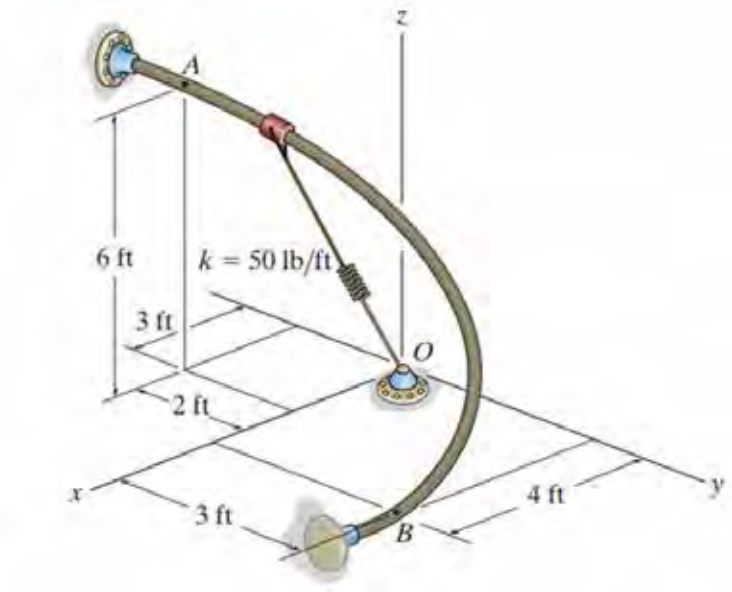
ب 14-86

14-87. بلاک 20 کیلو ګرامه کتله لري او له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $s=0.5\ m$ وي. که د بمپرونو A او B کتله له پامه وغورځولای شو، د هر فنراعظمي بیځایه کیدنه چې د ټکر له امله رامینځته شوی معلومه کړی.



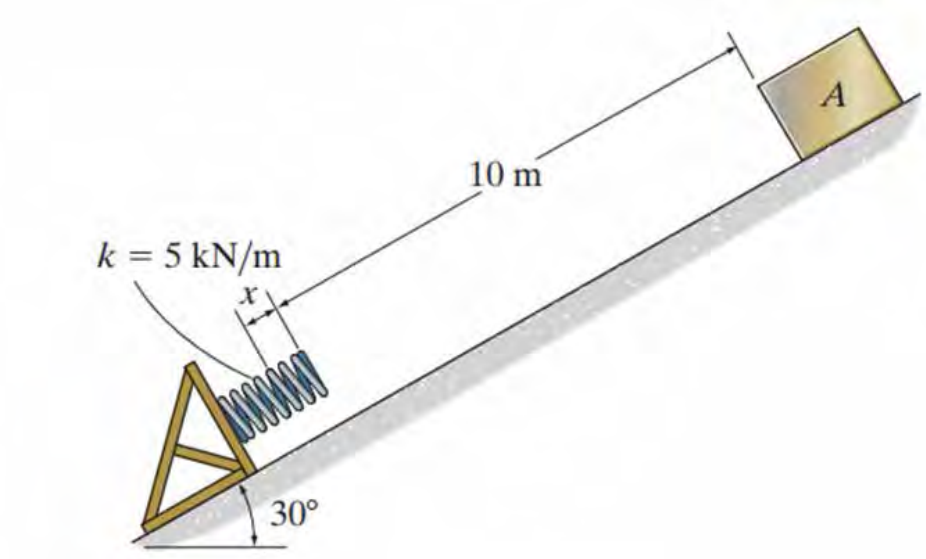
ب 14-87

14-88. د 20 پونډه ښویه غاړکی د فنر سره ټرل شوی چې نه غځیدلې اوږدوالی یې 4 ft دي. که دا له A موقعیت څخه د دریدلی حالت نه خوشې شي، تیزوالی یی معلوم کړئ کله چې دا B نقطې ته ورسیږي.



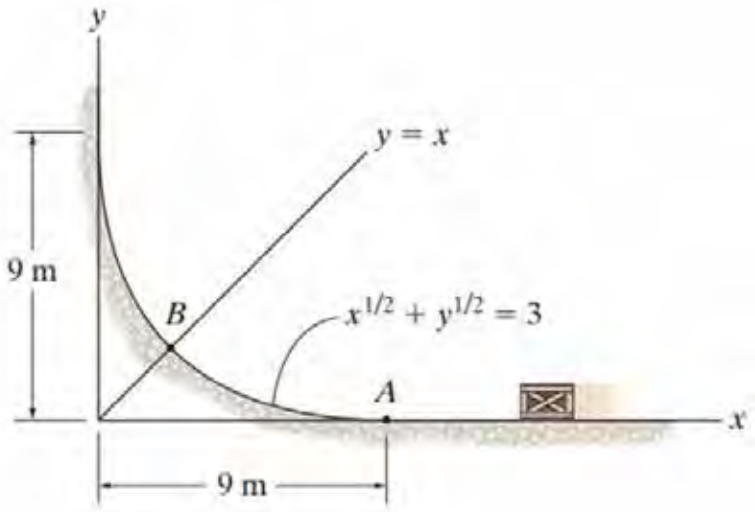
ب 14-88

14-89. د 10-کیلو ګرامه بلاک A د دریدلی حالت څخه خوشې کیږي او د ښویی سطحې په اوږدو کې ښویږي. د فنر غونجیدلواندازه x معلومه کړئ کله چې بلاک په لحظوی توګه ودریږی.



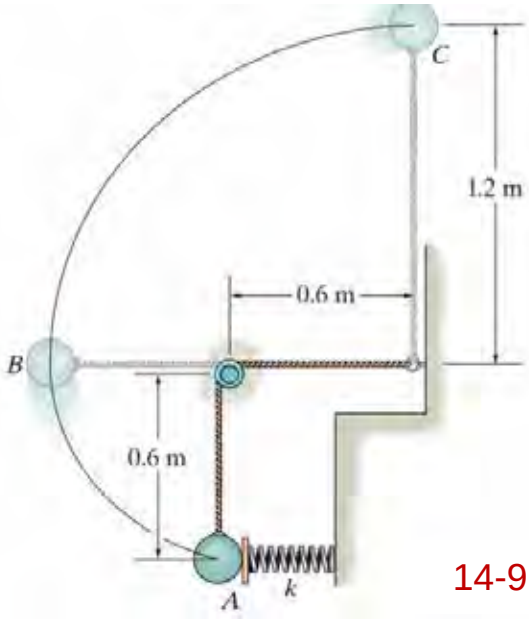
ب 14-89

14-90. کله چې 5-کیلو ګرامه بکس A نقطې ته ورسیږي، تیزوالی یې $v_A = 10$ m/s دي. معلوم کړئ چې بکس په سطحه باندې په B نقطه کې څه عمودی قوه واردوي. اصتکاک او د بکس اندازه له پامه وغورځوئ.



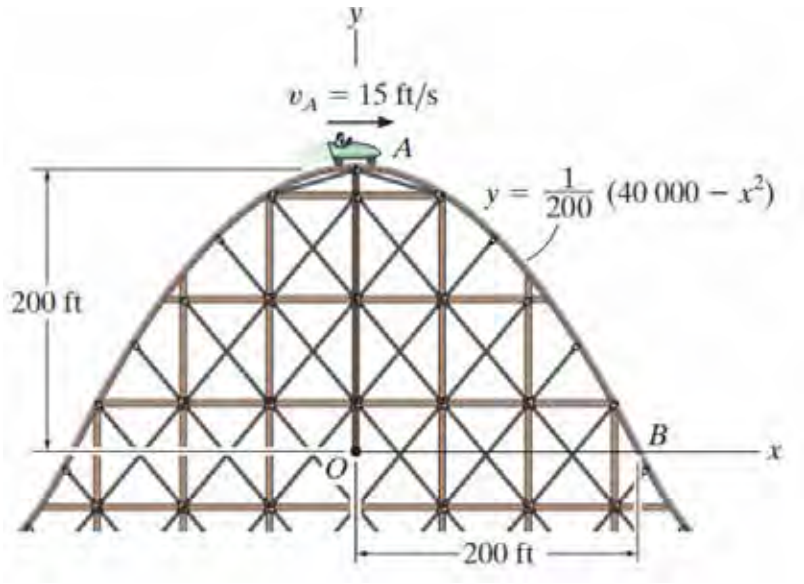
پ 14-90

14-91. د پنډولم 0.75 کیلو ګرامه توپ په A موقعیت کې له آرام حالت څخه د یو فنر په واسطه توغول کیږي چې سختۍ $k = 6\text{kN/m}$ لري او 125 mmغونج شوی. د توپ تیزوالی او په رسۍ کې کشش څومره دی کله چې توپ په B او C موقعیتونو کې وي. ټکې B په هغه مسیر کې موقعیت لري چیرې چې د انحنا شعاع لا هم 0.6 m ده، یعنې د رسۍ د افقی کیدلوڅخه لږ مخکې.



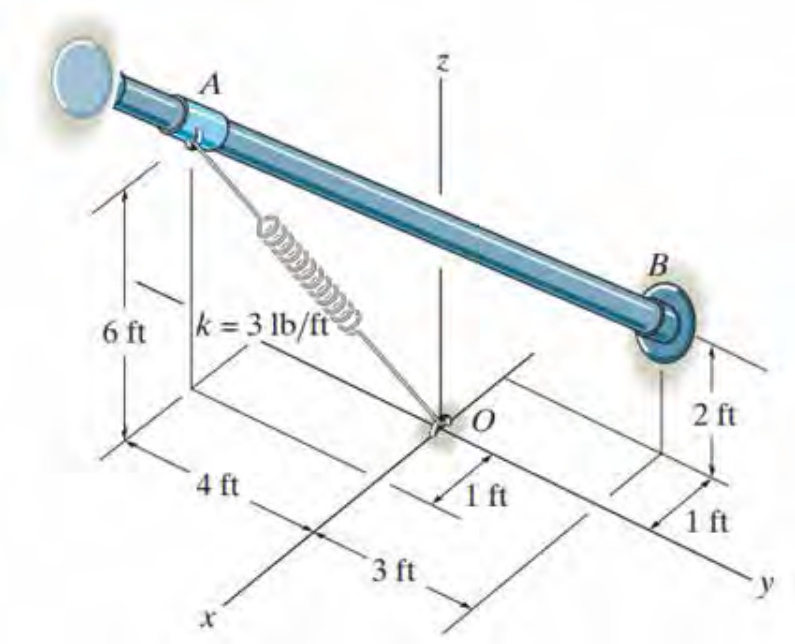
پ 14-91

14-92. د رولر کوسټر موټر سرعت 15 ft/s دی کله چې دا د عمودي پارابولیک ټرک په لوړسر کې وي. د موټر سرعت او په ټرک باندې د موټر عمودي قوه معلوم کړئ کله چې دی B نقطې ته ورسیږي. اصتکاک او د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ. د موټر او مسافرینو ټول ټول 350 lb دی.



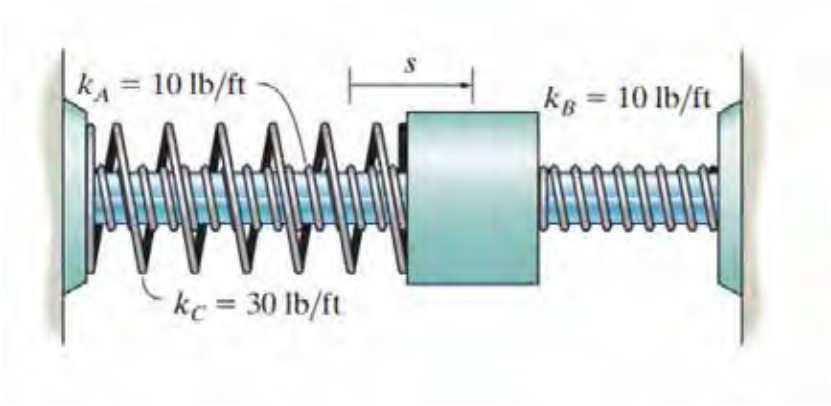
پ 14-92

14-93. د فنر سختۍ $k = 3$ lb/ft او نه غځیدلې اوږدوالی یې 2 ft دی. که دا د 5 پونډه ښویی غاړه کی سره وصل وي او حلقه له A موقعیت څخه په دریدلی حالت کې خوشې شي، معلوم کړئ د غاړهکی تیزوالی کله چې دا د راډ په پای، په B کې ولګیږي. د غاړه کی اندازه له پامه وغورځوئ.



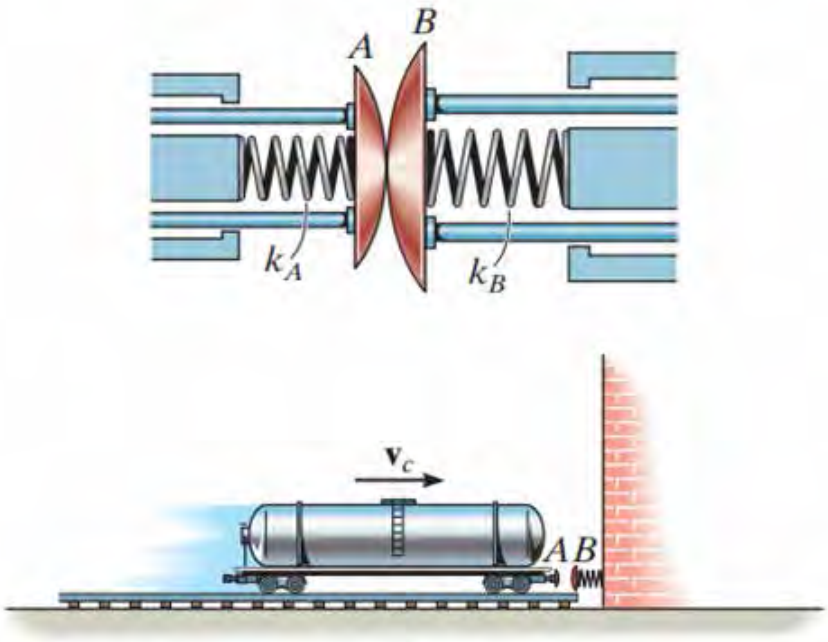
پ 14-93

14-94. د 20 پونډه غاړکی حرکت په ښوی راډ پوری تؤلی دی. دا د دریو فنرونو سره ټړل شوی چې کله $s = 0$ وي، غځیدلي نه وي. که غاړکی $s = 0.5$ ft بیځایه شی او له دریدلی حالت څخه خوشې شي، تیزوالی یی معلوم کړئ کله چې $s = 0$ وي.



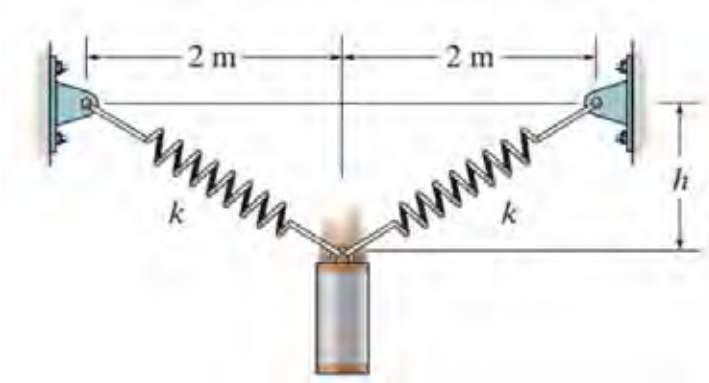
ب 14-94

14-95. یود ټانک موټر د د دوو فنری بمپرونو A او B لخوا درول شوی، چې سختۍ یی په ترتیب سره $k_A = 15\times10^3$ lb/ft او, $k_B = 20\times10^3$ lb/ft دی. بمپر A په موټر ټړل شوی، او بمپر B په دیوال ټړل شوی. که موټر 25×10^3 lb تول ولري او په 3 ft/s تیزوالي په آزادانه توګه حرکت کوي، د هر فنراعظمي غونجیدل معلوم کړئ په هغه شیبه کې چې بمپرونه موټر ودروي.



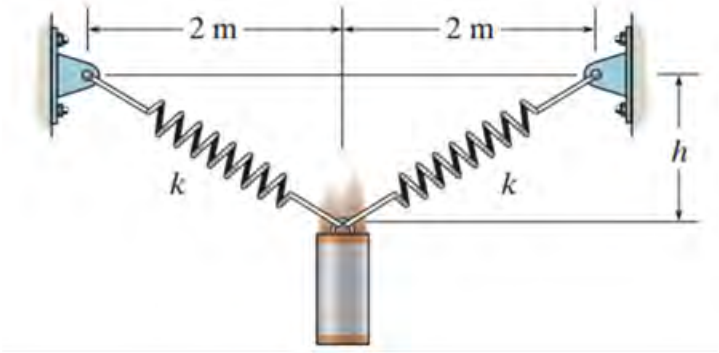
ب 14-95

14-96. یو سلنډر 20 کیلو ګرامه کتله لري او په $h = 0$ کې له دریدلی حالت څخه خوشې شوي. کله چې $h = 3$ m وي، تیزوالی یې څومره دی. دهر فنرسختی , $k = 40$ N/m ده او نه غځیدونکی اوږدوالی یې 2m دی.



ب 14-96

14-97. که 20 کیلو ګرامه سلنډر په $h = 0$ کې له د دریدلی حالت څخه خوشې شوي، د هر فنر اړینه سختی k معلومه کړئ ترڅو د سلنډر حرکت په $h = 0.5$ m حالت کې ودریږي. دهر فنر نه غځیدلې اوږدوالی 1 متر دی.



ب 14-97

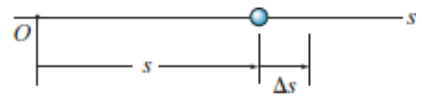
د فصل بيا کتنه

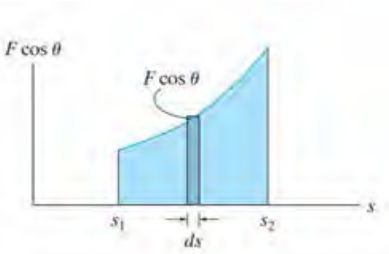
د فصل بيا کتنه CHAPTER REVIEW

د يوې قوې کار (Work of a Force):

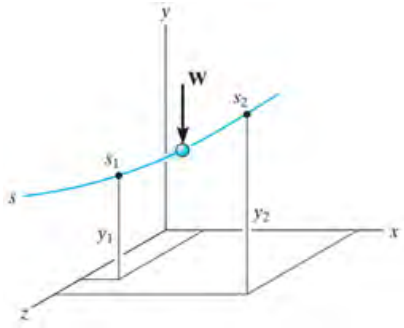
يو قوه هغه وخت کار کړي کله چې هغه د خپل عمل د کربنې په اوږدو کې بېځايه کېدل ولري.

که قوه د بېځايه کېدو سره بدلېږي، نو کار $U = \int F \cos\theta \, ds$ په ډول محاسبه کېږي. په ګرافيکي ډول، دا د F-sډياګرام لاندې سيمه يې استازيتوب کوي.



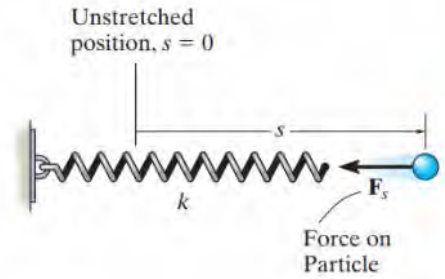


که قوه ثابته وي، نو د قوې په لورکې د بېځايه کېدو Δs لپاره، $U = F_c \Delta s$ کېږي. د دې حالت يو بنه مثال د توله کار دی، $U = -W(y_2 - y_1)$، دلته، Δs عمودی بېځايه کېدل دی.



د يو فنر د قوې لخوا ترسره شوی کار، $F = k\,s$، چې د فنرد غځيدو او يا غونجيدو، s، پورې اړه لري.

$$U = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)$$



د کار او انرژۍ اصول (The Principle of Work (and Energy) که د حرکت معادله په مماسی لوري کې، $\Sigma F_t = ma_t$، د کینماتیکي معادلی، $a_t\,ds = v\,dv$، سره یوځای شي، نو موږ د کار او انرژۍ اصول ترلاسه کوو. دا معادله څرګندوي چې د یوې ذرې لومړنۍ کیناتیک انرژي، جمع په ذره باندې ترسره شوی کار، مساوی یا برابردی د ذرې په وروستۍ کیناتیک انرژی سره. د کار او انرژۍ اصول د هغو پوښتنو د حل لپاره ګټور دی چې په کې قوه، سرعت، او بیځایه کیدل شامل وي. د دې تطبیق لپاره، د ذرې د بدن آزاد ډیاګرام باید رسم شي ترڅو هغه قواوې مشخصی شي چې کار کوي.	$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$	
قدرت او مؤثریت (Power and Efficiency) قدرت د کار کولو وختي کچه ده. د تطبیق لپاره، هغه قوه **F** چې قدرت تولیدوي، او د هغې سرعت **v** باید مشخص شي. اوسط قدرت مساوی دي په ترسره شوي کار تقسیم پر وخت. مؤثریت د قدرت تولیدولو او قدرت مصرفولو ترمنځ نسبت ښیي. د اصطکاک د زیانیدونکي امله، دا همیشه له یوه څخه کم وي.	$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$ $$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$ $$\varepsilon = \frac{\text{power output}}{\text{power input}}$$	

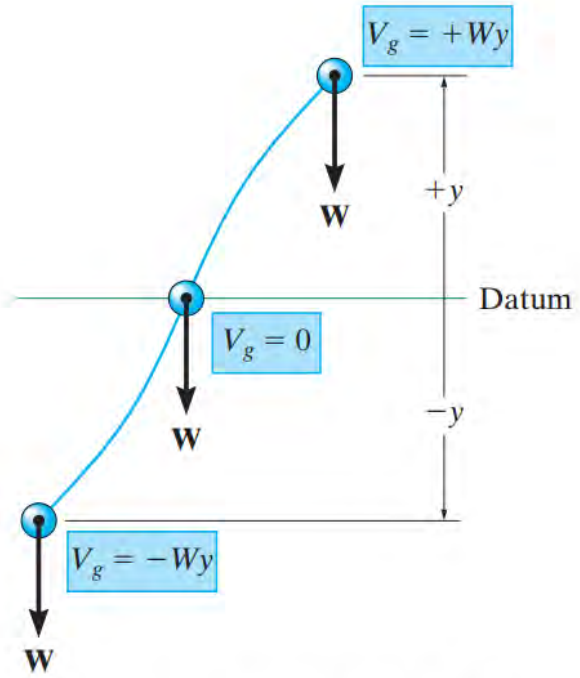
د انرژۍ ساتنه
(Conservation of Energy)

یوه د ساتنې قوه داسې کار کوي کوم چې د هغه په لارې پورې تړاو نلري. دوه مثالونه يې د یوې ذرې تول او د فنر قوې دي.

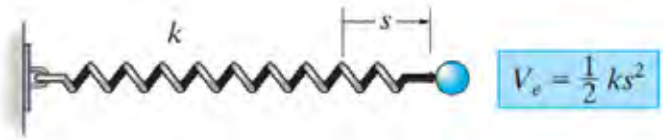
اصطکاکي قوه، د ساتنې قوه نه ده. ځکه چې کار يې د لارې په اوږدوالی پورې تړاو لري. هر څومره چې لاره اوږده وي، هومره زیات کار کیږي.

د ساتنې قوې کار دهغې په موقعیت پورې تړاو لري چې د یوې معیاري کرښې څخه (datum) وي. کله چې کارد معیاري کرښې څخه وي، نو دې ته پوتنشل انرژي ویل کیږي. د یوه تول لپاره، دا $V_g = \pm Wy$ دي، اود فنر لپاره دا $V_e = +\frac{1}{2} ks^2$ دي.

میخانیکي انرژي د کنتیک انرژي T او د جازبوي اوالاستیکي پوتنشیل انرژي V څخه عبارت ده. د انرژۍ د ساتنې له مخې، دا مجموعه د ذراتو د سیستم لپاره ثابته ده او په هر موقعیت د لارې په اوږدو کې همغه ارزښت لري.



Gravitational potential energy



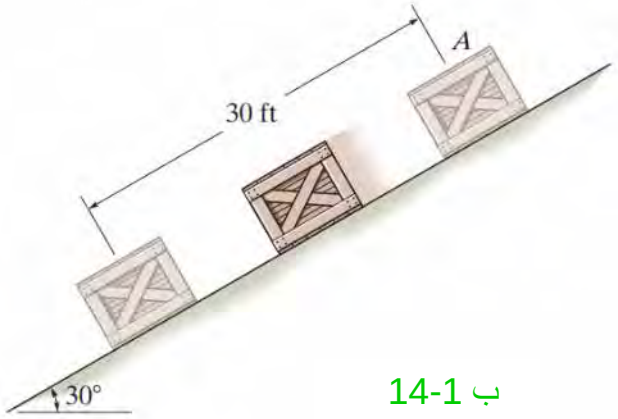
Elastic potential energy

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

د بیا کتنې پوښتنې

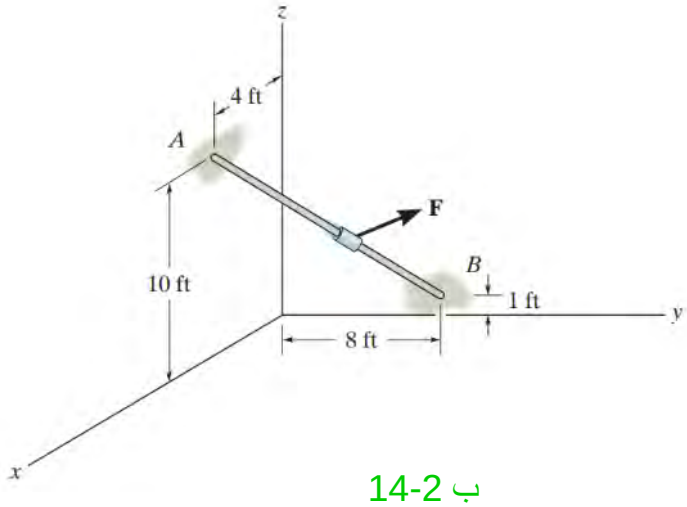
د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

ب 14–1: که 150-پونډه بکس د A نه له دریدلی حالت څخه خوشې شي. تیزوالی یې کله چې 30 فوټه په سطحه ښکته وښوییږی معلوم کړی. د بکس او سطحی ترمنځ د کینیتیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی..



ب 14-1

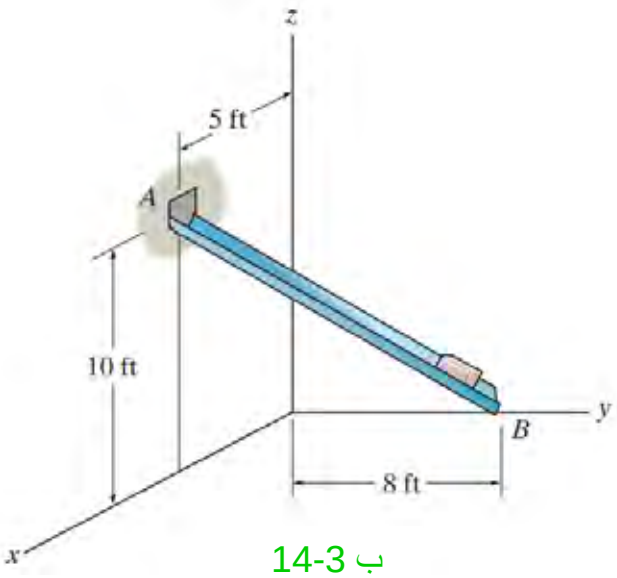
ب 14–2. یوه کوچنۍ 2 پونډه غاړه کی له دریدلی حالت نه د A څخه په ښوی راډ ښکته خی. د حرکت په جریان کې، غاړه کی د $F = \{10x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\}$ lb قوی لاندې کار کوي ، چیرې چې x ، y، z په فوټو کې دي. د غاړه کی تیزوالی کله چې د B دیوال سره ټکر کوی معلوم کړی.



ب 14-2

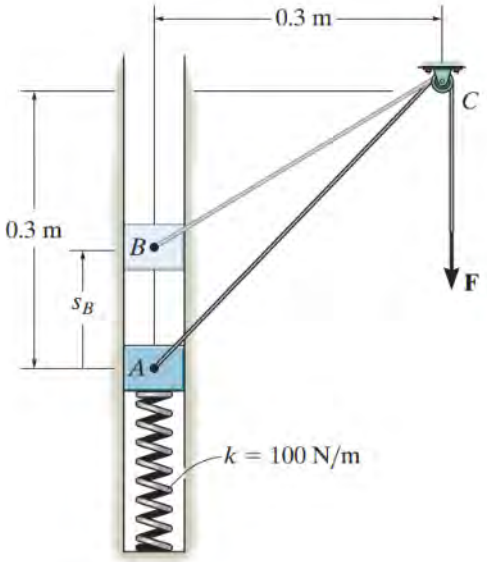
.

ب 14–3. يو بلاک چې تول يې 1.5 پونډه دی، د AB بنوی لښتی (شوټ) کی بنويږی. د دريدلی حالت څخه له A څخه خوشی شوی چی کواردينات يی A(5ft, 0ft, 10ft) دی. دهغه تيزوالی وټاکي کله چې د B نه والوزی، چيرې چې د B کواردينات (0، 8ft ، 0) B دی.



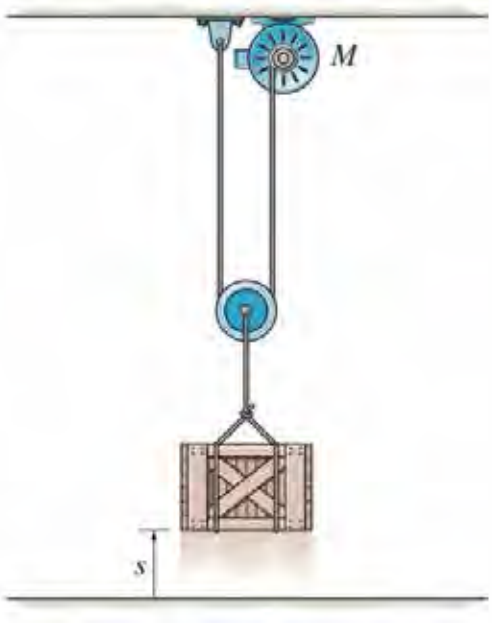
ب 14-3

ب 14–4. يوه بلاک چې د 0.5 کيلوګرامه کتله لري په بنوی عمودي سوروي کې حرکت کوي. که بلاک له دريدلی حالت د A څخه حرکت شروع کړي کله چې ټرلی فنر په نه خوځيدلي موقعيت کې وي، نو عمودي قوه **F** محاسبه کړئ چې په کيبل تطبيق شي ترڅو بلاک $v_B = 2.5$ m/s تيزوالی ترلاسه کړي کله چې دی B ته ورسيږي. $s_B = 0.15$ m ، د کيبل او څرخکی کتله د پام وړنه دي.



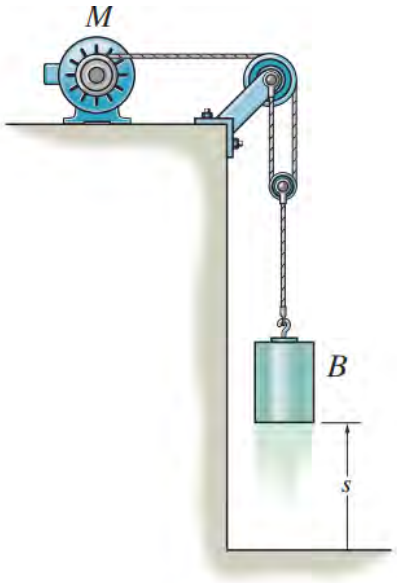
ب 14-4

ب 14–5. یوه 50 پونډه بکس د څرخکی سیستم او موټر M پواسطه پورته کیږي. که بکس د دریدلی حالت په ثابت تعجیل پورته کیدو وروسته د12 ft/s (فوټه/ثانیه) تیزوالي ته ورسیږي، کله چی 10ft پورته شی، نو د موټر لپاره د قدرت ورکولو محاسبه کړئ کله چی $s = 10ft$ شی. موټور د $e = 0.74$ مؤثریت لري.



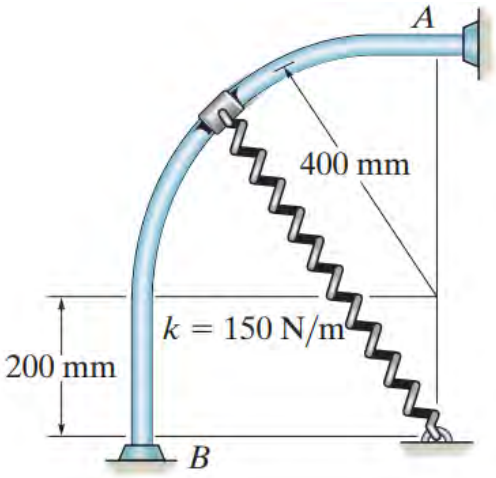
ب 14-5

ب 14–6. یو 50 پونډه بار د څرخکی سیستم او موټور M پواسطه پورته کیږي. که موټور په کیبل باندې 30 پونډه ثابته قوه تطبیق کړي، نود موټورلپاره قدرت محاسبه کړئ که بار $s=10ft$ له دریدلی حالت څخه پورته شوی وی. موټور د $e = 0.76$ مؤثریت لري.



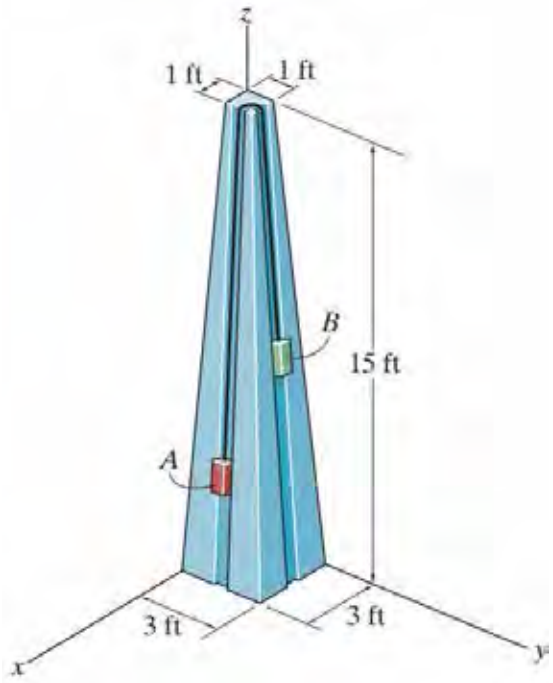
ب 14-6

ب 14–7. غاړکی چې اندازه يې د پام وړ نه ده 0.25 کیلوګرامه کتله لري او د 100 mm نه غځيدلي اوږدوالي فنر سره تړل شوی دی. که غاړکی په A کی له دریدلی حالت څخه خوشې او په ښوی لارښود سره لاړه شي، نو مخکې لدی چې B ته ورسیږی تیزولی يې محاسبه کړئ.



ب 14-7

ب 14–8. بلاکونه A او B په ترتیب سره 10 او 30 پونډه تول لری. دوی په سپک کیبل سره تړل شوي او په ښویو چاکو کی حرکت کوي. د هر بلاک تیزوالی محاسبه کړئ وروسته له دې چې بلاک A په سطحه کې 6 فوټه پورته حرکت وکړي. بلاکونه له دریدلی حالت څخه خوشی شوی.



ب 14-8

پنځه لسم فصل

(CHAPTER 15)



په دی تفريحي پارک کې د سپرليو حرکت د زاويوي حرکت د ساتنې اصول تعقيبوي. کله چې د دوي حرکت بدليږي، لکه څنګه چې په دې څپړګي کم بحث شوي، دا ټاکل کيدي شي.

د یوی ذرې حرکت: آنی قوه (امپولس) او مؤمنتم

KINETICS OF A PARTICLE: IMPULSE AND) (MOMENTUM)

د فصل موخی CHAPTER OBJECTIVES

- § د ذرې لپاره د خطي آنی قوی(impulse) او مومنتم (momentum) لاری (principle) پراختیا، او د هغو پوښتنو د حلولو لپاره یې پلي کول چې قوه، سرعت، او وخت پکې شامل وي.
- § د ذرو لپاره د خطي مومنتم د ساتنې بحث
- § د ټکرد میخانیکیت تحلیل
- § د زاویوي آنی قوی (امپولس) او مومنتم مفهوم معرفي کول
- § د هغو پوښتنو حل کول چې د مایعاتو ثابت جریان او یا خوځونکی (propulsion) د متغیری کتلی سره ، شامل وی.

15.1 د خطي آنی قوی (امپولس) او مومنتم اصول (PRINCIPLE OF LINEAR IMPULSE AND MOMENTUM)

په دې برخه کې به موږ د حرکت معادله د وخت په اړه انسجام کړو او په دې توګه به د زورد آنی قوی او حرکت لاره ترلاسه کړو. له هغه ځایه چې $a = dv/dt$ دی، موږ لرو:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (15–1)$$

د دې عبارتونو د بیا تنظیمولو او د لاندی حدودو ترمنځ د یوځای کولو په واسطه، چې: $v = v_1$ کله چې $t = t_1$ او $v = v_2$ کله چې $t = t_2$ وی، موږ لرو:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$

یا

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \qquad (15–2)$$



د آنی قوی وسیله د ټریلر په فینډر کې د خج (dent)جوړولو لپاره کارول کیږي. د دې لپاره، لومړی یې سر په فینډر کې په یوه سوروی کې پیچ کیږي، بیا تول پرې کلک شوی او په زور سره پورته کش کیږي، د پورته کړی په وهلو باندی. رامنځته شوی آنی قوه د وسیلې له میل سره انتقالیږي او په ناڅاپي ډول خج کشکوي.

دا معادله **د خطي آنی قوی او حرکت لاری** په توګه یادیږي. دا یوه مستقیمه لاره برابروي چې د ټاکلي وخت وروسته د ذري وروستۍ سرعت v_2 ترلاسه کړي کله چې د ذري لمړنی سرعت معلوم وي او قواوی چې په ذره اغیز کوي، یا خو ثابتی وي او یا د وخت تابع په توګه څرګندی شوي وي.

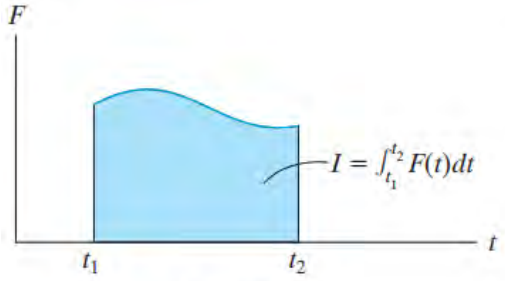
خطي حرکت (Linear Momentum). د دوه ویکتورونو هر یو چې په $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ معادله (15-2) کې ښودل شوی د ذري د **خطي حرکت** په نوم یادیږي. له هغه ځایه چې د ذري کتله m، یو مثبت سکیلر دی، د خطي حرکت ویکتور همغه جهت لري چې v یې لري، او مقدار یې د کتلی ضرب د سرعت واحدونه لري، لکه: kg·m/s یا slug·ft/s .

خطي آنی قوه یا ټکان (Linear Impulse): انټیګرال $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}dt$ په معادله (Eq. 15–2)کې په نوم د **خطي ټکان** (linear impulse) یادیږي. دا یو ویکتوري مقدار دی چې د قوی اثر د هغه وخت په جریان کې اندازه کوي کله چې قوه عمل کوی. له هغه ځایه چې وخت یو مثبت سکالر دی، ټکان په همغه لور عمل کوی لکه قوه، او د دې مقدار واحدونه د قوی ضرب وخت لري، لکه N·s* یا lb·s .

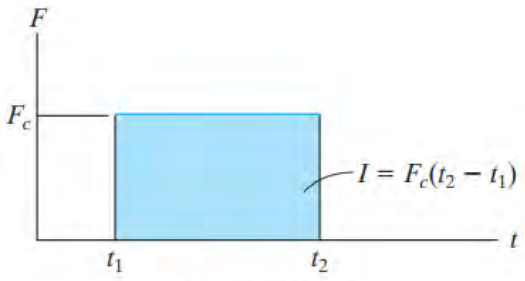
که قوه د وخت تابع وی، نوټکان د مستقیم انټیګریشن له لارې ټاکل کېدای شي. په ځانګړي حالت کې، که قوه په مقدار او جهت کې ثابته وي، نو ټکان یا امپلس داسې کیږي:

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$$

په ګرافیک ډول، د امپلس مقدار، د قوی په مقابل کې د وخت منحني لاندې د رنګ شوي ساحې په واسطه څرګندیدلی شي، لکه په انځور 15-1 کې. یوه ثابت قوه په انځور 15-2 کې ښودل شوي رنګ شوي مستطیل ساحه جوړوي.



انځور 15-1



انځور 15-2

*که څه هم د امپلس او مومنتم لپاره واحدونه په مختلف ډول تعریف شوي دي، دا څرګندیدلی شي چې د 15-2 معادله په بُعدي توګه همجنسه ده.

د خطي امپلس او مومنتم لاره (Principle of Linear Impulse and Momentum).

د پوښتنو د حل لپاره،معادله 15-2 په دې ډول بیا لیکل کیدی شي:

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \qquad (15–3)$$



ډیری ډولونو سپورټونو حرکت، لکه د ګالف په څیر، د خطي امپولس او مومنتم د اصولو پلي کولو ته اړتیا لري.

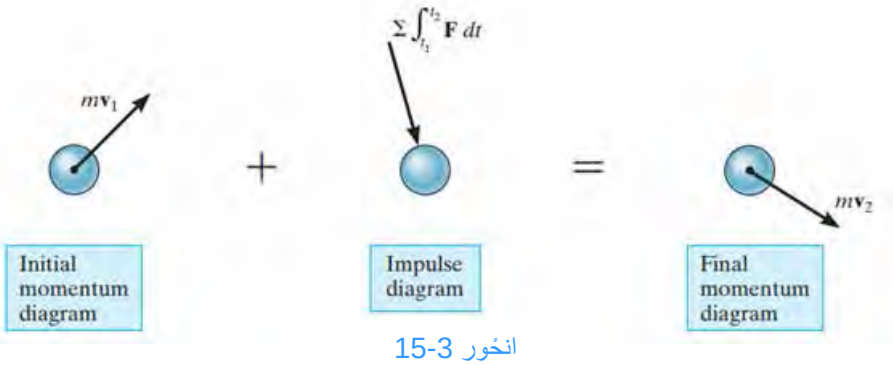
چې څرګندوي چې د ذرې ابتدايي مومنتم په وخت t_1 کې، جمع د ټولو هغو امپلسونو چې د t_1څخه تر t_2 پورې په ذره اغیزه کوي، د ذرې د وروستي مومنتم په وخت t_2 سره معادل دی. دا درې اصطلاحات په ګرافیکي ډول د امپلس او مومنتم په ډیاګرامونو کې ښودل شوي دي، چې په انځور 15-3 کې وړاندې شوي دي.

که د 15-3 معادلې هر ویکتور د x ، y، z برخو و ویشل شی، نو مور لاندې درې سکیلري معادلې د خطي امپلس او مومنتم لپاره لیکلی شو.

$$m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_y)_2 \qquad (15–4)$$

$$m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt = m(v_z)_2$$

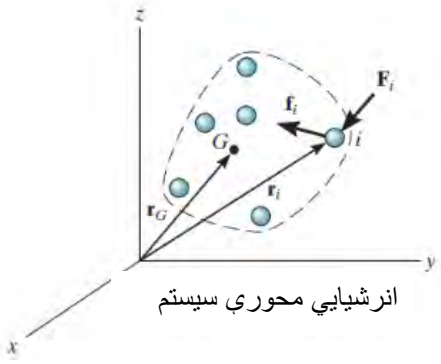


انځور 15-3

15.2 د خطي امپلس او مومنتم اصول د ذرو د سيستم لپاره (PRINCIPLE OF LINEAR IMPULSE AND MOMENTUM FOR A SYSTEM OF PARTICLES)

د خطي امپلس او مومنتم لاره د ذرو يوه سيستم لپاره چې نسبت يوه انرشيايي محور ته حرکت کوي (انځور 15-4) د حرکت له معادلې څخه ترلاسه کيږي چې د سيستم په ټولو ذرو باندې پلي کيږي، يعنې :

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$



انرشيايي محوري سيستم

انځور 15-4

د چپ لوري اصطلاح يوازې هغه بهرني قواوې $\mathbf{F}_i$ ښيي چې په ذرو باندې اغيزه کوی. د ذرو ترمنځ اغيز کوونکي داخلي قواوې $\mathbf{f}_i$ په دې جمعه کې نه راځي، ځکه چې د نيوټن د دريم قانون له مخې، دوی په مساوي مګر مخالف خطي جوړه عمل کوی او له همدې امله له منځه ځي. د پورته معادلې دواړه خواوې په dt باندې ضرب کوو او انټيګريشن کوو يې د حدودو تر منځ، چې: $t = t_1$ ، $v_i = (v_i)_1$ او $t = t_2$ ، $v_i = (v_i)_2$، مورِ لرو:

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \qquad (15\text{–}5)$$

دلته د سيستم لمړنی خطي مومنتم جمع د ټولو بهرنيوقواوو امپلسونه چې له t_1 څخه تر t_2 پورې په سيستم اغيزه کوي، د سيستم له وروستي خطي مومنتم سره مساوي دی .دا معادله داسې ساده کيدی شي چې په پام کې ونيسو چې د سيستم د کتلې مرکز G ځای په $m\mathbf{r}_G = \sum m_i\mathbf{r}_i$ کې ټاکل کيږي، چيرې چې $m = \sum m_i$ د ټولو ذرو ټول کتله دی (انځور 15-4 . د وخت مشتق اخيستلو سره، مورِ لرو:

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i\mathbf{v}_i \qquad (15\text{–}6)$$

په خبرو کی، د ذرو د سيستم ټول خطي مومنتم $\sum m_i\mathbf{v}_i$ د يو "خيالي" يوځای شوي ذرو د خطي مومنتم سره معادل دی، چې ټولی کتله $m = \sum m_i$ لري او د سيستم د کتلې مرکز په سرعت $\mathbf{v}_G$ سره حرکت کوي. په معادلې 15-6 کې ځای پر ځای کولو سره، مورِ ترلاسه کوو:

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (15\text{–}7)$$

که د ذرو سیستم په تولیز ډول د هغو ذرو نمایندګي کوي چې یو جامد جسم جوړوي، نو دا نتیجه دا بنودلی شی چې د خطي امپلس او مومنتم اصول د یوه محدودی اندازې جسم لپاره پلي شي.

د تحلیل کړنلاری

د تحلیل کړنلاری PROCEDURE FOR ANALYSIS

د خطي امپلس او مومنتم اصول د هغو پوښتنو د حل لپاره کارول کیږي چې قوه، وخت، او سرعت پکې شامل وي، ځکه چې دا اصطلاحات د معادلې په جوړولو کې ښکیل دي. د پلي کولو لپاره وړاندیز کیږي چې لاندې کړنلاری وکارول شي.*

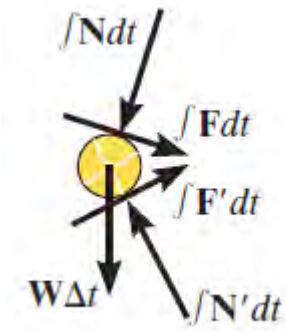
د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram).

- د x ، y، z د انرښیایي محوری ریفرینس ځای ټاکل او د ذری د آزاد بدن ډیاګرام رسمول، ترڅو ټولې قواوې چې د ذری پرامپلسونو تاثیر کوي حساب شي.
- د ذری لمړنی او وروستي سرعتونوجهتونو ټاکل پکار دي.
- که جهت د یوه ویکتور نامعلوم وي، هغه فرض کړئ چې د هغی اجزاوی د مثبت انرشیایي محورونو (s) په لور دی.
- د بدیل طریقې په توګه، د ذری لپاره د امپلس او مومنتم ډیاګرامونه رسم کړئ لکه څنګه چې په انځور 3-15 کې ښودل شوي دي.

د امپلس او مومنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum).

- د خطي امپلس او مومنتم اصول پلي کړئ ، $m\mathbf{v}_1 + \sum \int_{t1}^{t2} \mathbf{F}dt = m\mathbf{v}_2$. که حرکت د x–y په سطحه کې وي، دوی سکیلري جزوي معادلې کولی شي یا د **F** ویکتوراجزاوی د آزاد بدن ډیاګرام څخه جوړی شی، یا د امپلس او مومنتم ډیاګرامونود معلوماتو په کارولو سره جوړې شي.
- پوه شئ چې هر قوه چې د ذری په آزاد بدن ډیاګرام اغیزه کوي، امپلس به رامنځته کړي، که څه هم ځینې دا قواوې به هیڅ کار ونکړي.
- قواوې چې د وخت تابع دي باید انتیګرال یی ونیول شی ترڅو امپلس ترلاسه شي. په ګرافیکي ډول، امپلس د قوی – وخت، منحني لاندې ساحې سره مساوي دي.

د ویشتلو (pitching) ماشین د ټیرونو په څرخیدو سره، دوی توپ ته د اصتکاک امپلس ورکوي، چې هغې ته خطي مومنټم ورکوي. دغه امپلسونه د امپلس په ډایاکرام کې ښودل شوي دي. دلته دواړه، د اصطحکاک او نارمل امپلسونه، د وخت سره بدلیږي. د پرتله کولو لپاره، د تول امپلس ثابت او خورا کوچنی دی ، ځکه هغه وخت Δt چې بال د ټیرونو سره تماس لري، خورا به کوچنی وي.



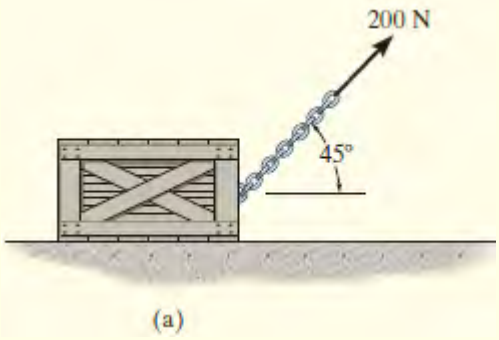


*دا طریقه به د کتاب په نظریي او ثبوتونو کې د پراختیا پر وخت استعمال شی.

مثالونه

مثال 15.1

په انځور 15-5a کې ښودل شوی 100-کیلوګرامه بکس په دریدلی حالت کی په افقي ښویه سطحه پروت دی. که یوه 200 N وړونکی قوه ، په 45 درجی زاویه په بکس د 10 ثانیو لپاره پلي شي ، د کریټ وروستۍ سرعت او عمودي قوه چې سطحه یې د دې وخت په جریان کې پر کریټ باندې پلیی کوی وټاکي .



(a)

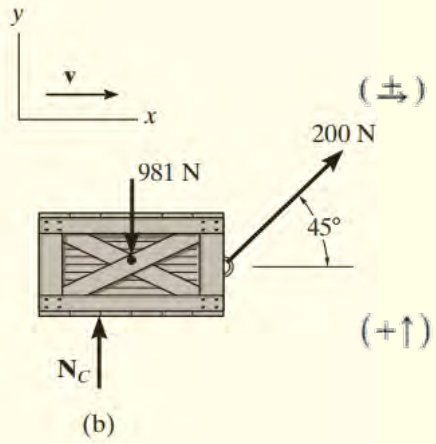
حل:

دا پوښتنه د امپلس او مومنتم داصولو په کارولو سره حل کیدی شي ځکه چې دلته قوه، سرعت، او وخت شامل دی.

د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram).

لکه څنګه چې ټولی قواوی چې په آزاد بدن ډایاګرام کې اغیزه کوي، ثابتی دي، انځور 15-5b ، امپلس یوازې د قوی مقدار او 10 ثانیو د ضرب محصول دی [$\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$] . د بکس د امپلس او مومنتم ډیاګرامونه رسمول بدیل طریقه په یاد ولری، انځور 15-5c .

د امپلس او مومنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum).



(b)

د معادلو 15-4 پلي کولو سره، مورِ لرو

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200\ \text{N}\cos 45°(10\ \text{s}) = (100\ \text{kg})v_2$$

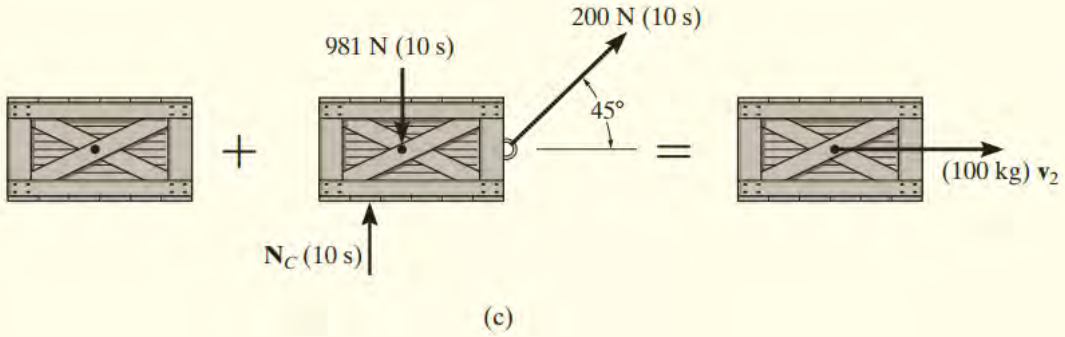
$$v_2 = 14.1\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10\ \text{s}) - 981\ \text{N}(10\ \text{s}) + 200\ \text{N}\sin 45°(10\ \text{s}) = 0$$

$$N_C = 840\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : خرنګه چې هیڅ حرکت د y په لور نه رامنځته کیږي، د توازن معادله $\Sigma Fy=0$ مستقیم پلي کول د N_C لپاره همغه نتیجه ورکوي. هڅه وکړئ چې پوښتنه لومړی د $\Sigma F_x = ma_x$ په کارولو سره حل کړئ، بیا $v = v_0 + a_c t$

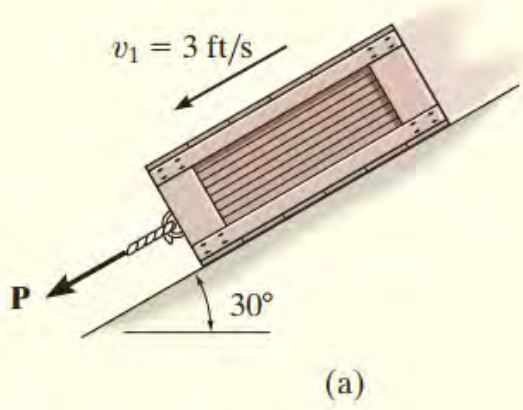


انځور 15-5

مثال 15.2

په انځور 15-6a کې ښودل شوی 50 پونډه بکس د یوې قوی لخوا اغیزمن شوی دی چې متغیر مقدار لري $P = (20t)$ lb، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د بکس سرعت وټاکئ کله چې t =2s (ثانیې) وي او د کریټ ابتدایي سرعت $v_1 = 3$ ft/s د سطحی په ښکته لور وي. د بکس او سطحی ترمنځ د کینیاتیک اصتکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی.

حل:



د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram). انځور 15-6b وګورئ څکه چې د قوی مقدار $P = 20t$ دی چې د وخت سره بدلیږي، د دې لخوا رامنځته شوې امپلس باید د 2-ثانیو وخت په اوږدو کې باید انټیګرال و نیول شي.

د امپولس او مومنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum). په پلي کولو د معادلو 15-4 په x لور کې ، مونږ لرو:

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

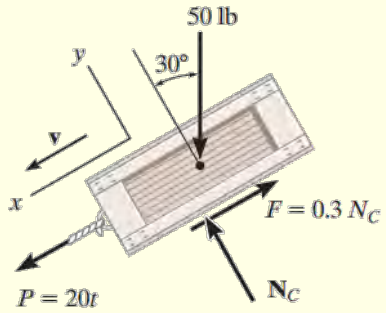
$$\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(3\text{ ft/s}) + \int_0^{2\text{ s}} 20t\,dt - 0.3N_C(2\text{ s}) + (50\text{ lb})\sin 30°(2\text{ s}) = \frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}v_2$$

$$4.658 + 40 - 0.6N_C + 50 = 1.553v_2$$

په پلي کولو د توازن معادله په y لور کې ، مونږ لرو: ولې؟

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 50\cos 30°\text{ lb} = 0$$

حل کوو يې،



(b) انځور 15-6

$$N_C = 43.30\text{ lb}$$
$$v_2 = 44.2\text{ ft/s}\swarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: مونږ کولی شو دغه پوښتنه د حرکت معادلې په کارولو سره هم حل کړو. د انځور 15-6b څخه مونږ لرو

$$+\swarrow \Sigma F_x = ma_x; \qquad 20t - 0.3(43.30) + 50\sin 30° = \frac{50}{32.2}a$$

$$a = 12.88t + 7.734$$

له کینمتیک څخه کار اخلو

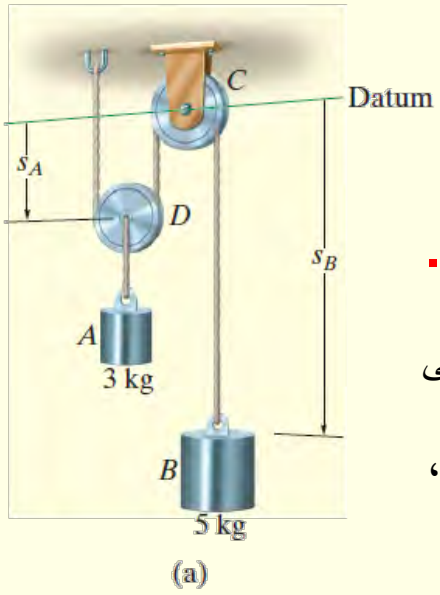
$$+\swarrow dv = a\,dt; \qquad \int_{3\text{ ft/s}}^{v} dv = \int_0^{2\text{s}} (12.88t + 7.734)dt$$

$$v = 44.2\text{ ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$

پرتله کولو له مخې، د امپلس او مومنتم اصول پلي کول، د کینمتیکونو د $a = dv/dt$ د کارولو اړتیا له منځه وړي، او په دې توګه د حل لپاره یوه آسانه طریقه وړاندې کوي.

مثال 15.3

بلاکونه A او B چې په انځور 15-7a کې ښودل شوي، هر یو په ترتیب سره 3 کیلوګرامه او 5 کیلوګرامه کتله لري. که چیرې سیستم د دریدلی حالت څخه خوشې شي، د بلاک B سرعت په 6 ثانیو کې وټاکئ. د څرخکیو او رسۍ کتلو ته پاملرنه مه کوئ.



(a)

حل

د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram). انځور 15-7b وګورئ. ځکه چې د هر بلاک تول ثابت دی، د رسۍ کشش هم ثابت دي. سربیره پر دې، څرنګه چې د څرخکی کتلی ته پام نه کیږي، د رسۍ کشش دی: $T_A = 2T_B$. په یاد ولرئ چې بلاکونه دواړه د مثبتو محورونوپه لوریو حرکت کوي، s_A او s_B .

د امپلس او مومنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum). بلاک A :

$$(+\downarrow) \qquad m(v_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_A)_2$$

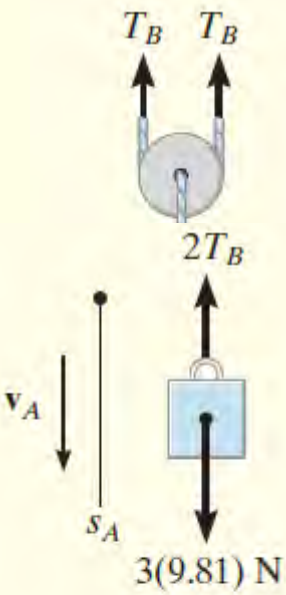
$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2 \qquad (1)$$

بلاک B:

$$(+\downarrow) \qquad m(v_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2 \qquad (2)$$

کینمټکس (Kinematics). څرنګه چې بلاکونه د ټرلي حرکت سره مخامخ دي، د بلاک A سرعت د بلاک B سره د کینیماټیک تحلیل په کارولو سره ټرل کیدی شي، کوم چې په 12-9 برخه کې بحث شوی دی. افقي مرجع (datum) په C ټکي کې ټاکل شوی، انځور 15-7a، او د موقعیت محورونه، s_A او s_B ، د رسۍ د عمودي برخی د ثابت ټول اوږدوالي l سره د معادلې له لارې ټرل کیږي:

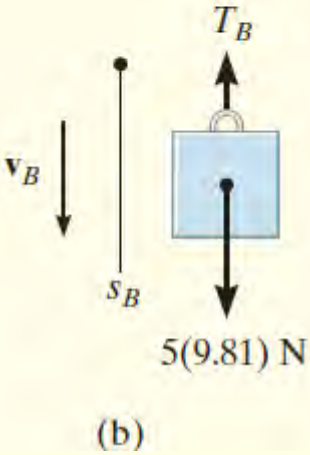


$$2s_A + s_B = l$$

د وخت مشتق اخیستل لاندې راکوی:

$$2v_A = -v_B \qquad (3)$$

لکه څنګه چې منفي نښه ښیي، کله چې B ښکته حرکت کوي، A پورته حرکت کوي. د دې نتیجه په معادله 1 کې ځای پرځای کوو او د معادلو 1 او 2 حل کول دا لاندې نتیجې ترلاسه کوي:



انځور 15-7

$$(v_B)_2 = 35.8\ \text{m/s} \downarrow$$

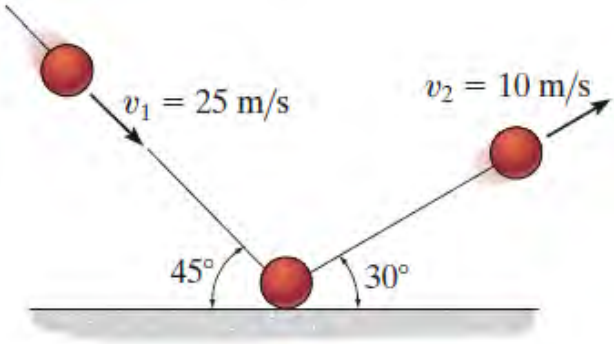
$$T_B = 19.2\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: پوه شئ چې د $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ لپاره مثبت (ښکته) لوری د انځورونو 15-7a او 15-7b او د معادلو 1 څخه تر 3 پورې یو شان دی. دا مهمه ده ځکه چې مونږ د معادلو هم مهاله حل لټوو.

بنسټیزی پوښتنې

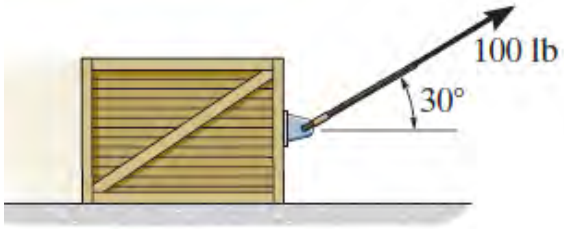
FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیزی پوښتنې

ب 15-1. یو 0.5 کیلوګرامه توپ په زیره ځمکه لګیږي او د ښودل شویو سرعتونو سره بېرته توپ وهی. د امپولس اندازه چې ځمکه په توپ باندې وارده وی، وټاکئ.
فرض کړئ چې توپ کله چې په ځمکه باندې لګیږي ،نه ښویږي ، او د توپ اندازه او د توپ د تول له خوا تولید شوی امپلس ته پام مه کوئ.



ب 15-1

ب 15-2. که د 150 پونډه بکس او ځمکې تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ وي، د بکس سرعت وټاکئ کله چې $t = 4$ s وي. صندوق له دریدلې حالت څخه پیل کوي او د 100پونډ قوی لخوا کشکول کیږي.



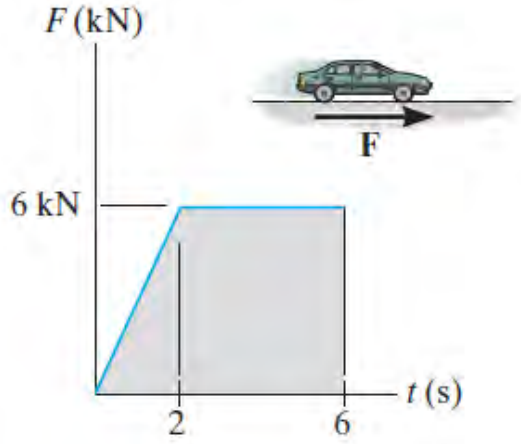
ب 15-2

15-3. موټور په کبل باندې یوه قوه $F = (20t^2)$ N واردوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د 25 کیلوګرامه بکس تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 4$ s وي. د بکس او سطحی تر منځ د سټیټیک او کینټیک اصتحکاک ضریبونه $\mu_s = 0.3$ او $\mu_k = 0.25$ دي.



ب 15-3

ب 15-4. د 1.5مګا ګرام موټرځرخونه د کشش قوه **F** تولیدوي چې د ګراف له مخې تشریح شوی ده. که موټر له دریدلي حالت نه حرکت پیل کړي، د 6 ثانیو په وخت کې د ده تیزوالی وټاکئ.



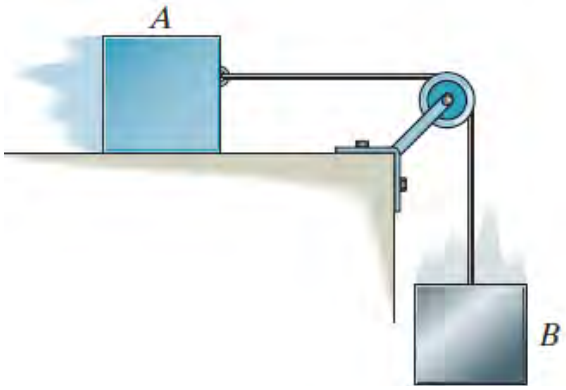
ب 15-4

ب 15-5. یو 1.5- مګا ګرامه ټریلر- د 2.5 مګا ګرامه څلور- چرخې SUV په واسطه کشکول (tow) کیږي. د چرخو په ذریعه د کشش قوه $F_D = 9$ kN تولید یږي. په 20 ثانیو کې د ټرک سرعت وټاکئ، چې له دریدلي حالت نه پیل وکړی. همدارنګه، د SUV او ټریلر ترمنځ د تینګیدو وسیله (coupling)، *A*، کې تولید شوی د کشش قوه وټاکئ. د ټیرو کتلې ته پام مه کوئ.



ب 15-5

ب 15-6. د 10پونډه بلاک *A* له دریدلي حالت څخه حرکت پیل کوي او د 5 ثانیو په ترڅ کې 1 ft/s سرعت ترلاسه کوي. د رسي کشش او د بلاک *A* او افقي سطحي تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب وټاکئ. د څرخکې ټول ته پام مه کوئ. بلاک *B* 8 پونډه ټول لري.



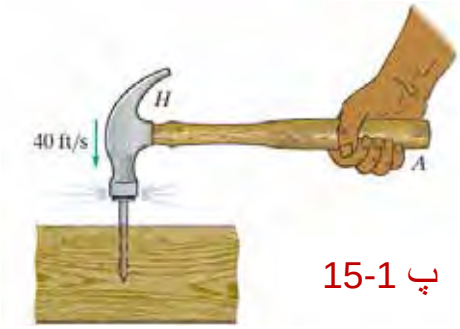
ب 15-6

پوښتنې

PROBLEMS

تولې حلونه باید د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram) ولري

15-1 . د 0.3 پونډه د سوټک سر، H ، د میخ په سر په 40 ft/s سرعت سره ښکته حرکت او په میخ ګذار کړی، چې د میخ کتله یې د پام وړ نده، او هغه د لرګي په یوه بلاک کې ننه باسی. په میخ باندې د امپلس اندازه وټاکئ که چیرې فرض کړو چې په A کې د سوټک د لاستی نیول سست دی، او دلاستی کتله د پام وړ نه ده، او سوټک د میخ سره په تماس کې پاتې کیږي تر څو ودریږی.

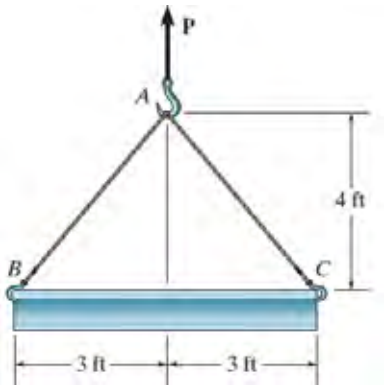


پ 15-1

15-2. یوه 20 پونډه بکس په 30^0 مایله سطحه په لمړنی سرعت 2 ft/s سره ښکته ښویږی. که چیرې د صندوق او سطحی تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب $m_k = 0.25$ وي د بکس سرعت له 3 ثانیو وروسته وټاکئ.

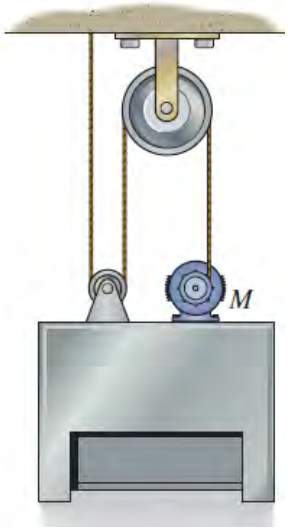
15-3. یو مساوی ویشلشوی بیم چې تول یې 5000 پونډه دی. د بیم د پورته کولو سرعت 8 ft/s په 1.5 ثانیو کې دی، چې د دوو کیبلونو AB او AC پواسط اجرا کیږي . اوسط کشش په هر یوه کیبل کی وټاکئ. بیم له دریدلي حالته حرکت پیل کوي.

15-4*. هر کیبل کولی شي تر 5000 پونډه پورې اعظمي کشش واخستی شی. که ویشلشوی بیم تول یې 5000 پونډه وي، د بیم د سرعت سره له دریدلی حالت نه د پورته کولولپاره، تر 10 ft/s تولو لنډ وخت وټاکئ.



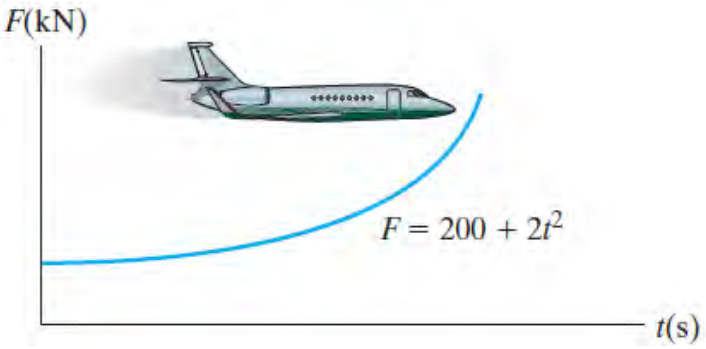
پ 15-3/4

15-5. دا لاندی ښودل شوي 60 پونډه بلاک د پورته کول د موټور M لخوا تر سره کیږی. له استراحت نه پیل، د پورته کولو کیبل د موټر لخوا کولی شي په 5 ثانیو کې د 3 ft/s نسبي سرعت سره په موټور کی تاو شي. که رسی په څرخکیو کی و نه ښویږي ، د دې وخت په ترڅ کې په رسیو باندې اوسطه قوه وټاکئ. د هر څرخکي کتله له پامه و غورځوي.



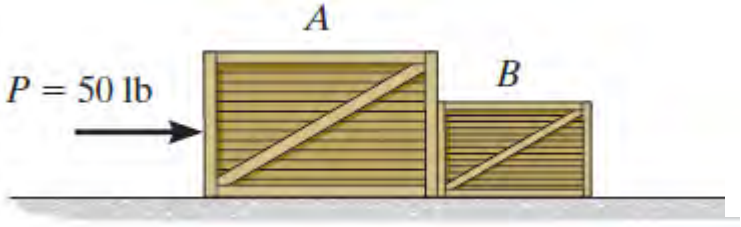
پ 15-5

15-6. د ا لاندی جت الوتکه 250 Mg کتله لري او په $t = 0$ کې 100 m/sافقي سرعت لري. که دواړه انجنونه افقي زور تولیدکړي، او د ګراف له مخې تغیر وکړی، په 5 ثانیو کې د الوتکې سرعت وټاکئ. د هوا مقاومت او د حرکت په دوران کې د تیلو مصرف ته پام مه کوئ.



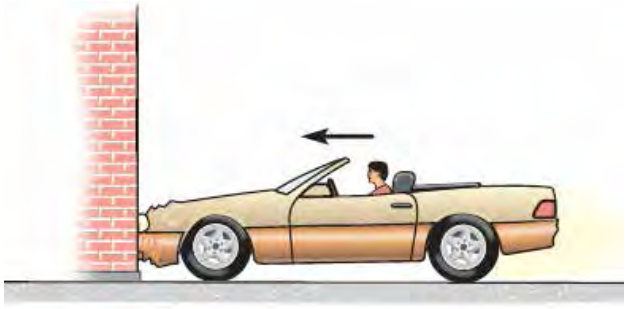
پ 15-6

15-7. په دی لاندی انځور کی 100 پونډه او 50 پونډه تول لرونکي بکسونه A او B په ترتیب سره ښودل شوي دي. که دوی له دریدلی حالت نه حرکت پیل کړي، د دوی سرعت وټاکئ کله چې t =5s وي. همدارنګه، د حرکت په دوران کې د بکس A لخوا وارده شوی قوه په بکس B باندې پیدا کړئ. د بکسونو او ځمکې تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب $m_k = 0.25$ دی.



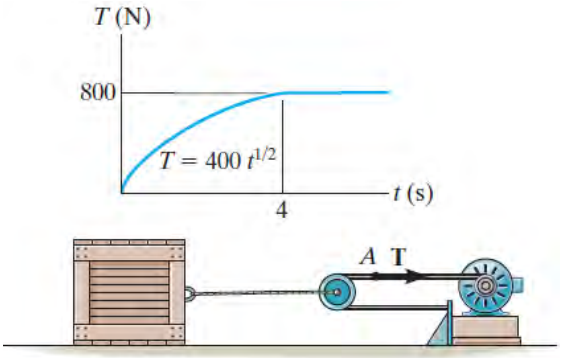
پ 15-7

*15-8. دا لاندی 2700 پونډه موټر چې په 4 ft/s سرعت سره په مخکې ځي کله چې د دیوال سره ټکر کوي. که ټکر په 0.06s کې واقع شي، په موټر باندې اوسط امپلس قوه وټاکئ. فرض کړئ چې بریکونه نه دي نیول شوی. که چیرې د موټرد ټیرو او سړک تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ وي، په دیوال باندې دامپلس قوه محاسبه کړئ که چیرې بریکونه د ټکر په وخت کې نیول شوی وی. بریکونه په ټولو څلورو ټیرو عمل کړی ترڅو ټول ټیرونه و ښویږي یا سلیپ وکړي.



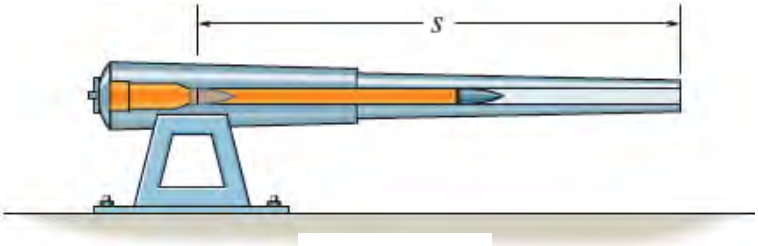
پ 15-8

15-9. د 200 کیلوګرامه بکس په ځمکه پروت دی، چې د سټیټیک او کینټیک اصتحکاک ضریبونه یې په ترتیب سره $\mu_s = 0.5$ او $\mu_k = 0.4$ دي. د وینچ (winch) یوه افقي کشیدونکی قوه T په کیبل A وارده وی چې د ګراف له مخې تغیر مومی. د بکس سرعت وټاکئ کله چې $t = 4s$ وي. په پیل کې په کیبل کی کشش صفر دی. مرسته: لومړی د بکس دحرکت پیلولو لپاره اړتیا لرونکی قوه وټاکئ.



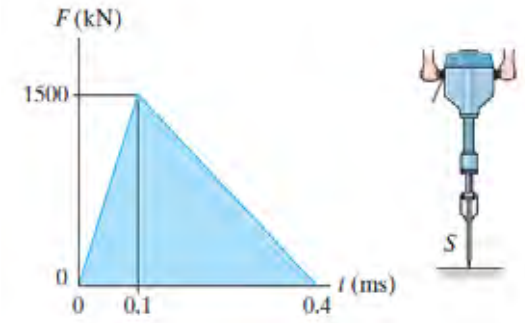
پ 15-9

15-10. په یوه توغندي چې کتله یې m ده کله چې د توپ د نل څخه تیریږی چې د F قوه وربانډی عمل کوی، $F = C \sin(\pi t/t')$. د توغندي سرعت وټاکئ کله چې $t = t'$. که توغندی (projectile) په دې شېبه کې د ټیوب پای ته ورسیږي، اوږدوالی s وټاکئ.



پ 15-10

15-11. د جک سوټک د کار کولو په ترڅ کې چې په کانکریټی سطحه لګیږي قوه یې په لاندې ګراف کې ښودل شوی ده. د دې لپاره، 2 کیلوګرامه میخ (spike) S ، په 90 m/s تیزوالی سره د کانکریټو په سطحه لګیږی. د میخ سرعت کله چې ببرته راګرځي یا پورته کیږی وټاکئ.



پ 15-11

*15-12. د لنډ وخت د پاره د 2.5 مګا ګرامه ون په ټیرو باندی د اصطحکاک حرکی قوه عبارت ده په $F_D = (600t^2)$ N ، چیرې چې t په ثانیو کې ده. که چیرې ون په $t = 0$ وخت کې 20 km/h سرعت ولري، د 5 ثانیو وروسته د ون سرعت وټاکئ.



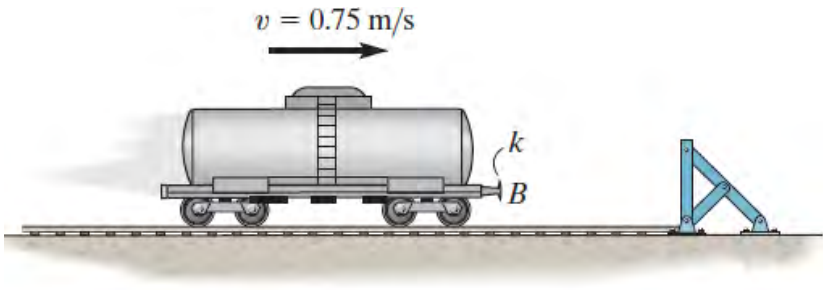
پ 15-12

15-13. د 2.5 Mg ون په 100 km/h تیزوالي سره روان دی کله چې بریکونه ونیول شی د هغه ټول څلورټیرونه د ګرزیدا نه ودریږی(کولپ شی). که تیزوالی یې په 5 ثانیو کې 40 km/h ته راکم شي، د ټیرونو او سړک تر منځ د کینټیک اصتحکاک ضریب وټاکئ.



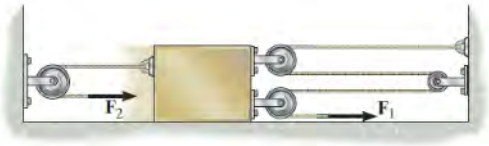
پ 15-13

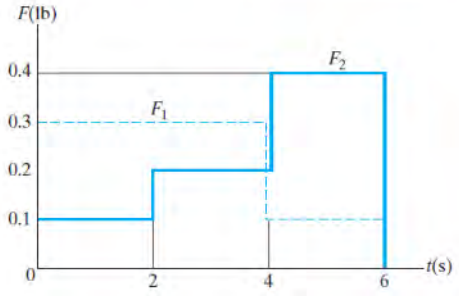
15-14. د 20 مګا ګرامه ټانکر په 0.75 m/s تیزوالي سره په بنی لور روان دی. که دا د بندیز خنډ سره ټکر وکړي، د ټانکر د دریدو لپاره اړین افقي امپلس وټاکئ که په بمپر B کی د فنر سختي، (a) $k \longrightarrow \infty$ (بمپر سخت دی)، او (b) $k = 15\text{kN/m}$ وي.



پ 15-14

15-15. د 10 پونډه د بښويدو بلاک په 10 ft/s سرعت سره بښی لور ته حرکت کوي کله چې د F_1 او F_2 قواوې ورباندي عمل کړی. که چيرې دا قواوی د بښودل شوي ګراف له مخې تغير وکا، د بلاک سرعت د 6 ثانيو وروسته وټاکئ. اصتحکاک او د څرکيو تولونه د پام وړ ندي.





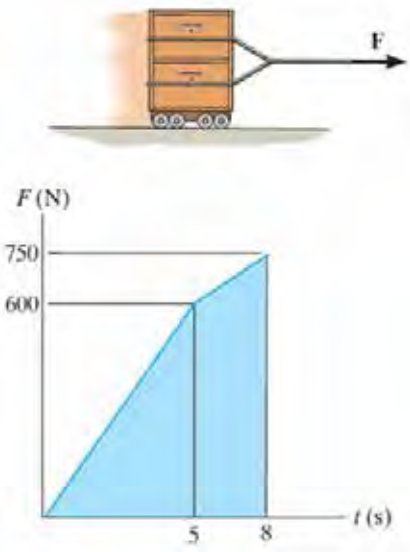
پ 15-15

15-16*. د 180 پونډه دوسپنې کارکونکی د يوه لويدو مخنيونکی سيستم باندی ساتل شوی چې د يو لړ تسمو او يوی رسۍ (لينيارد) AB څخه جوړ شوی دی چې د يوه بيم سره يې کارکونکی ټينګ کړي دی. که چيرې رسۍ 4 فوټه اضافه ګي ولري، په رسۍ کې اوسط امپلس قوه وټاکئ که چيرې کارکونکی 4 فوټه بښکته ولويږي. د کارکونکی اندازه د حساب لپاره په پام کې مه نيسي او فرض کړئ چې امپلس په 0.6 ثانيو کې واقع کيږي.



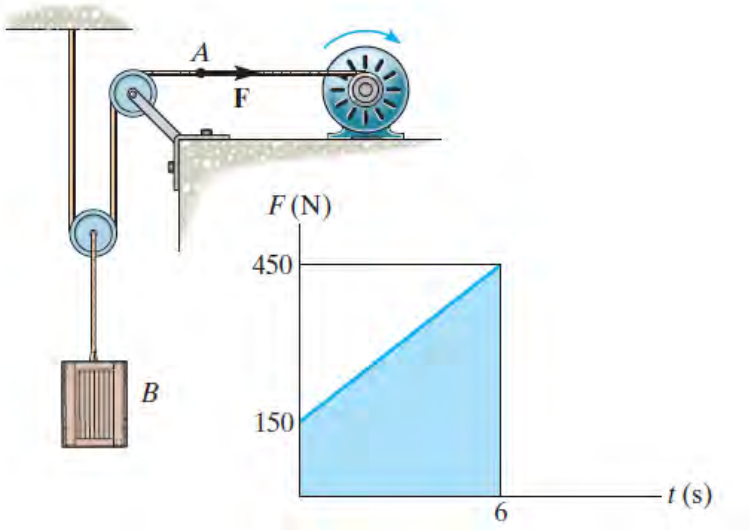
پ 15-16

15-17. د 400 کیلوګرامه د خزانې الماری یا سیف باندې د کشکولو قوه د ښودل شوی ګراف له مخې تغیر کیدونکی ده. د سیف تیزوالی وټاکئ، چې له دریدلی حالته پیل کیږي، کله چې $t = 8$ ثانیې وي. په دې وخت کې یې څومره سفر کړی دی؟



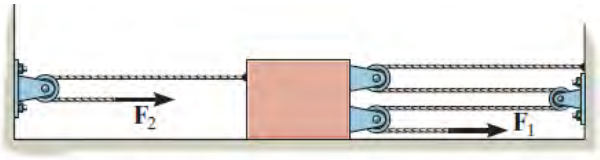
پ 15-17

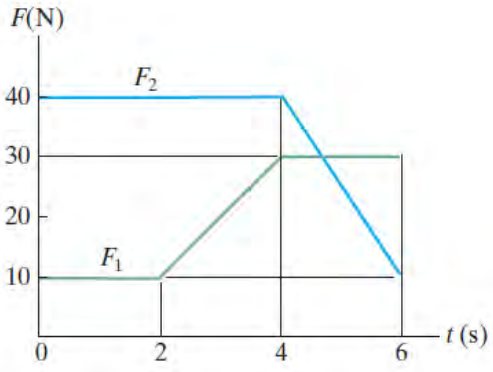
15-18. موټور په 40 کیلوګرامه بکس باندې قوه F عملکوی لکه څنګه چې په ګراف کې ښودل شوی دی. د بکس تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 3$ ثانیې وي او کله چې $t = 6$ ثانیې وي. کله چې t = 0 وی بکس په 10 m/s سرعت سره ښکته حرکت کوي.



پ 15-18

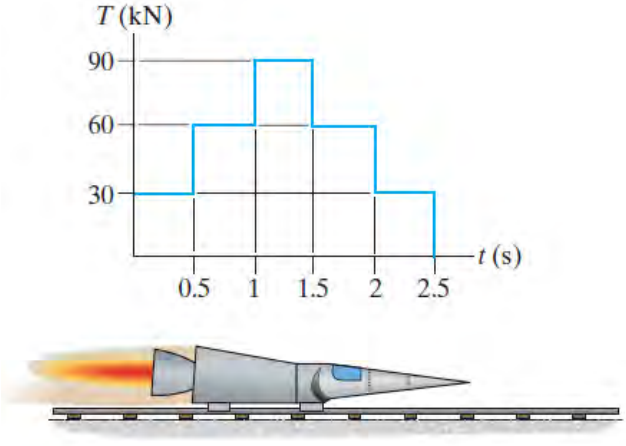
15-19. د 30 کیلوګرامه بښویدونکی بلاک په 5 m/s تیزوالی سره کینې لور ته حرکت کوي کله چې د F_1 او F_2 قواوې وربانده عمل کړي. که چیرې دا قواوی د ګراف له مخې تغیریدونکی وی، د بلاک سرعت د t = 6 ثانیو په وخت کې وټاکئ. د اصتحکاک، څرخکیواو رسیوکتلې د پام وړنه دي.





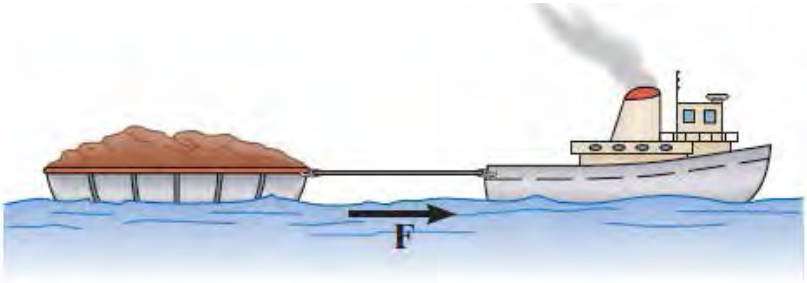
پ 15-19

15-20*. د 1.5 مګا ګرامه راکټ سلیډ (sled) اعظمي سرعت و ټاکئ که چیرې راکټ هغه قوه (thrust) ورکړي چې د ګراف له مخې بښودل شوی دی. په پیل کې، سلیډ په دریدلی حالت کی ده. د اصتحکاک او د تیلو د مصرف له امله د کتلې ضایع کولو ته پام مه کوئ.



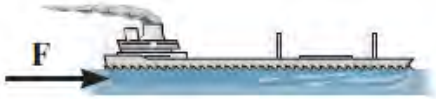
پ 15-20

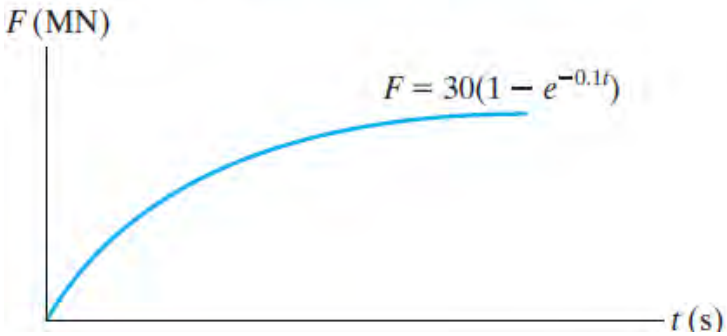
15-21. که چیرې د 50 مګا ګرامه کشکونکی کښتی 35 ثانیې وخت ونیسي ترڅو خپل سرعت د دریدلی حالت نه په منظم ډول 25 km/h ته لوړ کړي، د کشکونکی کښتی باندی د رسی قوه وټاکئ. پروپیلر د کشکونکی کښتی ته د حرکت قوه **F** جوړه وي چې مخ ته حرکت ورکړي، پداسې حال کې چې بارونکي آزادانه حرکت کوي. همدارنګه، د **F** اندازه وټاکئ. بارونکي د 75 مګا ګرامه کتله لري.



پ 15-21

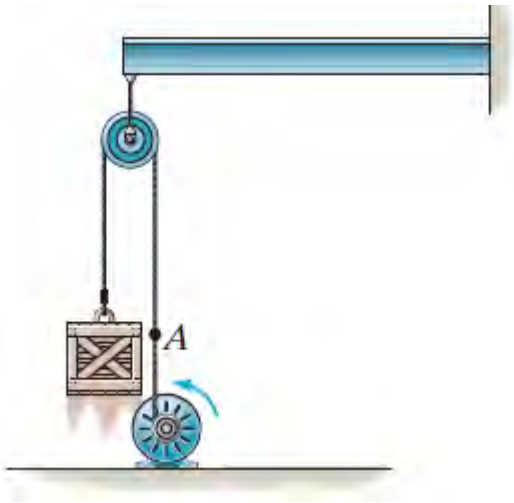
15-22. د 130 Gg (ګګ ګرامه) ټانکر که د دریدلی حالت نه حرکت پیل کړي، د $t = 10$ s(ثانیو) په وخت کې یې تیزوالی وټاکئ. د افقي زور (thrust) چې د پروپیلر(propeller) لخوا ورکول کیږي د وخت سره د بدولو شوي ګراف له مخې تغیرکوی. د اوبو دمقاومت تاثیر په پام کی مه نیسی.





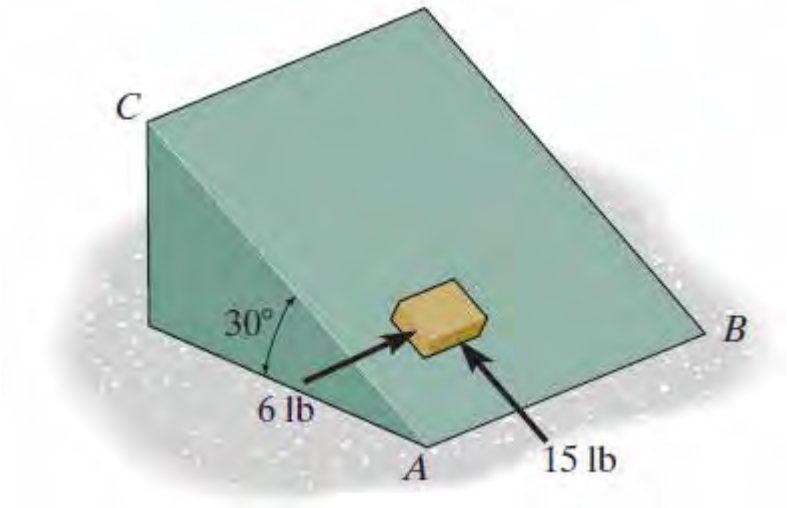
پ 15-22

15-23. موټور په A کې په کیبل باندې یوه $F = (30 + t^2)$ lb قوه تطبیقوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. که 34 پونډه بکس په $t = 0$ کې په ځمکه پروت وي، د ده سرعت په $t = 4$ ثانیو کې وټاکئ. د کیبل او څرخکی کتله د پام وړنه ده. **مرسته:** لومړی د بکس د پورته کولو لپاره د اړتیا وخت وټاکئ



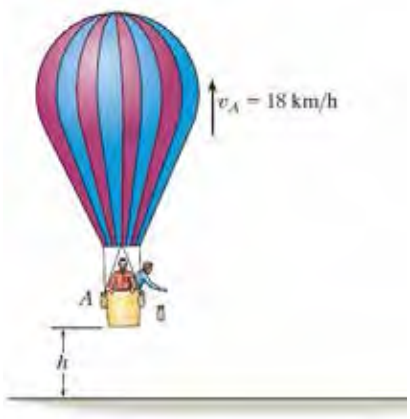
پ 15-23

*15-23. کوچنی 20 پونډه بکس په مایله سطحه کې ځای پر ځای شوی دی او د 6 پونډه او 15 پونډه قواوو له خوا وربانډی عمل کیږي، کوم چې د AB او AC څنډو سره موازي دي. که بکس په پیل کې په دریدلی حالت کې وي، د $t = 3s$ په وخت کې د ده تیزوالی وټاکئ. د بکس او سطحې تر منځ د کینټیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.2$ دی.



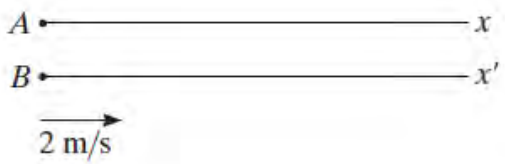
پ 15-24

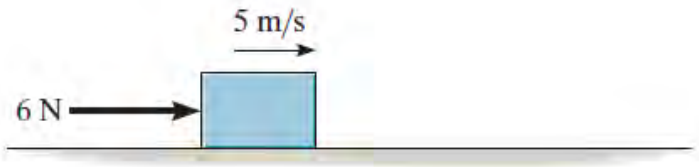
15-25. د بنودل شوي بالون ټوله کتله 400 کیلوګرامه ده چې مسافرین او درانه مواد (چې د بالون د توازن د پاره وی) شامل دي. بالون د 18 km/h ثابت سرعت سره پورته روان دی کله چې $h = 10$ m وي. که سړی د 40 کیلوګرامه درانه مواد وغورځوي، د بالون سرعت وټاکئ کله چې درانه مواد په ځمکه و لګیږي . د هوا مقاومت په پام کې مه نیسی.



پ 15-25

15-26.لکه څنګه چې د تحلیل لخوا ښودل شوي، د امپلس او مومنټم اصول د څارونکی د پاره د هر انرشیایي مرجع چوکاټ لپاره د قبول و ړدی. د دې ثابتولو لپاره، یو د 10 کیلوګرامه بلاک په پام کې ونیسئ چې په ښویه سطحه ښوییږی او 6 N افقي قوی ور باندی عمل کړي دی. که څارونکی A په ثابت محورې چوکاټ x کې وي، د بلاک وروستی سرعت په 4 ثانیو کې وټاکئ که چیرې د ثابت چوکاټ څخه 5 m/s لمړنی تیزوالی ولري. د دې پایله د هغه څارونکي B سره پرتله کړئ چې د x' محور سره وصل دی اود A په پرتله 2 m/s ثابت سرعت لري.

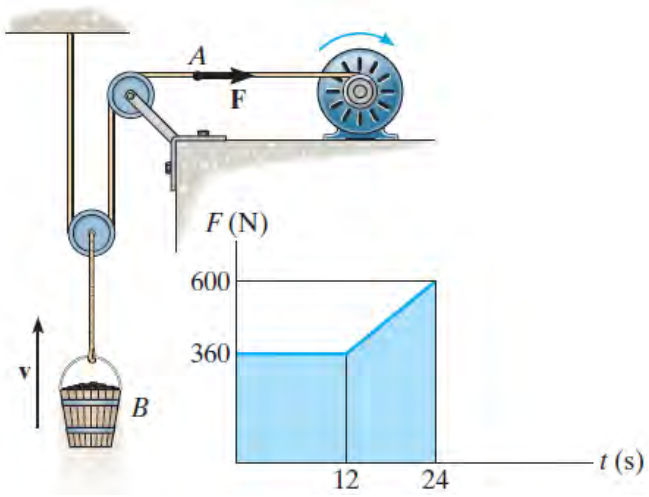




پ 15-26

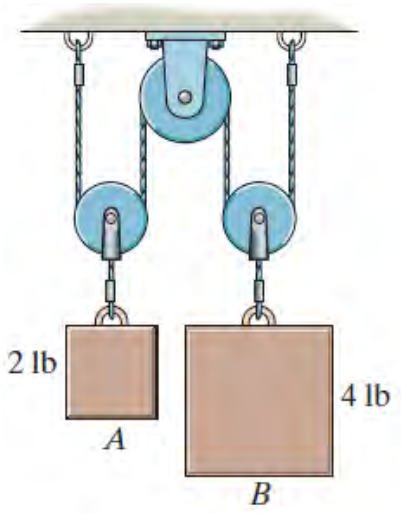
15-27. وینچ (winch) یوه افقي کشکونکی د کیبل قوه **F** په A کې جوړه وي چې د ښودل شوي ګراف له مخې تغیر کوی. د 70 کیلوګرامه ډولچی تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 18s$ وي. په پیل کې ډولچه د $v_1 = 3$ m/s تیزوالی سره پورته روانه ده.

15-28. وینچ (winch) د افقي کشکونکی د کیبل قوه **F** په *A* کې جوړه وي چې د ښودل شوي ګراف له مخې تغیر کوی. د 80 کیلوګرامه ډولچی تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 24s$ وي. په پیل کې ډولچه له دریدلی حالته پیل کیږي.



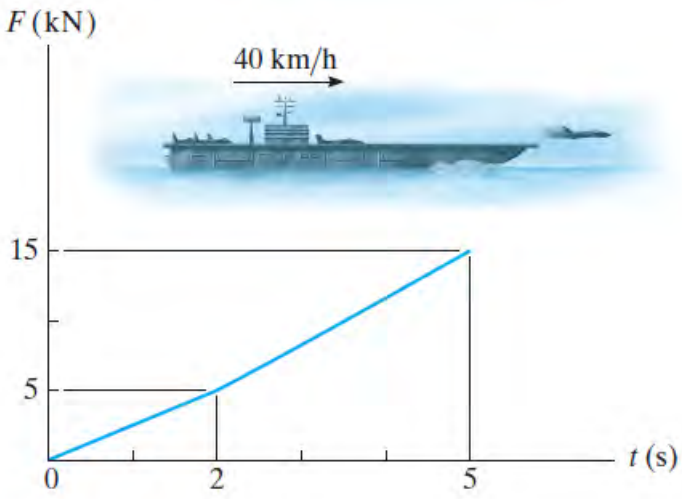
پ 15-27/28

15-29. د بلاکونو *A* او *B* سرعت وټاکئ 2 ثانیې وروسته کله چې دوی له دریدلی حالت نه پیل شي. د څرخکیواو رسیو کتلی د پام وړ نه دي.



پ 15-29

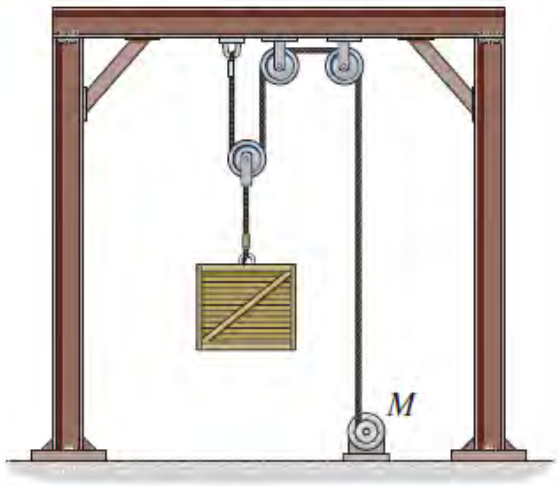
15-30. **د** جټ **یوه** الوتکه چې د 7 میګا ګرامه کتله لري د جټ وړو بیړۍ څخه چې د انجن زوریی د ګراف له مخې تغیرکوی، الوتنه کوي. که بیړۍ په 40 km/h تیزوالي سره مخ ته روانه وي، د الوتکې هوایي تیزوالی وروسته له 5 ثانیو وټاکئ.



پ 15-30

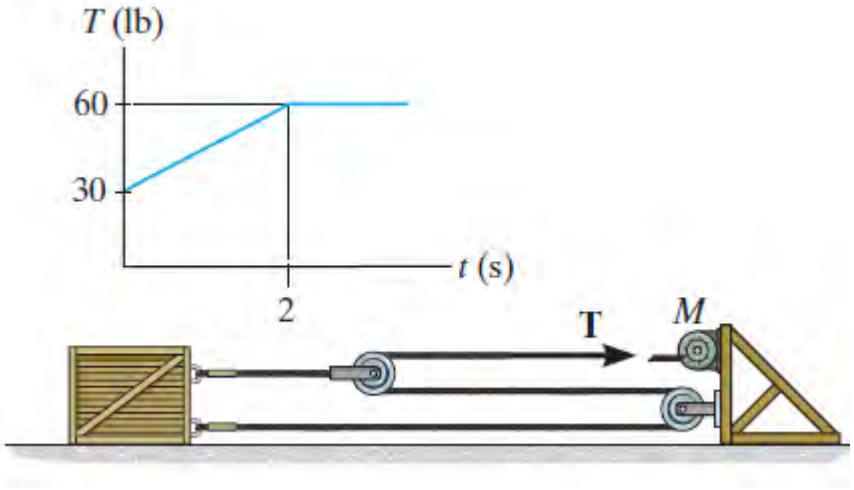
15-31. یو 100 کیلوګرامه بکس د موټور M لخوا پورته کیږي. که د بکس سرعت په 5 ثانیو کې په منظم ډول له 1.5 m/s نه تر 4.5 m/s پورې لوړ شي، په رسۍ کې د کشش اندازه وټاکئ.

*15-32. 100 کیلوګرامه بکس د موټور M لخوا پورته کیږي. موټور په رسۍ باندې د $T = (200t^{1/2} + 150)N$ قوه تطبیقوي، چیرې چې t په ثانیو کې ده. که بکس د ځمکې نه له دریدلی حالته حرکت پیل کړي، د بکس تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 5s$ وي.



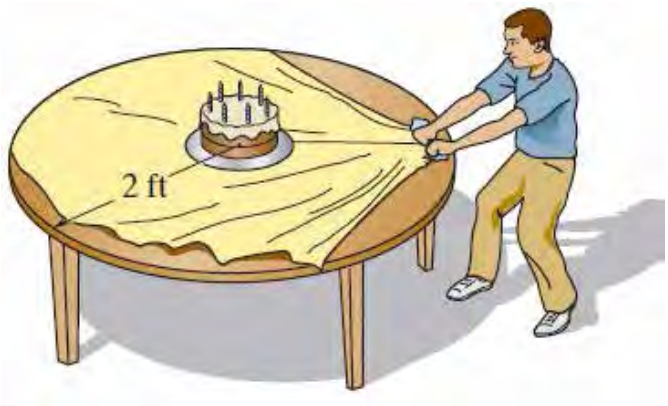
پ 15-31/32

15-33. که د موټور M لخوا په کیبل باندې قوه T چې په لاندې ګراف کې ښودل شوې تطبیق شي ، د 500 پونډه بکس تیزوالی وټاکئ کله چې t = 4 ثانیې وي، صندوق له دریدلی حالته حرکت پیل کوي. د سټیټیک او کینټیک اصټکاک ضریبونه $\mu_s = 0.3$ او $\mu_k = 0.25$ دي.



پ 15-33

15-34. یو کیک او قاب چې تول یې 1.5 پونډه دی د دایروي میز په مرکزکې پراته دی. پرته له دې چې کیک ته لاس ورورې، یو هلک هڅه کوي چې د 2 فوټه شعاع د میزد سر تیکه د چټک افقي حرکت سره لرې کړي. که چیرې د کیک د قاب اود میز دسر تیکی په منځ کی ښویدل واقع شي، تر ټولو اوږد وخت وټاکئ پرته له دې چې د کیک قاب د میز د سر تیکی نه جداشی او په غولی ولویږی. د کیک د قاب او میزد سر تیکی ترمنځ د کینټیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.3$ دی او د کیک د قاب او میز سطحي ترمنځ $m'_k = 0.4$ دی. **مرسته:** د کیک لپاره د امپلس او مومنټم اصول او د کار او انرژۍ د اصولو د x فوټو لپاره وکاروئ ، چې د کیک قاب دمیز د سر تیکی سره پاتی شی، او د (x- 2) فټ چې په میز پاتې کیږي.



پ 15-34

15.3 د خطي مومنتم ساتنه د ذرو دسيستم لپاره
CONSERVATION OF LINEAR MOMENTUM FOR A) (SYSTEM OF PARTICLES





په پاسني عکس کي هامر د مړوی پر وړاندې يوه تحرکي قوه تطبيقوي. د دې ډير لنډ تماس په جريان کي د مړوی وزن غيرتحرکي ګڼل کيدی شي، او که چېرې مړوی نرمي ځمکې ته وهل شي، نو د ځمکې تحرک چې د مړوی په وړاندې عمل کوي هم غيرتحرکي ګڼل کيدی شي. په برعکس، که مړوی د کانکريټ ماتولو لپاره د کانکريټ چپر کې وکارول شي، نو بيا دوه تحرکي قواوی د مړوی په وړاندې عمل کوي: يو په دې سر کې د چپر له امله او بل د دې په پای کې د کانکريټ د سختۍ له امله.

کله چې د ذراتو پر سيستم باندې د بهرنيو امپلسونو مجموعه صفر وي، د 15-5 معادلی شکل ساده کيږي، يعنې

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \qquad (15–8)$$

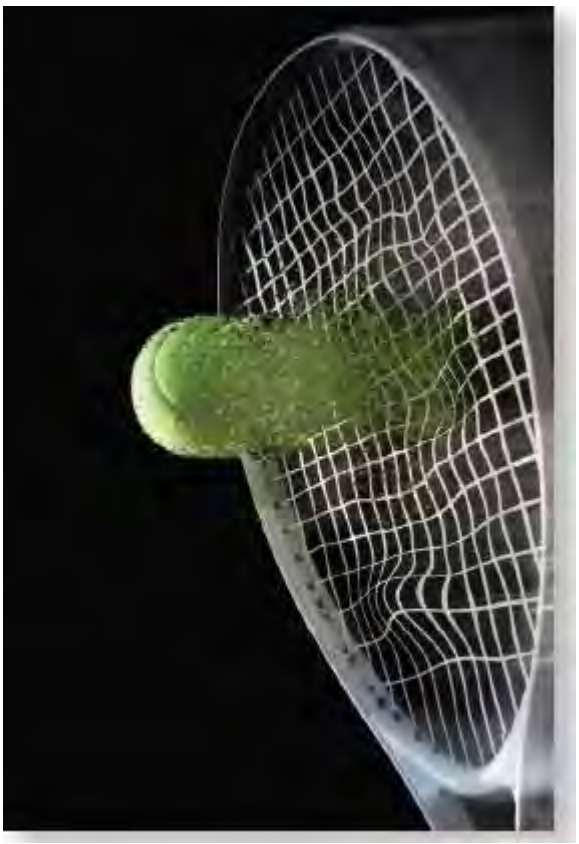
دا معادله د **خطي مومنتم د ساتنې** (conservation of linear momentum) په نامه يادېږي. دا ښيی چې د ذراتو سيستم لپاره ټول خطي مومنتم د t_1 وخت څخه تر t_2 پورې ثابت پاتې کيږي. د 15-7 معادلی څخه، مړ کولای شو چې په لاندی ډول يی وليکو:

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \qquad (15–9)$$

دا ښيي چې د ذراتود سيستم لپاره د کتلی د مرکزسرعت $\mathbf{v}_G$ نه بدلېږي که چېرې په سيستم باندې کوم بهرني امپلس عمل وه نه کړي.

د خطي مومنتم ساتنه اکثره د ذراتو د ټکر يا تعامل پر مهال کارول کيږي. د دې کارولو لپاره، بايد د ذراتو د سيستم لپاره د آزاد بدن ګراف په غورسره وڅيړل شي ترڅو هغه قواوی چې بهرني امپلسونه رامينځته کوي په ګوته شی او په دې توګه معلومه شي چې خطي مومنتم په کومو لوريوکې ساتل کيږي. که چيری هغه وخت چی حرکت مطالعه کيږی ډير لنډ وي، نو ځينې امپلسونه کولای شو له پامه وغورځوو او يا تقريبی صفر وګڼل شي. هغه قواوی چې دا کوچنی امپلسونه رامينځته کوي **غيرامپلسی** قواوی (non-impulsive forces) بلل کيږي. په پرتله، هغه قواوی چې ډيری لويی وي او د ډير لنډ وخت لپاره عمل وکړي، د مومنتم په اندازه کې مهم بدلون رامينځته کوي او امپلسي قوی (impulsive forces) بلل کيږی. دوی، البته، دامپلس – مومنتم تحليل کې له پامه نه غورځول کيږی.

تحرکي (امپلسی) قواوې معمولا د چاودنی یا د یو جسم د بل جسم سره د ټکر له امله منځ ته راځي، په داسي حال کې چې غیرتحرکي قواوی کیدای شي د بدن تول، د لږ بدل شوي فنر (چې نسبتا کوچنی سختی لري) لخوا ورکړل شوی قوه ، یا هغه قوه چې د نورو لویو(تحرکي) قواوو په پرتله ډیر کوچنی دی، شاملی دی. کله چې د تحرکي او غیرتحرکي قواوو ترمنځ دا توپیر وښودل شي، دا مهمه ده چې پوه شئ چې دا یوازې د t_1 وخت څخه تر t_2 پورې تطبیق کیږي. د دې لپاره، د ټینس توپ د رکیټ سره د ویلو په وخت کی په پام کې ونیسئ لکه څنګه چې په لاندی عکس کې ښودل شوی دی. د تعامل په ډیر لنډ وخت کې، د راکیټ قوه پر توپ باندې تحرکي ده ځکه چې دا د توب حرکت په کلي ډول بدلوي. په مقابل کې، د توپ تول د حرکت په بدلون باندې لږ تاثیر لري، او له دې امله غیرتحرکي ده. له دې امله، دا د تحرک – مومنتم تحلیل څخه د دې وخت په جریان کې د پام وړ نده. که چیرې د رکیټ –توپ تعامل وروسته د اوږد وخت لپاره د تحرک – مومنتم تحلیل ترسره شي، نو د توپ تول تحرک مهم دی ځکه چې دا، د هوا مقاومت سره، د توپ مومنتم په بدلون کې مرسته کوي.



د تحلیل کړنلاري

PROCEDURE FOR ANALYSIS د تحلیل کړنلاری

عموماً، د خطي امپلس او مومنتم یا د خطي مومنتم ساتنې اصول د ذراتو پر سیستم باندې تطبیق کیږي ترڅو د ټاکل شوې وخت په ورستی لحظه کی د ذراتو وروستي سرعتونه معلوم شي. د دې اصولو تطبیق د ټول سیستم لپاره، د سیستم دننه تحرکات د تحلیل څخه پاتی کیږي. د دې کارولو لپاره، لاندې کړنلاره وړاندیز کیږي.

د آزاد بدن انځور(Free-Body Diagram):

- د x ، y، z د انرشیای محورونو چوکاټ جوړ کړئ او د هری ذری د سیستم لپاره د آزاد بدن انځور رسم کړئ ترڅو داخلي او بهرني قواوې و پیژندل شي.
- د خطي مومنتم ساتنه په هغه لور تطبیق کیږي چې یا به هیڅ بهرني قواوی شتون نه لری او یا به قواووی غیرتحرکي ګټل شویی وی.
- د ذراتو د سرعتونو لور او جهتونه، دواړه، لمړنې او وروستي وټاکئ. که جهت نا څرګند وي، فرض کړئ چې دا د محور مثبت لور ته دی.

د حرکت معادلې (Momentum Equations):

- د خطي امپلس او مومنتم اصول یا د خطي ساتنې مومنتم اصول په مناسبو لوریوکی تطبیق کړئ.
- که لازم وي چې یوازې د یوی ذری لپاره داخلي امپلس $\int F\,dt$ معلوم شي، نو باید ذره جلا شي (د آزاد بدن انځور) او د خطي امپلس او مومنتم اصول دې په ذره باندې تطبیق شي.
- وروسته له دې چې امپلس محاسبه شو، او که د امپلس د عمل کولو وخت Δt معلوم وي، نو د منځنۍ امپلسی قوه F_{avg} کړی شی له $F_{avg} = \int F\,dt\,/\Delta t$ لارې معلوم شي.

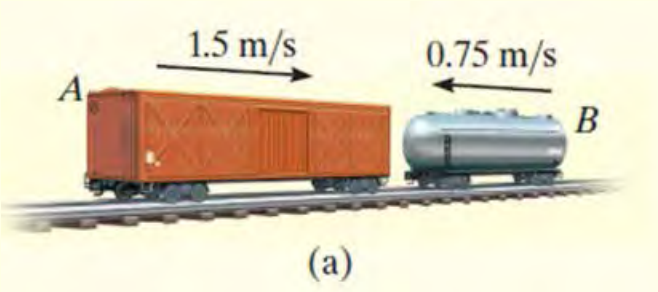
مثالونه

مثال 15.4

یو 15 مګا ګرامه بکس ګاډی (boxcar)، *A* ، په افقي پټلي باندې په 1.5m/s سرعت سره روان دی کله چې د 12-مګا ګرامه ټانکر *B* سره مخامخ کیږي چې په 0.75 m/s سرعت سره یې په مقابل لوری حرکت کوي لکه څنګه چې په انځور 15-8a کې ښودل شوی. که چېرې دا ګاډي ټکر وکړي او د کپلینګ (ټرلو)له لارې سره یو ځای شي، نو د لاندې پیدا کړی:

(a) د دواړو ګاډیو سرعت وروسته له ټرلو معلوم کړئ.

(b) د منځني قوی اندازه پیدا کړئ که ټرل 0.8 s ونیسی.

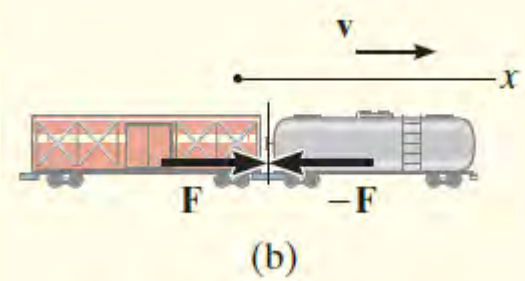


(a)

حل

برخه (a)

د آزاد بدن ډایګرام (Part (a) Free-Body Diagram) : لکه څنګه چې په انځور 15-8b کې ښودل شوی، موږ دواړه ګاډي د یوه واحد سیستم په توګه ګڼلي دي. د مومنتم ساتنه د *x* لورې ته کیږي ځکه چې د ټرلو قوه **F** د سیستم دننه ده او له دې امله به کنسل شي. فرض کیږي چې کله دواړه ګاډي سره یوځای شی ، نو دواړه ګاډي به په $\mathbf{v}_2$ د مثبت *x* په لور حرکت وکړی.



(b)

انځور 15-8

د خطي حرکت ساتنه (Conservation of Linear Momentum):

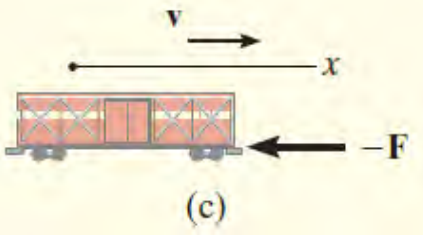
$$(\pm) \quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - 12\,000\text{ kg}(0.75\text{ m/s}) = (27\,000\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.5\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

برخه (b) : منځني د ضربی(impulsive) ترل شوی قوه $\mathbf{F}_{avg}$ د خطي مومنتم د اصولو له مخی د هریوه ګاډي لپاره محاسبه کیدی شي.

د آزاد بدن ډایګرام (Free-Body Diagram) : لکه څنګه چې په انځور 15-8c کې ښودل شوی، کله چې د بکس ګاډی جلا شي، لیدل کیږي چې د ترلو قوه دګاډي لپاره خارجی قوه ده.



انځور 15-8

د ضربی قوی او مومنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum):

څرنګه چې $F_{avg}\,\Delta t = F_{avg}(0.8\text{s})$ مورِ لرو $\int F\,dt$

$$(\pm) \quad m_A(v_A)_1 + \Sigma \int F\,dt = m_A v_2$$

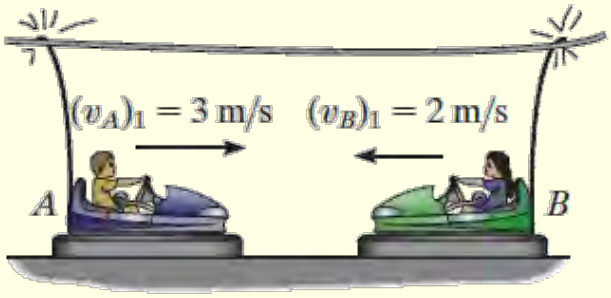
$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - F_{avg}(0.8\text{ s}) = (15\,000\text{ kg})(0.5\text{ m/s})$$

$$F_{avg} = 18.8\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

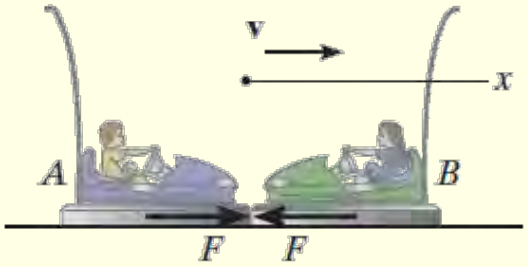
یادونه : د Favg محاسبې لپاره، د ټانکر لپاره د ضربیی او مومنتم اصولو په کارولو سره هم هڅه وکړئ

*یوازې افقی قواوی په آزاد بدن ډیاګرام کې ښودل شوي دي

مثال 15.5



(a)



(b)

انځور 15-9

د بمپر موټرونه A او B په انځور 15-9a کې، هر یو 150 کیلوګرامه تول لري او د ښودلشویو سرعتونو سره مخکې له دې چې دوی مخا مخ ټکر وکړي، په آزاد ډول حرکت کوي. که په ټکر کې هیڅ انرژي له منځه ولاړه نشي، د ټکر وروسته د دوی سرعتونه وټاکئ.

حل

آزاد بدن ډیاګرام(Free-Body Diagram): موټرونه به د یوه واحد سیسټم په توګه په پام کې ونیول شي. د آزاد بدن ډیاګرام په انځور 15-9b کې ښودل شوی دی.

د مومنتم ساتنه (Conservation of Momentum).

$$(\pm\rightarrow) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$(150\ \text{kg})(3\ \text{m/s}) + (150\ \text{kg})(-2\ \text{m/s}) = (150\ \text{kg})(v_A)_2 + (150\ \text{kg})(v_B)_2$$

$$(v_A)_2 = 1 - (v_B)_2 \qquad (1)$$

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy): له هغه ځایه چې هیڅ انرژي له منځه نه ځي، د انرژۍ د ساتنې قضیه دا لاندې راکوي:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}(150\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_B)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2^2 + (v_B)_2^2 = 13 \qquad (2)$$

معادله 1 په معادله 2 کی ځای په ځای کوو، او وروسته له ساده کیدو مونږ لرو:

$$(v_B)_2^2 - (v_B)_2 - 6 = 0$$

دوه جذرونه د پورتني مساواتو پیدا کوو

$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \qquad \text{and} \qquad (v_B)_2 = -2\text{ m/s}$$

له دې چې $(v_B)_2 = -2$ m/s د B د ټکر نه مخکې سرعت ته اشاره کوي، نو د ټکر وروسته د B سرعت باید وی

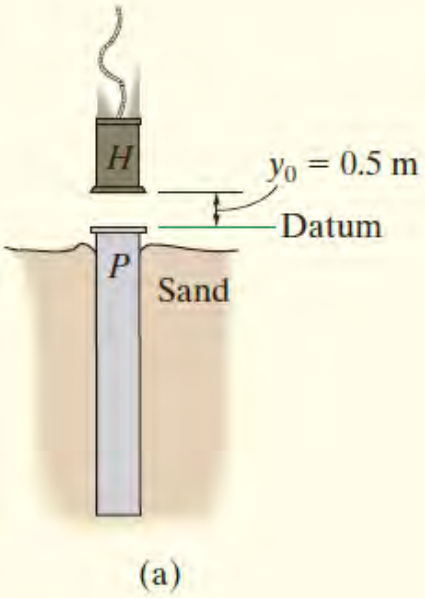
$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

دا پایلې په معادله 1 کی ځای په ځای کوو، مونږ لرو

$$(v_A)_2 = 1 - 3\text{ m/s} = -2\text{ m/s} = 2\text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 15.6

یو 800 کیلوګرامه سخت پایل (کانکریتی میخ) P چې په انځور 15-10a کې ښودل شوی، د 300 کیلوګرامه سوټک په کارولو سره په ځمکه کې ننیستل کیږي. سوټک له دریدلي حالت څخه د $y_0 = 0.5$ m لوړوالي څخه ښکته کیږي او د پایل په سر باندې لګیږي. هغه تاثیر یا ټکان چې پایل په سوټک واردوي وټاکئ، په داسې حال کې چې پایل په بشپړ ډول د نرم ریګ لخوا احاطه شوی دی، او سوټک پس له ټکره د پایل د سرنه بیرته نه را ګرځی.



(a)

حل

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy):

هغه سرعت چې سوټک پایل ټکوي د انرژۍ د ساتنې معادلې په کارولو سره ټاکل کیدی شي چې په سوټک تطبیق شی. د پایل په سر د معیاری کربنې په توګه، لکه څنګه چې په انځور 15-10a کې ښودل شوی، مونږ لرو

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

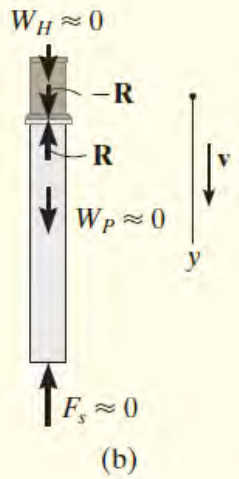
$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81)\,\text{N}(0.5\,\text{m}) = \frac{1}{2}(300\,\text{kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.132\,\text{m/s}$$

آزاد بدن ډیاګرام(Free-Body Diagram):

د پوښتنې د فزیکي اړخونو څخه، د سوټک او پایل آزاد بدن ډیاګرام، لکه څنګه چې په انځور 15-10b کې ښودل شوی، څرګندوي چې د ټکر له مخکې څخه تر ټکر وروسته لنډ وخت کې، د سوټک او پایل تول او د شګې د مقاومت قوه $\mathbf{F}_s$ تول غیر ضربیی (non-impulsive) دي. ضربیی قوه R د سیستم دننه دی او له همدې امله خنثا (cancel) کیږي. په پایله کې، د دې لنډ وخت په جریان کې په عمودي لوري کې مومنتم یا حرکت ساتل کیږي.



(b)

انځور 15-10

د مومنټم ساتنه (Conservation of Momentum).

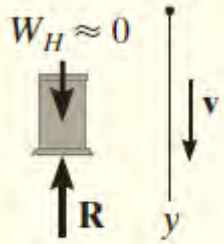
له هغه ځایه چې سوټک د ټکر څخه وروسته له پایل څخه بیرته نه ګرځي، نو

$$(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2.$$

$$(+\downarrow) \quad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$
$$(300\ \text{kg})(3.132\ \text{m/s}) + 0 = (300\ \text{kg})v_2 + (800\ \text{kg})v_2$$
$$v_2 = 0.8542\ \text{m/s}$$

د ضربې قوه او مومنټم اصول (Principle of Impulse and Momentum) :

هغه ضربه یا امپلس چې پایل په سوټک باندې واردوي اوس ټاکل کېدی شي ځکه چې v_2 معلوم دی. د سوټک لپاره د آزاد بدن ډیاګرام څخه، لکه څنګه چې په انځور-15 10c کې ښودل شوی، مونږ لرو



(c)

انځور 10-15

$$m_H(v_H)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m_H v_2$$
$$\text{g)}(3.132\ \text{m/s}) - \int R\,dt = (300\ \text{kg})(0.8542\ \text{m/s})$$
$$\int R\,dt = 683\ \text{N}\cdot\text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: مساوي خو مخالفه ضربه په پایل باندې عمل کوي. هڅه وکړئ چې دا ضربه یا امپلس د امپلس او مومنتم د اصول نه چې په پایل تطبیقیږی ومومئ.



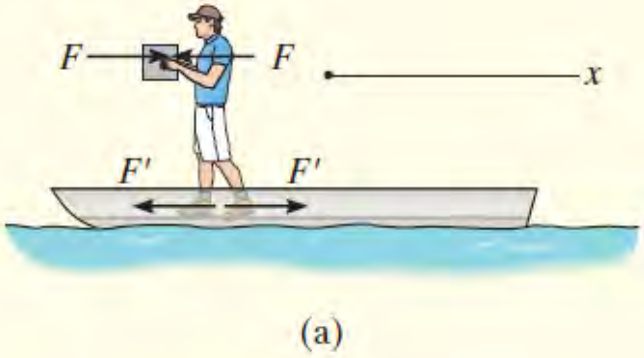
مثال 15.7

یو 80 کیلوګرامه سړی کولی شي 20 کیلوګرامه صندوق په افقي توګه په 4 m/s کې ګوزارکړی کله چې په ځمکه باندې ولاړ وي. که هغه په 120-کیلوګرامه کښتۍ کې په ثابت ډول ودریږي او صندوق ګوزار کړي، لکه څنګه چې په عکس

کې ښودل شوی، وټاکئ چې کښتۍ به په درې ثانیو کې څومره ولاړه شی؟ د اوبو مقاومت په حل کی په نظر کی مه نیسی.

حل

آزاد بدن ډیاګرام(Free-Body Diagram):

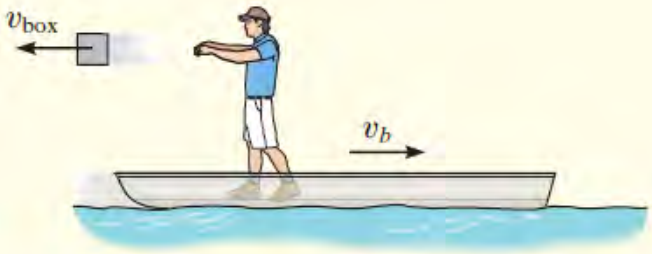


(a)

که سړی، کښتۍ، او صندوق د یو واحد سیسټم په توګه په پام کې ونیول شي، د سړي او کښتۍ او د سړي او صندوق ترمنځ افقي قواوی د سیسټم دننه کیږي، لکه څنګه چې په انځور 15-11a کې ښودل شوی، نو خطي مومنتم به د x محورپه لوری وساتل شي.

د مومنتم ساتنه (Conservation of Momentum).

کله چې د مومنتم د ساتنې معادله ولیکئ، مهمه ده چې سرعتونه د یوه انرشیایي کوارډنیټ سیسټم څخه اندازه شي، چې دلته فرض شوي چې ثابت دی. له دې محوری سیسټم څخه، موږ به فرض کړو چې کښتۍ او سړی د ښي لور ته حرکت کوي په داسې حال کې چې صندوق د چپ لور ته حرکت کړي، لکه څنګه چې په انځور 15-11b کې ښودل شوی.



(b)

انځور 15-11

د سړي، کښتۍ، او صندوق سیسټم لپاره د ساتنې خطي مومنتم تطبیق کوو

$$(\pm\rightarrow) \qquad 0 + 0 + 0 = (m_m + m_b)v_b - m_{box}v_{box}$$

$$0 = (80\,kg + 120\,kg)v_b - (20\,kg)v_{box}$$

$$v_{box} = 10v_b \qquad (1)$$

کینماتیک (Kinematics): له دې ځایه چې د صندوق سرعت نسبت سړي (او کښتۍ) ته، $v_{box/b}$، معلوم دی، نو v_b هم کولی شي د v_{box} سره د نسبی سرعت معادلی په کارولو سره اړیکه ولري

$$(\pm\rightarrow) \qquad v_{box} = v_b + v_{box/b}$$

$$-v_{box} = v_b - 4\,m/s \qquad (2)$$

معادله 1 او 2 حل کوو

$$v_{box} = 3.64\,m/s \leftarrow$$

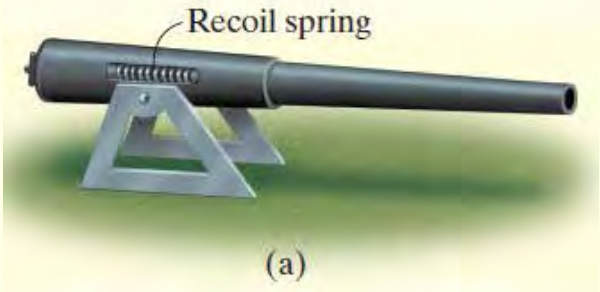
$$v_b = 0.3636\,m/s \rightarrow$$

د کښتۍ بیځایه کیدنه په درې ثانیو کې په دې توګه ده

$$s_b = v_b t = (0.3636\,m/s)(3\,s) = 1.09\,m \qquad Ans.$$

*یوازې افقي ځواکونه په آزاد بدن ډیاګرام کې ښودل شوي دي.

مثال 15.8



د 1200 پونډه توپ چې په انځور 15-12a کې ښودل شوی، 8 پونډه ګولی په 1500 ft/s سرعت سره د توپ په نسبت ولی. که ویشتل په 0.03 ثانیو کې ترسره شي، د توپ د ویشتلو وروسته د توپ په شاتګ سرعت وټاکئ. د توپ ټرل د مځکی سره ثابت دی، او د توپ افقي شاتګ د دوو فنرونو لخوا جذب کیږي.

حل

د آزاد بدن ډایګرام *(Part (a) Free-Body Diagram) : لکه څنګه چې په انځور 15-12b کې ښودل شوی، موږ به ګولی او توپ د یو واحد سیستم په توګه وښیو، ځکه چې د توپ او ګولی ترمنځ ټکان لرونکي قواوي، **F** او**-F** ، د سیستم دننه دي او له په تحلیل کی نه راځی. سربېره پر دې، د $\Delta t = 0.03$ ثانیو په جریان کې، دوه د شاتګ فنرونه چې د اتکا سره ټرل شوي، هر یو په توپ په با ندې غیر ټکان لرونکی (non-impulsive force) قوه $\mathbf{F}_s$ لري. دا ځکه چې Δt خورا لنډ وخت دی، نو د دې وخت په جریان کې توپ یوازې خورا کوچنی فاصله x حرکت کوي. په دې توګه، $F_s = kx \approx 0$، چیرې چې k د فنر سختوالی دی، چې همدارنګه نسبتاً کوچنی ګڼل کیږي. له دې امله، دا پایله اخیستل کیدی شي چې د سیستم حرکت د افقي لوري په اوږدو کې ساتل کیږي.

د مومنتم ساتنه (Conservation of Momentum)

$$(\pm\rightarrow) \qquad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\left(\frac{1200\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_c)_2 + \left(\frac{8\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_p)_2$$

$$(v_p)_2 = 150\,(v_c)_2 \qquad (1)$$

کینمتیک (Kinematics): دا دوه نامعلوم سرعتونه د یو ثابت ځارونکي لخوا اندازه شوي دي. لکه څنګه چې په مثال 15.7 کې، دوی هم د نسبی سرعت معادلې په کارولو سره اړیکه لرلی شی.

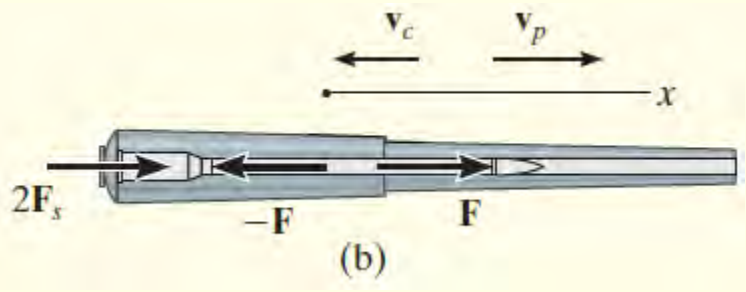
$$(\pm\rightarrow) \qquad (v_p)_2 = (v_c)_2 + (v_{p/c})_2$$

$$(v_p)_2 = -(v_c)_2 + 1500\,\text{ft/s} \qquad (2)$$

معادله 1 او 2 حل کوو

$$(v_c)_2 = 9.93\,\text{ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(v_p)_2 = 1490\,\text{ft/s}$$



انځور 12-15

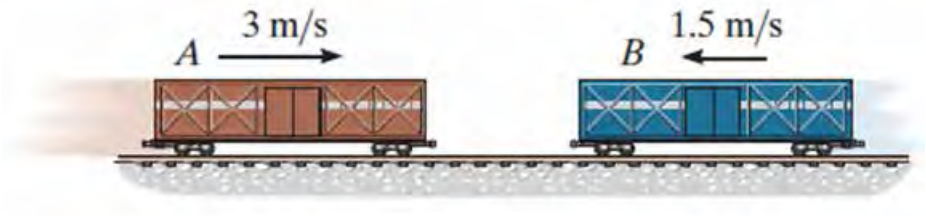
د ټکان او مومنتم اصولوپلیکول په ګولی (یا توپ) باندې او وښیی چی اوسط ټکان ورکونکی قوه په ګولی باندی 12.3 kip ده.

یادونه: که توپ په خپله اتکا په ثابت ډول ټینګ شوی وي (بیله له فنرو نه)، نو د اتکا ریکشني قوه د توپ په وړاندې باید د سیستم لپاره د بهرني ټکان په توګه وڅیړل شي، ځکه چې اتکا به د توپ حرکت ته اجازه ورنکړي. په دې حالت کې، مومنتم نه ساتل کیږي.

*یوازې افقي ځواکونه په آزاد بدن ډیاګرام کې ښودل شوي دي.

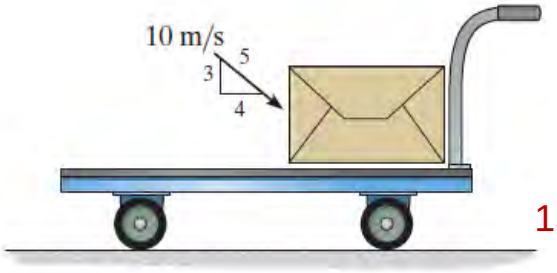
بنسټیز پوښتنې FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 15-7. باروړونکی ګاډي A او B د 20 Mg او 15 Mgپه ترتیب سره کتله لري. د ټکر وروسته د A سرعت وټاکئ که چیرې ګاډي ټکر وکړي او بیرته راوګرځي، په داسی حالت کی چی B په 2 m/s سرعت سره ښي لور ته حرکت کوي. که A او B د 0.5 ثانیو لپاره په تماس کې وي، د دوی ترمنځ د اوسط امپلس قوه چی عمل کوی وټاکئ.



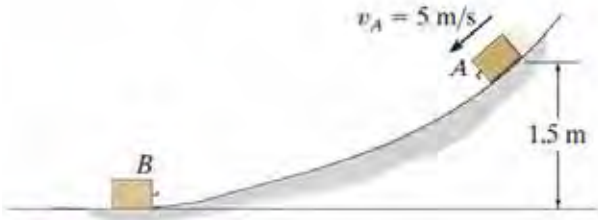
ب 15-7

ب 15-8. د کړاچي او کڅوړې کتلې د 20 kg او 5 kg په ترتیب سره دی. که کړاچي ښویه سطحه ولري او په لومړي سر کې په دریدلی حت کې وي، په داسې حال کې چې د کڅوړې سرعت لکه څنګه چې ښودل شوی دی، د ټکر وروسته د کړاچي او کڅوړې ګډ وروستی سرعت وټاکئ.



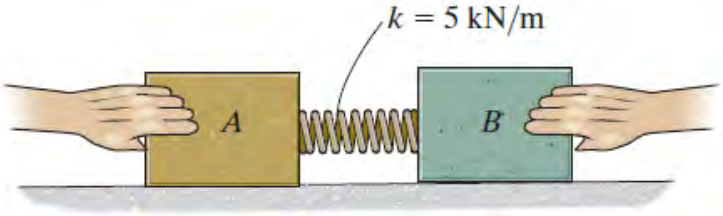
ب 15-8

ب 15-9. 5 کیلوګرامه بلاک A د 5 m/s لمړنی تیزوالی د ښوی رمپ له لارې لاندې ښویږي، تر څو چې د 8 کیلوګرامه بلاک B سره ټکر وکړی. که دواړه بلاکونه د ټکر نه وروسته یوځای شي، د دوی ګډ سرعت سمدستي وروسته له ټکره وټاکئ.



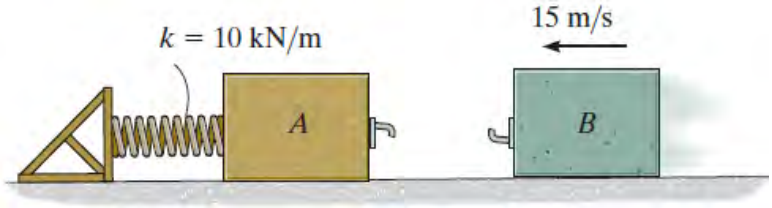
ب 15-9

ب 15-10. فنرد بلاک A سره تړل شوی دی او بلاک B په فنر باندی ټیله شوی دی. که فنرد $s = 200$ mm غونج شوی وي او بیا بلاکونه آزاد شي، د بلاکونو سرعت وټاکی کله چې بلاک B د فنرسره تماس له لاسه ورکړی. د Aاو B بلاکونو کتلی په ترتیب سره 10 kg او 15 kg دي.



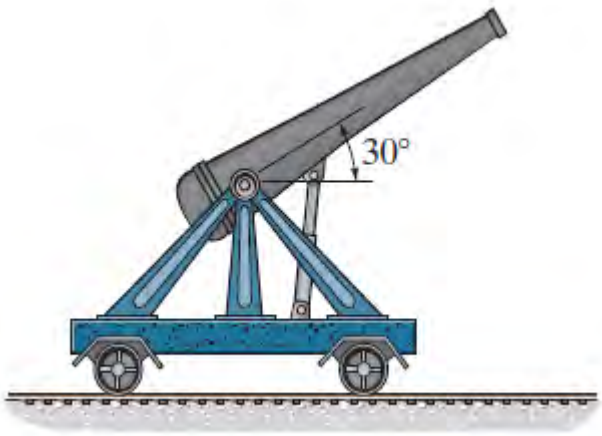
ب 15-10

ب 15-11. بلاکونه A او B په ترتیب سره 15 kg او 10تو kg تول لري. که A په دریدلی حالت کې وي او B د ټکر نه مخکې د 15 m/s سرعت ولري، او بلاکونه د ټکرنه وروسته یوځای شي، د فنر اعظمي غونجیدل وټاکئ.



ب 15-11

ب 15-12. توپ او پایه یې پرته له ګولۍ 250 kg تول لري. که د 20 کیلوګرامه ګولۍ د توپ څخه په 400 m/s سرعت سره و ویشتل شي، چې د توپ په نسبت اندازه شوی دی، د ګولۍ تیزوالی کله چې د توپ د ټیوب څخه د وتلو پر مهال وی ، وټاکئ. د رغړیدا مقاومت په نظر کی مه نیسی.

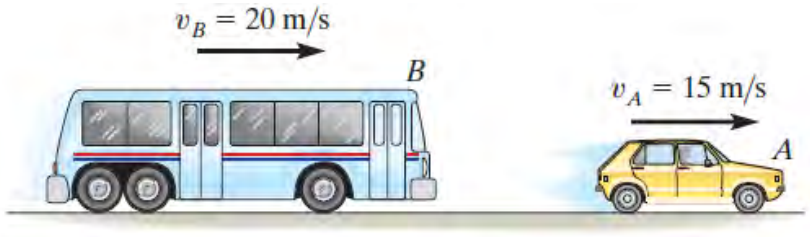


ب 15-12

پوښتنې

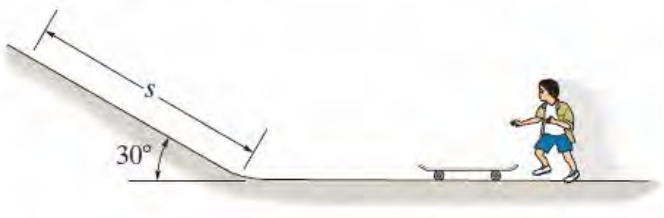
PROBLEMS پوښتنې

15-35. د 5Mg- بس B د 20 m/s سرعت سره ښي لور ته حرکت کوي. په ورته وخت کې، یو 2 Mg-موټر A په 15 m/s سرعت سره ښي لور ته حرکت کوي. که دواړه ټکر وکړي اود یو بل سره ونښلی، د ټکر وروسته د دوی ګډ سرعت وټاکئ. فرض کړئ چې دواړه د ټکر په جریان کې آزاد رغړیدی شی.



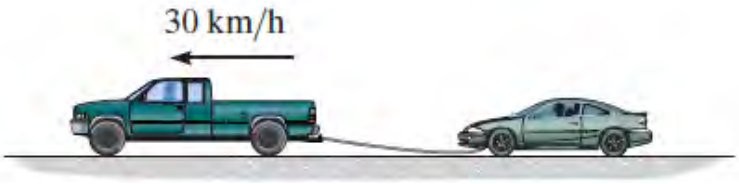
پ 15-35

*15-36. يو 50-kg هلک په 5 کيلوګرامه سکيټ بورډ باندې ورغورځی چې 5 m/s افقي سرعت لری. د انډول شوي رامپ په لور د هلک د حرکت فاصله s وټاکئ مخکې له دې چې د لږ وخت د پاره ودريږي. د سکيټ بورډ د رغړيدلو مقاومت په نظر کی مه نيسی.



پ 15-36

15-37. د 2.5 Mg پيک اپ ټرک د 1.5 Mg موټر د کيبل په واسطه کوم چې په لاندی انځور کی ښودل شوي کشکوي. که موټر په پيل کې دريدلی وی او ټراک په 30 km/h سرعت سره حرکت کوي کله چې کيبل ځوړند وی، د کيبل د سيخيدو (taut) وروسته د ټراک او موټر ګډ سرعت وټاکئ. همدارنګه، د انرژۍ له لاسه ورکول وټاکئ.



پ 15-37

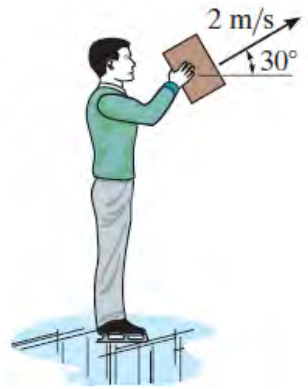
15-38. د 30,000 lb وزن لرونکی ريل ګاډی په 30 ft/s سرعت سره افقي حرکت کوي. په همدې وخت کې، بل ګاډی چې وزن يې 10,000 lb دی په 5 ft /s سرعت سره په مقابل لور حرکت کړي. که ګاډي سره ولګيږي او يوځای شي، سمدستي وروسته له يوځای کيدو د دواړو ګاډيو سرعت وټاکئ. او هم د دواړو ګاډيو د حرکت انرژي مخکې او وروسته له يوځای کيدو وټاکئ، او د دې انرژيو توپير په کيفی توګه(qualitative)تشريح کړئ.

15-39. دا لاندی بليستيک پنډولم له 4 کيلوګرامه لرګي بلاک څخه دی چې په لمړی کی په دريدلی حالت کې دی، $q = 0°$. کله چې د 2 ګرامه ګولی وربانډی ولګيږي او په کې ننوزي، ليدل شوی چې بلاک تر ټولو لوړی زاويی $q = 6°$ ته پورته ځي. د ګولی لمړنی تيزوالی وټاکئ.



پ 15-39

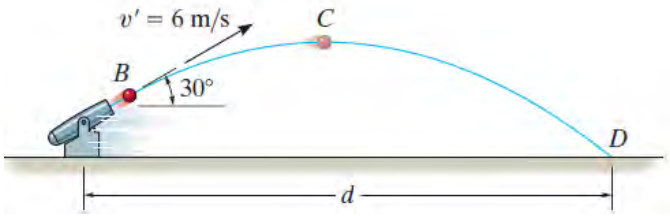
15-40. یو سړی چې د یخ سکیټونه یې په پښو کړي د 8 کیلوګرامه بلاک په 2 m/s ابتدایی سرعت سره، په ښودل شوي لور غورځوي، چې د هغه سرعت یې نسبت خپل ځان ته اندازه کړی. که هغه په اصل کې په دریدلی حالتکی وی او د 1.5 ثانیو په جریان کې غورځول بشپړ کړي، چې پښې یې سختی ساتلی، د بلاک د خوشي کولو وروسته د سړي افقي سرعت وټاکئ. د غورځولو په جریان کې د هغه د دواړو سکیټونو عمودی ریکشن په یخ باندی څه دی؟ سړی 70 kg کتله لري. اصتکاک او د سړی دلاسونو حرکت په پام کی مه نیسی.



پ 15-40

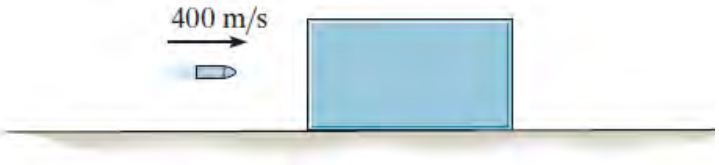
15-41. دا لاندی 5 کیلوګرامه فنري ټوپک په ښویه سطحه باندې ځای په ځای شوي دی. او دا یو 1 کیلوګرام توپ په ښودل شوي لور، په $v' = 6$ m/s سرعت نسبت ټوپک ته، ولی (فیرکوي). که ټوپک په اول کی په دریدلی حالت کی وی، د توپ افقي فاصله d وټاکئ چې توپ د ټوپک د موقعیت څخه د ځمکې سره په D کی لګیږی. د ټوپک اندازه له پامه وغورځوی.

15-42. دا لاندی 5 کیلوګرامه فنري ټوپک په اواره سطح باندې ځای په ځای شوي دی. او دا یو 1 کیلوګرامه توپ په ښودل شوي لور، په $v' = 6$ m/s سرعت سره نسبت ټوپک ته، فیر کوي . که ټوپک په اصل کې په آرام کې وي. د توپ افقي فاصله، په هغه مهال چې توپ د خپل ترټولو لوړ مقام C ته ورسیږي، وټاکئ . د ټوپک اندازه نادیده ونیسئ.



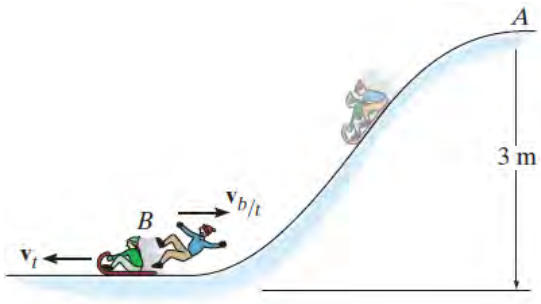
پ 15-41/42

15-43. یو 20 ګرامه ګولی د 400 m/s سرعت سره حرکت کوي کله چې دا په 2 کیلوګرامه بلاک کې ننه وزی. د بلاک دښویدو فاصله مخکې له دې چې ودریږي وټاکئ .د بلاک او سطحی ترمنځ د کینتیک اصتکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ دی.



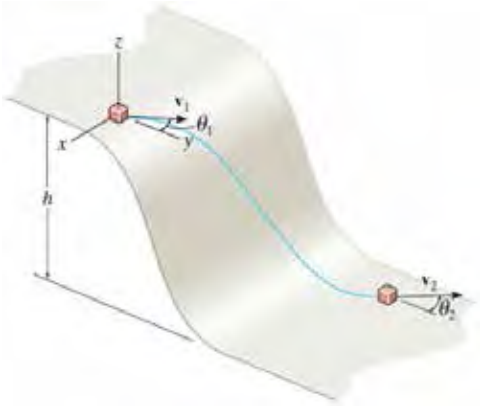
پ 15-43

*15-44. یو ټوبوګن (toboggan) چې کتله یې 10 kg ده د دریدلی حالته په A کې پیل کوي چې یوه نجلۍ او هلک چې کتلې یې په ترتیب سره 40 kg او 45 kg دي لیږدوي. کله چې ټوبوګن د نشیب بیخ ته په B کې رسیږي، هلک د افقي سرعت $v_{b/t} = 2$ m/s سره د ټوبوګن په نسبت، شاته غورځول کیږي. د ټوبوګن سرعت پس لدی وټاکئ. اصتکاک په حساب کې له پامه وغورځوی.



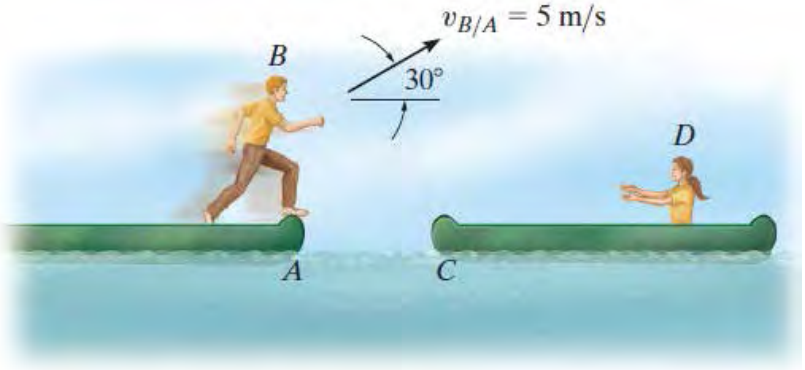
پ 15-44

15-45 په دی لاندی انځور کې ښودل شوی بلاک چې m کتله لري او د q_1 په جهت په v_1 سرعت سره، د ښوی میلان د سره حرکت کوي. د بلاک تیزوالی v_2 اوجهت q_2 وټاکی، کله چې د میلان بیخ ته ورسیږی.



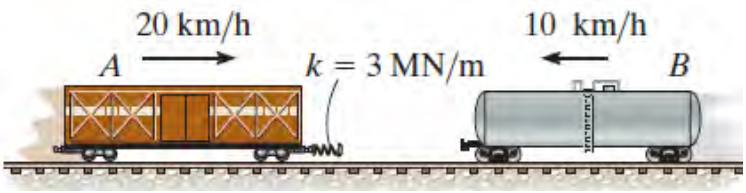
پ 15-45

15-46. هلک B د کنو (canoe) A څخه په 5 m/s سرعت سره، د کنو په پرتله، ټوپ کوي، لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوی. که دی په دویمه کنو C کې ولویږي، د دواړوکنوګانو تیزوالی وروسته له حرکته وټاکئ. هر کنو 40 kg کتله لري. دهلک کتله 30 kg ، اود نجلۍ کتله D 25 kg ده. دواړه کنوګان لمړی دریدلیی حالت کی دی.



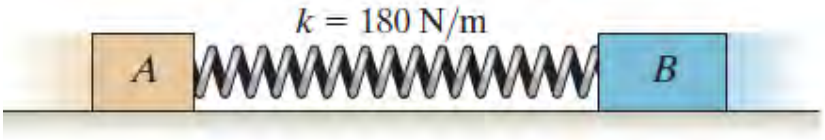
پ 15-46

15-47. د 30 Mg باروړونکی ګاډی A او 15 Mg باروړونکی ګاډی B د بنودل شوي سرعتو سره د یو بل په لور حرکت کوي. د فنراعظمي غونجیدل چې په ګاډی A باندې نصب دی، وټاکئ. د رغړیدا مقاومت په نظرکی مه نیسی.



پ 15-46

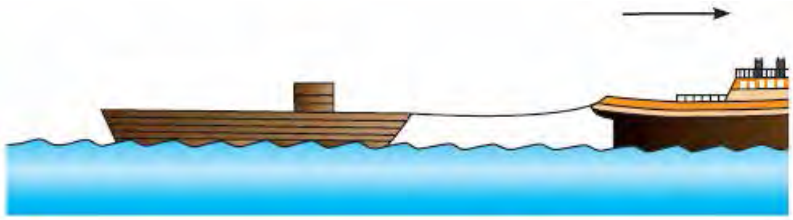
*15-48. بلاکونه A او B د 40 kg او 60 kg په ترتیب سره کتلې لري. دوی په بنویه سطحه ځای پر ځای شوي او د دوی ترمنځ نښلیدلی فنر 2 m غځول شوی دی. که دوی د دریدلی حالت څخه خوشي شي، د بلاکونو سرعت په هغه وخت کی وټاکی کله چی فنر په نه غزیدلی حالت کی وی.



پ 15-46

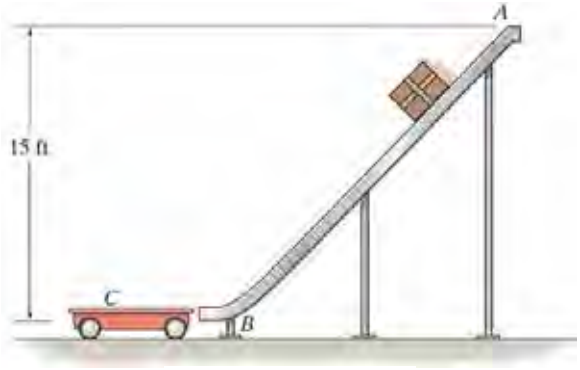
15-49. یو بکس چی m کتله لري د بارج پر سر چې M کتله لري ایښودل شوي او په دریدلی حالت کی دی. د بکس او بارج ترمنځ د حرکتی اصتکاک ضریب μ دی. که رسۍ کش شي (یا وښورول شي) هغه غوڅیږي او د دې پایلې له امله په بارج باندی امپلس واردیږي او یوناڅاپي سرعت v_0 ترلاسه کوي. د بکس د بارج پر سر د بنویدو وخت وټاکئ مخکې له دې چې په بارج باندی ودریږي. همدارنګه، د بارج وروستی سرعت څه دی؟

15-50. د پوښتنې 15-49 ډیټا په کارولو د بکس د بنویدو فاصله په بارج مخکې له دې چې ودریږي وټاکئ.



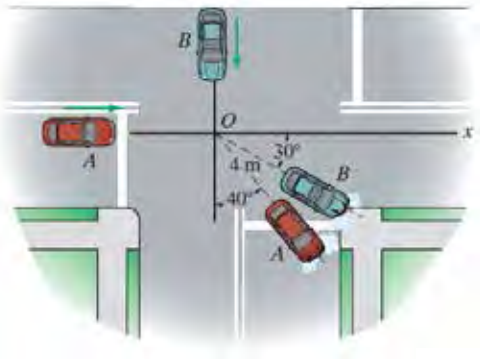
پ 15-49/50

15-51. د 40 lb بکس په ښوی میلان (ramp) د دریدلی حالتنه ښکته ښوییږی اود 20 lb کړاچی سرته ځي. د بکس سرعت په هغه لحظه کی وټاکئ کله چې د کړاچی پرسرد دریدو حالت ته راشي. که څوک کړاچی د میلان سره په B کې وټړي، د بکس افقی ټکان یا امپلس قوه پر C باندې وټاکی، تر څو د هغه حرکت ودروي. اصتکاک اود بکس اندازه په نظر کی مه نیسی.



پ 15-51

*15-52. دوه موټر A اوB ، چی هر یو یی 1.6 Mg کتله لري، او په څلور لاری اسفالت شوی سړک کی چی یخ وهلې ټکر کوي. د هر موټر د حرکت لور له ټکر وروسته، د واورو د کربنوله لارې اندازه شوې، لکه څنګه چې په انځورکی ښودل شوی. که د موټر A چلوونکی ووایي چې هغه د ټکر نه مخکې د 50 km/h سرعت سره حرکت کاوه او د ټکر نه مخکی او وروسته یې بریکونه ونیول، او د هغه موټر په فاصله د 4 m وښوید تر څو چی ودریږی، د ټکر نه مخکې د موټر B تقریبي تیزوالی وټاکئ. فرض کړئ چې د موټر ټایرونو او د اسفالت سړک ترمنځ د اصتکاک ضریب $\mu_k = 0.15$ دی. **یادونه:** د ټکرکربنه معلومه نه ده؛ سربیره پردې، د حل لپاره دا معلومات ته اړتیا نشته.

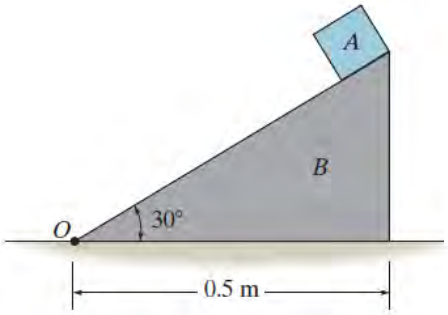


پ 15-52

15-53. بلاک A 5 kg کتله لري او د 30 kg کتله لرونکي ښوی مثلثي بلاک B

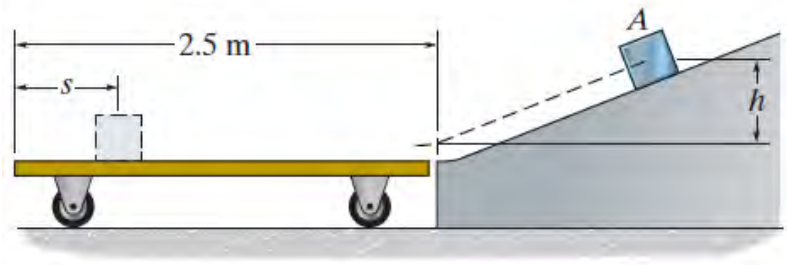
په سر کې ځای پر ځای شوی دی. که سیستم د دریدلی حالت څخه خوشي شي، د بلاک B فاصله د نقطې O څخه کله چې بلاک A بیخ ته ورسیږي، وټاکئ. د بلاک A اندازه مه حسابوی.

15-54. پوښتنه 15-53 حل کړی، کې که د بلاک A او B ترمنځ د متحرک اصتکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ وي. د بلاک B او افقي سطحې ترمنځ اصتکاک په حساب کې مه نیسی.



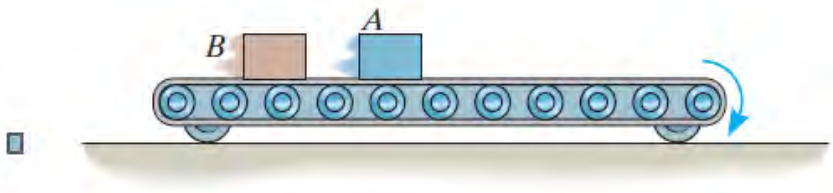
پ 15-53/54

15-55 یو بلاک A ، چې کتله یې 20 kg ده، د بنودل شوي موقعیت څخه له دریدلی حالت نه خوشي کیږي او په بنوی مایل رمپ بنکته حرکت کوی. کله چې د رمپ پای ته رسیږي، په افقي لور باندې 10 کیلوګرامه کړاچی ته بنویږي. د بلاک او کړاچی ترمنځ د متحرک اصتکاک ضریب $\mu_k = 0.6$ دی. که h=2m وی، د کړاچی ورستنی سرعت پیدا کړی کله چې بلاک په کړاچی ودریږی. همدارنګه، د بلاک موقعیت s وټاکی کله چې په کړاچی ودریږی.



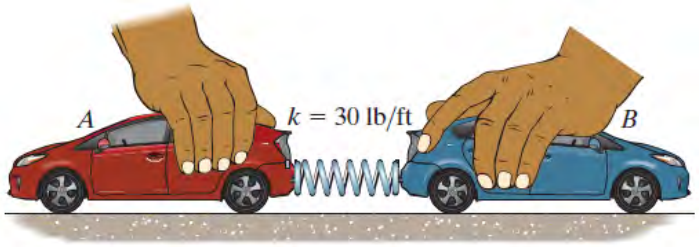
پ 15-55

15-56. دوه بکسونه A او B ، چې هر یویی 160 lb تول لری د 500 lb کانویئر باندې پراته دی چې د ځمکې په سر په آزاد ډول رغړی. که د کانویئر تسمه ددریدلی حالت څخه په 3 ft/s تیزوالی سره روانه وی، د کانویئر وروستی تیزوالی وټاکئ که (a) بکسونه د یو بل پر سر نه وي اینبودل شوي او A اول لویږي بیا B لویږی، او (b) A د B په سر اینبودل شویی او دواړه یوځای لویږی.



پ 15-56

15-57. دوه د ساعت تیرۍ موټرونه A او B د 0.4 lb او 0.6 lb تول په ترتیب سره لري. یو فنر چې د 30 lb/ft سختی لري د یو موټر سره ټرل شوی دی او دواړه موټرونه په زور سره نیږدی شوی چې فنر 0.2 ft غونج شوی دی. د دې موټرونو سرعت وټاکئ وروسته له دې چې د دریدلی حالت نه خوشی شی.

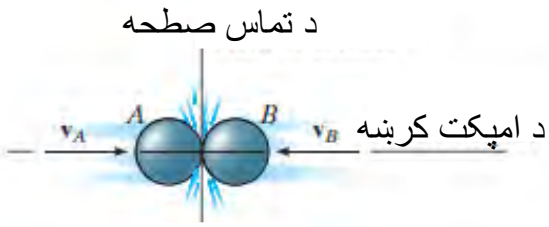


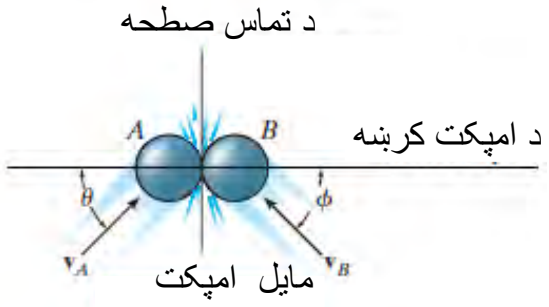
پ 15-57

15.4 ضربه یا امپکت (IMPACT)

ضربه هغه وخت پیښیږي کله چې دوه جسمونه د لنډ وخت لپاره د یو له بل سره ټکر وکړي، چې د پام وړ (امپلسي) قواوی په یو بل باندې واردوي. د یوه میخ په سر د سوټک وار یا د ګالف کلب وار په توپ باندې د ضربوې یا امپکټ بارونو عام مثالونه دي.

په عمومي ډول، دوه ډوله امپکتونه شتون لري. ***مرکزي امپکت*** (Central Impact) هغه وخت رامنځته کیږي کله چې د دوو ټکر کوونکو ذرو د کتلو مرکزونو د حرکت لورۍ د ټکر په کرښه کې وي، چې د ذرو د کتلو د مرکزونو څخه تیریږي. دا کرښه د تماس له سطحی سره عمودي وي، لکه څنګه چې په انځور 15-13a کی ښودل شوی. کله چې د یوه یا دواړو ذرو حرکت دامپکت له کرښې سره زاویه جوړوي، لکه څنګه چې په انځور 15-13b کې ښودل شوی، ټکر ته "اوبلیک یا **مایل**" (oblique impact) امپکت ویل کیږي.



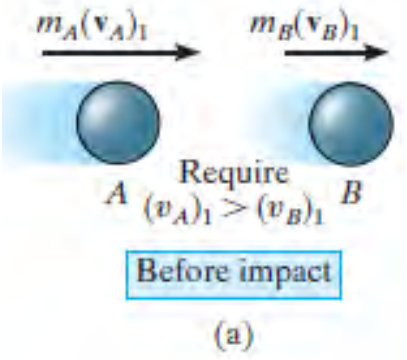


مرکزي امپکت (Central Impact) .

د ټکر د میخانیک تحلیل کولو د طریقې ښودلو په موخه، د

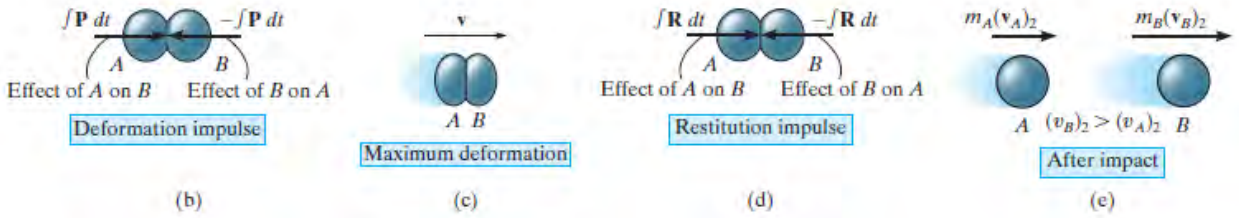
دوو ذرو A او B مرکزي ټکر په انځور 15-14 کې ښودل شوی دی.

- ذرات هغه لومړني حرکتونه لري چې په انځور 15-14a کې ښودل شوي دي. که چیرې $(v_A)_1 > (v_B)_1$، ټکر به په پای کې رامنځته شي .



- د ټکر په جریان کې باید ذرو ته د بیځایه کیدونکیو یا غیر سخت جسمونو په توګه فکر وشي. ذرې به دبیځایه کیدو یوه دوره تجربه کړي، داسې چې دوی یو پر بل برابر خو مخالف بیځایه کیدونکی امپولس $\int P\,dt$ واردوي، لکه څنګه چې په انځور 15-14b کې ښودل شوي.
- یواځې د اعظمي بیځایه کیدو په شیبه کې به دواړې ذرې د ګډ سرعت v سره حرکت کوي، ځکه چې د دوی نسبي حرکت صفر دی، لکه څنګه چې په انځور 15-14cکې ښودل شوي.
- وروسته د بېرته د عادي کېدو یوه دوره رامنځته کېږي، چې پدې حالت کې به ذرې خپل اصلي شکل ته بېرته وګرځي یا به په دایمي ډول بیځایه کیدنه کې پاتې شي. برابر خومخالف د بېرته عادي کیدو امپلس (restitution impulse) $\int R\,dt$ ذرې یو له بل څخه جلا کوي، لکه څنګه چې په انځور 15-14dکې ښودل شوي. په حقیقت کې، د هر دوه جسمونو فزیکي ځانګړتیاوې داسې دي چې د بدلېدو امپولس به تل د بېرته عادي کیدو امپولس څخه لوی وي، یعنې $\int P\,dt > \int R\,dt$.
- له جلا کیدو وروسته، ذرې به وروستي حرکتونه ولري، لکه څنګه چې په انځور 15-14e کې ښودل شوي، چیرې چې $(v_B)_2 > (v_A)_2$

په



ډیرو پوښتنو کې به د ذرولومړني سرعتونه معلوم وي، او دا به اړین وي چې د دوی وروستي سرعتونه، $(v_A)_2$او $(v_B)_2$ وټاکل شي. د دې کار لپاره، موږ دوو معادلو ته اړتیا لرو چې دغه مجهولونه په کې شامل وي. لومړی معادله د دوو ذرو سیسټمونو لپاره د مومنتم د ساتنې اړتیا لري، ځکه چې د ټکر په جریان کې د بدلېدو او بېرته عادي کیدو داخلي امپلسونه حذف کیږي. له همدې امله، لکه څنګه چې په انځور 15-14aاو انځور 15-14e کې ښودل شوي، موږ اړتیا لرو :

$$(\pm) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \qquad (15\text{–}10)$$

د دویمې معادلې ترلاسه کولو لپاره، موږ به د امپلس او مومنتم اصول په هر ذره تطبیق کړو. د مثال په توګه، د بیځایه کیدو حالت په جریان کې د ذرې *A* لپاره، لکه څنګه چې په انځورونو 15-14a، 15-14b، او 15-14cکې ښودل شوي، موږ لرو:

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 - \int P\,dt = m_A v$$

د بېرته عادي کیدو حالت لپاره انځور15-14c, 15-14d او 15-14e

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A v - \int R\,dt = m_A(v_A)_2$$

که موږ د بېرته عادي کیدو ضریب *e* د بېرته عادي کیدو امپلس او د بیځایه کیدو امپلس ترمنځ د تناسب په توګه تعریف کړو، نو له پورته معادلو څخه، د *A* ذرې لپاره دا ارزښت داسې دی:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

په ورته توګه، موږ کولی شو د *e* ضریب د *B* ذرې په پام کې نیولو سره جوړ کړو، لکه څنګه چې په انځور 15-14 کې ښودل شوي. دا نتیجه ورکوي:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

که نامعلوم *v* له پورتنیو دوو معادلو حذف شي د بیرته اعاده کیدو ضریب کیدی شي چې د زړو له لمړي او آخرۍ سرعتونو سره په لاندې ډول وښودل شي

$$(\pm) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad (15\text{–}11)$$

که د e لپاره یو ارزښت ټاکل شوی وي، نو معادلې 15-10 او 15-11 په یوه وخت کې حل کیدی شي ترڅو $(v_A)_2$ او $(v_B)_2$ ترلاسه شي. په هرصورت، دا مهمه ده چې د نښې د اصول له مخې په احتیاط سره مثبت لور وټاکل شي ترڅو د v_A او v_B لپاره د مثبت لورپه هکله تری ګټه واخستل شی، او بیا دا جهتونه په دوامداره توګه د دواړو معادلو لیکلو پر مهال وکارول شي. د انځور 15-14 په حالت کې، موږ د A او B حرکتونو ته په اشاري کولو کې مو مثبت نښې خوا ته ټاکلې دی. له دې املې، که چېرې د $(vA)_2$ یا $(vB)_2$ له حل څخه منفي ارزښت ترلاسه شي، دا ښیي چې حرکت کین لوري ته دی .



د تولید شوي ټینس توپ کیفیت د هغه د بیرته راګرځیدلو لوړوالي له مخې ارزول کیږي، چې دا د هغه د بیا ستنیدو ضریب سره تړاو لري. د مایل ټکر میکانیک په کارولو سره، انجنیران کولی شي یوه بیلګه وسیله ډیزاین کړي ترڅو د تولید لاین څخه نامناسب ټینس توپونه لرې کړي.

د بېرته عادي کیدو ضریب (Coefficient of Restitution):

لکه څنګه چې په انځورونو 15–14a او 15–14e کې ښودل شوي، معادله 15–11 څرګندوي چې e د ذراتو د جلا کیدو نسبي سرعت $(v_B)_2 - (v_A)_2$ او د ټکر مخکې د نږدې کیدو نسبي سرعت $(v_A)_1 - (v_B)_1$ ترمنځ د تناسب په توګه ښودلشوی. له دې املې، موږ کولی شو معادله 15–11 هم داسې ولیکو:

$$e = \frac{\text{rel. vel. after impact}}{\text{rel. vel. before impact}} \qquad (15\text{–}12)$$

د دې نسبي سرعتونو اندازه کول په تجربوي ډول سره، موندل شوي چې e په پام وړ ډول د ټکر په سرعت او همدارنګه د ټکر کوونکیو جسمونو د اندازې او شکل سره توپیر کوي. د دې دلیلونو له مخې، د بېرته عادي کیدو ضریب یوازې هغه وخت د باور وړ دی کله چې له هغه معلوماتو سره وکارول شي چې د e د اندازه کولو په وخت کې شرایطو ته نږدې وي. په عمومي ډول، e یوه ارزښت لري چې د صفر او یوه ترمنځ وي، او باید د دې دوو حدونو فزیکي معنی درک شي.

الاستیک امپکت (Elastic Impact) (e = 1) :

که د دوو ذرو ترمنځ امپکت په بشپړ ډول الاستیک وي، نو د بیځایه کیدو امپولس $\int \mathbf{P}\,dt$ د بېرته عادي کیدو امپولس $\int \mathbf{R}\,dt$ سره برابر او مخالف وي. که څه هم په حقیقت کې دا هیڅکله نشي ترلاسه کیدی، د الاستیک ټکر لپاره $e = 1$ دی.

پلاستیک امپکت (Plastic Impact) (e = 0) :

امپکت غیر الاستیک یا پلاستیک ګڼل کیږي کله چې $e = 0$ وي. په دې حالت کې هیڅ بېرته عادي کیدو امپولس نه وي $\int \mathbf{R}\,dt = \mathbf{0}$، نو له امپکت وروسته دواړې ذرې د یو بل سره نیښلي او په ګډه سرعت سره حرکت کوي.

له پورته تحلیل څخه باید څرګنده وي چې د کار او انرژۍ اصول د امپکت مسایلو تحلیل لپاره نه شي کارول کېدای، ځکه چې دا ناشونې ده چې د امپکت په جریان کې د بیځایه کیدو او بېرته عادي کیدو داخلي قواوې څنګه بدلیږي یا ځای په ځای کیږي. خو، د ذراتو د امپکت مخکې او وروسته سرعتونو په پوهیدو سره، د امپکت په جریان کې د انرژۍ له لاسه ورکول د ذراتو د حرکي انرژۍ د توپیر پر بنسټ محاسبه کیدی شي. دا د انرژۍ له لاسه ورکول $\Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 - \Sigma T_1$ هغه وخت پیښیږي کله چې د امپکت په جریان کې د ذراتو ځینې لومړنۍ حرکي انرژي په موادو کې محلي بیځایه کیدو ته بدلیږي. په ځانګړې توګه، که امپکت په بشپړ ډول الاستیکی وي، نو په امپکت کې هیڅ انرژي نه ضایع کیږي؛ خو که ټکر پلاستیکی وي، د امپکت په جریان کې د انرژۍ له لاسه ورکول په اعظمي حد کې وي.

د تحلیل کړنلاره د مرکزي امپکت لپاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

په ډیرو حالتو کې، د دوو بنویو ذرو وروستي سرعتونه هغه وخت ټاکل کیږي کله چې دوی د مستقیم مرکزي امپکت تابع شي. که د بېرته عادي کیدو ضریب، د هر ذرې کتله، او د هر ذرې لومړنۍ سرعت د امپکت څخه مخکې معلوم وي، نوحل د پوښتنو د لاندې دوو معادلو څخه ترلاسه شي:

- د مومنتم ساتنه د ذرو د سیسټم لپاره تطبیق کیږي:

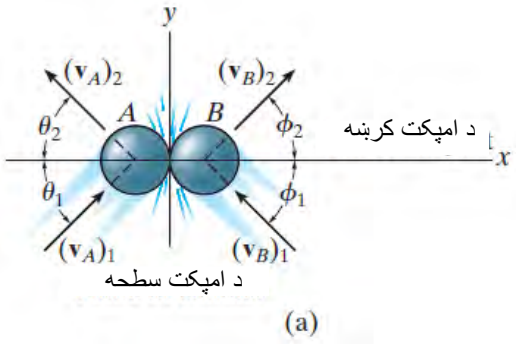
$$\Sigma m v_1 = \Sigma m v_2$$

- د بېرته عادي کیدو ضریب

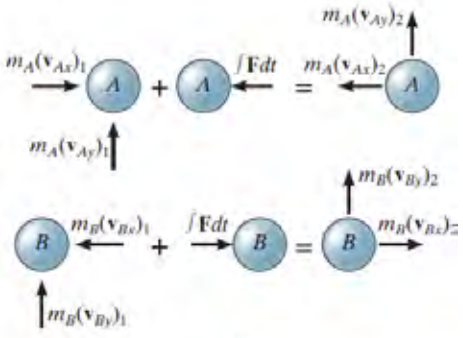
$$e = [(v_B)_2 - (v_A)_2] / [(v_A)_1 - (v_B)_1]$$

د ټکر کربنې په اوږدو کې د ذرو نسبي سرعتونو د ټکر څخه مخکې او وروسته سره تړي.

کله چې دا دوی معادلې کارول کیږي، د نامعلوم سرعت لوري اټکل کیدی شي. که حل یوه منفي کچه ورکړي، نو دا څرګندوي چې سرعت په مخالف لوري کې عمل کوي.



(a)



(b)

مایل امپکت (Oblique Impact) :

کله چې د دوو ښویو ذرو تر منځ امپکت واقع شي، ذری به له یو بل څخه په داسې سرعتونو جلا کیږي چې هم یې لوري او هم یې مقدارونه مجهول وي. که لومړني سرعتونه معلوم وي، نو په پوښتنه کې څلور مجهوله شتون لري. دا مجهولونه یا $(v_A)_2$، $(v_B)_2$، θ_2، او ϕ_2 دي، لکه څنګه چې په انځور 15-15a کې ښودل شوي، یا د وروستي سرعتونو x او y اجزاوې دي، لکه څنګه چې په انځور 15-15b کې ښودل شوي.

د مایل امپکت د تحلیل تګلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS (OBLIQUE IMPACT)

که *y* محور د تماس په سطحه کې او *x* محور د امپکت کربنې سره سم وټاکل شي، نو د بدلېدو او بېرته عادي کیدو امپلسي قواوی به یوازې د *x* لوري په اوږدو کې عمل کوي، لکه څنګه چې په انځور15–15 کې ښودل شوي. د دې سره سم، د سرعت او مومنتم ویکتورونه د *x* او *y* محورونو په اوږدو کې تجزیه شي، او بیا د څلورو مجهولو د موندلو لپاره څلور خپلواکې سکلیر معادلې ولیکل شی، تر څو $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})2$، $(v_{Bx})_2$ او $(v_{By})_2$ وټاکل شي.

. د امپکت په کربنه *x* محور کې د سیستم مومنتم ساتل شوي دي،

نو $\Sigma m (v_x)_1 = \Sigma m (v_x)_2$.

. د بېرته عادي کیدو ضریب

$$e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2] / [(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$$

د ذراتو نسبي سرعت اجزاوې د امپکت کربنی، x محور ، په اوږدو کې سره تړي.

. که دا دوی معادلې په یوه وخت کې حل شي، نو موږ $(v_{Ax})_2$او $(v_{Bx})_2$ ترلاسه کوو.

. د ذره *A* مومنتم د *y* محور په اوږدو کې ساتل شوي دي ، چې د امپکت کربنې سره عمودي دی، ځکه چې په دې لوري کې په *A* ذره اندې هیڅ امپلس پدی لورعمل نه کوي. له دې امله:

$$m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2 \quad \text{یا} \quad (v_{Ay})_1 = (v_{Ay})_2$$

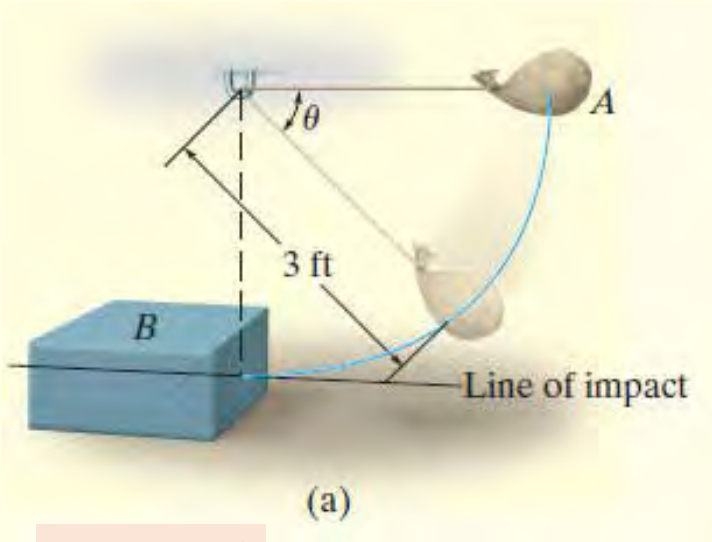
. د B ذری مومنتم هم د *y* محور په اوږدو کې ساتل کیږي، چې د امپکت کربنې سره عمودي دی، ځکه چې په دې لوري کې په ذره *B* باندې هیڅ امپلس عمل نه کوي. له دې امله:

$$(v_{By})_1 = (v_{By})_2$$

د دې څلورو معادلو پلي کول په مثال 15.11 کې ښودل شوي دي.

مثالونه

مثال 15.9



انځور 15-16

کڅوړه A چې تول يې 6 پونډه دی، له دريدلی حالت څخه په $q = 0°$ کې خوشې کيږي، لکه څنګه چې په انځور 15-16a کې ښودل شوي. وروسته له دې چې تر $q = 90°$ پورې راښکته شي، دا په 18 پونډه بکس B باندې امپکت کوي. که د کڅوړې او بکس ترمنځ د ببرته عادي کيدو ضريب $e = 0.5$ وي، د امپکت وروسته د کڅوړې او بکس سرعتونه معلوم کړئ. د امپکت په جريان کې د انرژۍ له لاسه ورکول څومره دي؟

حل:

دا پوښتنه مرکزي امپکت پکې شاملوي. ولې؟ له دې مخکې چې د امپکت ميخانيک تحليل کړو، لومړی دا اړينه ده چې د کڅوړې سرعت تر لاسه کړو مخکې له دې چې دا په بکس باندې امپکت وکړي.

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy):

د $q = 0°$ ډيتام په په حالت کې ، لکه څنګه چې په انځور 15-16b کې ښودل شوي:

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 6\text{ lb}(3\text{ ft}); \qquad (v_A)_1 = 13.90\text{ ft/s}$$

دمومنتم ساتنه (Conservation of Momentum) :

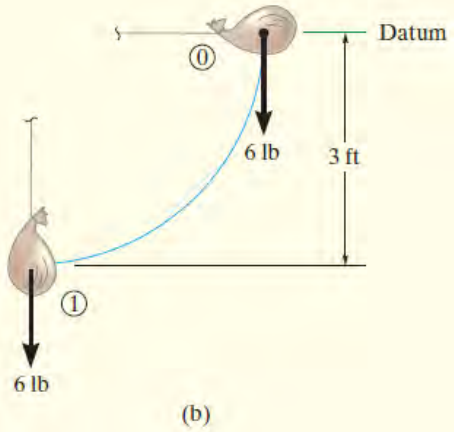
د امپکت څخه وروسته به موږ فرض کړو چې دواړه A او B کيڼ لور ته حرکت کوي. د مومنتم ساتنې اصول د سيستم لپاره تطبيق کوو، لکه څنګه چې په انځور 15-16cکې ښودل شوي، موږ لرو

:

$$(\pm) \qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(13.90\text{ ft/s}) = \left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_B)_2 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13.90 - 3(v_B)_2 \qquad (1)$$



د بېرته عادي کيدو ضريب (Coefficient of Restitution):

د دې پوهيدلو سره چې د امپکت وروسته د جلا کيدو لپاره $(v_B)_2 > (v_A)_2$ بايد شتون ولري، لکه څنګه چې په انځور 15-16c کې ښودل شوي، مونږ لرو:

$$(\pm) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13.90\text{ ft/s} - 0}$$

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6.950 \qquad (2)$$

معادلعه 1 او 2 يو ځای حل کوو

$$(v_A)_2 = -1.74\text{ ft/s} = 1.74\text{ ft/s} \rightarrow \quad \text{and} \quad (v_B)_2 = 5.21\text{ ft/s} \leftarrow \quad \textit{Ans}$$

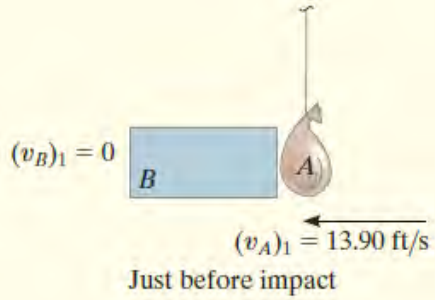
د انرژی له لاسه ورکول (Loss of Energy):

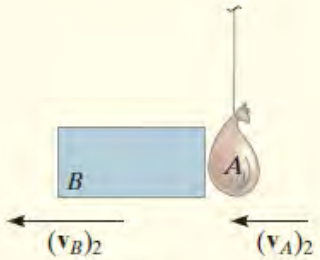
د کار او انرژی اصول د کڅوړې او بکس لپاره له امپکت مخکې او له امپکت وروسته پلي کولو سره، مونږ لرو

$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(5.21\text{ ft/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.74\text{ ft/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(13.9\text{ ft/s})^2\right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10.1\text{ ft} \cdot \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$



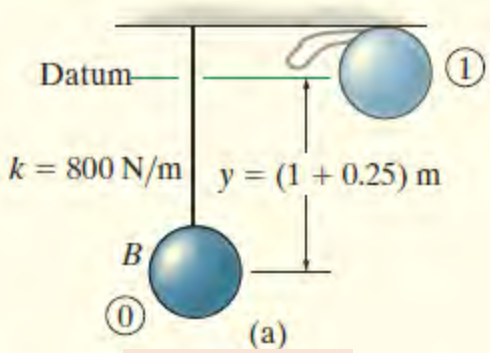


یادونه : د انرژۍ له لاسه ورکول د امپکت په جریان کې د غیر الاستیک بیځایه کیدو له امله رامنځته کیږي

مثال 15.10

توپ B چې په انځور 15-17a کې ښودل شوی دی، 1.5 کیلوګرامه کتله لري او له پیشتول څخه د 1 متره اوږد الاستیک تار پواسطه ځوړند دی. که تار ښکته 0.25 متره وغځول شي او توپ د دریدلی حالت څخه خوشې شي، معلوم کړي تار څومره نور غځول کیږي وروسته له دې چې توپ له پیشتول سره امپکت وکړي او ښکته ولویږي.

انځور 15-16



انځور 15-17

د تار سختی $k = 800$ N/m ده، او د توپ او پیشتول ترمنځ د ښړته اعادي کیدو ضریب $e = 0.8$ دی. توپ د پیشتول سره مرکزي امپکت کوي .

حل:

لومړی، موږ باید د انرژۍ طریقو په کارولو سره د توپ سرعت ترلاسه کړو مخکې له دې چې د پیشتول سره امپکت وکړي ، بیا د توپ او پیشتول ترمنځ د امپلس او مومنتم په پام کې ونیسو، او په پای کې بیا د انرژۍ طریقو څخه کار واخلو ترڅو د تار غځیدل معلوم کړو.

د انرژی ساتنه (Conservation of Energy):

د ډیتام سره سم چې څنګه په انځور 15-17a کې ښودل شوي، پوهیږو چې په لومړي سر کې :
$y = y_0 = (1 + 0.25)\ m = 1.25\ m$ مونږ لرو:

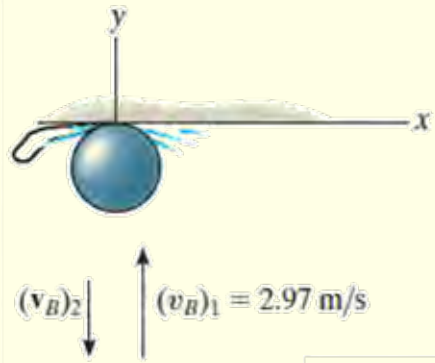
$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$
$$0 - 1.5(9.81)\text{N}(1.25\ \text{m}) + \tfrac{1}{2}(800\ \text{N/m})(0.25\ \text{m})^2 = \tfrac{1}{2}(1.5\ \text{kg})(v_B)_1^2$$
$$(v_B)_1 = 2.968\ \text{m/s}\ \uparrow$$

د توپ او پیشتول ترمنځ تعامل به اوس د امپکت اصولو* په کارولو سره وڅیړو. څرنګه چې د پیشتول یو نامعلومه برخه کتله په امپکت کې شامله ده، د توپ- پیشتول سیستم لپاره د مومنتم ساتنه نه شي لیکل کیدی. د پیشتول دې برخې "سرعت" صفر دی ځکه چې فرض کیږي چې دا (یا ځمکه) د ټکر مخکې او وروسته په دریدلی حالت کې پاتې کیږي.

د بېرته عادي کیدو ضریب (Coefficient of Restitution) : انځور 15-17b و ګوري

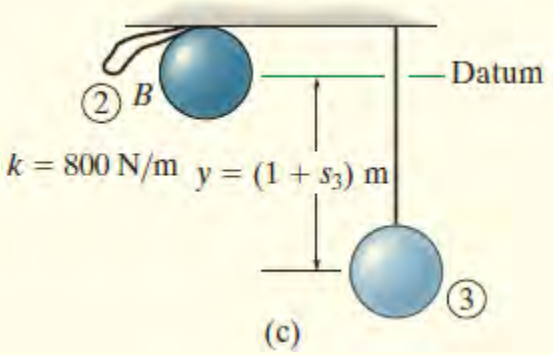
$$(+\uparrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.968\ \text{m/s}}$$
$$(v_B)_2 = -2.374\ \text{m/s} = 2.374\ \text{m/s}\ \downarrow$$

د انرژی ساتنه (Conservation of Energy): د تار اعظمي غځیدل s_3 اندازه د انرژی ساتنې معادلې په بیا پلي کولو سره ترلاسه کیدی شي، چې د توپ لپاره د امپکت وروسته کارول کیږي. فرض کوو چې $y = y_3 = (1 + s_3)$m (مترہ)دی، لکه څنګه چې په انځور 15-17cکې ښودل شوي، بیا



(b)

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \tfrac{1}{2}ks_3^2$$
$$\tfrac{1}{2}(1.5\ \text{kg})(2.37\ \text{m/s})^2 = 0 - 9.81(1.5)\ \text{N}(1\ \text{m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\ \text{N/m})s_3^2$$
$$400s_3^2 - 14.715s_3 - 18.94 = 0$$



انځور 15-17

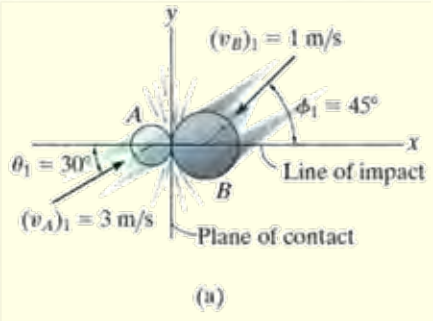
دا دوهمه درجه معادله د مثبت جذر حل کولو نه، s3=0.237 :

$$s_3 = 0.237\ \text{m} = 237\ \text{mm} \qquad \textit{Ans.}$$

* د توپ وزن د غیر امپولسی قوی په توګه ګڼل کیږي.

مثال 15.11

دوه ښوی ډیسکونه A او B ، چې په ترتیب سره 1 کیلوګرام او 2 کیلوګرام کتلی لري، په افقي سطحه ښوییږی او د یو بل سره ټکر کوی چې سرعتونو یې په انځور 15-18a کې ښودل شوي. که چیرې د ډیسکونو لپاره د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.75$ وي، نو د امپکت وروسته د هر ډیسک لپاره د وروستي سرعت x او y اجزاوی معلومې کړئ.



انځور 15-18

حل

دا پوښتنه زاویوی یا ابلیک امپکت ته اړه لري. ولې؟ د دې حل کولو لپاره، مونږ د x او y محورونه دامپکت کرښې په اوږدو او د تماس سطحې سره په ترتیب ټاکلي دي، انځور 15-18a.

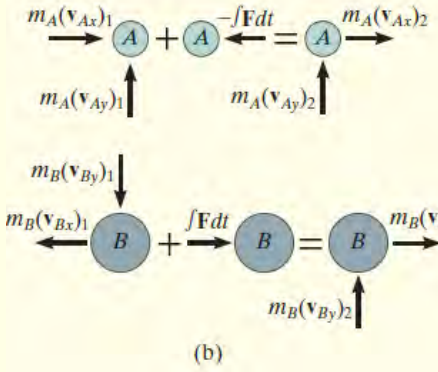
هر ابتدایي سرعت د x او y اجزاوی لرې. مونږ لرو

$$(v_{Ax})_1 = 3\cos 30° = 2.598\ \text{m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3\sin 30° = 1.50\ \text{m/s}$$
$$(v_{Bx})_1 = -1\cos 45° = -0.7071\ \text{m/s} \qquad (v_{By})_1 = -1\sin 45° = -0.7071\ \text{m/s}$$

د امپکت وروسته څلور مجهول سرعتونو اجزاوی فرض کوو چې په مثبتو لوریو عمل کوي، انځور 15-18b وګورئ. له دې امله چې امپکت په x لور کې واقع کیږي (د امپکت کربنه)، د دواړو ډیسکونو لپاره د مومنتم د ساتنې اصول په دې لوری کارول کیدی شي. ولې؟

د "x" مومنتم ساتنه (Conservation of "x" Momentum). د حرکت د ډایګرام په پام کې نیولو سره، مورږ لرو

$$(\pm\rightarrow) \qquad m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$
$$1\ \text{kg}(2.598\ \text{m/s}) + 2\ \text{kg}(-0.707\ \text{m/s}) = 1\ \text{kg}(v_{Ax})_2 + 2\ \text{kg}(v_{Bx})_2$$
$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1.184 \qquad (1)$$



(b)

انځور 15-18

د بیرته راستنیدو ضریب (x) (Coefficient of Restitution (x))

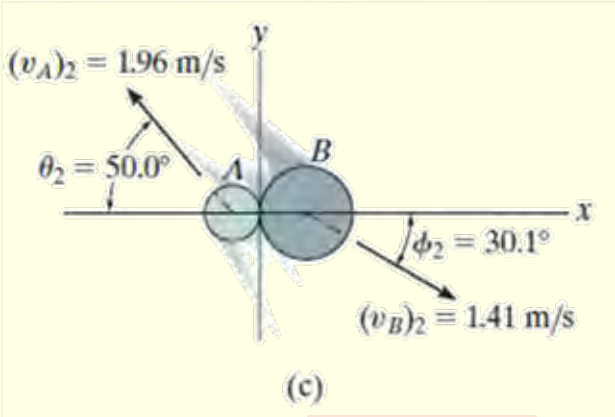
$$(\pm\rightarrow) \qquad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1};\ 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.598\ \text{m/s} - (-0.7071\ \text{m/s})}$$
$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2.482 \qquad (2)$$

معادله 1 او 2 د $(v_{Ax})_2$ او $(v_{Bx})_2$ لپاره حل کوو او په لاس راځی

$$(v_{Ax})_2 = -1.26\ \text{m/s} = 1.26\ \text{m/s}\leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1.22\ \text{m/s}\rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

د "y" مومنتم ساتنه (Conservation of "y" Momentum). د هر ډیسک مومنتم په y لور کې (د تماس سطحه) ساتل کیږي، څرنګه چې ډیسکونه بنوی دی او له دې امله په دې لور کې هیڅ د اصطکاک امپلس عمل نه کوي. د انځور 15-18b له مخې

$$(+\uparrow)\ m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; \qquad (v_{Ay})_2 = 1.50\ \text{m/s}\uparrow \qquad \textit{Ans.}$$
$$(+\uparrow)\ m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2;\ (v_{By})_2 = -0.707\ \text{m/s} = 0.707\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$



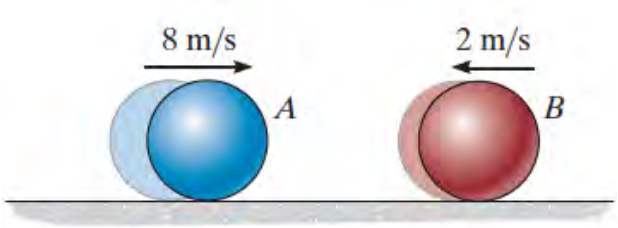
انځور 15-18

یادونه: وښایاست چې کله د سرعت اجزاوي د وکتور په توګه جمع شي، نو هغه پایلې ترلاسه کیږي چې د انځور 15-18c کې ښودل شوي دي.

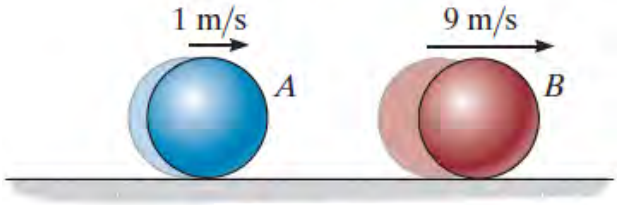
بنسټیز پوښتنې

FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

ب 15-13. د توپونو A او B ترمنځ د بیرته عادی کیدو ضریب e وټاکئ. د تصادم څخه مخکې او وروسته د توپونو A او B سرعتونه په لاندې انځور کې ښودل شوي دي.



د تصادم مخ کې



د تصادم وروسته

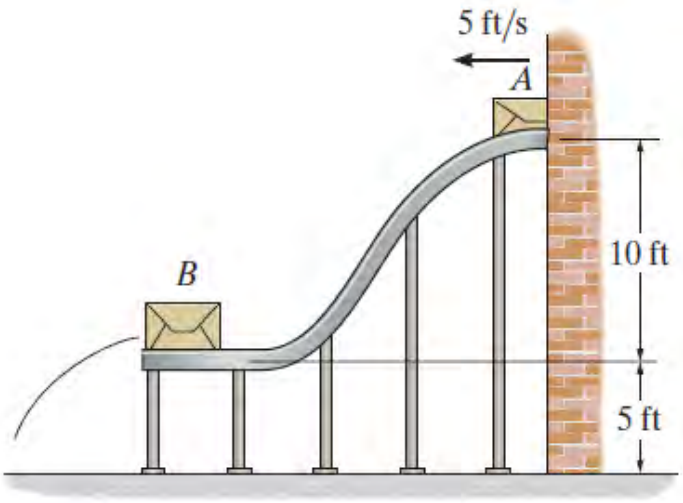
ب 15-13

ب 15-14. د 15-میګا ګرامه ټانک موټر A او د 25- میګا ګرامه بار وړونکی موټر B د یو بلپه مقابل کی په ښودل شوي سرعتونو سره حرکت کوي. که د بمپرونو ترمنځ د بیرته عادي کیدو ضریب $e = 0.6$ وي، تصادم وروسته د هر موټر سرعت وټاکئ.



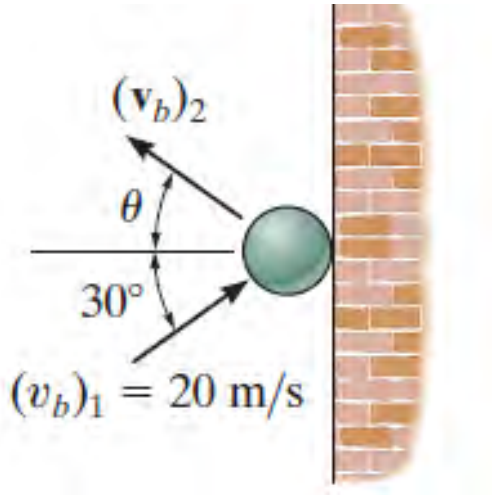
ب 15-14

ب 15-15. د 30 پونډه کڅوړه A په 5 فوټ په ثانیه تیزوالی سره یوه ښوی رمپ ته ننوځي. کله چې دا په رمپ ښکته ښویږي، په یوه 80 پونډه کڅوړی B ، چې په پیل کې په دریدلی حالت کی وی تصادم کوي. که د A او B ترمنځ د بیرته عادی کیدو ضریب $e = 0.6$ وي، له تصادم وروسته د B سرعت وټاکئ.



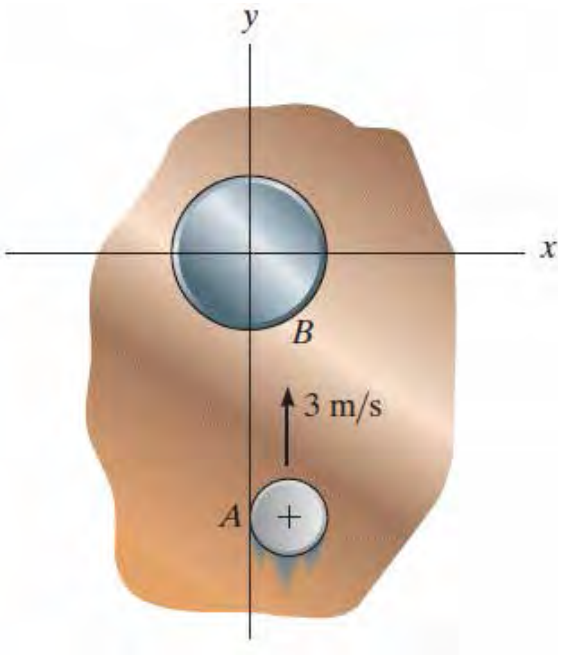
ب 15-15

ب 15-16. یوتوپ په 20 m/s سرعت سره په دیوال چې ښویه سطحه لري لګیږي. که د توپ او دیوال ترمنځ د بیرته ستنیدو ضریب $e = 0.75$ وي، له لګیدو وروسته د توپ سرعت وټاکئ.



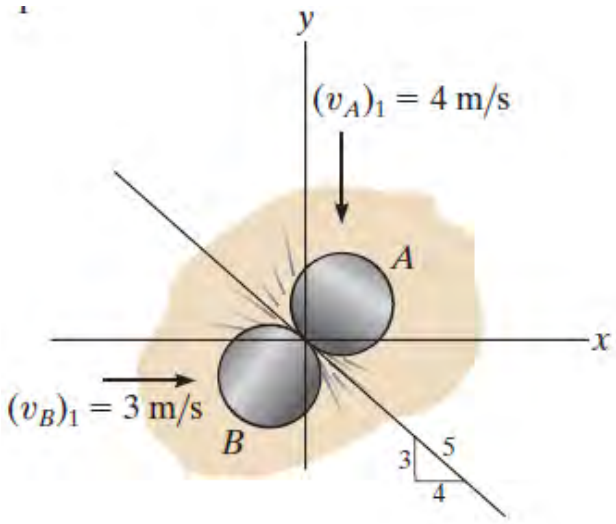
ب 15-16

ب 15-17. د ډیسک A کتله 2 کیلوګرامه ده او په بنویه افقي سطح باندې په 3 m/s سرعت سره بنویږي. ډیسک B کوم چې په پیل کې په دریدلی حالت کی دی 11 کیلوګرامه کتله لري. که له تصادم وروسته A موازي په مثبت x محور 1 m/s سرعت ولري، له تصادم وروسته د B تیزوالی وټاکئ.



ب 15-17

ب 15-18. دواړه ډیسکونه A او B هر یو 1 کیلوګرامه کتله لري او د تصادم نه مخکې په لاندی انځور کی بنودل شوي سرعتونه لري. که د بیرته ستنیدوضریب يې $e = 0.5$ وي،له تصادم وروسته د دوی تیزوالی وټاکئ.

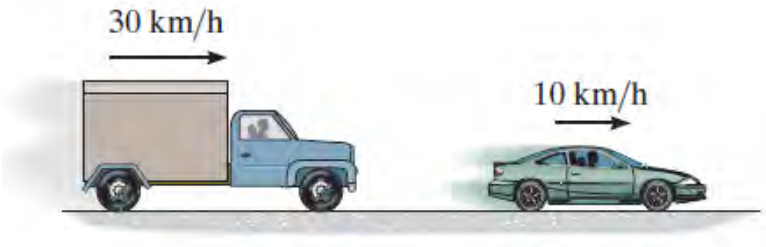


ب 15-18

PROBLEMS پوښتنې

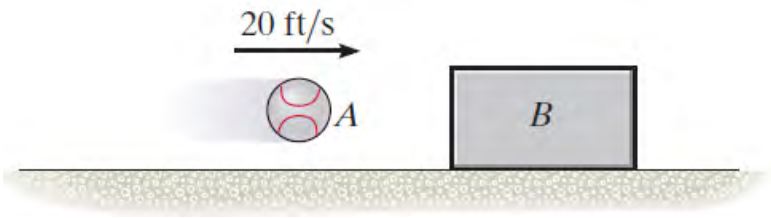
15-58. د ډیسک A کتله 250 ګرامه ده او په پیل کې په بنویه افقي سطح باندې په $(v_A)_1 = 2$ m/s سرعت سره بنویږي. دا د ډیسک B سره ، چې 175 ګرامه کتله لري او په پیل کې په ځای دریدلی دی، مستقیم تصادم کوي. که چیرې دواړه ډیسکونه په یو اندازه وي او تصادم په بشپړ ډول ایلستیک وي($e = 1$) ، له تصادم وروسته د هر ډیسک سرعت وټاکئ. وښیئ چې د تصادم څخه مخکې او وروسته د ډیسکونو کینټیک انرژي یو شان ده.

15-59. د 5 میګا ګرامه ټرک او 2 میګا کرامه موټر د بنودل شوي آزاد حرکت سرعتونو سره له ټکر څخه مخکې حرکت کوي. د ټکر وروسته، موټر د ټرک په نسبت په بنې لور په 15 کیلو متره/ساعت سرعت حرکت کړي. د ټرک او موټر ترمنځ د بیارستنیدو ضریب، او دتصادم له امله ضایعه انرژي، وټاکئ.



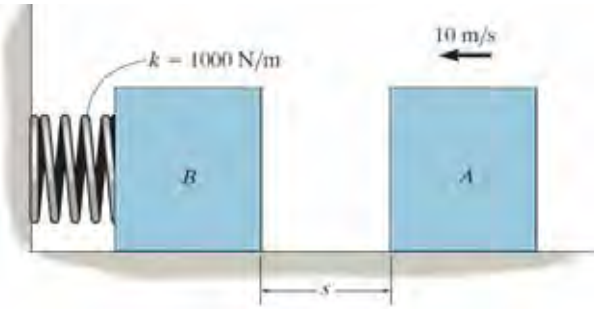
پ 15-59

15-60*. دا لاندی 1 پونډه توپ A داسې غورځول شوي چې د 10 پونډه بلاک B سره یې تصادم کړي، او هغه په افقي ډول په 20 ft/s سرعت سره حرکت کړی. که چیرې تصادم په 0.02 ثانیه کې ترسره شي د A او B ترمنځ په اوسط ډول د عمودي قوی مقدار وټاکئ. د A او B ترمنځ د بیرته ستنیدو ضریب $e = 0.6$ دی.



پ 15-60

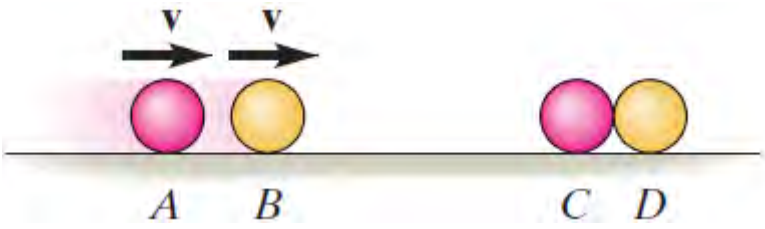
15-61. د 15 کیلوګرامه بلاک A، v =10 m/s سرعت لرې کله چې هغه د 10 کیلوګرامه بلاک B څخه، s = 4 متره، لرې وي. که د نه اوږد شوی فنر سختوالی k =1000 N/m وي، د امپکت وروسته د فنر اعظمي غونجوالی وټاکی، e = 0.6 . دبلاک A لپاره $\underline{m}_k$ = 0.3. وکاروي. فرض کړئ چې بلاک B ښوی دی.



پ 15-61

15-62. څلور ښوی توپونه هر یو یې m کتله لري . که A او B په سرعت v سره مخکې په حرکت کی وي او د C سره امپکت وکړي، تشریح کړئ چې ولې د امپکت وروسته C او D هر یو په v سرعت سره حرکت کړي. ولې D په 2vسرعت سره حرکت نه کوي؟ ټکر ایلستیکی دی، او e = 1 . د هر توپ اندازه له پامه وغورځوئ .

15-63. څلور توپونه هر یو یې m کتله لري . که A او B په سرعت v سره مخکې په حرکت کی وي او د C سره امپکت وکړي ، د لومړیو دریو امپکتونو وروسته د هر توپ سرعت وټاکئ. د هر توپ ترمنځ e = 0.5 واکاروي.



پ 15-62/63

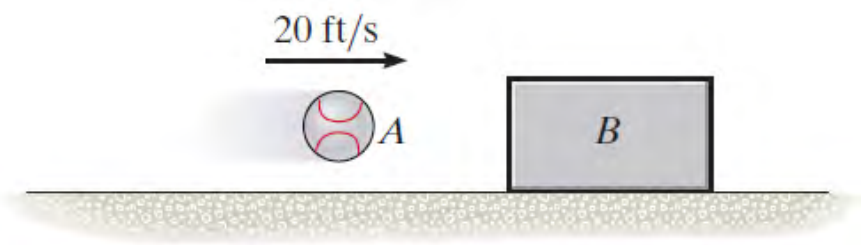
*15-64. د توپ A کتله 3 کیلوګرامه ده او په 8 m/s سرعت سره حرکت کوي، کله چې د بال B سره، چې 2 کیلوګرامه کتله لري او په 4 m/s سرعت سره حرکت کوي، مستقیم امپکت وکړي. که e = 0.7 وي، د هر توپ سرعت د امپکت وروسته وټاکئ. د توپونو اندازه له پامه وغورځوئ.



پ 15-64

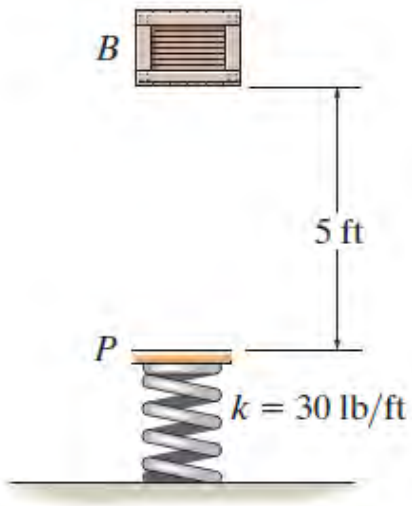
15-65. یو پونډ توپ A داسې غورځول شوي چې د 10 پونډه بلاک B سره یې امپکت کړي، او دی په افقي ډول په 20 ft/s سرعت سره حرکت کوي. که د A او B ترمنځ د بیاراستنیدو ضریب $e = 0.6$ وي، او د سطحی او بلاک ترمنځ د کنیتیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.4$ وي، معلوم کړي چې بلاک B له ښوییدلو وروسته به څه وخت ودریږي .

15-66. یو پونډ توپ A داسې غورځول شوي چې د 10 پونډه بلاک B سره یې امپکت کړي، او دی په افقي ډول په 20 ft/s سرعت سره حرکت کوي. که د A او B ترمنځ د بیاراستنیدو ضریب $e = 0.6$ وي، اود سطحی اوبلاک ترمنځ د کنیتیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.4$ وي، په سطحه باندې د بلاک B د ښوییدلو فاصله وټاکئ تر څو چې دی ودریږي.



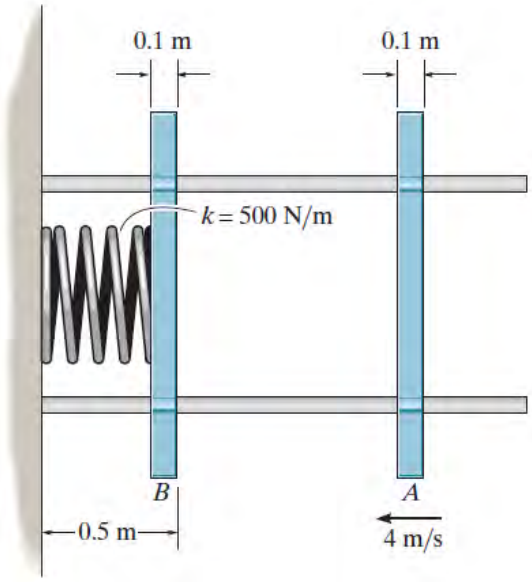
پ 15-65/66

15-67. یو 5 پونډه بکس B د 5 فوټ لوړوالی څخه له دریدلی حالته غورځول کیږي ترڅو چې د 10 پونډه تختی P سره یې امپکت کړي. تخته د فنربرسیره ایښودل شوي چې سختوالی یې $k = 30$ lb/ft ده . که د بکس او تختې ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.6$ وي، د فنر اعظمي غونجیدل وټاکئ. د فنر کتله له پامه وغورځوئ.



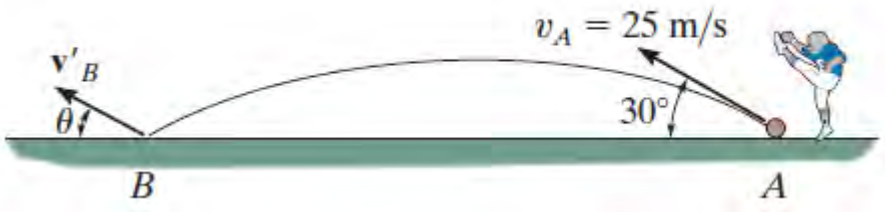
پ 15-67

*15-68. تختې A او B هر یو 4 کیلوګرامه کتله لري او د بنوی لاربنونکیو په اوږدو کې محدود حرکت کوی. که د تختو ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.7$ وي، معلوم کړي (a) د امپکت وروسته د دواړو تختو تیزوالی او (b) د فنر اعظمي غونجیدل. تخته A د امپکت نه مخکې په 4 m/s سرعت حرکت کوي. تخته B په پیل کې په دریدلی حالت کی ده او فنرکش شوی نه دی.



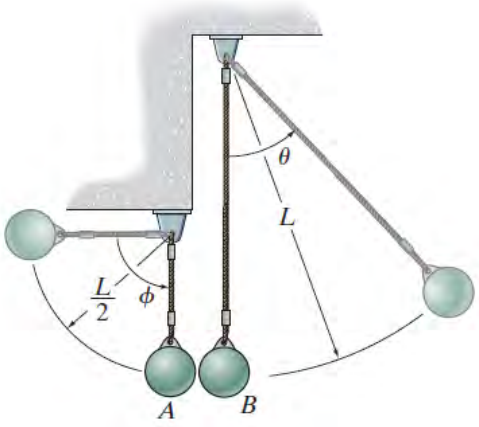
پ 15-68

15-69 یو 300 ګرامه توپ په $v_A = 25$ m/s سرعت سره په A نقطه کې وهل کیږي لکه څنګه چې ښودل شوي. که د توپ او میدان ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.4$ وي، له امپکت وروسته په B نقطه کې د توپ د بیرته ټوپ وهلو سرعت او لوری q وټاکئ.



پ 15-69

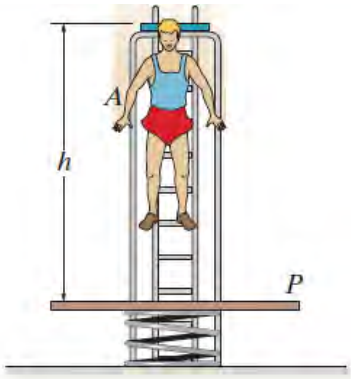
15-70. دوه یو شان توپونه A او B چې هر یو m کتله لري، چې په ترتیب سره د $L/2$ او L اوږدو رسیو څخه ځوړند دي. توپ A د $f = 90°$ څخه له دریدلی حالته خوشی کیږي او $f = 0°$ ته راښکته کیږي، چیرې چې د B سره امپکت کوي. له امپکت وروسته د هر توپ تیزوالی او د B اعظمي زاویه q وټاکئ. د توپونو ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب e وګڼئ.



پ 15-70

15-71. په د لاندی انځور کی د ښودل شوي سړي A چې تول یې 175 پونډه دي او د $h = 8$ ft لوړوالی څخه په تخته P باندې چې 60 پونډه تول لري، ترپ کوی. تخته په یوه فنر باندې ولاړه ده چې سختوالی یې $k = 200$ lb/ft دی. معلوم کړي (a) د امپکت وروسته د A او P سرعتونه او (b) د امپکت له امله د فنر اعظمي غونجیدل. فرض کړئ چې د سړي اوتختی ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.6$ دی او سړی د حرکت پر مهال ځان سخت نیسي.

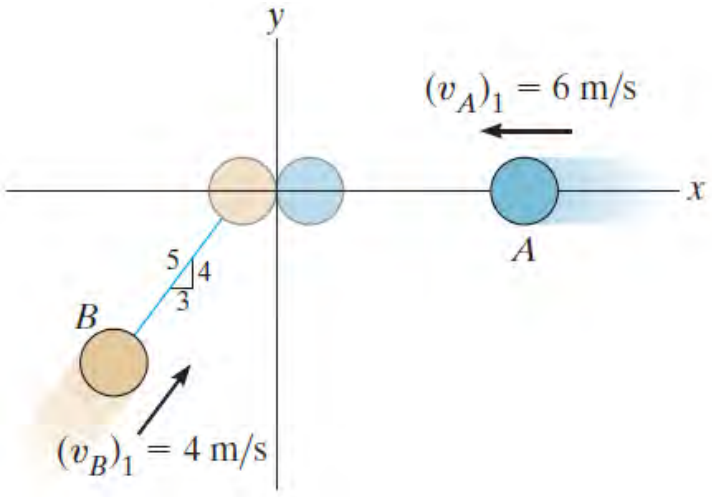
*15-72. په د لاندی انځورکی د ښودل شوي سړي A چې تول یې 100 پونډه دي اود $h = 8$ ft لوړوالی څخه په تخته P باندې چې 60 پونډه تول لري، ټرپ کړی. تخته په یوه فنر باندې ولاړه ده چې سختوالی یې $k = 200$ lb/ft د ی. فرض کړئ چې د سړي او تختی ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.6$ دی او سړی د حرکت پر مهال ځان سخت نیسي، اړین لوړوالی h وټاکئ که د فنر اعظمي غونجیدل 2 فوټه شي.



پ 15-71/72

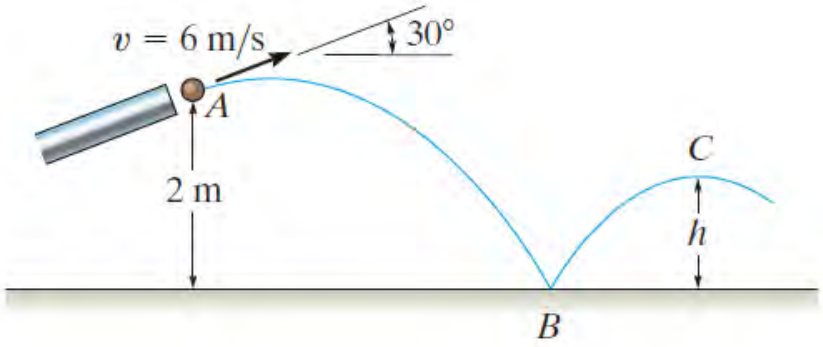
15-73. دوه بنوی ډیسکونه A او B هر یو 0.5 کیلوګرامه کتله لري. که دواړه ډیسکونه د بنودل شوي سرعتونو سره ټکر وکړي، د ټکر وروسته د دوی وروستي سرعتونه وټاکئ. د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.75$ دی.

15-74. دوه بنوی ډیسکونه A او B هر یو 0.5 کیلوګرامه کتله لري. که دواړه ډیسکونه د بنودل شوي سرعتونو سره ټکر وکړي، د ټکر وروسته د ډیسکونو ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب وټاکئ که د ټکر وروسته B په 30° زاویه د y محور څخه د ساعت په خلاف لوری حرکت کوي.



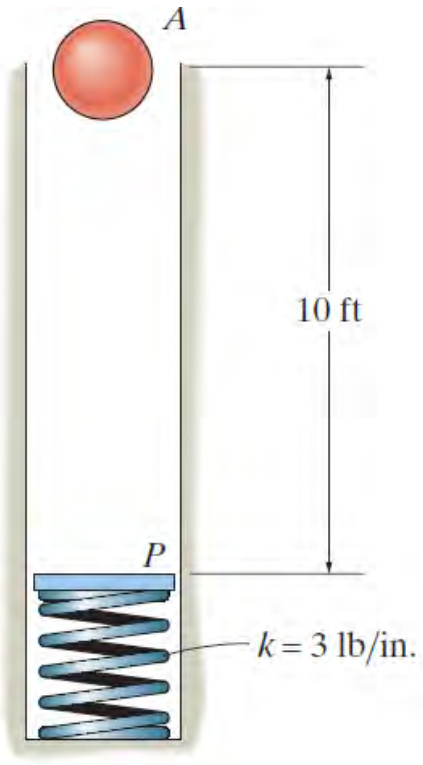
پ 15-73/74

15-75. د 0.5 کیلوګرامه توپ په نقطه A کې په $v = 6$ m/s سرعت سره له ټیوب څخه ویشتل کیږي. که د توپ او سطح ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.8$ وي، د ځمکې له لګیدو وروسته د هغه لوړوالی h وټاکئ.



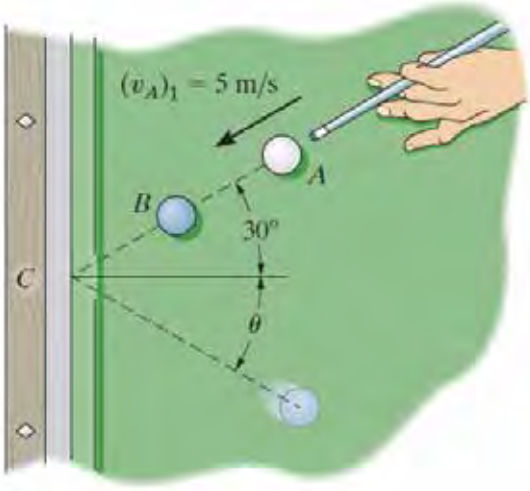
پ 15-75

*15-76. د 8 پونډه توپ له 10 فوټه لوړوالی، د تختی P څخه لری او د دریدلی حالت نه خوشی شویی. تخته 6 پونډه تول لری. د فنر اعظمي غونجیدل وټاکئ که امپکت په بشپړ ډول ایلستیکی وي.



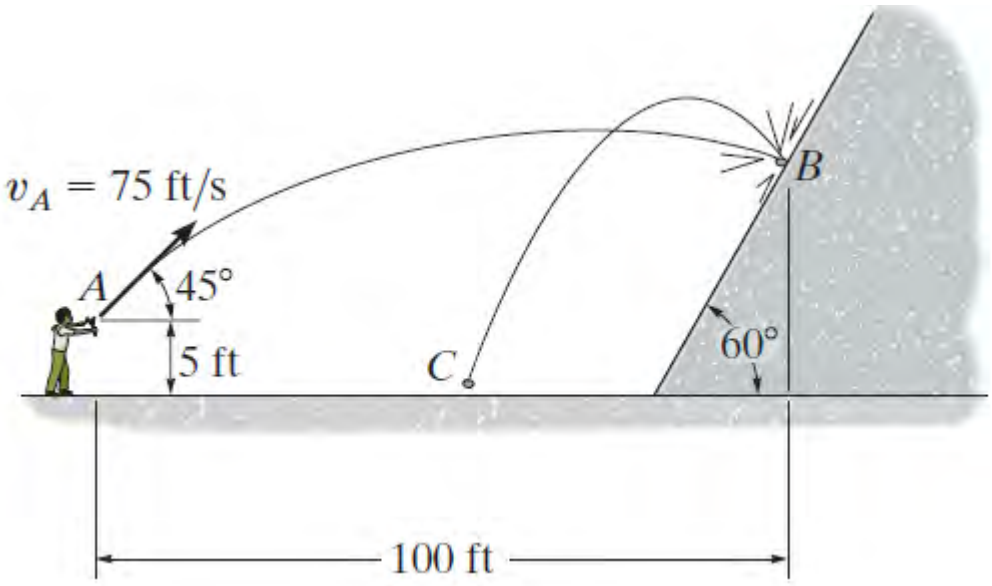
پ 15-76

15-77. نشاني شوي توپ A په پیل کې په $(v_A)_1 = 5$ m/s سرعت سره خوځول کیږي. که دا مستقیم تصادم د B توپ سره وکړی ($e = 0.8$) ، د تصادم وروسته د B سرعت او زاویه q وټاکئ کله چې دا د C نرمی ژی څخه بیرته راګرځی، ($e' = 0.6$) . هر توپ 0.4 کیلوګرامه کتله لري. د توپونو اندازه له پامه وغورځوئ.



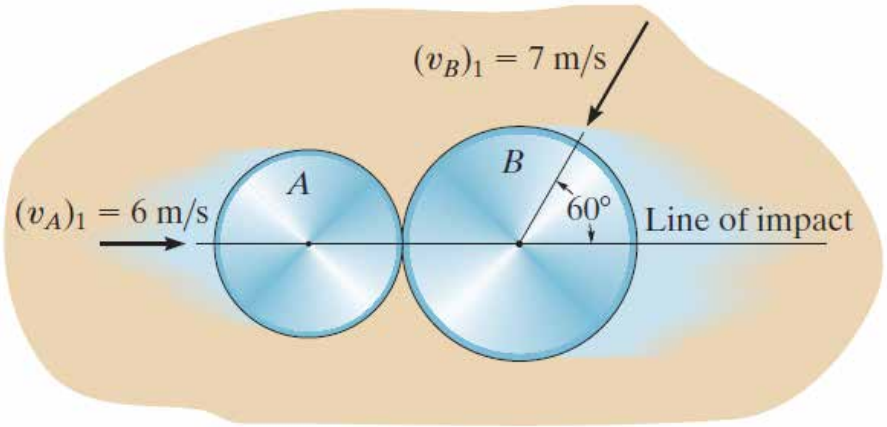
پ 15-77

15-78. یو هلک د غولکی (slingshot) په کارولو سره 0.2 پونډه مرمریا ګاټی په کانکریټی دیوال ولی، چې په B نقطه کې لګیږی. که د مرمر او دیوال ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب e = 0.5 وي، د مرمر تیزوالی د دیوال د لګیدو نه وروسته وټاکئ.



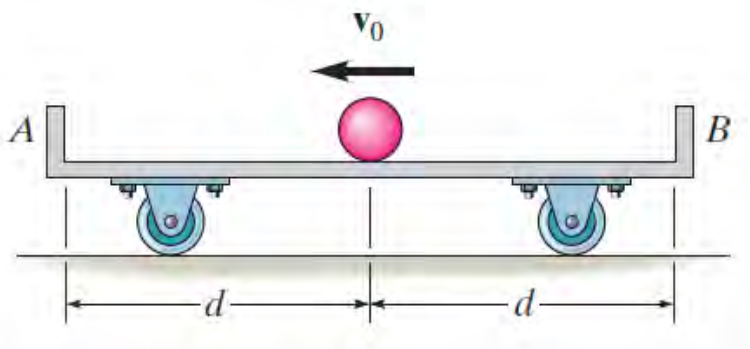
پ 15-78

15-79. دوه ډیسکونه A او B په ترتیب سره 3 کیلوګرامه او 5 کیلوګرامه کتلی لري. که دوی د بنودل شوي سرعتونو سره ټکر وکړي، د ټکر وروسته د دوی سرعتونه وټاکئ. د بیرته راستنیدو ضریب e = 0.65 دی.



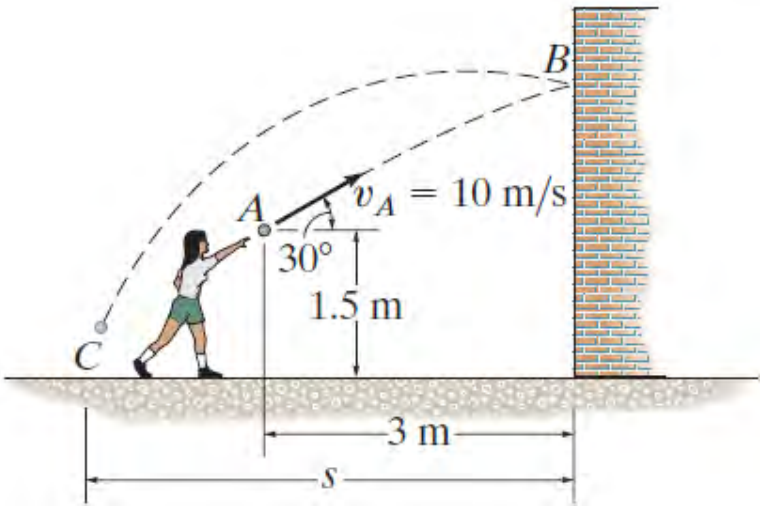
پ 15-79

*15-80. یو کوچنی توپ چې کتله یې m, او اندازه یې د پام وړ نه ده، د کراچۍ په مرکز کې v_0 سرعت ورکول کیږی. د کراچۍ کتله M او په پیل کې په دریدلی حالت کیده. که د توپ او دیوالونو A او B ترمنځ د بیرته راستنیدو ضریب e وي، کله چې توپ د A سره تصادم کړي د توپ او کراچۍ سرعت له تصادم وروسته وټاکئ. همدارنګه، ټول هغه وخت معلوم کړی چې په کې توپ د A سره تصادم کوي، بیرته راګرزی، بیا د B سره تصادم کوي، بیا راګرزی، او بیا د کراچۍ مرکز ته راځي. اصتکاک له پامه وغورځوئ.



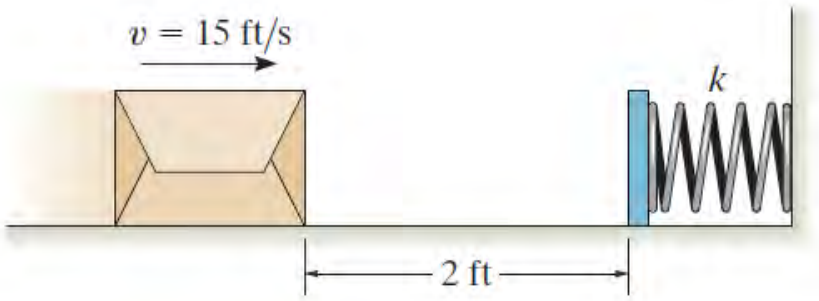
پ 15-80

15-81. یوه نجلۍ د 0.5 کیلوګرامه توپ دیوال ته په $v_A = 10$ m/s سرعت سره غورځوي. معلوم کړي (a) هغه سرعت چې دا په نقطه B کې دیوال سره تصادم کوي، (b) هغه سرعت چې دا له دیوال څخه بیرته خوځیږی، که چیرې د بیرته راستنیدو ضریب $e = 0.5$ وي، او (c) د دیوال څخه فاصله s وټاکئ چیرې چې دا په C نقطه کې ځمکې ته رسیږي.



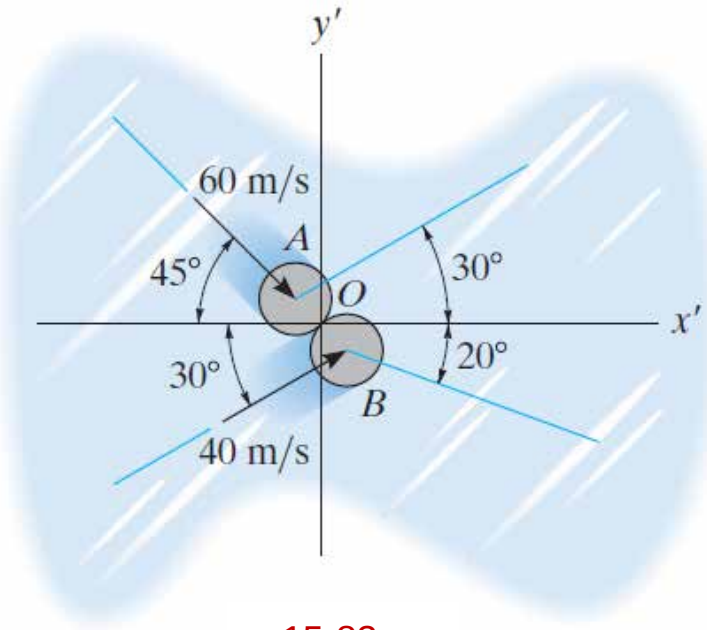
پ 15-81

15-82. یو 20 پونډه بکس په یوه سطحه باندې بنویږي چې $m_k = 0.3$ دی. دا بکس کله چې له تختی 2 ft لرې وي، سرعت یې $v = 15$ ft/s دي . که دا د بنویی تختی سره چې 10پونډه تول لری او د یوه نه غځول شوي شوي فنر په واسطه په ځای کې ساتل شوی، چې سختوالی یې $k =$ 400 lb/ft دی تصادم وکړي، د فنر اعظمي غونجیدل وټاکئ. د بکس او تختی ترمنځ $e = 0.8$ و کاروي. فرض کړئ چې تخته په بنویه سطحه بنویږي.



پ 15-81

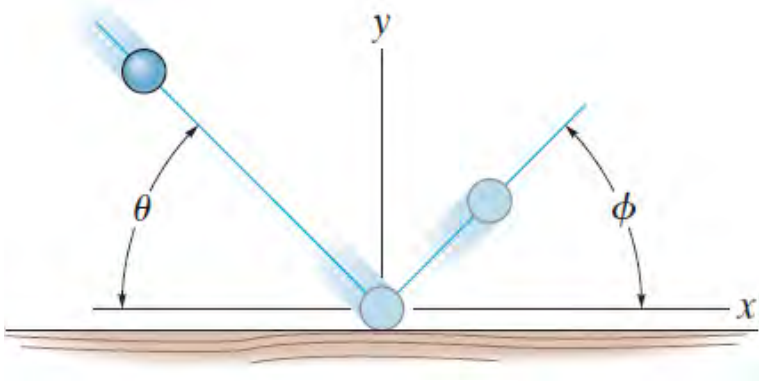
15-83. دوه د هاکی حلقی یا توپونه A او B هر یو 250 ګرامه کتله لري. که دا په O نقطه کې تصادم وکړي او د رنګ شویو لارو په اوږدو کې منحرف کیږي، د تصادم نه وروسته د دوی سرعت وټاکئ. فرض کړئ چې د یخ سطحه چې دوی په کې بنویږي بنویه ده. **مرسته**: څرنګه چې y' محور د تصادم کربنې سره برابر نه دی، د مومنتم ساتل د x' او y' محورونوپه اوږدوالی تطبیق کړئ.



پ 15-83

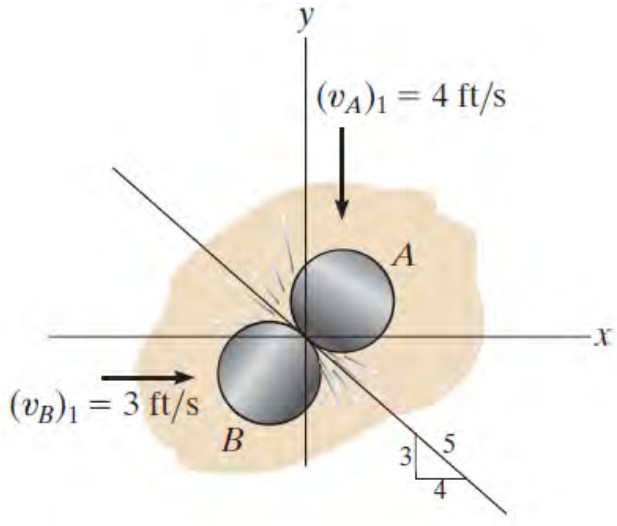
*15-84. یو توپ په یوه زیږه فرش باندې په زاویه q غورځول شوي. که چیرې دی په f زاویه بیرته پورته شی، او د کنیټیک اصټکاک ضریب m وي، د بیارا ستنید و ضریب e وټاکئ. د توپ اندازه له پامه وغورځوئ . **مرسته:** وښیئ چې د تصادم پر مهال، په x او y لوریو کې اوسط امپولسونه د $I_x = mI_y$ سره تړاو لري. له دې امله چې د امپکت وخت یو شان دی، نو $F_x \Delta t = mF_y \Delta t$ یا $F_x = mF_y$.

15-85. یو توپ په یوه زیږه فرش باندې په $q = 45°$ زاویه غورځول شوی. که دی په f = 45° زاویه راستنیدل وکړي ، د فرش او توپ ترمنځ د کنیټیک اصټکاک ضریب وټاکئ. د د بیارا ستنید و ضریب $e = 0.6$ دی . **مرسته:** وښیئ چې د ټکر پر مهال، په x او y لوریو کې اوسط امپالسونه د $I_x = mI_y$ سره تړاو لري. له دې امله چې د ټکر وخت یو شان دی، نو $F_x \Delta t = mF_y$ یا $F_x = mF_y \Delta t$



پ 15-84/85

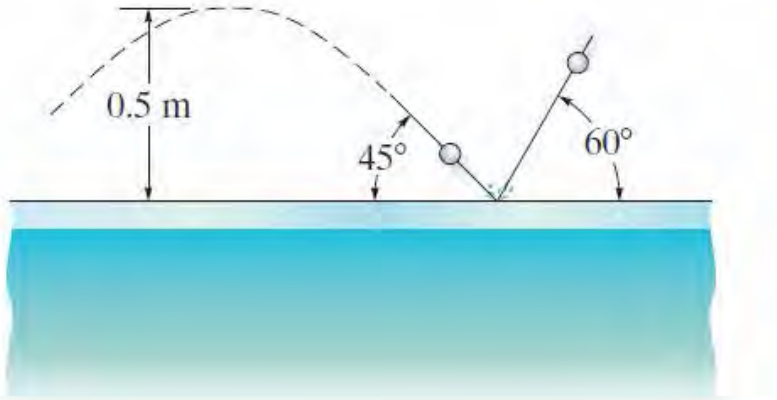
15-86. دوه ډیسکونه A او B هر یو 2 پونډه تول لري، او د تصادم څخه مخکې بنودل شوي لومړني سرعتونه لري. که د د بیارا ستنید و ضریب $e = 0.5$ وي، د تصادم وروسته د دوی سرعتونه وټاکئ.



پ 15-86

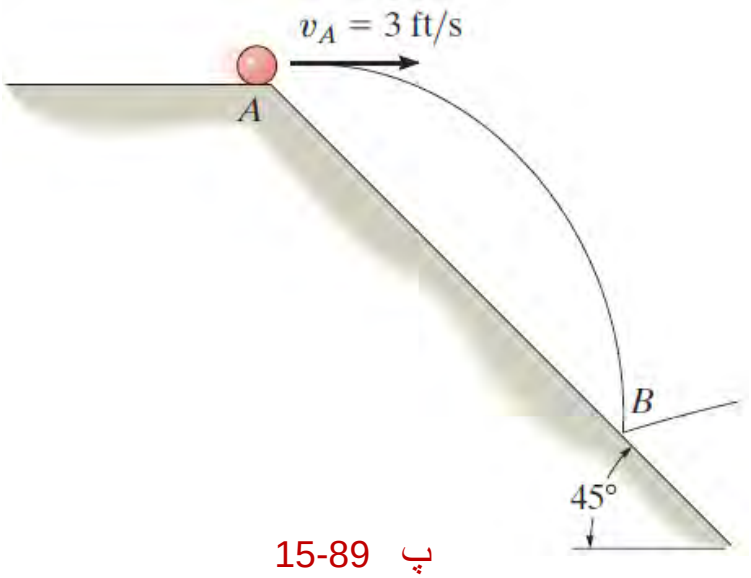
15-87. لیدل شوي چې ګلي (hailstone) د یوه جهیل د یخ شوي سطحې سره په 60° زاویه اصابت کوي او په 45° زاویه بیارا ستنیدل کوي. د بیارا ستنید و ضریب وټاکئ.

*15-88. که په پوښتنه 15–87 کې ګلی د اصابت وروسته 0.5 متره لوړوالي ته پورته شي، د اصابت څخه مخکې د دوی سرعت وټاکئ.



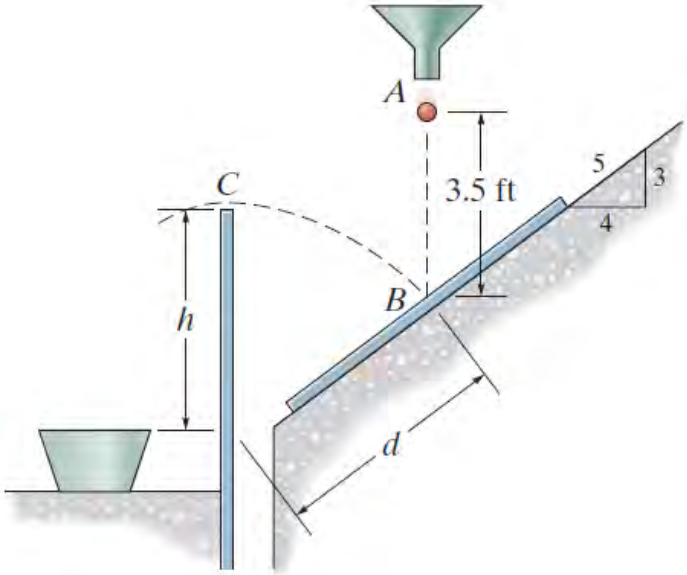
پ 15-87/88

15-89. د 0.2 پونډه د بیئرینګ توپ په A څنډه کې د $v_A = 3$ ft/s سرعت سره حرکت کوي. د بیارا ستنید و وروسته د ښویی مایلی سطحې په B نقطه کې تیزوالی وټاکی. $e = 0.8$.واخلئ.



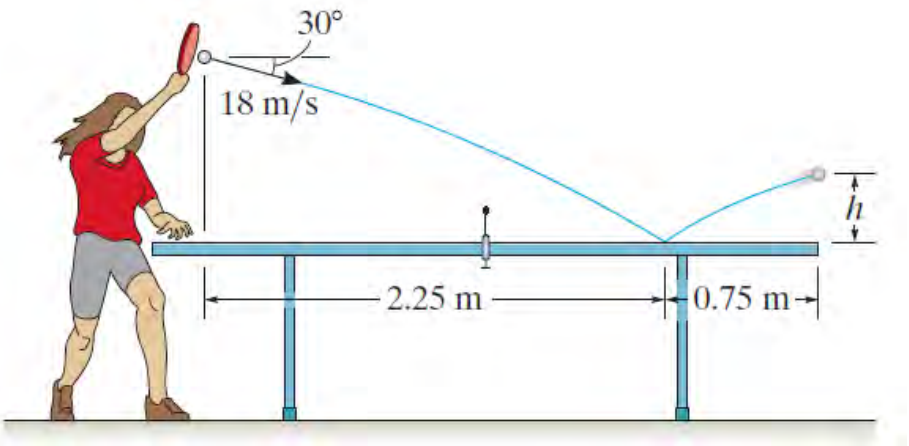
پ 15-89

15-90. مخکې له دې چې کرنبیري (cranberry) ستاسو په دسترخوان کې ځای وموميِ، دا باید د یوه ټوپوهلوازموینه تیره کړي چې د دې کیفیت وارزول شي. که د کرنبیري $e \geq 0.8$ وي دمنلو وړګرځي، د سد لپاره ابعاد d او h وټاکئ ترڅو چې یوه کرنبیري د دریدلی حالت نه د A نقطې څخه لویږی، او په مایله سطحه په B کی لګیږی او پورته ټوپ وهی چی له سد C څخه تیریږی.



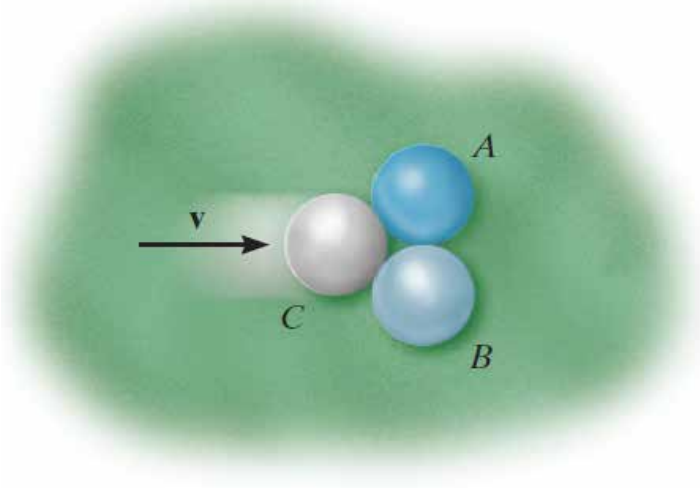
پ 15-90

15-91. د پینګ-پانګ توپ 2 ګرامه کتله لري. که دا د ښودل شوي سرعت سره اصابت وکړي، وټاکئ چې دا د ښوی میز له پای څخه په ټوپ وهلو سره څومره لوړوالي h ته پورته کیږي. e = 0.8 وکاروي.



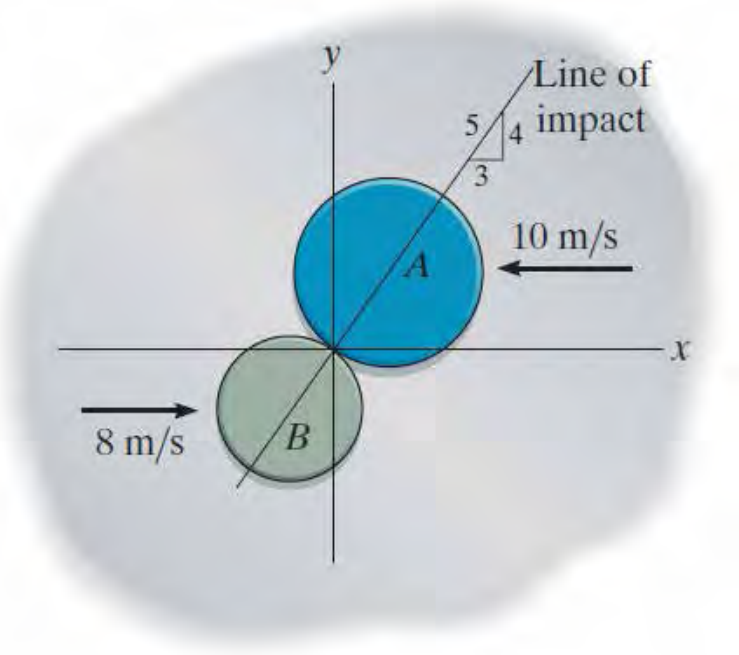
پ 15-91

15-92. دوه د بيليارد توپونه A او B په پيل کې يو له بل سره په تماس کې دي کله چې دريم بال C په ورته وخت کې په دواړو سره اصابت کړي لکه څنګه چې ښودل شوي. که توپ C داصابت وروسته په ځای کې پاتې شي، د بيارا ستنيدو ضريب وټاکئ. ټول توپونه يو شان کتله لري. د هر توپ اندازه له پامه وغورځوئ.



پ 15-92

15-93. ډيسکونه A او B په ترتيب سره 15 کيلوګرامه او 10 کيلوګرامه کتله لري. که دوی په ښويه افقي سطحه باندې چې په انځورکې ښودل شوي سرعتونو سره وښويږي، د امپکت وروسته د دوی تيزوالي وټاکئ. د بيارا ستنيدو ضريب $e = 0.8$ دی.



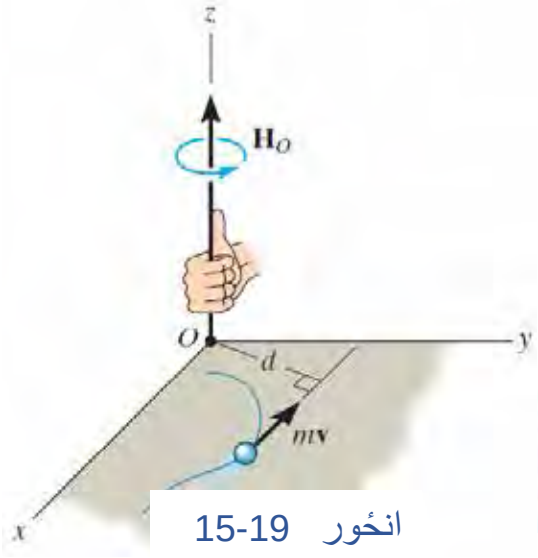
پ 15-93

15.5 زاویه وی مومنتم (ANGULAR MOMENTUM)

د یوې ذرې ***زاویه یي مومنتم*** (*angular momentum*) د *O* نقطې په اړه داسې تعریف شوی دی چې دا د ذرې د خطي مومنتم "مومنټ" دی د *O* په اړه. لکه څنګه چې دا مفهوم د قوې د مومنټ د موندلو سره ورته دی، د زاویه وی مومنتم (**H**O) ځینې وختونه ، د مومنټم د مومنټ، په نامه یادیږي.

سکیلر فارمولیشن (Scalar Formulation)

: که چیرې یوه ذرّه په *x–y* سطحه کې په منحني کرښه حرکت کوي، د 15-19 انځور په څېر، زاویه وی مومنتم په هر وخت او شېبه کې د نقطې O په اړه (په حقیقت کې د Zمحور) د سکیلر فورمولیشن په واسطه ټاکل کېدی شي. د **H**O مقدار داسې دی



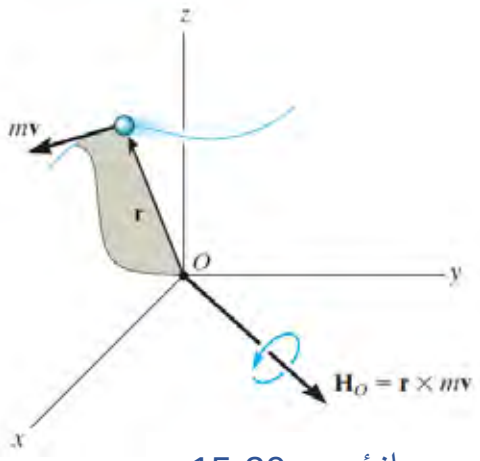
انځور 15-19

$$H_O = (d)(mv) \qquad (15–13)$$

دلته *d* د مؤمنت لاس یا له *O* څخه د ***mv*** د عمل کرښې ته عمودي فاصله ده. د *H*O عام واحدونه kg . m²/s یا slug . ft²/s دي. د **HO** لوری د بنې لاس قاعدې لخوا ټاکل کیږي. لکه څنګه چې ښودل شوي، د بنې لاس ګوتې د ***mv*** د *O* شاوخوا د څرخیدو په لور تاو کړئ ، نو په دې حالت کې ستاسو غټه ګوته یا (**HO**) د *x–y* سطحې ته عمودي د +z محور په امتداد کې ښودل کیږي.

ویکتور فارمولیشن (Vector Formulation):

که چیرې ذره په یوه فضایي منحني باندې حرکت کوي، انځور 15-20 ، د زاویه وی مومنتم موندلو په *O* کی د ویکتورد کراس محصول کارول کیږي. په دې حالت کې:



انځور 15-20

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (15–14)$$

دلته **r** د موقیعت ویکتور دی چې له O نقطې څخه تر ذرې پورې رسم شوی وي. لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوي، $\mathbf{H}_O$ د سیوري لرونکي سطحې ته عمود دی چې د موقیعت ویکتور **r** او ***m*v** پکې شامل دي.

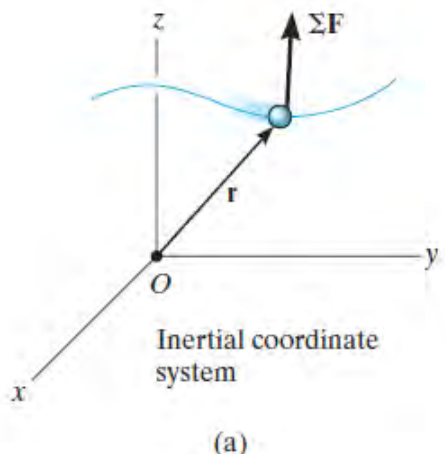
که چیرې **r** او ***m*v** د کارټیزن اجزاوو په توګه څرګند شي، نو زاویوي مومینټم د لاندې ډیټارمیننټ (determinant) په ارزولو سره ټاکل کېدی شي:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \qquad (15\text{–}15)$$

15.6 د یوی قوی د مومنټ او زاویه وی مومنتم ترمنځ اړیکه (RELATION BETWEEN THE MOMENT OF A FORCE AND ANGULAR MOMENTUM)

په انځور 15-21a کې مومنټ په نقطه د O کې د ټولو قواوو چې په ذره باندې عمل کړي د ذرې د زاویوی مومینټم سره د حرکت د معادلې په کارولو ټرل کېدی شي. ځکه چې د ذرې کتله ثابته ده، نو مورِ کولای شو ولیکو:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$



انځور 15-21

د قواوومؤمنټ د O په نقطه کې ترلاسه کېدی شي، که چیرې د پورته معادلې هره خوا د موقعیت ویکتور **r** سره، چې له O څخه تر ذرې پورې دی، کراس محصول په ضربولو سره ترلاسه کیدی شي. مورِ لرو:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

د ضمیمه B څخه، د $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ مشتق داسې لیکل کیدی شي:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

په ښي خوا کې لومړی اصطلاح، $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$، ځکه چې د یو ویکتور سره د خپل ځان کراس محصول صفر دی. نو، پورته معادله داسې بدلیږي:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15\text{–}16)$$

دا څرګندوي چې محصله د مؤمنت په ټکي O کی د ټولو قواوو چې په ذره عمل کړي مساوي ده په د ذرې د زاویه وی مومنتم د وخت د بدلون کچه په ټکي O کی. دا پایله د معادلې 15-1 سره ورته ده، یعنې:

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (15\text{–}17)$$

دلته، محصله د قواوو چې په ذره باندې عمل کوي مساوي ده په مهالیز بدلون کچه د زرې په خطي مومنتم $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ سره.

له دې استدلال څخه څرګندیږي چې معادلې 15-16 او 15-17 د نیوټن د حرکت د دویم قانون بله بڼه ښیي. د دې کتاب په نورو برخو کې به وښودل شي چې دا معادلې څنګه په عملي ډول په هغو پوښتنوکې کارول کیږي چې د ذراتو د سیستم یا د یوه کلک جسم په اړه وي.

د ذرو سیستم (System of Particles)

د ذرو د سیستم لپاره، یوه معادله چې د معادلې 15-16 په څېر بڼه لري، د ذرو د سیستم لپاره جوړیدی شی لکه چې په انځور 15-21b کې ښودل شوي. د سیستم په خپل سري i یم (ith) ذره باندې عمل کوونکي قواوي عبارت دي په یوه محصله بهرنۍ قوه $\mathbf{F}_i$ او یوه محصله داخلي قوه $\mathbf{f}_i$ څخه. د دې قوواو مومنټونه د O نقطې په اړه د معادلې 15-16 په بڼه ، مورِ لیکلی شو:

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

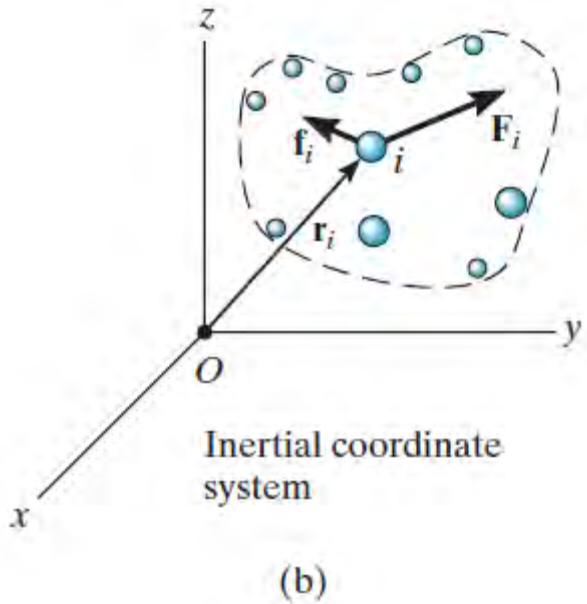
دلته $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$ د i - یم ذری د O په اړه د زاویه یي مومنتم د مهالیز بدلون کچه ده. د سیستم د هری بلی ذری لپاره هم ورته معادلي لیکل کیدی شي. کله چې د ذرو د زاویه یي حرکت د بدلون کچې نتیجه په ویکتوري توګه جمع کړو، پایله به داسې وي:

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

دویمه اصطلاح صفر ده، ځکه چې داخلي قواوي په مساوي مګر مخالف خطي جوړوکې واقع کیږي، نو د هرې جوړې مومنټ د O نقطې په اړه صفر دی. د شاخص نښې پریښودلو سره، پورته معادله په ساده بڼه کې داسې لیکل کیږي:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15\text{–}18)$$

چې د O نقطې په تړاو د ټولو بهرنیو قواوو مومنټ د ذرو په سیستم کې مساوي دی د سیستم د ټول زاویه وی حرکت په وخت کې د بدلون د کچې سره د O نقطی ته. که څه هم دلته O د محورونو د مبدأ په توګه ټاکل شوی، دا په حقیقت کې دهری ثابتی نقطی په انرښیایي ریفرینس فریم کې نمایندګي کولی شي.



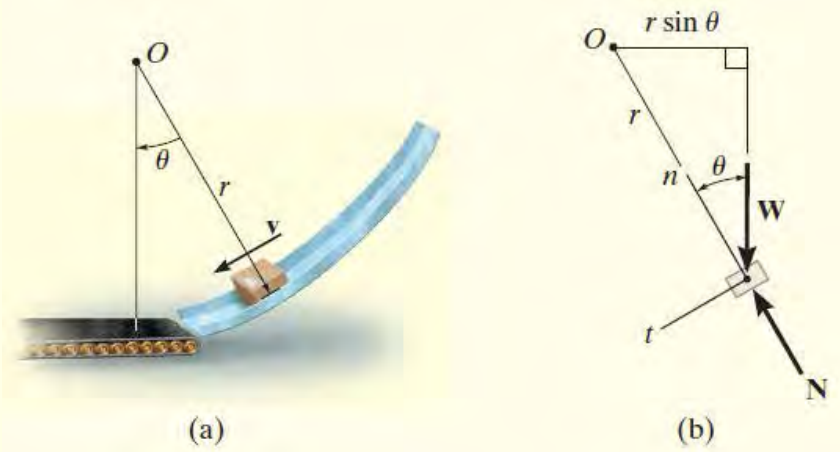
(b)

انځور 15-21(ادامه)

مثالونه

مثال 15.12

په انځور 15-22a کې ښودل شوی بکس m کتله لري او په ښوي دایروی رمپ سره ښکته ځي، کله چې دا په زاویه q کې وي، په تیزوالی v سره حرکت کوي. د دې وخت په جریان کې په O نقطه کې د دې د زاویې مومنتم مقدار او د دې د تیزوالي د زیاتیدو اندازه معلومه کړئ.



انځور 15-22

حل:

څرنګه چې **v** د لارې سره مماس دی، د مساوات 15-13 په کارولو سره د زاویې مومنتم مقدار دی:

$$H_O = r\,mv \curvearrowright \qquad Ans.$$

د سرعت د زیاتیدو کچه (dv/dt) د معادلې 15-16 په کارولو سره موندلی شو. د بکس د آزادې بدن ډیاګرام څخه، انځور 15-22b ، لیدل کیږي چې یوازې توله $W = mg$ په O نقطه کې مومنت جوړه وي. مور لرو

$$\zeta + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r\sin\theta) = \frac{d}{dt}(r\,mv)$$

څرنګه چې r او m ثابت دي

$$mgr\sin\theta = r\,m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta \qquad Ans$$

يادونه: دا ورته نتيجه، البته، د حرکت د معادلې څخه هم ترلاسه کېدی شي چې په مماسي لوري کې پلي شي، لکه څنګه چې په انځور 15-22b کې ښودل شوي، يعنې:

$$+\curvearrowright \Sigma F_t = ma_t; \qquad mg\sin\theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta \qquad Ans.$$

15.7 د زاويوي امپلس او مومنتم اصول

(PRINCIPLE OF ANGULAR IMPULSE AND MOMENTUM)

که مساوات 15-16 په دې بڼه کې بيا وليکل شي $\Sigma \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$ او انټيګريټ شي، په دې فرضيه سره چې په وخت $t=t_1$ کې، $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ او په وخت $t = t_2$ کې، $\mathbf{H}_O =(\mathbf{H}_O)_2$ وي، نو مور لرو

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

يا

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}19)$$

دغه معادله د ***زاويي امپلس او مومنتم د اصولو*** په نوم يادېږي. لومړني او وروستي زاويي مومنتمونه $(\mathbf{H}_O)_1$ او $(\mathbf{H}_O)_2$ د ذرې د خطي مومنتم د مومنت په توګه تعريف شوي دي ($\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$) په t_1 او t_2 وختونو کې، په ترتيب سره. په چپ اړخ کې دويمه حصه $\Sigma \int \mathbf{M}_O\, dt$ د ***زاويي امپلس*** (angular impulse) په نوم يادېږي. دا د ټولو هغو قواوو مومنتونو د انټيګريشن له لارې نسبت وخت ته، سره تاکل کېږي چې په ذره باندې د وخت په دوره t_1څخه تر t_2 پورې عمل کوي. څرنګه چې د O نقطې ته د يوې قوې مومنت $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ دی، زاويي امپلس په ويکټوري بڼه کې داسې څرګندېدلی شي

$$\text{angular impulse} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt \qquad (15\text{–}20)$$

دلته $\mathbf{r}$ یو د موقعیت ویکتور دی چې د O نقطې څخه د $\mathbf{F}$ د عمل کربنې پر هر ټکي پورې غځیږي. په ورته ډول، د معادلې 15-19 په کارولو سره، د ذرو د سیستم لپاره د زاویې امپلس او مومنتم اصول داسې لیکلی شو

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}21)$$

دلته لومړی او درېیمه برخه د ټولو ذرو زاویې مومنتم وړاندې کوي $\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)$ د t_1 او دوهمه برخه یې په منځ کې. دویمه حصه د زاویې امپلسونو مجموعه ده چې ټولو ذرو ته له t_1 څخه تر t_2 وخت پورې ورکول شوي ده. په یاد ولرئ چې دا امپلسونه یوازې د سیستم په ټولو ذرو باندې د عمل کوونکو بهرنیو قوو مومنتونو له لارې رامنځته کیږي، چیرته چې د i-ذرې لپاره $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ دی.

ویکتوري فارمولیشن (Vector Formulation): د امپلس او مومنتم اصولو په کارولو سره، دا ممکنه ده چې دوی ویکتوري معادلې ولیکل شي چې د ذرې حرکت تعریفوي، یعنې، معادلې 15-3 او 15-19 په بل ډول ښیي:

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}22)$$

سکېلر فارمولیشن (Scalar Formulation): په عمومي توګه، پورته معادلې په x, y, zاجزایي بڼه کې څرګندېدلی شي. که ذره په x–y سطحه کې حرکت وکړي، نو دري سکېلر معادلې لیکلی شو ترڅو حرکت تشریح کړي، یعنې

$$m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

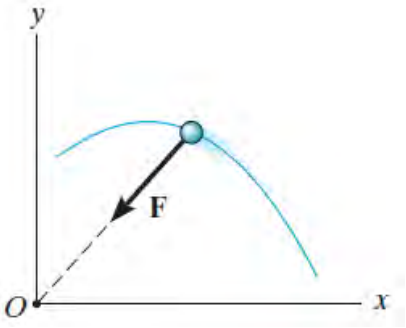
$$m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_y)_2$$

$$(H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt = (H_O)_2 \qquad (15\text{–}23)$$

د دې معادلو لومړني دوی د خطي امپلس او مومنتم اصول په x او y لوریو کې وړاندې کوي، چې په 15.1 برخه کې بحث شوی، او دریمه معادله د z په دیمحوربانډی د زاویه وی امپلس او مومنتم اصول څرګندوي.

د زاویي مومنتم ساتنه (Conservation of Angular Momentum) :

کله چې په ذره باندې د عمل کوونکي زاویي امپلسونه د وخت t_1 څخه تر t_2 پورې ټول صفر وي، نو 15-19 معادله په لاندې ساده بڼه کې بڼودل کیږي



انځور 15-23

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15–24)$$

دا معادله د **زاویوي مومنتم د ساتنې** په نوم یادیږي. دا بڼیی چې د t_1 څخه تر t_2 پورې د ذرې زاویوي مومنتم ثابت پاتې کیږي. په څرګند ډول، که چیرې په ذره باندې کوم بهرنۍ امپلس عمل ونکړي، نو دواړه، خطي او زاویي مومنټمونه، ساتل کیږي. په ځینو حالاتو کې، بیا هم د ذرې زاویي مومنتم ساتل کیږي او خطي مومنتم ممکن ونه ساتل کیږي. د دې یوه بیلګه هغه وخت ده چې ذره یوازې د یوې مرکزي قوې په وړاندې قرار لري (برخه 13.7 و ګورئ). لکه څنګه چې په انځور 15-23 کې بڼودل شوی، کله چې ذره د لارې په اوږدو کې حرکت کړي امپلسونکي مرکزي قوه **F** تل د O نقطې په لور وی. له دې امله، زاویوی امپلس (مومنټ) چې د **F** لخوا په z محور رامنځته شوی تل صفر دی، او له دې امله د ذرې زاویي مومنتم په دې محور کې ساتل کیږي.

له معادلې 15-21 څخه، موږ کولی شو د ذرو د سیستم لپاره د زاویي مومنتم د ساتنې اصول هم داسې ولیکو:

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15–25)$$

په دې حالت کې، د جمعې علامه باید د سیستم د ټولو ذرو زاویوي مومنټمونه شامل کړي.

د تحلیل تګلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

کله چې د زاویې امپلس او مومنټم اصول، یا د زاویې مومنټم د ساتنې اصول پلي کیږي، وړاندیز کیږي چې لاندې کړنلاره وکارول شي.

آزاد - بدن ډایګرام (Free-Body Diagram) .

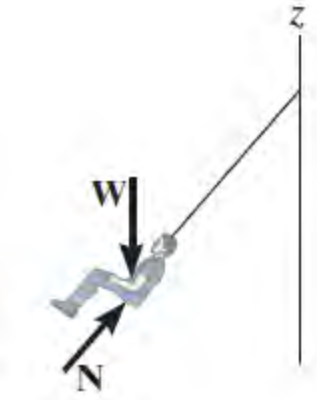
- د ذرې د آزاد بدن ډیاګرام رسم کړئ ترڅو هغه محور معلوم کړئ چې په هغه باندې زاویوي مومنټم ساتل کیدی شي. د دې لپاره، د ټولو قواوومومنټونه (یا امپولسونو) باید یا موازي وي یا د محور نه تیر شي ترڅو د t_1 څخه تر t_2 وخت په دوره کې صفر مومنټ رامنځته کړي.
- د ذرې لمړنۍ او پایلنې سرعتونو جهت او حس(خوا) هم باید وټاکل شي.

د مومنټم معادله (Momentum Equations).

- د زاویې امپولس او مومنټم اصول پلي کړئ، $(\mathbf{H}o)_1 + \Sigma\int_{t1}^{t2} \mathbf{M}o\,dt = (\mathbf{H}o)_2$

یا که مناسب وي، د زاویوي مومنټم د ساتنې اصول، $(\mathbf{H}o)_1 = (\mathbf{H}o)_2$.

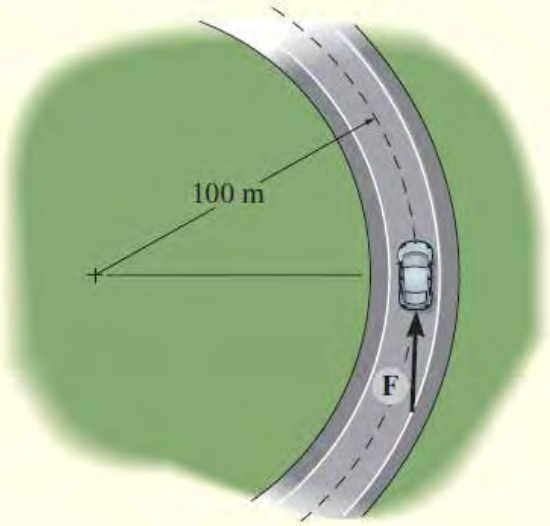




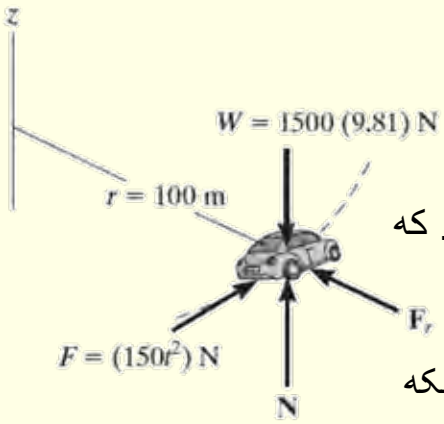
که چیرې د هوا مقاومت ته پام ونه شي، نو د دې تفریحي پارک په سواری کې مسافرین د z محور په په تاویدو سره د زاویې مومنټم د ساتنې تابع دي. لکه څنګه چې په آزاد بدن ډیاګرام کې ښودل شوي، د سیټ لخوا پر مسافر باندې دعمودي قوه N د عمل کړښه د دې محور له لارې تیریږي، او د مسافر وزن W هم ورسره موازي دی. له دې امله، په z محور کې هیڅ زاویې امپولس نه شته.

مثال 15.13

یو د 1.5 میګا ګرامه موټر په دایروي سړک حرکت کوي لکه څنګه چې په انځور 15-24aکې ښودل شوي .که د ټایرونو او د سړک د کشش قوه $F = (150t^2)$ N وي، چیرته چې t په ثانیو کې دە، د موټر تیزوالی په $t = 5$ s کې معلوم کړئ .موټر په پیل کې د 5 m/s تیزوالي سره حرکت کوي. د موټر اندازه له پامه وغورځوئ.



(a)



(b)

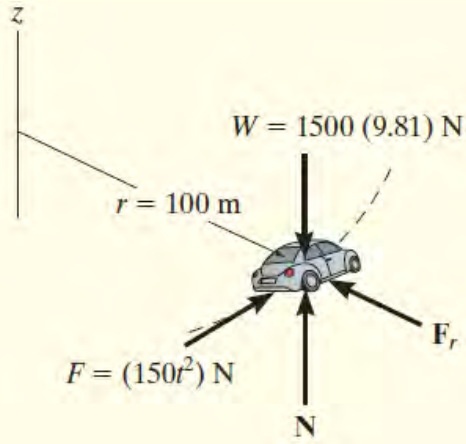
انځور 15-24

آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram).

د موټر د آزاد بدن ډیاګرام په انځور 15-24b کې ښودل شوی. که موږ د زاویي امپلس او مومنټم اصول په z محور تطبیق کړو، نو هغه زاویي امپلس چې د تول، عمودی قوه، او شعاعي اصتکاکي قوه لخوا رامنځته کیږي هغه به له منځه ولاړ شي، ځکه چې دوی د محور سره موازي عمل کوي یا له محوره تیریږي.

زاويي امپولس او مومنټم اصول

.(Principle of Angular Impulse and Momentum)



(b)

انځور 15-24

$$(H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z\, dt = (H_z)_2$$

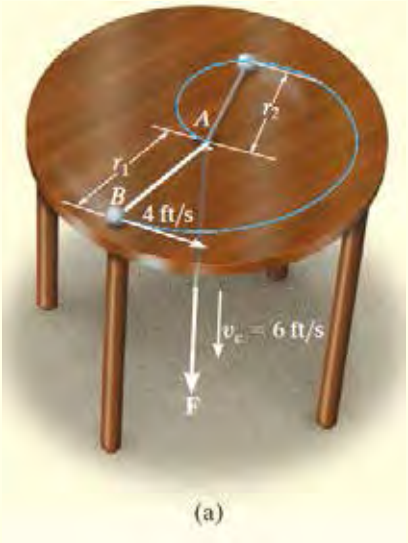
$$r\, m_c(v_c)_1 + \int_{t_1}^{t_2} r\, F\, dt = r\, m_c(v_c)_2$$

$$(100\text{ m})(1500\text{ kg})(5\text{ m/s}) + \int_0^{5\text{ s}} (100\text{ m})[(150t^2)\text{ N}]\, dt = (100\text{ m})(1500\text{ kg})(v_c)_2$$

$$750(10^3) + 5000t^3\Big|_0^{5\text{ s}} = 150(10^3)(v_c)_2$$

$$(v_c)_2 = 9.17\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 15.14



(a)

0.8 پونډه توپ B ، لکه څنګه چې په انځور 15-25a کې ښودل شوي، د یو رسی سره وصل دی چې د A په نقطه کې له یوې سورې څخه د یوه ښوی میز له لارې تیریږي. کله چې توپ د سورې څخه په r_1 =1.75ft واټن کې وي، په یوه دایره کې داسې حرکت کوي چې سرعت یې v_1=4 ft/s دي. د **F** قوی په تطبیق سره، رسی په سورې کې په یو ثابت سرعت vc = 6ft/s ښکته کش کیږي. معلوم کړي (a) تیزوالی د توپ په هغه لحظه کې چې په r_2 = 0.6 ft واټن کې له سورې څخه وی، او (b) د r_1 څخه تر r_2 پورې د شعاعي واټن لنډولو لپاره د **F** لخوا ترسره شوي د کار اندازه معلومه کړئ. د توپ اندازه له پامه وغورځوئ.

حل :

برخه (a) - د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram):

کله چې توپ له r_1 څخه r_2 ته حرکت کوي، لکه څنګه چې په انځور 15-25b کې ښودل شوي، په توپ باندې د رسی لخوا تطبیق شوی قوه **F** تل د **z** محور نه تیریږي، او د تول او عمودی قوه $\mathbf{N}_B$ هم د **z** محور سره موازي دي. له همدې امله، د دې قواوو لخوا رامنځته شوي مؤمنت یا زاویي امپلسونه په دې محور کې صفر دي. نو له همدې امله، په **z** محور باندی زاویوي مومنتم ساتل شوی.

د زاویوي مومنتم ساتنه (Conservation of Angular Momentum).

د توپ سرعت v_2 په دوو اجزاوو ویشل کیږي. د شعاعي جز، چې سرعت یې 6 ft/s معلوم دی؛ که څه هم، دا په **z** محور باندی صفر زاویي مومنتم تولیدوي. نو له همدې امله.

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$1.75\ \text{ft}\left(\frac{0.8\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right) 4\ \text{ft/s} = 0.6\ \text{ft}\left(\frac{0.8\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right) v_2'$$

$$v_2' = 11.67\ \text{ft/s}$$

د توپ تیزوالی عبارت دی په

$$v_2 = \sqrt{(11.67\ \text{ft/s})^2 + (6\ \text{ft/s})^2} = 13.1\ \text{ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$

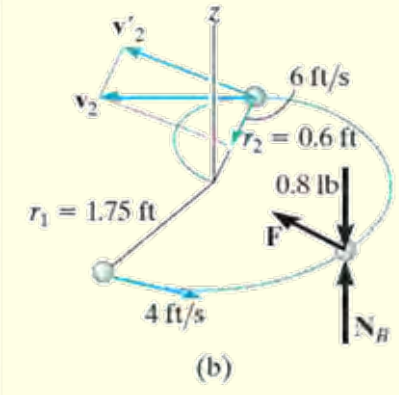
برخه **(b)** (Part b).

یوازینی قوه چې په توپ باندې کار کوي، هغه **F** ده. (عمودی قوه او تول عمودي حرکت نه لری.) د توپ لومړنی او وروستی کینیټیکي انرژي معلومولی شو، نو د کار او انرژي د اصول له مخې مونږ لرو:

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0.8\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(4\ \text{ft/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{0.8\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(13.1\ \text{ft/s})^2$$

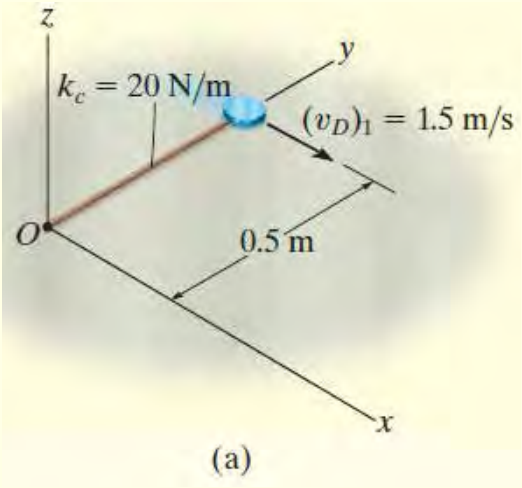
$$U_F = 1.94\ \text{ft} \cdot \text{lb} \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 15-25

یادونه: قوه **F** ثابته نه ده ځکه چې د تعجیل عمودی جز ، $a_n = v^2/r$ ، بدلون کوي کله چې r بدلیږي.

مثال 15.15

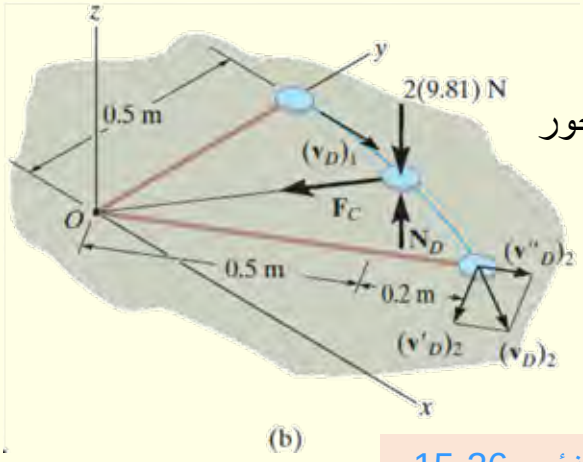


(a)

یو 2 کیلو ګرامه ډیسک چې په انځور 15-26a کې ښودل شوی دی په یوه ښویه افقی سطح باندې اینښودل شوی او د یو الاستیکی مزی سره ترڼ شوی دی چې د سختوالي ثابت یې $k_c = 20$ N/m دی. مزي په پیل کې غځول شوی نه دی. که ډیسک ته یو سرعت $(v_D)_1 = 1.5$ m/s عمود په مزي ورکړل شي، د مزي د اوږدېدو د نسبت اندازه او د ډیسک تیزوالی په هغه وخت کې معلوم کړئ کله چې مزی 0.2 متره اوږد شوی وي.

حل

د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram): کله چې ډیسک حرکت کوي، دا د انځور 15-26b په شان لاره تعقیبوي. د معاینې له مخې، د نقطې O یا د (z محور)په اړه زاویې مومنتم ساتل کیږي، ځکه چې هیڅ یوه قوه په دې محور باندی زاویوي امپولس نه جوړه وي. همدارنګه، کله چې فاصله 0.7 متره وي، یوازې عرضي جز $(\mathbf{v}`_D)_2$ د ډیسک زاویوي مومنتم په په O باندی تولیدوي.



(b)

انځور 15-26

د زاویوي مومنتم ساتنه (Conservation of Angular Momentum).

د $(\mathbf{v}`_D)_2$ د ترلاسه کولو لپاره مورِ لرو

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$

$$0.5\text{ m}\,(2\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) = 0.7\text{ m}(2\text{ kg})(v'_D)_2$$

$$(v'_D)_2 = 1.071\text{ m/s}$$

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy): د ډیسک تیزوالی د انرژۍ د ساتنې معادلې په کارولو سره تر لاسه کیږی، کله چې په هغو نقطه کې چې ډیسک پیل شوی وي او هغه نقطه کې چې مزی 0.2 متره اوږد شوی و، ونیولشی.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2}m_D(v_D)_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}m_D(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1.5\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20\text{ N/m})(0.2\text{ m})^2$$

$$(v_D)_2 = 1.360\text{ m/s} = 1.36\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

کله چې $(v_D)_2$ او د هغې

جز $(v'_D)_2$ معلوم شي، د مزي د اوږدېدود سرعت نسبت، یا شعاعي جز $(v''_D)_2$، د پیتاګورین د قضیې څخه موندل کیږي

$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$

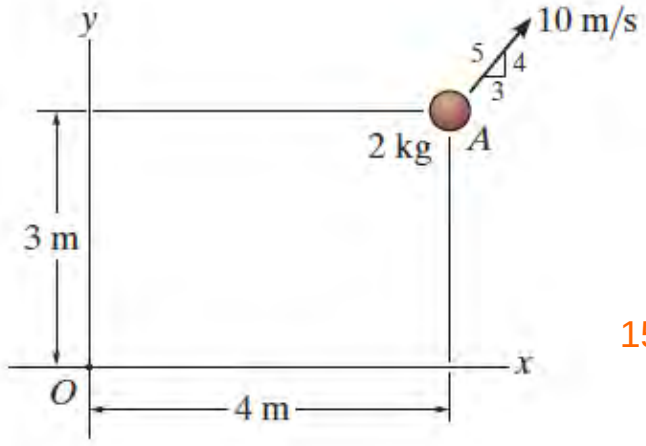
$$= \sqrt{(1.360\text{ m/s})^2 - (1.071\text{ m/s})^2}$$

$$= 0.838\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

بنسټیز پوښتنې

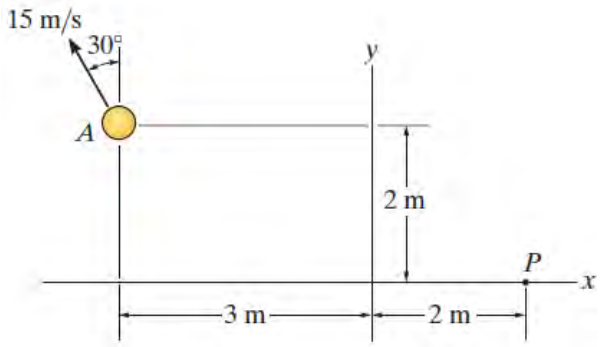
FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

ب 15-19. د 2 کیلو ګرامه ذري A سرعت په لاندی انځور کی ښودل شوی دی. د O نقطې په اړه یې زاویوي مومنتم H_O وټاکئ.



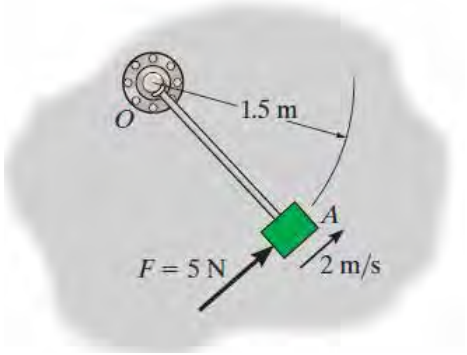
ب 15-19

ب 15-20. د 2 کیلو ګرامه ذرې A سرعت په لاندې انځور کې ښودل شوی دی . د P نقطې په اړه یې زاویوي مومنټم H_P وټاکئ.



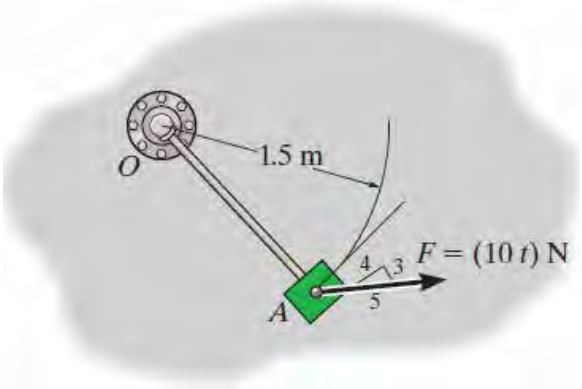
ب 15-20

ب 15-21. په پیل کې 5 کیلو ګرامه بلاک د O په مرکز سره په دایروي لاره په افقي ښویه سطحه په ثابت تیزوالي $2m/s$ سره حرکت کوي. که یوه ثابت مماسي قوه $F = 5\ N$ په بلاک تطبیق شي، نو د بلاک تیزوالی په $t = 3\ s$ کې وټاکئ. د بلاک اندازه او د راډ کتله په پام کې مه نیسئ.



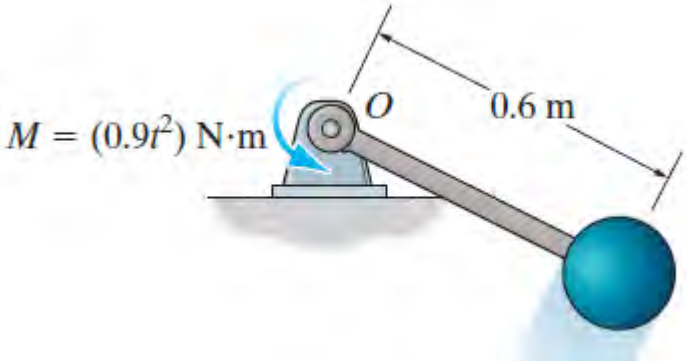
ب 15-21

ب 15-22. 5 کیلو ګرامه بلاک د O په مرکز باندې په دایروي لاره د افقي ښویی سطحې پر سرحرکت کوی، او یوه $F = (10t)N$ قوه ، t په ثانیو کې، وربانده تطبیق شوي ده. که بلاک د دریدلی حالت څخه حرکت پیل کړي، نو تیزوالی یې په $t = 4\ s$ کې وټاکئ. د بلاک اندازه او د راډ کتله په پام کې مه نیسئ. دغه قوه د لارې په مماس کې دایمي ثابته زاویه ساتي.



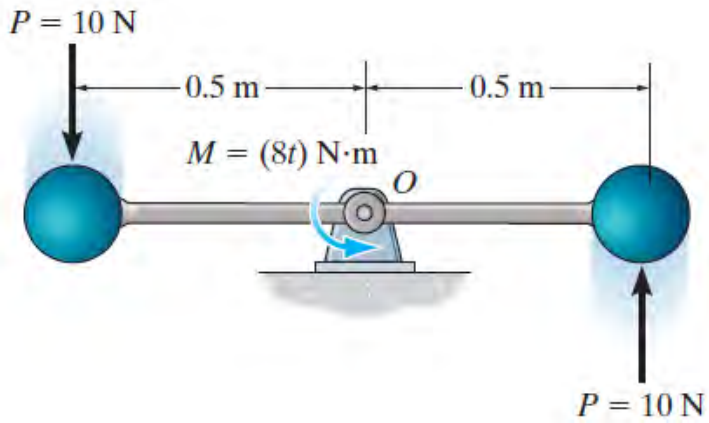
ب 15-22

ب 15-23. په لاندی انځور کی ښودل شوي 2 کیلو ګرامه کره د میلې سره تړلې دی، او په افقي سطح کې په مرکز O سره څرخیږي. که په سیستم باندې د $M = (0.9t^2)$N.m کپل مومنت تطبیق شي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، نو تیزوالی یې په $t = 5$s کې وټاکئ، سیستم د دریدلی حالت څخه پیل شوی دي. د میلې وزن په پام کې مه نیسئ.



ب 15-23

ب 15-24. دوی یوشان 10 کیلو ګرامه کرې د میلې سره تړلې دي، کوم چې په افقي سطحه کې د O په مرکز باندی څرخیږي. که په کرو باندې د $P = 10$N مماسي قوی تطبیق شي او په میله باندې د $M = (8t)$N.m کپل مومنت تطبیق شي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، نو د کرو سرعت په $t = 4$s کې وټاکئ. سیستم له دریدلی حالت څخه پیل کوي. د کرو اندازه او د میلې کتله په پام کې مه نیسئ.



ب 15-24

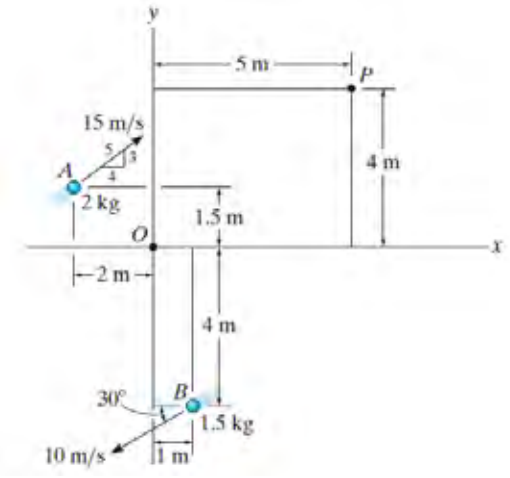
PROBLEMS

پوښتنې

چيرې چې اړتيا وي، بايد د آزاد بدن ديا ګرام جوړ کړي.

15-94. د هرو دوو ذرو زاويوي مومنتم H_O د O نقطې په اړه وټاکئ. سکيلر حل وکاروئ.

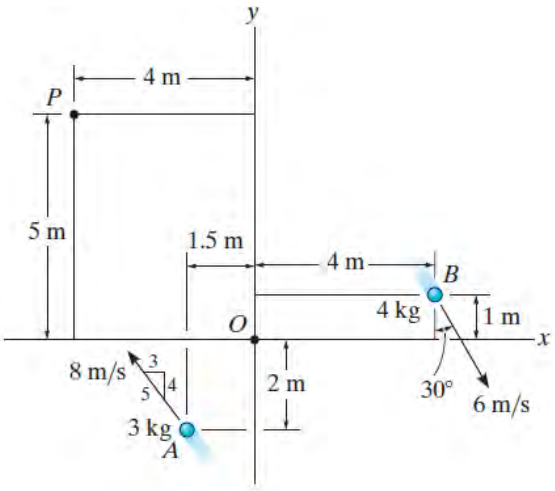
15-95. د هرو دوو ذرو زاويوي مومنتم H_P د P نقطې په اړه وټاکئ. سکيلر حل کاروئ.



پ 15-94/95

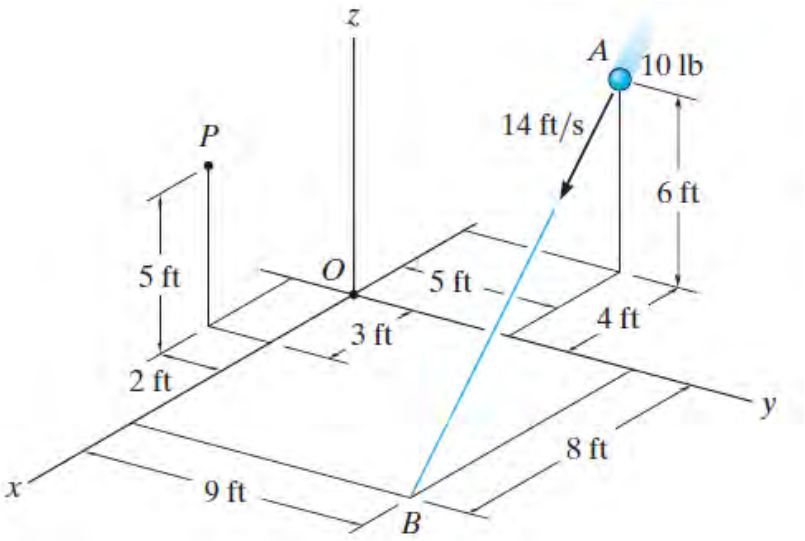
15-96*. د هرو دوو بنودل بنويو ذرو زاويوي مومنتم H_O د O نقطې په اړه وټاکئ.

15-97. د هرو دوو بنودل بنويو ذرو زاويوي مومنتم Hp د P نقطې په اړه وټاکئ.



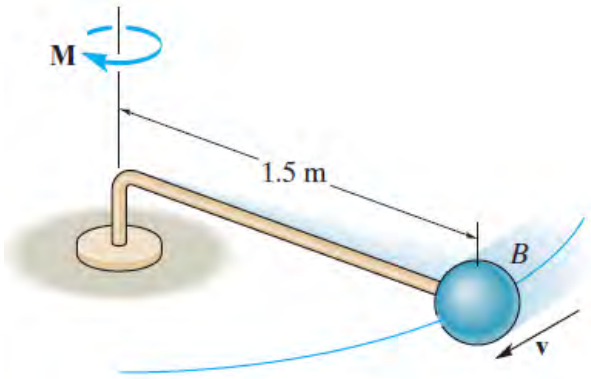
پ 15-96/97

15-98. د ذرې زاويوي مومنتم $\mathbf{H}_O$ د O نقطې په اړه وټاکئ.
15-99. د ذرې زاويوي مومنتم $\mathbf{H}_P$ د P نقطې په اړه وټاکئ.



پ 15-98/99

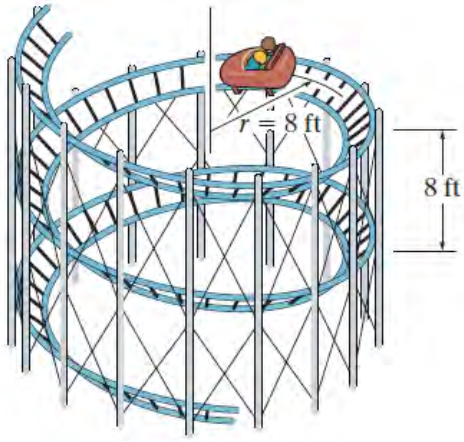
*15-100. توپ B چې 10 کيلو ګرامه کتله لري د يوې ميلې په سر کې ټرل شوی دي، کوم چې کتله يې په پام کې نه نيول کيږي. که په ميله باندې د $M = (3t^2 + 5t + 2)$N.m ټورک تطبيق شي، چيرته چې t په ثانيو کې ده، د توپ تيزوالی په $t = 2$s کې وټاکئ. توپ په $t = 0$ وخت کې $v = 2$ m/s تيزوالی لري.



پ 15-100

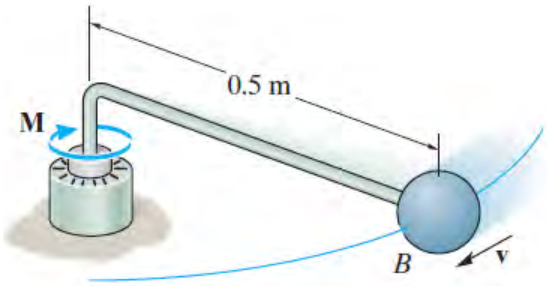
15-101. یو 800 پونډه رولر- کوسټر موټر په استوانه يي مار پيچي لاره (cylindrical helix) له دریدلی حالت نه پیل په حرکت کړي. که د لاری د عمودي قو جز په عرضي جهت په موټر باندی $N_q = 68$ lb پونډه وي، هغه وخت وټاکئ چې موټر د 16 ft/s سرعت په عرضی جهت ترلاسه کړي. د موټر اندازه په پام کې مه نیسئ.

15-102. یو 800 پونډه رولر- کوسټر موټر په استوانه يي مار پيچي لاره (cylindrical helix) له دریدلی حالت نه پیل په حرکت کړي. که د لاری د عمودي قوی جز په عرضي جهت په موټر باندی $N_q = 68$ lb پونډه وي، د سرعت عرضی جز په $t = 4$s کی و ټاکی.
همدارنګه، کله چې موټر 8 ft ښکته شي، د هغه سرعت وټاکئ. د موټر اندازه په پام کې مه نیسئ.



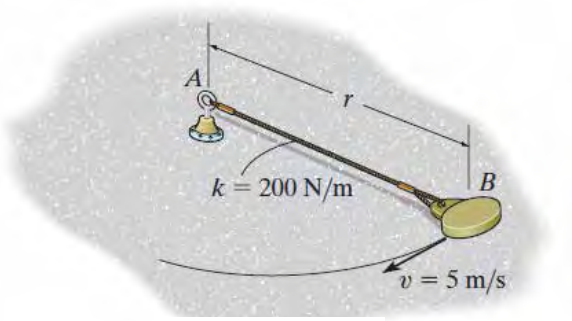
پ 15-101/102

15-103. توپ B چې 10 کیلو ګرامه کتله لري د یوې میلې سر ته ټرل شوی دی، کوم چې د کتله یی په پام کې نه نیول کیږي. که په شافت باندې $M = (2t^2 + 4)$N.m تاوونکی مؤمنت یا تورک تطبیق شي، چیرته چې t په ثانیو کې ده، د توپ تیزوالی په $t = 2$s کې وټاکئ. توپ په $t = 0$ کې $v = 2$m/s تیزوالی لري.



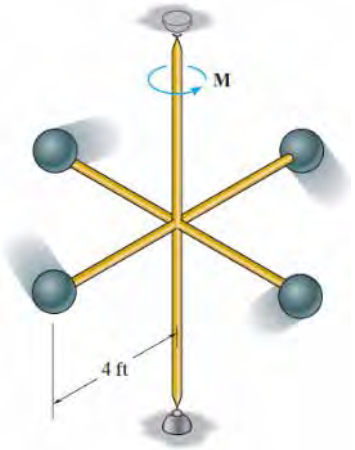
پ 15-103

*15-104. په $r = 1.5\ m$ کې، 5 کیلو ګرامه ډیسک ته $v = 5\ m/s$ تیزوالی ورکړل شوی دی، چې په ایلستیکی تارباندي عمودي وي. د ډیسک تیزوالی او دایلستیکی تار د لنډېدود نسبت کچه په $r = 1.2m$ کې وټاکئ. ډیسک په ښویه افقي سطح باندې ښویږي. د ډیسک اندازه په پام کې مه نیسئ. د ایلستیکی تار نه غځېدلې اوږدوالی $0.5\ m$ دي.



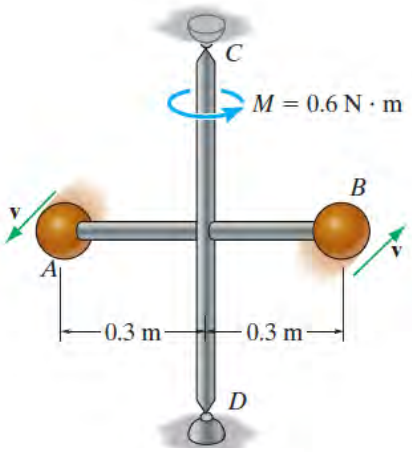
پ 15-104

15-105. هر یو د 5 پونډه کرو (spheres) په کلکه د یو بل نه تیرو میلو په سرو کی تړل شوي دي. چوکاټ د تول له مخی د پام وړ نه دی او په ازاده توګه څرخیږی.
که یو $M = (5t + 2)lb.ft$ تاویدونکی مؤمنت په چوکاټ تطبیق شي، د هرې کرۍ تیزوالی په 4 ثانیو کې وټاکئ، چې له دریدلی حالته حرکت پیل کوي. دلته t په ثانیو کی اندازه شوي ده.



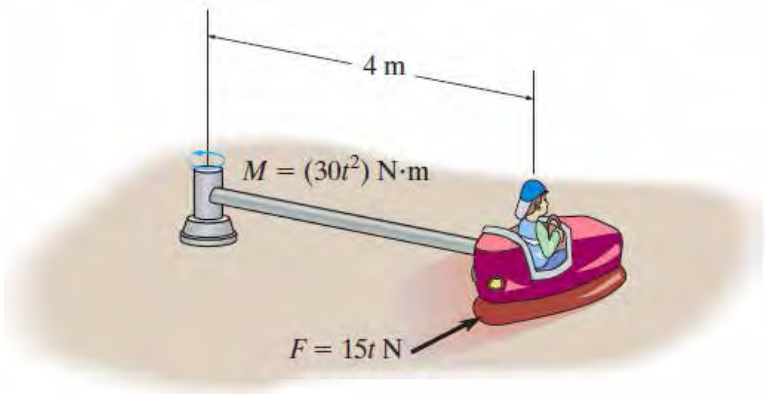
پ 15-105

15-106. دواړه کرې A او B هر یو 400 ګرامه کتله لري. کرې په افقي میلو ترل شوي دي او د دوی د پیل سرعت 2 m/s دی. که د $M = 0.6$ N.m تاویدونکی مؤمنت په چوکاټ تطبیق شي، د کرو تیزوالی په 3 s کې وټاکئ. د تکیه شوي چوکاټ کتله په پام کې نه نیول کیږي او د څرخېدو لپاره آزاد دی. د کرو اندازه په پام کې مه نیسئ.



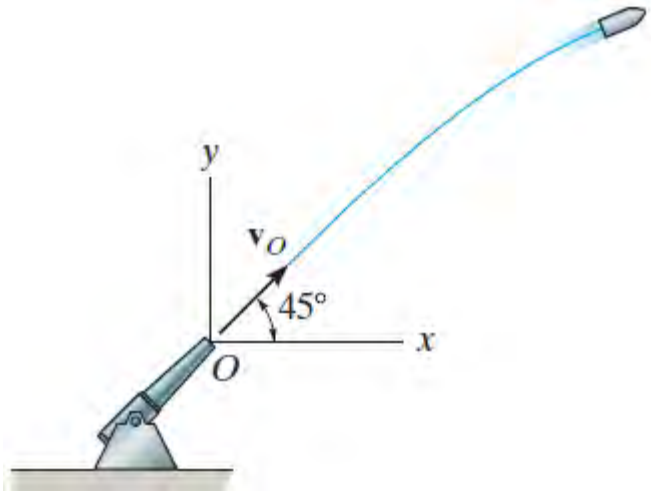
پ 15-106

15-107. که په هغه میله چې وزن یې د حساب وړ نه دی ، $M = (30t^2)$ N.m تاویدونکی مؤمنت تطبیق شي، او د موټر انجن $F = (15t)$N کششي قوه د ټیرو څرخونو لپاره تولیده وی، چیرته چې t په ثانیو کې ده، د موټر سرعت په $t = 5$s کې وټاکئ. موټر له دریدلی حالته حرکت پیل کوي. د موټر او سپرلی ټوله کتله 150 کیلو ګرامه ده. د موټر اندازه په پام کې مه نیسئ.



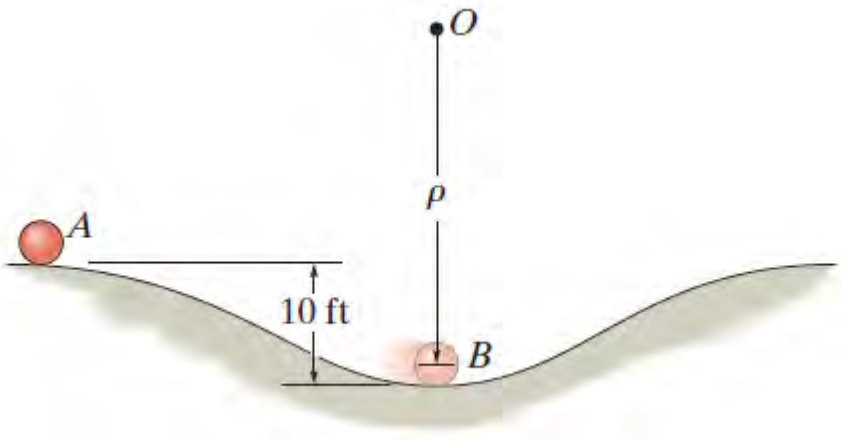
پ 15-107

*15-108. د 3 کیلو ګرامه ګولی چې د توپ له خولی څخه په v_0 =500 m/s سرعت سره ویشتل شویی، د ګولی زاویوي مومنتم O نقطې ته په هغه وخت کې وټاکئ کله چې دا د خپل مسیر د لوړې نقطې په سر کې وي.



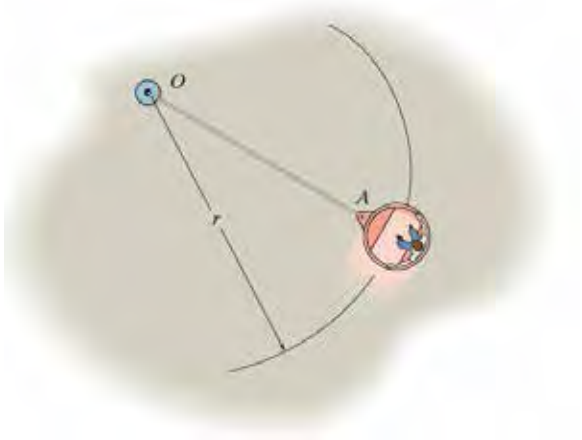
پ 15-108

15-109. یو 3 پونډه توپ په A موقعیت کې له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي او د منحني لارې لاندې حرکت کوي. که توپ په B نقطه کې په لاره باندې 5 پونډه عمودی قوه تطبیق کړي، د منحنی مرکز O په اړه د توپ زاویوي مومنتم وټاکئ. **مرسته**: د توپ اندازه په پام کې مه نیسئ. د B په نقطه کی د انحنا د شعاع (radius of curvature) اوږدوالی لومړی باید وټاکل شي.



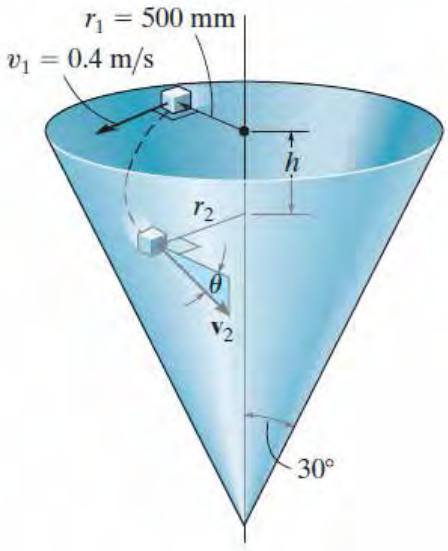
پ 15-109

15-110.د ساتیرۍ پارک موټر او سپرلۍ ټول 200 کیلو ګرامه دی چې په 3 m/s تیزوالی سره په 8 m شعاع دایروي لاره باندې حرکت کوي. که په $t = 0$ کې، د OA کیبل د O نقطې په لور په 0.5 m/s سرعت سره کشکیږي، د موټر تیزوالی په $t = 4s$ کې وټاکئ. همدارنګه، د کیبل د کشکولو لپاره ترسره شوی کار وټاکئ.



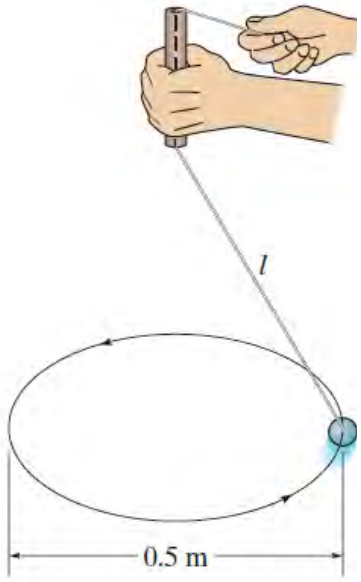
پ 15-110

15-111. یو کوچنی بلاک چې 0.1 کیلو ګرامه وزن لري، په افقي ډول $v_1 = 0.4$ m/s سرعت ورکول کیږي کله چې $r_1 = 500$ mm وي. په بنویه مخروطي سطحه بنویږي. هغه بنکته فاصله h وټاکئ، تر څو بلاک $v_2 = 2$ m/s سرعت ترلاسه کړي. همدارنګه، د بنکته کېدو زاویه q چې د افق څخه د لاري مماس ته اندازه کیږي، وټاکئ.



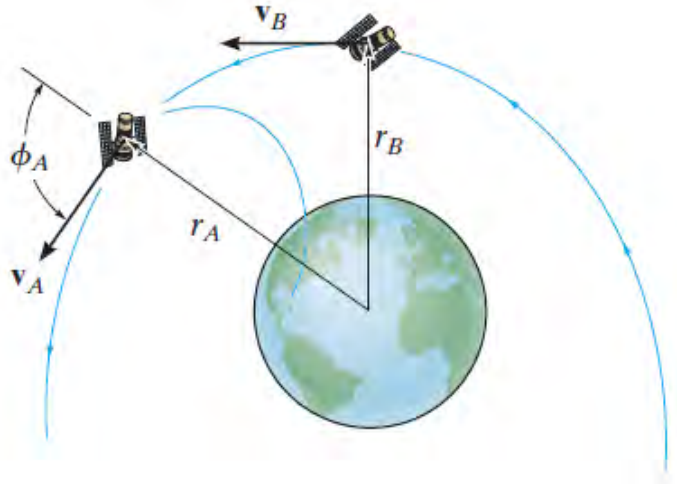
پ 15-111

15-112. د 2 کیلو ګرامه توپ د 0.5 m قطر لرونکې دایروي لاره کې په ثابت تیزوالی سره څرخیږي. که د تار اوږدوالی له $l = 1$ m څخه $l' = 0.5$ m ته د تیوب نه په کشکولو کم شي، نو د نویې لارې قطر d' وټاکئ. همدارنګه، د هر حالت لپاره په تار کی کشش وټاکئ.



پ 15-112

15-113. د ځمکې سپوږمکۍ چې 700 کیلو ګرامه کتله لري، د ځمکې په شاوخوا کې په ازاد پرواز کې توغول شوې ده، چې په پیل کې $v_A = 10$ km/s تیزوالي لري کله چې د ځمکې له مرکز څخه $r_A = 15$Mm فاصله لری. که د توغولو زاویه $f_A = 70^0$ وي، د سپوږمۍ تیزوالی v_B او د ځمکې له مرکز څخه تر ټولو نږدې فاصله r_B وټاکئ. د ځمکې کتله Me =5.976(10^{24})kg وکاوي. **مرسته**: په دې شرایطو کې سپوږمۍ یوازې د ځمکې د جاذبې ځواک سره مخ ده، $F = GM_em_s/r^2$، معادله 13-1 وکاروئ. د حل یوې برخې لپاره د انرژۍ د ساتنې قانون وکاروئ.

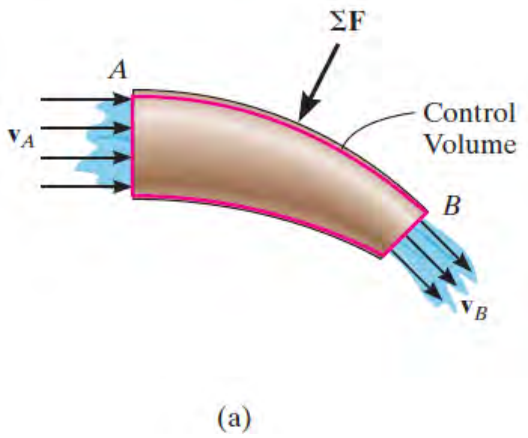


پ 15-113

15.8 جسمونه چې له کنټلوی جريان سره مخ دي

(BODIES SUBJECTED TO A MASS FLOW)

په ټيرو برخو کې، موږ د ذرو سيستم باندې د امپولس او مومنتم اصول تطبيق کړل کوم چې د سخت جسم جوړونکی وي او ټرلې حدود لري. په دې برخه کې، موږ به د ذرو سيستم باندې د امپولس او مومنتم اصول تطبيق کړو کوم چې کولی شي د يوه حجم څخه ووزي يا يې دننه شي، په داسې حال کې چې دا حجم خلاص حدود لري .



(a)

انځور 15-27

معمولاً د دې قضيو لپاره د کنټلی دجريان تحليل د کنټرول حجم له لارې ترسره کيږي او د مايعاتو ميخانيک* (Fluid Mechanics) کې بحث کيږي. دلته، به موږ دا طريقه د دوو مشخصو حالاتو لپاره چې پراخه استعمال لري وکاروو. مخکې له دې چې دا کار وکړو، موږ به لومړی يوه عمومي معادله ترلاسه کړو چې په دواړو حالتو کی تطبيق کيږي. ددی لاسته راوړنی د پاره به موږ د زرو سيستم په نظر کی ونيسوو لکه مايع چې د يوه پايپ له لارې تيريږي، لکه څنګه چې په انځور 15-27a کې ښودل شوی. لکه څنګه چې په انځور 15-27b کې ښودل شوی، د ذرو لومړنی مومنتم $(m\mathbf{v})_1$دی. په Δt وخت کې، امپلسی قواوی $\Sigma \mathbf{F}$ ، لکه د پايپ ديوال يا د ننوتو او وتو فشار، په متحرکو ذرو باندې عمل کوي او د دوی د سرعت مقدار او جهت ته بدلون ورکوي، نو د سيستم وروستی مومنتم $(m\mathbf{v})_2$ کيږي.

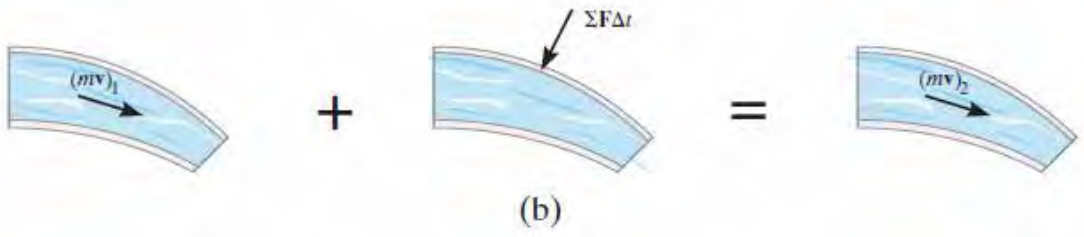
که موږ د امپلس او مومنتم اصول په ذرو تطبيق کړو، موږ لرو:

$$(m\mathbf{v})_1 + \Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = (m\mathbf{v})_2$$

$$\Sigma \mathbf{F}\,\Delta t = \Delta m\mathbf{v} \qquad (15\text{–}26)$$

د ټولو ذرو د مومنتم مهاليز بدلون، $\Delta m\mathbf{v}$، ستونزمن کار دی، ځکه چې دوی تصادفی حرکت په سيستم کی لری. د $\Delta m\mathbf{v}$ موندلو غوره لاره دا ده چې دا د ځانګړي ځای په اړه په پام کې ونيسو، چې کنټرول حجم بلل کيږي، لکه څنګه چې په انځور 15-27a کې ښودل شوی. د بيلګې په توګه، که ذرو يوه مايع جوړه کړي، نو کنټرول حجم کولی شي د پايپ يا چينل، ټوربين، يا پمپ د سختو

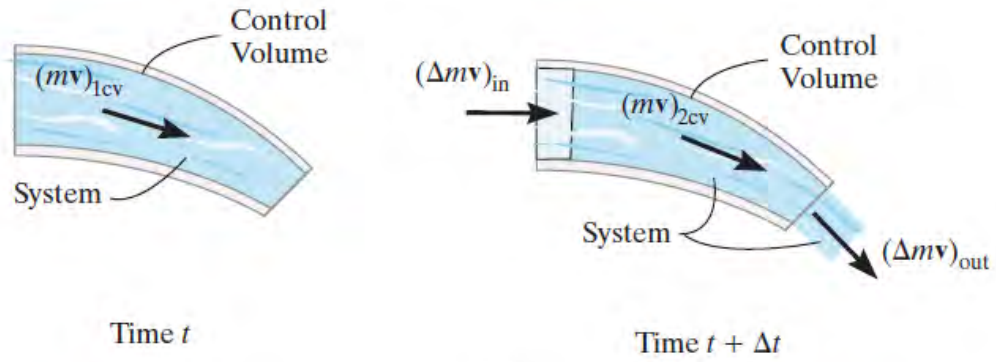
حدونو او خلاصيدو اندازه او شکل تعريف کړي. راکټ يا جيټ انجن هم د کنټرول حجم په توګه انتخاب کيدی شي، او په دې حالت کې مورِ کولی شو دا د حرکت په توګه په پام کې ونيسو.



(b)

انځور 15-27(ادامه)

* و ګورئ Fluid Mechanics, R.C. Hibbeler, Pearson Education



(c)

انځور 15-27

زمورِ د موخو لپاره، به مورِ د کنټرول حجم د پايپ په سيمه کې واخلو لکه څنګه چې په انځور 15-27c کې ښودل شوی. په وخت t کې، د سيستم ټولی ذری د کنټرول حجم دننه دي، نو د سيستم ټول مومنتم $(mv)_1 = (mv)_{1cv}$ دی. مګر په $t + \Delta t$ کې، د سيستم ځينې ذری به د کنټرول حجم څخه بهر شي، پداسې حال کې چې نوری ذری، چې د سيستم برخه نه وه، به يې دننه شي. د دې ذرو مومنتمونه په ترتيب سره $(\Delta mv)_{out}$ او $(\Delta mv)_{in}$ دي. د کنټرول حجم دننه د سيستم پاتې ذرو مومنتم $(mv)_{2cv}$ ته بدل شوی دی. په پايله کې د مومنتم بدلون دا کيږي:

$$\Delta m\mathbf{v} = (\Delta m\mathbf{v})_{cv} + (\Delta m\mathbf{v})_{out} - (\Delta m\mathbf{v})_{in}$$

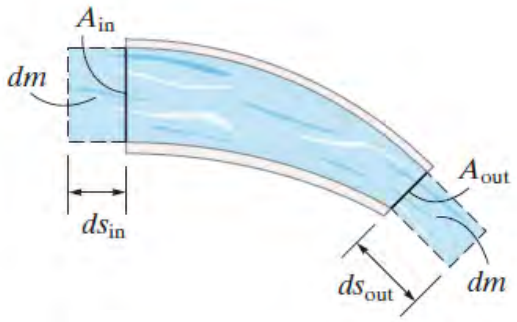
په لنډه توګه، د سیسټم مومنټم بدلون نسبت د کنټرول حجم ته چې لیدل کیږی، دوه برخې لري، یعنې: هغه بدلون چې د کنټرول حجم دننه کیږي، $(\Delta m\mathbf{v})_{cv} = (m\mathbf{v})_{2cv} - (m\mathbf{v})_{1cv}$، او په کنټرول حجم کې د سیسټم د مومنټم خالص بدلون چې بهرد کنټرول د حجمه کیږی، $(\Delta m\mathbf{v})_{out} -$ $(\Delta m\mathbf{v})_{in}$.

که مونږ پورته معادله په 15–26 معادله کی ځای پر ځای کړو او په Δt یی وویشو، او اجازه ورکړو چې $\Delta t \longrightarrow 0$ شي، نو پایله دا کیږي:

$$\Sigma \mathbf{F} = \left(\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\right)_{cv} + \dot{m}_{out}\mathbf{v}_{out} - \dot{m}_{in}\mathbf{v}_{in} \qquad (15–27)$$

د $\dot{m} = dm/dt$ اصطلاح د ***کتله جریان*** په نوم یادیږي. دا د هغو ذرو شمېره څرګندوي چې د کنټرول حجم ته، ننوزی او یا وزی په یوه واحد وخت کې. که چیرې ذری مایع وي، او د کنټرول پرانیستې سطحې غوڅی برخی A_{in} او A_{out} ولري، انځور 15-28، نو د کتله ساتنه د دې سطحو له لارې د اړتیا لري $dm = \rho\, dV = \rho_{in}(ds_{in}A_{in}) = \rho_{out}(ds_{out}A_{out})$ ، چیرې چې ρ د سیسټم (مایع) کثافت دی او $dV = ds\, A$ د عنصر هغه حجم دی، چې دکنټرول سطحې ته ننوزی او یا وزی. له همدې امله، د وخت dt په جریان کې ، څرنګه چې $v_{in} = ds_{in}/dt$ او $v_{out} = ds_{out}/dt$ دي، مونږ لرو $\dot{m} = \rho_{in} v_{in}A_{in} = \rho_{out} v_{out}A_{out}$ ، یا په عمومي توګه

$$\dot{m} = \rho v A = \rho Q \qquad (15–28)$$



انځور 15-28

د $Q = vA$ اصطلاح د مایع د جریان حجم په واحد وخت کې اندازه کوي، او دا د حجمي جریان (***volumetric flow***) په نوم یادیږي. په راتلونکو دوو برخو کې به مونږ د 15–27 معادلی دوی مهمې غوښتنې په پام کې ونیسو.

15.9 د مایع د بهیر دوامداره جریان

(STEADY FLOW OF A FLUID STREAM)

په انجینري کې ځینې پوښتنې دې ته اړتیا لري چې د مایع په بهیر باندې عمل کوونکي قواوی پیدا شي تر څو جریان چې په یوه پایپ یا پر تیغه باندې تیریږي، وګرزوو یا منحرف کړو. کله چې دا حالت وي، که مونږ مایع غیر متراکم (*incompressible*) او جریان دوامداره (*steady*) وبولو، یعني د وخت په لحاظ خپلواک وي، نو په کنټرول حجم کې به د حرکت په مومنتم کې بدلون نه راځي. په پایله کې، د معادلی 15–27 ښي اړخ کې لومړی اصطلاح به صفر ته مساوي وي. همدارنګه، د کتلی د ساتنې له امله $\dot{m} = \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$ ، زمونږ پایله داسې کیږي:

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_{out} - \mathbf{v}_{in}) \qquad (15–29)$$

دا تګ لاره هر وخت کارول کېدای شي کله چې دا معادله د دې لپاره وکارول شي چې د هغه آلې باندې عمل کوونکی قوه معلوم شي، لکه یو پایپ یا تیغه، چې دوامداره جریان لرونکی مایع منحرفوي.



د کنویر تسمه باید اصتکاکی قواوې د رالوېدونکي شګو لپاره برابرې کړي تر څو د شکو جریان مومنتم بدل کړي، او دا په تسمه باندې سفر کړلو ته ادامه ورکړي.



د دې پکې په یوې خوا کې هوا اساساً په دریدلی حالت کې وي، او کله چې هوا د تیغونو له لارې تیریږي، د هغو مومنتم زیاتیږي. د دې لپاره چې د هوا د جریان مومنتم بدل شي، تیغونه باید په جریان د هوا باندې افقي زور (*thrust*) وارد کړي. کله چې تیغونه په چټکۍ سره وګرځي، د هوا مساوي مګر مخالف زور په تیغونو باندې د څرخونو د حرکت مقاومت ماتولی شي او د پکی چوکاټ حرکت کولی شي.

د تحلیل تګلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

کنټرول حجم (Control Volume). کنټرول حجم داسې انتخاب کړئ چې د هغې آزاد بدن انځور کې هغه نامعلومی قواوې شامل وي چې د معلومولو اړتیا لري. دا حجم کولی شي هم جامد او هم مایع برخې ولري.

آزاد - بدن ډایګرام (Free-Body Diagram) .

د کنټرول حجم آزاد بدن انځور رسم کړئ ترڅو هغه قواوی **ΣF** وپیژنئ چې پرې عمل کوي. دا قواوی کېدای شي د اتکا ریکشنونه ، د کنټرول حجم تول، او د مایع په حالت کې د ستاتیک ګیج فشار قواوی چې په مایع باندی عمل کوی، لکه د کنټرول په ازاده سطحه، یا په ټرلې سطحه یا سرحدونو کی*. د ګیج فشار (gage pressure) هغه فشار دی په مایع کې چې د اتموسفیر فشارنه پورته یا ښکته اندازه کېږي. په پایله کې، که یو پرانیستل شوی ځای اتموسفیر ته خلاص وي، نو د ګیج فشار به صفر وي.

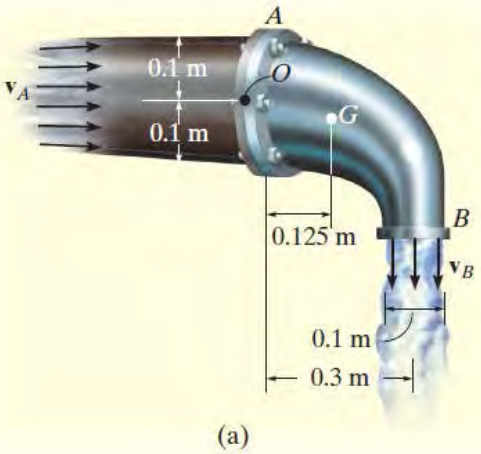
د مومنتم معادله (Principle of Work and Energy).

د کتله جریان د معادلی 15–28 څخه معلومېږي. یو اینرشیایي x, y محوری سیستم جوړ کړئ او معادله 15–29 د محورنو په امتداد کې د سرعت اجزاوو سره په پرانیستل شویو کنټرول سطحو، او په آزاد بدن انځور کې ښودل شوی قواویو په اجزاوو تطبیق کړئ. که کنټرول حجم د سرعت سره حرکت کوي، نو معادله په نسبت د کنټرول حجم سره تطبیق کړئ ترڅو چې دوامداره جریان په نسبت د پرانیستې کنټرول سطحو سره رامنځته شي.

مثالونه

مثال 15.16

د قوی هغه اجزاوي معلومی کړئ چې کلک تړل شوي پایپ په جاینټ A کې په څنګل باندې واردوي، انځور 15-29a و ګوری، کله چې د اوبو جریان چې له پایپ څخه تیریږي د 100 kPa ستاتیک ګیج فشار په A کې جوړه وي. په B کې حجمي جریان Q_B = 0.2 m³/s دی. د اوبو کثافت r_w = 1000 kg/m³ ، او په اوبو ډکه څنګل 20 کیلوګرامه تول لري او د کتلې مرکز یې په G کې دی.



(a)

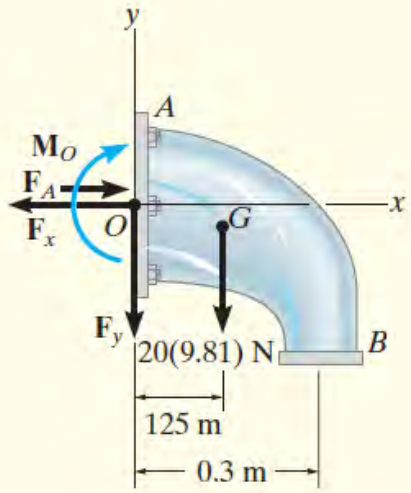
حل

موږ به کنټرول حجم څنګل او په دې کې موجودي اوبه په پام کې ونیسو. د یو ثابت اینرشیل محوری سیستم په کارولو سره، د جریان سرعت په A او B کې او د کتلې جریان د معادلې 15–28 څخه ترلاسه کولی شو. ځکه چې د اوبو کثافت ثابت دی، $Q_B = Q_A = Q$. له همدې امله

$$\dot{m} = \rho_w Q = (1000\ \text{kg/m}^3)(0.2\ \text{m}^3/\text{s}) = 200\ \text{kg/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.05\ \text{m})^2} = 25.46\ \text{m/s} \downarrow$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.1\ \text{m})^2} = 6.37\ \text{m/s} \rightarrow$$



(b)

انځور 15-29

د جسم آزاد انځور
(Free-Body Diagram)

لکه څنګه چې په انځور 15-29b کې د کنټرول حجم (څنګل) په آزاد بدن انځور کې ښودل شوي، په A کې ثابت اتصال په څنګل باندې یو محصله کپل مومنت M_O او د قوو اجزاوی F_x او F_y واردوي. د اوبو په پایپ کې د ستاتیک فشار له امله، د فشار قوه چې په پرانیستې کنټرول سطحه A کې عمل کوي F_A ده، چې $F_A = p_A A_A$ دی.

څرنګه چې 1 kPa = 1000 N/m² ،

$$F_A = p_A A_A = [100(10^3)\,\mathrm{N/m^2}][\pi(0.1\,\mathrm{m})^2] = 3141.6\,\mathrm{N}$$

په B کي هيڅ ستاتيکی فشار نشته، ځکه چې اوبه په اتموسفير فشار کي خارجيږي؛ يعني په B کي د ګيج په واسطه اندازه شوی فشار مساوي په صفر، $p_B = 0$ دی.

د متداوم جريان معادلې (Equations of Steady Flow)

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \dot{m}(v_{Bx} - v_{Ax});\ -F_x + 3141.6\,\mathrm{N} = 200\,\mathrm{kg/s}(0 - 6.37\,\mathrm{m/s})$$

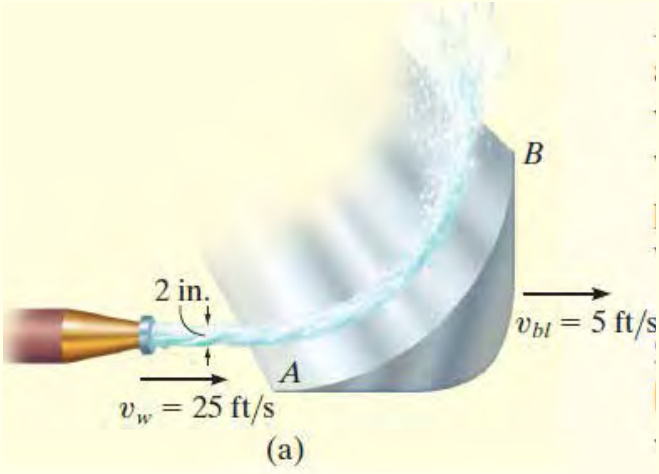
$$F_x = 4.41\,\mathrm{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = \dot{m}(v_{By} - v_{Ay});\ -F_y - 20(9.81)\,\mathrm{N} = 200\,\mathrm{kg/s}(-25.46\,\mathrm{m/s} - 0)$$

$$F_y = 4.90\,\mathrm{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

يادونه: د کپل مومنت M_O د زاويي امپلس او مومنتم معادلې په کارولو سره معلومېدای شي، چې د مايعاتو په ميخانيک کي بحث شوی ده.

مثال 15.17



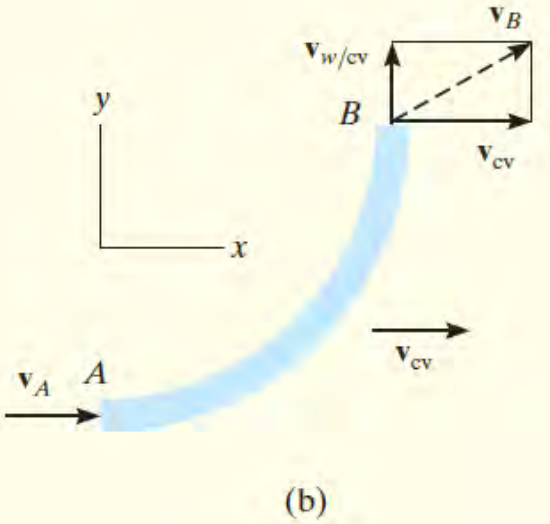
يو د اوبو جت چې 2 انچه قطر لري په 25 ft/s سرعت سره په يوه واحده متحرکه تيغه باندې لګی، انځور 15-30a . که چيرې تيغه د جت څخه په بل لوري په 5 ft/s ثا بت سرعت سره حرکت وکړي، نو په اوبو باندې د تيغه لخوا وارد شويي قوی، افقي اوعمودي اجزا وی معلومی کړئ. اوبه په تيغه باندی څومره توانايی توليدوي؟ د اوبو ځانګړی تول $g_w =$ 62.4lb/ft3دی.

حل

کينمتيک ډايګرام (Kinematic Diagram) .

دلته کنټرول حجم به د اوبو جريان په تيغه وي. د انرشيل محوری سيستم 5 ft/s کې حرکت کوي،

نو په تیغه جریان د متداوم جریان په توګه ښکاري، انځور 15-30b . نو د اوبو د داخلېدو جریان، کنټرول حجم ته، په *A* کې دی:



(b)

انځور 15-30

همدا

$$\mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{cv} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\}\ \text{ft/s}$$

رنګه، د جریان سرعت په *B* کې چې د کنټرول

$$\mathbf{v}_B = \{20\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}$$

حجم څخه اندازه کیږي عبارت دي په :

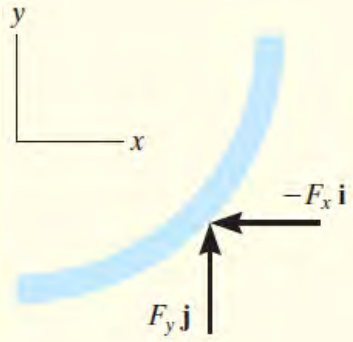
د اوبو د کتلې جریان د کنټرول حجم له لارې عبارت دي په:

$$\dot{m} = \rho_w(v_{w/cv})A_A = \left(\frac{62.4}{32.2}\right)(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0.8456\ \text{slug/s}$$

د جسم آزاد انځور (Free-Body Diagram)

د کنټرول حجم دآزاد بدن انځور په 15-30c کې ښودل شوی. د اوبو تول په محاسبه کې نه نیول کیږي، ځکه چې دا قوه د ریکشن قوی اجزاوو $\mathbf{F}_x$ او $\mathbf{F}_y$ په پرتله کوچنی ده.

د متداوم جریان معادلې (Equations of Steady Flow)



(c)

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = 0.8456(20\mathbf{j} - 20\mathbf{i})$$

د اړوندو *i* او *j* اجزاو برابرکول:

$$F_x = 0.8456(20) = 16.9\ \text{lb} \leftarrow \qquad \textit{Ans.}$$

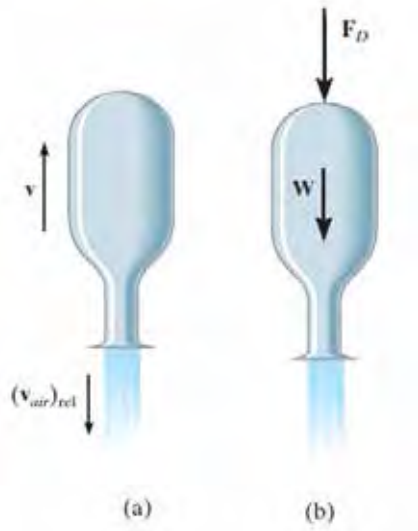
$$F_y = 0.8456(20) = 16.9\ \text{lb} \uparrow \qquad \textit{Ans.}$$

اوبه په تیغه مساوي مګر مخالفی قواوی واردوي.

له هغه ځایه چې د اوبو قوه F_x=16.9 lb لامل د تیغې د مخ په وړاندې افقي سرعت 5 ft/s کیږي، نو د معادلې 10–14 څخه توانایي دا ده :

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \qquad P = \frac{16.9\ \text{lb}(5\ \text{ft/s})}{550\ \text{hp/(ft} \cdot \text{lb/s)}} = 0.154\ \text{hp} \qquad \textit{Ans.}$$

15.10 هغه جسمونه چې کتله له لاسه ورکوي یا یې ترلاسه کوي (BODIES THAT LOSE OR GAIN MASS)



انځور 15-31

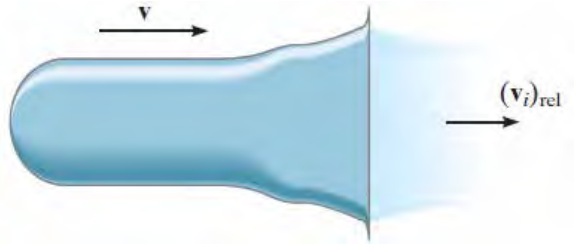
په دې برخه کې به مورِ معادله 15–27 هغو حالتونو ته تطبیق کړو چیرې چې یو بدن کتله له لاسه ورکوي یا یې ترلاسه کوي. د دې ډول عام مثالونه د یوه پرانیستې سرونوبالون یا یوه متحرکه بیلچه دي. په دې دواړو حالتونو کې دا مهمه ده چې وپوهیږو چې د کتلې له لاسه ورکول یا ترلاسه کول به د کنټرول حجم په داخلي سرحد کې یوه قوه یا امپلس تولید کړي. په هر حالت کې، مورِ به دکنټرول حجم او د هغې محتویات چې په یوه ټاکلي لحظه کې په سرعت v_{cv} سره حرکت کوي د بدن په توګه ونیسو. دلته د کنټرول حجم دننه د مومنتم بدلون د وخت په نسبت اوس باید د کتلې او سرعت بدلونونه حساب کړي، یعنی

$$. (\mathrm{d}\,(mv)/dt)_{cv} = (\dot{m}\mathbf{v})_{cv} + (m\dot{\mathbf{v}})_{cv}$$

دا په معادله 15–27 کې ځای په ځای کولو سره، مورِ لرو:

$$\Sigma \mathbf{F} = (\dot{m}\mathbf{v})_{cv} + (m\dot{\mathbf{v}})_{cv} + \dot{m}_{out}\mathbf{v}_{out} - \dot{m}_{in}\mathbf{v}_{in} \qquad (15\text{–}30)$$

د تطبیق د تشریح لپاره، یوبالون (کنټرول حجم) په پام کې ونیسئ چې د سرعت v سره پورته حرکت کوي او کتله (هوا) له لاسه ورکوي، انځور 15-31a. په پورته معادله کې وروستۍ برخه صفر ده ځکه چې هوا په بالون کې دننه پاتې ده. که $\dot{m}_{out} = \dot{m}_e$ چیرې د هوا د خارج کیدو کچه وي، نو په کنټرول حجم کې کتله له لاسه ورکول کیږي، نو $\dot{m}_{cv} = -\dot{m}_e$. همدارنګه، که چیرې د خارج شوي هوا سرعت $(\mathbf{v}_e)_{rel}$ وي، لکه څنګه چې د بالون په نسبت اندازه کیږي، نو د دې هوا سرعت لکه څنګه چې د ثابت لیدونکی لخوا لیدل کیږي ،



انځور 15-32

$\mathbf{v}_{out} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}_e)_{rel}$.

دا برخی په پورتنۍ معادله کی ځای په ځای او ساده کوویی، مونږ لرو

$$\Sigma \mathbf{F} = (m\dot{\mathbf{v}})_{cv} - \dot{m}_e(\mathbf{v}_e)_{rel} \qquad (15–31)$$

لکه څنګه چې په انځور 15-31b کې د بالون د آزاد بدن انځور کې ښودل شوی، یوازې قواوی چې عمل کړي، د ده تول $\mathbf{W}$ او د اتموسفیر د ډرګ قوه $\mathbf{F}_D$ دي. په معادله 15-31 کې د ښي خوا وروستۍ برخه دهغه زور (thrust) استازیتوب کوي چې د دود کش (exhaust) لخوا په بالون واردیږي او دا پورته حرکت کوي، او د ده لپاره یوه تعجیل $\dot{v}$ ورکوي.

په ورته ډول،معادله 15–30 کیدی شي چې په سکوپ (scoop) په انځور 15-32 کی هم تطبیق شي، چې د $\mathbf{v}$ سرعت سره ښیې خوا ته حرکت کوي چې کتله په کچه $(\dot{m})_{cv} = \dot{m}_i$ کې داخل کیږي. دلته $\dot{m}_{out} = 0$ او $\dot{m}_{in} = \dot{m}_i$. که د داخل شوي کتلې نسبي سرعت $(\mathbf{v}_i)_{rel}$ وي، نو $\mathbf{v}_{in} = \mathbf{v} + (\mathbf{v}_i)_{rel}$ وي، او معادله 15–30 اوس داسې کیږي:

$$\Sigma \mathbf{F} = (m\dot{\mathbf{v}})_{cv} - \dot{m}_i(\mathbf{v}_i)_{rel} \qquad (15–32)$$

وروستۍ برخه دهغه قوی د اندازی استازیتوب کوي، کوم چې داخل شوی کتله یې په سکوپ واردوي.

لکه څنګه چې د دې دوو مثالونو لخوا ښودل شوي، کله چې معادله 15–30 کارول کیږي، په هر حالت کې، دا مهمه ده چې لومړی کنټرول حجم تعریف شي او بیا د آزاد بدن انځور رسم کړئ تر څو پر بدن باندې وارد شوي قواوې وپیژندل شي او د مایع یا ذرو د جریان لخوا رامینځته شوي زور یا ځنډ (retardation) مشخص شي.



د دې ټراکټر شاته د غوڅونکې صندوق په کچه د $m^{\cdot}$ کتله ترلاسه کوي . که چیرې ټراکټر یو ثابت سرعت v وساتي، نو $v^{\cdot} = 0$ وی، ځکه چې خاوره په اصل کې په دریدلی حالت کې ده، $(v_i)_{rel} = v$. دمعادلې 15–32 په کارولو سره، افقي کښونکې قوه په غوڅونکې صندوق باندې په دې توګه دی:

$$T = 0 + m^{\cdot}v$$

مثال 15.18



انځور 15-33

د یوه راکټ او د ده د تیلو ابتدایي مجموعي کتله m_0 ده. د راکټ دننه د تیلو کتله m_f په یو ثابته کچه $\dot{m}_e = c$ ، او په یوه ثابت تیزوالی u نسبت راکټ ته بهر ته ایستل کیږي. د راکټ اعظمي سرعت تعیین کړئ، په هغه شیبه کې چې تېل خلاص شي. د راکټ د تول بدلون د ارتفاع سره او د هوا کشیدونکې مقاومت (ډرګ) په نظر کې مه نیسئ. راکټ په عمودي ډول له دریدلی حالت څخه ویشتل شوی.

حل

څرنګه چې راکټ پورته حرکت کوي خپله کتله له لاسه ورکوي ، $m^{\cdot}_{out} = -c$ همدارنګه، $m^{\cdot}_{in} = 0$، او معادله 15-31 تطبیق کیږي. یواځینی خارجي قوه چې په کنټرول حجم (راکټ) باندې عمل کوي، د ده تول **W** دی، انځور 15-33. له دې امله:

$$+\uparrow \Sigma F = (m\dot{v})_{cv} - \dot{m}_e(v_e)_{rel}; \qquad -W = m\dot{v} - cu \qquad (1)$$

د راکټ سرعت د دې معادلې د انټګرال اخیستلو له لارې ترلاسه کیږي. په هر ورکړل شوي وخت t کې د الوتنې په جریان کې، د راکټ کتله ده:

$$m = m_0 - (\dot{m}_e)\, t = m_0 - ct$$

ځرنګه چې $W = mg$ دی، نو معادله 1 دا شکل غوره کوي:

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt} - cu$$

د متغیرونو جلا کول او انټګرال اخیستل، په دې پوهیږو چې v = 0 کله چې t = 0 وي، مورِ لرو:

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{cu}{m_0 - ct} - g\right) dt$$

$$v = -u\ln(m_0 - ct) - gt\Big|_0^t = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt \qquad (2)$$



انځور 15-33

پام وکړئ چې د پورته توغندیدلو لپاره اړتیا ده چې په لومړیو مرحلو د حرکت کې په بښې اړخ کې لومړۍ برخه له دوهمې برخې څخه لویه وي. د دې لپاره چې هغه وخت t' وموسو چې ټول تېل مصرف شي، مورِ لرو:

$$m_f = ct'$$

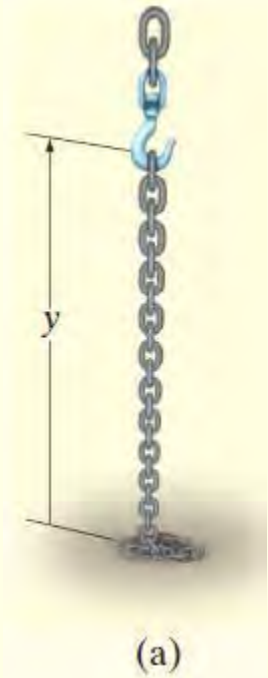
یا

$$t' = m_f/c$$

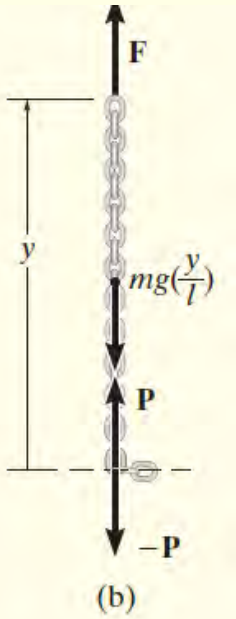
په معادله 2 کې دا ځای په ځای کوو او دا لاندې په لاس راځي:

$$v_{max} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{gm_f}{c} \qquad Ans.$$

مثال 15.19



(a)



(b)

انځور 15-34

یو زنځیر چې اوږدوالی یې l دی، لکه څنګه چې په انځور 15-34a کې ښودل شوی، m کتله لري. دهغه اړتیا وړقوی **F** اندازه وټاکئ ترڅو چې (a) زنځیر په یو ثابت تیزوالی v_c سره پورته کړي، په داسې حال کې چې حرکت له دریدلی څخه پیل کیږي کله چې $y = 0$ وی، او (b) زنځیر په یو ثابت تیزوالي v_c سره ښکته کړي، په داسې حال کې چې حرکت له دریدلی حالت څخه پیل کیږي کله چې $y = l$ وي.

حل

لومړی برخه (a) :کله چې زنځیر پورته کیږي، ټولی ځړېدلي حلقوته په ناڅاپي ډول په ښکته لوري امپلس اخلي د هغو ټولو حلقو څخه چې له مځکې پورته شویي. له دې امله، ځړیدلیی *برخه* د زنځیر داسې یوه وسیله په توګه ګڼل کیږي چې کتله *یې زیاتیږي*. کنټرول حجم چې باید په پام کې ونیول شي هغه د زنځیر اوږدوالی y دی چې په هره شېبه کې د **F** له لارې ځړول کیږي، په شمول د هغه نویي حلقی چې د ځمکې له سره جلا کیږي خو لاهم په دریدلی حالت کی ده، لکه څنګه چې په انځور 15-34b کې ښودل شوی. هغه قواوی چې په کنټرول حجم باندې عمل کوي، داخلي قواوی **P** او **−P** حذ ف (*exclude*) کوي، کوم چې د نوي اضافه شوي حلقی او ځړیدلي برخی ترمنځ عمل کوي. له دې امله، $\Sigma F = F - mg(y/l)$

څرنګه چې v_c ثابت دی، نو $y = v_c t$ له همدې امله د کنټرول حجم کتله په هره شېبه کې ده:

$$m = m(y/l) = m(v_c t/l)$$

او له دې امله، هغه کچه چې له مخې یې کتله د کنټرول حجم ته اضافه کیږي، دا ده:

$$\dot{m}_i = m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

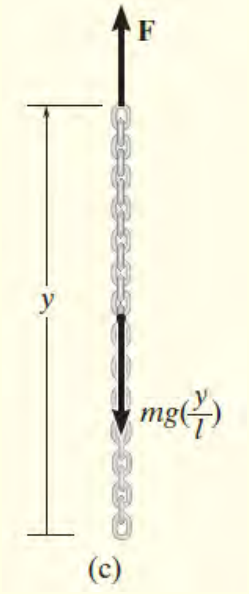
معادله 15-32 پلی کوو، او مونږ لرو:

$$+\uparrow \Sigma F = (m\dot{v})_{cv} + \dot{m}_i(v_i)_{rel}$$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0 + m\left(\frac{v_c}{l}\right)v_c$$

یا

$$F = (m/l)(gy + v_c^2) \qquad Ans.$$



انځور 15-34

دوهمه برخه (b) : کله چې زنځیر په سرعت v_c سره ښکته کیږي، هغه (آزاد) غړي چې لري کیږي (او دوی ته صفر سرعت ورکړل شوی) د پاتې ځړېدلیو غړو باندې امپلس یا قوه نه واردوي، یعنې دوی په کنټرول حجم باندې کوم امپلس یا قوه نه جوړوي، پر ځای یې دوی یوازې "رالوبږي". له همدې امله، هغه کنټرول حجم چې په لومړۍ برخه (a) کې په پام کې نیول شوی وا، دلته به ونه ګڼل شي. پر ځای یې، مونږ کولی شو د حرکت معادله تطبیق کړو ترڅو حل ترلاسه کړو. په وخت t کې، د زنځیر هغه برخه چې لاهم له ځمکې څخه پورته پاتې ده، y ده. د زنځیر ځړېدلي برخې لپاره د آزاد بدن ډیاګرام په کارولو سره چې په انځور 35-34c کې ښودل شوی، مونږ لرو:

$$+\uparrow \Sigma F = ma; \qquad F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0$$

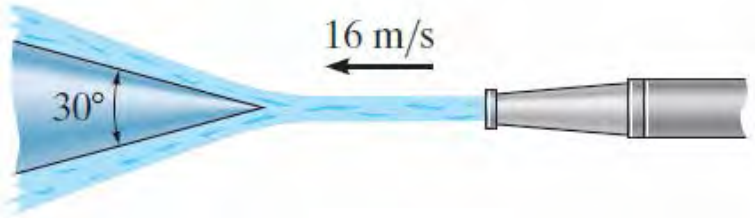
$$F = mg\left(\frac{y}{l}\right) \qquad Ans.$$

پوښتنې

PROBLEMS

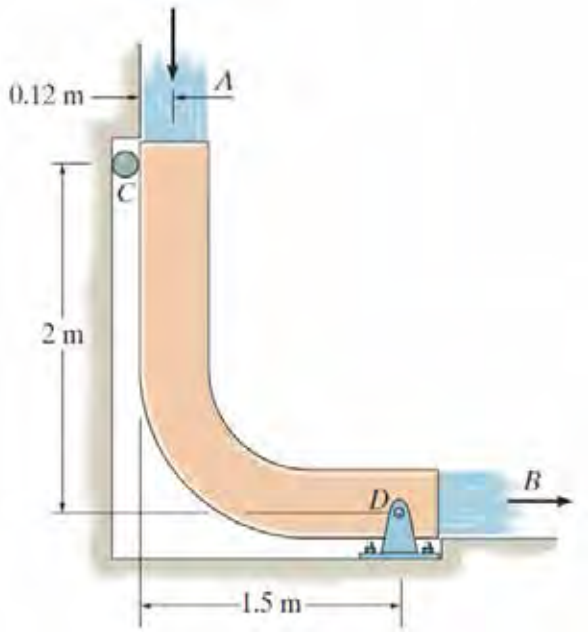
پوښتنې

پ 15-114. اوبه په 16 m/s د ثابت خپرونکي (diffuser) مخروط به سرتو يږي. که د نازل د پرانيستلی خولی قطر 40 ملي متره وي، د اوبو لخوا په خپرونکي باندې واړده شوی افقي قوه معلومه کړئ . $r_w = 1\ \text{Mg/m}^3$.



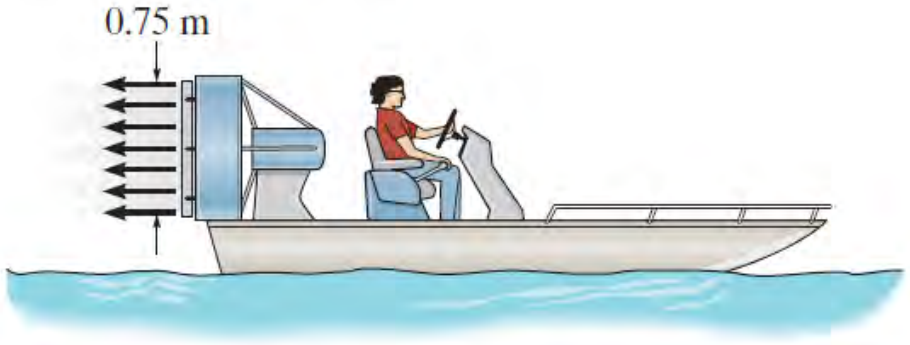
پ 15-114

پ 15-115. د اوبو د جريان اړولو لپاره د شوټ (chute) څخه کار اخيستل کيږي، $Q = 0.6\ \text{m}^3/\text{s}$. که د اوبود يوې مقطعي ساحه $0.05\ \text{m}^2$ وي، په پن D او رولر C کې د توازن لپاره د قوی اړينې اجزاوی معلومې کړئ. د شوټ او د اوبوتول چې په شوټ کې دی مه حسابه وی، $r_w = 1\ \text{Mg/m}^3$.



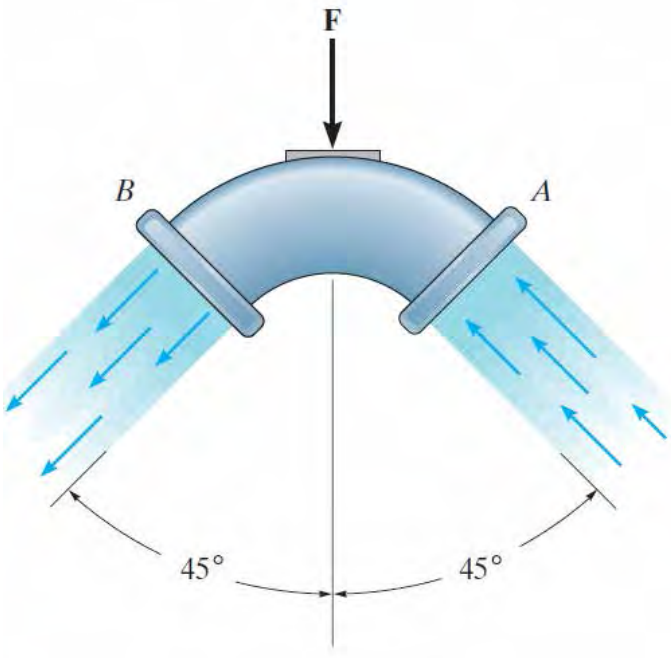
پ 15-115

پ 15-116. دالاندې 200 کیلوګرامه کښتۍ ته د باد پګې (fan) لخوا چې 0.75 متره قطر لري، یو سلیپ سټریم (slipstream) جریان رامینځته کوي چې کښتۍ ته حرکت ورکوي. که پکه هوا په 14 m/s تیزوالي سره، نسبت کښتۍ ته وباسي، د کښتۍ لمړنی تعجیل معلوم کړئ که په پیل کې په دریدلی حالت کې وي. فرض کړئ چې هوا ثابت کثافت $r_a = 1.22\ kg/m^3$, لري او داخلیدونکې هوا په په دریدلی حالت کې ده. د اوبو کشیدونکې مقاومت په پام کې مه نیسئ.



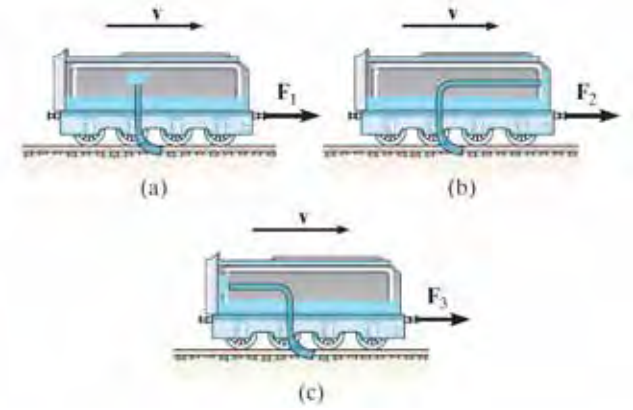
پ 15-116

پ 15-117. د 5-انچه قطر لرونکی څنګل پیپ چې په مځکه کې خښدی، $10\ lb/in^2$ سټټیکی ثابت فشار لري. د اوبو د تېرېدو تیزوالی $v = 8\ ft/s$ دی. فرض کړئ چې په A او B کې د پایپ ارتباطونه په عمودي ډول قوه په څنګل باندې نه وړاندې کوي، هغه عمودي محصله قوه **F** معلومه کړئ چې خاوره باید په څنګل باندې وارده کړي ترڅو هغه په توازن کې وساتي. د څنګلی او اوبو تول په پام کې مه نیسئ. $g_w = 62.4\ lb/ft^3$.



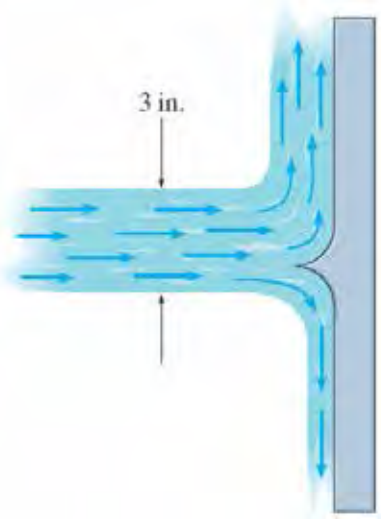
پ 15-117

پ 15-118. دا لاندې ښودل شوي موټر د اوبو راټولولو لپاره له ژورو برخو، چې د پټلۍ په اوږدو کې پرتې وي کارول کيږي. د اوبو راټولولو لاندې ښودل شويو دري حالتو لپاره هغه قوه معلوم کړي چې د موټر مخ کشولوته په ثابت سرعت v لپاره اړتيا ده. سکوپ د ساحې مقطع A لري او د اوبو کثافت ρ_w دی.



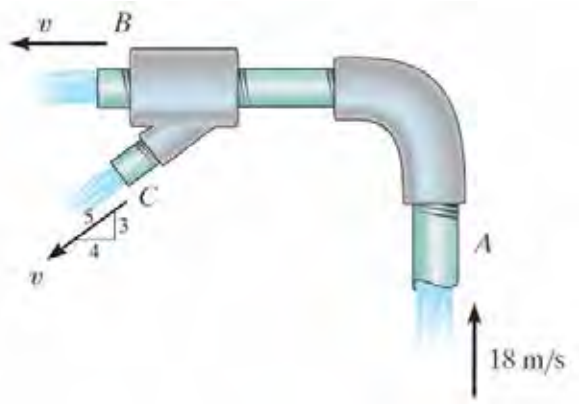
پ 15-118

پ 15-119. دا لاندې ښودل شوي تيغه د 3 انچه قطر اوبو جريان وېشي. که د اوبو څلورمه برخه ښکته تېرېږي او پاتې دري څلورمه پورته تېرې شي، او ټول جريان $Q = 0.5\ ft^3$ دی، په تيغه باندې د اوبو له خوا د قوې افقي او عمودي اجزاوې معلومې کړئ، $\gamma_w = 62.4\ lb/ft^3$.



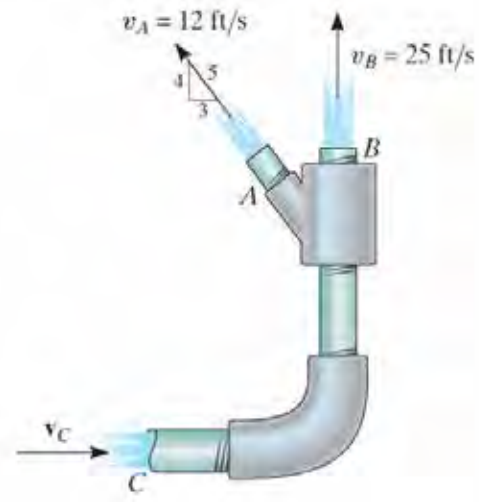
پ 15-119

پ *15-120. د اوبو د ګیج فشار په A کې 150.5 kPa دی. اوبه په پایپ A کې د 18 m/s سرعت سره بهیږي او له B او C څخه په سرعت v سره وزی. د افقي او عمودي قوی اجزاوی چې په څنګل باندې واردیږي معلومې کړئ ترڅو د پایپ سیستم په توازن کې وساتل شي. د پایپ او د اوبو تول چې په پیب کی دی په پام کې مه نیسی. پایپ په A کې 50 ملي متر قطر لري، او په B او C کې یې قطر 30 ملي متره دی، $r_w = 1000\ kg/m^3$.



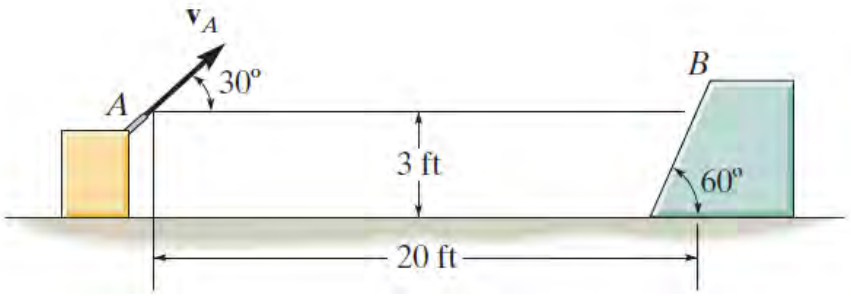
پ 15-120

پ 15-121. د اوبود ګیج فشار په C کې $40\ lb/in^2$ دی. که اوبه په A او B کې د ، $v_A = 12ft/s$ او $v_B = 25ft/s$، سرعتو سره وو زی، د څنګلی پایپ باندې د افقي او عمودي قوی اجزاوی معلومې کړئ ترڅو پایپ په توازن کې وساتي. د پایپ او د اوبو تول چې په پیب کی دی په پام کې مه نیسی. پایپ په C کې 0.75 انچه قطر لري، او په A او B کې یې قطر 0.5 انچه دی، $g_w = 62.4\ lb/ft^3$.



پ 15-121

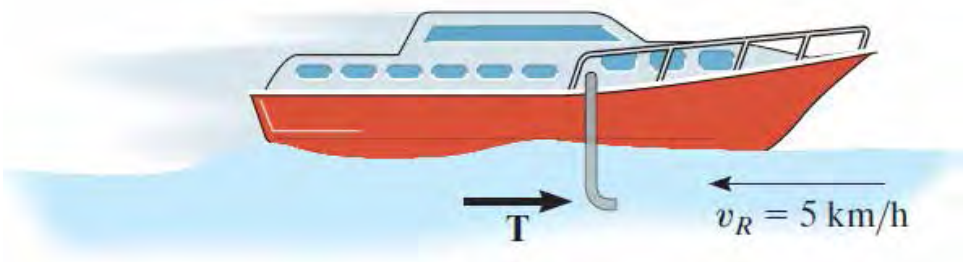
پ 15-122. دا لاندې فواره اوبه په ښودل شوي لوري کې شيندي. که اوبه په 30° له افق څخه ووزي او د اوبو د جريان مقطع نړدې 2 in^2 وي، په کانکريټي ديوال په B کې، وارده شوې قوه معلومه کړئ، $g_w = 62.4\ lb/ft^3$.



پ 15-122

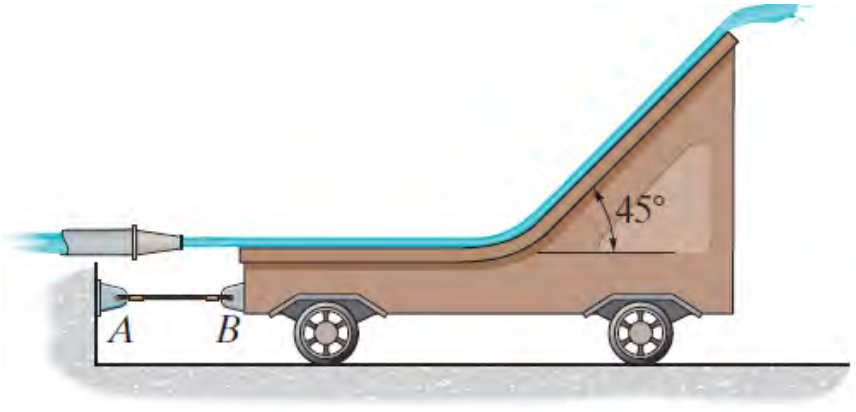
پ 15-123. سپاره چې د لوکوموتيف په مخ کې ټرل شويې واوره په 10 ft^3/s سره راټولوي او په اورګاډي کې يې ساتي. که لوکوموتيف په ثابت تيزوالي 12 ft/s سره سفر وکړي، د مقاومت قوه د حرکت په مقابل کې د واورې راټولولو له کبله معلومه کړئ. د واورې ځانګړې وزن $g_s = 6\ lb/ft^3$ دی.

پ *15-124. يوه کښتۍ 180 کيلو ګرامه کتله لري او په يوه سيند کې په 70 km/h ثابت سرعت سره حرکت کوي. سرعت د سيند په نسبت اندازه شوې دي. سيند په مخالف جهت په 5 km/h سره بهيږي. که يو ټيوب، لکه څنګه چې ښودل شوي، په اوبو کې ځای پرځای شي او په 80 ثانيو کې په کښتۍ کې 40 کيلو ګرامه اوبه راټولې کړي، په ټيوب افقي زور (ټرست) T معلوم کړئ چې د اوبو د راټولولو له امله د مقاومت غلبه کولو لپاره اړين دی، او بيا هم کښتۍ ثابت سرعت وساتي $r_w = 1\ Mg/m^3$.



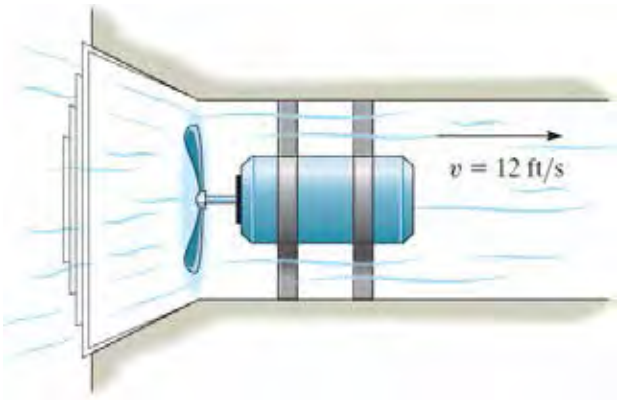
پ 15-124

پ 15-125. اوبه له نازل څخه په 12 m/s سرعت سره وزی او په هغه تیغه باندې لګیږي چې په 20 کیلو ګرامه کړاچی کې اینبودل شوی ده. کشش په رسۍ AB کی معلوم کړئ ترڅو کړاچی ځای په ځای کې وساتي، او هم عمودی ریکشن د ټایرونوپه کراچۍ باندی معلوم کړئ. نازل 50 ملي متره قطر لري او د اوبو کثافت $r_w = 1000\ kg/m^3$ دی.



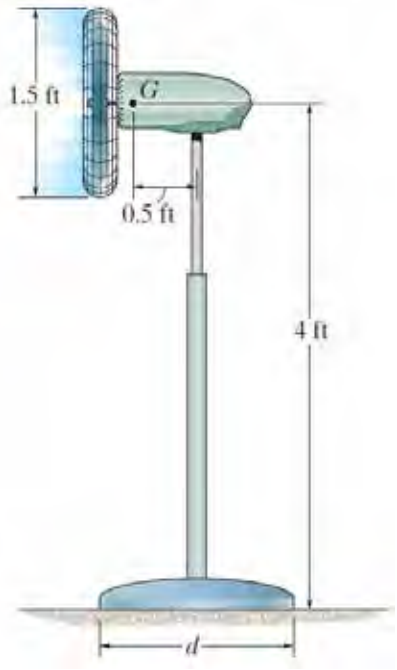
پ 15-125

پ 15-126. باد پکه هوا د یوه هواکش له لارې په 12 ft/s سرعت سره کش کوي. که دهواکش مقطع 2 ft^2 وي، په چاړه باندې افقي زور (ټراست) معلوم کړئ. د هوا ځانګړی وزن g_a = 0.076 lb/ft^3 دی.



پ 15-126

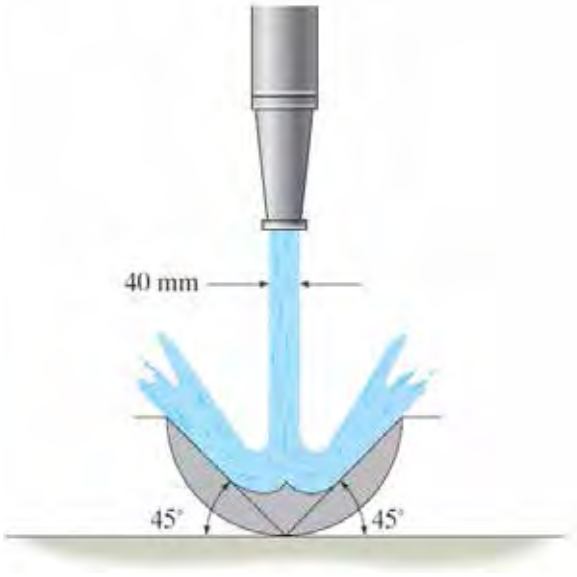
پ 15-127. پکه په 6000 ft³/min سره هوا پو کوی. که د پکی تول 30 lb وي اود ثقل مرکز يې په G کې وي، د پکی د بنسټ لږ تر لږه قطر d معلوم کړئ ترڅو دا چپه نشي. د هوا ځانګړی تول $\gamma_a = 0.076\ lb/ft^3$ دی.



پ 15-127

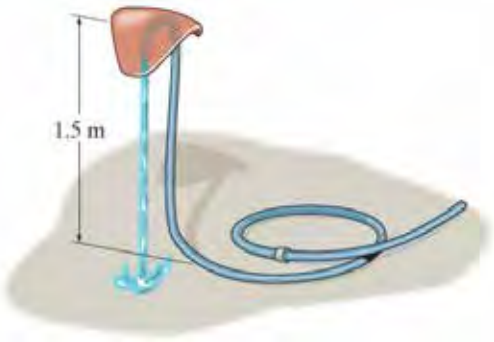
پ *15-128. نازل 40 ملي متره قطر لري. که دا په ثابته تيغه باندې په 20 m/s سرعت سره په ښکته لور اوبه په مساوي ډول وشيني، په تيغه باندې وارده شوی عمودي قوه وټاکئ .

د اوبو ځانګړی تول $\gamma_w = 1000\ kg/m^3$ دی .



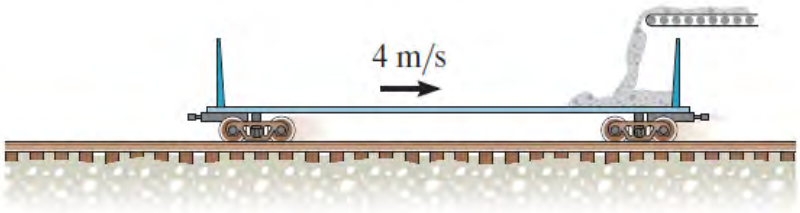
پ 15-128

پ 15-129. د ماشومانو لپاره د لوبو اوبه شیندونکی د 0.2 کیلو ګرامه پوښ لري او یو نل چې 30 g/m کې کتله لري. د اوبو د جریان کچه چې د 5 ملي متره قطر نل څخه تېرېږي معلوم کړئ ترڅو اوبه شیندونکی به 1.5 متره له ځمکې څخه پورته کړي او له دې حالت څخه د اوبو شیندل وساتي. په نل کې د اوبو تول په پام کی مه نیسی. $r_w=1\ Mg/m^3$.



پ 15-129

پ 15-130. په لاندی 2 Mg تش ګاډی ته ریګ د کنویر تسمې څخه په 50 kg/s سره لویږی. که ګاډی په پیل کې په 4 m/s کې په حرکت کی وي، د ګاډی تیزوالی د وخت د تابع په توګه معلوم کړئ.



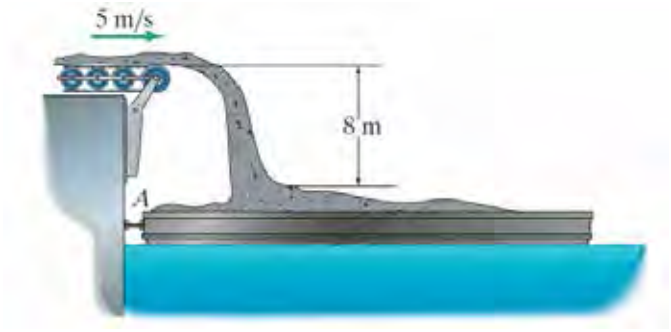
پ 15-130

پ 15-131. اوروژونکی کښتی دوه د اوبو توپونه لري. یو یې په A کې 6 انچه قطر نازل لري او 3000 ګیلن/دقیقه پمپ کوي، او بل یې په B کې 3 انچه قطر لري او 1000 ګیلن/دقیقه پمپ کوي. د کښتی د ثابت ساتلو لپاره د پروپلر لخوا وارد شوی افقي زور (تړست) T معلوم کړئ. د اوبو ځانګړی تول $g = 62.4\ lb/ft^3$ دی، او $7.4805\ gal/ft^3$ اوبه دي.



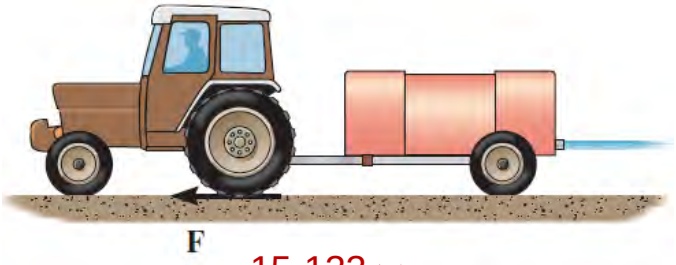
پ 15-131

پ *15-132. شګې د کنویر له تسمې څخه په 500 کیلو ګرامه/ثانیه کې بارج ته اچول کیږي. هغه قوه چې رسۍ په A کې په بارج وارد وي ترڅو بارج په خپل ځای دریدلی وساتي، معلومه کړي.



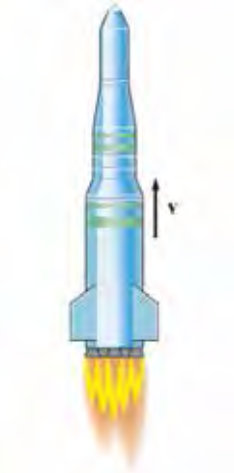
پ 15-132

پ15-133. ټراکټور دخالي ټانک سره 4 Mg کتله لري. ټانک د 2 Mg اوبو څخه ډک شوی. اوبه په 50 kg/s اندازه او په 5 m/s ثابت سرعت نسبت ټراکټور ته، تری تویږی. که ټراکټور له دریدلی حالت نه پیل وکړي، اود شا ټیرونه یو مجموعي 250N کش قوه جوړه کړی، په هغه حالت کې چې ټانک خالي شي د ټراکټور سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



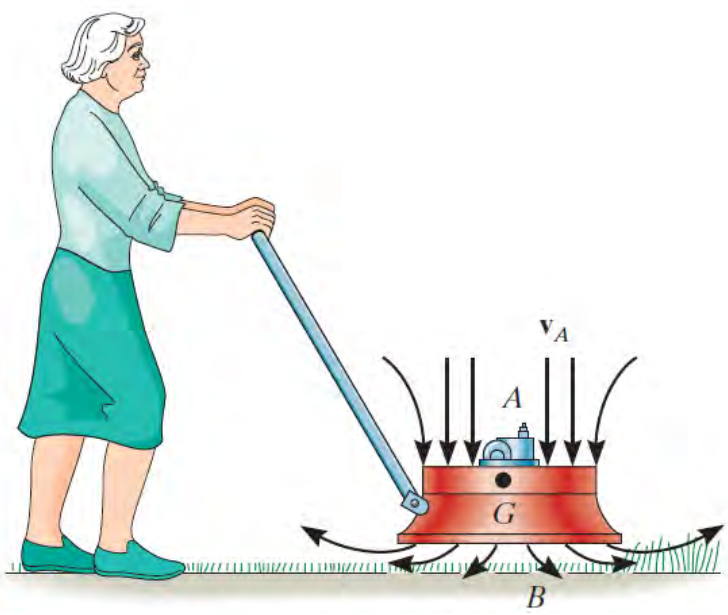
پ 15-133

پ 15-134. یو راکټ په ژوره فضا کې دی. په ځمکه باندې د راکټ خالي تول 500 lb دی او 300 پونډه تیل لري. که تیل په 15 lb/s تناسب سره سوځی او په 4400 ft/s نسبي سرعت سره وزی، اعظمي تیزوالی چې راکټ یي په ژوره فضا کې تر لاسه کړي معلوم کړئ ، په داسي حال کې چې له دریدلی حالتنه نه په ژوره فضا کی تیزوالی پیل کوي. په راکټ باندی د جاذبې اغیزه له پامه وغورځوئ.



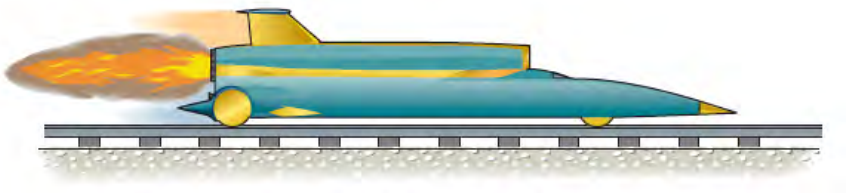
پ 15-134

پ 15-135. یو د چمن ریبلو بریښنایی ماشین د ځمکې سطحې ته نږدې تیرپږي. د دې کار لپاره هوا په 6 m/s تیزوالي سره په A کې ماشین ته داخلیږي چې د غوڅې مقطع یې 0.25 m² ده، او بیا د ځمکې سره په B کې هوا وزی، چیرته چې د مقطع ساحه یې 0.25 m² ده. که هوا په A کې یوازې د اتموسفیر فشار تابع وي، دهوا هغه فشار معلوم کړئ چې ماشین یې په ځمکه باندې واردوي کله چې د ماشین تول په آزاد ډول تکیه شوی او هیڅ بار په لاس نیوکې ایښول شوی. د چمن ریبلو بریښنایی ماشین 15 کیلو ګرامه کتله لري او مرکزثقل یې په G کې دی. فرض کړئ چې هوا یو ثابت کثافت لري $r_a = 1.22\ kg/m^3$.



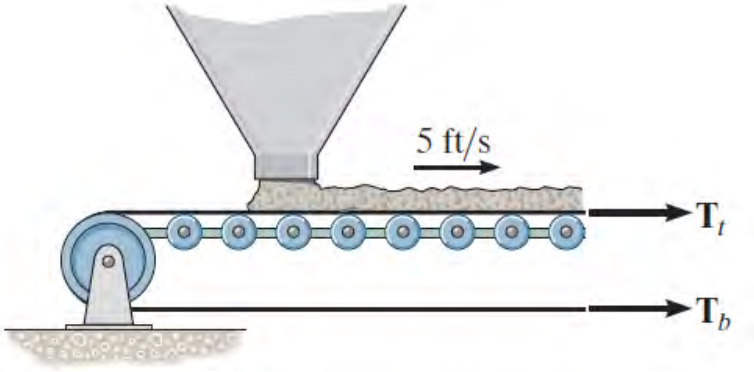
پ 15-135

پ *15-136. د لاندې راکټې موټر خالي تول 400 lb دی، او د افقي پټلۍ په اوږدو کې له استراحت څخه ویشتل شوی. په موټر کې 300 lb د تیلو زیرمه ده، او هغه په ثابت کچه 15 lb/s کې مصرفیږي او په نسبي سرعت 5000ft/s سره وزی. د موټر اعظمي تیزوالی چې موټر هغه ته د دریدلی حالت نه رسیدي شي معلوم کړئ ، په داسې حال کې چې د اتموسفیر اصتکاکي مقاومت $F = (0.01v)$ lb دی، کله چې v سرعت په فوټو په ثانیه کې اندازه کیږي.



پ 15-136

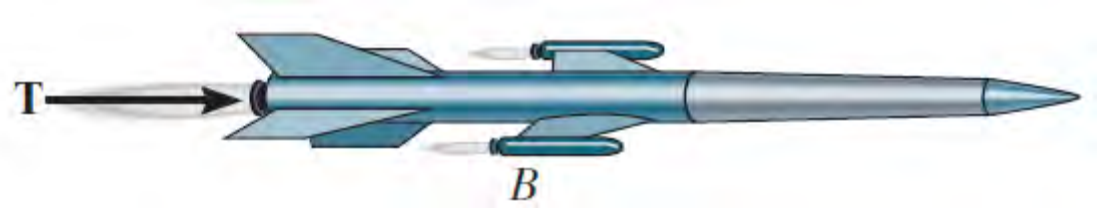
پ 15-137. يو کندو په کنويور تسمه باندې په 1500 lb/s شګه ځای پر ځای کوي. که د تسمې سرعت 5 ft/s وي، د پورتنۍ برخې تسمه کې په پرتله د ټيټې برخې تسمې کې څومره زياته قوه بايد جوړه شي ترڅو تسمه مخ په وړاندې کش کړي.



پ 15-137

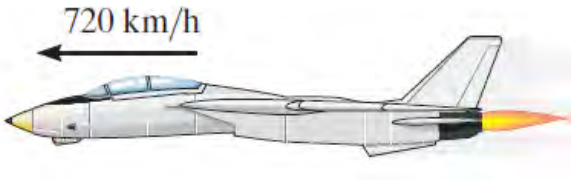
پ 15-138. په دوهمه مرحله کې د يوه دوه مرحلې راکټ (خالي) تول 2000 lb دي او له لومړۍ مرحلې څخه په 3000 mi/h سرعت سره توغول کيږي. دوهمه مرحله 1000 lb تيل لري، چې په 50 lb/s کې مصرفيږي او په نسبي سرعت 8000 ft/s سره خارجيږي. د دوهمې مرحلې تعجيل وروسته له هغه چې انجن چالان شي معلوم کړئ. د راکټ سرعت مخکې له دې چې ټول تيل مصرف شي معلوم کړئ. د جاذبې اغيزه له پامه وغورځوئ.

پ 15-139. ميزايل 40,000 lb تول لري. توربوجيټ انجن ثابت ټرست T= 15000lb ورته ورکوي. دوه راکټ بوسټرونه B نور ټرست ورکوی. په هر بوسټر کې سوزيدونکی مواد په ثابت کچه 150 lb/s کې سوځي، او په نسبي وتلو سرعت 3000 ft/s سره خارجيږي. که د توربوجيټ انجن لخوا دسون دموادو له لاسه ورکول له پامه وغورځول شي، د ميزايل سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې د بوسټرونو د 4 ثانيو سوزولو وخت پای ته ورسيږي. د ميزايل لمړنی سرعت 300 mi/h دی.



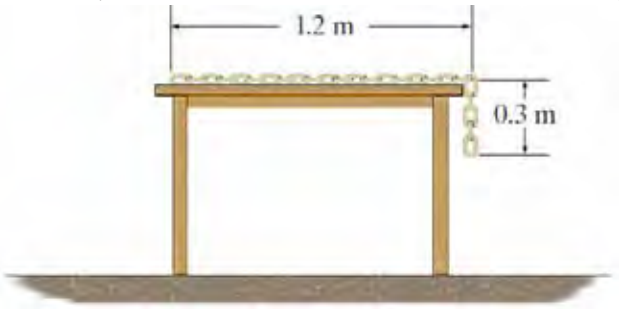
پ 15-139

پ *15-140. جیټ په 720 km/h تیزوالي حرکت کوي. که تیل په 0.8 kg/s کې مصرف کیږي، او انجن په 200 kg/s کې هوا داخل ته کش کړي، په داسې حال کې چې د وتلو ګاز (هوا او دود) په 12,000 m/s نسبي تیزوالي سره خارج کیږي، د دې شیبې لپاره د الوتکې تعجیل معلوم کړئ. د هوا کشیدونکی مقاومت $F_D = (55\ v^2)$ دی، چیرته چې تیزوالی په m/s کې اندازه کیږي. جیټ 7 Mg کتله لري.



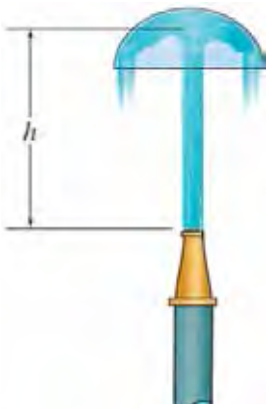
پ 15-140

پ 15-141. په لاندې انځورکې 1.5 متره اوږد بنوی زنځیر د میز له څنډې څخه ځوړند دي. که زنځیر له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د هغې تیزوالی لږ وروسته له دې چې وروستی حلقه له میز څخه تیره شی معلوم کړئ. زنځیر په یوه متر اوږدوالی کې 6 کیلو ګرامه کتله لري.



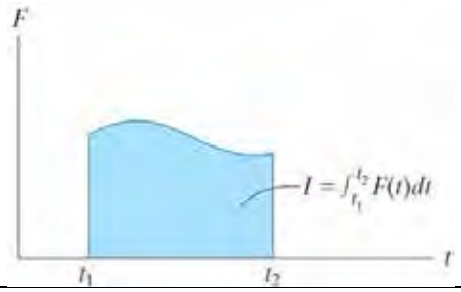
پ 15-141

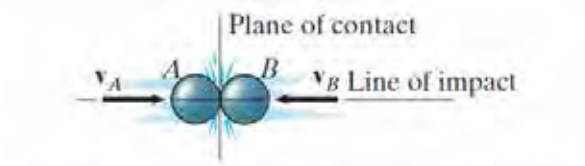
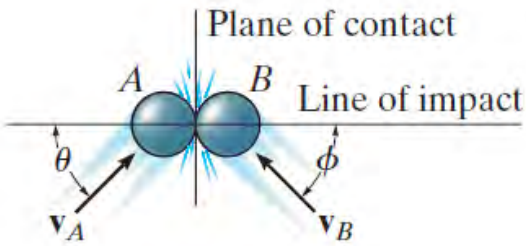
پ 15-142. نیمه کروي کاسه m کتله لري او د اوبوعمودي جیټ لخوا چې نازل یې d قطر لري په تعادل کې ساتل کیږي . که داوبو جریان له نازل څخه Q وي، هغه لوړوالی h معلوم کړئ تر څو کاسه ځړیدلیی پاتې شي. د اوبو کثافت r_w دی. د اوبو د جیټ تول له پامه وغورځوئ.

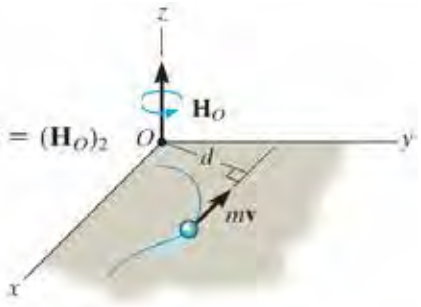


پ 15-142

د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW	د فصل بيا کتنه
	**امپلس** امپولس د قوی او وخت محصول په توګه تعریف شوې دی. په ګرافیکي توګه، دا د F- t د انځورلاندې ساحه ښيي. که قوه ثابته وي، نو امپلس $I = F_c(t_2 - t_1)$ ته بدليږي.
$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$	**د امپلس او مومنتم اصول** کله چې د حرکت معادله، $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$، او کينمتيک معادله، $a = dv/dt$، سره يو ځای شي، مور د امپلس او مومنتم اصول ترلاسه کوو. دا يوه ويکتوری معادله ده چې په مستطيلی ا جزوو ويشل کيدی شي او د هغو ستونزو حل کولو لپاره کارول کيږي چې قوه، سرعت، او وخت په کی شاملوي. د کارونې لپاره، بايد د آزاد بدن انځور رسم شي ترڅو ټول امپلسونه چې په ذره باندی عمل کوي، حساب شي.
$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$	**د خطي مومنتم ساتنه** که د امپلس او مومنتم اصول د ذرو يوه *سيستم* ته وکارول شي، نو د ذرو ترمنځ ټکرونه داخلي امپلسونه جوړوی چې برابر، متضاد، اوخطي وي، چې له معادلې څخه حذف کيږي. سربيره پردې، که يو بهرنی امپلس کوچنی وي، يعنې قوه کوچنی وي او وخت لنډ وي، نو امپلس غير امپلسی (non-impulsive) ګڼل کيږی او له پامه غورځول کيدی شي. په دې توګه، د ذرو د سيستم لپاره مومنتم ساتل کيږي. د مومنتم ساتنې معادله د دې لپاره ګټوره ده چې د يوې ذرې وروستی سرعت ومومو کله چې داخلي امپلسونه د دوو ذرو ترمنځ وشي او د ذرو لمړنی سرعتونه معلوم وي. که داخلي امپلس بايد معلوم شي، نو يوه ذره جلا کيږي او د امپلس او مومنتم اصول په دې ذره باندې تطبيق کيږي.

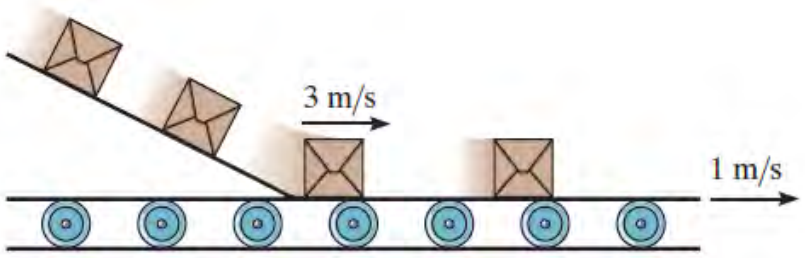
ضربه يا امپکت کله چې دوی ذری A اd B مستقیم امپکت ولري، نو د دوی ترمنځ داخلي امپلس برابر، متضاد، او په یوه خط جهت لری. له دې امله د دې سیستم لپاره د مومنتم ساتنه د امپکت د خط په اوږدو کې تطبیق کیږي .	 $m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$
که وروستي سرعتونه مجهول وی، نو د حل لپاره دویمی معادلی ته اړتیا ده. مونږ باید د بیرت راګځیدو ضریب، e، وکاروو. دا تجربوي ټاکل شوی ضریب د ټکر کونکي ذرو په فزیکي ځانګړتیاوو پورې تړاو لري. دا د کیدی شی له تناسبه د نسبی سرعتو د ټکر نه ورسته او د ټکر نه مخکی په توګه څرګندی دی شی. که ټکرالاستیکی وي، هیڅ انرژي نه ضایع کیږي او $e = 1$. دپلاستیکی ټکر لپاره $e = 0$ ده.	$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$
که ټکر زاویه دار وي، نو د سیستم لپاره د مومینتم ساتنه او د انعطاف ضریب معادله د د ټکر د کرښی په اوږدو پلی کیږی. همدارنګه، د هری ذری لپاره د مومینتم ساتنه د دې کرښې (د تماس سطحه) سره عمود ی پلي کیږي ځکه چې په دې جهت په ذ ره باندې هیڅ امپلس عمل نه کوی.	

د زاويوي امپلس او مومينتم اصول مؤمنت په يوه (z) محور د خطي مومينتم له املې، زاويوي مومينتم بلل کيږي. د زاويوي امپلس او مومينتم اصول اکثراً د مجهولو امپلسونو د له منځه وړلو لپاره کارول کيږي، او مؤمنتونو په هغه محور کوم چې د امپلسونو دعمل کرښه مؤمنت نه رامينځته کوي نيول کيږی. د دې لپاره، د آزاد بدن ډايګرام بايد د حل سره مل وی.	$(H_O)_z = (d)(mv)$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$ 
د ثابتي مايع بهير د امپولس او مومينتم طريقي اکثره د دې لپاره کارول کيږي تر څو هغه قواوی معلوم کړي چې يوه اله يی په جريان د مايع يا ګازباندی واردوي . د دې لپاره، د آزاد بدن ډايګرام د مايع د کتلی چې د الی سره په تماس کی ده جوړ شي ترڅو عملکونکی قواوې وپيژندل شي. همدارنګه، د مايع سرعت چې د کنټرول حجم ته داخل او خارجيږی د الی د پاره محاسبه شي. د ثابت جريان معادلې د ريکشنونو معلومولو لپاره د قواوو او مومينتونو راټولول شامل دي.	$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$ $\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt}(\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A)$
د بدليدونکی کتلې سره توغول ځينې الی، لکه راکټ، په مخکې تګ کې کتله له لاسه ورکوي. نور بيا د کتله ترلاسه کوي، لکه چری (shovel). موږ کولی شو د کتلې له لاسه ورکولو يا ترلاسه کولو محاسبی لپاره د امپولس او مومينتم اصول د الی د کنټرول حجم لپاره پلي کړو. له دې معادلې څخه، هغه قوه چې د کتلې جريان له خوا پر اله باندې وارد يږي، ټاکل کيدي شي.	$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$ Loses Mass $\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$ Gains Mass

د بیا کتنې پوښتنې

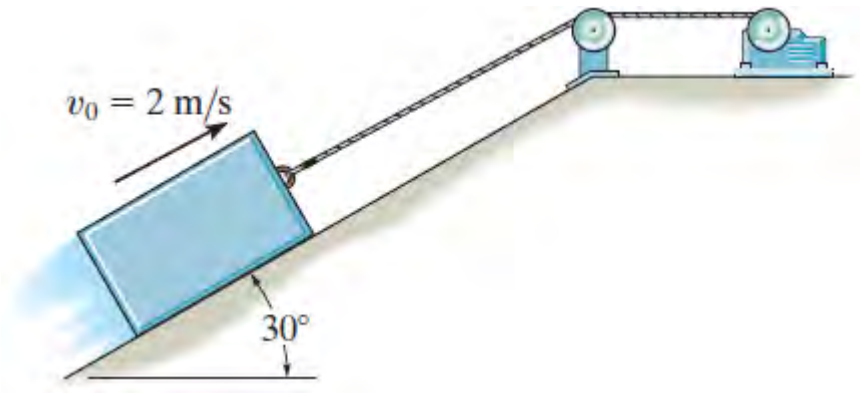
د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

ب 15–1. د 6 kg کتلې لرونکې ټرلیې له یوه ښوی شوټ څخه په 3 m/s سرعت سره په افقي کانویر تسمه رالویږی. که د تسمې او د ټرلیې تر منځ د کیینټیک اصټکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ وي، په تسمه باندې د ټرلیې د د ریدو لپاره اړین وخت وټاکئ که چیرې تسمه د ټرلیې په ورته جهت په 1 m/s تیزوالي حرکت کوي.

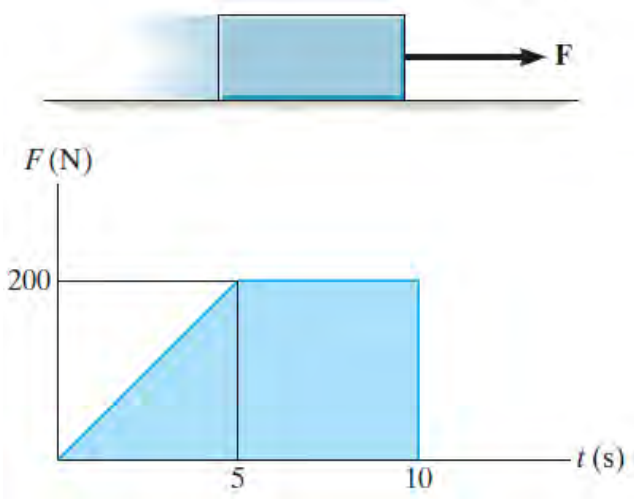


ب 15-1

ب 15–2. دا لاندې ښودل شوي 50 کیلو ګرامه بلاک د کیبل او موټور پواسطه په مایله سطحه پورته لور ته کش کیږي. د بلاک او سطحې تر منځ د کیینټیک اصټکاک ضریب $m_k = 0.4$دی. که بلاک په پیل کې په مایل سطحه پورته لور ته په $v_0 = 2$ m/s سرعت سره حرکت کړي، او په دې وخت ($t = 0$) موټور په رسۍ کې د $T = (300 + 120\sqrt{t})$ N کشش تولیدوي، چیرې چې tپه ثانیو کې ده، د بلاک سرعت په $t = 2$ s کې وټاکئ.

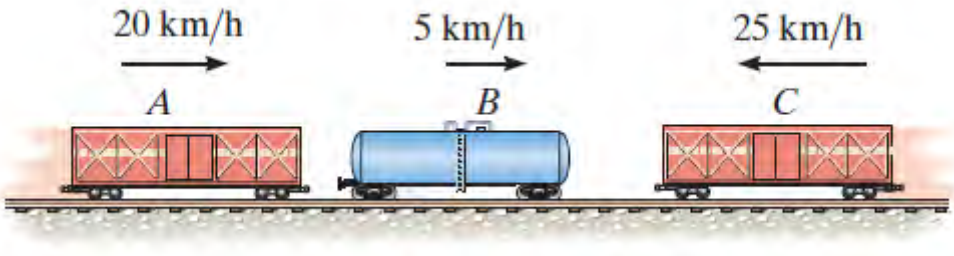


ب 15–3. یو 20 کیلو ګرامه بلاک په افقي سطحه د سکون په حالت کې دی چې د ستاتیک اصتکاک ضریب یې $\mu_s = 0.6$ او د کینیتیک اصتکاک ضریب یې $\mu_k = 0.5$ دی. که چیرې یوه افقي قوه F چې د وخت په تیریدو کې لکه چې ښودل شویی بدلون مومي، وربانډی پلي شي ، د بلاک سرعت په 10 ثانیو کې وټاکئ. **مرسته:** لومړی د اصتکاک ماتولو او بلاک د حرکت شروع کولو لپاره اړین وخت وټاکئ.



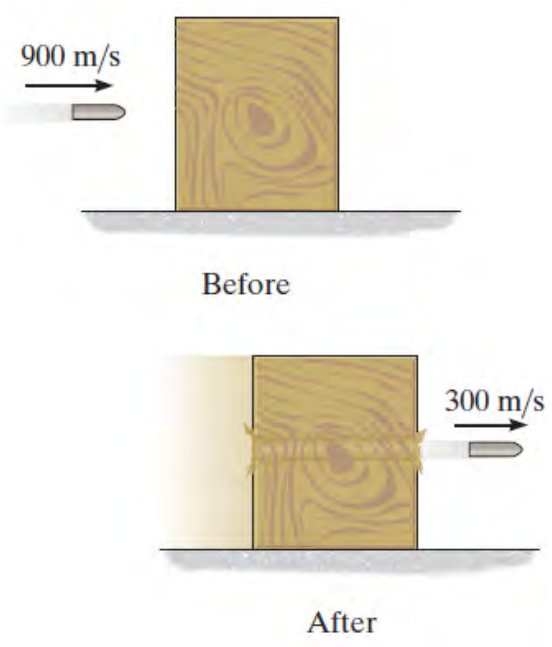
ب 15-3

ب 15–4. د A ، B، او C درې بار وړونکي ګاډي د 10 Mg، 5 Mg ، او 20 Mg په ترتیب سره کتلې لري. دوی د ښودل شویو سرعتونو سره د لارې په اوږدو کې حرکت کړي. ګاډی A لومړی د ګاډی B سره ټکر کوي، او وروسته د ګاډی C سره. که چیرې درې موټرې وروسته له ټکر سره یوځای شي، د دې ګاډیو ګډ سرعت وټاکئ وروسته له د دوو ټکرونو چې شوي وي.



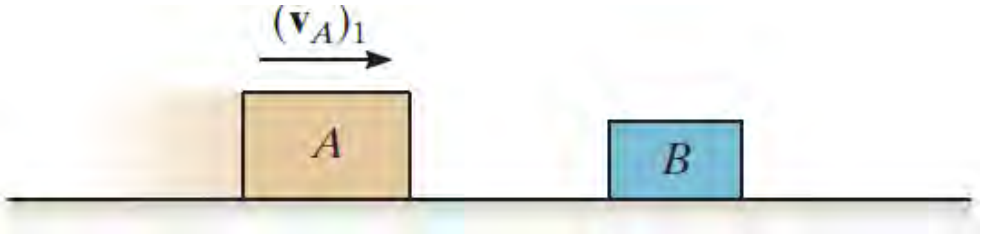
ب 15-4

ب 5–15. 200 ګرامه ګولی په 900 m/s سرعت سره د 15 کیلو ګرامه لرګیو بلاک په مرکزویشتل کیږي، کوم چې په یوه زیږه سطحه باندی ایښودل شوی. که مرمی د بلاک څخه په 300 m/s سرعت سره وزی، د بلاک سرعت وروسته له دې چې ګولی له بلاکه ووزی وټاکئ. او هم معلوم کړی چی بلاک په زیږه سطحه، وروسته له دې چې ګولی تری ووزی، څومره وخت نیسی چې بلاک ودریږي؟ د سطحې او بلاک ترمنځ د کیینتیک اصتکاک ضریب m_k = 0.2 دی.



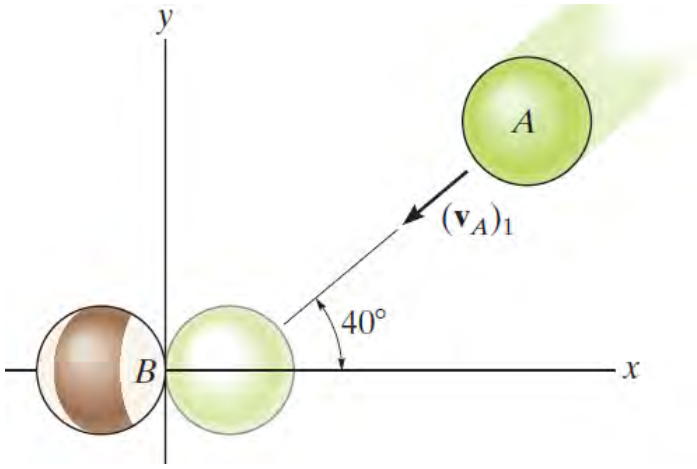
ب 5-15

ب 15–6. بلاک A 3 کیلو ګرامه کتله لري او په 2 m/s سرعت سره په یوه زیره افقي سطحه ښویږي کله چې دا د بلاک B سره، چې د 2 کیلو ګرامه کتله لري او په پیل کې دریدلی دی، مستقیم ټکر وکړي. که چیرې تصادم بشپړ الاستیکی وي ($e = 1$) ، د هر بلاک سرعت د ټکر نه وروسته وټاکئ او د بلاکونو ترمنځ فاصله، کله چې د دوی ښویدل ودریږي، وټاکئ. د بلاکونو او سطحی ترمنځ د کینیتیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.3$ دی.



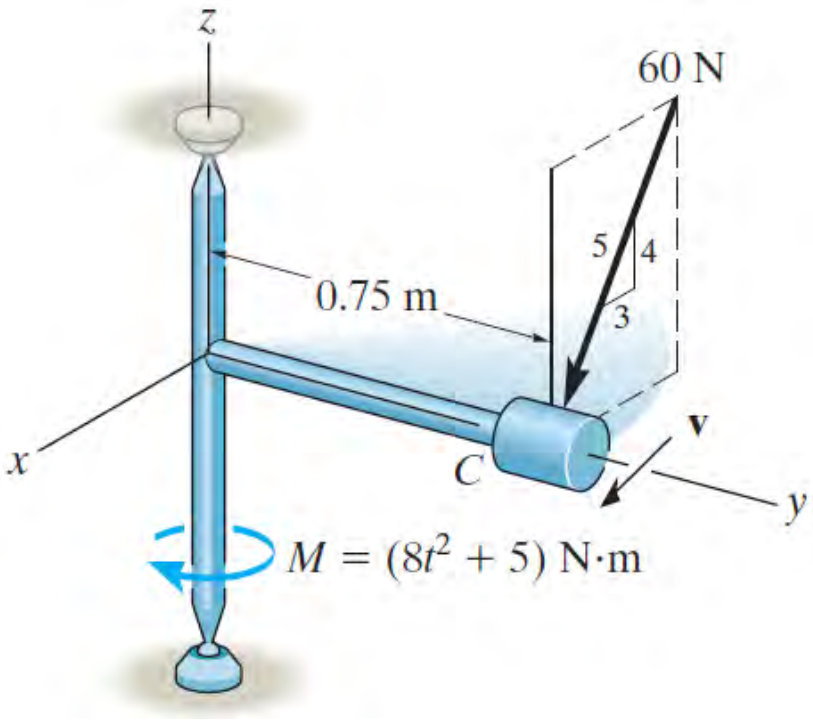
ب 15-6

ب 15–7. دوه ښوی د بیلیارد توپونه، A او B مساوي $m = 200$ g کتلی لري. که A په $(v_1)_A = 2$ m/s سرعت سره په B باندی ولګیږي، د دوی وروستي سرعتونه د یو پر بل لګیدو وروسته وټاکئ. توپ B په پیل کې په دریدلی حالت کی دی. او د بیرته راګرځیدو ضریب یی $e = 0.75$ دی.



ب 15-7

ب 15–8. د کوچنی سیلندر C چی کتله 10 kg کتله لری، دیوه راډ په سر چی کتله یی د پام وړ نده، تړل شوی دی. که په فریم باندی یو کپل $M = (8t^2 + 5)$ N . m عمل وکړي ، چیرې چې t په ثانیو کې ده، اوهم په سیلندر یوه قوه 60 N په بنودل شوي جهت پلی شي، د سیلندر تیزوالی وټاکئ کله چې $t = 2$ s وي . سیلند په $t = 0$ وخت کې $v_0 = 2$ m/s سرعت لري.



ب 15-8

شپاړه سم فصل

(CHAPTER 16)



کینیمیټکس د بیلابیلو میکانیزمونو کې د ګیر ټرینونو په ډیزاین کې مهم دی

د جامد جسم سطحي

کینمتیک

PLANAR KINEMATICS OF A RIGID BODY)

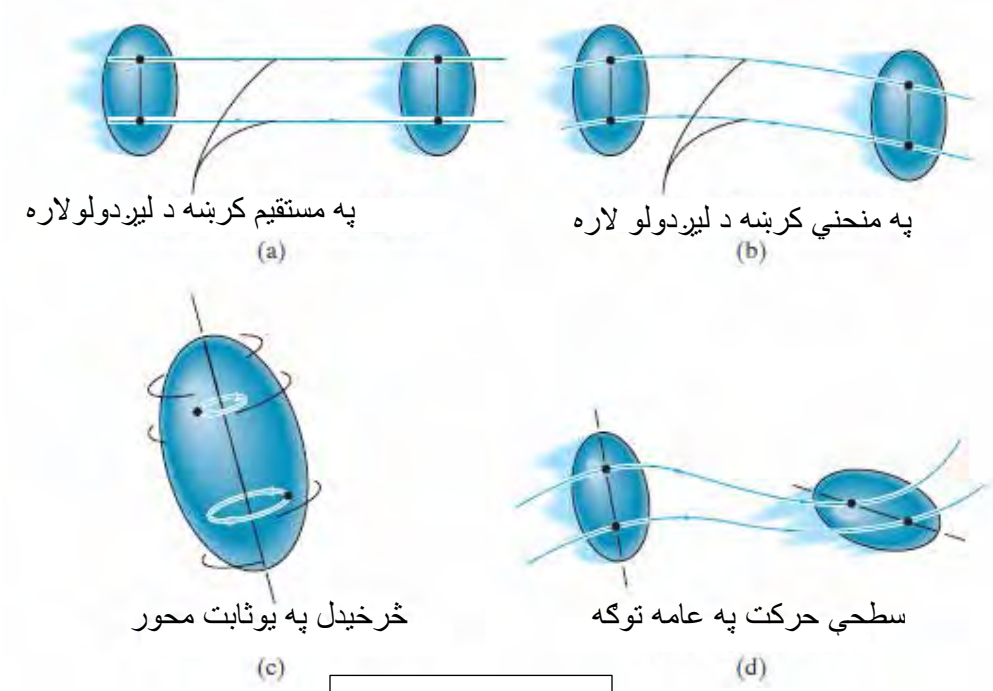
د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

- د جامد جسم د سطحي حرکتونو د مختلفو ډولونو طبقه بندي کول .
- د جامد جسم خوځيدل او په ثابت محور د زاويوي حرکت څيړل .
- د سطحي حرکت مطالعه د مطلق حرکت تحليل په کارولو سره .
- د سرعت او تعجيل نسبي تحليل د انتقالي منل شوی يا بنودلشوی چوکاټ په کارولو سره.
- بنودل د طريقي چې څنګه د صفر سرعت لحظوی مرکزپيدا شي او د دې ميتود په کارولو سره د جسم په يوه نقطه کې د سرعت معلوميدل .
- د سرعت او تعجيل د نسبي حرکت تحليل په کارولو د څرخيدونکي منل شوي چوکاټ سره.

16.1 د جامد جسم سطحی حرکت
(PLANAR RIGID-BODY MOTION)

په دې فصل کې به د جامد جسم د سطحي کینیمټیکس په اړه خبرې وشي. دا مطالعه د ګیرونو، کمو او میکانیزونو په ډیزاین کې مهمه ده چې د ډیرو جوړښتي او میخانیکي عملیاتو لپاره کارول کیږي. کله چې کینیمټیکس په بشپړه توګه وپېژندل شي، موږ بیا د حرکت معادلو په کارولو سره، اړونده قوی په جسم باندی او د هغو ارتباط د جسم د حرکت سره بیانولې شو.

د جسم *سطحی* حرکت هغه وخت پیښیږي کله چې د یو جامد جسم ټولې ذرې په داسې لارو حرکت کوي چې د یو ثابتی سطحې څخه مساوي واټن لري. د جامد جسم دري ډوله سطحی حرکتونه شتون لري. د زیاتیدونکي پیچلتیا په ترتیب سره، هغوی دي:



انځور 1-16

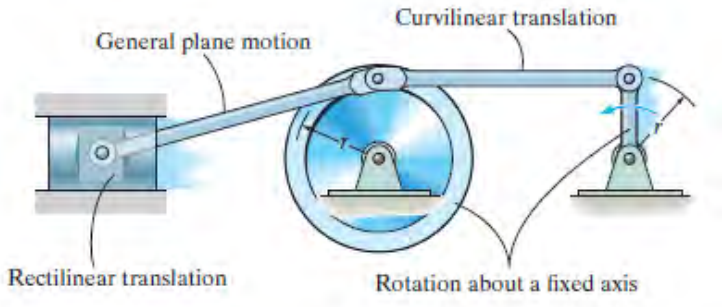
:

- *لیږدول* (*Translation*). دا ډول حرکت هغه وخت پیښیږي کله چې د جسم یوه کرښه په ټوله موده کې د خپلې اصلي جهت سره موازي پاتې شي. کله چې د بدن د دوو نقطو د حرکت لارې موازي مستقیمي کرښې وي، نو دغه حرکت ته مستقیم **خطي لیږدول** (Rectilinear translation) ویل کیږي، لکه په انځور 6-1a کې. که د حرکت لارې

د منحني کربنو په اوږدو کې وي، نو حرکت ته منحني خطي لیږدول (curvilinear translation) ویل کیږي، لکه په انځور 16-1b کې.

- *په یوه ثابت محور څرخیدل* (Rotation about a fixed axis). کله چې یو جامد جسم د ثابت محور شاوخوا دوران وکړي، د بدن ټولې ذرې، پرته له هغو چې د دوران په محور کې پرتې وي، په دایروي لارو حرکت کوي، لکه په انځور 16-1c کې.
- عمومي *سطحي* حرکت (Genal plane motion). کله چې یو جسم عمومي سطحي حرکت ترسره کوي، نو په ورته وخت کې انتقالي او دوراني حرکت مینځ ته راځي ، لکه په انځور 16-1dکې. انتقالي د یوې ریفرینس سطحې دننه ترسره کیږي، او دوران د هغه عمود په ګرداګرد چې د ریفرینس په سطحه دی پیښیږي.

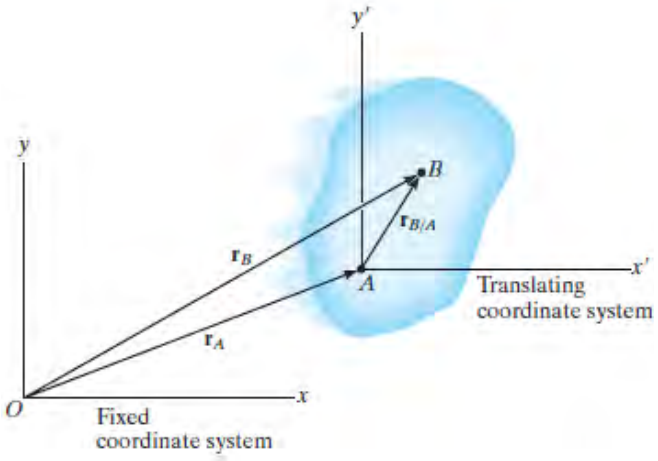
په لاندې برخو کې به مونږ هر یو له دې حرکتونو په تفصیل سره وڅیړو. د هر ډول حرکت بیلګې په انځور 16-2 کې ښودل شوي دي.



انځور 16-2

16.2 لیږدول (TRANSLATION)

یو جامد جسم په پام کې ونیسئ چې په x–y سطحه کې د مستقیمی کربنی یا منحني کربنې په توګه حرکت کوی، لکه په انځور 16-3 کې.



انځور 16-3

موقعیت (Position). د نقطې A او B ځایونه په جسم کی نسبت ثابت x او y ریفرینس فریم ته د موقعیت ویکتورونو $\mathbf{r}_A$ او $\mathbf{r}_B$ په واسطه تعریف شوي دي. انتقالي x' او y' محوری سیستم په جسم کې ثابت دی او مبدا یی په A کې ده، چې له دې وروسته به ورته د **بنسټیزې ټکی** (base point) په توګه اشاره وشي. د B موقعیت نسبت A ته د نسبي موقعیت ویکتور $\mathbf{r}_{B/A}$ په واسطه بنودل شوی دی (B د A نسبت ته). د ویکتوري جمع په واسطه،

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

سرعت (Velocity). د A او B د همهاله (simultaneous) سرعتونو تر منځ اړیکه د دې معادلې د وخت مشتق په اخیستلو سره ترلاسه کیږي، چې لاندې فورمول ته رسي:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$$

دلته $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ مطلق سرعتونه بنیي، ځکه چې دا د x او y محورونو په نسبت اندازه کیږي. اصطلاح $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = 0$ ، ځکه چې د $\mathbf{r}_{B/A}$ اندازه د جامد جسم د تعریف له مخې تل ثابته ده، او له دې امله چې جسم لیږدول کیږی، د $\mathbf{r}_{B/A}$ جهت هم ثابت پاتې کیږي. له همدې امله:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

تعجیل (Acceleration). د سرعت د معادلې مشتق اخیستل وخت ته د A او B د همهاله تعجیل تر منځ ورته اړیکه برابروي:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

پورته دوه معادلې څرګندوي چې په جامد جسم کې ټولې نقطې چې د مستقیمی کرښی یا منحني کرښې لیږدونې لاندې وي، د ورته سرعت او تعجیل سره حرکت کوي. د پایلې په توګه، د لیږدونې جامد جسم کې موقعیت لرونکو نقطو کینیمټیکس د ذرو حرکتونو کینیمټیکس په کارولو سره مطالعه کیدی شي، کوم چې په 12 فصل کې مطالعه شوي.



په دې فیریس ویل کې سپرلي د منحني کرښې لیږدونې لاندې دي، ځکه چې ګونډولاوي یا کجاوی په دایروي لاره حرکت کوي، مګر دوی تل په مخ پورته حالت کې پاتې کیږي.

16.3 څرخیدل په یو ثابت محور (ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

کله چې یو جسم په ثابت محور څرخیږی، هر ټکی P چې په جسم کې موقعیت لري، په دایروي لاره حرکت کوي. د P حرکت د مطالعې لپاره، لومړی اړتیا ده چې د جسم د زاویوي حرکت په محور باندی خبرې وشي.

زاویي حرکت (Angular Motion). له هغه ځایه چې یو ټکی بې ابعاده دی، نو هغه نشي کولی زاویي حرکت ولري. یوازې کرښې یا اجسام زاویي حرکت لري. دلته مورږ د جسم د رنګ شوي سطحې د دننه د r شعاعي کرښې زاویوي حرکت ته پام کوو، چې په انځورa16-4 کې ښودل شوی دی.

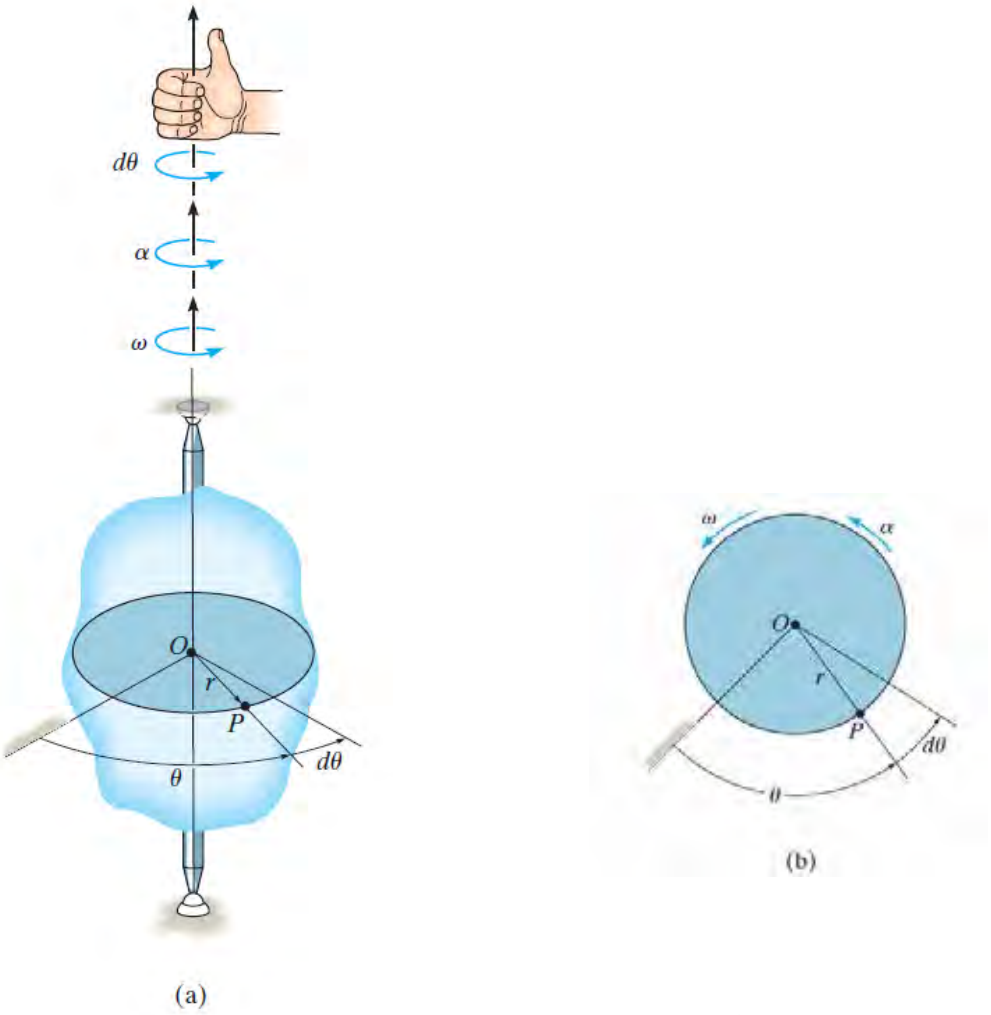
زاویي موقعیت (Angular Position). په ښودل شوي وخت کې، د r **زاویي موقعیت** د زاویې q په واسطه تعریف شوی دی، چې د یوه ثابتې کرښې څخه تر r پورې اندازه کیږي.

زاویي بیځایه کیدنه (Angular Displacement). د زاویي موقعیت بدلون، چې د dq د مشتق په توګه اندازه کیدی شي، **زاویي بیځایه کیدنه** بلل کیږي.* دا ویکتور د درجو، رادیان، یا دورونو په ډول د dq اندازه لري، چیرې چې 1 دور = 2 π رادیان دی. له هغه ځایه چې حرکت په ثابت

محور دی، dq تل د دې محور سره سم جهت لري. په ځانګړي ډول، جهت د بنې لاس قاعدې له مخې ټاکل شوی؛ یعنې د بنې لاس ګوتې د دوران د سمت سره تاو یږي، نو په دې حالت کې، د بټې ګوتې سر، یا dq ، پورته اشاره کوي، لکه په انځور 16-4aکې. په دوه ابعادو کې، لکه څنګه چې د رنګ شوي سطحې د پاسه لید په انځور 16-4b کې بنودل شوی، دواړه q او dq د ساعت په خلاف دي، نو د بټې ګوتې سر له پاڼې څخه بهر ته اشاره کوي.

زاویي سرعت (Angular Velocity). د زاویي موقعیت د بدلون د وخت په پرتلې ته **زاویي سرعت** w (اومېګا) ویل کیږي. له هغه ځایه چې dq د وخت dt په یوه لحظه کې پیښیږي، او خپل ثابت موقعیت ساتي، نو ...

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (+\circlearrowleft) \qquad (16–1)$$



انځور 16-4

ویکتور $\boldsymbol{\omega}$ یوه اندازه لري چې ډېر وخت په رادیان/ثانیه (rad/s) کې اندازه کېږي. د دې لوری تل د څرخیدلو محور سره سمون لري، لکه څنګه چې په انځور 16-4a کې ښودل شوي دي. کله چې د سیوري شوي سطحی کې زاویوي حرکت ښکاره کوو، لکه څنګه چې په انځور 16-4b کې ښودل شوي، مورِ کولی شو د حرکت جهت ته د ساعت په لور یا د ساعت پر خلاف اشاره وکړو. دلته مورِ په خپل سر د ساعت پر خلاف حرکتونه مثبت ګڼلي او دا مو د 16–1 معادلی تر څنګ په تاویدو په قوسونو کی ښودلی شوی دي. البته، دا باید په پام کې ونیول شي چې د w لوري په حقیقت کې د پاڼې څخه بهرخوا دی.

*په برخه 20.1 کې څرګنده شوې چې محدود څرخیدل یا محدود زاویوي بې ځایه کېدل ویکتوري مقدارونه نه دي، که څه هم مشتقی څرخیدل $d\boldsymbol{q}$ ویکتورونه دي.

زاویي تعجیل (Angular Acceleration) . **زاویي تعجیل a** (alpha) د زاویي سرعت د وخت په تېرېدو کې د بدلون کچه اندازه کوي. د دې ویکتور اندازه ده

$$(\circlearrowleft +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (16–2)$$

د معادلې 16-1 په کارولو سره، دا هم ممکنه ده چې a داسې څرګند کړو

$$(\circlearrowleft +) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (16–3)$$



د کرین په عملیاتو کې کارېدونکي ګیرونه ټول د ثابتو محورونو شاوخوا څرخېږي. انجنیران باید وکولی شي د دوی زاویي حرکتونه سره اړیکه ورکړي ترڅو دا ګیرۍ سیسټم په سمه توګه ډیزاین کړي

د **a** عمل لوری د **w** د عمل د کربنې سره یو شان دی، لکه څنګه چې په انځور 416-4a کې ښودل شوي؛ خو د دې لوري جهت په دې پورې اړه لري چې آیا ***w*** په زیاتېدو یا کمېدو کې دی. که ***w*** کمېږي، نو a ته **زاویوي تجیل** (angular deceleration) ویل کېږي، او په دې توګه یې د لوري جهت د ***w*** برعکس وي.

د ***dt*** د له منځه وړلو له لارې له معادلو 16-1 او 16-2 څخه، مور د زاویوي تعجیل، زاویوي سرعت، او زاویوي بې ځایه کېدو ترمنځ یوه ډیفرینشل اړیکه ترلاسه کوو، یعنې:

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad (16\text{–}4) \qquad (+\circlearrowleft)$$

زاویي حرکت او مستقیم حرکت ترمنځ د یوې ذرې لپاره د توپیر لرونکو اړیکو ورته والی باید څرګند وي چې رامنځته شوي دي ($a = dv/dt$, $v = ds/dt$ او $a\, ds = v\, dv$) .

ثابت زاویوي تجیل (Constant Angular Acceleration) . که د جسم زاویوي تعجیل ثابت وي، $a = a_c$، نو کله چې معادلې 16-1، 16-2 او 16-4 انتیګرال شي، لاندې فرمولونه ترلاسه کېږي

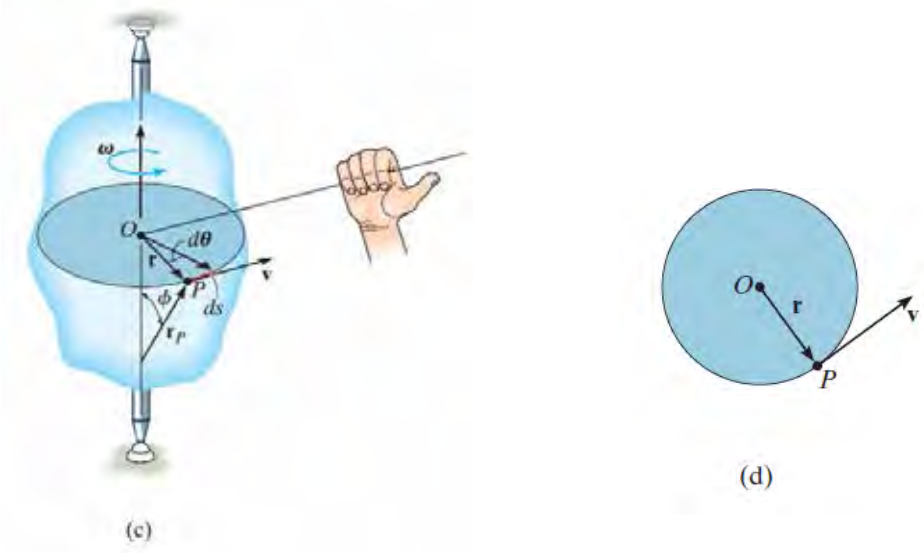
$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad (16\text{–}5) \qquad (+\circlearrowleft)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad (16\text{–}6) \qquad (+\circlearrowleft)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \qquad (16\text{–}7) \qquad (+\circlearrowleft)$$

Constant Angular Acceleration

دلته θ_0 او ω_0 د جسم د زاویي موقعیت او زاویوي سرعت لومړني ارزښتونه په ترتیب سره دي. په یاد ولرئ چې دا معادلې د 12-4 څخه تر 12-6 معادلو سره ورته دي کوم چې د مستقیم حرکت لپاره کارول شوي وي.



انځور 16-4 ادامه

د نقطې P حرکت (Motion of Point P). لکه څنګه چې په انځور 16-4c کې ښودل شوي، جامد جسم څرخيږي او نقطه *P* په شعاع *r* په دايروي لاره حرکت کړي، چې مرکز يې په *O* نقطه کې دی. دا لاره د سيوري شوې سطحی دننه ده چې په انځور 16-4d کې له پا سه لیدل شوې ده.

موقعيت او بې ځايه کېدل (Position and Displacement). د P موقعيت د موقعيت ويکتور r په واسطه تاکل کيږي، کوم چې له *O* څخه *P* ته غځيږي. که جسم په زاويه *dq* وځرخي، نو *P* به په *ds = rdq* بې ځايه شي.

سرعت (Velocity). د *P* سرعت يو اندازه لري چې د *ds = r dq* تقسيم په *dt* سره موندل کېدای شي. دا لاندې په لاس راځی:

$$v = \omega r \qquad (16–8)$$

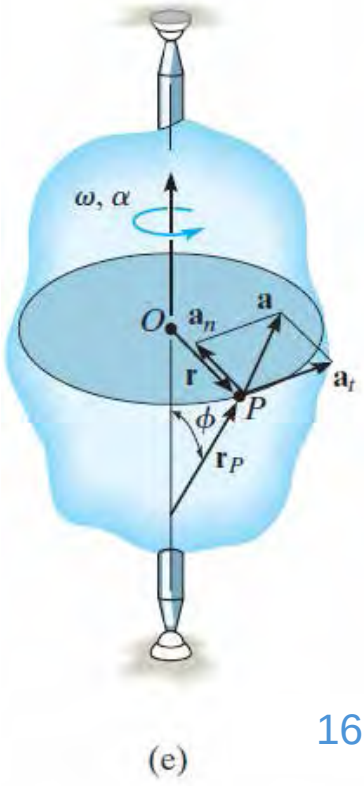
لکه څنګه چې په انځورونو 16-4c او 16-4d کې ښودل شوي، د **v** لوری د دايروي لارې سره مماس دي.

د **v** اندازه او جهت هم د **w** او $\mathbf{r}_P$ ترمنځ د کراس پرا ډکت (cross product) تعامل په واسطه موندل کېدای شي(ضمیمه Bوګورئ). دلته، $\mathbf{r}_P$ له هرې نقطې د دوران محور څخه تر P پورې غځېدلی دی، لکه څنګه چې په انځور 16-4cکې ښودل شوي. موږ لرو:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \qquad (16–9)$$

په دې فورمول کې د ویکتورونو ترتیب مهم دی، ځکه چې د کراس تعامل کمیوتیتیو (commutative) نه دي، یعني، $\mathbf{w} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \mathbf{w}$. په انځور 16-4c 4–c کې وګورئ چې څنګه د **v** سم جهت د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کېږي. د ښي لاس ګوتې له **w** څخه تر $\mathbf{r}_P$ پورې تاویږی (**w** کراس $\mathbf{r}_P$) . بټه ګوته د **v** سم جهت په ګوته کوي، کوم چې مماس دی په لاره د حرکت د جهت سره. د معادلې 8–B څخه، د **v** اندازه په معادله 16-9 کې ده $v = w r_P \sin\phi$، او څرنګه چې $r = r_P \sin\phi$، لکه څنګه چې په انځور 16-4cکې ښودل شوي، نو $v = wr$، چې د معادلې 16-8 سره سمون لري. د ځانګړي حالت په توګه، د **r** موقعیت ویکتور د $\mathbf{r}_P$ لپاره غوره کېدای شي. دلته **r** د حرکت په سطحه کې پروت دی او بیا د *P* نقطې سرعت دی

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (16–10)$$



(e)

انځور 16-4

تعجیل (Acceleration) . د *P* تعجیل د عمود او مماس اجزاوو له مخې څرګندېد لی شي. د مماس جزلپاره، د معادلې 19-12 او معادلې 16-8 په کارولو سره، موږ لرو:

$$a_t = dv/dt = d(wr)/dt = (d\,w/dt)r$$،

او څرنګه چې $a = dw/dt$، نو موږ ترلاسه کوو

$$a_t = \alpha r \qquad (16–11)$$

عمودی جز له معادلې 12-20 او معادلې 16-8 څخه ټاکل کېږي. مونږ لرو:

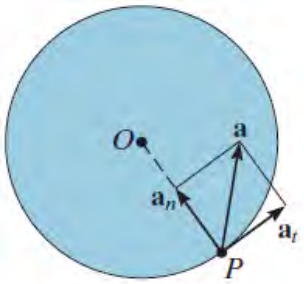
$a_n = v^2/r = (wr)^2/r$، يا

$$a_n = \omega^2 r \qquad (16–12)$$

د تعجيل مماس جز، لکه څنګه چې په انځورونو 16-4e او 416-4f کې ښودل شوي، او هغه استازيتوب د وخت د بدلون کچه د سرعت په اندازه کې کوي . که د P سرعت په زياتېدو کې وي، نو $\mathbf{a}_t$ د $\mathbf{v}$ په لوري عمل کوي؛ که سرعت کمېږي، نو $\mathbf{a}_t$ د $\mathbf{v}$ د لوري په مخالف جهت عمل کوي؛ او په پای کې، که تيزوالی ثابت وي، نو $\mathbf{a}_t$ صفر دی.

د تعجيل عمودي جزد سرعت د لوري د بدلون په تېرېدو د وخت کچه استازيتوب کوي. د $\mathbf{a}_n$ جهت تل د دايروي لاری مرکز، O ته وي، لکه څنګه چې په انځورونو 16-4eاو 16-4fکې ښودل شوي.

لکه د سرعت په څېر، د P تعجيل هم په ويکتوري کراس ضرب کې څرګندېدلی شي. د معادلې 16-9 مشتق اخيستلو د وخت سره، مونږ لرو:



(f)

انځور 16-4

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

څرنګه چې $a = dw/dt$، او د معادلې 16-9 په کارولو سره ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = w \times \mathbf{r}_P$) نو بيا

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \qquad (16–13)$$

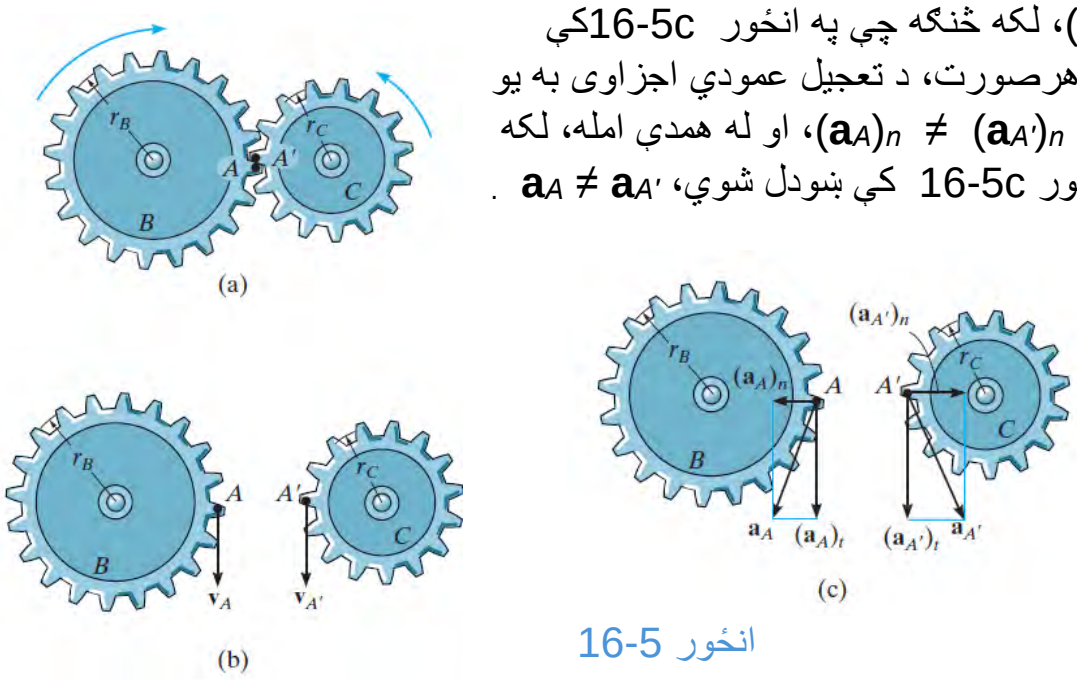
د کراس ضرب د تعریف له مخې، په بنې اړخ کې لومړۍ برخه اندازه $a_t = ar_P \sin\phi = ar$ لري او د بنې لاس قاعدې په واسطه $\mathbf{a} \times \mathbf{r}_P$ د $\mathbf{a}_t$ په لوري کې دی، لکه څنګه چې په انځور 16-4eکې ښودل شوي. په ورته ډول، دویمه برخه $a_n = w^2 r_P \sin\phi = w^2 r$، اندازه لري او د بنې لاس قاعدې دوه ځله په کارولو سره، لومړۍ د $\mathbf{v}_P = w \times r_P$ پایله معلومه کړه او بیا w ×$\mathbf{v}_P$، دا څرګنده ده چې دا پایله د $\mathbf{a}_n$ په لوري کې ده، لکه څنګه چې په انځور 16-4e کې ښودل شوي. په پام کې ولرئ چې دا هم د $-\mathbf{r}$ لوري سره سمون لري، کوم چې د حرکت په سطحه کې پروت دی، مور کولی شو $\mathbf{a}_n$ په ډیر ساده بڼه څرګند کړو $\mathbf{a}_n = -w^2\mathbf{r}$. له همدې امله، معادله 16-13 په دوو اجزاو سره پیژندل کیداي شي

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \qquad (16–14)$$

څرنګه چې $\mathbf{a}_t$ او $\mathbf{a}_n$ یو له بل سره عمودي دي، که اړتیا وي، د تعجیل اندازه د فیثاغورث د قضیې په واسطه ټاکل کېدای شي؛ یعنې:

$a = (a_n^2 + a_t^2)^{1/2}$ ، لکه څنګه چې په انځور 16-4f کې ښودل شوي.

که دوه څرخېدونکي اجسام په تماس کې وي، لکه څنګه چې په انځور 16-5a کې ښودل شوي، نو د تماس په نقطو A او A' کې به دایروي لارې به مختلفې وي، او د دغو نقطو سرعت او د تعجیل تماسي اجزاوی به یو شان وي، $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'}$ ، لکه څنګه چې په انځور 16-5bکې ښودل شوي، او $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$، لکه څنګه چې په انځور 16-5cکې ښودل شوي. په هرصورت، د تعجیل عمودي اجزاوی به یو شان نه وي، $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$، او له همدې امله، لکه څنګه چې په انځور 16-5c کې ښودل شوي، $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$.



انځور 16-5

مهم ټکي

IMPORTANT POINTS

- يو جسم دوه ډوله انتقال تجربه کولی شي. د خطی **انتقال** پر مهال، ټولې نقطې موازي مستقيمي کرښې لاری تعقيبوي، او د **منحني انتقال** پر مهال، نقطې منحني لارې تعقيبوي چې ورته شکل لري.
- په يوه انتقال کوونکي جسم کې ټولې نقطې له يو شان سرعت او تعجيل سره حرکت کوي.
- هغه نقطې چې په يو جسم کې موقعيت لري او د ثابت محور شاوخوا څرخيږي، دايروي لارې تعقيبوي.
- د $a\,dq = w\,dw$ اړيکه، له $a = dw/dt$ او $w = dq/dt$ څخه د dt په له منځه وړلو سره اخيستل شوې ده.
- کله چې زاويوي حرکتونه w او a معلوم وی، د جسم په هره نقطه کې سرعت او تعجيل ټاکل کېدای شي.
- سرعت تل د حرکت د لارې سره مماس وي.
- تعجيل دوه جزه لري. مماس تعجيل د سرعت د اندازې د وخت په تېرېدو کې د بدلون کچه اندازه کوي او له $a_t = ar$ څخه ټاکل کېدای شي. عمود تعجيل د سرعت د جهت د وخت په تېرېدو کې د بدلون کچه اندازه کوي او له $a_n = w^2 r$ څخه ټاکل کېدای شي.

د تحلیل تګلاره

د یوې نقطې سرعت او تعجیل چې په یو جامد جسم کې موقعیت لري او په یوه ثابت محور باندی څرخیږي، د لاندې طریقې په کارولو سره معلومېدی شي.

زاویوي حرکت (Angular Motion). د څرخیدو د مثبت لوري ټاکنه وکړئ او دا د هری کینیمتیکي معادلې ترڅنګ، کله چې پلي کیږي وښیئ.

- که د څلورو متغیرونو a ، w، q، او t نه، د دوو تر منځ اړیکه معلومه وي، نو درېیم متغیر د لاندې کینیماتیکي معادلو په کارولو سره ترلاسه کېدای شي، کومې چې دا درې متغیرونه سره تړلي $a\,dq = w\,dw$ ، $a = dw/dt$ ، $w = dq/dt$.
- که د جسم زاویوي تعجیل ثابت وي، نو لاندې معادلې کارول کېدای شي :

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- یو ځل چې حل ترلاسه شي، د q ، w، او a جهتونه د دوی عددي ارزښتونو د الجبري نښو له لارې ټاکل کېږي.

د P نقطې حرکت (Motion of Point P). په ډېرو حالتو کې، د P سرعت او د دې د تعجیل دوه جزه له لاندې سکیلرې معادلو څخه ټاکل کېدای شي :

$$v = \omega r$$
$$a_t = \alpha r$$
$$a_n = \omega^2 r$$

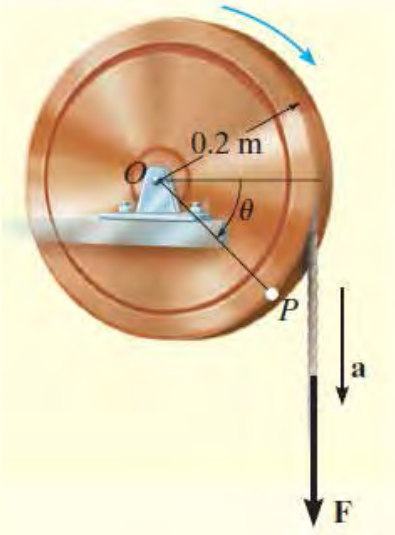
- که د هندسې انځور لیدل ستونزمن وي، لاندې ویکتوري معادلې باید وکارول شي:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

دلته $\mathbf{r}_P$ له هرې نقطې د څرخیدو د محور څخه تر P نقطې پورې غځېږي، په داسې حال کې چې $\mathbf{r}$ د P حرکت په سطحه کې پروت دی. له دغو ویکتورونو w او a، څخه هر یو، باید د دوی د $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ اجزاوو په توګه څرګند شي، او که اړتیا وي، د کراس ضرب یې د ډیټرمینانټ د غځولو نه معلوم شی (معادله B–12 وګورئ) .

مثالونه

مثال 16.1



انځور 16-6

یو تار په انځور 16-6 کې د څرخ شاوخوا تاو شوی دی، کوم چې په لومړي سر کې د $q = 0$ په وخت کې په دریدلی حالت کې دی. که یو قوه په تار باندې پلې شی چې هغه ته $a = (4t)\ \text{m/s}^2$، تعجیل ورکړي چیرې چې t په ثانیو کې ده، نو د وخت تابع په حیث تعین کړئ (a) :د څرخ زاویوي سرعت، او (b) د OP کربنې زاویوي موقعیت.

حل:

(a برخه). څرخ په یوه ثابت محور باندې، چې د O نقطې څخه تېرېږي، تاویږی. په دې توګه، د څرخ P نقطه په یوه دایروی مسیر کې حرکت لري، او د دې نقطې تعجیل دواړی، مماسي او عمودي اجزاوې لري. د مماسي جز یی $(a_P)_t = (4t)\ \text{m/s}^2$ دی، ځکه چې تار د څرخ په شاوخوا تاو شوی او په مماسي توګه حرکت کوي. له همدې امله، د څرخ زاویوي تعجیل دی:

$$(\curvearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$
$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$
$$\alpha = (20t)\ \text{rad/s}^2 \downarrow$$

د دې نتیجه په کارولو سره، د څرخ زاویوي سرعت ω اوس د $a = d\omega/dt$ څخه محاسبه کېدلی شي، ځرنګه چې دا معادله a ، t، او ته تړاوورکوی. انټیګریشن کول، د لمړنی حالت نه چې $\omega = 0$ وي کله چې $t = 0$ وي، مونږ ته دا نتیجه ورکوي

$$(\curvearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$
$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{t} 20t\, dt$$
$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

(b برخه). د دې نتيجې په کارولو سره، د OP کرښې زاويوي موقعيت q له $\omega = dq/dt$ څخه پيدا کېدای شي، څرنګه چې دا معادله q، ω، او t ته ټراو ورکوی. د انټيګرېشن په لمړنی حالت کی چې $q = 0$ وي کله چې $t = 0$ وي، مور داسې نتيجه ترلاسه کوو:

$$(\curvearrowleft +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\, dt$$

$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad} \qquad \textit{Ans.}$$

يادونه : مور د ثابت زاويوي تعجيل معادله نه شو کارولی، ځکه چې a د وخت تابع ده.



مثال 16.2

په عکس کې ښودل شوی موټور د څرخ په حرکت راوستلو کې کارول شوي. تفصيل يې په انځور 16-7a کې ښودل شوي دي. که موټور ته وصل شوي څرخکی A له استراحت څخه د ثابت زاويې تعجيل $a_A = 2\ \text{rad/s}^2$ سره حرکت پيل کړي، د P نقطې سرعت او تعجيل اندازه په څرخ باندې تعين کړئ، وروسته له هغه چې څرخکی دوی دورې وهلي وي. فرض کړئ چې د ترانسميشن تسمه په څرخکی او څرخ باندې نه ښويږي.

حل :

زاويې حرکت (Angular Motion) : لومړی، مور به دوی دورې په رډينوسره تبديل کړو. له دې املې چې په يوه دوره کې 2π رډينونه وي، نو:

$$\theta_A = 2\ \text{rev}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right) = 12.57\ \text{rad}$$

څرنګه چې a_A ثابت دی، نو د A پلی زاویوي سرعت په لاندې ډول دی

$$(\uparrow+) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$\omega_A^2 = 0 + 2(2\ \text{rad/s}^2)(12.57\ \text{rad} - 0)$$

$$\omega_A = 7.090\ \text{rad/s}$$

تسمه هماغه تیزوالي او مماسی جزد تعجیل لری، کوم چی د پلې او څرخ څخه تېریږي. نو،

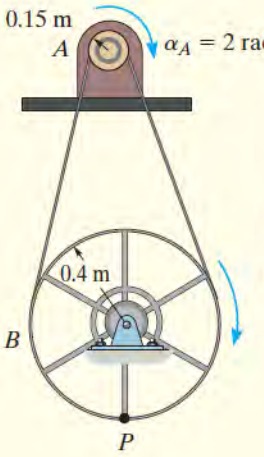
$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \qquad 7.090\ \text{rad/s}\,(0.15\ \text{m}) = \omega_B(0.4\ \text{m})$$

$$\omega_B = 2.659\ \text{rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \qquad 2\ \text{rad/s}^2\,(0.15\ \text{m}) = \alpha_B(0.4\ \text{m})$$

$$\alpha_B = 0.750\ \text{rad/s}^2$$

د P حرکت (Motion of P): لکه څنګه چې په کینماتیکي ډیاګرام کې په انځور 16-7bکې ښودل شوي، مونږ لرو:

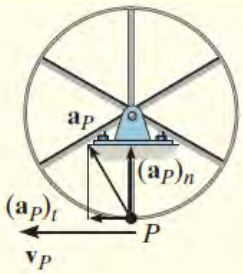


(a)

$$v_P = \omega_B r_B = 2.659\ \text{rad/s}\,(0.4\ \text{m}) = 1.06\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750\ \text{rad/s}^2\,(0.4\ \text{m}) = 0.3\ \text{m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (2.659\ \text{rad/s})^2(0.4\ \text{m}) = 2.827\ \text{m/s}^2$$



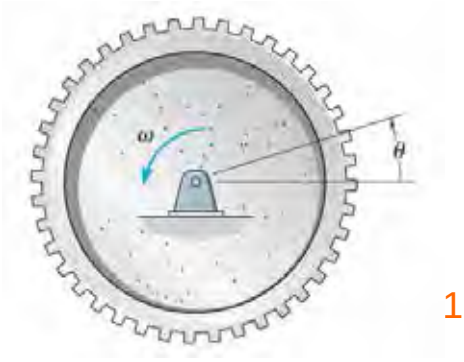
(b)

له همدې امله

انځور 16-6

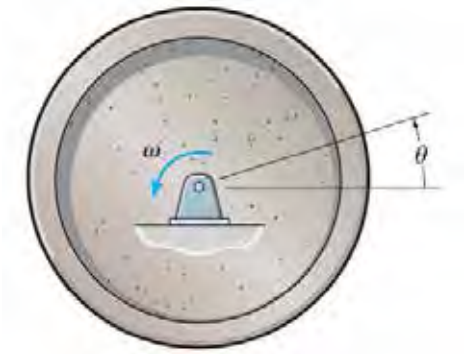
$$a_P = \sqrt{(0.3\ \text{m/s}^2)^2 + (2.827\ \text{m/s}^2)^2} = 2.84\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

ب 16-1. دا لاندی ګیر له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کوي، کله چې ګیر 20 دوري وکړي، نو $\boldsymbol{\omega}$ = 30 rad/s زاویوي سرعت ترلاسه کوي. د هغې ثابت زاویي تعجیل او اړین وخت تعین کړئ.



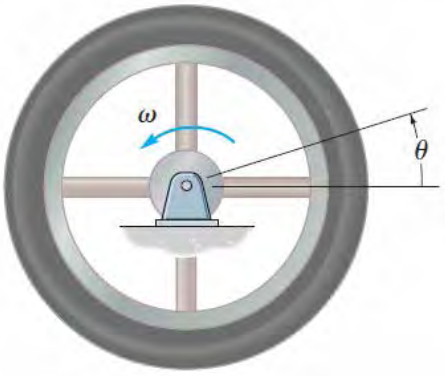
ب 16-1

ب 16-2. فلائیویل په $\boldsymbol{\omega} = (0.005q^2)$rad/s زاویوي سرعت سره حرکت کوي، چیرې چې q په رډینو کې ده. زاویي تعجیل معلوم کړئ کله چې فلای ویل 20 دوري کړي وي.



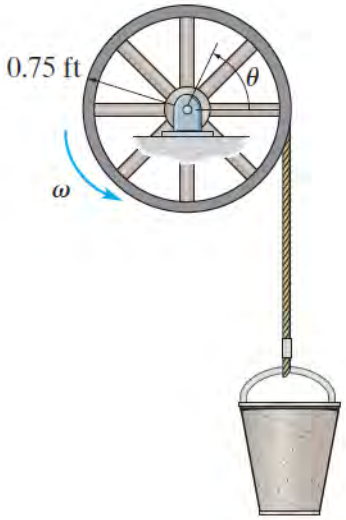
ب 16-2

ب 16-3. فلائیویل د $\boldsymbol{\omega} = (4q^{1/2})$rad/s زاویي سرعت سره حرکت کوي، چیرې چې q په رډینو کې ده. هغه وخت تعین کړئ چې فلائیویل $\boldsymbol{\omega}$= 150rad/s زاویي سرعت ترلاسه کوي. کله چې $t = 0$ ده .1rad = q وي.



ب 16-3

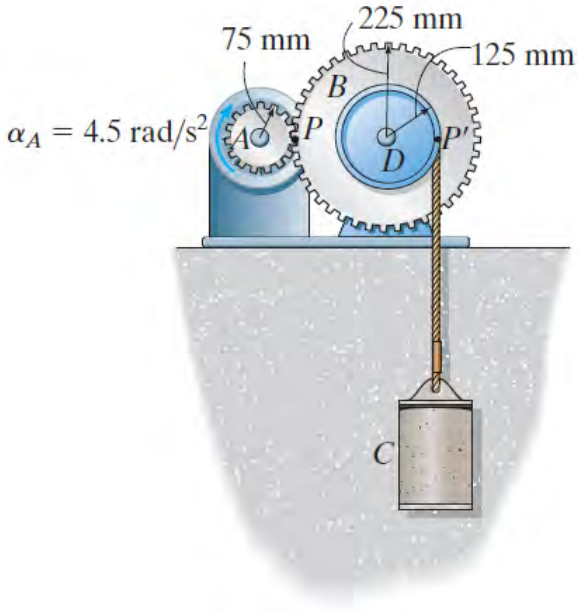
ب 16-4. یوه ډولچه د رسۍ په واسطه پورته کېږي. رسۍ تر یو څرخ تاو شوي. که د څرخ زاویې بېځایه کېدل $q = (0.5t^3+15t)$ rad وي، چېرې چې t په ثانیو کې ده، د ډولچې سرعت او تعجیل کله چې t = 3s وي معلوم کړئ



ب 16-4

ب 16-5. یو څرخ زاویې تعجیل $a = (0.5q)\text{rad/s}^2$ لري، چېرې چې q په رډینو کې ده. وروسته له دې چې څرخ دوی دورې کړې وي، د څرخ په څنډه کې د P نقطې سرعت او تعجیل معلوم کړئ. د څرخ شعاع 0.2 m ده او حرکت په $q = 0$ کې په $\omega_0 = 2\text{rad/s}$ پیل کېږي.

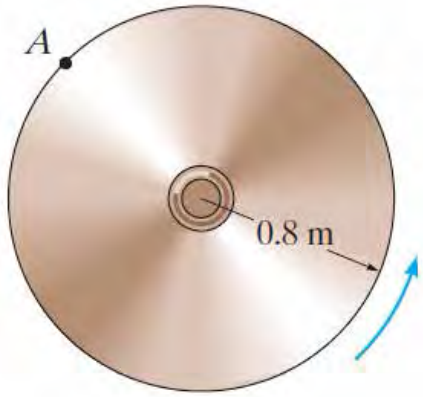
ب 16-6. د لنډ وخت لپاره، موټور، ګیر A په ثابت زاویې تعجیل $\alpha_A = 4.5\ \text{rad/s}^2$ سره ګرزوی د دریدلی حالت نه. په دریو ثانیو کې د سیلینډر وهل شوېی فاصله او سرعت معلوم کړئ. رسۍ شاوخوا د ډرم D تاو شوي، کوم چې د ګیر B سره کلکه تړلی دي.



ب 16-6

PROBLEMS پوښتنې

16-1. د ډسک زاویوي سرعت په دې ډول تعریف شوی $\omega = (5t^2+2)$ rad/s ، چیرې چې tپه ثانیو کې ده. په ډسک د A نقطې د سرعت او تعجیل مقدارونه تعین کړئ کله $t = 0.5$s وي.

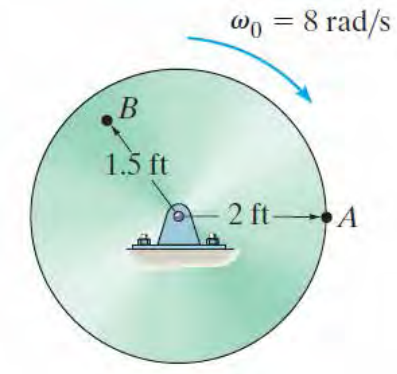


پوښتنه 16-1

16-2. د ډسک زاویي تعجیل په دې ډول تعریف شوی $a = (3t^2+12)$ rad/s^2 ، چیرې چې t په ثانیو کې ده. که ډسک په پیل کې په $\omega_0 = 12$ rad/s سره ګرزی، په $t = 2$s کې د A نقطې سرعت، او د تعجیل عمودي (n) او مماسي (t) اجزاوې تعین کړئ.

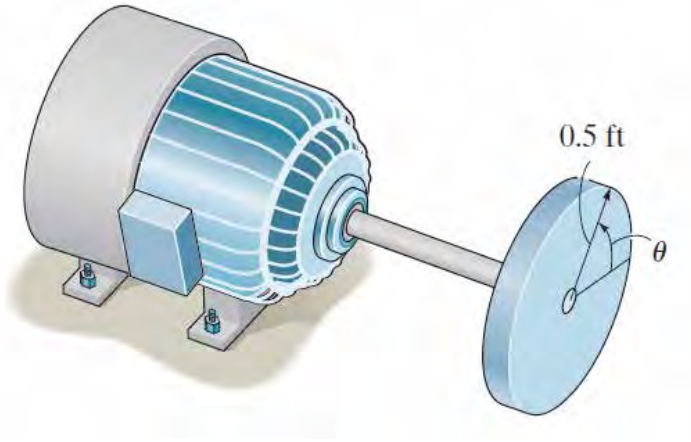
16-3. ډسک په پیل کې په $\omega_0 = 8$ rad/s تاویږی. که ثابت زاویي تعجیل $a = 20$ rad/s^2 ور باندې پلی شی، په $t = 0.5$s کې د A نقطې سرعت، او د تعجیل عمودی (n) او مماسي (t)اجزاوې تعین کړئ.

*16-4. ډسک په پیل کې په $\omega_0 = 8$ rad/s تاویږی. که ثابت زاویي تعجیل $a = 6$ rad/s^2 ور باندې پلی شی، په B نقطه کې سرعت، او د تعجیل عمودی (n) او مماسي (t) اجزاوې، وروسته له دې چې څرخ دوی دوري وکړي، تعین کړئ.



پوښتنې 16-3/4

16-5. دا لاندی ډسک د موټور په واسطه داسي چلول کيږي، چې د ډسک زاويوي موقعيت په $q = (20t + 4t^2)$ rad تعريف کيږي ، چيرې چې t په ثانيو کې ده. په 90 ثانيو وخت کې د دورو شمېر، زاويوي سرعت، او زاويوي تعجيل تعين کړئ.

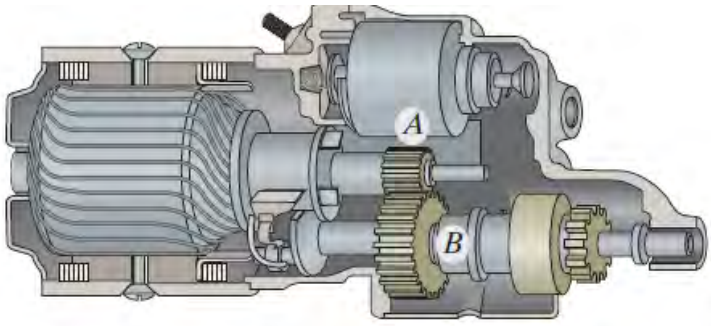


پوښتنه 16-4

16-6. يو څرخ لومړی زاويوي سرعت 10 rev/s لري او د ثابت زاويوي تعجيل $3\ \text{rad/s}^2$, سره حرکت کوي. د څرخ د زاويوي سرعت 20 rev/s ترلاسه کولو لپاره د دورو شمېر او اړين وخت تعين کړئ.

16-7. د لنډ وخت لپاره، د موټر شروعکونکی (starter) ګير A زاويوي تعجيل $a_A = (450t^2 + 60)\ \text{rad/s}^2$ سره ګرزی، چيرې چې t په ثانيو کې ده. د ګير B زاويوي سرعت او زاويوي بې‌ځايه کېدل تعين کړئ کله چې $t = 2\text{s}$ وي، او له دريدلی حالت څخه پيل کوی. د ګيرنو A او B شعاعوی 10 mm او 25 mm په ترتيب سره دي.

16-8*. د لنډ وخت لپاره، موټر شروعکونکی ګير A په زاويوي تعجيل $a_A = (50\omega^{1/2})\ \text{rad/s}^2$ سره تاويږی، چيرې چې ω په رډينوپه ثانيه کې دی. د د ګير B زاويې سرعت ، وروسته له دی چې ګير A 50 دوري تاو شی، تعين کړئ، چې له دريدلی حالته پيل کوی. د ګيرونو A او B شعاعوی په ترتيب سره 10 ملي‌مټره او 25 ملي‌مټره دي.



پوښتنی 16-7/8

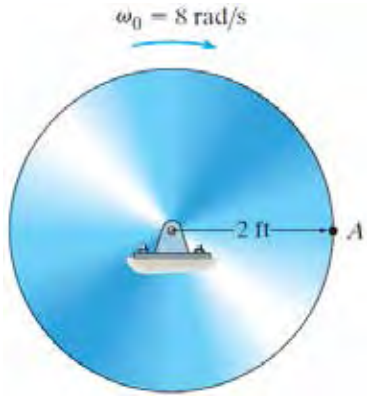
16-9. د کالیو وچونکي ماشین څرخه کي A چې 50 ملي‌متره شعاع لري،په $a_A = (27q_A^{1/2})\ \text{rad/s}^2$ زاویوي تعجیل سره ګرزی، چیرې چې q_A په رډینو کي ده. د $t = 1\text{s}$ وخت کي د هغې زاویوي تعجیل، چې له استراحت څخه پیل کیږي، تعین کړئ .

16-10. د کالیو وچونکی ماشین څرخه کي A چې 50 ملي‌متره شعاع لري،په زاویوي تعجیل $a_A = (10 + 50t)\ \text{rad/s}^2$ سره تاویږی، چیرې چې q_A په رډینو کي ده. په $t = 3s$ کي د هغې زاویوي سرعت ،چې له دریدلی حالت څخه پیل کیږی، تعین کړئ .



پوښتنی 16-9/10

16-11. ډسک په پیل کي په $\omega_0 = 8\ \text{rad/s}$ زاویوي سرعت سره تاویږی. که یو ثابت زاویوي تعجیل $a_c = 6\ \text{rad/s}^2$ پرې پلي شوي وي، په $t = 3\text{s}$ کي، د A نقطې سرعت، او د تعجیل عمودي (n) او مماسي (t) اجزاوې تعین کړئ.



پوښتنه 16-11

16-12.په افقي محورد بادي ژرندی (windmill) پله په زاویوي سرعت $\omega_0 = 2\ \text{rad/s}$ سره تاویږی. که چېرې پلی په 3 ثانیو کي زاویوي سرعت $\omega = 5\ \text{rad/s}$ ترلاسه کړي، تعین کړئ چې د P نقطه، د پلی په څوکه کي، څومره فاصله وهلیی ده. زاویوي تعجیل ثابت دی. همدارنګه، په $t = 3\text{s}$ کي د دې نقطې د تعجیل اندازه څه دی؟

16-13. په افقي محورد بادي ژرندی پله په زاويوي سرعت $\omega_0 = 2$ rad/s سره تاويږی. که يو زاويوي تعجيل $a_c = 0.6$ rad/s^2 وربانډی پلي شي په $t = 3$s کي د پلی به څوکه کی د P نقطي زاويوي سرعت او د تعجيل مقدار تعين کړئ.

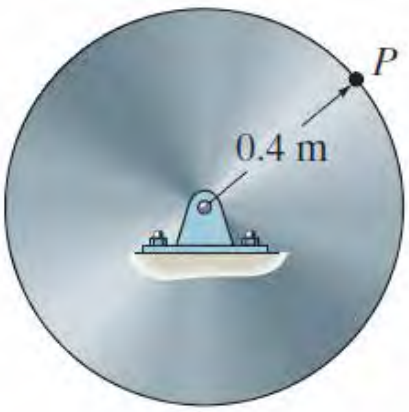


پوښتنی 16-12/13

16-14. ډسک له دريدلی حالت څخه يو زاويوي تعجيل $a = (2t^2)$ rad/s^2 ورکړل شوی، چيرې چې t په ثانيو کي ده. په $t = 4$s موده کي د ډسک زاويوي سرعت او زاويوي بيځايه کېدل تعين کړئ.

16-15. ډسک له دريدلی حالت څخه يو زاويوي تعجيل $a = (5t^{1/2})$ rad/s^2 ورکړل شوی، چيرې چې t په ثانيو کي ده. د $t = 2$s موده کي د ډسک په محيط P نقطه کی د تعجيل عمودي (n) او مماسی (t) اجزاوي تعين کړئ.

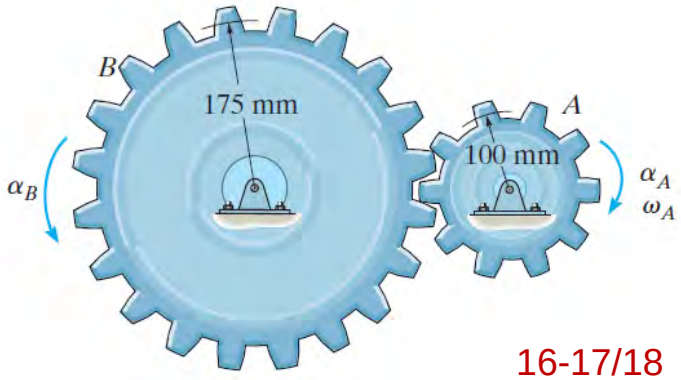
*16-16. ډسک په $\omega_0 = 1$ rad/s پيل کوي کله چې $q = 0$ ده، او زاويوي تعجيل $a = (0.3q)$ rad/s^2 ورکړل شوی، چيرې چې q په رډينو کي ده. د ډسک په محيط په نقطي P کي د تعجيل عمودي (n) او مماسي (t) اجزاوي تعين کړئ کله چې $q = 1$ rev وي.



پوښتنی 16-14/15/16

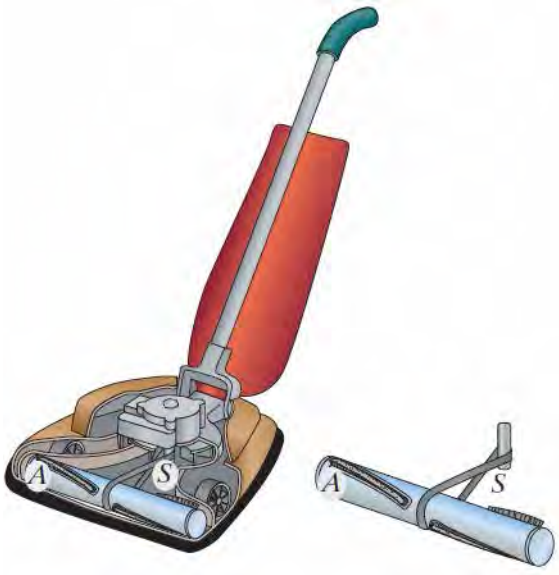
16-17. موټور ګیر A ته زاویوي تعجیل $a_A = (2+0.006q^2)\ \text{rad/s}^2$ ورکوي ، چیرې چې q په رډینو کې ده. که دا ګیر په پیل کې $\omega_A=15\ \text{rad/s}$ سره تاویږی، او وروسته له دی چې ګیر A لس (10) دورې وګرزی، د ګیر B زاویوي سرعت تعین کړئ .

16-18. یو موټور ګیر A ته زاویوي تعجیل $a_A = (2t^3)\ \text{rad/s}^2$, ورکوي چیرې چې t په ثانیو کې ده. که دا ګیر په پیل کې په $\omega_A =15\ \text{rad/s}$ سره ګرزی، د $t =3\text{s}$ په وخت کې د ګیر B زاویوي سرعت معلوم کړئ .



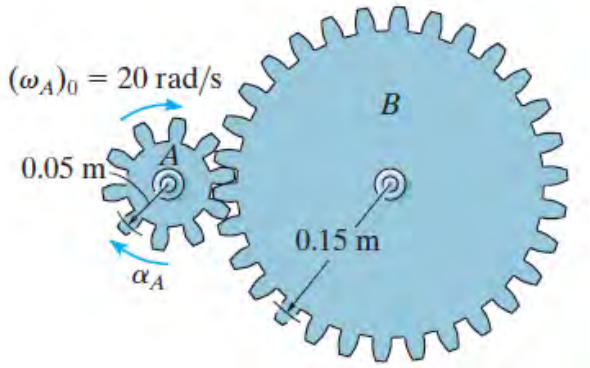
پوښتنې 16-17/18

16-19. د وکیوم جارو د آرمچر شفټ S د زاویوي تعجیل $a = 4\omega^{3/4}\ \text{rad/s}^2$ سره ګرزی، چیرې چې ω په رډینو کې ده. د برس زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې $t = 4\text{s}$ وي، په پیل کې په وخت $t =0$ کې سرعت یې $\omega = 1\ \text{rad/s}$ دي. د شفټ او برس شعاوي، 0.25 in او 1 in ، په ترتیب سره دي.



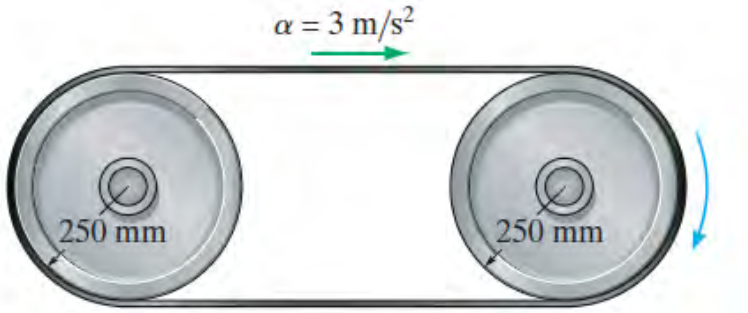
پوښتنه 16-19

*16-20. یو موټور ګیر A ته زاویوي تعجیل $a_A = (4t^3)\ \text{rad/s}^2$، ورکوي چیرې چې t په ثانیو کې ده. که دا ګیر په پیل کې د $(\omega_A)_0 = 20\ \text{rad/s}$ سره ګرزی، په $t = 2\text{s}$ کې د ګیر B زاویوي سرعت معلوم کړئ.



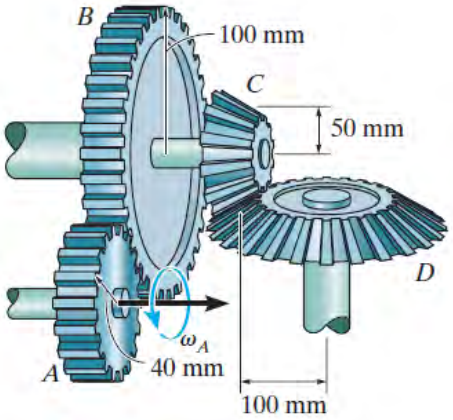
پوښتنه 16-20

16-21. په بنودل شوي وخت کې، افقي برخه د تسمې 3m/s^2 زاویوي تعجیل لري، په داسې حال کې چې د څرخکیو د بهرنیو څنډو سره تماس لرونکیو نقطو د تعجیل مقدار $5\ \text{m/s}^2$ دي. که تسمې د څرخکیو نه ونه بنوېږي، د تسمې تیزوالی د حرکت له پلوه معلوم کړی.



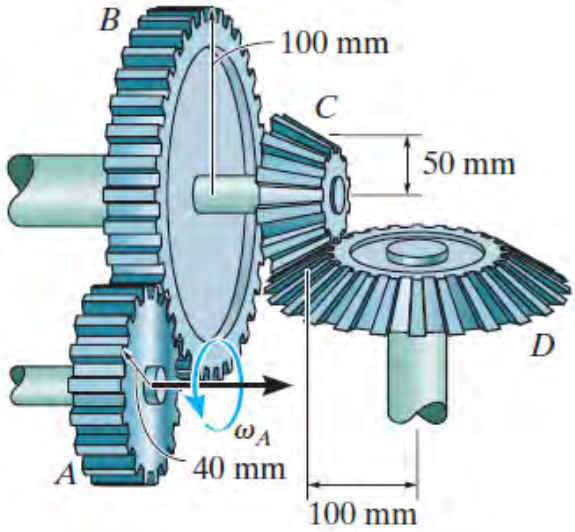
پوښتنه 16-21

16-22. که موټور ګیر A ته $a_A = 2\ \text{rad/s}^2$، زاویوي تعجیل ورکړي کله چې زاویي سرعت $\omega_A = 20\ \text{rad/s}$ وي، د ګیر D زاویوي تعجیل او زاویوي سرعت معلوم کړئ.



پوښتنه 16-22

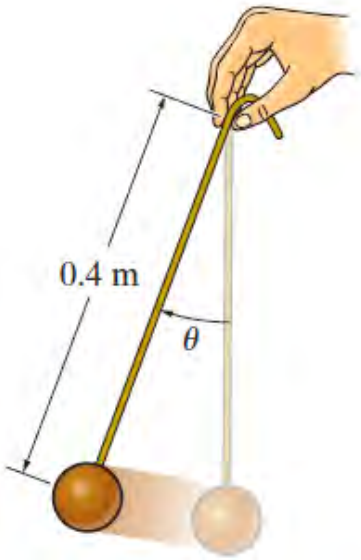
16-23. که موټور ګیر A ته زاویوي تعجیل $a_A = 3\ \text{rad/s}^2$ ورکړي کله چې زاویوي سرعت یې $\omega_A = 60\ \text{rad/s}$ وي، د ګیر D زاویوي تعجیل او زاویوي سرعت معلوم کړئ.



پوښتنه 16-23

*16-24. یو پندولم د داسې نوسان حرکت لري چې
$q = [-0.101\sin(4.95t) + 0.3\cos(4.95t)]$ rad چیرې چې t په ثانیو کې ده، او د ساین او کوسیان لپاره ارکیومنت یې (argument) په رډینو کې ده. د توپ د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $q = 0^o$ وي .

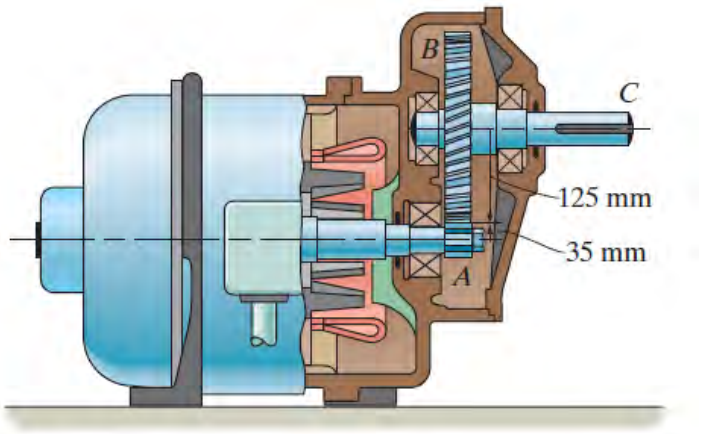
16-25. په پوښتنه 16-24 کې، د پندولم د زاویوی بیځایکیدو اعظمي مقدار معلوم کړئ.



پوښتنې 16-24/25

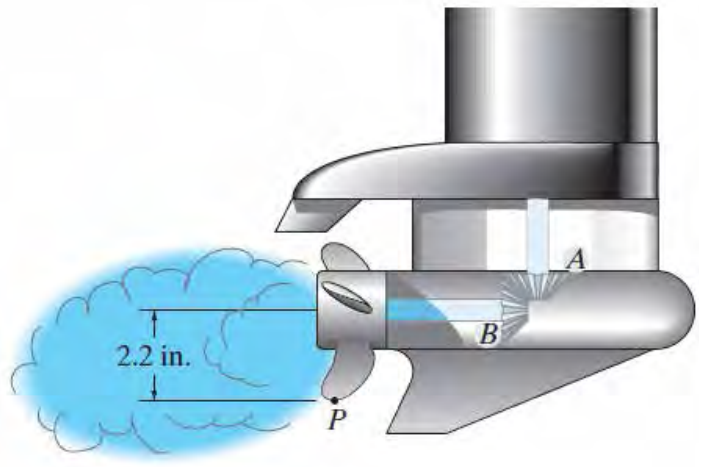
.

16-26. پنين ګير A (pinion gear) ته چې د موټور په شفټ باندې دی، يو ثابت زاويوي تعجيل $a = 3\ \text{rad/s}^2$ ورکړل شوي. که ګيرونه A او B ورکړل شوي ابعاد، چې ښودل شوي ولري، د محصول يا توليد شفت C (output) زاويوي سرعت او زاويوي بيځايه کېدل، چې له دريدلی حالت څخه پيل شوي، معلوم کړئ، کله چې $t = 2\ \text{s}$ وي. شافت د B سره کلک تړل شوي او ورسره تاويږی.



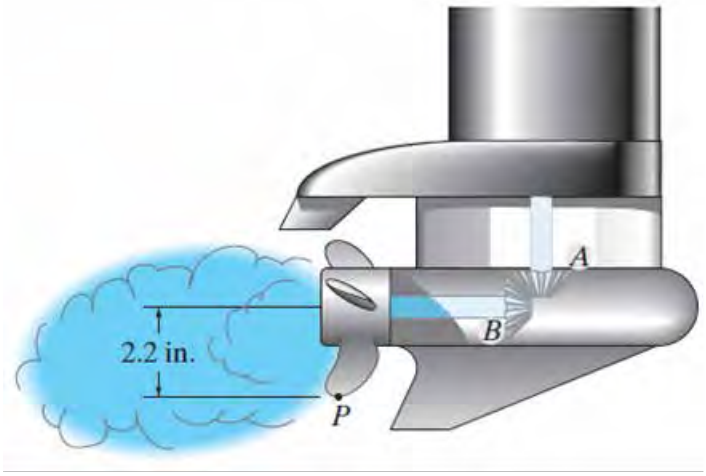
پوښتنه 16-26

16-27. ګير A د بهرني موټور د چلولو شفت باندې په اندازه د $r_A = 0.7\ \text{in}$ شعاع لري، او مش پنين ګير B (mesh pinion gear) په پروپيلر شفت باندې په اندازه د $r_B = 1.4\ \text{in}$ شعاع لري. د پروپيلر زاويوي سرعت په $t = 1.3\ \text{s}$ وخت کې معلوم کړئ که د چلولو شفت د زاويوي تعجيل $a = (300\sqrt{t})\ \text{rad/s}^2$ سره حرکت وکړي، چيرې چې t په ثانيو کې ده. پروپيلر په اصل کې په دريدلی حالت کی دی او د موټور چوکاټ حرکت نه کوي.



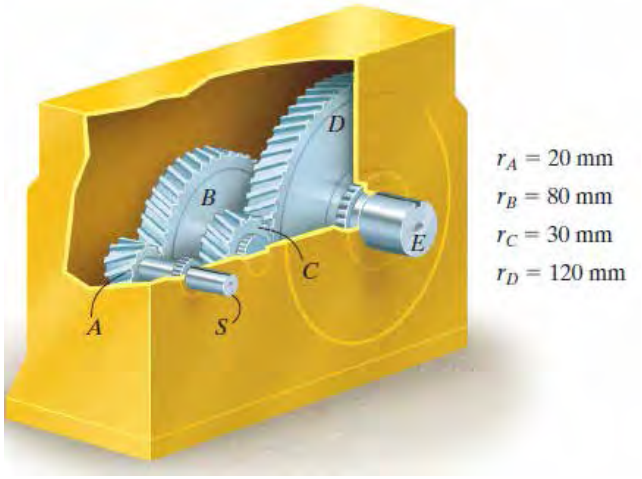
پوښتنه 16-27

16-28* د A ګیر شعاع د بهرني موټور د چلولو شفت باندې په اندازه د $r_A = 0.7$ in ده، او مش پنین ګیر B (mesh pinion gear) شعاع، په پروپیلر شفت باندی په اندازه د $r_B = 1.4$ in ده. د پروپیلر په څوکه کې د P نقطې د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ کله چې $t = 0.75$ s وي. د چلولو شفت د زاویوي تعجیل $a = (300\sqrt{t})$ rad/s^2 سره حرکت کوي، چیرې چې t په ثانیو کې ده. پروپیلر په اصل کې په دریدلی حالت کی دی او د موټور چوکات حرکت نه کوي.



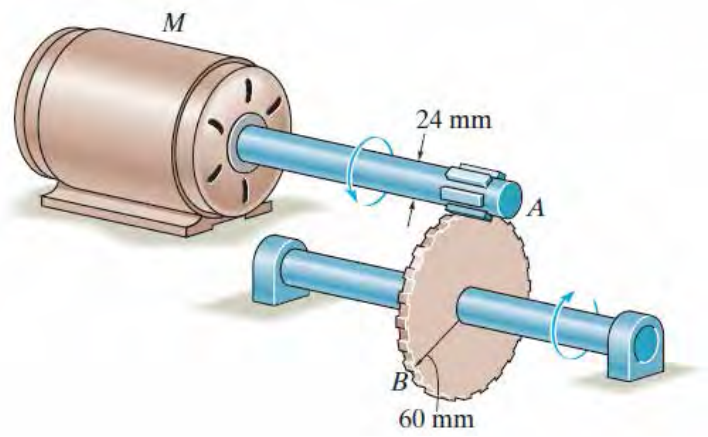
پوښتنه 16-28

16-29.مورس انډسټریل د تیزوالي کمیدونکی اله کوم چې په لاندی انځور کی ښودل شوی جوړه کړي ده. که موټور، شفت S په $a = (0.4e^t)$ rad/s^2 زاویوي تعجیل سره وګرزوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د شفت E زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې $t = 2$ s وي، په پیل کی په دریدلی حالت کی دی. د هرګیر شعاعوی په انځورکې ښودل شوی. په یاد ولری چې B او C ګیرونه کلک یوه شفټ ته ټرلی دی.



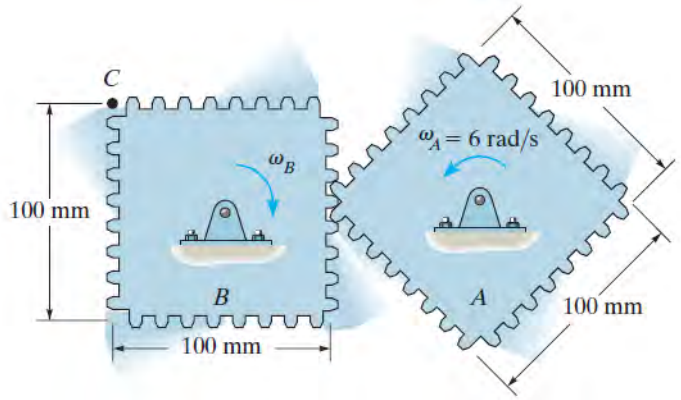
پوښتنه 16-29

16-30.د برېښنا زياتيدو له امله، موټور M شفت A ته $a = (0.06q^2)\text{rad/s}^2$ زاويوي تعجيل ورکوي چيرې چې q په رډينو کې ده. که شفت په پيل کې په $\omega_0 = 50\ \text{rad/s}$ سره ګرزی، د ګير B زاويوي سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې شفټ د زاويوي بېځايه کېدلو 10 دورې (Dq=10 rev) وکړي.



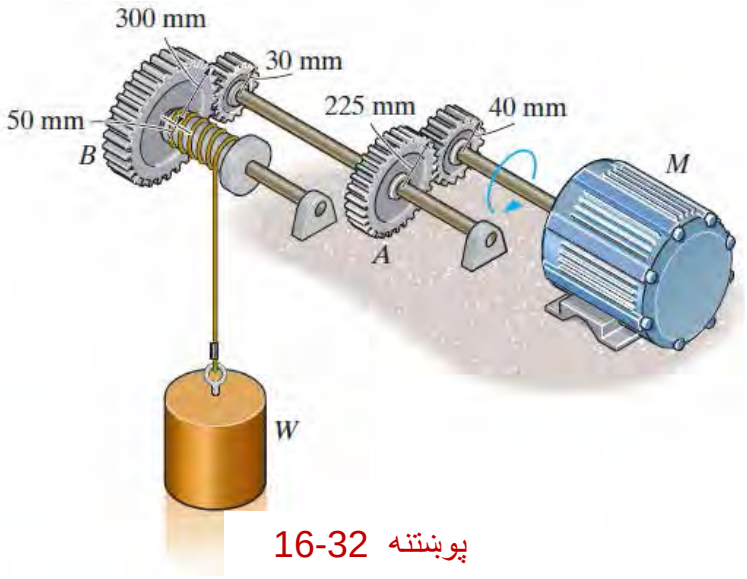
پوښتنه 16-30

16-31. په ورکړل شوي وخت کې، ګير A د ثابت زاويوي سرعت $\omega_A = 6\ \text{rad/s}$ سره ګرزی. د ګير B ترټولو لوی زاويوي سرعت او د نقطې C ترټولو لوړ تيزوالی معلوم کړئ.



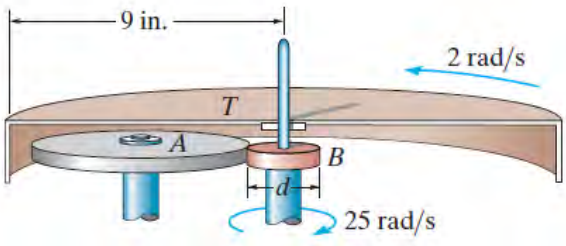
پوښتنه 16-31

16-32*. د پورته وړونکی په کارولو سره، د بار W د پورته کيدو فاصله په $t = 5\ \text{s}$ کې معلومه کړئ. د موټور M شفت د $\omega = 100(4 + t)\ \text{rad/s}$ زاويوي سرعت سره ګرځي، چيرې چې t په ثانيو کې ده.



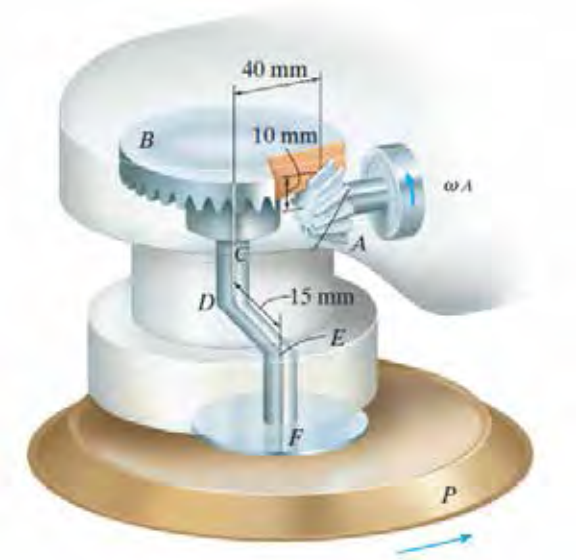
پوښتنه 16-32

16-33. تاویدونکی میز T د اصطکاکی دریدلی څرخ A لخوا چلول کیږي، چې په عین وخت کی د تاویدونکی میز داخلي څنډې او د موټور شفت سپینډل B سره تړلی دی. که موټور يې په 25 rad/s باندې ګرزی، نو د سپینډل اړتیا وړ قطر d معلوم کړئ ترڅو تاویدونکی میز په 2 rad/s کې وګرزی.



پوښتنه 16-33

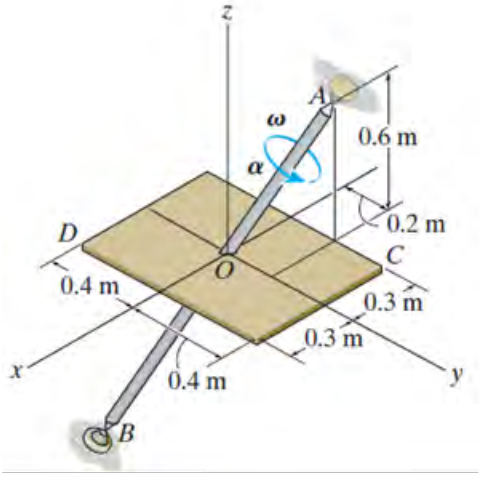
16-34. د یوه لنډ وخت لپاره یو موټور د تصادفي مدار سندر (sander) ګیر A ته $\omega_A = 40(t^3 + 6t)$ rad/s زاویوي سرعت ورکوي ، چیرې چې t په ثانیو کې ده. دا ګیر د B ګیر سره وصل دی، چې د شفت CD سره کلک تړل شوي دی. د دې شفت پای د غیر متمرکز سپینډل EF او پډ P سره وصل دی، چې پایه P د شفت CD شاوخوا د 15 mm شعاع سره تاویږی. د سپینډل EF د سرعت اوتعجیل عمودي اوافقي اجزاوو اندازه معلومه کړئ کله چې $t=2s$ وي.



پوښتنه 16-34

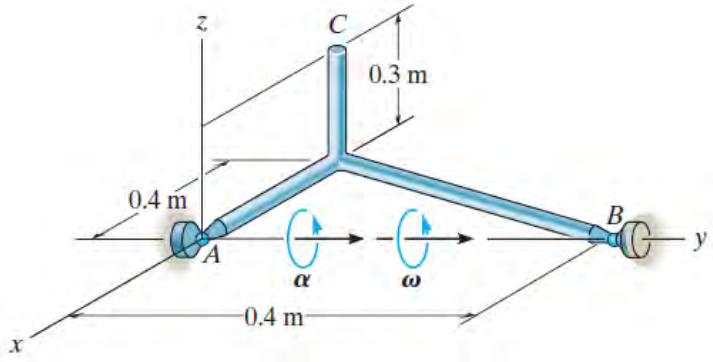
16-35. که شافت اوتخته د ثابت زاويوي سرعت $\boldsymbol{\omega}$ = 14 rad/s سره ګرزی، د نقطې C سرعت او تعجيل معلوم کړئ چې د تختې په کونج کې موقعيت لري. پايله د کارتيزين ويکتوري په شکل سره څرګند کړئ.

*16-36. په بنودل شوي وخت کې، شافت او تخته د زاويوي سرعت $\boldsymbol{\omega}$ = 14 rad/s او زاويوي تعجيل a = 7 rad/s2 سره ګرزی. د نقطې D کوم چې د تختې په کونج کې موقعيت لري سرعت او تعجيل يې معلوم کړئ. پايله د کارتيزين ويکتور په توګه څرګند کړئ.



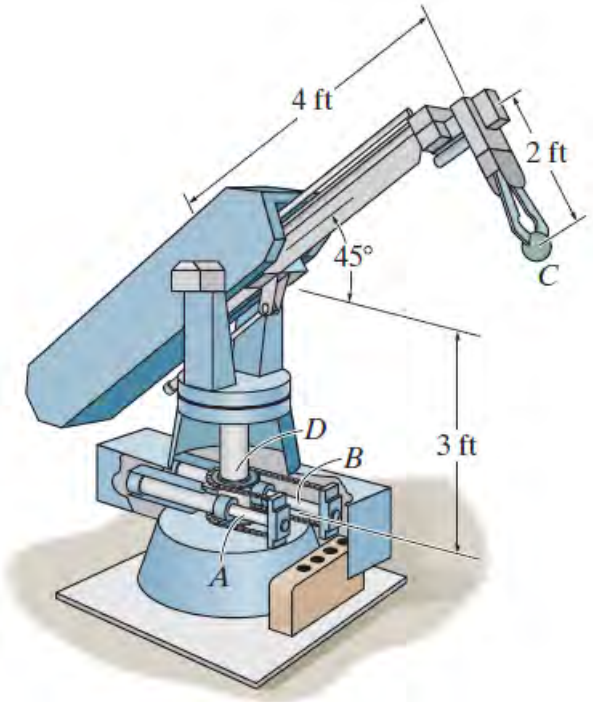
پوښتنې 16-35/36

16-37. د ميلې اسمبلی په A او B کی په بال او ساکټ جاینټونو اتکا لري. په ورکړل شوي وخت کې، دا د y محور شاوخوا په زاویوي سرعت $\boldsymbol{\omega} = 5$ rad/s سره ګرزی او زاویوي تعجیل $a = 8$ rad/s^2 لري. په دې وخت کې د نقطې C سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ. د کارتیزین ویکتورو او د معادلو 16-9 او 16-13 په کارولو سره پوښتنه حل کړئ.



پوښتنه 16-37

16-38. د روباټیک لاس ګرزیدل د هیدرولیک سیلینډرو A او B د خطي حرکت له امله مینځ ته راځي. که دا حرکت لامل د D ګیر د ساعت په لور د 5 rad/s شي، د C برخې د سرعت او تعجیل مقدارونه معلوم کړئ چې د روباټ په لاس کی نیول شوی.



پوښتنه 16-38

16.4* د مطلق حرکت تحلیل (ABSOLUTE MOTION ANALYSIS)

یو جسم چې د عمومي سطحې حرکت سره مخ وی، په یوه وخت کی لیږدیدل او تاویدل تجربه کوي. که چیرې یو نازکه تخته د جسم استازیتوب وکړي، تخته په سطحه د تختې کې انتقال مومي او په هغه محورچی عمود په تخته وي تاویږی. حرکت د جسم په بشپړه توګه مشخص کیدی شي که چیرې د یوی ثابتی کرښې زاویوي تاویدل په جسم باندي او هم د یوی نقطی حرکت په جسم کې، و پوهیږو. دلته د دواړو پوهیدل اړین دي. یوه لاره چې د دې حرکتونو ترمنځ اړیکه رامینځته شي د خطی موقعیت محورونو s کارول دي ترڅو دا نقطه د مسیرپه اوږدوالی باندې مشخصه شي، او هم د کرښې زاویوي موقعیت محور q مشخص کړل شي تر ځو چی د د کرښی جهت معلوم شی. دا دوه محورونه بیا د پوښتنی د هندسي سره اړیکه لري. په کارولو د تفاضلي معادلو مستقیم پلي کول وخت ته



$v = ds/dt$ ،$a = dv/dt$,$\omega = dq/dt$ او a = د دواړو، د نقطې حرکت او د کرښې زاویې حرکت اړیکی یوله بل سره جوړیدې شي . دا طریقه شباهت لري د هغه ټرل شویو حرکتو پوښتنوحل کولو سره چې څرخګی پکی وو، برخه 12.9. په ځینو حالاتو کې، همدغه طریقه ممکن د یوه جسم حرکت د متصل جسم د حرکت ټراو لرو لپاره وکارول شي.

د ټرک د غورځولو بین (Dumping Bin) د یوې ثابتې محوري شاوخوا ګرځي چې د پن له لارې په A نقطه کې تیریږي. دا د هیدرولیک سیلینډر BC د غزیدو له لارې کار کوي. د بین زاویوي موقعیت د زاویې موقعیت کوارډینیټ q په کارولو سره مشخص کیدی شي، او د بین د C نقطی موقعیت د خطی موقعیت کوارډینیټ s په کارولو سره مشخص کیږي. څرنګه چې a او b ثابت اوږدوالی لري، نو دا دوه کوارډیناټونه د کوساین قانون له لارې سره ټرل کیدی شي :

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

د پورته معادلې مشتق وخت ته، د هیدرولیک سیلینډردغزیدو تیزوالی د بین زاویوي سرعت سره اړیکه لري.

د تحلیل تګلاره

د یوې نقطې P چې خطی حرکت کوي، سرعت او تعجیل یې کولای شی د بدن دننه د یوې کرښې د زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل سره پدی لاندی تګ لاره اړیکه ولري.

د موقعیت کوارډنیټ معادله (Position Coordinate Equation) .

1. د یوې ټاکل شوې سرچینې څخه د موقعیت محور s په واسطه د نقطې P موقعیت معلوم کړئ، کوم چې په مستقیمه کرښه کې د نقطې P د حرکت په لوري اندازه کیږي.
2. د یوه ټاکلي مرجع څخه د جسم په بدن کې د کرښې زاویي موقعیت θ اندازه کړئ.
3. د جسم له ابعادو څخه، s او θ ته په هندسی او/یا مثلثاتی لاره یو له بل ته اړیکه ورکړئ، $s = f(\theta)$.

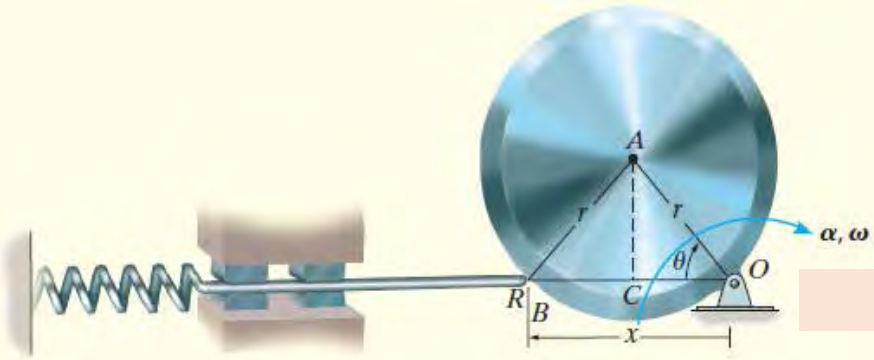
د وخت مشتقات (Time Derivatives):

1. د $s = f(\theta)$ معادلې څخه د وخت لومړی مشتق واخلئ ترڅو د v او ω تر منځ اړیکه ترلاسه کړئ.
2. د دوهم ځل لپاره د وخت مشتق واخلئ ترڅو د a او a تر منځ اړیکه ترلاسه کړئ.
3. په هر حالت کې، کله چې د وخت مشتق د موقعیت کوارډنیټ معادلې کارول کیږي له زنجیري قاعدې څخه کار واخلئ. (ضمیمه C وګورئ)

مثالونه

مثال 16.3

د راډ R پای چې په شکل 16-8 کې ښودل شوی دی، د فنرپه واسطه له کم سره اړیکه ساتي. که چیرې کم په یوه محور چې له O نقطې څخه تیریږی په زاویوی تعجیل a او زاویوی سرعت ω وګرزی، د راډ سرعت او تعجیل په هغه وخت کې معلوم کړئ کله چې کم په اختیاري موقعیت θ کې وي.



انځور 16-8

حل:

د کوارډنیټ د موقعیت معادله (Position Coordinate Equation):

کوارډنیټ u او x غوره شوي دي تر څو د کم د OA کرښې د څرخیدونکي حرکت او د راډ د خطی کرښې حرکت سره اړیکه ورکړي. دا کوارډنیټ د تاکل شوي نقطې O څخه اندازه کیږي او د مثلثاتو په کارولو سره یو له بل سره اړیکه لري. لکه څنګه چې $OC = CB = r\cos\theta$ ، په انځور 16-8 کې ښودل شوي، نو $x = 2r\cos\theta$:

د وخت مشتق (Time Derivative): د زنجیري قاعدې په کارولو سره، مونږ لرو

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\sin\theta \qquad \textit{Ans.}$$

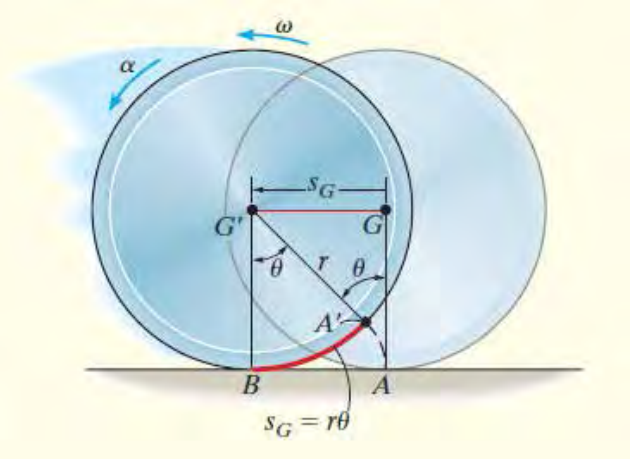
$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\sin\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: منفي نښې ښیي چې v او a د مثبت x لورې په خلاف دي. دا منطقي ښکاري که تاسو حرکت تصور کړئ

مثال 16.4

په ټاکلې شېبه کې، د r شعاع لرونکی سلنډر، چې په انځور 16-9 کې ښودل شوی دی، زاویوي سرعت w او زاویوي تعجیل a لري. د سلنډر د مرکز G سرعت او تعجیل معلوم کړئ که چېرې سلنډر پرته له ښویدلو وګرزي.



انځور 16-9

حل

د کوارډینیټ دموقعیت معادله (Position Coordinate Equation): سلنډر د عمومي سطحی حرکت سره مخ دی، ځکه چې دا په یو وخت کې هم انتقال کړي او هم څرخېږي. د کتلوله مخې، نقطه G په مستقیمه کرښه ښي لور ته له G څخه G' ته حرکت کوي، کله چې سلنډر ګرزي، لکه څنګه چې په انځور 16-9 کې ښودل شوي. په پایله کې، د هغې نوې موقعیت G' د افقي موقعیت کوارډینیټ s_G په واسطه مشخص کیږي. همدارنګه، کله چې سلنډر پرته له ښویدلو ګرزي، د $A'B$ قوس اوږدوالی په حاشیه باندی، چې د A څخه B پورې له ځمکې سره په تماس کې و، د s_G اوږدوالی سره مساوي دی. په دې توګه، حرکت دا غوښتنه کوي چې شعاعي کرښه GAپه زاویه θ سره نوي موقعیت $G'A'$ ته وګرزي. څرنګه چې قوس $A'B = r\theta$ دی، نو G یو واټن $s_G = r\theta$ سفر کړي.

د وخت مشتق (Time Derivative): د دې معادلې پرله پسې د وخت مشتق نیول، او په دې پوهیدل چې r ثابت دی، او $w = d\theta/dt$ او $a = dv/dt$ ، ضروري اړیکې ترلاسه کوي

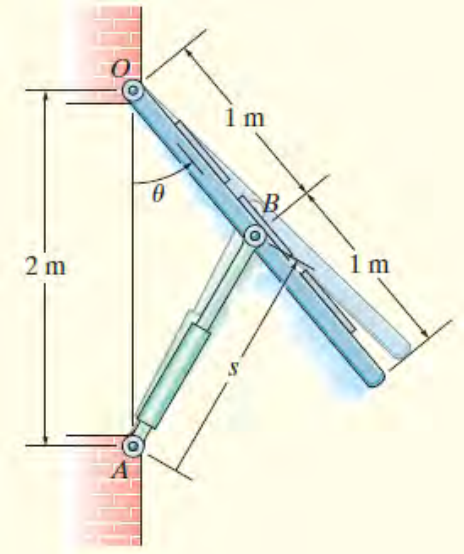
$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega \qquad \textit{Ans.}$$

$$a_G = r\alpha \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: په یاد ولرئ چې دا اړیکې یوازې هغه وخت اعتبار لري کله چې سلنډر (ډیسک، څرخ، توپ، او داسې نور) پرته له ښویدلو وګرزي.

مثال 16.5



انځور 16-10

په انځور 16-10 کې، کړکۍ د يوه هيدروليک سلنډر AB په کارولو سره خلاصيږي. که سلنډر په يوه ثابت سرعت 0.5 m/s کې وغځيږي، د کړکۍ زاويي سرعت او زاويي تعجيل په هغه شېبه کې معلوم کړئ کله چې $\theta = 30°$ وي.

حل :

د کوارډنيټ د موقعيت معادله (Position Coordinate Equation): د کړکۍ زاويي حرکت د θ کوارډنيټ په کارولو سره ترلاسه کيدی شي، په داسې حال کې چې د هيدروليک سلنډر اوږدوالی يا حرکت د s کوارډنيټ په واسطه تعريف شوی. دا کوارډنيټونه د کوساين قانون په کارولو سره يو له بل سره اړيکه لري، يعنې

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta \qquad (1)$$

کله چې $q = 30^o$ وی

$$s = 1.239\text{ m}$$

د وخت مشتق (Time Derivative): د معادلې 1 نسبت وخت ته مشتق نيسو

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\sin\theta)\omega \qquad (2)$$

څرنګه چې $v_s = 0.5$ m/s نو بيا په $q=30^o$ لرو

$$(1.239\text{ m})(0.5\text{ m/s}) = 2\sin 30°\omega$$

$$\omega = 0.6197\text{ rad/s} = 0.620\text{ rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

د معادلې 2 نسبت وخت ته مشتق نيسو

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\sin\theta)\frac{d\omega}{dt}$$
$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\sin\theta)\alpha$$

څرنګه چې $a_s = dv_s/dt$ نو موږ لرو:

$$(0.5\ \text{m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0.6197\ \text{rad/s})^2 + 2\sin 30°\alpha$$
$$\alpha = -0.415\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

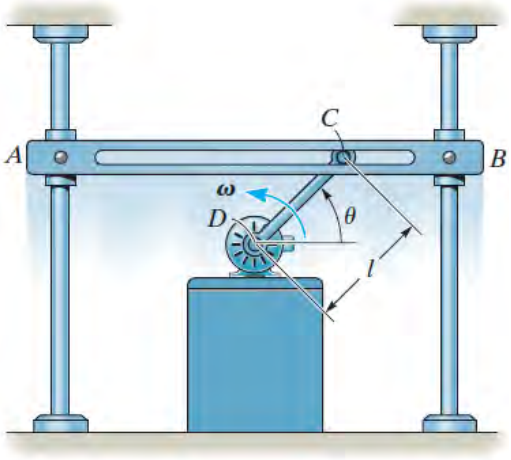
له دې امله چې پایله منفي ده، دا ښیي چې کړکۍ زاویوي کمښت لري.

پوښتنې

PROBLEMS

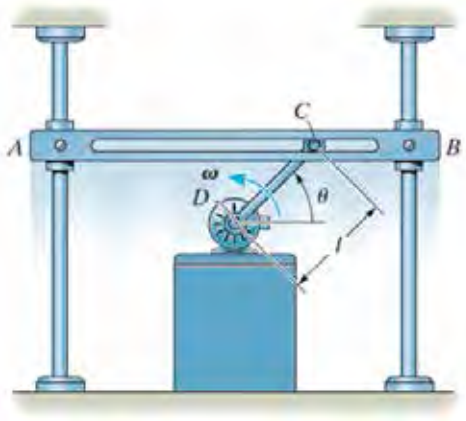
پوښتنې

16–39 . میله DC په D کې په شافټ باندې په ثابت زاویوي سرعت ω څرخیږي. د میلې ABسرعت او تعجیل معلوم کړئ، چې د لارښود له خوا عمودي حرکت ته محدود شوی ده.



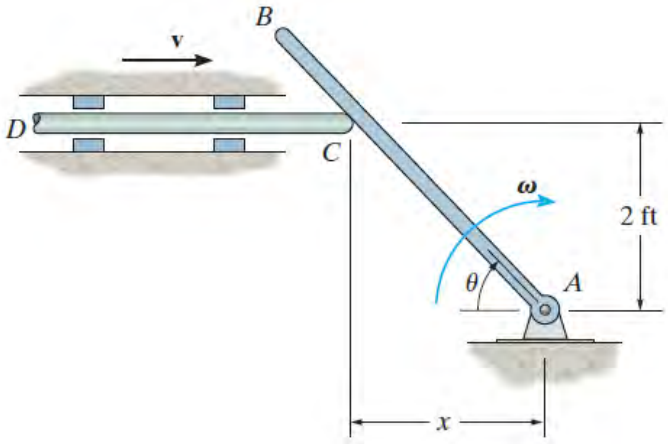
پوښتنه 16-39

*16–40 . میله *DC* په *D* کې په شافټ باندې په ثابت زاویوي سرعت ***w*** او زاویوي تعجیل *a* څرخیږي. د میلې *AB* سرعت او تعجیل معلوم کړئ، چې د لاربنود له خوا عمودي حرکت ته محدود شوی ده.



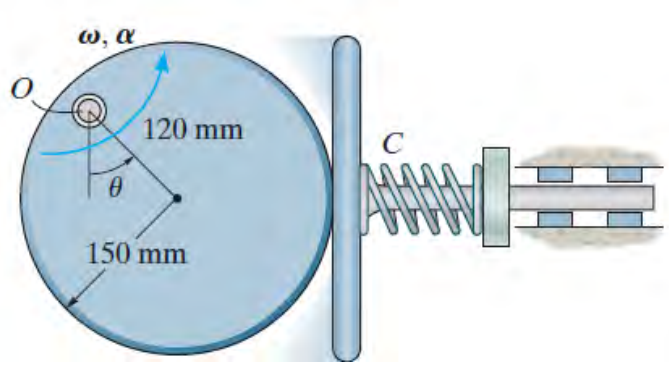
پوښتنه 16-40

16–41 . راډ CD په AB فشار راوړي، چې زاویوي سرعت ورکوي. که چیرې د AB زاویوي سرعت په $v = 5$ rad/s حالت کې وسائل شي، نو د راډ AB د زاویې *q* له مخې د CDد سرعت v اندازه معلومه کړئ.



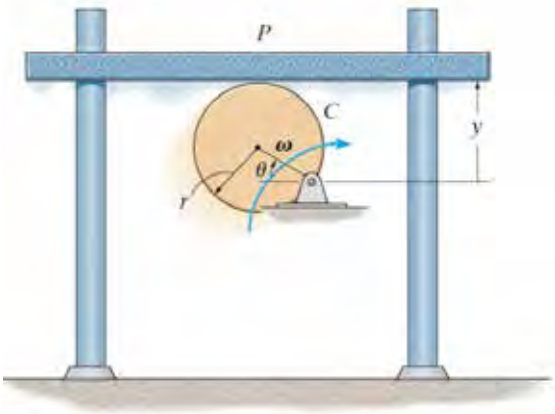
پوښتنه 16-41

16–42. کله چې $q = 30°$ وی د تختې سرعت اوتعجیل معلوم کړئ، چیرې چې په دې شېبه کې دایرې کم په ثابته نقطه O باندی په زاویوي سرعت $w = 4$ rad/s او د زاویوي تعجیل $a = 2$ rad/s² سره څرخیږي.



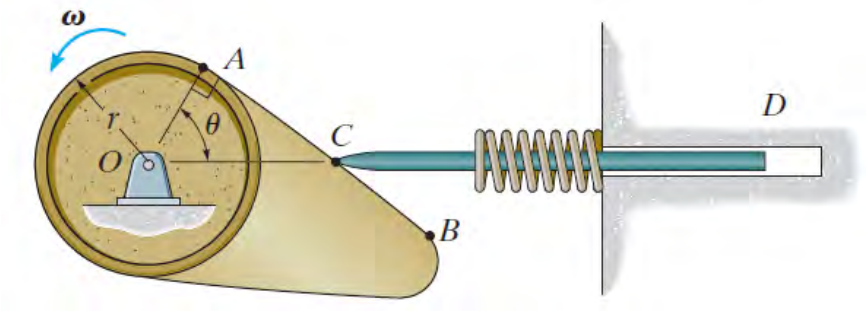
پوښتنه 16-42

16–43 . د تختی P سرعت او تعجیل تابع د کیم C د زاویې q له مخی معلوم کړئ، که چیرې کیم په یو ثابت زاویوي سرعت w سره څرخیږي. د پن اتکا د P او C په حرکت باندې هیڅ اثر نه کوي. تخته د لاربنود له مخې د عمودي حرکت لپاره محدوده شوی ده.



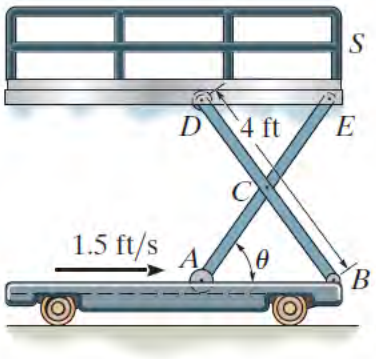
پوښتنه 16-43

*16–44 . د تعقیب کوونکي راډ CD سرعت او تعجیل د زاویې q له مخی معلوم کړئ کله چې د کم او تعقیب کوونکي راډ ترمنځ تماس د کم د مخ په AB مستقیمه سیمه کې وي. کم د ساعت خلاف لور په ثابت زاویوي سرعت w سره څرخیږي.



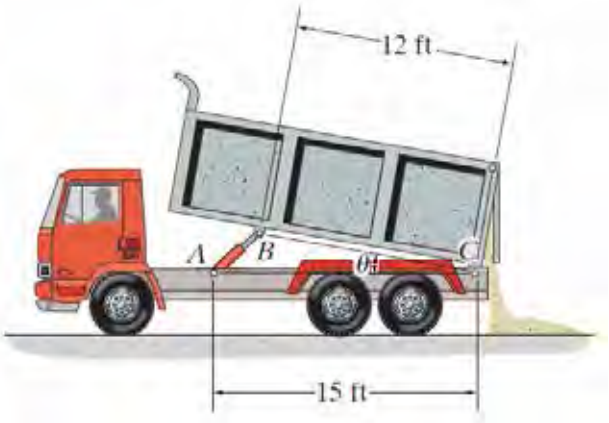
پوښتنه 16-44

16–45 . خوازه (scaffold) S د A رولرپه حرکت کولو سره د B په لور پورته کيږي. که چيرې A په 1.5 ft/s تيزوالي سره B ته نږدې کيږي، نو د تختې د لوړيدو تيزوالی د زاويې q له مخې معلوم کړئ. 4 فټه ټرونکي د دوی په منځنۍ نقطه کې په پن سره ټرل شوي دي.



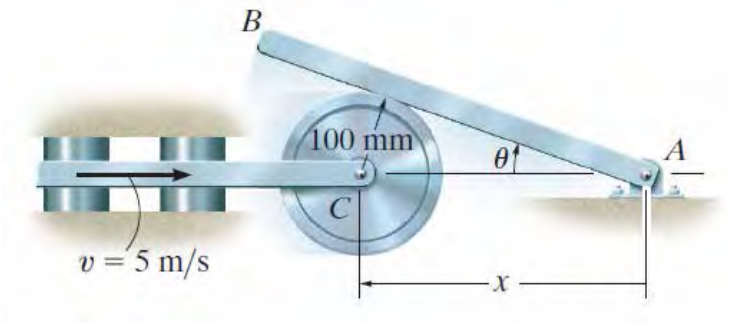
پوښتنه 16-45

16–46 .که چيرې هيدروليک سلنډر AB په ثابت کچه 1 ft/s کې وغځيږي، نو د بار غورځوونکی زاويوي سرعت د $q = 30°$ شېبې په حالت کې معلوم کړئ.



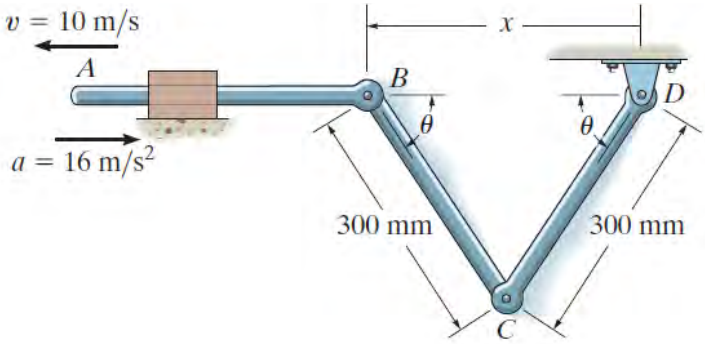
پوښتنه 16-46

16–47 . د راډ AB زاويوي سرعت معلوم کړئ کله چې $q = 30°$ وي. شافټ او د رولر C مرکز په ثابت کچه $v = 5$ m/s کې مخکې ځي.



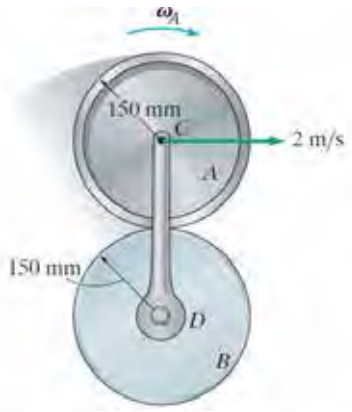
پوښتنه 16-47

*16–48 . په ښودل شوي شېبه کې، $q = 60°$ ده، او راډ AB په 16 m/s² تجيل کې دی کله چې سرعت يې 10 m/s دی. د ټرونکې CD زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل په دې شېبه کې معلوم کړئ.



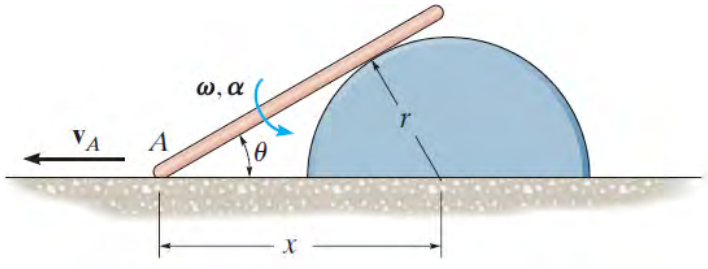
پوښتنه 16-48

16–49 . څرخ A پرته له ښويدلو، د ثابت سلنډر B په سطحه باندې څرخيږي. که چيرې د مرکز C تيزوالی 2 m/s وي، نو د A زاويي سرعت معلوم کړئ . څومره څرخونه به A په خپل مرکز وکړی تر څو ټرونکی DC يوه څرخ بشپړ کړي.



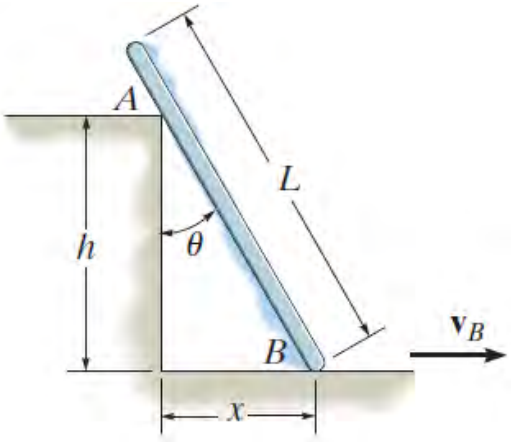
پوښتنه 16-49

16–50 . د میلی A پای چپ لور ته په ثابت سرعت $\mathbf{v}_A$ سره حرکت کوي. د میلی زاویوي سرعت w او زاویوي تعجیل a ، د موقعیت x له مخی معلوم کړئ.



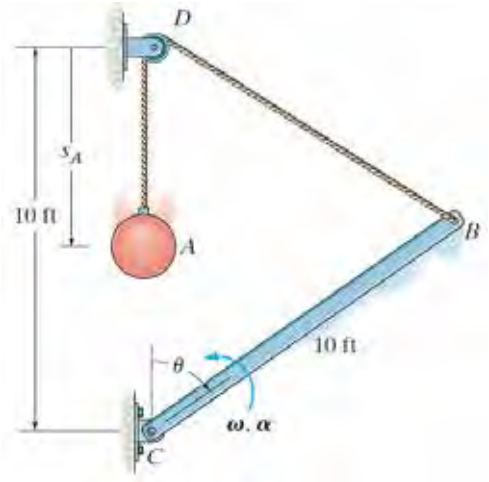
پوښتنه 16-50

16–51 . میله د فرش او د A نقطي سره په تماس کي پاتي کيږي. که چیری د B نقطه په ثابت سرعت $\mathbf{v}_B$ سره ښي لور ته حرکت وکړي، نو د میلی زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل د x له مخی معلوم کړئ.



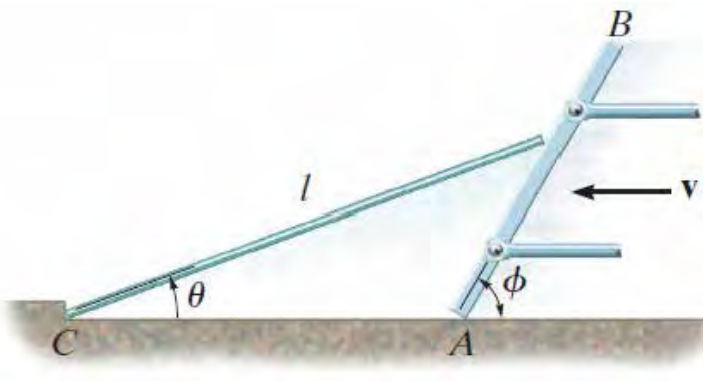
پوښتنه 16-51

*16–52 . کله چي میله د زاویي q په حالت کي وي، میله د ساعت په لور په ثابت زاویوي سرعت $\mathbf{w}$ څرخیږي . په دی شیبه کی د تول A سرعت معلوم کړئ. د تار اوږدوالی 20ft دی.



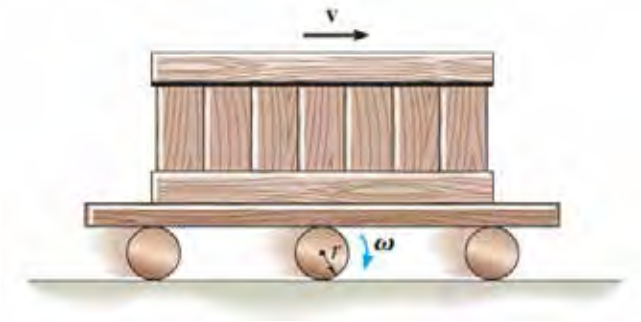
پوښتنه 16-52

16–53. مایله تخته AB په ثابت سرعت **v** سره چپ لور ته حرکت کوي. د نرۍ میلۍ چې اوږدوالی یې *l* دي، زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل یې معلوم کړئ. میله کله چې په تخته ښویږي په *C* پټه تاویدنه کوي.



پوښتنه 16-53

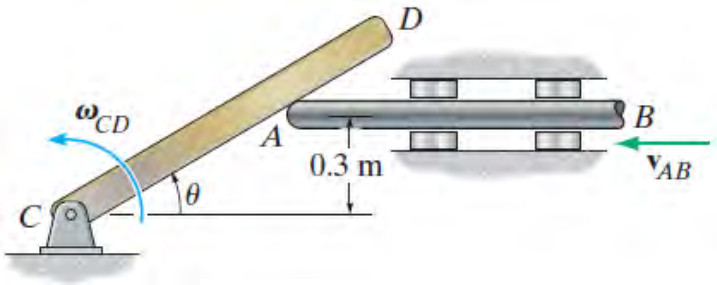
16–54. کړاچی د یوه پلټ فارم په مرسته چې د رولرونو په سر ولاړ دی، لیږدول کیږي او دهر رولر r شعاع لري. که چیرې رولرونه ونه ښویږي، د دوی زاویي سرعت معلوم کړئ که چیرې پلټ فارم په v سرعت سره مخکې ځي.



پوښتنه 16-54

16–55. د راډ *CD* زاویوي سرعت کله چې $q = 30°$ وي معلوم کړئ. راډ *AB* په 5 m/s سره چپ لور ته حرکت کوي.

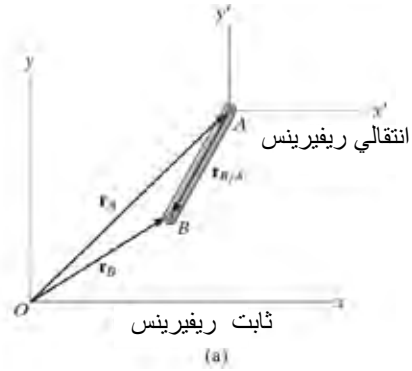
16–56. د راډ *CD* زاویوي تعجیل کله چې $q = 30°$ وي معلوم کړئ. راډ *AB* صفر سرعت لري، یعنې $v_{AB} = 0$ ، او د $a_{AB} = 2\ m/s^2$ تعجیل ښي لورته لري کله چې $q = 30°$ وي.



پوښتنې 16-55/56

16.5 د نسبي حرکت تحلیل: (RELATIVE-MOTION ANALYSIS) سرعت(VELOCITY)

د یو کلک بدن عمومي سطحی حرکت د انتقال او څرخییدنې د ترکیب په توګه تشریح کیدی شي. د دې حرکاتود "اجزاوو" د جلا کیدو لپاره، مور به د نسبی حرکت تحلیل نه ګټه واخلو چې دوه کټګوری د کوارډینیټ سیستم کاره وی. د x ، y کوارډینیټ سیستم ثابت دی او په بدن کی د دوو نقطو A او B مطلق موقعیت اندازه کوي، چې دلته د میلې په توګه نمایندګي کوی، انځور 16-11a . د x′, y′ کوارډینیټ سیستم مبده به د ټاکل شوي "اساسي نقطې A " سره وصل شي، چې عموماً معلوم حرکت لري. د دې کوارډینیټ محورونه د ثابت چوکاټ په نسبت انتقال کړي، مګر د میلی سره نه څرخیږي.



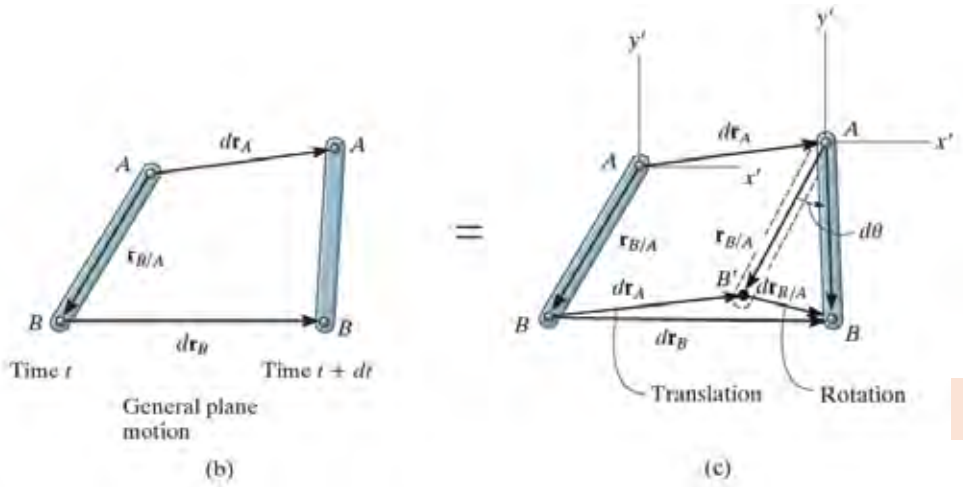
موقعیت (Position) . په انځور 16-11aکې د موقعیت ویکتور $\mathbf{r}_A$ د "اساسي نقطې A "موقعیت مشخصوي، او د نسبي موقعیت ویکتور $\mathbf{r}_{B/A}$ د نقطې B موقعیت د نقطې A په پرتله معلوموي. د ویکتور جمع کولو له لارې، د B موقعیت بیا دی.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

بیځایه کیدنه (Displacement) . د وخت د یوې شېبې په جریان dt کې ، د A او B نقطو کی $d\mathbf{r}_A$ او $d\mathbf{r}_B$ بیځایه کیدنه راغلي لکه څنګه چې په انځور 16-11bکې ښودل شوي. که مور عمومي سطحی حرکت د دوې د جزوو له مخې په پام کې ونیسو، نو ټول میله لومړی د $d\mathbf{r}_A$ په مقدار سره انتقال کړي، تر څو A ، اساسي نقطه، خپل وروستی موقعیت ته لاړه شي او د B نقطه B′ته لاړه شي، انځور 16-11c . میله بیا د A په شاوخوا کې د dq اندازه څرخیدلی ده، تر څو B′د نسبي انتقال $d\mathbf{r}_{B/A}$ کوی ترڅوخپل وروستی موقعیت B ته ولاړه شي. د A په شاوخوا کې د څرخیدو له امله، $d\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_{B/A}\, dq$ ، اود B دبیځایه کیدنه عبارت ده له

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

د A د څرخیدو له امله
د A د انتقال له امله
د انتقال او څرخیدو له امله



انځور 16-11

سرعت (Velocity) . د A او B نقطو د سرعت ترمنځ اړیکی معلومولو لپاره، اړتیا ده چې د موقعیت معادلې وخت ته مشتق واخلو، یا یوازې د بیځایه کیدو معادله په dt تقسیم کړو. دا لاندې پایلې ورکوي:

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

اجزاوې $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ او $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ د ثابت x ، y محورونو سره اندازه کیږي او د A او B نقطو مطلق سرعتونه په ترتیب سره څرګندوي. له هغه ځایه چې نسبي بیځایه کیدنه د دوراني حرکت له امله رامنځته کیږي، د دریمې اصطلاح اندازه

$dr_{B/A}/dt = r_{B/A}\, dq/dt = r_{B/A}\dot{q} = r_{B/A}w$ دي، چیرې چې w د هغه بدن زاویوي سرعت دی چې په اوسني لحظه کې په پام کې نیول شوی. مونږ به دا اصطلاح د نسبي سرعت $\mathbf{v}_{B/A}$ په توګه وپیژنو، ځکه چې دا د A په پرتله د B سرعت څرګندوي لکه څنګه چې ثابت لیدونکی یې د انتقالي $\dot{x}$ ، $\dot{y}$ محورونو سره اندازه کوي. په نورو ټکو کې، میله داسې ښکاري چې د $\dot{z}$ محور په شاوخوا کې د زاویوي سرعت w سره ګرزی چې د A نه تیریږي. له دې امله، $\mathbf{v}_{B/A}$ د $v_{B/A} = wr_{B/A}$ اندازه لري او یو لوری لري چې د $\mathbf{r}_{B/A}$ سره عمود دی. له دې امله مونږ لرو:

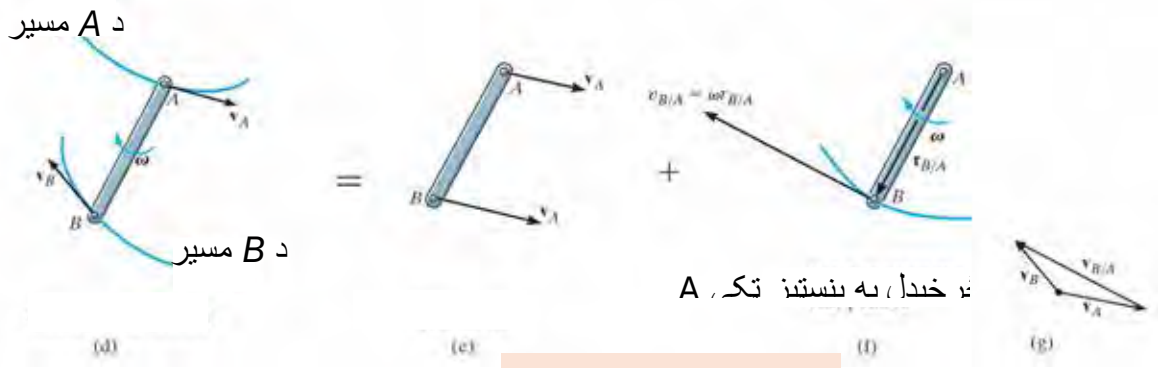
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (16–15)$$

چیرې چې

$\mathbf{v}_B$ = د ټکی B سرعت

$\mathbf{v}_A$ = د بنسټ ټکی A سرعت

$\mathbf{v}_{B/A}$ = د B سرعت نسبت A ته



انځور 16-11 (ادامه)

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ معادله ښيي چې د B سرعت، انځور 16-11d ، په پام کې نيولو د ټول بار سره ، چې د $\mathbf{v}_A$ سرعت سره انتقال کړي، ټاکل کيږي ، انځور 16-11e، او د A په شاوخوا کې د زاويوي سرعت w سره څرخ کوي، انځور 16-11f . د دې دوو اغيزو ويکتوری اضافه کول، چې B ته پلي کيږي، $\mathbf{v}_B$ توليدوي، لکه څنګه چې په انځور 16-11g کې ښودل شوي.

څرنګه چې نسبي سرعت $\mathbf{v}_{B/A}$ د A په شاوخوا کې د دايروي حرکت اثر څرګندوي، دا اصطلاح د کراس ضربولو په واسطه څرګندیدلی شي $\mathbf{v}_{B/A} = w \times \mathbf{r}_{B/A}$ ، معادله 16-9. له همدې امله، د کارټيزين ويکتور تحليل کارولو لپاره، مونږ کولی شو معادله 16-15 داسی وليکو:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16–16)$$

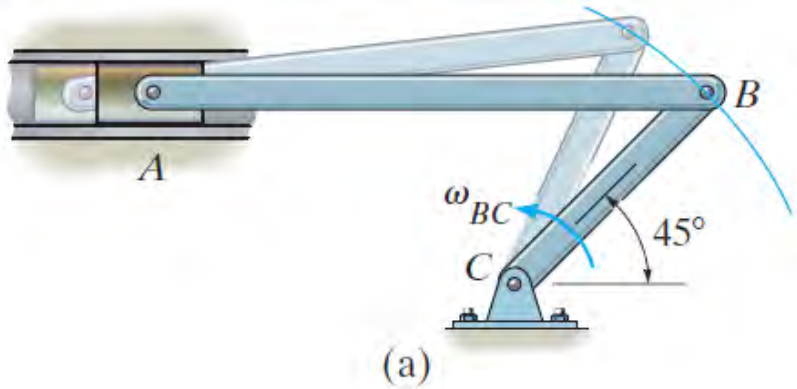
چيرې چې

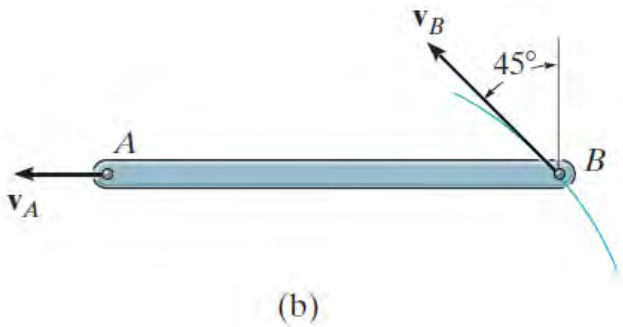
$\mathbf{v}_B$ = د ټکی B سرعت

$\mathbf{v}_A$ = د بنسټ ټکی A سرعت

w = د جسم زاويوي سرعت

$\mathbf{r}_{B/A}$ = د موقعيت ويکتور چې د A نه د B لور ته دی

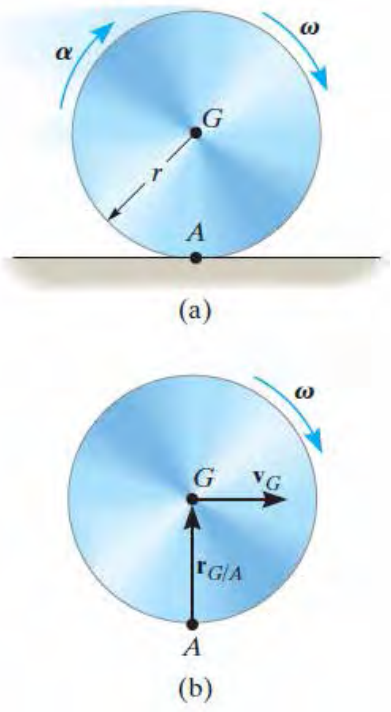




انځور 16-12

کله چې د سرعت معادله پلي کيږي، د A او B نقطې ځايونه بايد عموماً د بدن هغه نقطې وټاکل شي چې د نورو بدنو سره د پن په توګه اړيکي لري، يا د هغو نقطو په توګه چې د نورو بدنوسره چې معلوم حرکت ولري، تماس کې وي. د مثال په توګه، په انځور 16-12a کې د ټرونکي AB نقطه A بايد په افقي لاره حرکت وکړي، پداسې حال کې چې نقطه B په دايري لاره حرکت کوي. له دې امله، د $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ لوري ټاکل کيدی شي ځکه چې دوی تل د دوی د حرکت لارو ته مماس دي، انځور 16-12b .

بې ښويدو رغړيدل (Rolling Without Slipping). د يوه ډيسک (څرخ، توپ، او نور) په حالت غور وکړئ چې بې له ښويدو رغړی، انځور 16-13a. که مور A نقطه د ځمکې په سطحه وټاکو، نو دا (په لحظوی توګه) صفر سرعت لري ځکه چې ځمکه حرکت نه کوي. سربيره پر دې، د ډيسک مرکز G په افقي لاره حرکت کوي نو $\mathbf{v}_G$ افقي دی. د دې سرعت ترلاسه کولو لپاره مور به معادله 16-16 پلي کړو. د کينمتيکي ډايګرام، انځور 16-13b، څخه، مور لرو:



انځور 16-13

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$

نو بيا

$$v_G = \omega r \qquad (16\text{–}17)$$

ورته پايلی په مثال 16-4 کی راغلي وي.

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د تحلیل کړنلاره

د نسبي سرعت معادله په دوو لارو کارول کیدی شي : یا د کارتیزین (Cartesian) ویکتور تحلیل په کارولو سره، یا په مستقیم ډول لیکلو د x او y (scalar) اجزاوو د معادلې سره. د پیاده کولو لپاره، سپارښتنه کیږي چې لاندې کړنلاره وکارول شي.

ویکتور تحلیل (Vector Analysis)

کینیمتیک ډیاګرام (Kinematic Diagram) •

- د ثابت x او y محورونو جهتونو ټاکل، او د بدن یو کینیمتیک ډیاګرام رسمول چې د A او B ټکو سرعتونه، $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ ، زاویي سرعت، ω ، او د نسبي موقعیت ویکتور $\mathbf{r}_{B/A}$ ښیي .
- که د $\mathbf{v}_A$ ، $\mathbf{v}_B$، یا ω اندازی مجهولی وي، د دې ویکتورونو د جهت لورفرض کیدی شي.

د سرعت معادله (Velocity Equation)

- دد $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ د کارولو لپاره، ویکتورونه د کارتیزین ویکتور په بڼه څرګند کړئ او په معادله کې يې ځای په ځای کړئ. کراس ضرب ارزونه يې وکړئ او بيا د $\mathbf{i}$ او $\mathbf{j}$ اړونده اجزاوې سره مساوي کړئ ترڅو دوی سکیلر معادلې ترلاسه کړئ .
- که د نامعلومو اندازو لپاره، حل منفي ځواب ورکړي، نو دا د کنیمټیک په ډیاګرام کې د ویکتور د لوري برعکس لوري ته اشاره کوي.

سکالر تحلیل (Scalar Analysis)

کینیمتیک ډیاګرام (kinematic Diagram) که د سرعت معادله په سکیلر بڼه کې وکارول شی، نو د نسبي سرعت $\mathbf{v}_{B/A}$ اندازه او جهت باید وټاکل شي. یو کینیمټیک ډیاګرام رسم کړئ لکه څنګه چې په انځور 11f-16کې ښودل شوی،کوم چې نسبي حرکت ښیي. څرنګه چې بدن په موقتي توګه په A ټکي کې "پین" دی، د $\mathbf{v}_{B/A}$ اندازه $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ ده. د $\mathbf{v}_{B/A}$ د جهت لوری تل د $\mathbf{r}_{B/A}$ سره عمودي وي تر څو بدن د ω دوراني حرکت سره سم وی*.

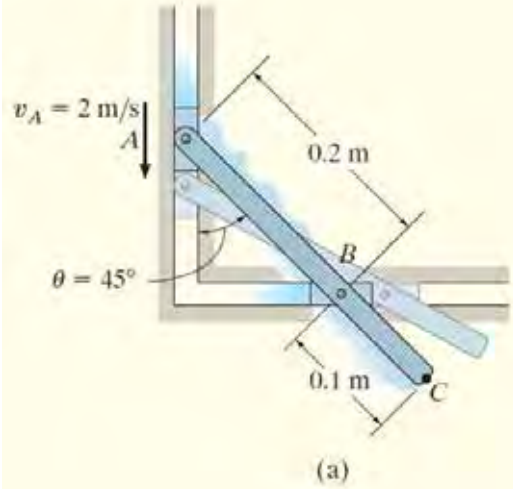
د سرعت معادله(Velocity Equation). معادله 15–16 په سمبولیک بڼه ولیکئ، $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$، او د هر یوه اصطلاح لاندې ویکتورونه په ګرافیکي ډول چې د هغوی اندازې او لوري بڼې وښیی. سکیلرمعادلې د دې ویکتورونو د x او y اجزاوو څخه ټاکل کیږي.

*اصطلاح $v_B = v_A + v_{B/A(pin)}$ ممکن مرسته وکړي چې" A پین" ده په یاد وساتي.

مثالونه

مثال 16.6

په انځور 16-14a کې ښودل شوی ټرونډ (لینک) د A او B د دوو بلاکونو لخوا لارښود کیږي، چې په ثابتو جریو (slots) کې حرکت کوي. که د A سرعت 2 m/s ښکته وي، د B سرعت د $q = 45°$ په شیبه کې وټاکئ.



حل I ویکتوری تحلیل (VECTOR ANALYSIS)

کینیمتیک ډیاګرام (Kinematic Diagram). له دې املې چې A او B ټکیو حرکت د ثابتو جریو په امتداد محدود دي او $\mathbf{v}_A$ ښکته خوا ته لارښودل شوی، نو $\mathbf{v}_B$ باید په افقي توګه ښي لور ته لارښود شي، لکه په انځور 16-14b کې. دا حرکت سبب کیږی چې ټرونډ د ساعت ضد لور ته حرکت وکړی، یعني، د ښي لاس قاعدې له مخې زاویوي سرعت $\mathbf{w}$ بهر لور ته او د حرکت د سطحې سره عمودي لارښودل کیږي.

د سرعت معادله (Velocity Equation). هر یو ویکتور، انځور 16-14b، کې د هغوی $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ اجزاوو له مخې څرګند کړئ او د A (بنسټیز ټکي) او B لپاره د 16-16 معادله تطبیق کوو، مورِ لرو

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \sin 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \sin 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

د $\mathbf{i}$ او $\mathbf{j}$ جزوی د یوه بل سره مساوی نیسو چې

$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad (1)$$
$$0 = -2 + 0.2\omega \sin 45° \qquad (2)$$

نو بیا

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \curvearrowleft \qquad v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

حل II سکیلرتحلیل (SCALAR ANALYSIS)

د نسبي "دایروي حرکت" کینیمتیک ډیاګرام چې $\mathbf{v}_{B/A}$ تولیدوي، په انځور 16-14c کې ښودل شوی. دلته $v_{B/A} = w(0.2\ \text{m})$ دی. نو:

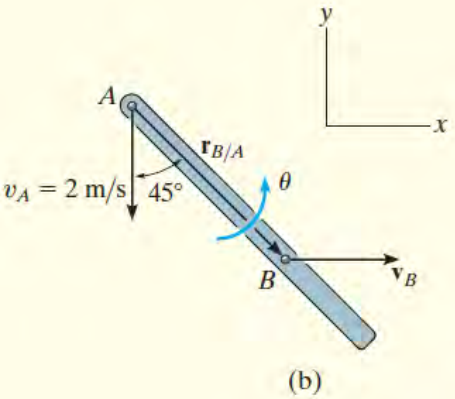
په دی توګه

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ \text{m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega(0.2\ \text{m}) \\ \measuredangle 45^\circ \end{bmatrix}$$

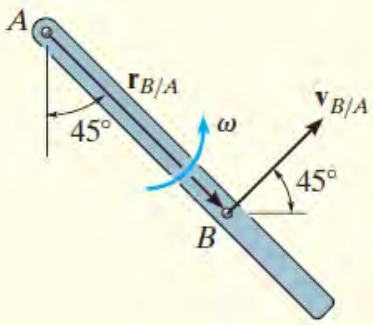
$$(\pm\rightarrow) \quad v_B = 0 + \omega(0.2)\cos 45^\circ$$

$$(+\uparrow) \quad 0 = -2 + \omega(0.2)\sin 45^\circ$$



(b)

حل یې پورته معادلې 1 او 2 تولیدوي. باید ټینګار وشي چې دا پایلې یوازې په هغه شیبه کې چې $q = 45°$ وي، د منلو وړ دي. که $q = 44°$ لپاره بیا محاسبه وشي، پایلې د $v_B = 2.07$ m/s او $w = 14.4$ rad/s دي؛ په داسې حال کې چې کله $q = 46°$ وي، $v_B = 1.93$ m/s او $w =$ 13.9 rad/s دي، او نور.



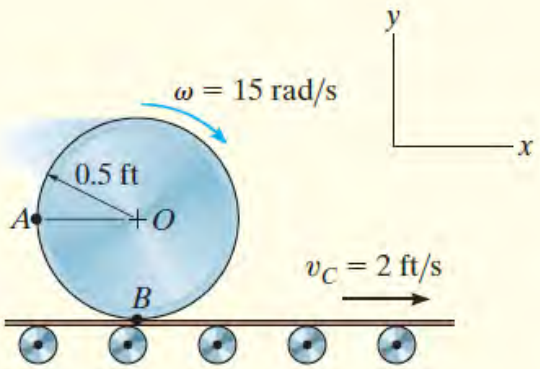
Relative motion
(c)

انځور 16-14

یادونه: څرنګه چې v_A او w معلوم دي، د ټروند په هر بل ټکي کې سرعت ټاکل کیدی شي. د یو تمرین په توګه، وګورئ که تاسو کولی شی معادله 16-15 یا معادله 16-16 په ټکو A او C یا په ټکو B او C باندې تطبیق کړئ او وښیئ چې کله $q = 45°$ وي، $v_C = 3.16$ m/s وي، چې د افقي لورې څخه 18.4° پورته په یوه زاویه کې لاربنوول شوی وي.

مثال 16.7

په انځور 16-15a کې ښودل شوی سلنډر، د یوه کنویر تسمې په سطحه چې په 2 ft/s حرکت کوي، پرته له ښویدو څخه څرخیږي. د A ټکي سرعت وټاکئ. سلنډر د ساعت پر لور زاویوي سرعت $w = 15$ rad/s لري، په هغه شیبه کې چې ښودل شوي دی.



(a)

حل I ویکتوری تحلیل (VECTOR ANALYSIS)

کینیمتیک ډیاګرامځرنګه (Kinematic Diagram).

څرنګه چې ښویدل نشته، نو د سلنډر په B ټکي کې سرعت د کنویر تسمې سره برابر دی، لکه څنګه چې په انځور 16-15b کې ښودل شوی. همدارنګه، د سلنډر زاویوي سرعت معلوم دی، نو مور کولی شو د سرعت معادله په B (بنسټیز ټکي) او A باندې تطبیق کړو ترڅو $\mathbf{v}_A$ وټاکو.

د سرعت معادله (Velocity Equation).

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

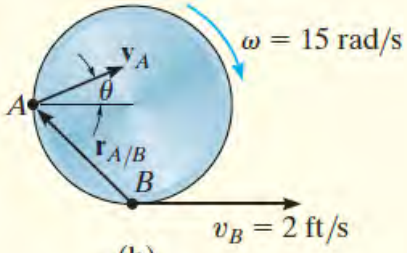
$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

نو

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ ft/s}$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ ft/s}$$



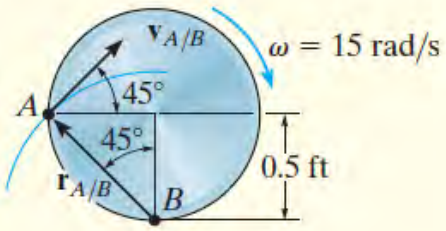
(b)

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ ft/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

حل II سکیلرتحلیل (SCALAR ANALYSIS)

په بل ډول، سکیلر اجزاوې د $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ په مستقیم ډول ترلاسه کیدی شي. د کینیمتیک ډیاګرام څخه، چې نسبي "دایروي" حرکت ښیي او $\mathbf{v}_{A/B}$ تولیدوي، لکه څنګه چې په انځور 16-16c کې ښودل شوی، مورِ لرو



$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ ft}}{\cos 45°}\right) = 10.6 \text{ ft/s}$$

نسبي حرکت

(c)

نو بیا

انځور 16-15

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix} (v_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ ft/s} \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10.6 \text{ ft/s} \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix}$$

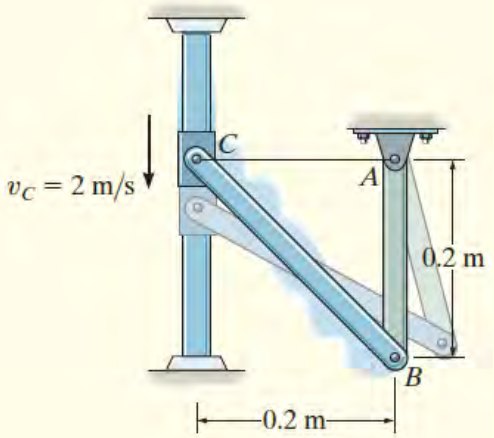
د x او y اجزاوو په مساوي کولو سره پخواني پایلې ورکوي، یعنې

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45° = 9.50 \text{ ft/s}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \sin 45° = 7.50 \text{ ft/s}$$

مثال 16.8

په انځور 16-16a کې حلقه C په 2 m/s سرعت سره ښکته خوا ته حرکت کوي. پدې شیبه کې د CB زاویوي سرعت وټاکئ.



(a)

حل I ویکتوری تحلیل (VECTOR ANALYSIS)

کینیمتیک ډیاګرام (Kinematic Diagram). د C ښکته حرکت لامل کیږي چې B د یوه منحني مسیر په امتداد ښي لور ته حرکت وکړي. همدارنګه، CB او AB د ساعت خلاف لور ته څرخي.

د سرعت معادله (Velocity Equation). ټروند CB (عمومي سطحی حرکت): لکه څنګه چې په انځور 16-16b کې ښودل شوي

انځور 16-16

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

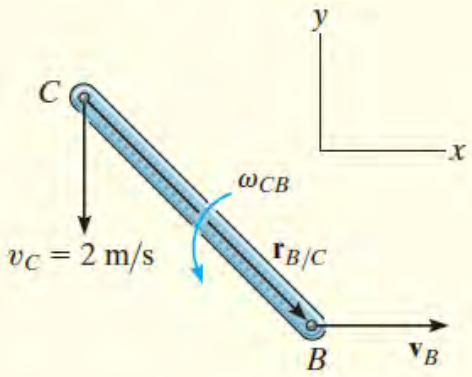
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

$$v_B = 0.2\omega_{CB} \quad (1)$$

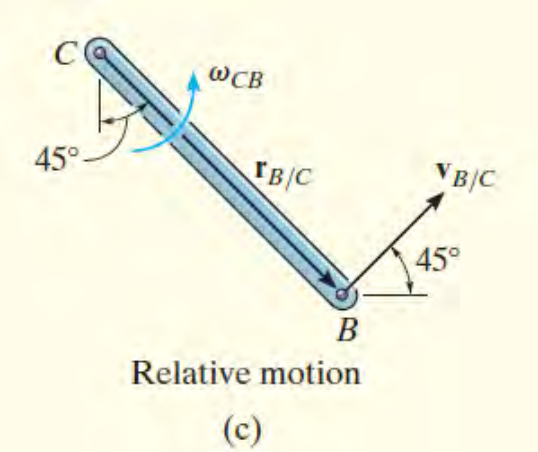
$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB} \quad (2)$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \curvearrowleft \quad \textit{Ans.}$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$



(b)



حل II سکیلرتحلیل (SCALAR ANALYSIS)

د سکیلر اجزاوو معادله $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ په مستقیم ډول ترلاسه کیدی شي. د کینیمتیک ډیاګرام، چې په انځور 16- 16c کې ښودل شوی، د نسبي "دایروي" حرکت ښیي چې $\mathbf{v}_{B/C}$ تولیدوي. موږ لرو

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

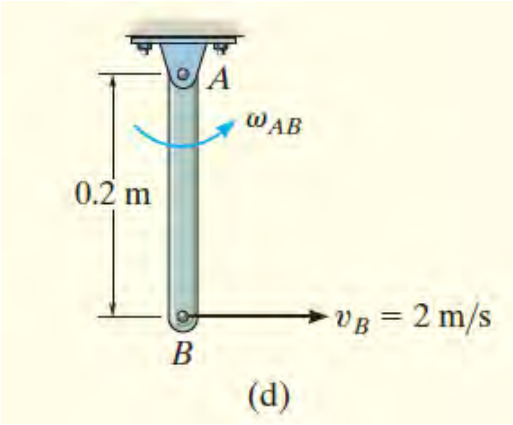
$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ \text{m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\ \text{m}) \\ \measuredangle\ 45° \end{bmatrix}$$

دا ویکتورونه د x او y په اجزاوو ویشل دا لاندی په لاس راکوی:

$$(\pm\rightarrow) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\cos 45°)$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\sin 45°)$$

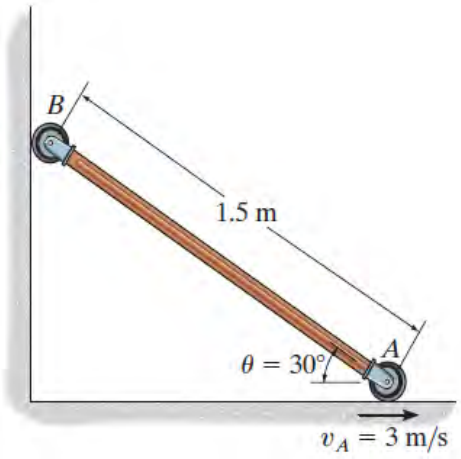
دا د معادلو 1 او 2 سره یو شی دی.



انځور 16-16

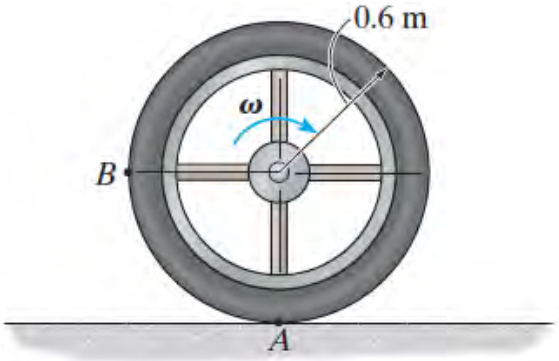
یادونه: له دې امله چې ټرونډ AB د ثابت محور په شاوخوا څرخي او v_B معلوم دی، انځور 16- 16d ، زاویوي سرعت یې د $v_B = w_{AB}\, r_{AB}$ یا $2\ \text{m/s} = w_{AB}(0.2\ \text{m})$، او $w_{AB} = 10\ \text{rad/}$ له لارې موندل کیږی.

ب 16–7. رولر A په $v_A = 3$ m/s ثابت سرعت سره ښي لور ته حرکت کړي، د ټروند زاویوي سرعت او د رولر B سرعت کله چې $q = 30°$ وی وټاکئ.



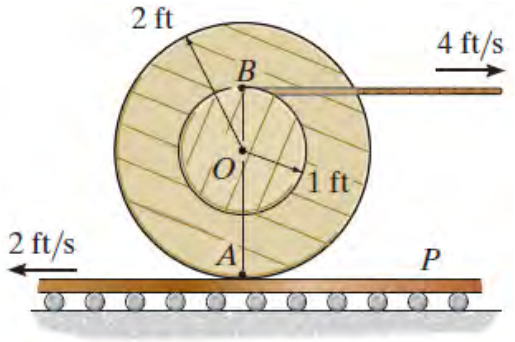
ب 16-7

ب16–8 . دا لاندی چرخ د زاویوي سرعت w = 10 rad/s سره پرته له ښویدوڅرخیږي. د ښودل شوې شیبې په وخت کې د ټکي B د سرعت اندازه وټاکئ.



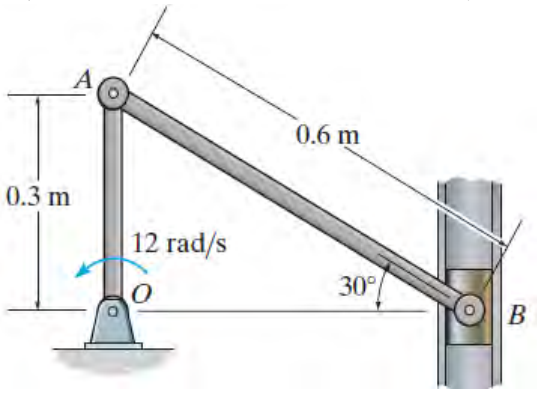
ب 16-8

ب 16-9. د ګوټک (سپول) زاویوي سرعت وټاکئ. کیبل د داخلي هستی په شاوخوا تاو شوي دی، او ګوټک په P تخته باندې نه ښویږی.



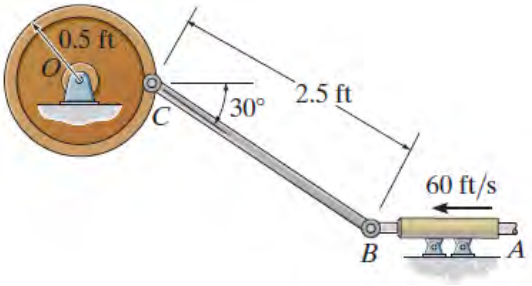
ب 16-9

ب 16-10. که غړي OA په زاويوي سرعت w = 12 rad/s سره وځرخيږي، نو د پيستون B سرعت او د ټرونډ AB زاويوي سرعت په بنودل شوي شيبه کې وټاکئ.



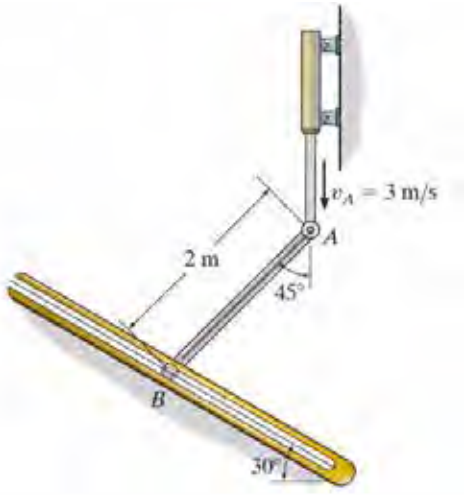
ب 16-10

ب 16-11. که ميله AB په افقي حلقه کی په 60 ft/s سرعت سره وښويږی، نو د ټرونډ BC زاويوي سرعت او د C ټکي سرعت په بنودل شوي شيبه کې وټاکئ.



ب 16-11

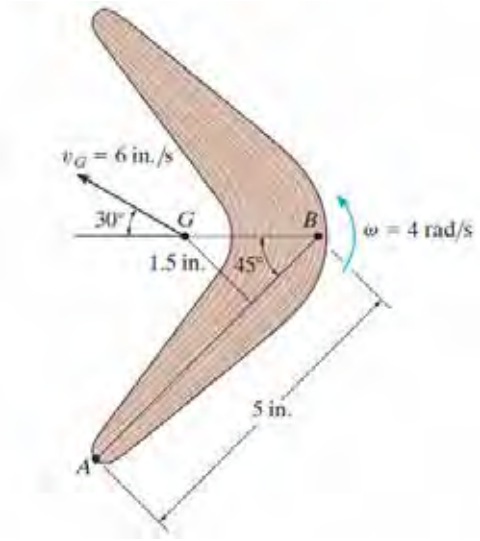
ب 16-12. د ټرونډ A پای $v_A = 3$ m/s سرعت لري. د B په ټکي کې د ميخ سرعت په دې شيبه کې وټاکئ. ميخ د جرې په اوږدو کې د حرکت کولو محدوديت لري.



ب 16-12

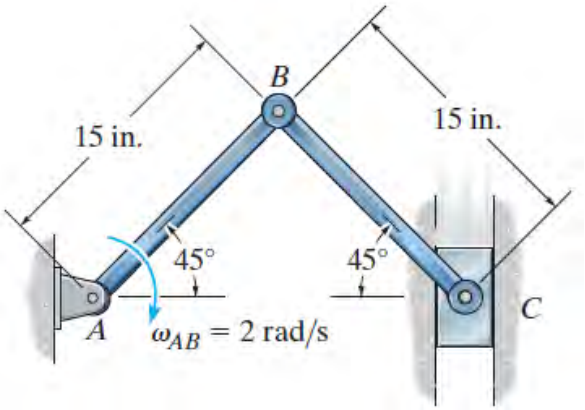
PROBLEMS پوښتنې

16–57 . د هغه شیبي په وخت کې چې بومرنګ (boomerang) زاویوي سرعت $w = 4$ rad/s لري، او د کتلې د مرکز G سرعت $v_G = 6$ in/s دی. په دې شیبه کې د B ټکي سرعت وټاکئ.



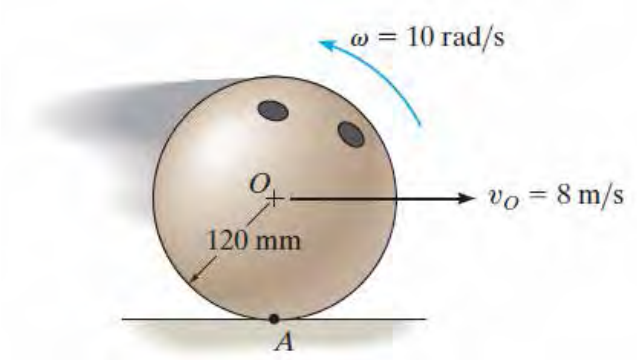
پوښتنه 16-57

16–58 . کله چې سلایډر بلاک C په بنودل شوې موقعیت کې وي، ټرونډ AB د ساعت پر لور زاویوي سرعت 2 rad/s لري. په دې شیبه کې د بلاک C سرعت وټاکئ.



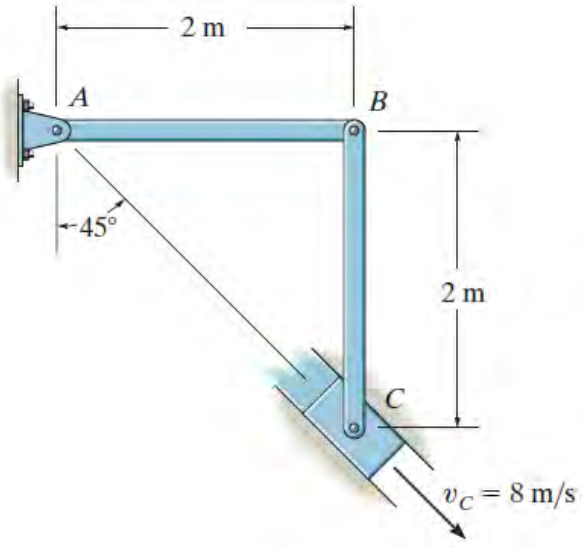
پوښتنه 16-58

16–59. د بولینګ توپ په الی (alley) کې په شاتنۍ څرخش د $v = 10$ rad/s سره غورځول کیږي پداسې حال کې چې د ده مرکز O ، په $v_O = 8$ m/s مخې ته سرعت لري. د تماس ټکي Aچې د الی سره تماس لري سرعت یې وټاکئ.



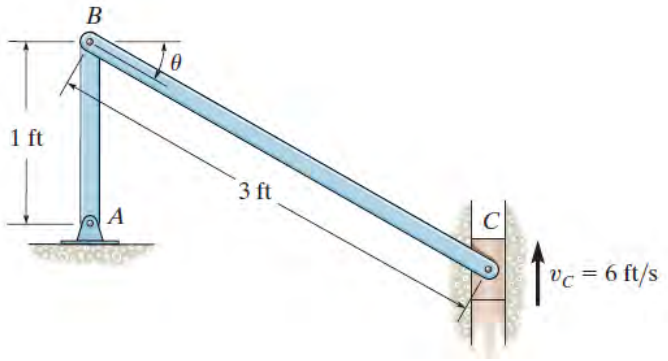
پوښتنه 16-59

16–60*. سلایډر بلاک C په 8 m/s سرعت سره د مایلی جرۍ په اوږدو کې حرکت کوي. په ښودلشویی شیبه کی د ټرونډ AB او BC زاویوي سرعتونه وټاکئ.



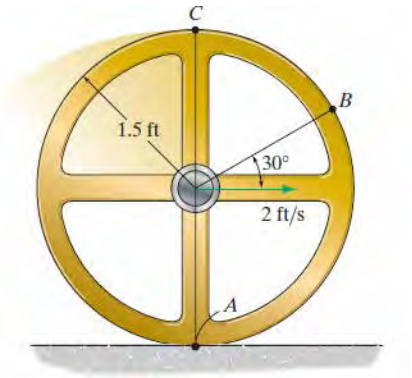
پوښتنه 16-60

16–61 . د $q = 30°$ شیبه کې د ټرونډ AB او BC زاویوي سرعت وټاکئ. همدارنګه، د ټرونډ BC موقعیت په $q = 55°, 45°,$ او $30°$ په وخت کې سکیچ کړئ، ترڅو د دې عمومي سطحی حرکت وښیئ.



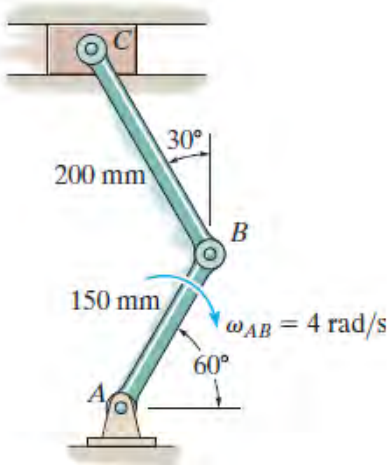
پوښتنه 16-61

16-62 . د څرخ مرکز د 2 ft/s تیزوالی سره ښي لور ته حرکت کوي. که په ځمکه، A، کې ښویدل نه وي، د B او C ټکو سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-62

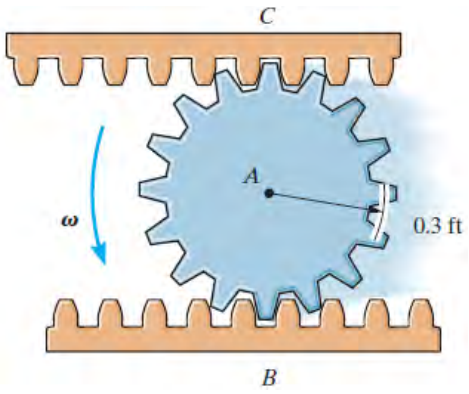
16–63 . که میله AB د زاویوي سرعت $w_{AB} = 4$ rad/s لري، نو په بنودل شوي شیبه کې د بنویدونکی بلاک C سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-63

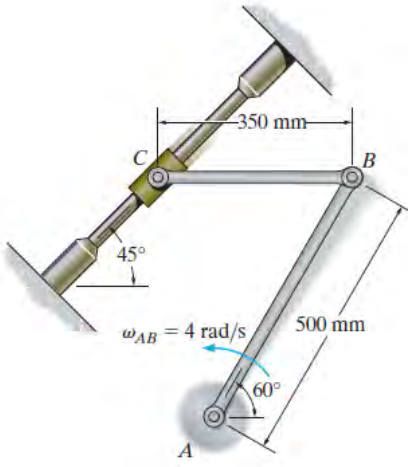
***16–64 .** د پینیون (pinion) ګیر A په ثابت ګیر رک B باندی په زاویوي سرعت $w = 4$ rad/sسره څرخیږي. د ګیر رک C سرعت وټاکئ.

16–65 . پینیون ګیر په ثابت ګیررکونو باندې څرخیږي. که B د 8 ft/s په سرعت بنې لور ته حرکت وکړي او C د 4 ft/s په سرعت کین لور ته حرکت وکړی، نود پینیون ګیر زاویوي سرعت او د ده د مرکز A سرعت وټاکئ.



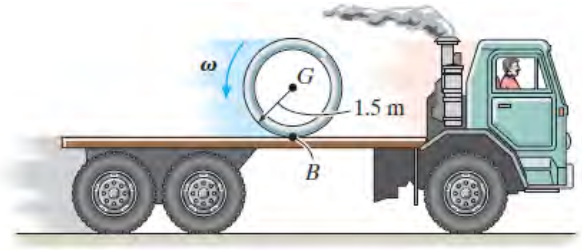
پوښتنې 16-64/65

16–66 . د ټرونډ AB زاويي سرعت $w_{AB} = 4$ rad/s دی، د C په ټکي کې د حلقې سرعت او د ټرونډ CB زاويي سرعت په ښودل شوې شيبه کې وټاکئ. ټرونډ CB په دې شيبه کې افقي دی.



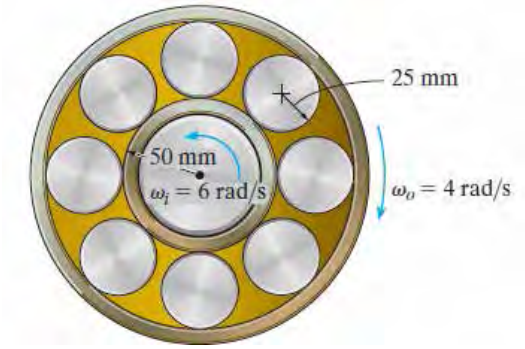
پوښتنه 16-66

16–67 . په ښودل شوي شيبه کې ټرک په 8 m/s په سرعت سره ښي لور ته حرکت کوي. که پايپ په B کې وه نه ښويږي، نو د ده زاويوي سرعت وټاکئ، که د ده د ثقل مرکز G په ځمکه د ليدونکي له خوا ثابت پاتې وليدل شي.



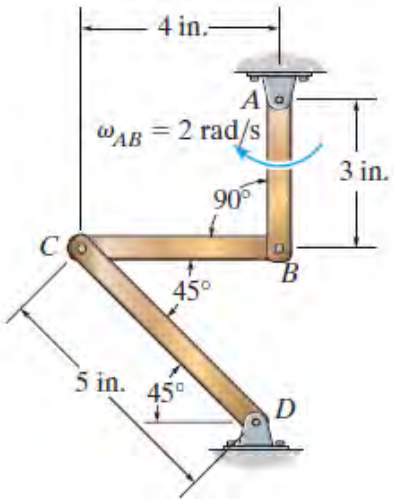
پوښتنه 16-67

16–68* . د رولر بيئرينګ داخلي برخه هب (hub) په زاويوي سرعت $w_i = 6$ rad/s سره څرخيږي، پداسې حال کې چې خارجي مرکز په مقابل لور کې $w_o = 4$ rad/s سرعت لري. د هر رولر زاويوي سرعت وټاکئ که دوی په مرکزونو پرته له ښويدو وګرزی.



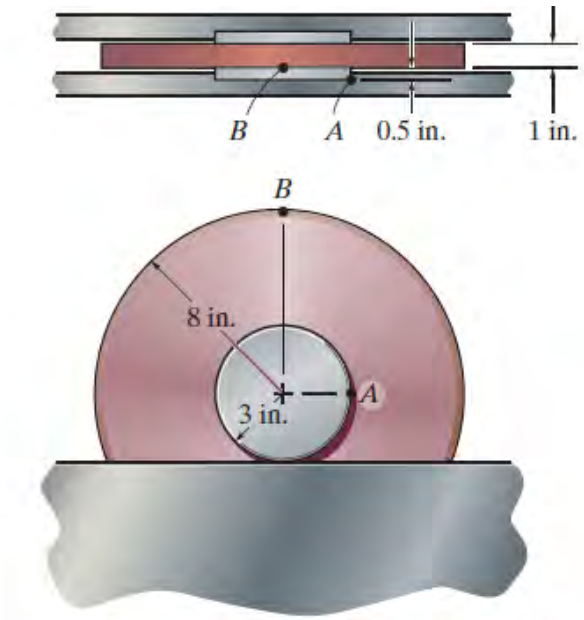
پوښتنه 16-68

16–69 . تړوند AB د ساعت پر لور زاويوي سرعت 2 rad/s لري. په ښودل شوې شيبه کې د تړليو تړوندو BC او CD زاويوي سرعت وټاکئ.



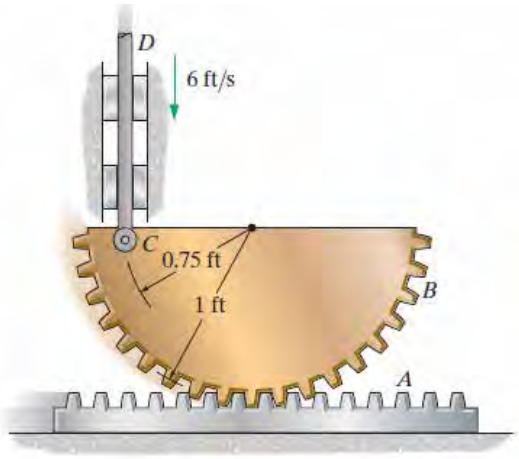
پوښتنه 16-69

16–70 . څرخ په خپل مرکز کې پرته له ښويدو په افقي سطحه باندې څرخيږي. که د څرخ د مرکز سرعت 2 ft/s ښي لور ته وي، نو په ښودل شوې شيبه کې د A او B ټکو سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-70

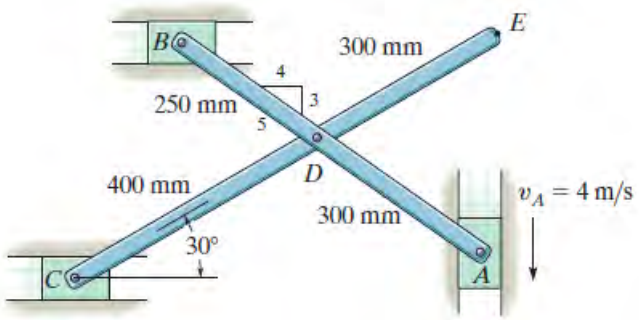
16–71 . میله CD د 6 ft/s بنکته لورسرعت لري. میله په C کې د ګیر B سره په پین ترل شویی ده. په بنودل شوې شیبه کې د ګیر رک A سرعت وټاکئ



پوښتنه 16-70

16–72* . که بنویدونکی بلاک A د $v_A = 4$ m/s سره بنکته ته حرکت کوي، نو په بنودل شوې شیبه کې د بلاک B او C سرعت وټاکئ.

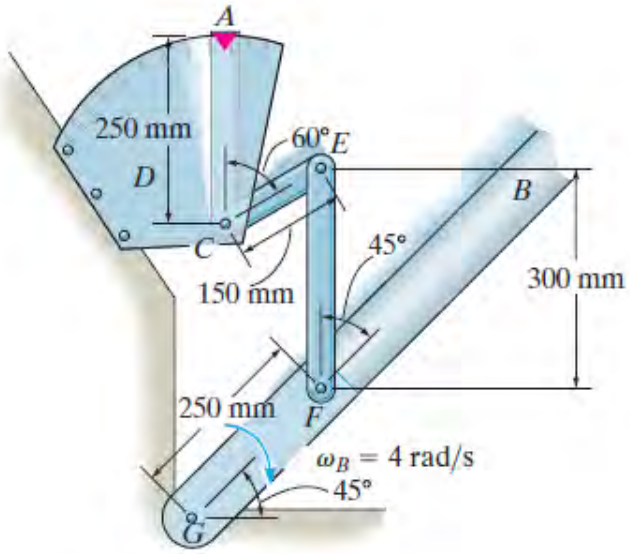
16–73 . که بنویدونکی بلاک A د $v_A = 4$ m/s سره بنکته ته حرکت کوي، نو په بنودل شوې شیبه کې د E ټکي سرعت وټاکئ.



پوښتنې 16-72/73

16–74 . له بنودل شوي ګیج ګټه اخیستل کیږي ترڅو د بوم په پای، B، کې دمنلو وړ تول ایښودلو بنودنه وکړي، کله چې دا په هر زاویوي موقعیت کې وي. دا د ثابت ډایال تختې D او د بنودونکی لاس ACE څخه جوړ شوی دی، چې په C کې د تختې سره او د لنډ ټرونډ EF سره پیوست دی. که بوم د ټرنک فریم په G کې په پین نښلونکي سره وصل وي او په $w_B = 4$

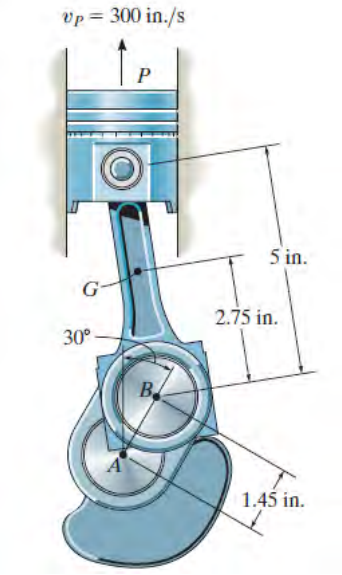
rad/sپه سرعت ښکته ګرزی، نو د ډایال ښودونکی *A* سرعت وټاکئ په هغه شیبه کې، کله چې *EF*او *AC* به عمودي موقعیت کې وي.



پوښتنه 16-74

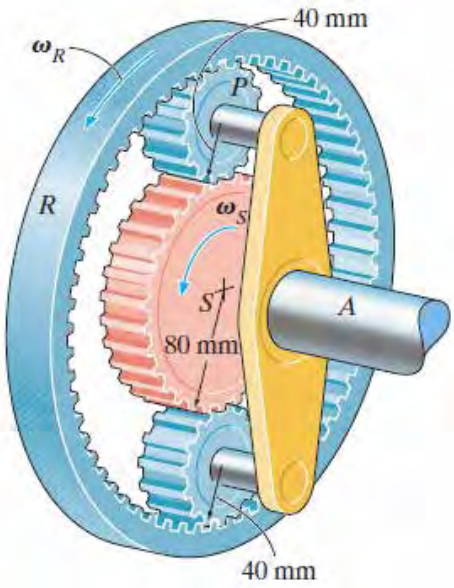
16–75 . په ښودل شوی شیبه کې پیستون P په 300 in/s سرعت سره پورته حرکت کوي. په دې شیبه کې د کرینک شافټ *AB* زاویوي سرعت وټاکئ.

***16–76 .** د ارتباطي راډ د مرکز ثقل *G* سرعت وټاکئ په هغه شیبه کې چې ښودل شوې ده. پیستون *P* په 300 in/s سرعت سره پورته حرکت کوي.



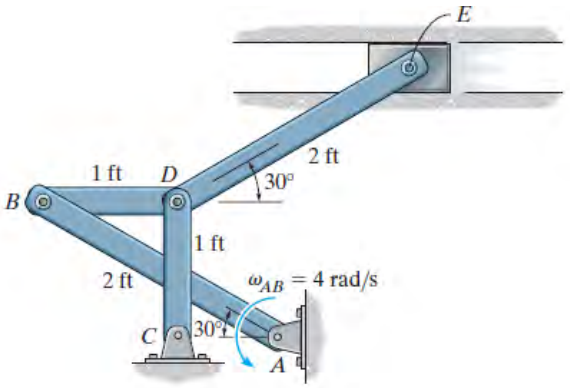
پوښتنې 16-75/76

16–77 . سیاره یی (planetary) ګیر سیستم د اتوماتیک ترانسمیشن لپاره په موټر کې کارول کیږي. د ځینې ګیرونو درول او دځنی خوشې کولو سره، د موټر چلولو لپاره د مختلف تیزوالی لپاره ګټه لري. هغه حالت ته پام وکړئ چیرې چې حلقوي ګیر R ثابت نیول شوي دی، $w_R = 0$، او د لمر (sun) ګیر S په $w_S = 5$ rad/s سره څرخیږي. د هر سیاروی ګیر P او شافټ A زاویوي سرعت وټاکئ.



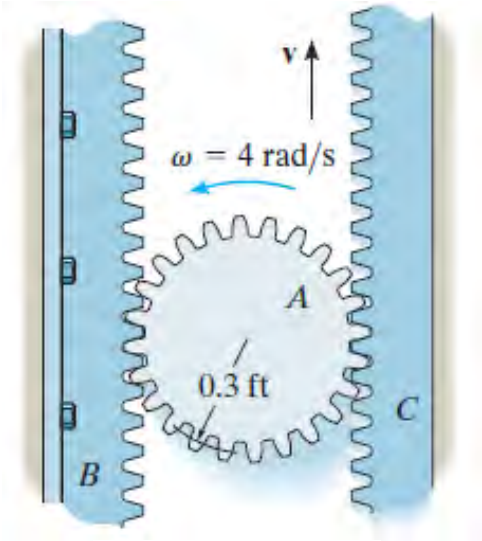
پوښتنه 16-77

16–78 . که ټرونډ AB زاویوي سرعت $w = 4$ rad/s په ښودل شوې شیبه کې ولري، نو د سلایډر بلاک E سرعت پدې شیبه کې وټاکئ.



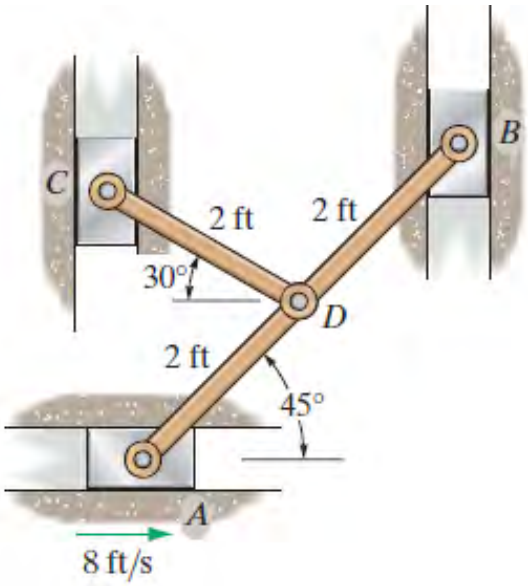
پوښتنه 16-78

16–79 . پینیون ګیر A په ثابت ګیر رک *B* باندی په زاویوي سرعت $w = 4$ rad/s سره څرخیږي. د ګیر رک *C* سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-79

16–80*. که بنویدونکی بلاک *A* په $v_A = 8$ ft/s سره بني لور ته حرکت کوي، نو په بنودل شوي شیبه کې د بلاک *B* او *C* سرعتونه وټاکئ. د *CD* غړي د *ADB* غړي سره د پین په واسطه ترل شوی.



پوښتنه 16-80

16.6 د صفر سرعت لپاره لحظوی مرکز (INSTANTANEOUS CENTER OF ZERO VELOCITY)

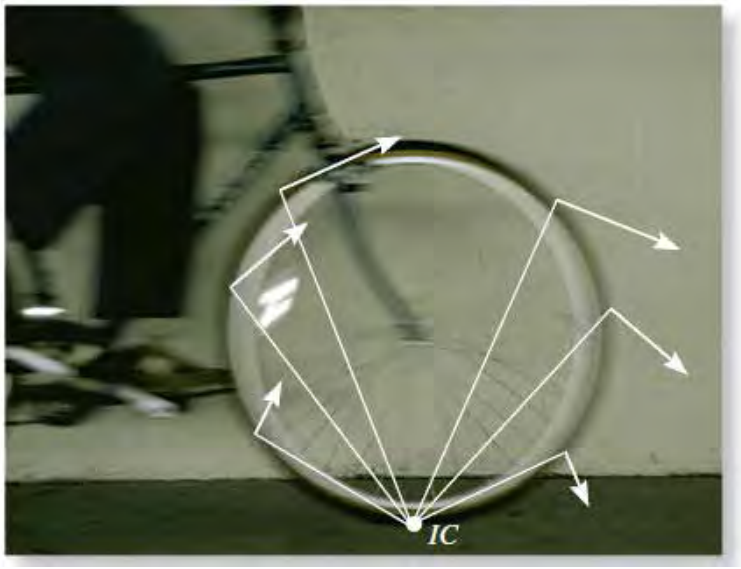
د هر ټکي B چې په یوه سخت بدن کې موقعیت لري، سرعت یې په یوه مستقیمه طریقه ترلاسه کیدی شي، کله چې د بنسټ ټکی A کوم چې په هغه شیبه کې صفر سرعت لري انتخاب شی. په دې حالت کې، $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$، او له همدې امله د سرعت معادله $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + w^* \mathbf{r}_{B/A}$ ، به $\mathbf{v}_B =$ $w^* \mathbf{r}_{B/A}$ ته واوړي.

د عامي سطحی حرکت لرونکي بدن لپاره، داسې ټاکل شوی ټکي A **د صفر سرعت لحظوی مرکز** (*instantaneous center of zero velocity*)(***IC***) په نوم یادیږي، او دا د **صفر سرعت لحظویي محور** (*instantaneous axis of zero velocity*) په اوږدو کې پروت دی. دا محوری تل د حرکت د سطحي سره عمودي دی، او د دې محوري او سطحې د تقاطع نقطه د IC موقعیت مشخصوي. له دې امله چې ټکي A د IC سره یو ځایده، نو

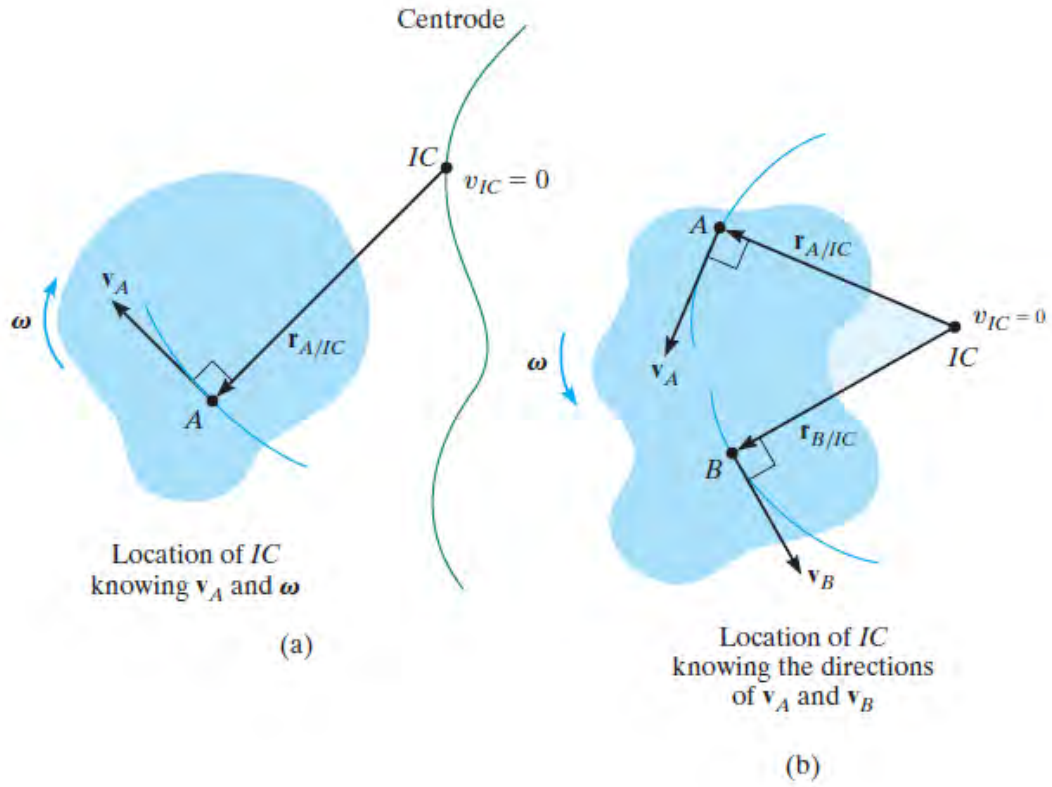
$$\mathbf{v}_B = w^* \mathbf{r}_{B/IC}$$

کیږي، او په دې توګه ټکی B په لحظوی توګه په دایروي مسیرحرکت کوي. د $\mathbf{v}_B$ اندازه عبارت ده په $v_B = w r_{B/IC}$ ، چیرې چې w د بدن زاویوي سرعت دی. د دایروي حرکت له امله، د $\mathbf{v}_B$ لوری باید تل د $\mathbf{r}_{B/IC}$ سره عمودي وي.

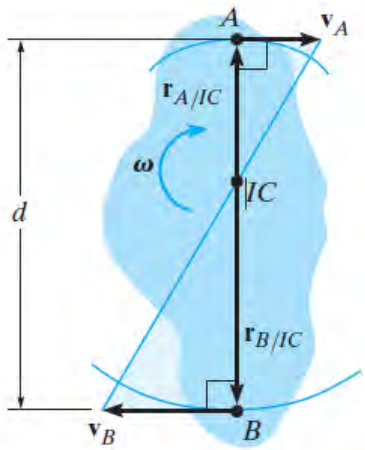
د بیلګې په توګه، د بایسکل د چرخ IC په انځور 16-17 کې د ځمکې سره د تماس نقطه ده ځکه چې څرخ نه ښویږی. که څوک تصور وکړي چې چرخ په IC کې په لحظوی توګه پین دی، نو د څرخ مختلفو ټکو سرعتونه د $v = wr$ په کارولو سره موندل کیدی شي، چیرې چې په عکس کې ښودل شوي شعاعوی باید د څرخ د هندسی څخه وټاکل شي.



انځور 16-17



انځور 16-18



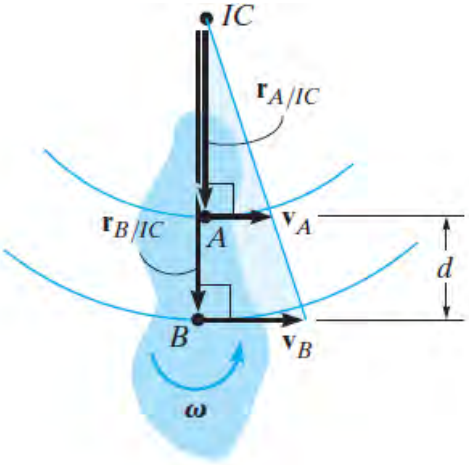
د *IC* ځای (Location of IC): د *IC* موندلو لپاره مورِ کولی شو دا حقیقت وکاروو چې د بدن په یوه نقطه کې سرعت تل د *نسبي موقعیت ویکتور ته عمود* وي چې له *IC* څخه نقطې ته لارښود شوی وي. څو ممکنات شتون لري:

. د بدن په یوه نقطه *A* کې سرعت $\mathbf{v}_A$ او د بدن زاویوي سرعت w معلوم دي، لکه څنګه چې په انځور 16-18a کې ښودل شوي. په دې حالت کې، *IC* د $\mathbf{v}_A$ سره په *A* کې د عمود خط په اوږدو کې موندل کېږي، داسې چې له *A* څخه *IC* ته فاصله $r_{A/IC} = v_A / w$ وي. نوټ کړئ چې *IC* د *A* نه پورته او ښي لور ته پروت دی ځکه چې $\mathbf{v}_A$ باید د *IC* په شاوخوا کې د ساعت په لور زاویي سرعت w رامنځته کړي.

. د دوو غیر موازي سرعتونو $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ د عمل کرښې معلومې دي، لکه څنګه چې په انځور 18-16b کې ښودل شوي. په *A* او *B* ټکیو کې کرښې جوړې کړې چې په $\mathbf{v}_A$ او

$\mathbf{v}_B$ باندی عمو دوی. لکه څنګه چې بنودل شوي، دا عمودونه وغزوی ترڅو په راکړل شوی وخت کی تقاطع وکړی چی د IC موقعیت پیدا شی.

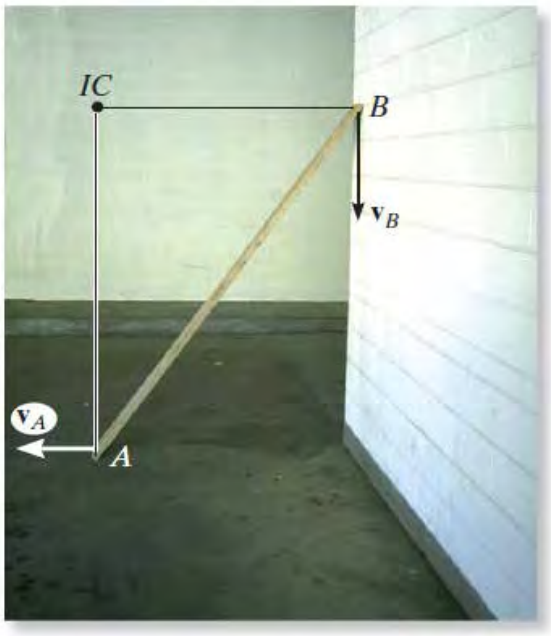
. د دوو موازي سرعتونو $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ اندازه او لوری معلوم دي. دلته د IC موقعیت د نسبي مثلثونو په واسطه ټاکل کیږي. مثالونه په انځور 16-18c او d کې بنودل شوي. په دواړو حالتونو کې $r_{A/IC} = v_A/w$ او $r_{B/IC} = v_B/w$ دی. که d د A او B ترمنځ معلومه فاصله وي، نو په انځور 16-18c کې $r_{A/IC} + r_{B/IC} = d$ او په انځور 16-18d کې $r_{B/IC} - r_{A/IC} = d$ دی.



موقعیت د IC کله چی $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ معلوم وي

(d)

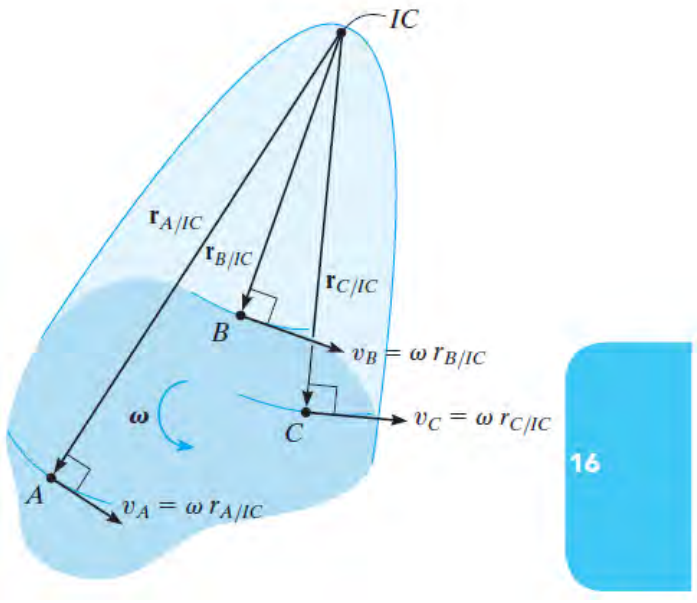
انځور 16-18



کله چې تخته چپ او ښکته لور ته ښویږي، نو دا تر عمومي سطحی حرکت لاندې راځي. څرنګه چې د پایلو A او B سرعتونو لوري معلوم دي، نو IC لکه چې بنودل شوي موقعیت لري. په دې شیبه کې به تخته په لحظوی توګه د دې نقطې په شاوخوا کې وڅرخي.

په یاد ولرې هغه نقطه چې د بدن لپاره د *صفر سرعت د لحظوي مرکز په توګه ټاکل شوی ده*، یوازې په همدې لحظه کې کارول کیدی شي ځکه چې بدن له یوې لحظې څخه بلې ته خپل موقعیت بدلوي. هغه لاره چې هغه نقطې یې تعریفوي چې د حرکت په جریان کې د IC موقعیت ټاکي، **سنترود** (centrode) بلل کیږي، لکه څنګه چې په انځور 16-18a کې بنودل شوي، نو په هره لحظه کې د سنترود هره نقطه د بدن لپاره یوازې په یوه لنډه شیبه کې د IC په توګه عمل کوي.

که څه هم *IC* په اسانۍ سره د بدن په هره نقطه کې د سرعت معلومولو لپاره کارول کیدی شي، دا عموماً صفر تعجیل نه لري، نو ځکه باید د بدن په نقطو کې د تعجیل معلومولو لپاره ونه کارول شي.



انځور 16-19

د تحلیل تګلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

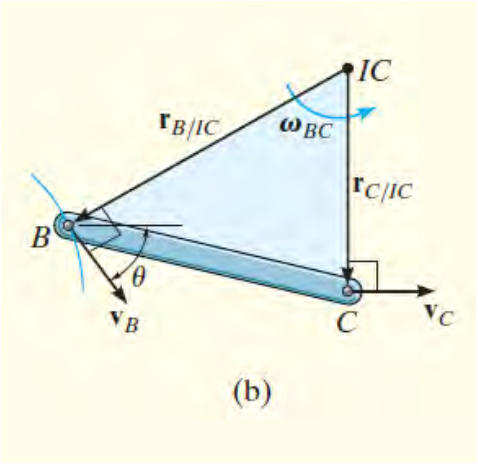
د بدن په یوه نقطه کې سرعت، چې د عمومي سطحی حرکت لاندې وي، د لحظوي صفر سرعت مرکز په کارولو ټاکل کیدی شي، په دی شرط چې د *IC* موقعیت لکه چې په انځور 16-18 کې ښودل شوی، لمړی د یاد شویو درېو طریقو څخه په یوه طریقه وموندل شي.

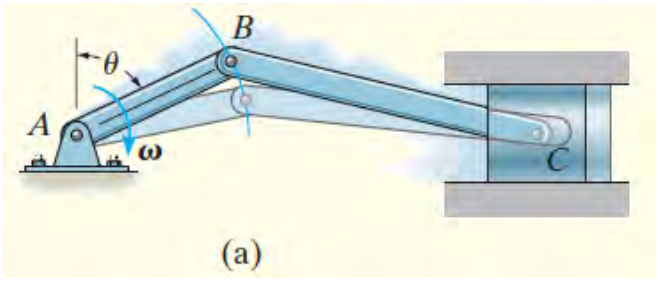
- لکه څنګه چې په کینمتیک ډیاګرام کې په انځور 16-19 کې ښودل شوي، بدن داسې انګیرل کیږي چې غزیدلی او پن شوی، په *IC* کې، چې په یاده لحظې کې، دا د پن په شاوخوا په زاویوي سرعت *w* سره څرخیږی.
- د بدن په هره اختیاری نقطه *A* ، *B*، او *C* کې د سرعت اندازه د $v = w \cdot r$ معادلې په کارولو سره موندل کیدی شي، چیرته چې *r* د *IC* څخه هرې نقطې ته شعاعي فاصله ده.
- د هر سرعت ویکتور **v** د عمل کرښه د هغې اړوند شعاعي کرښې **r** ته عمودي ده، او د سرعت لوری داسې یو جهت لري چې وکړی شی چې نقطی ته داسې حرکت ورکړي چې د *w* زاویوي حرکت سره موافق وي، لکه څنګه چې په انځور 16-19 کې ښودل شوي.

مثالونه

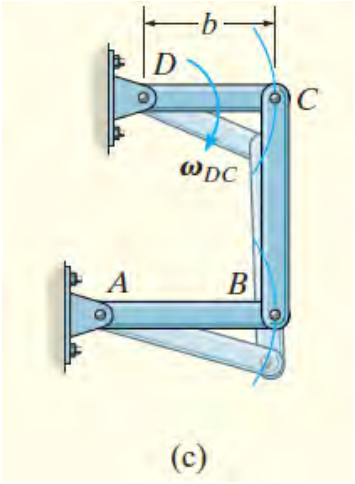
مثال 16.9

وښيئ چې څنګه د صفر سرعت لحظوي مرکز موقعيت په لاندې حالتو کې ټاکلی شو (a) : د غړي BC له لارې چې په انځور 16-20a کې ښودل شوی؛ (b) د ټرونډ CB له لارې چې په انځور 16-20c کې ښودل شوی.



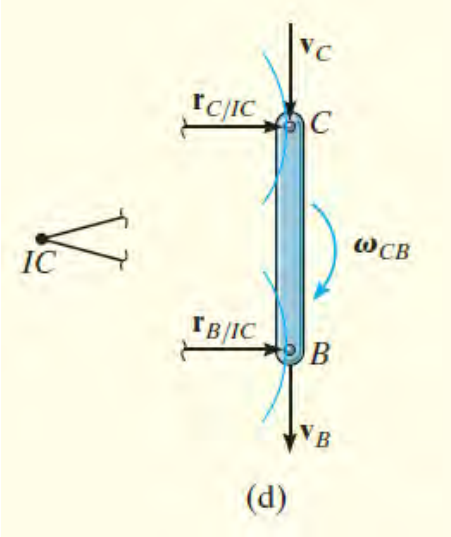


حل



برخه (a) (Part a): لکه څنګه چې په انځور 16-20a کې ښودل شوي، ټکی B په يوه دايروي مسير کې حرکت کوي چې $\mathbf{v}_B$ په AB عمود دی. نو له همدې امله، دا د افق څخه په زاويه q عمل کوي لکه څنګه چې په انځور 16-20b کې ښودل شوي. د B ټکی حرکت لامل کيږی چې پستون (piston) په افقي توګه مخکې په $\mathbf{v}_C$ سرعت سره حرکت وکړی. کله چې کرښې د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{v}_C$ سره عمودي رسم شي، لکه څنګه چې په انځور 16-20b کې ښودل شوي، دوی په IC کې سره قطعه کيږي.

برخه (b) (Part b): د B او C ټکی د دايروي مسيرونو تعقيب کوي ځکه چې ټرونډونه AB او DC هر يو د يوه ثابت محور په شاوخوا کې د ګرزيدا تابع دي، لکه څنګه چې په انځور 16-20c کې ښودل شوي. څرنګه چې سرعت تل د مسير مماس دی، په ياد لحظه کې، په DC ميله

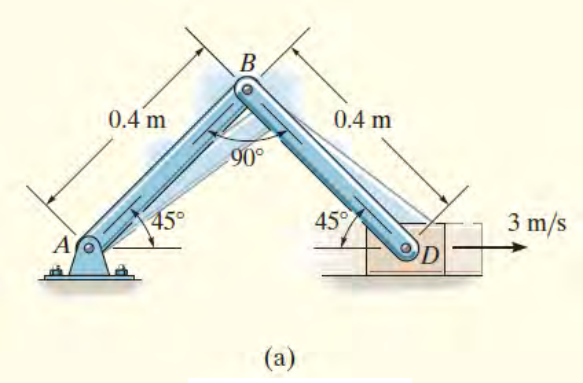


انځور 16-20

باندی $\mathbf{v}_C$ او په AB میله باندی $\mathbf{v}_B$ دواړه عمودي ښکته لوري ته د CB لینک په محور باندی، لکه څنګه چې په انځور 16-20d کې ښودل شوي. هغه شعاعي کربنې چې د دې دواړو سرعتونو په مقابل کې عمودي رسم شوې دي موازي کربنې جوړوي چې په "لامحدوده" کې سره قطع کیږي؛ یعنې $r_{C/IC}$ او $r_{B/IC} \to \infty$. نو له دې امله، $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/IC}) \to 0$ د دې پایلې په توګه، لینک CB په لنډه توګه بې ځایه کیږي. خو یوه لحظه وروسته، CB به یوه مایلې موقعیت ته لاړ شي، چې IC به یوه محدود ځای ته حرکت وکړي.

مثال 16.10

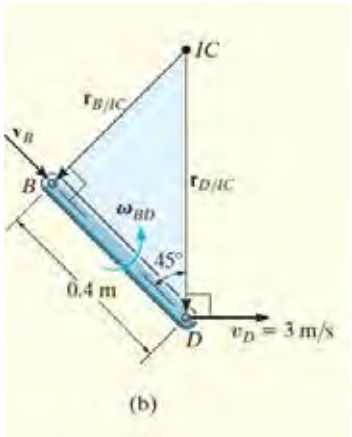
بلاک D چې په انځور 16-21a کې ښودل شوی، په 3 m/s تیزوالي سره حرکت کوي. د BD او AB ترونډونو زاویوېي سرعتونه، په دې شیبه کې چې ښودل شوي، وټاکی.



انځور 16-21

حل

کله چې بلاک D ښي خوا ته حرکت وکړي، دا لامل کیږي چې AB د ساعت په لور په A نقطه باندی وځرخي. له همدې امله، $\mathbf{v}_B$ په AB باندی عمود دی، لکه څنګه چې په انځور 16-21b کې ښودل شوي. د BD لپاره د صفر سرعت آني مرکز په هغه ځای کې موندل کیږي چې کربنې د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{v}_D$ سره عمودي رسم شوي وي او یو بل سره قطع کوي



د هندسی له مخی:

$$r_{B/IC} = 0.4 \tan 45^\circ \text{ m} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{D/IC} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45^\circ} = 0.5657 \text{ m}$$

لکه څنګه چې د $\mathbf{v}_D$ اندازه معلومه ده، د ترونډ BD زاویوي سرعت دی:

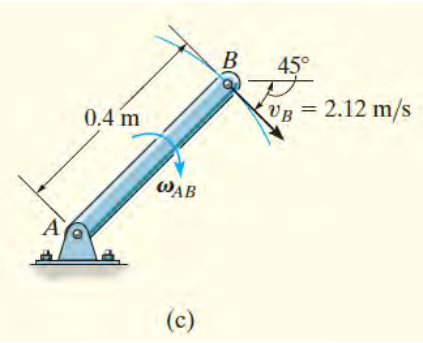
$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/IC}} = \frac{3\ \text{m/s}}{0.5657\ \text{m}} = 5.30\ \text{rad/s}\ \curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

نو د B نقطي سرعت دی:

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/IC}) = 5.30\ \text{rad/s}\ (0.4\ \text{m}) = 2.12\ \text{m/s}\ \measuredangle 45°$$

له انځور 16-21c څخه، د AB زاويوي سرعت دی:

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12\ \text{m/s}}{0.4\ \text{m}} = 5.30\ \text{rad/s}\ \curvearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

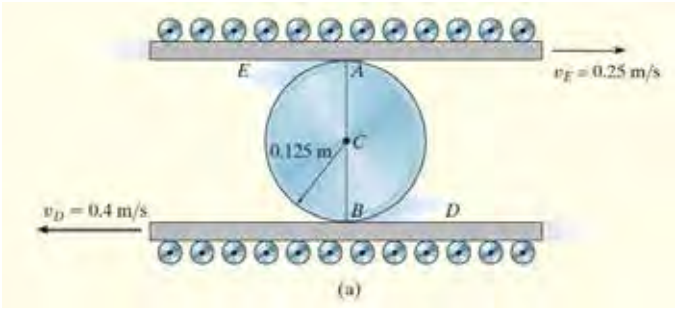


انځور 16-21

یادونه: هڅه وکړئ چې دا پوښتنه د $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$ په کارولو سره د BD غړي لپاره حل کړئ.

مثال 16.11

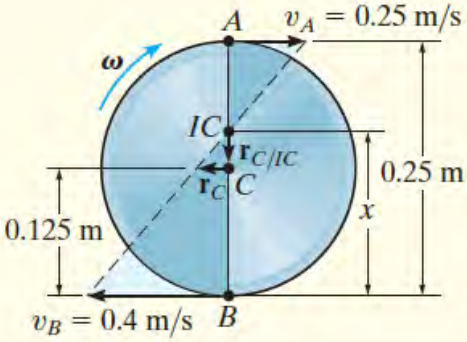
هغه سلنډر چې په انځور 16-22a کې ښودل شوی، د E او D حرکت کوونکيو تختو تر منځ پرته له ښويدو تاويږي. د سلنډر زاويي سرعت او د هغې د مرکز C سرعت وټاکئ



حل:

څرنګه چې هيڅ ښويدنه (slipping) نه رامنځته کيږي، نو په سلنډر کې د تماس نقطې A او B دتختو E او D سره په ترتيب سره ورته سرعتونه لري. له دې نقطو څخه رسم شوي شعاعي کرښې په يوه کرښه دی، نو د قايم مثلثونو د تناسب له مخې، IC په يو نقطه د کرښې AB باندې کې موقعيت لري، لکه څنګه چې په انځور 16-22bکې ښودل شوي. فرض کړئ چې دا نقطه له Bڅخه په فاصله x کې ده، مور لرو:

$$v_B = \omega x; \qquad 0.4\ \text{m/s} = \omega x$$
$$v_A = \omega(0.25\ \text{m} - x); \qquad 0.25\ \text{m/s} = \omega(0.25\ \text{m} - x)$$



(b)

که یوه معادله په بله وویشو، w له منځه ځي او مونږ لرو:

$$0.4(0.25 - x) = 0.25x$$
$$x = \frac{0.1}{0.65} = 0.1538\ \text{m}$$

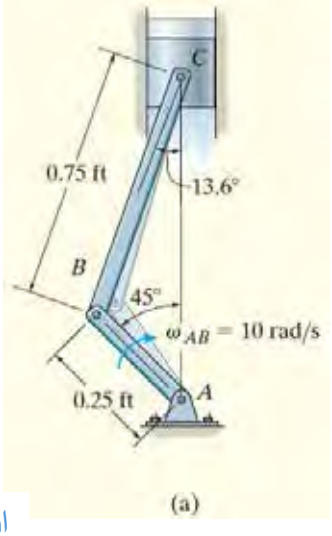
له همدې امله، د سلنډر زاویي سرعت دی: انځور 16-22

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4\ \text{m/s}}{0.1538\ \text{m}} = 2.60\ \text{rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

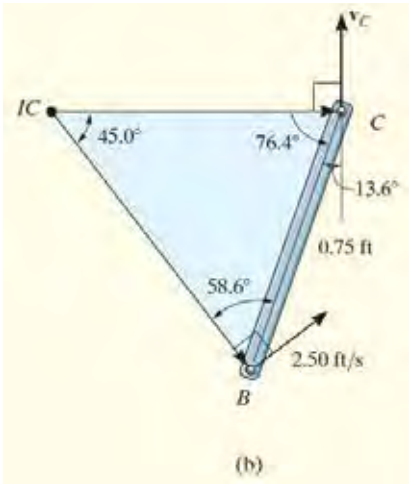
نو د C نقطې سرعت دی:

$$v_C = \omega r_{C/IC} = 2.60\ \text{rad/s}\ (0.1538\ \text{m} - 0.125\ \text{m})$$
$$= 0.0750\ \text{m/s} \leftarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 16.12 کرینکشافټ AB د 10 rad/s زاویي سرعت سره د ساعت لورې خرخیږي، لکه څنګه چې په انځور 16-23a کې ښودل شوي. د پستون C سرعت په هغه لحظه کې چې ښودل شوي، وټاکئ.



(a)



(b)

انځور 16-23

حل:

کرینکشفټ د ثابت محور شاوخوا څرخیږي، نو سرعت د B نقطې دی:

$$v_B = 10 \text{ rad/s } (0.25 \text{ ft}) = 2.50 \text{ ft/s } \measuredangle 45°$$

لکه څنګه چې د B او C سرعتونو لوري معلوم دي، د BC میلې لپاره د IC موقعیت د دې نقطو غځول شویو کربنو په تقاطع کې پروت دی، کوم چې د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{v}_C$ سره عمودي دي، لکه څنګه چې په انځور 16-23b کې ښودل شوي. د رنګ شوی مثلث داخلي زاویې ټاکل شوې دي، او د $\mathbf{r}_{B/IC}$ او $\mathbf{r}_{C/IC}$ اندازې د ساین قانون په کارولو سره ترلاسه کیدی شي:

$$\frac{0.75 \text{ ft}}{\sin 45°} = \frac{r_{B/IC}}{\sin 76.4°}$$

$$r_{B/IC} = 1.031 \text{ ft}$$

$$\frac{0.75 \text{ ft}}{\sin 45°} = \frac{r_{C/IC}}{\sin 58.6°}$$

$$r_{C/IC} = 0.9056 \text{ ft}$$

د ω_{BC} د ګرزیدا لوری باید د $\mathbf{v}_B$ لخوا په IC شاوخوا کې رامنځته شوي ګرزیدا سره یو شان وي، چې د ساعت لوري په خلاف دی. نو له دې امله:

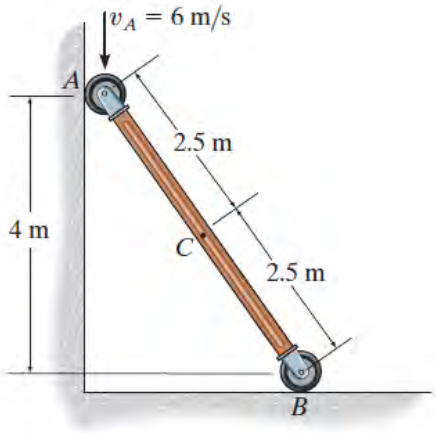
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{2.50 \text{ ft/s}}{1.031 \text{ ft}} = 2.425 \text{ rad/s}$$

دا نتیجه په کارولو سره، د پستون سرعت دی:

$$v_C = \omega_{BC} r_{C/IC} = (2.425 \text{ rad/s})(0.9056 \text{ ft}) = 2.20 \text{ ft/s} \quad Ans.$$

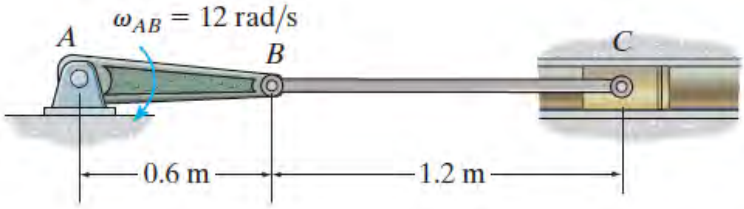
FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

ب 16–13. په ښودل شوي شیبه کې د میلې AB زاویوي سرعت اود C ټکی سرعت وټاکئ.



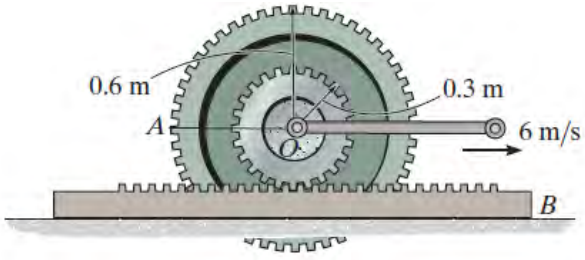
ب 16-13

ب 16–14. په ښودل شوي شیبه کې د تړوند BC زاویوي سرعت او د پستون C سرعت وټاکئ.



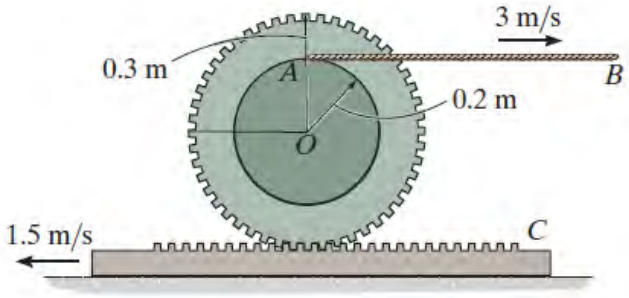
ب 16-14

ب 16–15. که د ګیر مرکز O په 6m/s تیزوالی سره حرکت کوي، د A نقطه سرعت په ګیر باندې وټاکئ. د ګیر رک B ثابت دی.



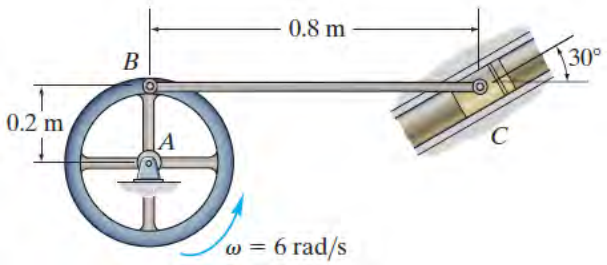
ب 16-15

ب 16–16. که کیبل *AB* په 3 m/s تیزوالی سره خلاص شي او ګیر رک *C* تیزوالی 1.5m/s ولري، د ګیر زاویوي سرعت او د هغې د مرکز *O* سرعت وټاکئ.



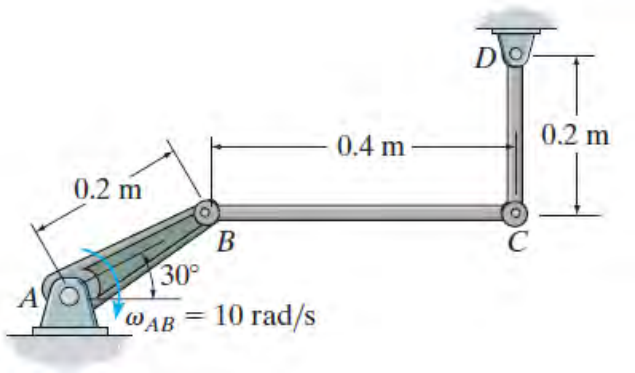
ب 16-16

ب 16–17. په بنودل شوي وخت کې د ټرونډ *BC* زاویوي سرعت او د پستون *C* سرعت وټاکئ.



ب 16-17

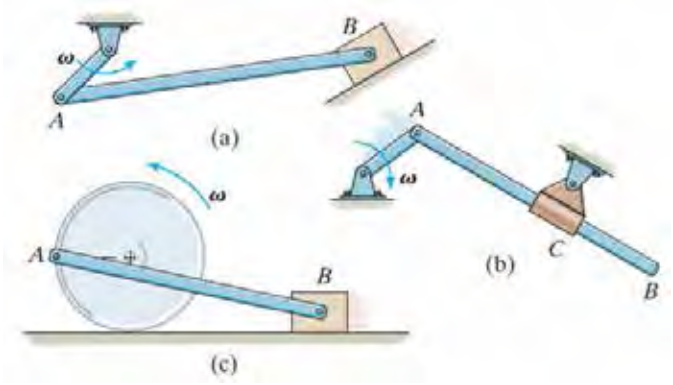
ب 16–18. په بنودل شوي وخت کې د ټرونډ *BC* او ټرونډ *CD* زاویوي سرعتونه وټاکئ.



ب 16-18

PROBLEMS پوښتنې

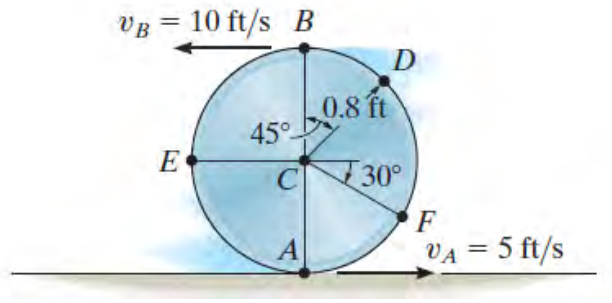
16-81. په د لاندی حالتونو کې په ګرافیکي ډول وښیی چې څنګه د ټرونډ AB د صفر سرعت لحظوی مرکز موقعیت وټاکل شي . فرض کړئ چې هندسه یې معلومه ده. ډیسک پرته له ښویدو تاویږی.



پوښتنه 16-57

16-82. د ، نقطې A او B د ډیسک په څنډوکې ښودل شوي سرعتونه لري. په دې شیبه کې د مرکزي ټکی C او D ټکی سرعتونه وټاکئ.

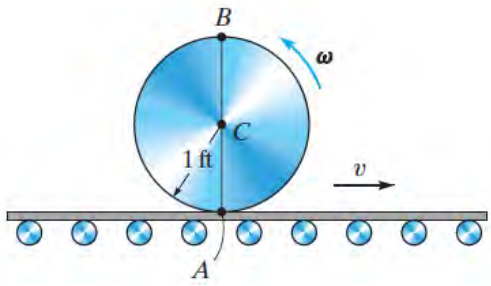
16-83. د ښویدو له کبله، نقطې A او B د ډیسک په څنډو کې ښودل شوي سرعتونه لري. په دې شیبه کې د مرکزي ټکی C او E ټکی سرعتونه وټاکئ.



پوښتنې 16-82/83

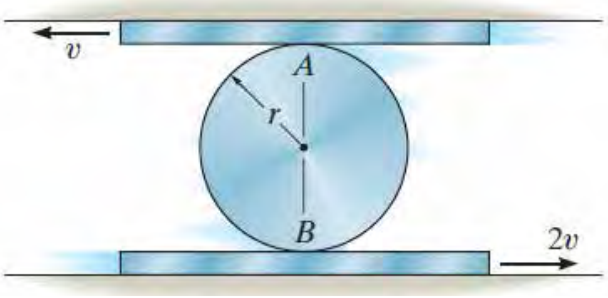
16-84*. د کنویر تسمه په ښي لور په $v = 8$ ft/s سره حرکت کوی، او په همدې شیبه کې سیلینډر پرته له ښویدو په $v = 2$ rad/s د ساعت خلاف په لور تاویږی. په دې شیبه کې د سیلینډر د مرکز C او B ټکی سرعتونه وټاکئ.

16-85. د کنویر تسمه په ښي لور په $v = 12$ ft/s حرکت کوي ، او په همدې شیبه کې سیلینډر د ساعت خلاف په لور $v = 6$ rad/s سره ګرزی، په داسې حال کې چې د هغې مرکزپه 4 ft/s سرعت سره چپ لور ته حرکت لری. په دې شیبه کې په ډیسک کې د A او B ټکیو سرعتونه وټاکئ. ایا سیلینډر په کنویر باندې ښویدلی؟



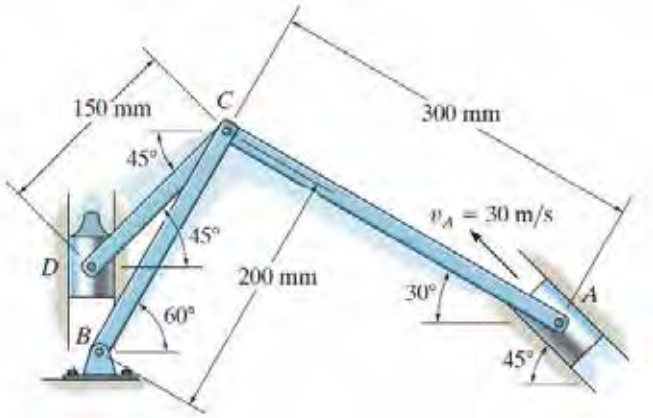
پوښتنې 16-84/85

16-86. د r شعاع لرونکی ډیسک پرته له ښویدوپه A او B کې تاویدو ته محدود دی. که چیرې تختې ښودل شوي سرعتونه ولري، د ډیسک زاویوی سرعت وټاکئ.



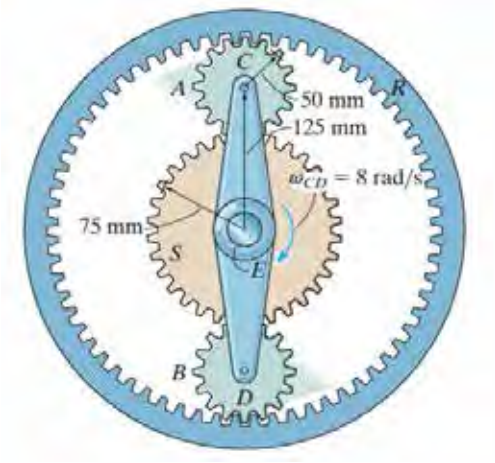
پوښتنه 16-86

16-87. ښودل شوی میکانیزم په میخونکي ماشین کې کارول کیږي. دا د A چلونکي پستون، درې غړي، او یو میخونکي لري چې د ښویدونکي بلاک D سره نښلول شوی. په دې شیبه کې د D سرعت وټاکئ، کله چې د A پیستون په $v_A = 30$ m/s سره حرکت کوي.



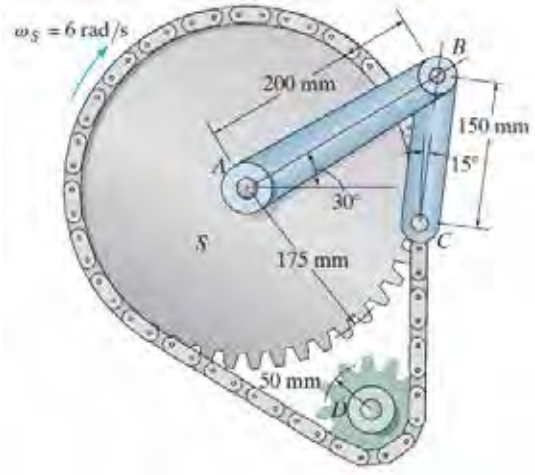
پوښتنه 16-87

*16-88. د یو موټر په ګیربکس کې د پلانټ پینیونونه A او B په محورونو باندې ګرځي چې د پلانټ پینیون وړونکی CD باندې نصب شوي دي. لکه څنګه چې ښودل شوي، CD د E په محور سره نښلول شوی چې د ثابت سن ګیر S مرکز سره په یو خط کې دی. دا محور د سن ګیر سره ندی وصل شوی. که CD په $v_{CD} = 8$ rad/s سره ګرځي، د R رینګ ګیر زاویوی سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-88

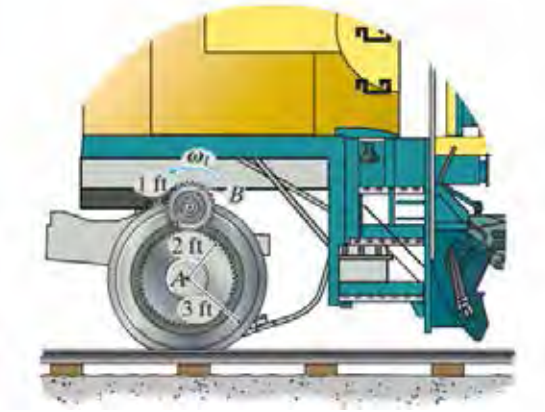
16-89. میکانیزم د ټرونډ AB متناوب (intermittent) حرکت تولیدوي. که S سپراکټ ګیر په زاوي سرعت $\omega_S = 6$ rad/s وګرزی، په دې شیبه کې د ټرونډ AB زاویوي سرعت وټاکئ. Sګیرنیښلول شوي دي په یوه شافت ، کوم چې له همجهته کربنی شافت څخه جلا دی چې د AB سره په A نقطه کې ټرل شوي. پن په C کې په عمودی زنځیری ټرونډ سره وصل شوی دی.



پوښتنه 16-89

16-90. د ترانزمیشن ګیرد بریښنایی ټرین په چوکاټ نصب شوی دی او په ثابته اندازه w_t = 30 rad/s تاویږي. دا ګیر له هغه ګیر سره یو خای شوی کوم چی د انجن اکسل ته نښلول شوی. د ټرین سرعت وټاکئ، فرض کړي چې څرخونه په پټلۍ باندې نه ښویږی.

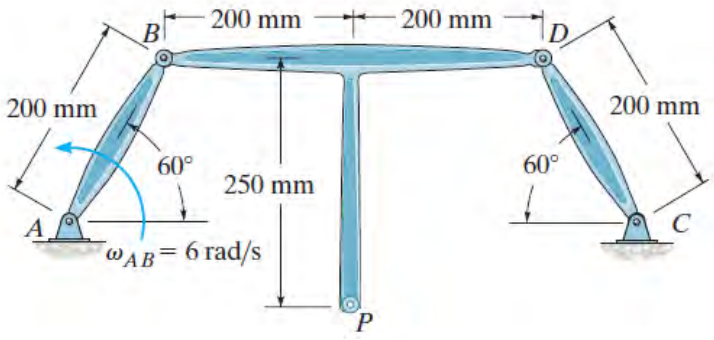
16-91. د بریښنایی ټرین څرخ د ټرانسمیشن ګیر B په واسطه چلول کیږي، کوم چې د هغه ګیر سره یو ځای شوی چی د څرخ سره ټرلی دی. که چیرې څرخ پرته له ښویدوتاویږي، د ټرانسمیشن ګیر زاویوی سرعت وټاکئ تر څو ټرین په 40 ft/s سره ولاړ شی. د ټرانسمیشن ګیرد انجن د چوکاټ سره نښلول شوی دی.



پوښتنی 16-90/91

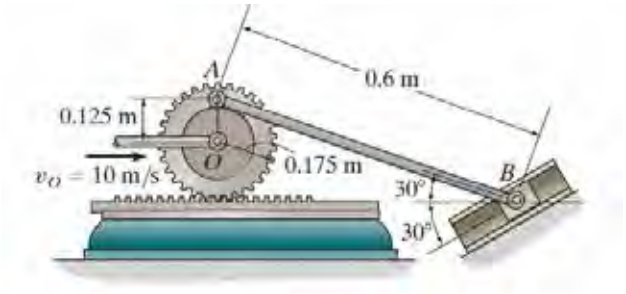
*16-92. غړی AB په w_{AB} = 6 rad/s سره تاویږي. د D ټکی سرعت او دغړیو BPD او CD زاویوي سرعت وټاکئ.

16-93. غړی AB په w_{AB} = 6 rad/s سره تاویږي. د ټکی P سرعت او د BPD غړي زاویوی سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-93

16-94. :که چیرې د ګیر د مرکز O سرعت $v_O = 10$ m/s وي، په دې شیبه کې د بنویدونکی بلاک B سرعت وټاکئ.



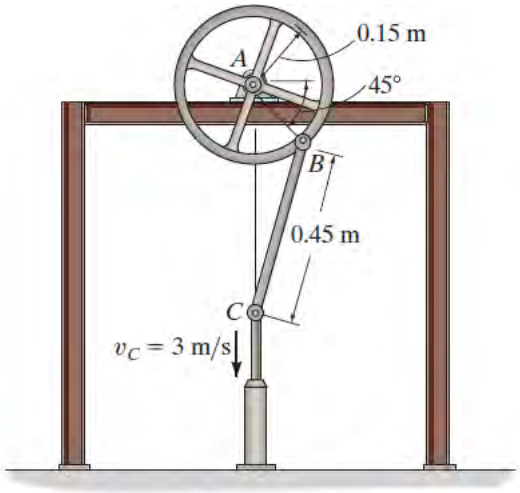
پوښتنه 16-94

16-95. کله چې موټر په لامده سړک په 80 ft/s سره مخکې ځي، د بنویدو له امله، د شا ټیرونه $w = 100$ rad/s زاویوی سرعت لري. د حرکت له امله د A ، B، او C ټکیو تیزوالی وټاکئ.



پوښتنه 16-95

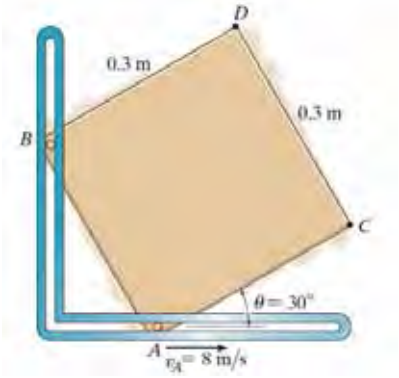
16-95. که د C ټکی $v_C = 3$ m/s سرعت ولري، په دې شیبه کې د څرخ زاویوی سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-96

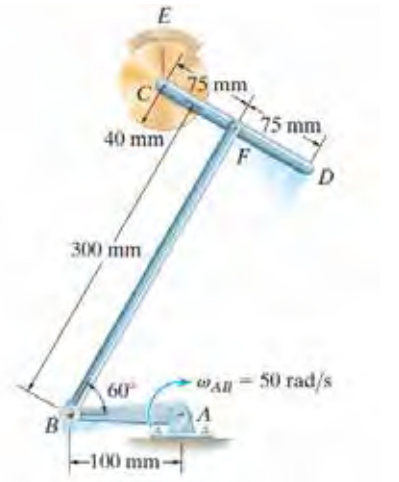
16-97. مربع تخته په A او B کې په جریو کی کبله نیول شویی ده. کله چې $\theta = 30^o$ وي، د A ټکی په $v_A = 8$ m/s سره حرکت کوي. په دې شیبه کې د C ټکی سرعت وټاکئ.

16-98. مربع تخته په A او B کې په جریو کی کبله نیول شویی ده. کله چې $\theta = 30^o$ وي، د A ټکی په $v_A = 8$ m/s سره حرکت کوي. په دې شیبه کې د D ټکی سرعت وټاکئ.



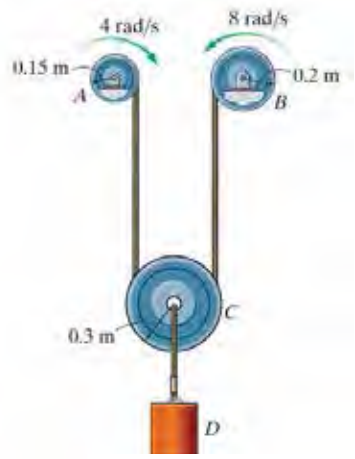
پوښتنی 16- 97/98

16-99. د AB کرنک شفټ د A ثابت محور په شاوخوا کې په $w_{AB} = 50$ rad/s سره تاویږي، او په C کې ډیسک په خپله E اتکا کې ټینګ ساتل شوی دی. په دې شیبه کې د CD راډ د زاویوی سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-99

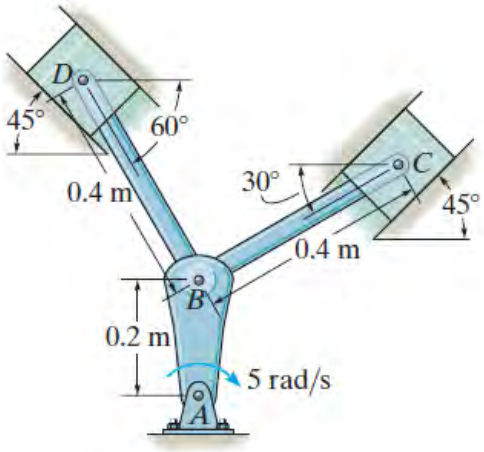
*16-100. ډرمونه (drums) ښودل شوي زاويوی سرعتونه په يوه شيبه کې لري. د C څرخکی زاويوی سرعت او د D بار سرعت وټاکئ.



پوښتنه 16-100

16-101. په سمندري انجن کې کارول شوی ميکانيزم يو واحد کرانک AB او دوه ټرونکی راډونه BC او BD لري. کله چې په ښودل شوي موقعيت او شيبه کې کرانک $5\ rad/s$ زاويوی سرعت لري، د پستون C سرعت وټاکئ.

16-102. په سمندري انجن کې کارول شوی ميکانيزم يو واحد کرانک AB او دوه ټرونکی راډونه BC او BD لري. کله چې په ښودل شوي موقعيت او شيبه کې کرانک $5\ rad/s$ زاويوی سرعت لري، د پستن D سرعت وټاکئ.



پوښتنی 16- 101/102

16.7د نسبي حرکت تحلیل: تعجیل
RELATIVE-MOTION ANLAYSIS: ACCELERATION

یوه معادله چې د دوو ټکیو A او B د میلی (کلک بدن) د تعجیلو ترمنځ اړیکه ښیي، کوم چې په انځور 16-24aکې ښودل شوې ده. په مشتق نیولو د $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ نسبت وخت ته موندل کیږي. دا لاندې راکوی:

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

د دې معادلې عبارتونه $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$ او $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$ له ثابت x او y محورونو اندازه کیږي او د B او A ټکیو مطلق تعجیل ښیي. وروستی عبارت د B تعجیل استازیتوب نسبت A ته کوي، لکه څنګه چې د یو لیدونکی له مخې اندازه کیږي چې متحرکو x' او y' محورونو ته ټرل شوی وی چې مبدایی په بنسټ ټکی A کې ده.

په 16.5 برخه کې ښودل شوې وو چې دی لیدونکی ته، د B نقطه داسې ښکاري چې د یوه دایروي قوس په اوږدو کې حرکت کوي چې د انحنا شعاع $r_{B/A}$ لري. په دې توګه، $\mathbf{a}_{B/A}$ په خپلو مماسی اوعمودي اجزاوو کې څرګندېدلای شي؛ یعنې $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$، چیرې چې $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ او $(a_{B/A})_n = w^2 r_{B/A}$. نو له دې امله، د نسبی تعجیل معادله په لاندې بڼه لیکل کېدلای شي.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \qquad (16\text{–}18)$$

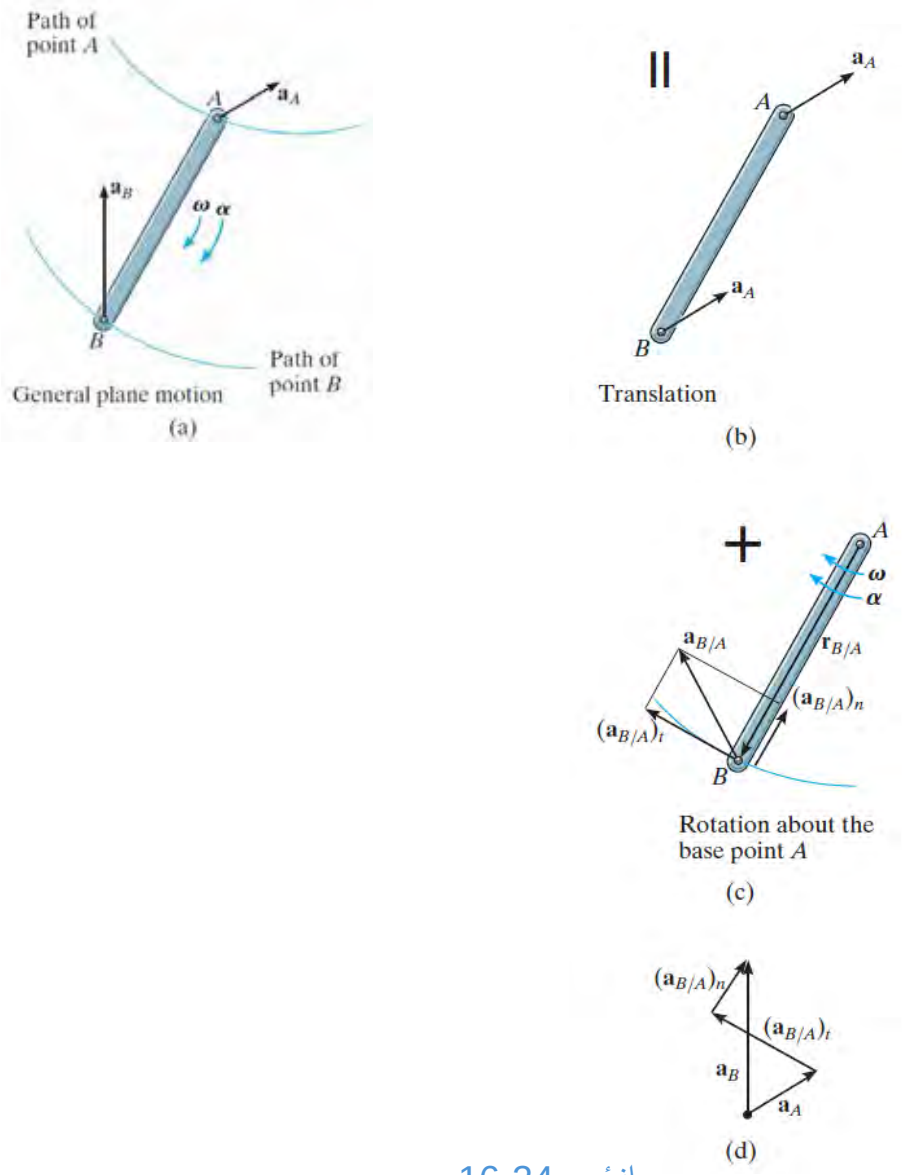
چیرې چې:

$\mathbf{a}_B$ = د B ټکی تعجیل

$\mathbf{a}_A$ = د A ټکی تعجیل

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = مماسی جز د B تعجیل نسبت A ته . د دې اندازه $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ ده، او لوری یې عمود په $\mathbf{r}_{B/A}$ سره ي دی.

$(a_{B/A})_n$ = عمودی جز د B تعجیل نسبت A ته. د دې مقدار $w^2 r_{B/A}$ دی، او لوری یې تل له B څخه A ته دی.



انځور 16-24

دا عبارتونه په انځور 16-24 کې په ګرافيکي ډول ښودل شوي دي. دلته د *B* ټکی تعجيل په انځور 16-24aکې د دې په پام کې نيولو سره ټاکل شوی چې ميله په تعجيل $\mathbf{a}_A$ سره ليږديدلیی، انځور 16-24b، په داسی حال کې چې همهاله د *A* بنسټيز ټکی په شاوخوا کې د آني زاوي سرعت *w* او زاوي تيزوالي *a* سره څرخي لکه په انځور 16-24c کې ښودل شوي .د دې دواړو اغېزو ويکتوري جمعه، چې په *B* باندې تطبيق شوې، $\mathbf{a}_B$ په لاس راځی، لکه څنګه چې په انځور 16-24dکې ښودل شوي ده.

د ویکتوري تحلیل لپاره، د نسبتي تعجیل اجزاوی په لاندې ډول څرګندېدلای شي:

$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad \text{او} \quad (\mathbf{a}_{B/A})_n = -w^2\,\mathbf{r}_{B/A}$$

معادله 16-14، او همدارنګه معادله 16-18، په لاندې بڼه بدلیږي:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16\text{–}19)$$

چیرې چې:

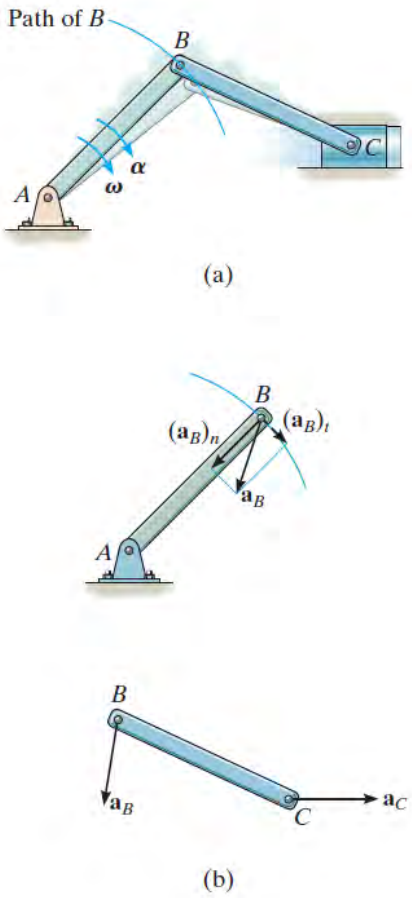
$\mathbf{a}_B$ = د B ټکی تعجیل

$\mathbf{a}_A$ = د بنسټیز A ټکی تعجیل

$\boldsymbol{\alpha}$ = د جسم زاویوی تعجیل

w = د جسم زاویوی سرعت

$\mathbf{r}_{B/A}$ = موقعیتي ویکتورله A نه د B په لور .



انځور 16-25

کله چې د معادلې16-18 یا معادلې 16-19په کارولو سره د یو کلک بدن تعجیل شوی حرکت مطالعه کوو چې د دوو نورو جسمو سره د پن په وسیله وصل وي، باید پوه شو چې هغه ټکی چې په پن کې سره یو ځای دي، د یوه ډول تعجیل سره حرکت کوي، ځکه چې د دوی د حرکت لاره یوه ده. د ېلګې په توګه، د کرنک میکانیزم په انځور 6-25a کې، د B ټکی، چې د دواړو میلو BA یا BC په اوږدو کې پروت دی، یو شان تعجیل لري، ځکه چې دواړی میلې په B کې په پن وصل شوي دي. دلته د B حرکت د یوه دایروي لاره لري، نو $\mathbf{a}_B$ د خپل مماسی او عمودي اجزاوو په توګه څرګندېدلای شي. د BC میلې په بل سرکې، د C ټکی د مستقیمی کرښې په اوږدو حرکت کوي چې د پیستون لخوا تعریف شوی. نو $\mathbf{a}_C$ افقي ده، لکه چې په انځور 16-25bکې بنودل شوي.

څرخیدل بې له ښویدو (Rolling without slipping). یو داسې څرخ په پام کې ونیسئ چې له ښویدو پرته حرکت کوي، لکه په انځور 16-26 کې. مور ښودلې ده چې د دې مرکز سرعت د معادلې 16-17 په کارولو سره موندل کېدای شي، یعنې:

$$v_G = \omega r$$

څرنګه چې G په یوه مستقیمه کرښه کې حرکت کوي، د دې تعجیل به د دی د سرعت له مشتق وخت ته، له مخې ټاکل کېدلای شي:

$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$
$$a_G = \alpha r \qquad (16–20)$$

همدارنګه دا پایله په مثال 16-4 کې ترلاسه شوې وه. دا د هرې دایروي جسم، لکه توپ، ګیر، ډیسک، او داسې نورو لپاره، چې بیله ښویدو رغړی، د تطبیق وړ ده.



انځور 16-26

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دتحليل ټکلاره

د نسبي- تعجيل معادله د بدن په هر دوو ټکيو A او B کې تطبيق کېدی شي، يا د کارټيزن ويکټور تحليل په کارولو سره، او يا د x او y سکېلر اجزاوود معادلې په مستقيم ډول ليکلو سره .

د سرعت تحليل (Velocity Analysis)

- د بدن د زاويي سرعت w معلومولو لپاره د سرعت تحليل ترسره کړئ، لکه څنګه چې په برخه 16.5 يا 16.6 کې بحث شوی. همدا رنګه ، د ټکو A او B سرعتونه $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{v}_B$ معلوم کړئ که چيرې دا ټکي په منحني لارو حرکت کوي.

ويکټور تحليل (*Vector Analysis*)

کينيمټيک ډياګرام (Kinematic Diagram)

- د ثابت x او y کوارډينيټونو لوري وټاکي او د بدن يو کينيمټيک ډياګرام رسم کړئ چې پکې $\mathbf{a}_A$، $\mathbf{a}_B$، $\mathbf{w}$، $\mathbf{a}$، او $\mathbf{r}_{B/A}$ ښکاره کوي.
- که ټکي A او B په منحني لارو حرکت کوي، نود دوی تعجيل بايد د مماسي او عمود اجزاوولە مخې وښودل شي، يعني $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$ او $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$

د تعجيل معادله (Acceleration Equation)

- د $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - w^2\mathbf{r}_{B/A}$ د تطبيق لپاره، ويکټورونه د کارټيزن ويکټورپه شکل څرګند کړئ اوپه معادله کې يې ځای پر ځای کړئ. د کراس ضرب محاسبه کړئ او بيا د $\mathbf{i}$ او $\mathbf{j}$ اړوند اجزاوی سره مساوي کړئ ترڅو دوی سکېلر معادلې ترلاسه کړئ.
- که د يوه نامعلوم مقدار حل لپاره منفي جواب ورکړي ، نو دا څرګندوي چې د ويکټور لوری چې په کينيماټيک ډياګرام کې ښودل شوي مخالف جهت لری.

سکېلر تحليل (*Scalar Analysis*)

کينيمټيک ډياګرام (Kinematic Diagram)

- که د تعجيل معادله په سکېلر شکل کې تطبيق شي، نو د نسبي تعجيل اجزاوی $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ او $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ اندازی اولوري بايد معلوم شي. د دې لپاره، يو کينيماټيک ډياګرام لکه څنګه چې په انځور 16-27c کې ښودل شوي، رسم کړئ .څرنګه چې بدن په موقتي

توګه په بنسټ ټکي A کې "پن" ګڼل کيږي، نو د دې د اجزاووراندازې $(a_{B/A})_t = ar_{B/A}$ او $(a_{B/A})_n = w^2r_{B/A}$ دي. د دوی جهت له ډياګرام څخه ټاکل کيږي ترڅو $(a_{B/A})_t$ عمود په $r_{B/A}$ عمل وکړي ، او دا مطابق د a د بدن د دورانی حرکت سره دی او د $(a_{B/A})_n$ جهت له B څخه د A په لور وي*.

د تعجيل معادله (Acceleration Equation)

ويکټورونه $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ په ګرافيکي شکل په دې ډول وښيی چې د هرې اصطلاح لاندی يې اندازې او لوري بښکاره وي. د سکېلر معادلې د دې ويکټورونو د xاو y اجزاووڅخه ټاکل کيږي.

*د دې لپاره په ياد ولری چې A فرض شوی چی پين ده، نو دا لاندی اړيکی بنودل شوی:

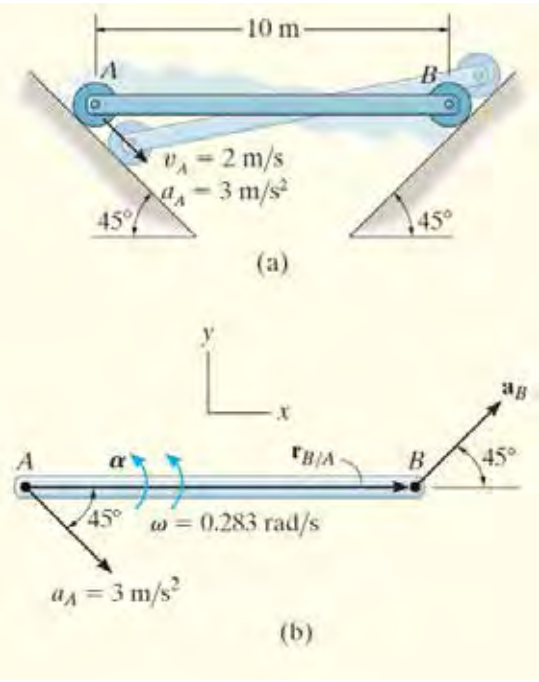
$$a_B = a_A + (a_{B/A(pin)})_t + (a_{B/A(pin)})_n$$



د کړکۍ د حرکت ميکنيزم بنودل شوی. دلته، CA د ثابت محور C په شاوخوا کې څرخي، او AB عمومي سطحي حرکت ترسره کوي. څرنګه چې A ټکی په يوه منحني لاره حرکت کوي، نو دا تعجيل دوی اجزاوی لری، په داسي حال کې چې د B ټکی په مستقيمه لاره کې حرکت کوي او له همدې امله د هغې د تعجيل لوری مشخص شوی.

مثالونه

مثال 16.13 په انځور 16-27a کې ښودل شوی راډ AB اړ ایستل شوی چې د مایلو سطحو په اوږدو کې حرکت وکړي. که چیرې د A ټکی تعجیل $3\ m/s^2$ او سرعت یې $2\ m/s$ وي، چې دواړه، د راډ په افقي حالت کې د سطحې په ښکته لور دی، د راډ زاویوي سرعت په دې وخت کې وټاکئ.



انځور 16-27

حل I: ویکتوری تحلیل (VECTOR ANLAYSIS) مور به د سرعت معادله د راډ په Aاو B ټکیو کې پلي کړو. د دې لپاره، لومړی اړتیا ده چې د راډ زاویوي سرعت معلوم شي. دا ښکاره کړئ چې دا $w = 0.283\ rad/s$ دی، د سرعت معادله یا د آنی مرکزونو د طریقې په کارولو سره.

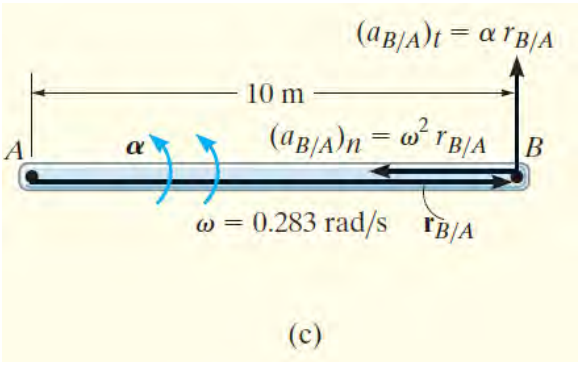
کینیمتیک ډایاګرام (kinematic Diagram). څرنګه چې د Aاو B ټکی دواړه د مستقیمو کربنو په اوږدو کې حرکت کوي، دوی هیڅ د تعجیل عمودی اجزاوې د مسیرونو په لور نه لري. په انځور 16-27bکې دوه مجهوله دي، یعنې a_B او α .

د تعجیل معادله (Acceleration Equation).

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \sin 45°\mathbf{j} = 3 \cos 45°\mathbf{i} - 3 \sin 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0.283)^2(10\mathbf{i})$$

د کراس د ضربولونه او د **i** او **j** اجزاوود مساوی کولونه لاندی په لاس راځی:



انځور 16-27

$$a_B \cos 45° = 3 \cos 45° - (0.283)^2(10) \quad (1)$$

$$a_B \sin 45° = -3 \sin 45° + \alpha(10) \quad (2)$$

له حل کولو ورسته مور لرو

$$a_B = 1.87\ m/s^2 \measuredangle 45°$$

$$\alpha = 0.344\ rad/s^2 \curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

حل II: سکیلر تحلیل (SCALAR ANALYSIS) د کینیمتیک ډایاګرام څخه، چې د نسبي تعجیل اجزاوې $(\mathbf{a}_{B/A})_t$او $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ ښیي، انځور 16-27c، مور لرو:

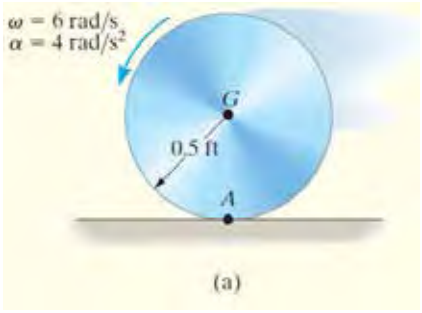
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\ \text{m/s}^2 \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10\ \text{m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283\ \text{rad/s})^2(10\ \text{m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

د دغو څلورو برخو د x او y اجزاوو مساوی کول، معادلې 1 او 2 راکوی، او حل لکه مخکې دوام مومي.

مثال 16.14

دیسک پرته له ښویدو زاویوی حرکت لری، لکه چې په انځور 16-28a کې ښودل شوي. د A ټکی تعجیل په دې وخت کې وټاکئ.



انځور 16-28

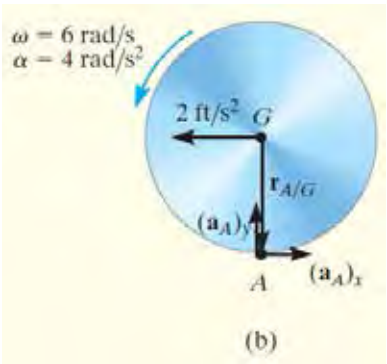
حل I: ویکتوری تحلیل (VECTOR ANLAYSIS)

کینیمټیک ډایاګرام (kinematic Diagram) . له دې امله چې ښویدل نشته، د معادلې 16-20 په تطبیقولو سره:

$$a_G = \alpha r = (4\ \text{rad/s}^2)(0.5\ \text{ft}) = 2\ \text{ft/s}^2$$

د تعجیل معادله (Acceleration Equation).

مورِ به د تعجیل معادله په Gاو A ټکیوباندې پلي کړو، انځور 16-28b و ګورئ.



$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/G}$$

$$\mathbf{a}_A = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{j}) - (6)^2(-0.5\mathbf{j})$$

$$= \{18\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$$

حل II: سکیلر تحلیل (SCALAR ANALYSIS)

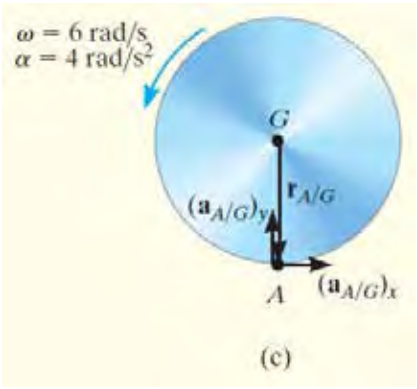
له هغه پایلې څخه چې $a_G = 2\ \text{ft/s}^2$ پورته ټاکل شوې، او د کینیمټیک ډایاګرام څخه، چې نسبي حرکت $\mathbf{a}_{A/G}$ ښیي، انځور 16-28c، مورِ لرو:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{A/G})_x + (\mathbf{a}_{A/G})_y$$

$$\begin{bmatrix}(a_A)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(a_A)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\ \text{ft/s}^2 \\ \leftarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(4\ \text{rad/s}^2)(0.5\ \text{ft}) \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(6\ \text{rad/s})^2(0.5\ \text{ft}) \\ \uparrow\end{bmatrix}$$

$$\pm\rightarrow \quad (a_A)_x = -2 + 2 = 0$$

$$+\uparrow \quad (a_A)_y = 18\ \text{ft/s}^2$$



(c)

انځور 16-28

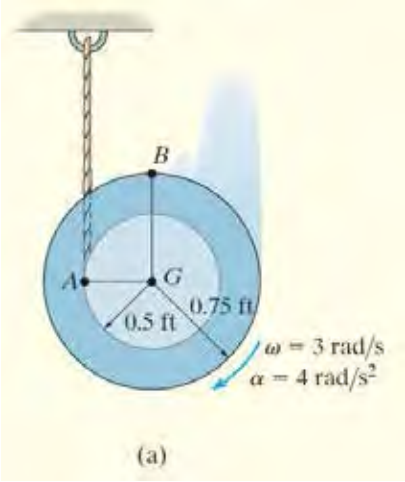
نو

$$a_A = \sqrt{(0)^2 + (18\ \text{ft/s}^2)^2} = 18\ \text{ft/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه. دا چې $a_A = 18\ \text{ft/s}^2$ دی، دا بنيي چې د صفر سرعت آنی مرکز، د A ټکی، د صفر تعجیل ټکی نه دی.

مثال 16.15

په انځور 16-29a کې ګوټک له تار څخه خوشې کیږي، داسې چې په بنودل شوي حالت کې $3\ \text{rad/s}$ زاویوي سرعت او $4\ \text{rad/s}^2$ زاویوي تعجیل لري. په B ټکی کې د تعجیل اندازه معلومه کړئ .



(a)

انځور 16-29

حل I: ویکتوری تحلیل (VECTOR ANLAYSIS)

ګوټک داسې بنکاري چې په A ټکی کې له بنویدو پرته لاندې رغړی. نو، مور کولی شو د 16-20 معادلې پایلې وکاروو تر څو د G ټکی د تعجیل اندازه معلومه کړو، یعنې:

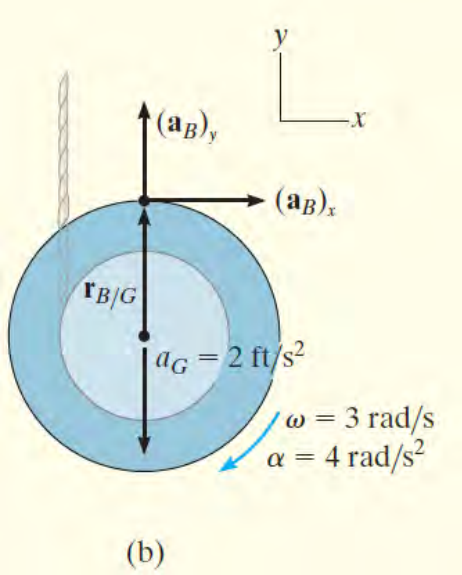
$$a_G = ar = (4\text{rad/s}^2)(0.5\text{ft}) = 2\ \text{ft/s}^2$$

مور به د تعجیل معادله د Gاو B ټکیو لپاره وکاروو.

کینیمتیک ډایاګرام (kinematic Diagram) **.** د B ټکی په داسې یوه منحني لاره کې خوځیږي چې د هغې د انحنا شعاع نامعلومه ده*. د هغې تعجیل به د هغو د x او y مجهولو اجزاوو په توګه څرګند شي لکه څنګه چې په انځور 16-29b کې ښودل شوي.

د تعجیل معادله (Acceleration Equation).

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/G}$$
$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0.75\mathbf{j}) - (3)^2(0.75\mathbf{j})$$



(b)

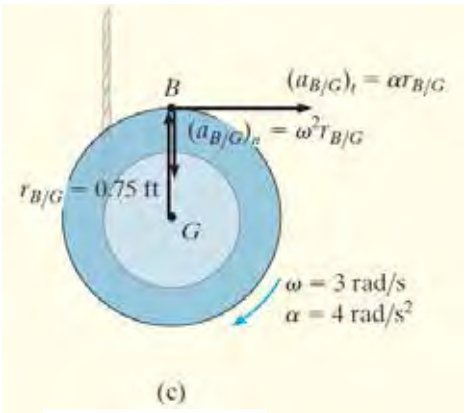
د **i** او **j** برخو مساوي کولو سره، د اجزاوومعادلې دي

$$(a_B)_x = 4(0.75) = 3 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \quad (1)$$
$$(a_B)_y = -2 - 6.75 = -8.75 \text{ ft/s}^2 = 8.75 \text{ ft/s}^2 \downarrow \quad (2)$$

نو د $\mathbf{a}_B$ اندازه او لوری په دې ډول دي

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8.75)^2} = 9.25 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Ans.}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{8.75}{3} = 71.1° \nwarrow \quad \textit{Ans.}$$

حل II: سکیلر تحلیل (SCALAR ANALYSIS) دا پوښتنه په مستقیم ډول د سکیلر د اجزاوو د معادلې په لیکلو سره حل کیدی شي. د کنمتیک ډایاګرام په انځور 16-29c کې د نسبي تعجیل اجزاوی $(a_{B/G})_t$ او $(a_{B/G})_n$ ښیي. نو



(c)

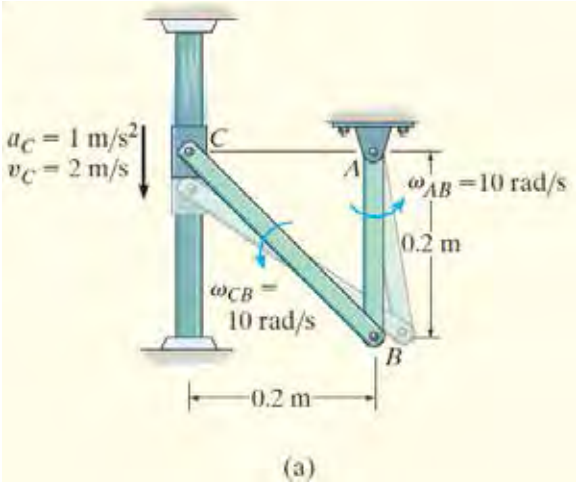
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$
$$\begin{bmatrix}(a_B)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(a_B)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ ft/s}^2 \\ \downarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 \text{ rad/s}^2\,(0.75 \text{ ft}) \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(3 \text{ rad/s})^2(0.75 \text{ ft}) \\ \downarrow\end{bmatrix}$$

د x او y اجزاوی پورته معادلې 1 او 2 ورکوي.

انځور 16-29

*دا درک کړئ چې د لارې د انحنا شعاع r د ګوټک له شعاع سره مساوي نه ده، ځکه چې ګوټک د G تکی په شاوخوا کې نه ځرخي. برسېره پردې، r د A (IC) څخه B پورې فاصله په توګه نه تعریفیږي، ځکه چې د IC موقعیت یوازې د یوې نقطې په سرعت پورې تړاو لري، نه د هغې د لارې په جیومیټري باندې

مثال 16.16 په انځور 16-30a کې حلقه C په $1\ m/s^2$ تعجیل سره په لاندې جهت حرکت کوي. په ښودل شوي حالت کې، د دې سرعت $2\ m/s$ دی، چې د ټرندو CB او AB لپاره زاویوي سرعت $\omega_{CB} = \omega_{AB} = 10\ rad/s$ ورکوي. (مثال 16.8 وګورئ.) په دې حالت کې د CB او AB زاویوي تعجیلونه معلوم کړئ.



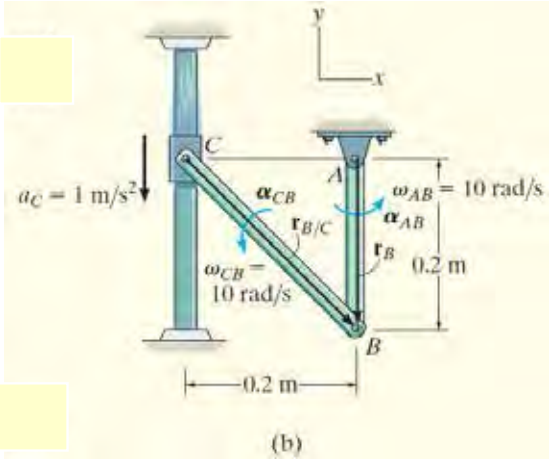
انځور 16-30

حل I: ویکتوری تحلیل (VECTOR ANLAYSIS)

کینیمټیک ډایاګرام (kinematic Diagram). د دواړو ټرونډو AB او CB کینیمټیکي ډایاګرامونه په انځور 16-30b کې ښودل شوي. د حل لپاره، موږ به د هر ټروند لپاره مناسبه کینیمټیکي معادله وکاروو.

د تعجیل معادله (Acceleration Equation).

ټروند AB (څرخیدل د ثابت محور په شاوخوا کې)



$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$
$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$
$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

انځور 16-30

پام وکړئ چې $\mathbf{a}_B$ د n او t اجزاوی لري، ځکه چې دا په یوه دایروي لاره کې حرکت کوي.

ټرونډ BC (د عمومي سطحي حرکت): د $\mathbf{a}_B$ پایله په کارولو او د معادلې 16–18 تتطبیقولو سره، مونږ لرو

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$
$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$
$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

نو بیا

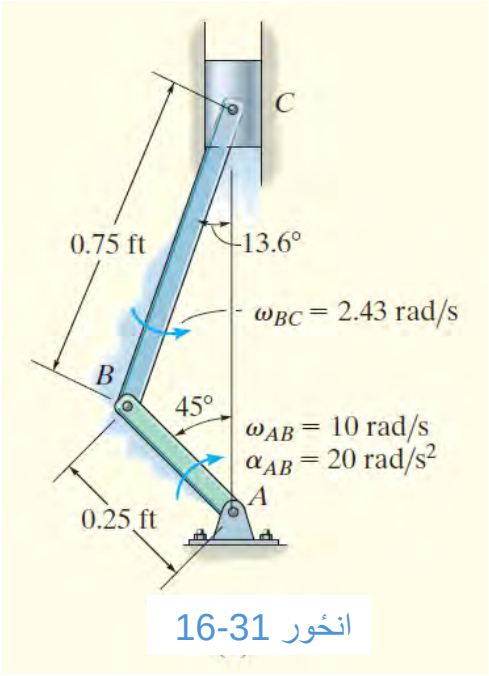
$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$
$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

حل کوویی

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \curvearrowleft \quad \textit{Ans.}$$
$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \quad \textit{Ans.}$$

مثال 16.17

کرنشافټ AB په 20 rad/s^2 زاویي تعجیل د ساعت په لوري تاویږی، انځور 16-31a. د پستون د تعجیل اندازه په هغه حالت کې معلومه کړئ کله چې AB په بنودل شوي حالت کې وي. په دې حالت کې، $w_{AB} = 10 \text{ rad/s}$ او $w_{BC} = 2.43 \text{ rad/s}$ دی. (مثال 16.12 وګورئ.)



انځور 16-31

حل: ویکتوری تحلیل (VECTOR ANLAYSIS)

کینیمټیک ډایاګرام (kinematic Diagram) **.** د ABاو BC لپاره کینیمټیکي ډایاګرامونه په انځور 16-31b کې بنودل شوي دي. دلته $\mathbf{a}_C$ عمودي ده، ځکه چې C په یوه مستقیمه لاره کې حرکت کوي.

د تعجیل معادله (Acceleration Equation).

د موقعیت هرویکټور د کارټیزین ویکټور په بڼه څرګندیږی

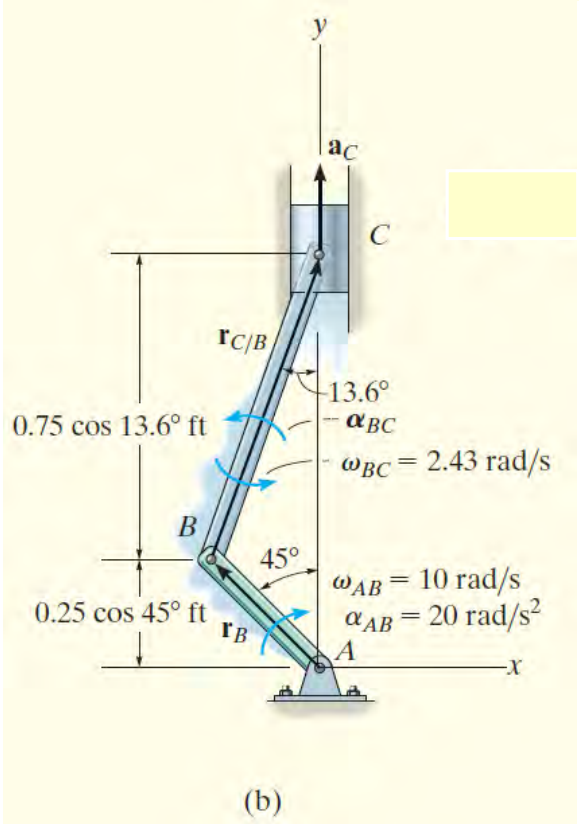
$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \sin 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ ft} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\} \text{ ft}$$
$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \sin 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\} \text{ ft} = \{0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\} \text{ ft}$$

کرنشفټ AB (څرخیدل په شاوخوا د یوه ثابت محور کې)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B \\ &= (-20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) \\ &= \{21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j}\} \text{ ft/s}^2\end{aligned}$$

ټرونګي میله BC (عمومي سطحي حرکت): د a_B پایلې په کارولو سره او په یاد ولرئ چې $\mathbf{a}_C$ په عمودي لوري کې دی، موږ لرو:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B} \\ a_C\mathbf{j} &= 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) - (2.43)^2(0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) \\ a_C\mathbf{j} &= 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + 0.177\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j} \\ 0 &= 20.17 - 0.729\alpha_{BC} \\ a_C &= 0.177\alpha_{BC} - 18.45\end{aligned}$$



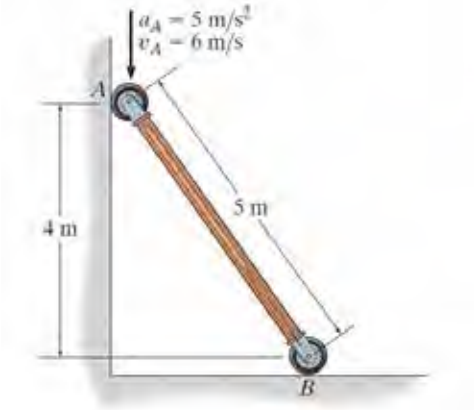
د حل کولونه دا لاندی په لاس راځي

$$\alpha_{BC} = 27.7 \text{ rad/s}^2 \curvearrowleft$$
$$a_C = -13.5 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Ans.}$$

نوټ: څرنګه چې پستون پورته روان دی، د $\mathbf{a}_C$ منفي علامت ښیي چې پستون د تجیل په حالت کې دی، یعنې $\mathbf{a}_C = \{-13.5\ \mathbf{j}\}$ ft/s² . دا سبب کیږی چی د پستون سرعت کم شی تر هغه چې AB عمودي شي، په هغه وخت کې پستون په لحظوی توګه دریږی.

انځور 16-31

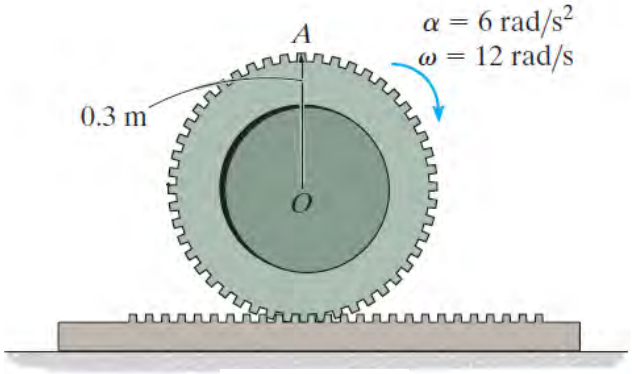
FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې



ب 16-19

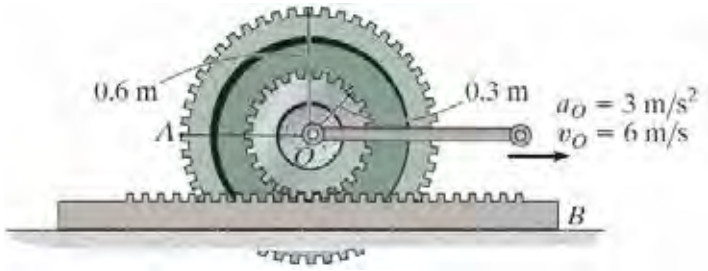
ب 16–19. په بنودل شوي حالت کې، د میلې د پای A سرعت او تعجیل بنودل شوي. د میلې زاویوي تعجیل اود میلې د پای B تعجیل معلوم کړئ.

ب 16–20. ګیر په ثابت رک باندې په زاویوي سرعت $w = 12$ rad/s او زاویوي تعجیل $a = 6$ rad/s² سره ګرزی. د A تکی د تعجیل افقي او عمودي اجزاوی معلومې کړئ.



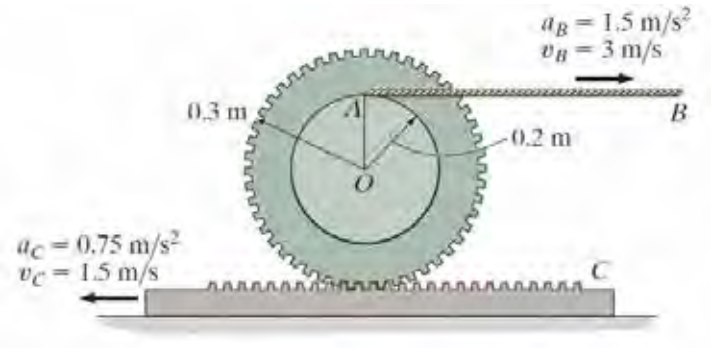
ب 16-20

ب 16–21. ګیر په ثابته غاښ لرونکې لاره B باندې ګرزی. په بنودل شوي حالت کې، د ګیر مرکز O په $w_o = 6$m/s سرعت او $a_0 = 3$ m/s² تعجیل سره حرکت کوي. د ګیر زاویي تعجیل او د A تکی د تعجیل افقي او عمودي اجزاوی په دې حالت کې معلوم کړئ.



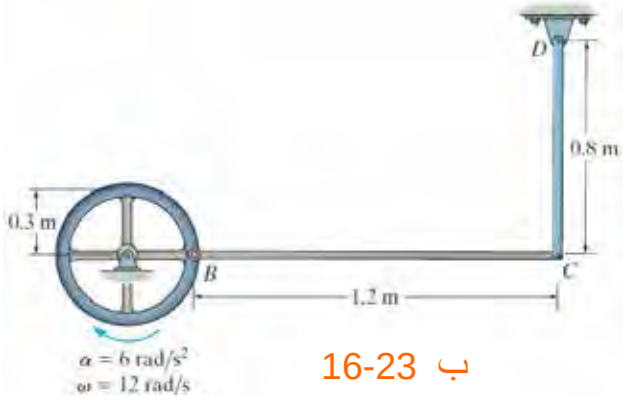
ب 16-21

ب 16–22. په بنودل شوي حالت کې، کیبل AB سرعت 3 m/s او تعجیل 1.5 m/s² لري، پداسې حال کې چې د ګیر غاښ لرونکي لاري سرعت 1.5 m/s او تعجیل 0.75 m/s² لري. د ګیر زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



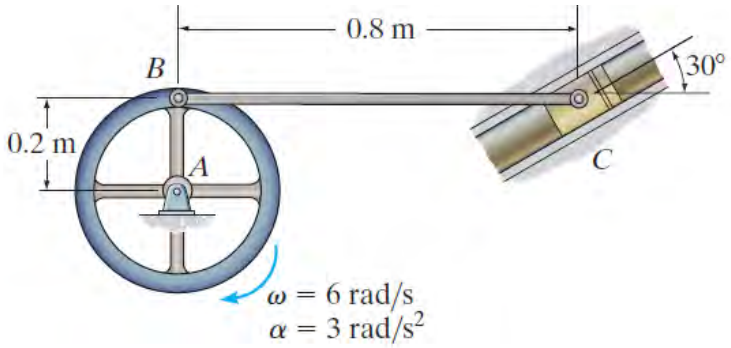
ب 16-22

ب 16–23. په بنودل شوي حالت کې، څرخ د زاویوي سرعت $w = 12$ rad/s او زاویوي تعجیل $a = 6$ rad/s² سره څرخي. د ټرونډ BC زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



ب 16-23

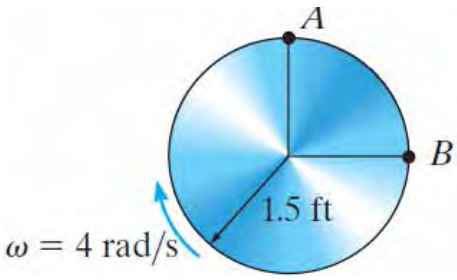
ب 16–24. په بنودل شوي حالت کې، څرخ A په زاویوي سرعت $w = 6$ rad/s او زاویوي تعجیل $a = 3$ rad/s² سره څرخي. د ټرونډ BC زاویوي تعجیل او د پستون C تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



ب 16-24

PROBLEMS پوښتنې

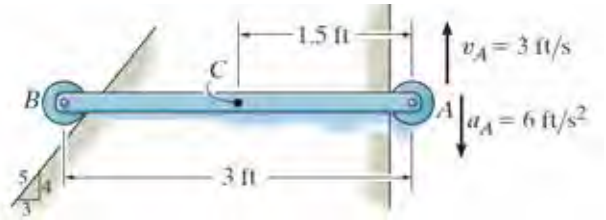
16-103. ډيسک په 4 rad/s ثابته توګه څرخي اوبيا ازاد لويږي، چې مرکز يې 32.2 ft/s² تعجيل لري. د ټکيو A او B چې د ډيسک په محيط باندې دي د تعجيل اندازه يې په ښودل شوي حالت کې معلومه کړئ.



پوښتنه 16-103

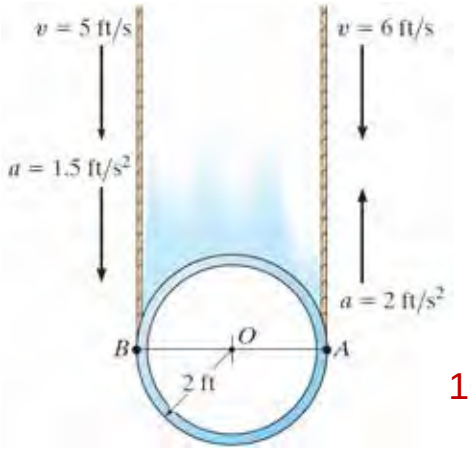
16-104. په راکړل شوی حالت کې، A ښودل شوي حرکت لري. د B تعجيل او د ميلې زاويوي تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.

16-105. په راکړل شوی حالت کې، A ښودل شوي حرکت لري. د C تکی تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



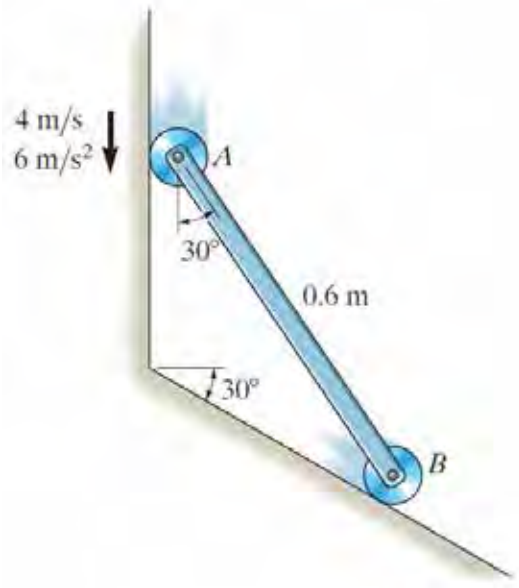
پوښتنې 16-104/105

16-106. په راکړل شوی حالت کې، د پايپ ملاتړ کيبلونه ښودل شوي حرکتونه لري. د پايپ زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل، او د پايپ په B تکی کې د سرعت او تعجيل اندازی په دې حالت کې معلومی کړئ.



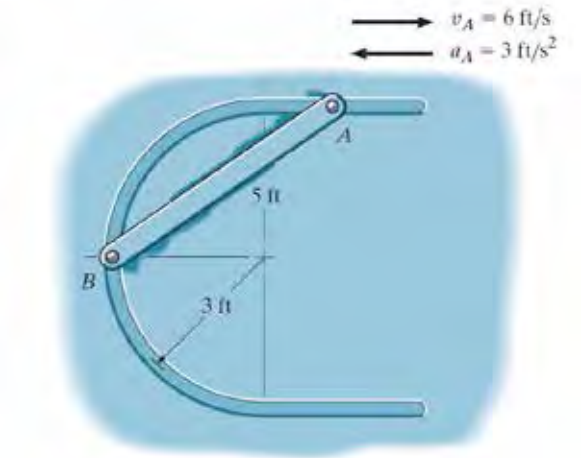
پوښتنه 16-106

16-107. په راکړل شوی حالت کې، په څرخ A د بارکې سرعت او تعجیل ښودل شوي. د څرخ B سرعت او تعجیل، او د بار زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



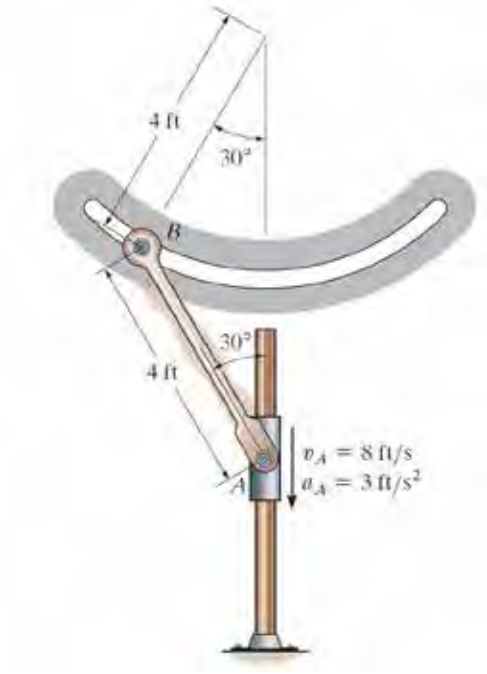
پوښتنه 16-107

*16-108. د میلې حرکت د پایلود پینونو له امله یوازې په محدوده لار حرکت کوی.. په ښودل شوي حالت کې، د A د ټکی حرکت ښودل شوی. د B د ټکی سرعت او تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



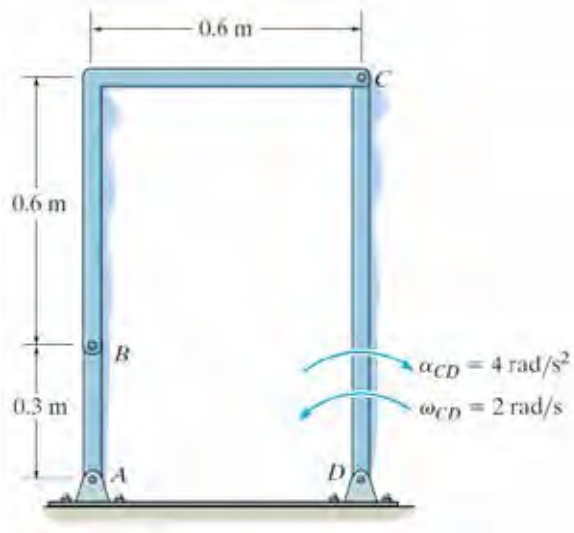
پوښتنه 16-108

16-109. د AB میلی پایلونه د بنودل شویو لارو سره محدود دي. په یوه مشخص وخت کي، A، 8 ft/s سرعت او 3 ft/s² تعجیل لري. د AB زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دې حالت کي معلوم کړئ.



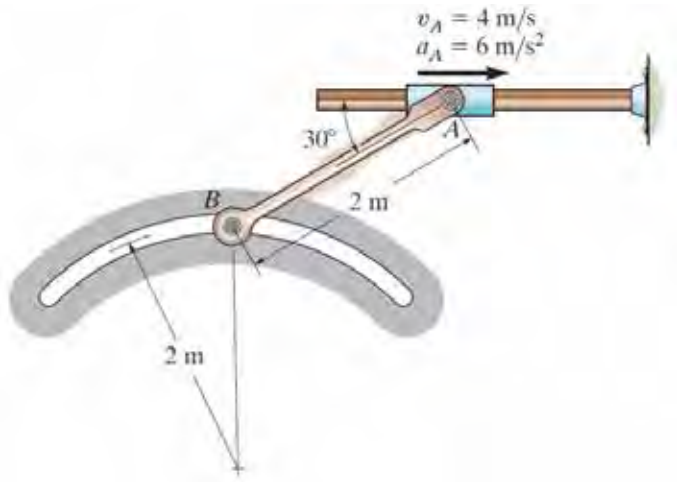
پوښتنه 16-109

16-110. د ټروند AB زاویوي تعجیل معلوم کړی، که د ټروند CD زاویوي سرعت او زاویوي تجیل بنودل شوي وي.



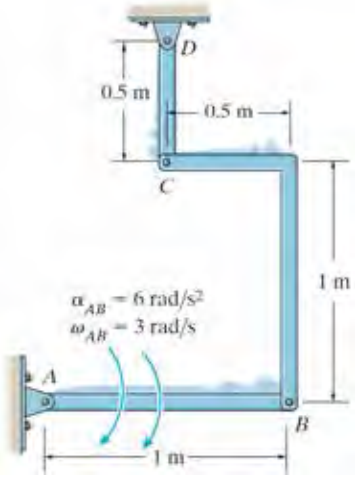
پوښتنه 16-110

16-111. په یوه مشخص حالت کې، ښویدونکی بلاک A د ښودل شوي حرکت سره د ښي خوا ته ځی. د ټرونډ AB زاویوي تعجیل او د B ټکی تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنه 16-111

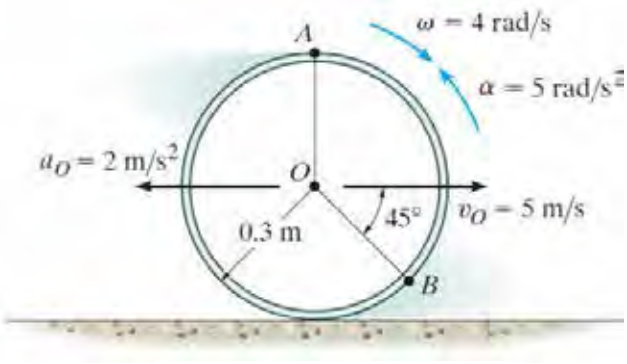
*16-112. د ټرونډ CD زاویوي تعجیل معلوم کړئ که د ټرونډ AB زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل ښودل شوي وي.



پوښتنه 16-112

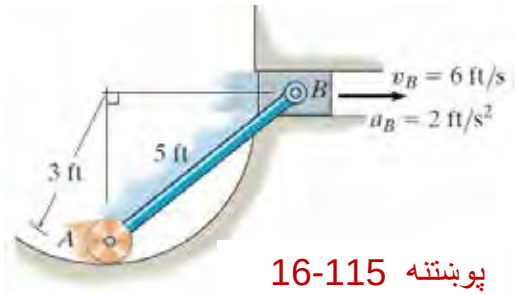
16-113. حلقه په نا ښویه سطحه باندی رغړیدلیی چې 4 rad/s زاویوي سرعت او 5 rad/s² زاویوي تعجیل لري. همدارنګه، د حلقی مرکز 5 m/s سرعت او د 2 m/s² تجیل (deceleration) لری . د A ټکی تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.

16-114. حلقه په تابنويه سطحه باندی رغړيدليی چی 4 rad/s زاويوي سرعت او 5 rad/s² زاويوي تعجيل لري. همدارنګه، د حلقی مرکز 5 m/s سرعت او د 2 m/s² تجيل (deceleration) لری . د B ټکی تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنې 16-113/114

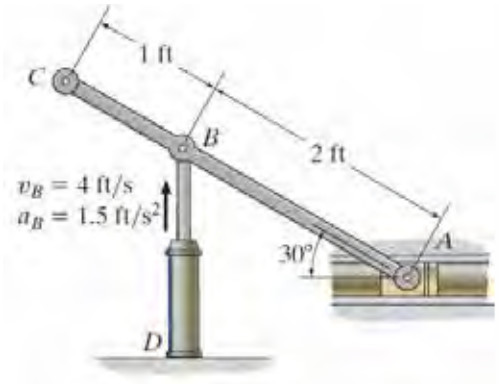
16-115. په يوه مشخص حالت کې، ښويدونکی بلاک B د ښودل شوي حرکت سره د ښي خوا ته حرکت کوي. د ټروند AB زاويوي تعجيل او د A ټکی تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنه 16-115

*16-116. د هايدروليک سيلندر D په 4 ft/s سرعت او 1.5 ft/s² تعجيل سره غزول کيږي. د A ټکی تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.

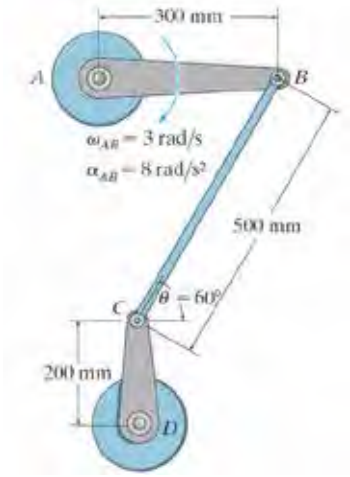
16-117. د هايدروليک سيلندر D په 4 ft/s سرعت او 1.5 ft/s² تعجيل سره غزول کيږي. د C ټکی تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنې 16-116/117

16-118. که د غړي AB زاويوي حرکت ښودل شوی وي، نو د غړي CD زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.

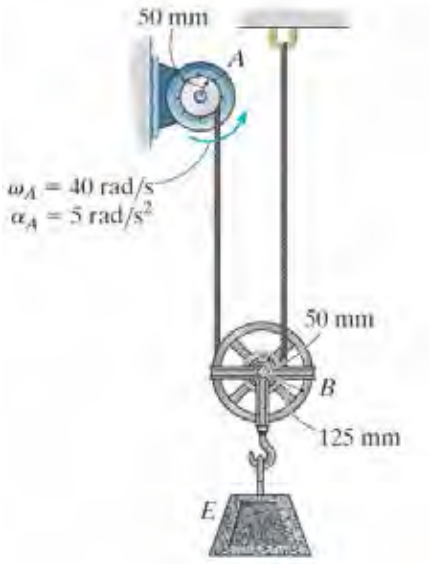
16-119. که د غړي AB زاويوي حرکت ښودل شوی وي، نو د C تکی سرعت او تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنې 16-118/119

16-120. څرخکی A په ښودلشوی زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل سره څرخي. د څرخکی B زاويوي تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.

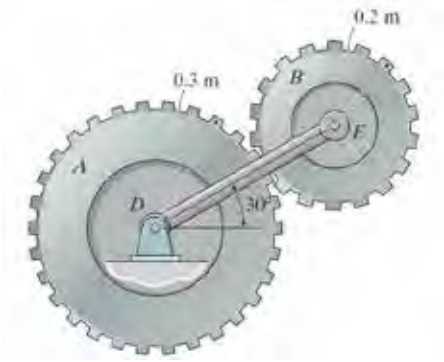
16-121. څرخکی A په ښودلشوی زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل سره څرخي. د بلاک E زاويوي تعجيل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنې 16-120/121

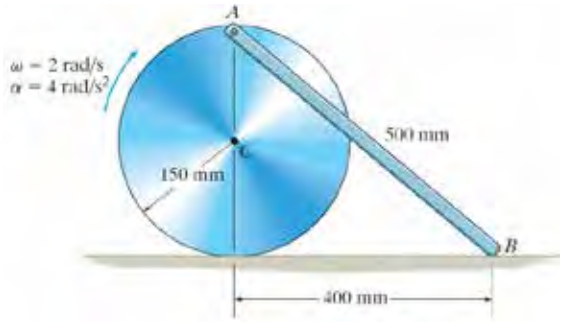
16-122. گیر A ثابت ساتل شوی، او لاس DE په 6 rad/s زاویوي سرعت او 3 rad/s² زاویوي تعجیل سره د ساعت په لوري څرخي. د ګیر B زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.

16-123. ګیر A په 10 rad/s ثابت زاویوي سرعت سره د ساعت خلاف په لوري څرخي، پداسې حال کې چې لاس DE په 6 rad/s زاویوي سرعت او 3 rad/s² زاویوي تعجیل سره د ساعت په لوري څرخي. د ګیر B زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



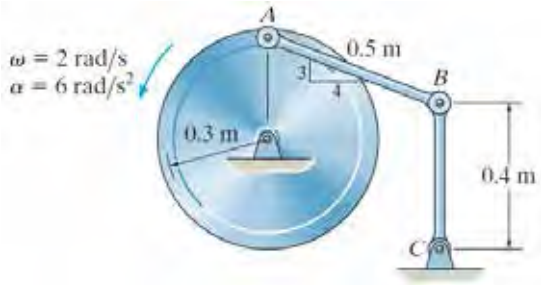
پوښتنې 16-122/123

16-124* . دیسک پرته له ښویدو، په 4 rad/s² زاویوي تعجیل او 2 rad/s زاویوي سرعت سره، په ښودل شوي حالت کې دي. په ټرونډ د Aاو B ټکیود تعجیل اندازه او د ټرونډ زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ. فرض کړئ چې د A ټکی د ډیسک په محیط ، او له C څخه 150 mm فاصله لري.



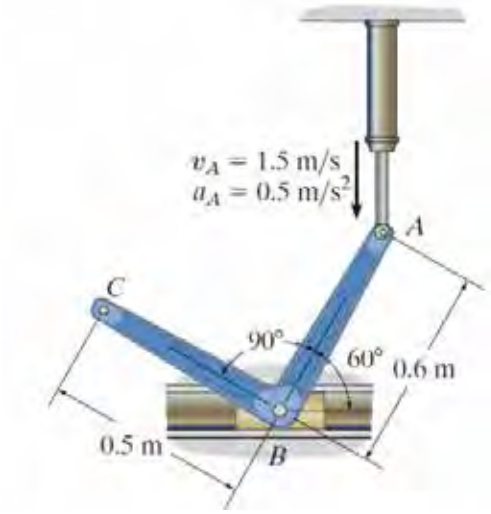
پوښتنه 16-124

16-125. فلایویل په زاویوي سرعت $w=$ 2 rad/s او زاویوي تعجیل $a =$ 6 rad/s² سره څرخي. د ټرونډو AB او BC زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.



پوښتنه 16-125

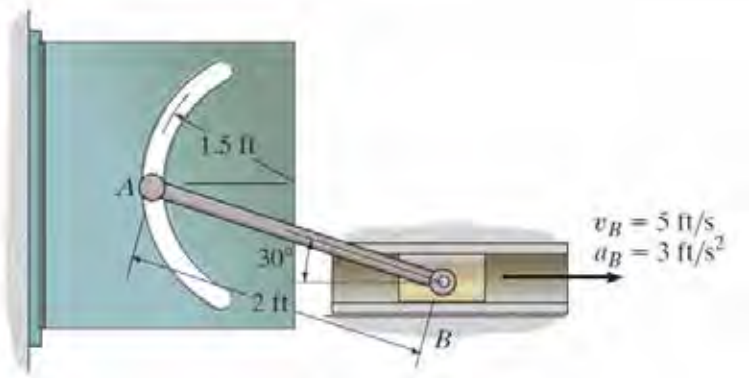
16-126 . د هایدرولیک سیلندر په v_A= m/s 1.5 سرعت او a_A= 0.5 m/s² تعجیل سره غزول کیږي. د ټروند ABC زاویوي تعجیل او د پای C تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ. د B تکی له ښویدونکي بلاک سره د پین پواسطه ټرلشویی.



پوښتنه 16-126

16-127. ښویدونکی بلاک په v_B = 5 ft/s سرعت او a_B = 3 ft/s² تعجیل سره حرکت کوي. د میلې AB زاویوي تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.

16-128*. ښویدونکی بلاک په v_B = 5 ft/s سرعت او a_B = 3 ft/s² تعجیل سره حرکت کوي. د A تکی تعجیل په دې حالت کې معلوم کړئ.

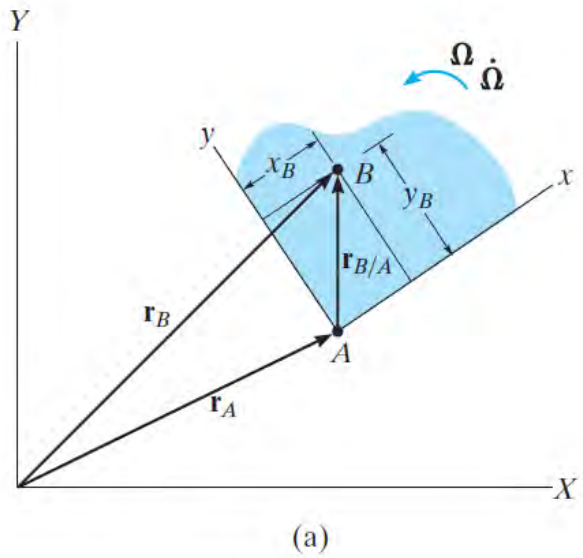


پوښتنی 16-127/128

*16.8د نسبي حرکت تحلیل د څرخیدونکیو محورونو په کارولو سره
(RELATIVE-MOTION ANLAYSIS USING ROTATING AXES)

په تیروبرخو کې د سرعت او تعجیل لپاره د نسبی- حرکت تحلیل د یوه بدلیدونکیو محورونو سیستم په کارولو سره تشریح شوی وا. دا ډول تحلیل د دې لپاره ګټور دی چې د ټکیو حرکت په یوه سخت جسم باندی، یا د ټکیو حرکت په څو پین شویو اجسامو، معلومیدلو لپاره. په ځینې پوښتنوکې، مګر، سخت اجسام (میکانیزمونه) داسې جوړ شوي چې د دوی په نښلوکې ښویدنه پیښیږي. د دې ډول حالتونو لپاره کینېمتیکي تحلیل په غوره توګه ترسره کیږي که چیرې حرکت د داسې محورونو په سیستم تحلیل شي چې په هغه کی دواړه، خوځیدل اوڅرخیدل شتون ولري. برسېره پردې، دا ریفرینس فریم د میکانیزم د دوو ټکیوحرکتونو تحلیل لپاره ګټور دی چې په یوه جسم باندی نه دي، او د ذراتو حرکت کینېمتیک مشخص کولو لپاره ګټور دی کله چې ذره د څرخیدونکې لارې په اوږدو کې حرکت کوي.

په لاندې تحلیل کې به دوه معادلې رامینځته شي چې د دوو ټکیو سرعت او تعجیل سره اړیکه ورکوی، چې له دې جملې څخه یوه د متحرک ریفرینس فریم مبدأ ده چې دواړه، خوځیدل او څرخیدل په سطحه کې ورسره مخ دي.



(a)

انځور 16-32

موقعیت (Position): دوه نقطې A او B په انځور 16-32aکې ښودل شوي دي. د دوی ځای د موقعیت ویکتورونو $\mathbf{r}_A$ او $\mathbf{r}_B$ لخوا مشخص شوی، چې د ثابت X ، Y، Z محوری سیستم له مخی اندازه شوي دي. لکه څنګه چې په $\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$ انځور کې ښودل شوي، "بنسټیز

نقطه A "د x ، y، zمحوری سیستم د مبدآ استازیتوب کوي، چې اټکل کیږي د X، Y، Z سیستم په نسبت په حرکت او څرخیدو کې دي. د B موقعیت نسبت A ته د نسبي موقعیت ویکتور $\mathbf{r}_{B/A}$ لخوا مشخص شوی دی. د دې ویکتور اجزاوي دX ، Yمحورونو په اوږدو کې د واحد ویکتورونو، یعني $\mathbf{I}$ او $\mathbf{J}$ په توګه څرګندیدلی شي، یا د x ، y محورونو په اوږدو کې د واحد ویکتورونو، یعني $\mathbf{i}$ او $\mathbf{j}$ په توګه. د راتلونکي پرمختګ لپاره، $\mathbf{r}_{B/A}$ به د متحرک x ، y محوری ریفرینس په چوکاټ کې اندازه شي. نو، که چیرې B کوارډنیټ (x_B, y_B) ولري، انځور 16-32a کې، بیا به

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

په انځور 16-32aکې دري موقعیتي ویکتورونه له ویکتوري جمعې سره تړاو لري.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16–21)$$

په پام کې نیول شوي شیبه کې، د A ټکی سرعت $\mathbf{v}_A$ او تعجیل $\mathbf{a}_A$ لري، پداسې حال کې چې د x او y محورونو زاویي سرعت $\boldsymbol{\omega}$(omega) او زاویي تعجیل $\boldsymbol{\alpha}=d\boldsymbol{\omega}/dt$ په ترتیب سره دي.

*د ټکیود دري بعدي حرکت یوه عمومي بڼه په 20.4 برخه کې توضیح شوې ده.

سرعت (Velocity) : د B نقطې سرعت د وخت مشتق اخیستلود معادلې 16-21 له لارې ټاکل کیږي چې دا راکوی:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \qquad (16–22)$$

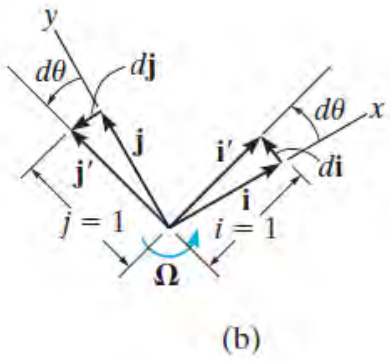
د دې معادلې وروستی اصطلاح په لاندې ډول ارزول کیږي:

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$

$$= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right) \qquad (16–23)$$

په لومړۍ قوسونو کې دوي اصطلاوی د B ټکی د سرعت اجزاوی ښیی کوم چې یو لیدونکی، چې د متحرک x, y, z محوري سیستم سره ټرلی، اندازه کوي یې، یعنې $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$.



(b)

انځور 16-32

په دویمو قوسونو کې د وخت د بدلون کچه د واحد ویکتورونو **i** او **j** د یوه لیدونکی لخوا اندازه کیږي کوم چې په ثابت X, Y, Z محوری سیستم کې موقعیت لري.

دا بدلونونه، **di**او **dj**، یوازې د x, y, z محورونو د څرخې حرکت dq له امله رامنځته کیږي، او د دې لامل ګرځي چې **i** په **i' = i + di** او **j** په **j' = j + dj** بدل شي، لکه څنګه چې په انځور 16–32bکې ښودل شوي دي. لکه څنګه چې ښکاره شوې، د **di** او **dj** مقدارونه دواړه مساوی په dq 1دي، ځکه چې i = i' = j = j' = 1 دی .

د **di** جهت د **j+** له لارې تعریف شوی، ځکه چې **di** د هغه مسیر سره مماس دی چې د **i** د غیښی سر لخوا بیان شوی په لمیټ د $\Delta t \rightarrow dt$ شي. په ورته ډول، **dj** د **i-** په جهت کې عمل کوي، لکه څنګه چې په انځور 16–32bکې ښودل شوي دي. له دې امله:

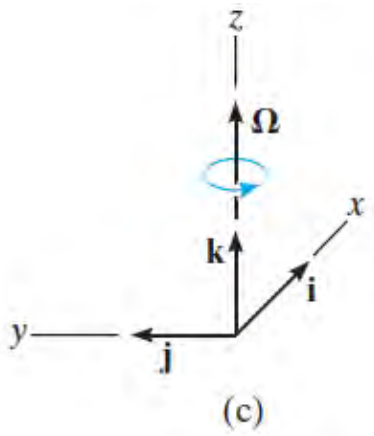
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

د محورونو درې اړخیز لید په پام کې نیولو سره، لکه څنګه چې په انځور 16–32cکې ښودل شوي، او په یاد ولرئ چې **W= Wk**، مور کولی شو پورته مشتقونه د کراس ضرب په بڼه داسې څرګند کړو:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad (16\text{–}24)$$

دا پایلې په معادله 16–23کې ځای په ځای کوو ، او د ویکتوري کراس ضرب دستربیوټیو (distributive) خاصیت په کارولو سره، مور ترلاسه کوو:

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})$$
$$= (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16\text{–}25)$$



(c)

انځور (ادامه)-16

له دې امله، معادله 16–22په لاندې ډول لیکل کیږی.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \qquad (16–26)$$

کله چې معادله 16–26کاروو، دا مهمه ده چې د هرې اصطلاح معنی او هدف پوه شو. د دوی په ترتیب په لاندې ډول دی:

$\mathbf{v}_B$ = د B ټکی سرعت، چې د ثابت X, Y, Z محوری سیستم څخه اندازه کیږي.

$\mathbf{v}_A$ = د محوری سیستم x, y, z د مبدأ ټکی A سرعت، چې د ثابت X, Y, Z ریفرینس سیستم څخه اندازه کیږي.

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = د B ټکی سرعت نسبت د A ټکی ته کله چې د یوه لیدونکی له خوا چې د څرخیدونکی x, y, z محوری سیستم سره ټرلی وی اندازه کیږی.

$\mathbf{W}$ = زاویوي سرعت، د x, y, z محوری سیستم چې د X, Y, Z محورونو څخه اندازه کیږي.

$\mathbf{r}_{B/A}$ = د B ټکی موقعیت نسبت د A ټکی ته.

د معادلې 16–26او معادلې 16–16 ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{W}\mathbf{X}\,\mathbf{r}_{B/A}$) ، کوم چې د خوځیدونکی ریفرینس محورو لپاره د قبول وړه، چې ترمنځ یې یوازینی توپیرد اصطلاح $(\mathbf{v}_{B/A})_{xy}$ شتون دی.

کله چې معادله 16-26 کارول کیږي زیاتره ګټوره ده چې هره اصطلاح وښودلشي چې څه شی ښکاروی. د ښودلشویواصطلاحاتوله مخی په لاندی ډول دی:

$\mathbf{v}_B$ { مطلق سرعت د B نقطی } } د B حرکت لکه څنګه چې د ثابت X, Y, Z سیستم څخه لیدل کیږي

مساوي

$\mathbf{v}_A$ { مطلق سرعت د مبدأ یا اصلی نقطي x, y, z سیستم

جمع

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ { زاویوي سرعت اغیزه د x, y, z سیستم څرخیدو له امله

جمع } } حرکت د x, y, z سیستم چې د ثابت X, Y, Z سیستم څخه لیدل کیږي.

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ { د A نسبت سرعت نسبي نقطي د B ته } } د B حرکت لکه څنګه چې د x, y, z سیستم څخه لیدل کیږي

تعجیل (Acceleration). د $\mathbf{B}$ ټکی تعجیل چې د X, Y, Z محوري سیستم څخه لیدل کیږي، کیداي شي چې د هغی د حرکت نسبت د څرخی محورونو سیستم ته اندازه شوی وي چې د وخت مشتق نیولو د معادلی 26–16 څخه په لاندی ډول سره په لاس راځی:

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \qquad (16\text{–}27)$$

دلته $\dot{W} = dW/dt$ د x ، y، z محوري سیستم زاویوي تعجیل دی. څرنګه چې $\mathbf{W}$ همیشه د حرکت پرسطحه عمود دی، نو $\dot{\mathbf{W}}$ یوازې د $\mathbf{W}$ په مقدار کې بدلون اندازه کوي. د $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ مشتق د معادله 16-25 لخوا تعریف شوی دی، نو دا چې

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (16\text{–}28)$$

د وخت مشتق موندل د $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\,\mathbf{j}$ عبارت دی په

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

د لومړي براکټ دوی اصطلاحی د B ټکی د تعجیل اجزاوی ښیي لکه څنګه چې د یوه لیدونکی لخوا، کوم چې د څرخیدونکی محوري سیستم سره تړلی دی، لیدل کیږی. دا اصطلاحات به په $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ وښودل شی. د دویم براکټ اصطلاحات کیدی شي د معادلو 16-24 په کارولو سره ساده شي.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

دا او معادله 16-28 په معادله 16-27 کې ځای پر ځای کوو او اصطلاحات بیا تنظیموو

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \tag{16–29}$$

چیرې چې

$\mathbf{a}_B$ = د B تعجیل دی چې دریفرینس X ، Y، Z څخه اندازه شوی

$\mathbf{a}_A$ = د مبدأ A تعجیل د x ، y، z ریفرینس نه چې د X ، Y، Z ریفرینس څخه اندازه شوی

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = د B تعجیل او سرعت نسبت A ته، لکه څنګه چې د لیدونکی لخوا کوم چې د څرخیدونکي x ، y، z ریفرینس سره وصل دی اندازه کیږي.

$\dot{\mathbf{W}}, \mathbf{W}$ = زاویوي تعجیل او زاویوي سرعت د x ، y، z ریفرینس، چې له X، Y، Z ریفرینس څخه اندازه شوي وی

$\mathbf{r}_{B/A}$ = د B موقعیت نسبت A ته

که معادله 16-29 د معادله 16-18 سره پرتله شي، $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{W}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{W} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{r}_{B/A})$، کوم چې د یو خوځیدونکي محوري سیستم لپاره د اعتبار وړ دی، نو دا څرګندیږي چې د دې دواړو معادلو ترمنځ توپیر $2\,\mathbf{W} \times (v_{B/A})_{xyz}$ او $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ اصطلاحاتو لخوا وړاندې کیږي. په ځانګړي ډول، $2\,\mathbf{W} \times (\mathbf{v}_{b/A})_{xyz}$ د **کوریاولس تعجیل** (**Coriolis acceleration**) بلل کیږي، چې د فرانسوي انجنیر G. C. Coriolis په نوم نومول شوی، څوک چې لومړی یې کشف کړ. دا اصطلاح د B تعجیل توپیر څرګندوي لکه څنګه چې د نه ګرځیدونکي او ګرځیدونکي x ، y، z محورونو څخه اندازه کیږي. لکه څنګه چې د ویکټور کراس ضرب ښیي، د کوریاولس تعجیل به همیشه $\mathbf{W}$ او $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ ، دواړو ته عمودي وي. دا د تعجیل مهمه برخه ده چې باید هر وخت په پام کې ونیول شي کله چې د ګرځیدونکي ریفرینس سیستم کارول کیږي. دا معمولا پیښیږي، د ببلګې په توګه، کله چې د راکټونو، اوږدې فاصلې پروجیکټیلو یا نورو بدنونو باندې د

تعجیلونو او قوو مطالعه کیږي چې د حرکتوناندازه یی د ځمکې د ګرځېدو له امله په مهمه توګه متاثر کیږي.

د معادلې 16-29 اصطلاحاتو لاندې تشریح، کیدل کیدای شي ګټور تمام شی کله چې دا معادله د پوښتنود حلولو لپاره وکارول شي.

$\mathbf{a}_B$	مطلق تعجیل د B نقطی	د B حرکت لکه څنګه چی د ثابت X, Y, Z سیستم څخه لیدل کیږي
	مساوي	
$\mathbf{a}_A$	مطلق تعجیل د مبدأ یا اصلی نقطې x, y, z سیستم	حرکت د x, y, z سیستم چې د ثابت X, Y, Z سیستم څخه لیدونکی یی ویني.
	جمع	
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$	زاویوي تعجیل اغېزه د x, y, z سیستم څرخیدو له امله	
	جمع	
$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$	زاویوي سرعت اغېزه د x, y, z سیستم څرخیدو له امله	
	جمع	
$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$	د B د حرکت ګډه اغېزه نسبت د x، y، z محورونواوڅرخولود x، y، z چوکاټ.	متقابل حرکت
	جمع	
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$	تعجیل د B نسبت A ته	د B حرکت لکه څنګه چی د x,y,z سیستم څخه لیدل شوي

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دتحليل تګلاره

معادلې 16–26 او 16–29 کولی شي د هغو پوښتنو د حل لپاره وکارول شي چې ذرې یا سخت بدنونه د سطحیَ حرکت سره تړاو ولري، او دا لاندې تګلارې کارول کیږي.

کوآرډینیټ محورنه (Coordinate Axes).

- د مبدأ لپاره مناسب موقعیت او د محورونو د سم سمبالښت، د ثابت X ، Y، Z او د حرکت کوونکیو x ، y، z ریفرینس فریمو، لپاره ټاکنه وکړئ .
- ډیرې وختونه حلونه په اسانۍ سره ترلاسه کیږي په دې شرط چې په هغه لحظه کې دا لاندې په پام کې ونیول شي:

1. د مبدأ ځایونه یو شان وي
2. اړوند محورونه هم کرښه وي
3. اړوند محورونه موازي وي

- حرکت کوونکي فریم یاچوکات باید د هغه بدن یا وسیلې سره تړلې وټاکل شي کوم چې نسبي حرکت واقع کوي.

کینماټیکي معادلې (Kinematic Equations) .

- وروسته له دې چې د حرکت کوونکي ریفرینس A مبدأ یا اصلي ځای وټاکل شي او حرکت کوونکي نقطه B مشخصه شي، معادلې 16-26 او 16-29 باید په سمبولیکه بڼه ولیکل شي.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- د دې ټولو ویکټورونو کارتېژین اجزاء کیدای شي د X ، Y، Z محورونو سره یا د x ، y، z محورونو په اوږدوالی کې وښودل شي. ټاکنه اختیاري ده، په شرط ددې چې واحد ویکټورونه په ثابت او منظمه توګه وکارول شي .
- د حرکت کوونکي ریفرینس حرکت د $\mathbf{v}_A$ ، $\mathbf{a}_A$، $\boldsymbol{\Omega}$، او $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ لخوا ښودل شویی دی؛ او د B حرکت د حرکت کوونکي ریفرینس په پرتله د $\mathbf{r}_{B/A}$ ، $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$، او $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ لخوا ښودل شویی دی.

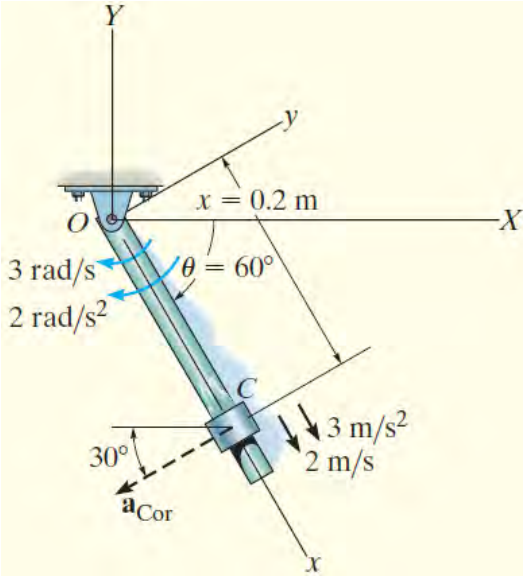


د ټرک د بار وړونکي برخي دوراني حرکت د C ټکی ته د هایدولیک سیلندر AB د پراخېدو له لارې عملی کیږي. د دې پراخېدو له امله د بار وړونکي برخي دوران موندلو لپاره، موږ کولی شو د نسبي حرکت معادلې وکاروو او د ګرځیدونکي محورونه د سیلندر سره وتړو x، y، z ترڅو د سیلندر د پراخېدو نسبي حرکت د y محور په اوږدو کې ترسره شي.

مثالونه

مثال 16.18

په هغه لحظه کې چې $q = 60°$ وي، انځور16-33، میله 3 rad/s زاویوي سرعت او 2 rad/s² زاویوي تعجیل لري. په همدې لحظه کې، د C غاړکی د میلی په اوږدو کې بهر ته حرکت کوي، داسې کله چې $x = 0.2$ m وي، د هغې سرعت او تعجیل چې د میلی په پرتله اندازه شوي په ترتیب سره 2 m/s او 3 m/s² دي. د کوریاولس تعجیل، او د حلقې سرعت او تعجیل په دې لحظه کې وموموی.



انځور 16-33

حل

کوآرډینیټ محورونه (Coordinate Axes) : د دوارۍسیستمود کوآرډینیټو مبدأ په نقطه O کې موقعیت لري، انځور 16-33 . لکه څنګه چې د غاړکی حرکت د میلی په پرتله ویل شوی، نو حرکت کوونکی x ، y، z ریفرینس فریم په میله باندی نیښلول شوی.

کینمتیک معادله (Kinematic Equation) :

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \quad (2)$$

دا به ساده وي چې ټول ويکټورونه د هغوی د **i** ، **j**، **k** اجزاوو په واسطه څرګند کړو، نه د **I** ، **J**، K اجزاوو په توګه. له دې امله

حرکت د C نسبت خوځيدونکي مرجع ته	حرکت د خوځيدونکي مرجع يا ريفرينس
$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}\ \text{m}$	$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$
$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}\ \text{m/s}$	$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$
$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}\ \text{m/s}^2$	$\boldsymbol{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$
	$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$

د کوريالوس تعجيل تعريف شوی دی لکه څنګه چې

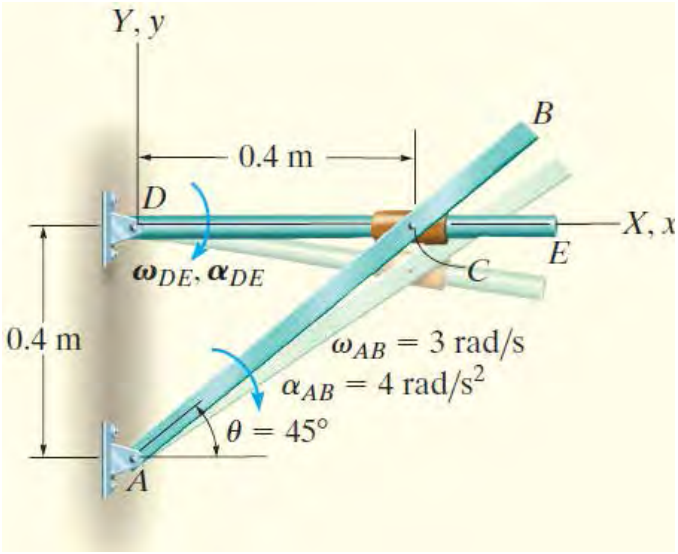
$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

دا ويکټور په انځور 16-33 کې دکربنی-کربنی شوي کربنی په توګه ښودل شوی دی. که چيرې اړتيا وي، دا کيدی شی د **I** ، **J** اجزاوو په توګه د X او Y محورونو پر اوږدو کې په ترتيب سره وښودلشی. د غاړکی سرعت او تعجيل د معلوماتو ځای پر ځای کولو په معادلې 1 او 2 ته او د کراس ضرب ارزوني له لارې موندل کيږي، کوم چې ترلاسه کوي

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\
&= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\
&= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\
&= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}
\end{aligned}$$

مثال 16.19



انځور 16-34

میله AB ، چې په انځور 16-34 کې ښودل شوی ده، د ساعت په جهت حرکت کوي، داسې چې زاویوي سرعت $w_{AB} = 3$ rad/s او زاویوي تعجیل $a_{AB} = 4$ rad/s² لري، کله چې $q = 45°$ وي. په دې لحظه کې د میله DE زاویوي حرکت ومومی. غاړکی په C کې د AB سره د پین پواسطه ټرلی ده او په میله DE باندې ښوییږي.

حل

کوآرډینیټ محورونه (Coordinate Axes) : د ثابت او حرکت کوونکي ریفرینس یا مرجع چوکاټونو مبدأ ځای په D ټکی کې موقعیت لري، انځور 16-34 . سربیره پر دې، د x ، y، z ریفرینس د میلې DE سره وصل او د ده سره ګرځي ترڅو د حلقې نسبي حرکت په اسانۍ سره تعقیب شي.

کینمتیک معادله (Kinematic Equation) :

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \quad (2)$$

ټول ویکټورونه به د **i** ، **j**، **k** اجزاوو په توګه څرګند شي.

حرکت د C نسبت خوځیدونکي مرجع ته	حرکت د خوځیدونکي مرجع یا ریفرینس
$\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4\mathbf{i}\}$ m	$\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$
$(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$	$\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$
$(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$	$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$
	$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$

د C حرکت (Motion of C). لکه څنګه چې حلقه په دایروي لاره د AC شعاع سره حرکت کوي، د هغې سرعت او تعجیل کیدي شي د معادلو 16-9 او 16-14 په کارولو سره وموندل شي

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{C/A}$$
$$= (-4\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) - (3)^2(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

د معلوماتو ځای پر ځای کولو سره په معادلو 1 او 2 کې، مونږ لرو

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(v_{C/D})_{xyz} = 1.2\ \text{m/s}$$
$$\omega_{DE} = 3\ \text{rad/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = -0.4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(a_{C/D})_{xyz} = 1.6\ \text{m/s}^2$$
$$\alpha_{DE} = -5\ \text{rad/s}^2 = 5\ \text{rad/s}^2 \curvearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 16.20

الوتکي A او B په ورته لوړوالی کې الوتنه کوي او د دوی حرکتونه په انځور 16-35 کې ښودل شوي دي. د A سرعت او تعجیل کوم چې د B پیلوټ لخوا اندازه کیږی وټاکی .

حل

کوآرډینیټ محورونه (Coordinate Axes) : لکه څنګه چې د A نسبي حرکت موندل د B پیلوټ په پرتله غوښتل شوي، د x ، y، z محورونه د الوتکې B سره وصل دي، انځور 16-35. په هغه لحظه کې چې په پام کې نیول کیږي، مبدأ B د ثابت X ، Y، Z چوکاټ د مبدا سره یو شان دی.

کینمتیک معادله (Kinematic Equation) :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \qquad (1)$$
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} \qquad (2)$$

د حرکت کوونکي ریفرینس حرکت : د **i** ، **j**، **k** اجزاوو په کارولو سره

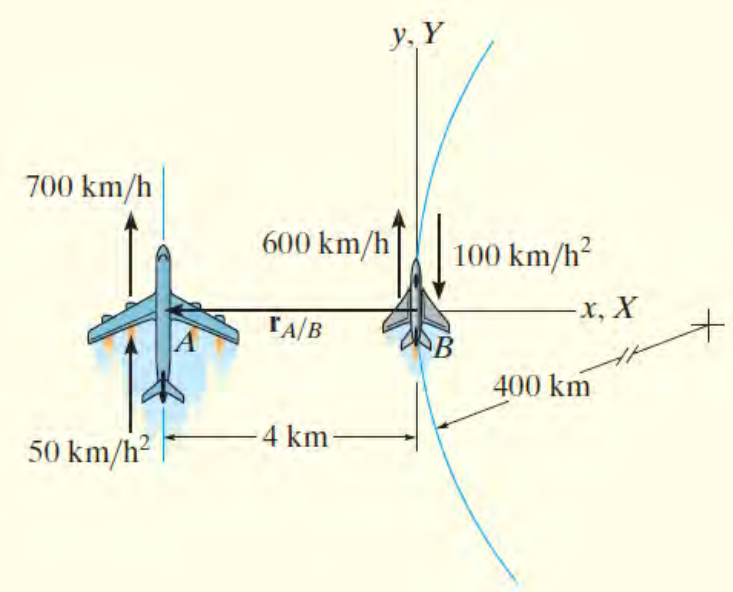
$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600\ \text{km/h}}{400\ \text{km}} = 1.5\ \text{rad/h}\ \curvearrowright \qquad \boldsymbol{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100\ \text{km/h}^2}{400\ \text{km}} = 0.25\ \text{rad/h}^2\ \curvearrowleft \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}^2$$



انځور 16-35

د *A* حرکت ، د حرکت کوونکي مرجع په پرتله

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\}\ \text{km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

د معلوماتو ځای پر ځای کولو سره په معادلو 1 او 2 کې، په پام کې نیولو سره چې

$\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\}$ km/h او $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\}$ km/h² دي، مونږ لرو

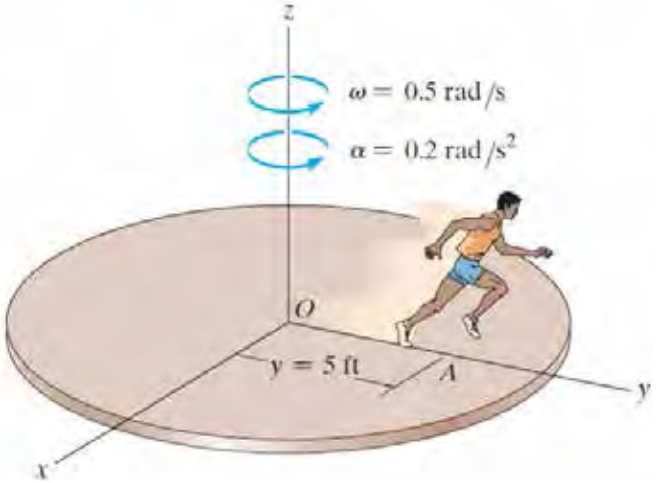
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$
$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$
$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\}\ \text{km/h} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$
$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$
$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : د دې پوښتنې حل باید د مثال 12.26 سره پرتله شي، چیرې چې لیدل کیږي چې $(v_{B/A})_{xyz} \neq (v_{A/B})_{xyz}$ او $(a_{B/A})_{xyz} \neq (a_{A/B})_{xyz}$

پوښتنې

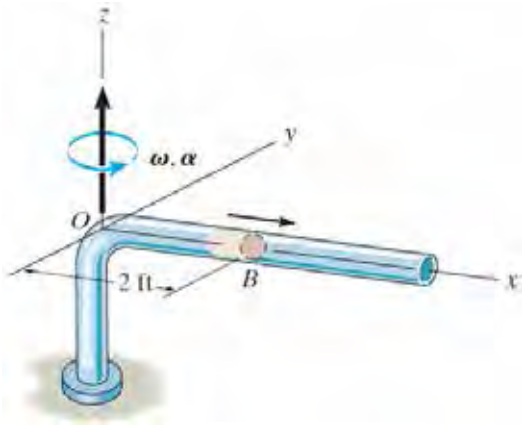
PROBLEMS پوښتنې

16-129. سړی په O کی په پلتفارم باندې ولاړ دی او د څنډې خوا ته ځي، کله چې هغه په A ځای کې وي، $y = 5$ ft، د هغه مرکز ثقل 2 ft/s سرعت او 3 ft/s² تعجیل لري، چې دواړه د پلتفارم په نسبت او د مثبت y محور په اوږدو کې اندازه کیږي. که پلتفارم ښودل شوي زاویې حرکتونو ولري، د هغه د ثقل د مرکز سرعت او تعجیل په دې شیبه کې معلوم کړئ.



پوښتنه 16-129

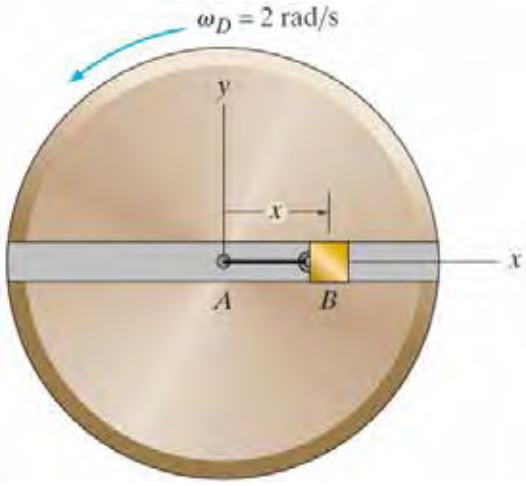
16-130. یو کوچنۍ اندازه توپ B په تیوب کې داسې څرخیږي چې په بنودل شوي شیبه کې د هغې سرعت 5 ft/s او تعجیل يې 3 ft/s² دی، چې نسبت تیوب ته اندازه کیږي. که تیوب په دی وخت کې یو زاویوي سرعت $w = 3$ rad/s او زاویوي تعجیل $a = 5$ rad/s² ولري، د توپ سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پوښتنه 16-130

16-131. سلایډر بلاک B ، چې په یوه رسۍ ټرل شوی دی، د افقي ګردي ډیسک په جرۍ کې حرکت کوي. که رسۍ د ډیسک په مرکز A کې د سوروي له لارې په $\dot{x} = -3$ m/s ثابت سرعت سره بنکته کش شي چې ډیسکته اندازه شوی، په دی شیبه کې د بلاک تعجیل معلوم کړئ کله چې $x = 0.1$ m وي. ډیسک یو ثابت زاویوي سرعت $w_D = 2$ rad/s لري.

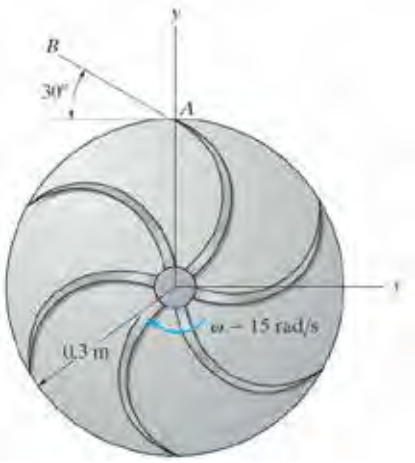
16-132*. د پوښتنې 16-131 حل لپاره فرض کړي ، چې په دې شیبه کې $x = 0.1$ m، $\dot{x} = -3$ m/s، $\ddot{x} = 1.25$ m/s²، $w_D = 2$ rad/s، او ډیسک زاویوي تجیل $a_D = -4$ rad/s² لري.



پوښتنې 16-131/132

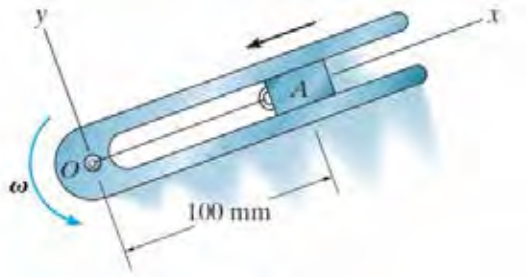
16-133. اوبه د سینټرفیوګل پمپ د امپیلر (impeller) څخه په 25 m/s سرعت او 30 m/s² تعجیل سره خارجیږي، چې دواړه د امپیلر د تیغې کربنې AB سره اندازه شوي دي. د اوبو د

ذري سرعت او تعجيل په A نټکی کی چې له امپيلر په دې لحظه کې خارجيږي، وټاکی. امپيلر په w=15 rad/s ثابت زاويوي سرعت سره ګرزی.



پوښتنه 16-133

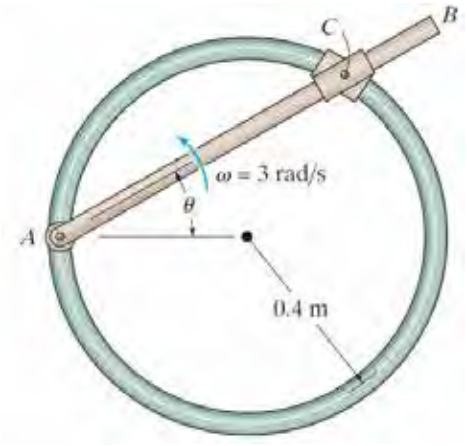
16-134. بلاک A ، چې د يو تار سره تړلی دی، د افقی شاخی راد له لارې حرکت کوي. په دې لحظه کې، تار د O څخه په 4 m/s^2 تعجيل او 2 m/s سرعت سره په ښکته لور کش کيږي. په دی لحظه کې د بلاک تعجيل محاسبه کړئ. راد په O باندی په w= 4 rad/s ثابت زاويوي سرعت سره ګرزی.



پوښتنه 16-134

16-135. راد AB په w= 3 rad/s ثابت زاويوي سرعت سره د ساعت په مخالف جهت ګرزی. د C ټکی سرعت، کوم چې په دوو حلقو موقعيت لری او زاويي موقعيت q = 30^o وي، وټاکی. کالر دوه پن تړلي ښويدونکي بلاکونه لري چې حرکت يی په دايروي لاره او راد AB باندې تړلی دی.

*6-136. راد AB د $w = 3$ rad/s ثابت زاويي سرعت سره د ساعت مخالف جهت کې دوران کوي. د C نقطې سرعت او تعجيل، کوم چې په دوه حلقو موقعيت لرى او کله چې زاويي موقعيت $q = 45^o$ وي، محاسبه کړئ. کالر دوه پن ټرلي بنويدونکي بلاکونه لري چې حرکت يې په دايروي لاره او راد AB باندې محدود شوي دي.



پوښتنې 16-135/136

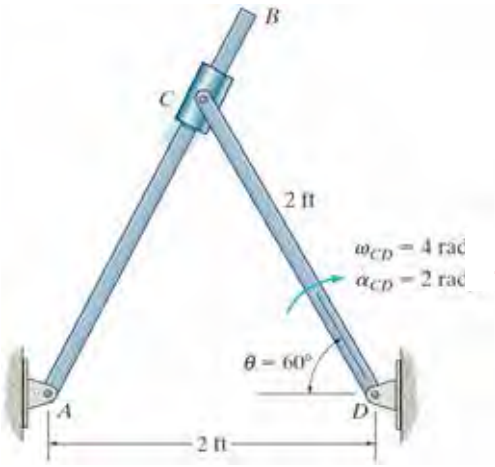
16-137. په دې لاندى بنودل شوي لحظه کې، AB راد $w_{AB} = 3$ rad/s زاويوي سرعت او $a_{AB} = 5$ rad/s^2 زاويوي تعجيل لري. په دى لحظه کى د راد CD زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل وټاکى. حلقه C د CD سره په پن ټرلى او په AB باندې بنويږي.



پوښتنه 16-137

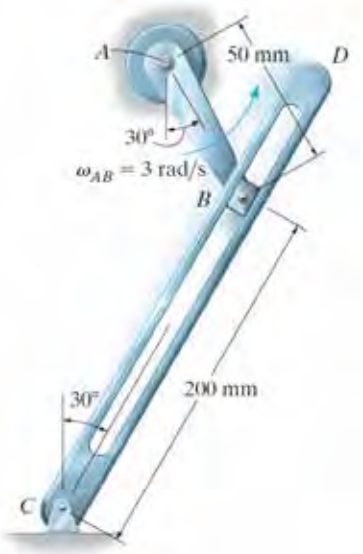
6-138 . په هغه لحظه کې چې $q = 60^o$ وى، ټروند CD د $w_{CD} = 4$ rad/s زاويوي

سرعت او $a_{CD} = 2\ \text{rad/s}^2$ زاويوي تعجيل لري. د AB راډ زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل په همدې لحظه کې محاسبه کړئ. حلقې C د DC سره په پن ټرلی او په AB باندې بنويږي.



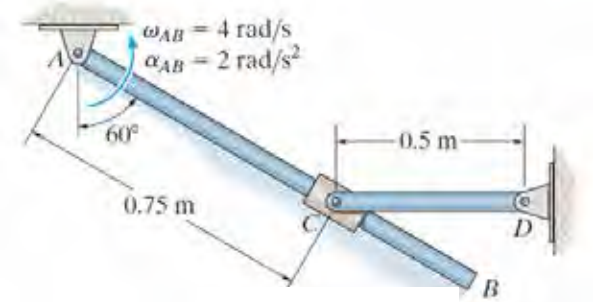
پوښتنه 16-138

16-139. په "چتک بيرته راستنېدونکي" ميکانيزم کې د بلاک B حرکت د CD غړي په جرې برخه کې محدود دی. که چيرې ABپه ثابت $w_{AB} = 3\ \text{rad/s}$ سره ګرزی، د CD غړي زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل په دې لحظه کې محاسبه کړئ.



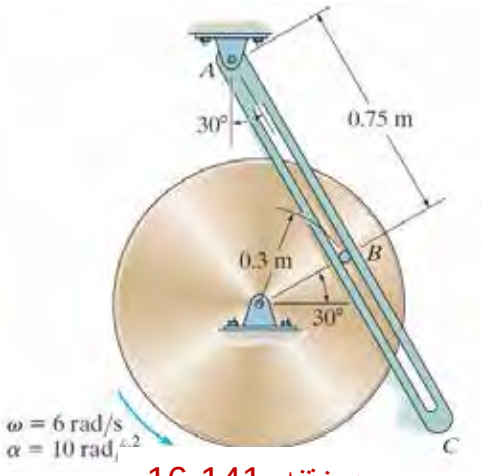
پوښتنه 16-139

*16-140 . په بنودل شوي لحظه کې، راډ AB ، $w_{AB} = 4$ rad/s زاويوي سرعت او $a_{AB} = 2\ \text{rad/s}^2$ زاويوي تعجيل لري. د راډ CD زاويوي سرعت او زاويوي تعجيل په دې لحظه کې محاسبه کړئ. حلقه C د راډ CD سره په پين ټرلی او په AB باندې په آزادانه توګه بنويږي.



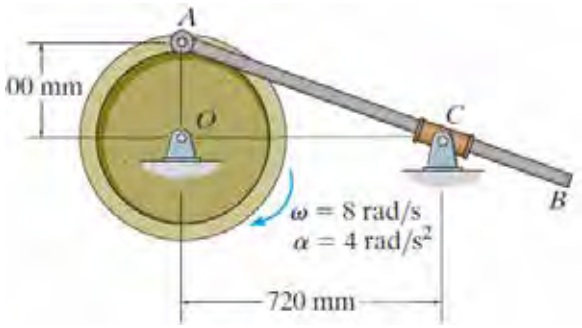
پوښتنه 16-140

16-141 . دا لاندې ډیسک په بنودل شوي زاویوي حرکت سره ګرزی. د جری دار تړوند AC زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دې لحظه کې محاسبه کړئ. په B کې میخ په ډیسک کلک تړل شوی دی.



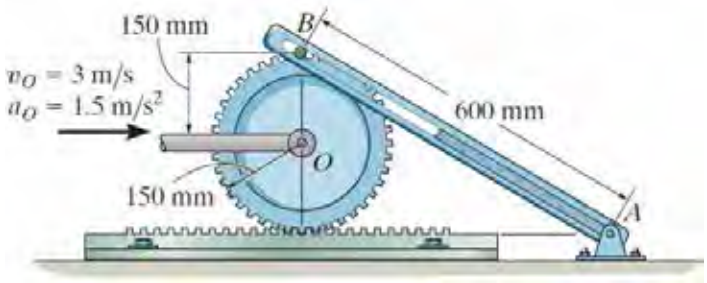
پوښتنه 16-141

16-142 .لاندی څرخ په ورکړل شوی زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل سره په دی لحظه کی ګرزی. د راډ زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دې لحظه کې محاسبه کړئ. راډ په بنویه حلقه کی په آزاده توګه بنویږي.



پوښتنه 16-142

16-143 .میخ B په ګیرباندی د تړوند AB په جری کی په آزاده توګه بنویږي. که چیرې د ګیر مرکز O د بنودل شوي سرعت او تعجیل سره حرکت کوي، د تړوند زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دی لحظه کې محاسبه کړئ.



پوښتنه 16-143

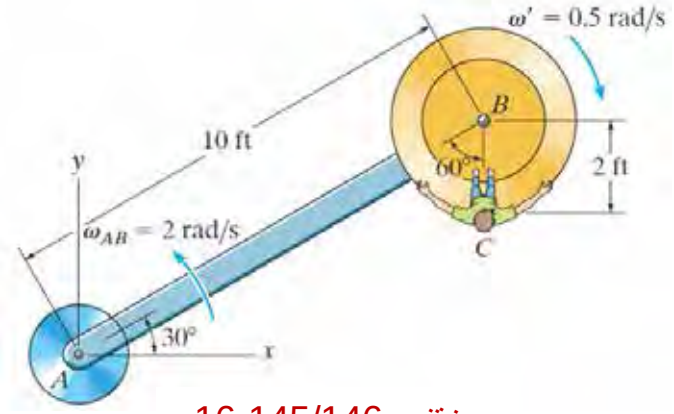
*16-144 . په یوه تفریحی پارک کې د یوه سواري لپاره یوه ګرزیدونکیی پلیټفارم P دی، کوم چې ثابت زاویوي سرعت w_P =1.5 rad/s لري، او څلور موټره C ، چې په پلیټفارم نصب شوي دي، یوثابت زاویوي سرعت $w_{C/P}$ = 2 rad/s نسبت پلیټفارم ته لری. سرعت او تعجیل په دې لحظه کې د یوه سواری په B کی محاسبه کړئ.



پوښتنه 16-144

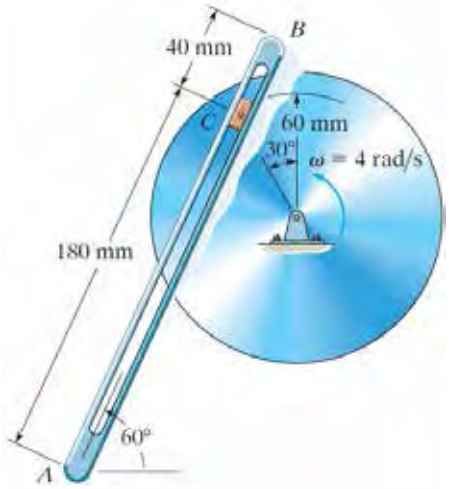
16-145 . په یوه تفریحی پارک کې د سواری لپاره یو ګرزیدونکی لاس AB دی چې ثابت زاویوي سرعت w_{AB} = 2 rad/s لري. موټر چې د لاس په پای کې نصب شوی دی، ثابت زاویوي سرعت $\dot{\omega}$ = {-0.5**k**} rad/s لري، چې د لاس په نسبت اندازه شوی. په دې لحظه کې، د مسافر سرعت او تعجیل په C حاسبه کړئ.

16-146 . په یوه تفریحی پارک کې د سواری لپاره یو ګرزیدونکی لاس AB دی چې زاویوي تعجیل a_{AB} = {1 k} rad/s^2 لري کله چې w_{AB} = {2k} rad/s په دې لحظه کې دي. همدارنګه، په دې لحظه کې، موټر چې د لاس په پای کې نصب شوی دی زاویوی تعجیل $\boldsymbol{a}$ = {-0.6**k**} rad/s^2 او زاویي سرعت $\dot{\omega}$ = {−0.5k} rad/s لري، چې د لاس په نسبت اندازه کیږي. دسواری سرعت او تعجیل په دی لحظه کې په C محاسبه کړئ.



پوښتنې 16-145/146

16-147 . که چیرې ښویدونکی بلاک C په ډیسک باندی کلک تړل شوی وي چې د ساعت مخالف ثابت زاویي سرعت 4 rad/s لري، د جری لرونکی لاس AB زاویوي سرعت او زاویوي تعجیل په دې لحظه کې محاسبه کړئ



پوښتنه 16-147

د فصل بیا کتنه

د فصل بیا کتنه	CHAPTER REVIEW
د سخت بدن سطحي حرکت (Rigid-Body Planar Motion) یو سخت بدن دري ډوله سطحي حرکتونه ترسره کوي : خوځیدل، ګرزیدل په ثابت محور، او عمومي سطحي حرکت	
خوځیدل (Translation) کله چې یو بدن مستقیم خطي خوځیدل ترسره کړي، نو د بدن ټولې ذرې د موازي او مستقیمو کربنو په اوږدو کې حرکت کوي. که چیرې دا لارې د ورته شعاع انحنأ ولري، نو بیا منحني خوځیدل رامنځته کیږي. که مور د یوې ذرې حرکت وپیژنو، نو د نورو ټولو ذرو حرکت هم پیژندل کیږي.	 Path of rectilinear translation  Path of curvilinear translation
د ثابت محور شاوخوا ګرزیدل (Rotation about a Fixed Axis) د دې ډول حرکت لپاره، ټولې ذرې په دائروي لارو حرکت کوي. په دې حالت کې، د بدن ټول کربنې یو شان زاویوي بې ځایه کېدنه، زاویوي سرعت، او زاویوي تعجیل تجربه کوي. کله چې د بدن زاویوي حرکت وپیژندل شي، نو د هرې ذرې سرعت چې د محور څخه د r په فاصله کې وي، تر لاسه کېدای شي. د هرې ذرې تعجیل دوی اجزاوی لري: 1. مماسی جزد سرعت په مقدار کې د بدلون حساب کوي. 2. عمودي جز د سرعت د جهت د بدلون برخه حسابه وی.	 Rotation about a fixed axis $\omega = d\theta/dt$ $\alpha = d\omega/dt$ $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ or $\omega = \omega_0 + \alpha_c t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$ Constant α_c $v = \omega r$ $a_t = \alpha r$ $a_n = \omega^2 r$

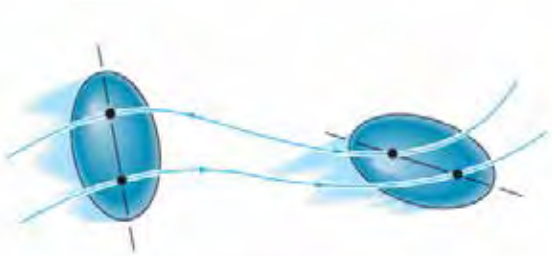
عمومي سطحي حرکت
(General Plane Motion)

کله چې يو جسم د عمومي سېحی حرکت تجربه کوي، دا په يو وخت کې هم خوځيدنه کړي او هم څرخېږي. د دې حرکت د تحليل لپاره څو لاری شتون لري.

د مطلق حرکت تحليل
(Absolute Motion Analysis)

که په يو جسم کی د يوه ټکی حرکت يا د يوې کرښې زاويي حرکت معلوم وي، نو امکان لري چې دا حرکت د بلې نقطې يا کرښې سره د مطلق حرکت تحليل له لاری اړيکه ورکړل شي. د دې لپاره، خطي موقعيت محورونه s يا زاويوي موقعيت محورونه q ټاکل کېږي (چی له يوې ثابتې نقطې يا کرښې څخه اندازه کېږي).

دغه موقعيت محورونه د جسم د هندسې په کارولو سره ترلاسه کېږي. د دې معادلې د وخت مشتق د سرعتونو يا زاويوي سرعتونو ترمنځ اړيکه څرګندوي. د وخت دوهم مشتق بيا د تعجيل يا زاويوي تعجيل اړيکه روښانه کوي.



General plane motion

نسبي حرکت دخوځيدونکيومحورونو په کارولو سره(*Relative Motion Using Translating Axes*)

عمومي سطحی حرکت د دوه نقطو A او B ترمنځ، چې په جسم کې موقعيت لري، د نسبي حرکت د تحليل په واسطه تحليل کېدای شي. دا طريقه حرکت په برخو ويشي: لومړی د ټاکل شوې مبدأ نقطې A خوځيدل، او بيا د جسم نسبي "څرخيدل" د نقطې A په شاوخوا کې، چې له خوځيدونکيو محورو څخه اندازه کېږي. څرنګه چې نسبي حرکت د اساسی يا مبدأ نقطې په شاوخوا کې د دايروي حرکت په توګه کتل کېږي، نو نقطه B به يو سرعت $\mathbf{v}_{B/A}$ ولري چې دايرې ته مماس وي. دا همدارنګه د تعجيل دوه جزه لري: مماسي تعجيل $(a_{B/A})_t$ او نارمل تعجيل $(a_{B/A})_n$. همدارنګه، دا درک کول مهم دي چې $\mathbf{a}_A$ او $\mathbf{a}_B$ به

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

مماسي او نارمل اجزاوی ولري که دغه ټکی په منحني لارو کې حرکت وکړي.

د صفر سرعت آني مرکز (*Instantaneous Center of Zero Velocity*)

که د مبدأ ټکی A د صفر سرعت په توګه وټاکل شي، نودنسبي سرعت معادله به په لاندی ډول شي:

$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$.

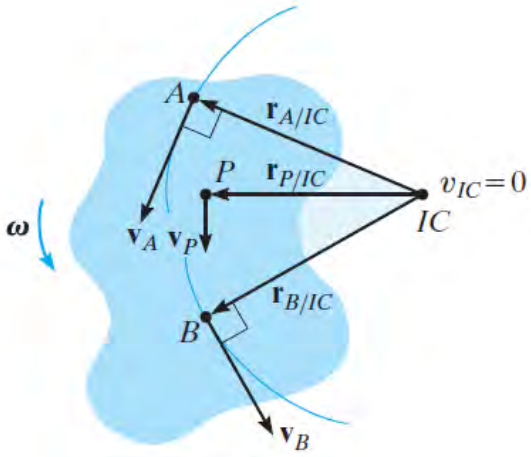
په دې حالت کې، حرکت داسې ښکاري لکه جسم چې د آني محور په شاوخوا کې وځرخي چې له A څخه تېرېږي.

د ګرزیدوحرکت آني مرکز (IC) د جسم په اړه په هغه صورت کې ټاکل کېدای شي که د جسم په دوو ټکیو کې د سرعتونو لوري معلوم وي، او یا که د یوه ټکی سرعت او زاویوي سرعت معلوم وي.

څرنګه چې شعاعي کرښه r به تل په هرسرعت عمود وي، نو IC به د دغو دوو شعاعود کرښو د تقاطع په ټکی کې وي. د دې مرکز د موقعیت اندازه کیدل د جسم له هندسي څخه ټاکل کېږي.

کله چې دا آني مرکز وموندل شي، نو د جسم په هر ټکی P کې سرعت د لاندې معادلې په واسطه ټاکل کېدای شي:

$v = \omega \cdot r$ ، چېرته چې r له IC څخه تر P پورې غزېدلې دی.



د نسبي حرکت تحلیل د څرخیدونکي محورونو په کارولو سره (*Relative Motion Using Rotating Axes*)

هغه پوښتنې چې په کې وصل ښوی غړي د یو او بل په وړاندې ښوییږي، یاهغه نقطې شاملې وي چې په یوه جسم کې موقعیت نلري، د نسبي حرکت تحلیل په واسطه چې د څرخیدونکي چوکاټ څخه ښودل کیږی، تحلیل کېدی شي.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

په دې تحلیل کې، د کوریاولیس تعجیل $(2\mathbf{W} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz})$ اصطلاح منځته راځي، چې دا د څرخیدونکي چوکاټ ځانګړې اغیزه څرګندوي.	

د بیا کتنې پوښتنې

د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

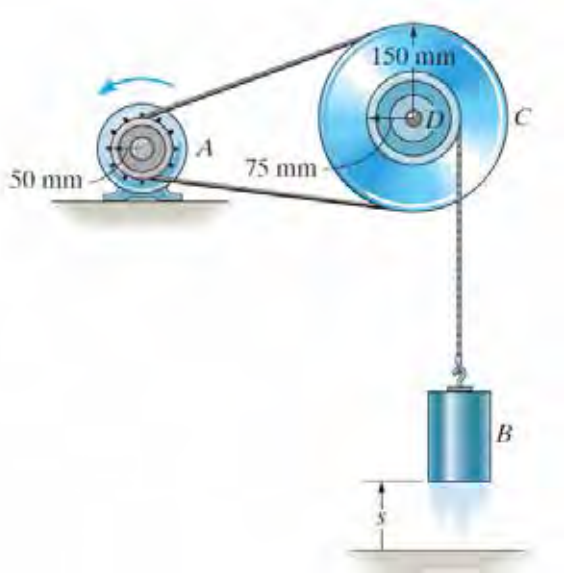
ب 16–1. د پورته کولو ګیر A لومړنی زاویوي سرعت 60 rad/s او د 1 ra/s^2 ثابت تعجیل لري. د 3 ثانیو په وخت کې د بلاک سرعت او تعجیل محاسبه کړئ کوم چې د ګیر B د مرکز لخوا پورته کیږي.



پوښتنه ب 16-1

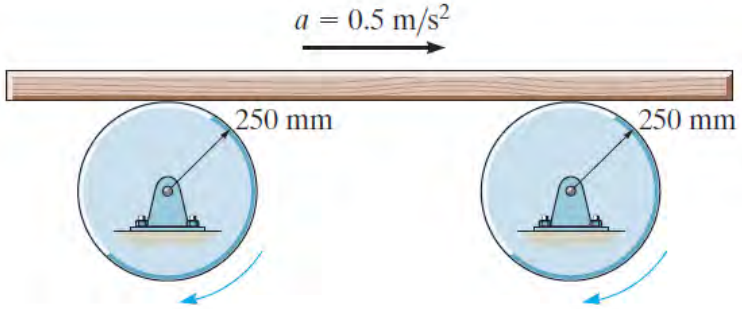
ب 16–2. دا لاندې پوښتنه په $(w_A)_0 = 3$ rad/s پیل کوو ، کله چې $q = 0$ ، $s = 0$، څرخکی A ته زاویوي تعجیل $a = (0.6q)$ rad/s^2 ورکړل شوی دي، چیرې چې q په ردینو

کې ده. د بلاک B سرعت محاسبه کړئ کله چې $s = 0.5$ m پورته شی. څرخکی یوه داخلي مرکز D لري چې د C سره ټرلی دی او له هغه سره ګرزی.



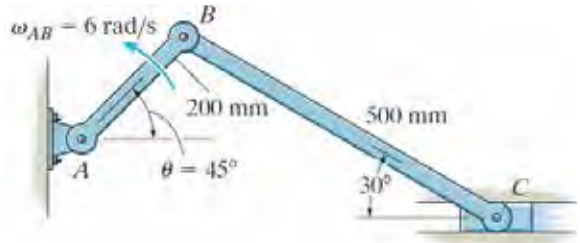
پوښتنه ب 16-2

ب 16–3. په ښودل شوي لحظه کې، تخته 0.5 m/s^2 تعجیل ښي لور ته لري، په داسې حال کې چې په همدې لحظه کې هغه ټکی چې د هر ډرم په بهرني محیط باندې دی 3 m/s^2 تعجیل لري. که تخته په ډرمونو باندې ونه ښویږي، د دې حرکت له امله يې سرعت محاسبه کړئ.



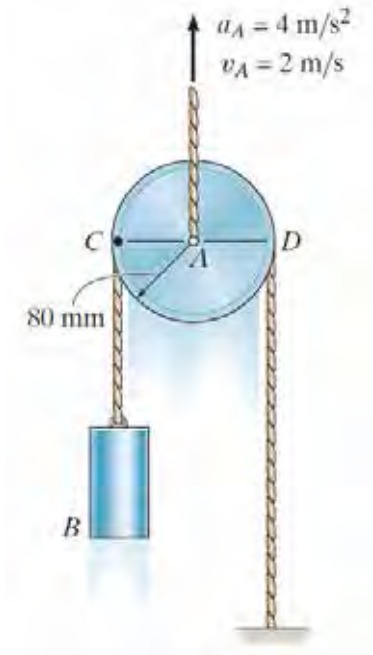
پوښتنه ب 16-3

ب 16–4. که راډ AB زاویوي سرعت $\omega_{AB} = 6$ rad/s ولري، د سلایډر بلاک C سرعت په هغه لحظه کې محاسبه کړئ.



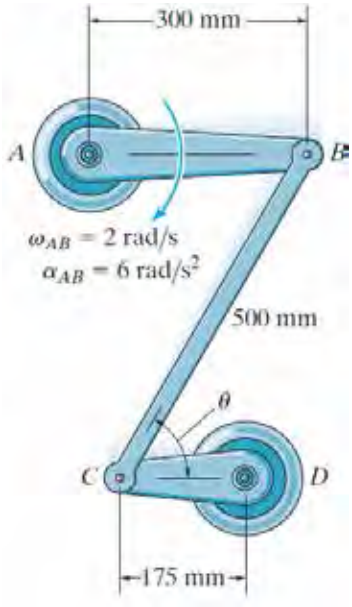
پوښتنه ب 16-4

ب 16–5. د څرخکی مرکز په عمودي ډول پورته کیږي چې د $4\ m/s^2$ تعجیل لري او په هغه لحظه کې يې سرعت $2\ m/s$ دی. که کیبل دڅرخکی په سطحه په باندې و نه ښویږی، د سیلندر B او د څرخکی په C ټکی کی تعجیل محاسبه کړئ.



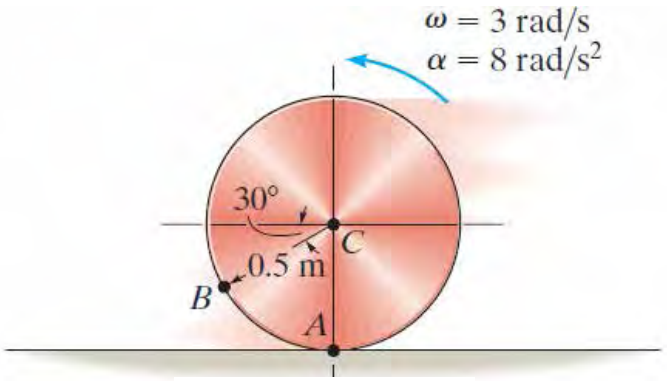
پوښتنه ب 16-5

ب 16–6. په ښودل شوي لحظه کې، ټرونډ AB زاویوي سرعت $w_{AB} = 2\ rad/s$ او زاویوي تعجیل $a_{AB} = 6\ rad/s^2$ لري. د پن C تعجیل او د ټرونډ CB زاویوي تعجیل په دې لحظه کې محاسبه کړئ، کله چې $q = 60^o$ وي.



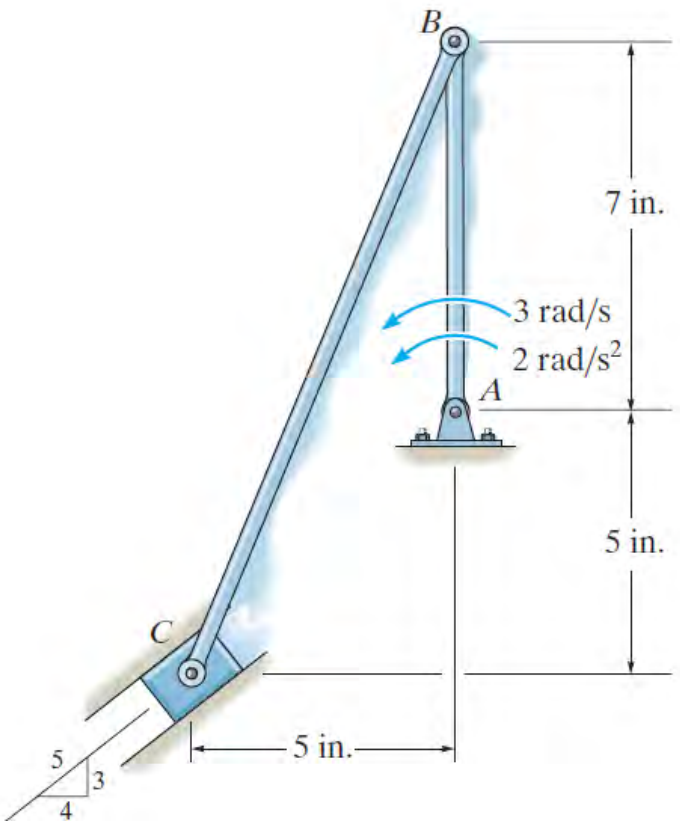
پوښتنه ب 16-6

ب 16–7. دا لاندی ښودل شوي ډیسک چپ لور ته حرکت کړي، او په هغه لحظه کې زاویوي تعجیل $a = 8\ \text{rad/s}^2$ او زاویوي سرعت $w = 3\ \text{rad/s}$ لري. که چیرې په A کی ښویدل ونه لري، د B ټکی تعجیل محاسبه کړئ.



پوښتنه ب 16-7

ب 16–8. په ښودل شوې لحظه کې، غړی AB ښودل شویی زاویوي حرکتونه لري. د ښویدونکی بلاک C سرعت او تعجیل په دې لحظه کې محاسبه کړئ.



پوښتنه ب 16-8

اولسم فصل

(CHAPTER 17)



موټرسایکلونه او نورې وسیلې ترسختو متحرکو بارونو لاندې راتلای شي. په دې فصل کې به مورږ وښیو چې د سطحې حرکت لپاره دغه بارونه څنګه ټاکل کیږي.

د کلک جسم سطحي کینمتیک:

قوه اوتعجیل

PLANAR KINEMATICS OF A RIGID BODY:

FORCE AND ACCELERATION

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

- د جسم د کتلې انرشیایی مؤمنت ټاکلو لپاره کارپدونکیو طریقومعرفي کول.
- د سطحی حرکت لپاره د یو متناظر سخت جسم د کینیټیک حرکت دمعادلو جوړول.
- د دې معادلو د کارونې بحث کول د هغو اجسامو لپاره چې لیږدی، په ثابت محورګرزی ، او عمومي سطحی حرکت لری.

17.1 د کتلې انرشیایی مؤمنټ (MASS MOMENT OF INTERTIA)

له دې امله چې یو جسم ځانګړې اندازه او انځور لري،د یوه نا متمرکزقوو سیستم (nonconcurrent) کولی شي جسم ته لیږدونه او هم ګرزیدنه سبب شی. د لیږد ونی اړخونه په دیارلسم (13) فصل کې څېړل شوي وو او د **F** = *m***a** معادلې له مخې تشریح کېږي. په راتلونکي برخه کې به وښودل شي چې د ګرزیدا اړخونه، چې د یوه مومینټ **M** له امله رامنځته کېږي، د **M** = *I***a** معادلې له مخې تشریح کېږي. په دې معادله کې "*I*" د کتلی انرشیایی مؤمنت په نوم یادیږي. دا ځانګړتیا د جسم د زاویې تعجیل (**M** = *I***a**) په وړاندې د مقاومت اندازه ده، لکه څنګه چې د کتلی اندازه د تعجیل (**F** = m**a**) په وړاندې د جسم د مقاومت اندازه ده.



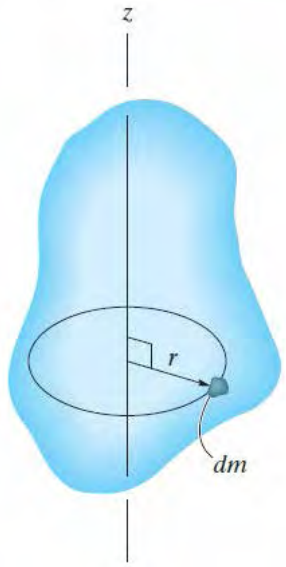
د دې ټراکټر په ماشین کې فلاېلویل د خپل دوران د محور په شاوخوا کې لوی انرشیایی مؤمنت لري. کله چې دا په حرکت کې راوستل شي، بندول به یې ستونزمن وي. دا ځانګړتیا د دې لامل کېږي چې ماشین بند نه شي (ستال ونه کړي) او پر ځای یې ثابته ځواکمنتیا وساتي.

انرشیایی مومینټ د یوه جسم لپاره داسې تعریفوو چې هغه عبارت دی په انټګرال د "دویم مومینټ"د ټولو کتلوي عناصرو (*dm*) د محور په شاوخوا کې چې جسم* تشکیلوی .

د ښکلې په توګه، انځور 17-1 ، په ***z*** محور د جسم انرشیایی مومینټ داسې تعریفېږي:

$$I = \int_m r^2\, dm \qquad (17–1)$$

دلته r د مؤمنت لاس د z محور څخه عمودي فاصله dm ته ده.
څرنګه چې په دې معادله کې r شامل دی، نو د انرشیایی مومینټ (I) ارزښت به د هر محور لپاره چې حساب شي، توپیر ولري.



د سطحی کینیټیک په مطالعې کې، اکثره وخت هغه محور انتخاب کېږي چې د جسم د کتلې له مرکز G څخه تېرېږي او تل د حرکت په سطحه عمودي وي. د دې محور په شاوخوا کې انرشیایی مومینټ به په (I_G) سمبول سره وښودل شی. څرنګه چې په معادله 1–7 کې r مربع دی، د کتلې انرشیایی مومینټ تل یو مثبت مقدار لري. د دې د اندازه کولو لپاره عام واحدونه $kg.\ m^2$ یا $slug.ft^2$ دي.

انځور 17-1

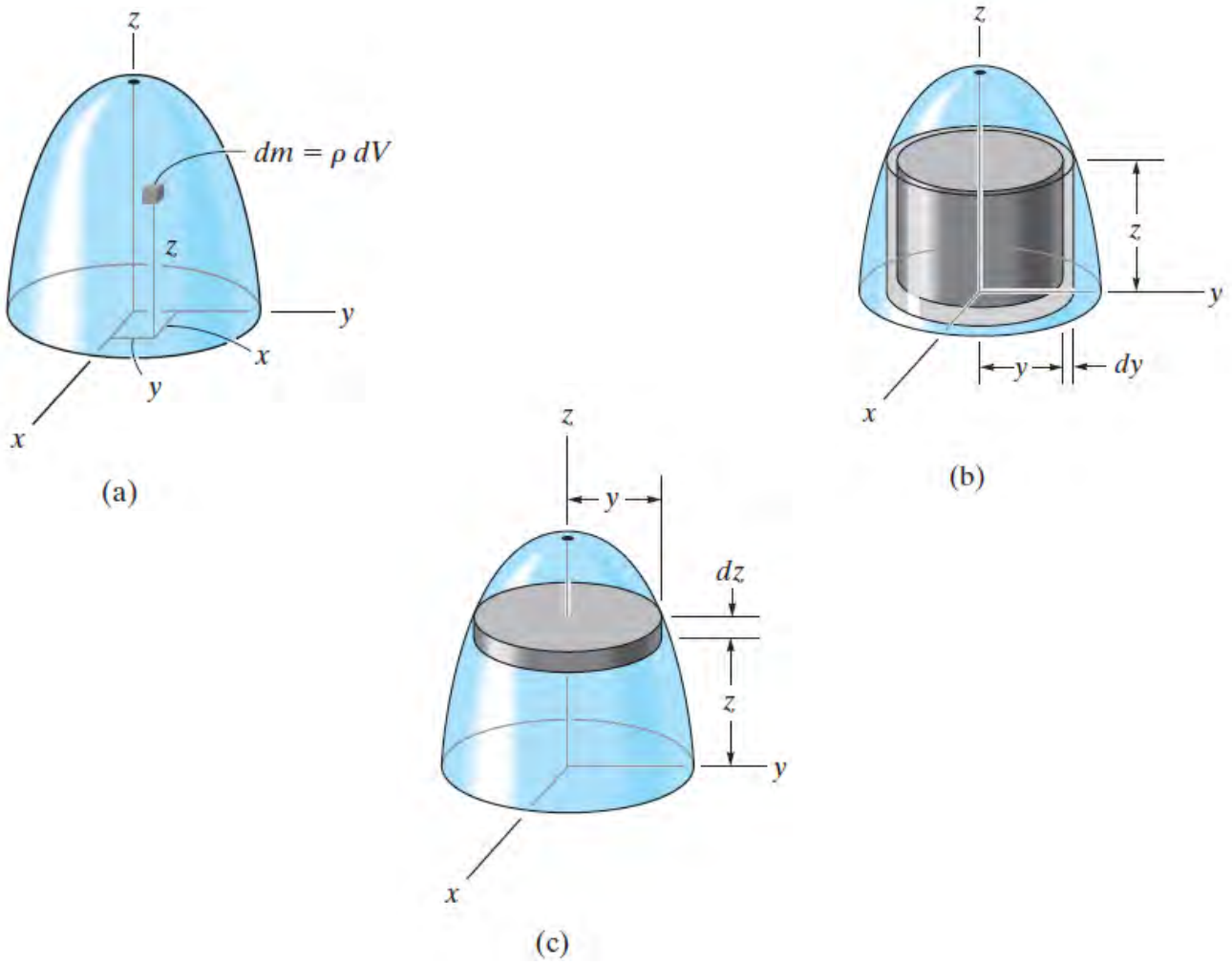
که جسم له داسې موادو جوړ وي چې د هغې کثافت متغیر وي، $\rho = \rho(x,y,z)$ ، نو د جسم د عنصري کتلې (dm) د هغې د کثافت او حجم له مخې داسې څرګندېږي: $dm=\rho\, dV$ ، انځور 17–2a.
د dm ارزښت په معادله 1–17 کې ځای پر ځای کولو سره، د جسم انرشیایی مومینټ د عناصرو د حجم د انټیګرال له لارې محاسبه کېږي، یعنې:

$$I = \int_V r^2 \rho\, dV \qquad (17–2)$$

* د جسم یوه بله ځانګړتیا چې د یوه محوری سیستم په اړه د جسم د کتلی تناظروالی اندازه کوي، د انرشیا ضرب نومېږي. دا ځانګړتیا د جسم د دري بعدي حرکت لپاره کارول کېږي او په (21) فصل کې به پرې بحث وشي

که r ثابت وي، نو دا اصطلاح له انټیګرال څخه بهر کېدای شي، او بیا انټیګرال یوازې د هندسې تابع کېږي.

$$I = \rho \int_V r^2\, dV \qquad (17–3)$$



انځور 17-2

کله چې د انټګریشن لپاره غوره شوی حجم دعنصر په ټولو درېیو لوریو کې ډېر کوچني (انفینیتسمال) ابعاد ولري، لکه په انځور 17-2a کې، نو د بدن د انرشیایی مومنت باید د "درې اړخیزه انټګریشن" په کارولو سره وموندل شي. مګر، د هغو اجسامو لپاره چې د یوې محور په اړه متناظروالی ولري، لکه په انځور 17-2 کې، د انټګریشن پروسه یوه *انټګریشن* ته ساده کېدای شي. دلته د شیل عنصر (shell element)، لکه په انځور 17-2b کې، یا د ډیسک عنصر، لکه په انځور 17-2c کې، په ډیرې ټوګه د دې موخې لپاره کارول کېږي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

انرشیایی مومینټ د انټیګرال له لارې ترلاسه کولو لپاره، موږ یوازې هغه متناظر اجسامو ته پام کوو چې حجم یې د یوه منحني د تاویدو له امله په یوه محور سره تولید شوی وي، لکه څنګه چې په انځور 17–2a کې ښودل شوی. دوه ډوله تفاضلي عناصر په لاندې ډول انتخاب کېدای شي.

شیل عنصر (Shell Element)

- که چیرې د شیل عنصر چې لوړوالی z ، شعاع $r = y$، او پلنوالی dy لري انتخاب شي، لکه څنګه چې په انځور 17–2b کې ښودل شوی، نو حجم به یې $dV = (2\pi y)(z)dy$ وي .
- دا عنصر په معادله 2–17 یا 3–17کې د جسم د انرشیایی مومینټ I_z د z محور په شاوخوا کې د ټاکلو لپاره کارول کېدای شي، ځکه چې ټول عنصر د خپل "نرۍ والي" له امله د z محور څخه په یو شان عمودي $r = y$ کې پروت دی، (مثال 171 وګورئ).
- د بیلګې په توګه 17.1وګورئ.

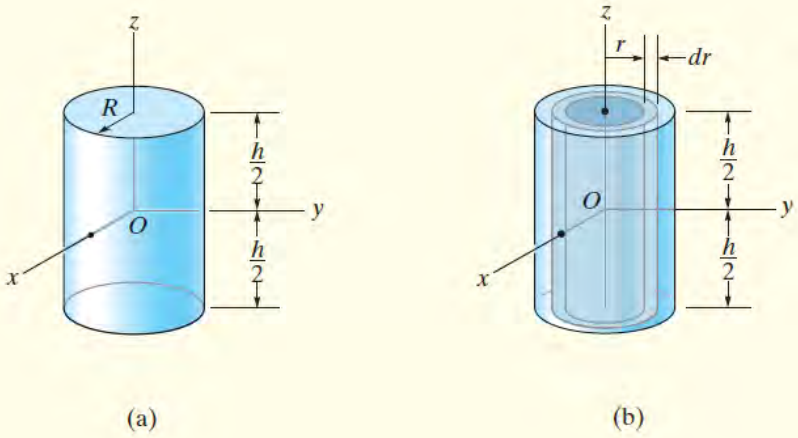
د ډیسک عنصر (Desk Element).

- که چیرې یود ډیسک عنصر چې شعاع یې y او ضخامت یې dz وي انتخاب شي، لکه څنګه چې په انځور 17-2cکې ښودل شوی، نو حجم به $dV = (\pi y^2)dz$ وي.
- دا عنصر په شعاعي لوري کې محدود دی، او له همدې امله د دې برخې ټولې برخې د z محور څخه په یو شان شعاعي فاصله r کې پراته نه دي. له دې امله، معادله17-2 معادله یا 3–17نه شي کارول کېدای چې I_z په مستقیم ډول وټاکل شي. پر ځای یې د انټیګرال ترسره کولو لپاره، دا لومړی اړینه ده چې د عنصر انرشیایی مومینټ د z محور په شاوخوا کې وټاکل شي او بیا دې پایلې انټیګرال وشي، مثال 17.2وګورئ .

مثالونه

مثال 17.1

په انځور 17-3a کی د بنودل شوي سلندر انرشیایی مؤمنت محور z ته و ټاکی، د موادو غلظت r ثابت دی.



انځور 17-3

حل

شیل عنصر (Shell Element). دغه پوښتنه به د شیل عنصر په کارولو سره په یوه انټګریشن حل کیدی شي، انځور 17-3b و ګوری. د عنصر حجم دی $dV = (2\pi r)(h)\,dr$، نو د دې کتله $dm = \rho\, dV = \rho(2\pi h r\, dr)$ ده. له دې امله، چې ټول عنصر د z محور څخه په یوه ورته فاصله r کې موقعیت لري، د عنصر انرشیایی مؤمنت عبارت دي په

$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3\, dr$$

په ټول سلندر د دی انټیګرال نیسو، دا لاندی په لاس راځي

$$I_z = \int_m r^2\, dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\, dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

د سلندر کتله عبارت ده په

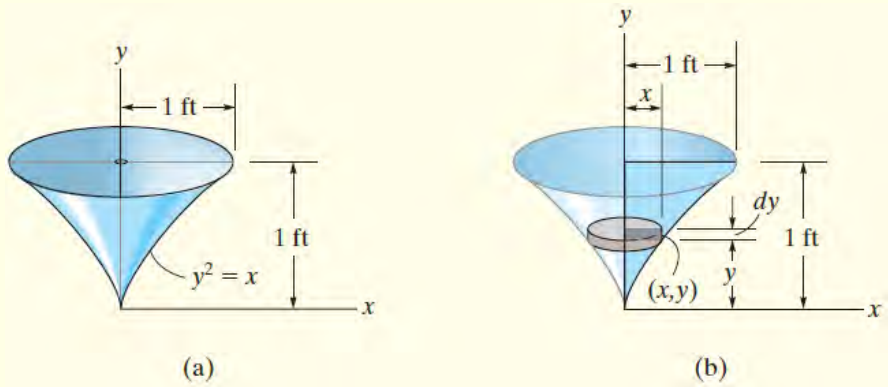
$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\, dr = \rho\pi h R^2$$

او نو

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 17.2

که د مواده غلظت $5\ \text{slug/ft}^3$ وی، انرشیایی مؤمنت د جامد جسم چې په انځور 17-4a کی ښودل شوي y محورته و ټاکي.



انځور 17-4

حل

ډیسک عنصر (Desk Element). د انرشیایی مؤمنت محاسبه به د ډیسک عنصر په کارولو سره وشي، چې په انځور 17-4b کې ښودل شوی دی. دلته، عنصر په یوه اختیاری نقطه (x, y)کې منحنی قطع کوي او کتله یې عبارت ده په

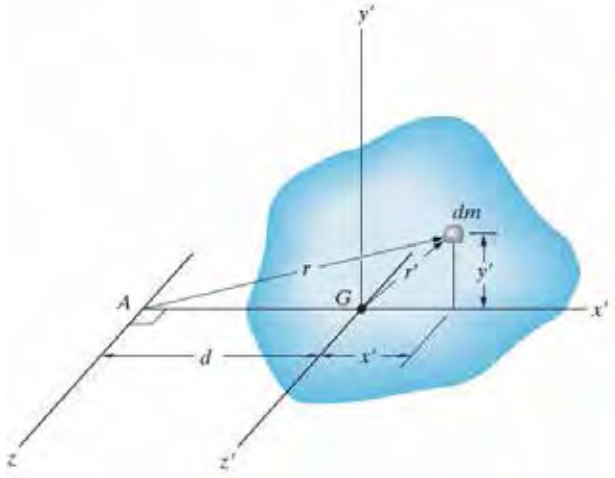
$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

سره له دې چې د عنصر ټولې برخې د y محور څخه په ورته فاصله کې موقعیت نه لري، بیا هم ممکنه ده چې د عنصر انرشیایی مؤمنت dI_y د y په محورمحاسبه شي. په پخواني مثال کې دا ښودل شوي وو چې د سیلنډر انرشیایی مؤمنت د هغې د اوږده محور په اړه $I = \frac{1}{2} mR^2$ دی، چیرې چې m او R د سیلنډر کتله او شعاع دي. له دې امله چې لوړوالی په دې فورمول کې په نظر کی نه دی نیول شوی، ډیسک کولی شي د سیلنډر په توګه درک شي. له دې امله، په انځور 17-4b کې د ډیسک عنصر لپاره، موږ لرو

$$dI_y = \tfrac{1}{2}(dm)x^2 = \tfrac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

ارزښتونه د $x = y^2$ ، $r = 5\ \text{slug/ft}^3$ ځای پرځای کوو، او د y په اړه انټیګریشن ترسره کوو، له $y = 0$ څخه تر $y = 1$ ft پورې، موږ لرو:

$$I_y = \frac{\pi(5\ \text{slug/ft}^3)}{2}\int_0^{1\ \text{ft}} x^4\, dy = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^{1\ \text{ft}} y^8\, dy = 0.873\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2 \quad \textit{Ans.}$$



انځور 17-5

د موازي محور قضيه (Parallel-Axis Theorem). که د بدن انرشيايی مؤمنت د هغې د کتلی د مرکز تېرېدونکي محور ته معلوم وي، نو د **موازي محورقضيی** په کارولو سره کولی شو د هر بل موازي محور ته يی انرشيايی مؤمنت محاسبه کړو. دغه قضيه کيدی شی د بدن په پام کې نيولو سره چې په انځور 17-5کې ښودل شوی، ترلاسه شي. دلته، د $\dot{z}$ محور د کتلی مرکز G له لارې تېرېږي، پداسې حال کې چې اړوند موازي z محور په يوه ثابته فاصله d کې موقعيت لري. د کتلی د تفاضلي (differential) عنصر dm انتخاب کوو، چې په نقطه $(\dot{x}, \dot{y})$ کې موقعيت لري، او د فيثاغورث قضيی په کارولو سره، $r^2 = (d + \dot{x})^2 + \dot{y}^2$، مورِ کولی شو د بدن انرشيايی مؤمنت د z محور په اړه په دې توګه څرګند کړو

$$I = \int_m r^2\,dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\,dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\,dm + 2d\int_m x'\,dm + d^2\int_m dm$$

څرنګه چې $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ دی، لومړی انتګريشن I_G ته اشاره کوي. دويم انتګريشن صفر ته برابر ده، ځکه چې د z محور د بدن د کتلی مرکز له لارې تېرېږي، يعنې $\int x\,dm = \bar{x}m = 0$ ځکه چې $\bar{x} = 0$ دی. په پای کې، درېيم انتګريشن د بدن ټولی کتلې m ته اشاره کوي. له همدې امله، د z محور په اړه انرشيايی مؤمنت داسې ليکل کيدی شي

$$\boxed{I = I_G + md^2} \qquad (17\text{–}4)$$

چیرې چې

I_G = انرشیایی مؤمنت په $\dot{z}$ محور چې د کتلی له مرکز G له څخه تېرېږي

m = د بدن کتله

d = د موازي z او $\dot{z}$ محورونو ترمنځ عمودي فاصله

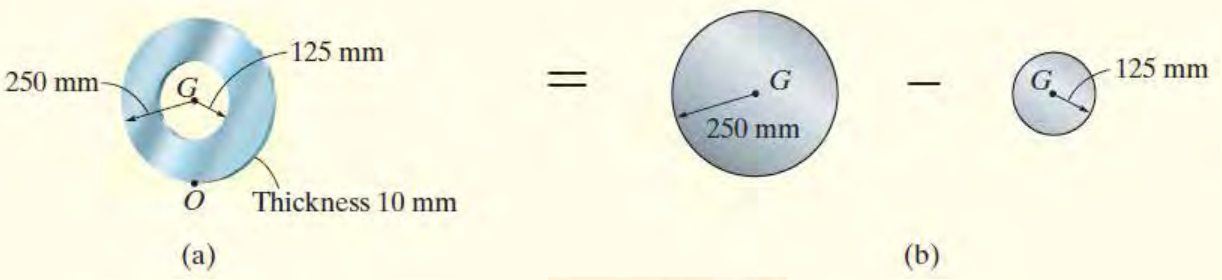
د جایریشن شعاع (Radius of Gyration). کله ناکله، د بدن د انرشیایی مؤمنت په اړه د مشخص شویو محورونو څخه په لاسوندونو کې د جایریشن د شعاع ، k، په کارولو سره راپور ورکول کیږي. دا یوه هندسي ځانګړتیا ده چې د اوږدوالي واحدونه لري. کله چې دا او د بدن کتله m معلومه وي، د بدن انرشیایی مؤمنت د لاندې معادلې په کارولو سره محاسبه کیږي:

$$I = mk^2 \quad \text{or} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad (17–5)$$

د k تعریف په دې فورمول کې او r په معادله $dI = r^2\, dm$ کې ورته والی ته پام وکړئ، چې د بدن د یوه عنصر د کتلی dm انرشیایی مؤمنت تعریف کوي یوه محور ته.

ترکیبي جسمونه (Composite Bodies). که یو بدن د څو ساده شکلونو څخه جوړ شوی وي لکه ډیسکونه، کرې (spheres)، او میلې، د بدن د انرشیایی مؤمنت محاسبه په هر محور کې د دې ټولو ترکیبي شکلونو د انرشیایی مؤمنت د جمعی کیدو په توګه د محور په اړه محاسبه کیدی شي. الجبري جمع کول اړین دي ځکه چې د ترکیبي هغه برخې باید د منفي مقدار په توګه حساب شي که چیرې دا مخکې له دې د بلې برخې د یوی ټوټی په توګه حساب شوې وي – د مثال په توګه، یو "سوری" چې له یوې پوره تختی څخه لېرې شوی وي. د موازي محور قضیې د محاسبې لپاره اړتیا ده که چیرې د هر ترکیبي برخې د کتلی مرکز د هغه محور په اوږدو نه وي چې د انرشیایی مؤمنت لپاره ټاکل شوی دی. نو د محاسبې لپاره، $I = \Sigma (I_G + md^2)$ دی. دلته I_G د هرې ترکیبي برخې لپاره د انټګریشن له لارې محاسبه کیږي، یا د ساده شکلونو لپاره لکه میله او ډیسکونه، چې کولی شي له یوه جدول څخه ترلاسه شي، لکه د دې کتاب د اخرۍ پوښ په داخلی مخ باندی.

مثال 17.3 که چيرې په انځور 17-6a کې ښودل شوی تخته 8000 kg/m³ کثافت او 10 mm ضخامت ولري، د دې انرشيايی مؤمنت محاسبه کړئ هغه محور ته چې په صفحه عمود وی او له O ټکی څخه تېرېږي.



انځور 17-6

حل

تخته له دوو ترکيبي برخو څخه جوړه ده، د 250 ملي متري شعاع ډيسک منفي 125 ملي متري شعاع ډيسک، انځور 17-6b . د O په اړه د انرشيايی مؤمنت محاسبه کولای شو د دې برخو څخه د هر يوه د انرشيايی مؤمنت د O په اړه محاسبه کولو وروسته، بيا يې الجبري جمع کول. محاسبات د موازي محور قاعدې په کارولو سره ترسره کيږي، چې د دې کتاب د پای پوښ په داخل کی ورکړل شوی، معلومات سره يو ځای کيږي.

ډيسک (Disk). د ډيسک د انرشيايی مؤمنت مرکزي محور ته چې د ډيسک په سطحه عمودي دی، $I_G = \frac{1}{2} mr^2$ ده. د ډيسک کتلی مرکز د O نقطې څخه 0.25 متره فاصله لري. له دې امله

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\ \text{kg/m}^3\,[\pi(0.25\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 15.71\ \text{kg}$$

$$(I_d)_O = \tfrac{1}{2} m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 + (15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

سوروي (Hole). د 125 ملي متري شعاع ډيسک (سوروي) لپاره، موږ لرو

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3\,[\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.927\ \text{kg}$$

$$(I_h)_O = \tfrac{1}{2} m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(3.927\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.927\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

د تختې انرشیایی مؤمنت په ټکی O کی عبارت دی په

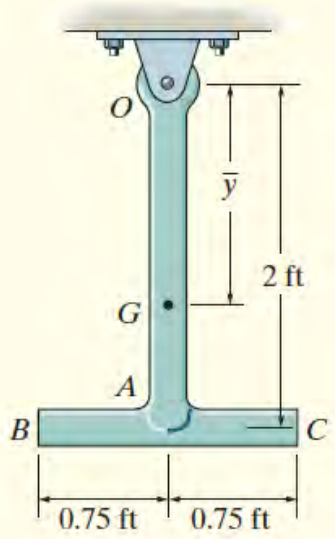
$$\begin{aligned} I_O &= (I_d)_O - (I_h)_O \\ &= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \\ &= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$ *Ans.*

مثال 17.4

په انځور 17-7 کې ښودل شوي پینډول په O کې د پین په واسطه ځړول شوی دی او له دوو نریو میلو څخه جوړ شوی دی. د OA میله 10 پونډه تول لري، اود BC میله 8 پونډه تول لري. د پینډول د انرشیایی مؤمنت محور ته محاسبه کړئ چې تیریږي له:

(الف) د O ټکی نه، او

(ب) د پینډول د کتلی مرکز G نه .



انځور 17-7

حل

برخه (الف). د کتاب د څټ پوښ داخلي برخه کې ورکړل شوي جدول په کارولو سره، د OA میلې د یوه محور ته چې د صفحې ته عمودي دی او د میلې د O ټکی نه تیریږي، انرشیایی مؤمنت یې عبارت دی:

$$(I_{OA})_O = \tfrac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(2\ \text{ft})^2 = 0.414\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$$

همدا ارزښت ترلاسه کیدی شي کله چې $I_G = {}^1/_{12}\ ml^2$ او د موازي محور قضیه و کاروو.

$$\begin{aligned} (I_{OA})_O &= \tfrac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(2\ \text{ft})^2 + \left(\frac{10\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(1\ \text{ft})^2 \\ &= 0.414\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2 \end{aligned}$$

د میلی BC لپاره موږ لرو

$$(I_{BC})_O = \tfrac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{8\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.5\text{ ft})^2 + \left(\frac{8\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2$$
$$= 1.040\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

انرشیایی مؤمنت د پنډولم په O داسی کیږي

$$I_O = 0.414 + 1.040 = 1.454 = 1.45\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 \qquad Ans.$$

برخه (ب). د کتلی مرکز G به د O ټکی په پرتله موقعیت لري. که دا فاصله y فرض کړو، شکل 17–7، او د کتلی د مرکز د ټاکلو لپاره فورمول وکاروو، موږ لرو:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(8/32.2)}{(10/32.2) + (8/32.2)} = 1.444\text{ ft}$$

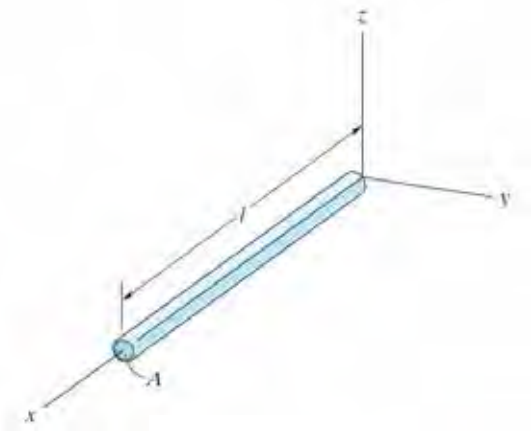
د انرشیایی مؤمنت I_G په ورته ډول موندل کیدی شي لکه څنګه چې I_O وموندل شو، چې د موازي محورو قضیه په پرله پسې توګه پلي کولو سره د میلو OA او BC د انرشیایی مؤمنت G ته انتقالول کیږی. په هر حال، یوه مستقیمه حل لار دا ده چی د I_O پایله وکارول شي، یعنې:

$$I_O = I_G + md^2; \qquad 1.454\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 = I_G + \left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.444\text{ ft})^2$$
$$I_G = 0.288\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 \qquad Ans.$$

PROBLEMS

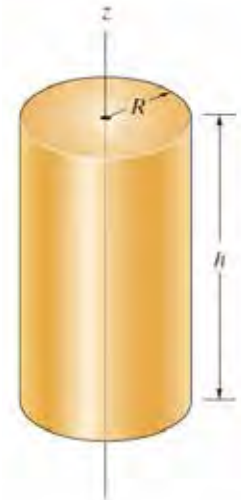
پوښتنې

17-1 . د نرۍ ډنډې انرشیایی مؤمنت I_y وټاکئ. د ډنډې کثافت ρ او د غوڅی برخې ساحه A یې ثابت دی. ددی پوښتنی پایله د ډنډې د کتلی m په توګه څرګنده کړئ.



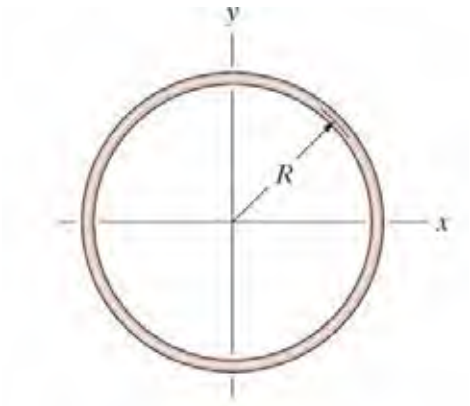
پ 17-1

17-2 . دا لاندی جامد سلنډر بهرنی شعاع R، لوړوالی h لري، او له داسې مواد جوړ شوي چې کثافت یې د مرکز څخه د $\rho = k + ar^2$ په توګه توپیر لري، چیرې چې k او a ثابت دي. د سلنډرکتله او په z محور انرشیایی مؤمنت وټاکئ.



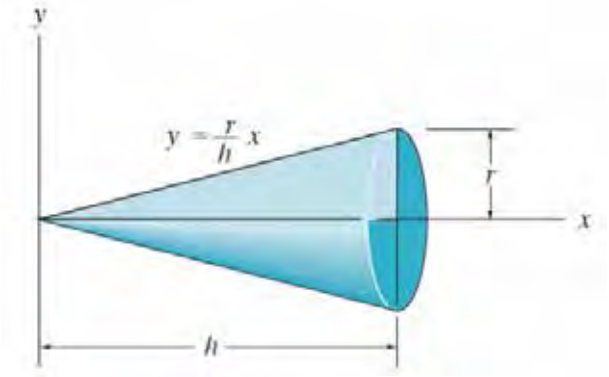
پ 17-2

17-3 . د نري حلقې په z محور انرشیایی مؤمنت وټاکئ. حلقه د m کتله لري.



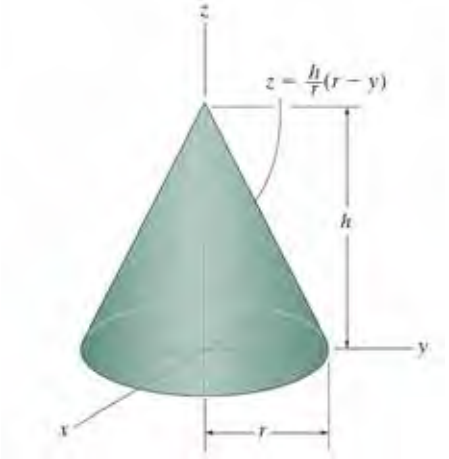
پ 17-3

*17-4. دا لاندی ښودل شوي مخروط د سیوري شوي سیمې په ګرځولو سره د x محور په شا و خوا جوړ شوی دی. انرشیایی مؤمنت I_x وټاکئ او پایله د مخروط د ټولې کتلې m په توګه څرګنده کړئ. د مخروط ثابت کثافت ρ دي.



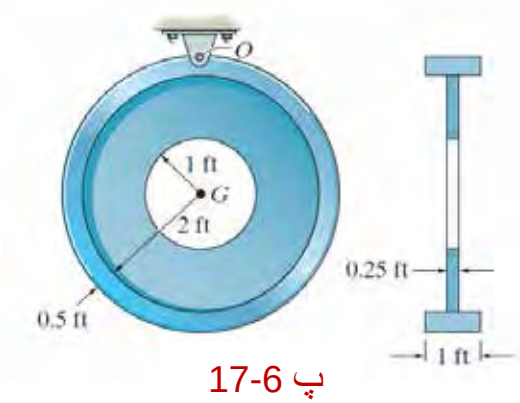
پ 17-4

17-5. دا لاندی مخروط چې د سیوري شوي سیمې د څرخیدو له لارې د z محور شاوخوا جوړه شوي دي، په z محور یې انرشیایی مؤمنت وټاکئ. د موادو ټول کثافت ρ دی. پایله د مخروط د کتلې m په توګه څرګنده کړئ.



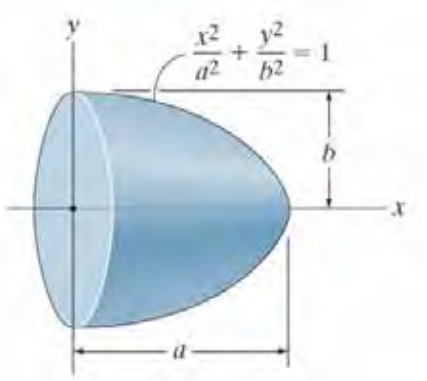
پ 17-5

17-6. د بنودل شوي اسامبلۍ انرشیایی مؤمنت د داسې محور شاوخوا سره وتاکئ چې پانې ته عمودي وي او د O ټکی څخه تیریږي. مواد ځانګړي تول $g = 90\ \text{lb/ft}^3$ ، لري.



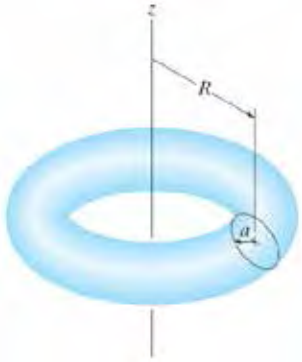
پ 17-6

17-7. د نیمه ایلیپسایډ (Semi Ellipsoid) په x محور انرشیایی مؤمنت وتاکئ او پایله د نیمه ایلیپسایډ کتلې m په توګه څرګنده کړئ. مواد ثابت کثافت ρ لري.



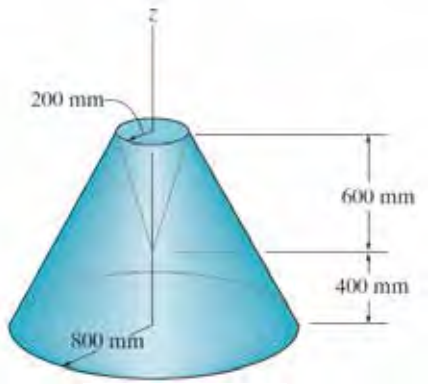
پ 17-7

17-8. د بنودل شوي ټورس (torus) د z محور شاوخوا انرشیایی مؤمنت وتاکئ. د ټورس کتله m او کثافت ρ ثابت دی. وړاندیز: د شیل عنصر وکاروئ.



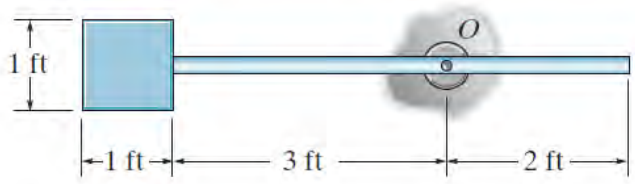
پ 17-8

17-9. د مخروط د پرې شوي برخې د z محور شاوخوا انرشیایی مؤمنت وټاکئ، چې مخروطی ډیپریشن لري. د موادو کثافت د $\rho = 200\ kg/m^3$ دي.



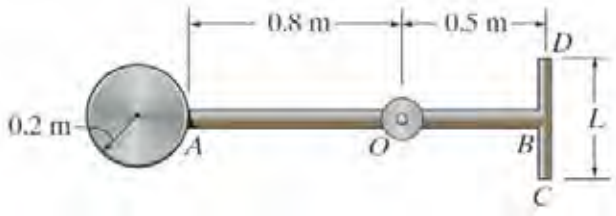
پ 17-9

17-10. دا لاندی پنډولم یوه تخته لري چې تول یې 12 lb دی او یوه نری ډنډه چې وزن یې 4 lb دی. د پنډولم په هغه محور چې د O ټکی نه تیریږی او په صفحه عمود دی د جایریشن شعاع وټاکئ.



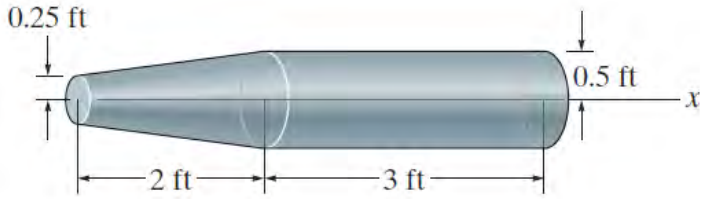
پ 17-10

17-11.دا لاندی پنډولم 2 kg ډیسک او AB او DC نریو ډنډو څخه جوړ شوی چې په هر واحد اوږدوالی یې 2 kg/m کتله لری. د DC اوږدوالی L داسې وټاکئ چې د کتلی مرکز په بیرینګ O کی شی. او هم د اسامبلی انرشیایی مؤمنت هغه محورته، چې پانې ته عمود او د O څخه تیریږي، وټاکئ.



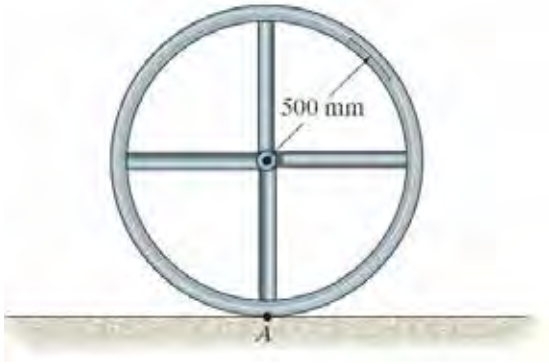
پ 17-11

*17-12. د ډک فولادي اسامبلۍ انرشیایی مؤمنت د x محور ته وټاکئ. فولاد ځانګړی تول g_{st} لري = 490 lb/ft^3.



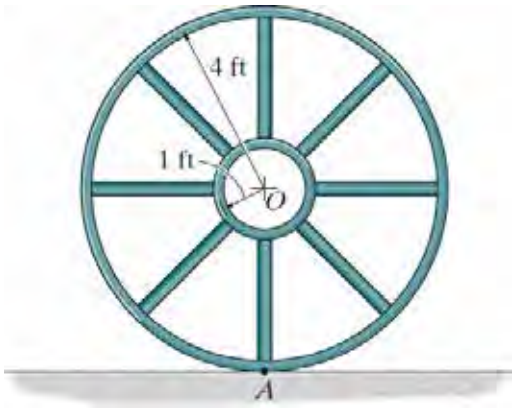
پ 17-12

17-13. څرخ د نرۍ حلقې څخه جوړ شوی چې کتله یې 10 kgده، او څلور شاخونه چې هر یو د نرۍ ډنډې څخه جوړ شوی چې دهر یوه کتله 2 kg ده. د څرخ انرشیایی مؤمنت هغه محور ته چې پر صفحه عمود او د A ټکی څخه تیریږی، وټاکئ.



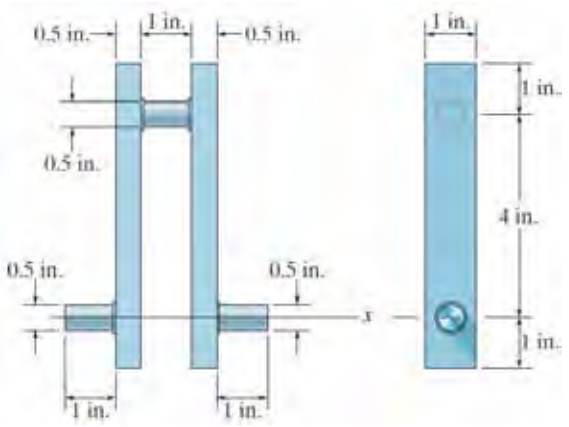
پ 17-13

17-14. که لویه حلقه، کوچنۍ حلقه، او هر یو شاخ په ترتیب سره 100 lb، 15 lb, او 20 lb په ترتیب سره تول ولري، انرشیایی مؤمنت د څرخ په هغه محور چې په صفحه عمود او د A ټکی څخه تیریږی، وټاکئ.



پ 17-14

17-15. د مرکزی کرینک د x محورپه شاوخوا انرشیایی مؤمنت وټاکئ. مواد فولاد دی چې ځانګړی تول یی $g_{st} = 490\ lb/ft^3$ دی.



پ 17-15

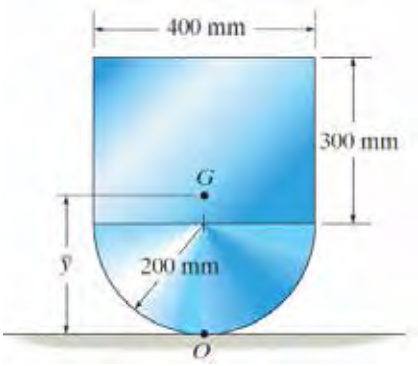
*17-16. د نرۍ تختی د کتلی انرشیا مومنټ په هغه محورچی په صفحه باندی عمود او د O ټکی نه تیریږی، وټاکئ. مواد په هر واحد د سطحی کی $20\ kg/m^2$ تول لري.



پ 17-16

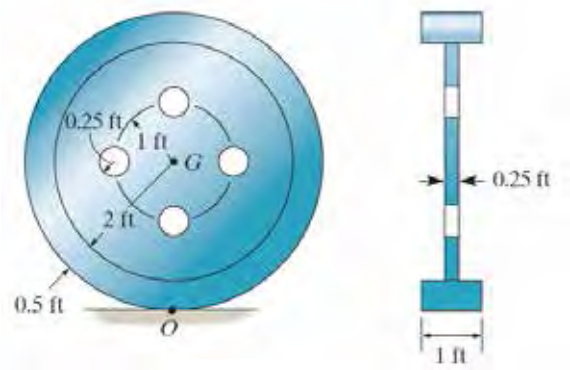
17-17. د لاندی اسامبلی د مرکز G موقعیت $\bar{y}$ وټاکئ، او بیا هغه محور ته چی پر صفحه عمود او د مرکز G څخه تیریږی، انرشیایی مؤمنت محاسبه کړئ. بلاک $3\ kg$ کتله لري او نیمه سلنډر $5\ kg$ کتله لري.

17-18. د لاندی اسامبلی انرشیایی مؤمنت هغه محور ته چې پر صفحه عمود او د O ټکی څخه تیریږی، وټاکئ. بلاک 3 kg کتله لري او نیمه سلنډر 5 kg کتله لري.



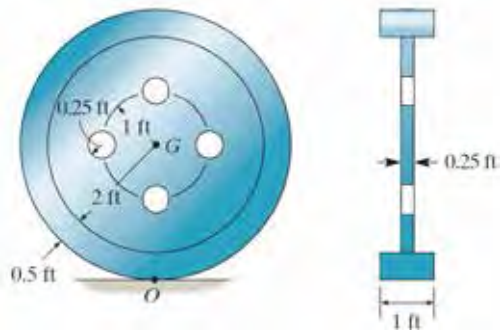
پ 17-17/18

17-19. د څرخ انرشیایی مؤمنت هغه محور ته چې پر صفحه عمود او د مرکز G څخه تیریږی، وټاکئ، مواد ځانګړي توله $\rho = 90\ \text{lb/ft}^3$ g لري.

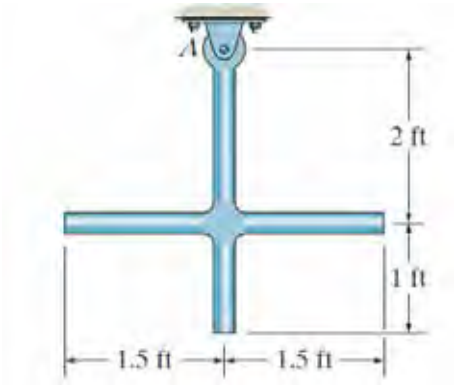


پ 17-19

*17-20. د لاندی څرخ انرشیایی مؤمنت هغه محور ته چې پر صفحه عمود او د O ټکی څخه تیریږی، وټاکئ. مواد د ځانګړي توله $\rho = 90\ \text{lb/ft}^3$ g لري.

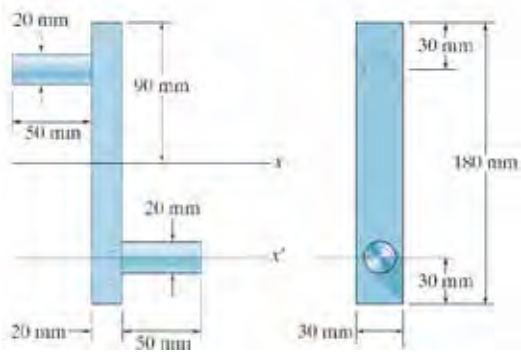


17-21. دا لاندی نری ډنډی 3 lb/ft تول لري. د اسامبلۍ انرشیایی مؤمنت هغه محورته چی پر صفحه عمود او د A پن له لارې تیریږي، وټاکی.



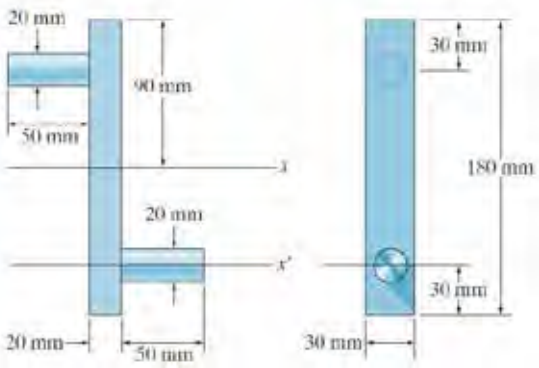
پ 17-21

17-22. د اوورهنګ کرینک د x محورپه شاوخوا انرشیایی مؤمنت وټاکئ. مواد فولاد دی چې کثافت یې $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$ دی.



پ 17-22

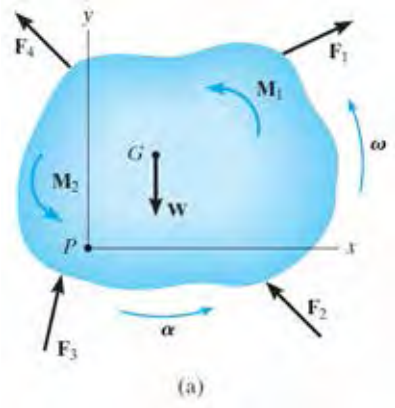
17-23.د اوورهنګ کرینک د $\dot{x}$ محورپه شاوخوا انرشیایی مؤمنت وټاکئ. مواد فولاد دی چې کثافت یې $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$ دی.



پ 17-23

17.2 د سطحی کینیټیک د حرکت معادله (PLANAR KINETICS EQUATION OF MOTION)

په لاندې تحلیل کې، موږ به د مطالعې ساحه د سختو اجسامو سطحی حرکت پورې محدوده کړو، چې د دوی د بارونو سره تناظروالی د یوه ثابت ریفرینس سطحی ته ولري.* له هغه ځایه چې د جسم حرکت په ریفرینس سطحه کې لیدل کیدی شي، نو ټولې قواوی چې په جسم باندې اغیزه کوي، په دې سطحه کې اچول کیږي. د دې ډول اختیاري جسم یوه بیلګه په انځور 17-8a کې ښودل شوې ده. دلته اینرشیایی ریفرینس چوکاټ x، y، z خپل مبدأ د اختیاری ټکی P سره په جسم کې سمون لري. د تعریف له مخې، دا محورونه نه څرخیږي، یا ثابت دي یا د ثابت سرعت سره خوځیدنه کوي .



انځور 17-8

د انتقالی حرکت معادله (Equation of Translational Motion)

په انځور 17-8aکې په جسم باندې بهرني قواوی لکه د ثقل، بریښنایی، مقناطیسي، یا د نږدې اجسامو تر منځ د تماس قواوو اغیزې څرګندیږي. له دې امله چې دا د قوو سیسټم دمخه په برخه 13.3کې د ذراتو د سیسټم د تحلیل لپاره په پام کې نیول شوی وا، د پایلې معادله 6–13دلته د سخت جسم لپاره کارول کیدی شي، په دې حالت کې:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

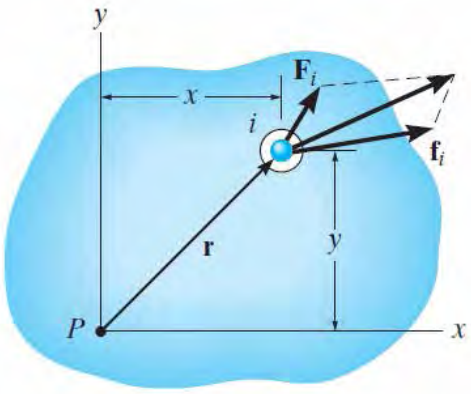
دا معادله د سخت جسم د کتلې د مرکز ***د انتقال حرکت معادلې*** ته اشاره کوي. دا بیانوي چې په جسم باندې د ټولو بهرنیو قواوومجموعه مساوی ده د جسم د کتلی ضرب د هغې د تعجیل سره په مرکز G کې. د جسم د حرکت لپاره په x–y سطحه کې، د انتقالي حرکت معادله د دوو خپلواکو سکیلر معادلو په بڼه لیکل کیدی شي، چې عبارت دي له:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

* په دی ترتیب سره د ګرزیدا دحرکت معادله یوه ساده بڼه نیسي. د جسم د شکل او بار پلی کیدو عمومی قضیه په 21 فصل کی په پام کی نیول شوي ده.

د دوراني حرکت معادله (Equation of Rotational Motion):

مورِ اوس د رامنځته شويو مؤمنتونو اغيزې د بهرني قوو سيستم لخوا معلوموو، چې محاسبه کيږي په هغه محور کوم چې د حرکت په سطحه عمود دي (د z محور) او د P ټکي څخه تېرېږي. لکه څنګه چې د i ذرې په ازاد بدن ډياګرام کې ښودل شوي، انځور 17-8b، $\mathbf{F}_i$په ذره باندې د بهرنی قوی محصله څرګندوي، او $\mathbf{f}_i$ د داخلي قواوو محصله ده چې د نورو نيږدی ذرو سره د متقابل عملونو له امله رامنځته کيږي. که چيرې ذرې کتله m_i اوتعجيل $\mathbf{a}_i$ وي، نو د هغې کينيټيک ډياګرام په انځور 17-8c کې ښودل شوی.



Particle free-body diagram

(b)

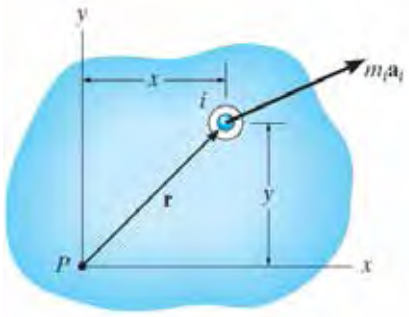
د P په ټکي کی د مؤمنتونو د يوځای کولو لپاره، مورِ اړتيا لرو:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{a}_i$$

يا

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{a}_i$$

||



Particle kinetic diagram

(c)

د P په ټکي مؤمنت هم کيداي شي چې د P ټکي د تعجيل له مخې څرګند شي، لکه څنګه چې په انځور 17-8d کې ښودل شوي دي. که چيرې جسم زاويي تعجيل α او زاويي سرعت ω ولري، نو د معادلې 16-18 په کارولو سره مورِ لرو:

$$(\mathbf{M}_P)_i = m_i \mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r})$$
$$= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]$$

انځور 17-8

وروستی اصطلاح صفر ده، ځکه چې r X r =0 ، (د ویکتور سره د خپل کراس ضرب تل صفر وي). که مور ویکتورونه د کارتېزین اجزاوو په توګه څرګند کړو او د کراس ضرب عملیات ترسره کړو، پایله به دا وي:

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}$$

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k}$$

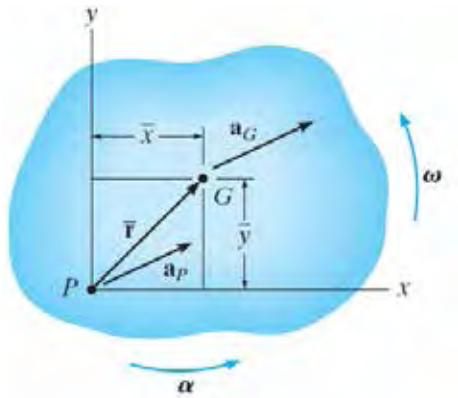
$$\curvearrowleft (M_P)_i = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]$$

د $m_i \longrightarrow dm$ ځای په ځای کولو سره او بیا د جسم پر ټوله کتله m باندې د انټیګرال نیولو په مرسته، مور دا لاندې معادله ترلاسه کوو:

$$\curvearrowleft \Sigma M_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2 dm\right)\alpha$$

دلته ΣM_P یوازې د بهرنیو قواوو مؤمنت په بدن باندې په ټکي P کې څرګندوي. د داخلي قواوو ټولیزه مؤمنت صفر دی، ځکه چې د ټول بدن لپاره داخلي قواوې، د مساوي او مخالف جهت او یوه کرښه، جوړو په توګه واقع کېږي، نو دهرې جوړې مومنټ P ټکی ته یو بل سره کنسل کوی.

د معادلې بڼې خوا کې لومړۍ او دویمې انټیګرالونه د بدن د ثقل مرکز G د موقعیت موندلو لپاره کارول کېږي چې د P په اړه ټاکل کېږي، چېرې چې $\bar{y}m = \int y\,dm$ او $\bar{x}dm = \int x\,dm$



(d)

انځور 17-8

لکه څنګه چې په انځور 17-8d کې ښودل شوي دي.
وروستی انټیګرال د بدن انرشیایی مؤمنت د z محور په اړه څرګندوي: $I_P = \int r^2\,dm$.

چېرته چې r د P ټکي څخه هر عنصر ته فاصله ده.

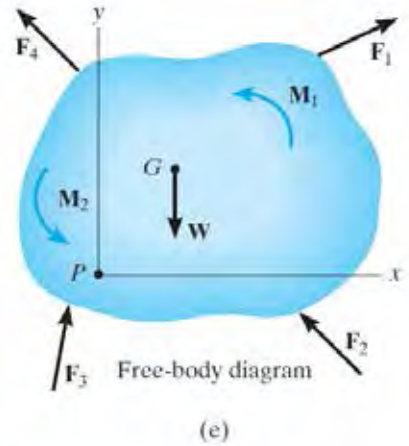
نو، د دې ټولو په یوځای کولو سره، مور لاندې اړیکه ترلاسه کوو:

دا معادله د زاویي حرکت لپاره بنسټیزه معادله ده چې د بدن د حرکت شېبې او انرشیا سره اړیکه څرګندوي.

$$\curvearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha \qquad (17\text{–}6)$$

که د P ټکي موقعیت د بدن د کتلې د مرکز G سره یو ځای شي، نو معادله یوه ساده بڼه غوره کوي. په دې حالت کې، $\bar{x} = \bar{y} = 0$ او ځکه چې د G څخه فاصله صفر ده.

له همدې امله، معادله داسې کمپږي :*



(e)

انځور 17-8(ادامه)

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \qquad (17\text{–}7)$$

د **دورانی حرکت دغه معادله** څرګندوي چې د بدن د کتلې د مرکز G په اړه د ټولو بهرنیو قواوو د مؤمنت مجموعه مساوي ده په حاصل ضرب د د بدن د انرشیایی مؤمنت I_G یوه محور ته چې د G څخه تیریږی او د زاویوي تعجیل α سره.

معادله 17-6 کیدی شی د $\mathbf{a}_G$ د x او y اجزاوو او د جسم د اینرشیا مومنټ (I_G) په کارولو سره ولیکل شی. که د G نقطه د (x, y) په ځای کې وي، لکه څنګه چې په انځور 17-8d کې ښودل شوي، نو د موازي محور قاعدې له مخې $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ کیږي. په معادله 17-6 کې ځای په ځای کول او بیا د اصطلاحاتود ترتیب نه ورسته، مومنټ تر لاسه کوو:

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha \qquad (17\text{–}8)$$

د انځور 17-8d د کینماتیک ډیاګرام څخه، د P ټکي تعجیل $\mathbf{a}_P$ د $\mathbf{a}_G$ په اصطلاحاتو کې داسې څرګندېدای شي:

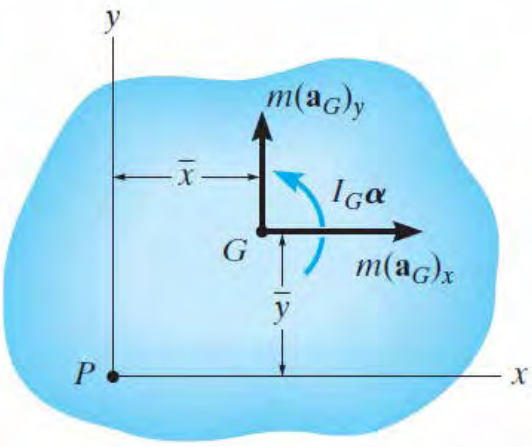
$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

د کراس ضرب ترسره کول او د i او j اړوندو اجزاووبرابرول، مومنټ لاندې دوی سکیلر معادلې تر لاسه کوو:

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$

$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$



Kinetic diagram

(f)

انځور 17-8(ادامه)

ورکړل شوی معادلې، $[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$ او $[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$ په معادله 17–8 کې ځای په ځای کړو او ساده یې کړو، نو پایله داسې کیږي:

$$\curvearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha \qquad (17–9)$$

دا مهمه پایله څرګندوي چې کله د آزاد جسم په ډیاګرام کې ډنډول شویو بهرنیو قواوو مومنټ په P ټکی کی جمعه شي، لکه څنګه چې په انځور 17-8e کې ښودل شوي، دا د کینیټیک مومنټ ma_G د اجزاوو د مجموعی سره د P ټکی ته، جمعه د کینیټیک مومنټ " $I_G\mathbf{a}$ " سره معادل دي، لکه چې په انځور 17-8f کې ښودل شوي. د یادونې وړ ده چې $I_G\,\mathbf{a}$ د آزاد ویکتور په توګه معامله کیدی شی او په دې توګه په هر ځای کې عمل کولی شي. په هرصورت، دا په یاد ولرئ چې ma_G او $I_G\mathbf{a}$ د قوی یا یوه کپل مومنټ په څېر ندي. پر ځای یې، دا د هغو بهرنیو ځواکونو او کپل مومنټونو له امله منځته راغلي اغیزی دی چې په جسم باندې عمل کوي. د دې پایلې په توګه، موږ کولای شو معادله 17-9 په یوه عمومي بڼه کې ولیکو، لکه.

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17–10)$$

* دا په ساده شکل $\Sigma M_P = \Sigma I_P a$ ته هم راتیټیږي که چیرې P ثابته نقطه وي (معادله 17-16 وګورئ) یا که چیرې تعجیل د ټکی P د PG کرښې په اوږدو کې وی.

د حرکت د معادلو عمومي تطبيق (General Application of the Equation of Motion)

د دې تحليل لنډيز لپاره، دري خپلواکه سکيلر معادلې ليکل کېدای شي ترڅو د يوه متناظر سخت جسم عمومي سطحي حرکت تشريح کړي.
هغه معادلې دا دي:

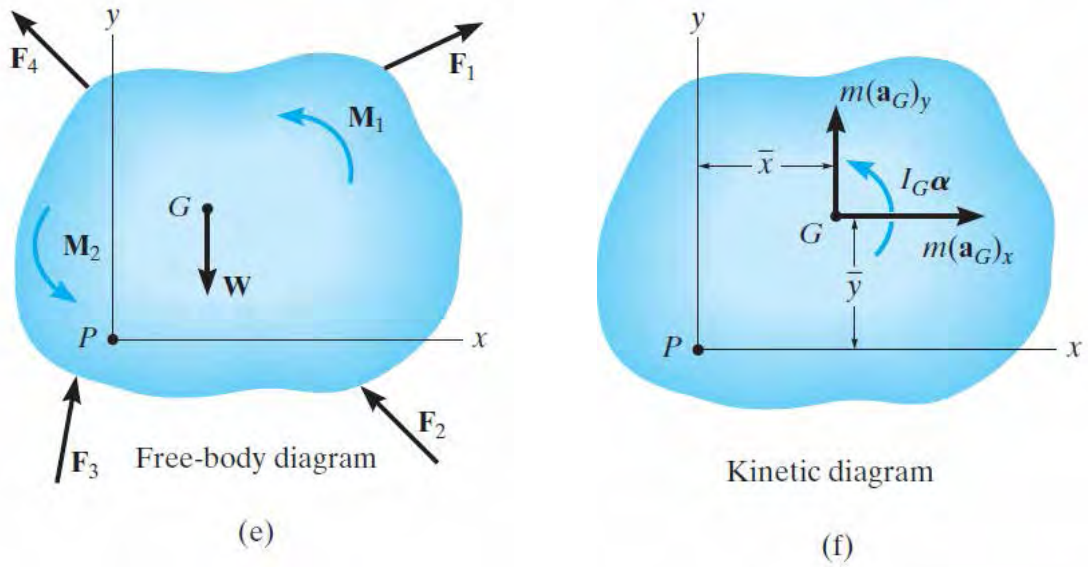
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

يا

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{–}11)$$

کله چې دغه معادلې تطبيق کوو، بايد تل د آزاد بدن ډياګرام رسم شی، لکه د انځور 17-8e ، ترڅو د ΣF_x، ΣFy، ΣM_G، يا ΣM_P اړوند اصطلاحات په نظر کې ونيول شي.

په ځينو پوښتنوکې، د بدن لپاره د کينټيک ډياګرام رسم کول، لکه انځور 17-8f ، هم ګټور کيدی شي. دغه ډياګرام د $m(\mathbf{a}_G)_x$، $m(\mathbf{a}_G)_y$، او $I_G\boldsymbol{\alpha}$ اصطلاحات په ګرافيکي ډول حسابوي. دا ډياګرام په ځانګړي ډول هغه وخت اسانه دی چې د دغو دريو اجزاوومؤمنت معلوم شی کله چې $\Sigma(M_k)_P$ د تطبيق کوو.



انځور 17-8(ادامه)

17.3 د حرکت معادلې: انتقالیدل (EQUATION OF MOTION: TRANSLATION)

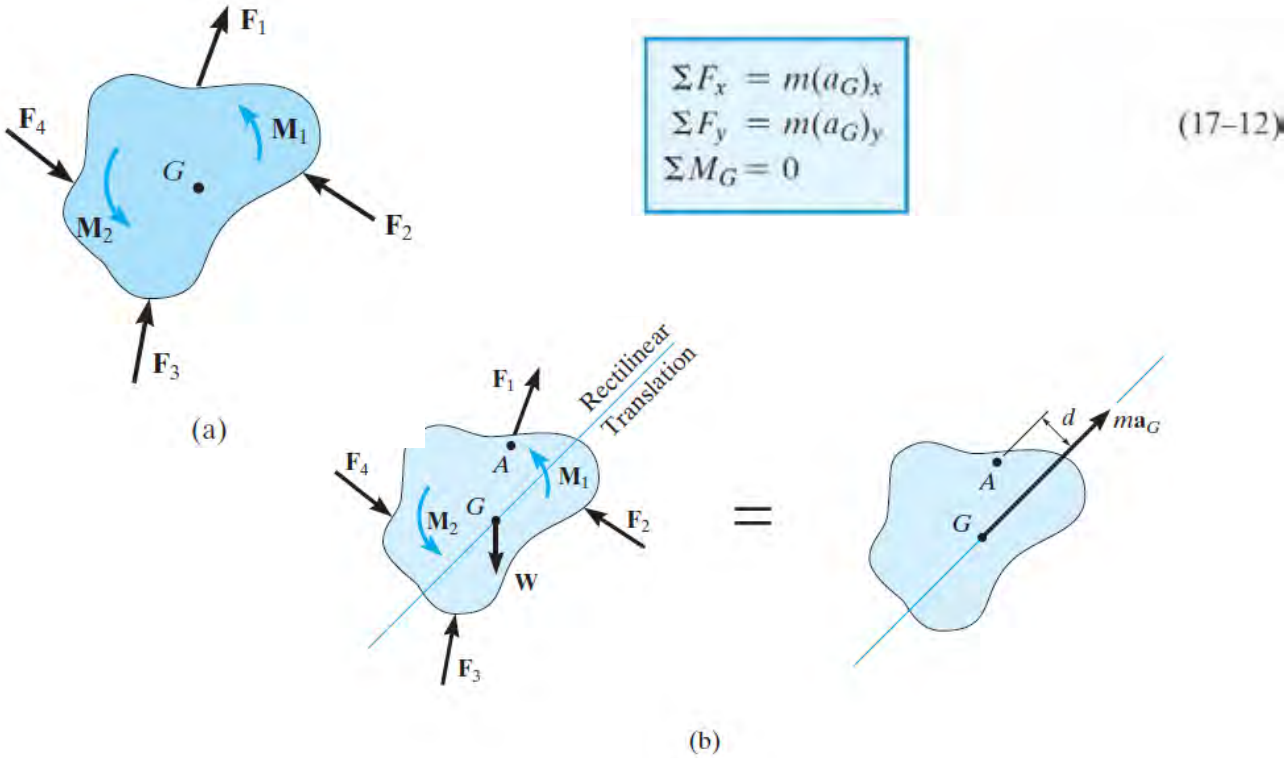
کله چې یو سخت جسم کوم چې په انځور 17-9a کې ښودل شوي د انتقالي حرکت سره مخ شي، ټولې ذرې د جسم د یو ډول تعجیل سره حرکت کوي. سربیره پر دې، $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ده، په دې حالت کې د دوراني حرکت د معادلې چې په نقطه G کې تطبیق کیږي، یوه ساده شویې بڼه اخلي، یعني، $\Sigma M_G = 0$. د دې او د حرکت د قوو معادلو تطبیق به اوس د د دوه ډوله انتقالي حرکت لپاره بحث شي.

مستقیم خطی انتقال (Rectilinear Translation):

کله چې یو جسم د مستقیم خطی انتقال سره مخ شي، د جسم ټولې ذرې (تخته) په موازي خطي لارو کې حرکت کوي. د آزاد بدن او کینتیک ډیاګرامونه په انځور 17-9b کې ښودل شوي دي.

خرنګه چې $I_G\boldsymbol{\alpha} = 0$، یوازې $m(\mathbf{a}_G)$ په کینتیک ډیاګرام کې ښودل شوی دی. له همدې امله، د حرکت معادلې چې په دې حالت کې تطبیق کیږي، عبارت دي له:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= 0\end{aligned} \qquad (17\text{–}12)$$



انځور 17-9

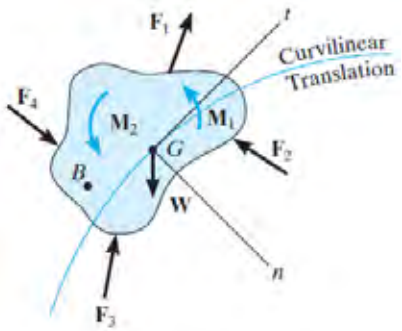
دا هم ممکنه ده چې د مؤمنتونو مجموعه پربل ټکی چې په جسم او یا بهر له جسمه وی ونیول شی، په دې حالت کې باید د ma_G مومینټ په پام کې ونیول شي. د بیلګې په توګه، که چیرې ټکی A وټاکل شي، چې د ma_G د عمل له کربنې څخه په عمودي فاصله d کې پروت وي، لاندې مومینټ معادله به تطبیق شي:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma (\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

دلته د بهرنیو قوو او کپل مومینټونو ټکي A *ته* (SM_A *په آزاد بدن ډیاګرام کې*) *مساوی کیږی* د ma_G مومینټ سره د A ټکی ته ($S(M_k)_A$ په کینټټیک ډیاګرام کی).

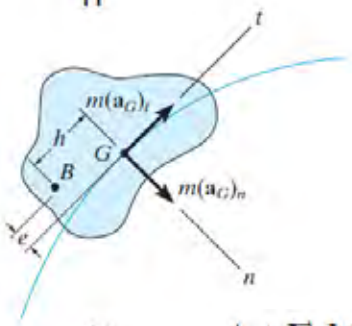
منحني کربنی انتقال (Curvilinear Translation) .

کله چې یو سخت بدن د منحني کربنی انتقال تابع وي، نو د بدن ټولې ذرې یو شان تعجیل لرونکي وي ځکه چې د منحني لارو په اوږدو کې حرکت کوي، لکه څنګه چې په 16.1 برخه کې یادونه شوې. د تحلیل لپاره، ډیری وخت د یوه انرشیایی (Inertial) محوري سیستم کارول مناسب دي چې په هغې شپې کې مبدأ یې د بدن د کتلې مرکز سره سمون خوري، او محورونه یې د حرکت د مسیر عمودی او مماسی لوریو ته برابر وي، لکه څنګه چې په انځور 17-9c کې ښودل شوي. د حرکت دري سکیلر معادلې په لاندې ډول دي:



$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned} \qquad (17\text{–}13)$$

||



(c)

که مومنټونه په بل ټکي کی لکه B ، انځور 17-9c، محاسبه شي، نو اړتیا ده چې د دوو اجزاوو $m(a_G)_n$ او $m(a_G)_t$ مومینټونه، $S(M_k)_B$، په دی ټکی هم حساب شي. له کینټټیک ډیاګرام څخه، د h او e فاصلی د B څخه د دې اجزاوو د عمل کربنو ته عمودي فاصلي (یا د "مومینټ لاسونه") ښیي. د اړتیا وړ مومینټ معادله په دې ډول کیږي:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma (\mathcal{M}_k)_B; \qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$

انځور 17-9(ادامه)

د تحلیل تګلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د سخت بدن د انتقال لپاره کینیټیک پوښتنو حل کولو لپاره دا لاندی تګلاره غوره کړی:

آزاد بدن ډیاګرام:(Free-Body Diagram)

. د x,y یا n,t انرشیایی محوري سیستم وټاکي او د آزاد بدن ډیاګرام رسم کړئ ترڅو پر بدن د ټولو بهرنیو قوو او کپل مومینټونو حساب وکړئ.

. د بدن د کتلې مرکز $\mathbf{a}_G$ د تعجیل لوری او جهت مشخص کړئ.

. د پوښتنې مجهولونه معلوم کړئ.

. که پریکړه وشي چې د حرکت د معادلې دوراني فورمول $SM_P = S(M_k)_P$ د حل لپاره وکارول شي، نو د کینټیک ډیاګرام رسمولو په اړه فکر وکړئ، ځکه چې دا په ګرافیکی ډول د اجزاوو $m(\mathbf{a}_G)_x$، $m(\mathbf{a}_G)_y$ یا $m(\mathbf{a}_G)_t$، $m(\mathbf{a}_G)_n$ لپاره حساب برابروي او د مومینټ د مجموعی لپاره، $S(M_k)_P$ ، د اړینو اصطلاحاتو په "لیدلو" کې مرسته کوي.

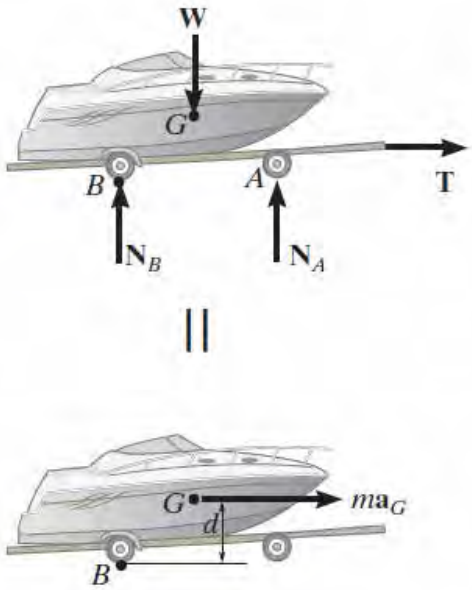
د حرکت معادلې (Equations of Motion)

. د ټاکل شوي نښې کنوانسیون سره سم د حرکت دري معادلې تطبیق کړئ.

. د تحلیل د ساده کولو لپاره، د مومینټ معادله $SM_G=0$ دعمومي معادلې $SM_P = S(M_k)_P$ په توګه لیکل کیدی شی، چیرې چې د P ټکي معمولا د هغو کرښو د تقاطع په موقعیت کې وي ، ترڅومره چې ممکن وی مجهول قوې پرې عمل وکړی.



د آزاد بدن او کنیټیک ډیاګرامونه لاندې ښودل شوي دي. که چیرې مؤمنت د کتلې مرکز G په اړه جمع شي، نو $\sum M_G=0$وي. مګر ، که مؤمنت د نقطې B په اړه جمع شي، نو $\sum M_B = ma_G$ کیږي.



- که بدن د نابنویی سطحې (rough surface) سره په تماس کې وي او بنویدل رامنځته شي، د اصتکاک معادله $F = \mu_k N$ وکاروئ. په یاد ولرئ چې F تل په بدن داسې عمل کوي چې د سطحې په پرتله د بدن د حرکت مخالفت وکړي.

کینیماتیکس (Kinematics) . د بدن د سرعت او موقعیت د معلومولو لپاره کینیماتیکس وکاروئ .

- مستقیم کربنې انتقال لپاره چې بدلون لرونکی تعجیل لري، کینیماتیکي فورمولونه تطبیق کړئ.

$$a_G = dv_G/dt \qquad a_G ds_G = v_G dv_G$$

- د مستقیم کربنې انتقال لپاره چې ثابت تعجیل لری،

$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \qquad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$
$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2} a_G t^2$$

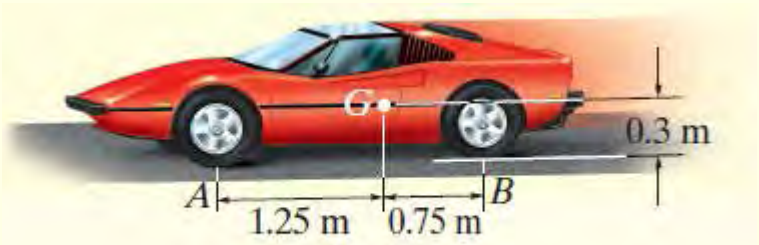
- د منحنې انتقال لپاره

$$(a_G)_n = v_G^2/\rho$$
$$(a_G)_t = dv_G/dt \qquad (a_G)_t ds_G = v_G dv_G$$

مثالونه

مثال 17.5

په انځور 17-10a کې ښودل شوې موټر 2 Mg تول لري او د هغې د کتلې مرکز په G کې دی. دا معلوم کړئ چې د تعجیل کچه به څومره وي که چیرې د شا "چلوونکي" ټیرونه تل ښویدل یا سلیپ وکړی، پداسې حال کې چې مخکنې ټیرونه د آزادانه څرخیدو وړ وي. د ټیرونو تول له پامه وغورځوئ. د ټیرونواو سړک تر منځ د کیینټیک اصطکاک ضریب $m_k =$ 0.25 دی.



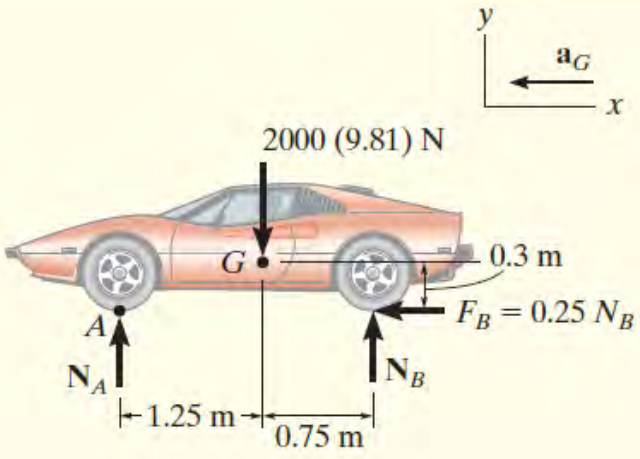
(a)

انځور 17-10

حل I

د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram)

لکه څنګه چې په انځور 17-10b کې ښودل شوي، د شاته ټیرونود اصطکاک قوه $\mathbf{F}_B$ موټر مخکې ته بیایي، او د ښویدو له امله، $F_B = 0.25N_B$. په مخکنیو ټیرونو د اصطکاک قوه صفر ده، ځکه چې دټیرو کتله د پام وړ نه ده *. په دې ښوښتنه کې درې مجهوله شتون لري N_A ، N_B، او a_G .



(b)

د حرکت معادلې (Equation of Motion)

دلته به مورِ مؤمنت د کتلی د مرکز په اړه محاسبه کړو. موټر (نقطه G) چپ لور ته تعجیل اخلي ، یعني د منفي x لوري ته، لکه څنګه چې په انځور 17-10b کې ښودل شوي

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad -0.25N_B = -(2000\text{ kg})a_G \quad (1)$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad N_A + N_B - 2000(9.81)\text{ N} = 0 \quad (2)$$
$$\circlearrowleft+\Sigma M_G = 0; \quad -N_A(1.25\text{ m}) - 0.25N_B(0.3\text{ m}) + N_B(0.75\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

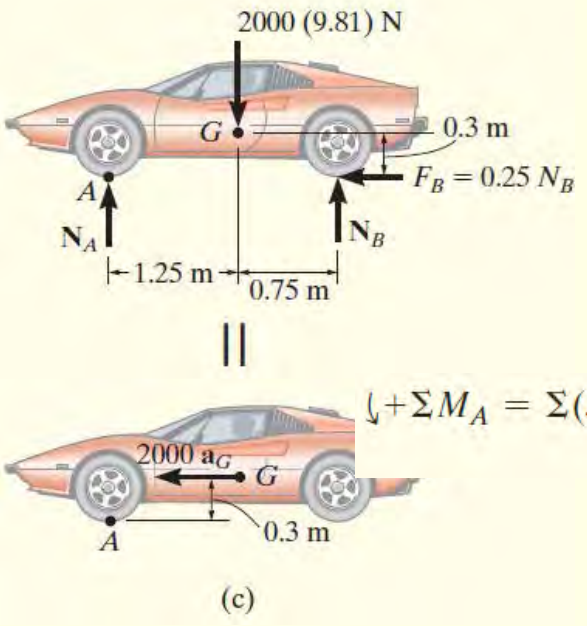
دا حل کوو

$$a_G = 1.59\text{ m/s}^2 \leftarrow \quad \textit{Ans.}$$
$$N_A = 6.88\text{ kN}$$
$$N_B = 12.7\text{ kN}$$

حل II

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

که چیرې د "مؤمنت" معادله د A ټکی ته ونیول شی، نو مجهول N_A به له معادلې څخه حذف شي. د ma_G مؤمنت د A ټکی ته چې وپوهیدل شی، مورِ به د تحلیل لپاره د کینیټیک ډیاګرام هم شامل کړو، انځور 17-10c .



د حرکت معادله (Equation of Motion)

$$\circlearrowleft+\Sigma M_A = \Sigma(M_k)_A; \quad N_B(2\text{ m}) - [2000(9.81)\text{ N}](1.25\text{ m}) = (2000\text{ kg})a_G(0.3\text{ m})$$

د دې او معادله 1 حلکول د a_G لپاره یوه ساده حل ته لار برابروي، کوم چې د معادلو 1 څخه تر 3 پورې په پرتله تر لاسه شوی دی.

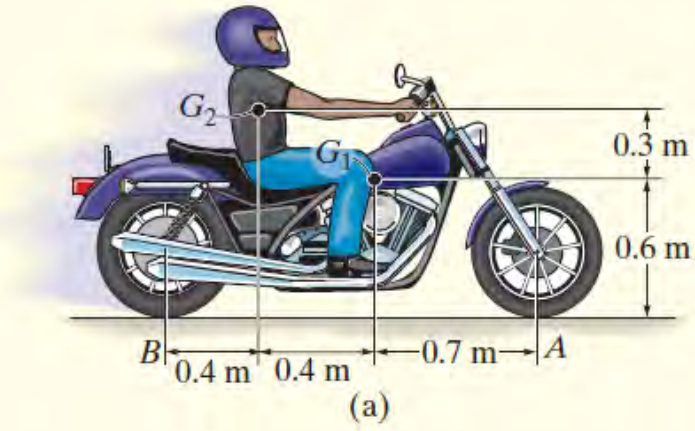
انځور 17-10 (ادامه)

* که د ټیرونو تول له پامه وغورځول شي، نو $Ia = 0$ او په نقطه A کې د اصتکاک قوه چې ۶ ده صفر ده. که چیرې د ټیرونو کتله په پام کې ونیول شي، نو حل به پیچلی شي، ځکه چې د ټیرونود سطحی حرکت عمومي تجزیه باید په پام کې ونیول شي (برخه 17.5 وګورئ).

مثال 17.6



موټرسایکل چې په انځور 17-11a کې ښودل شوی، 125 کیلو ګرامه کتله لري او د کتلی مرکز یی په G_1 کې دی، په داسې حال کې چې موټرسایکل چلونکی 75 کیلو ګرامه کتله لري او د کتلی مرکزیی په G_2 کې دی. محاسبه کړئ چې د ټایرونو او سړک تر منځ د سټټیک اصغری اصطکاک ضریب څومره وي چې موټرسایکل چلونکی وکولای شي "ویلي" ترسره کړي، یعنې د موټرسایکل مخکینی ټایر له ځمکې پورته شي لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوی. دا هم وښایاست چې د دې لپاره څومره تعجیل اړین دی؟ د ټایرونو کتله له پامه وغورځوئ او فرض کړئ چې مخکینی ټایر په آزاد ډول په هوا کې ګرزی.



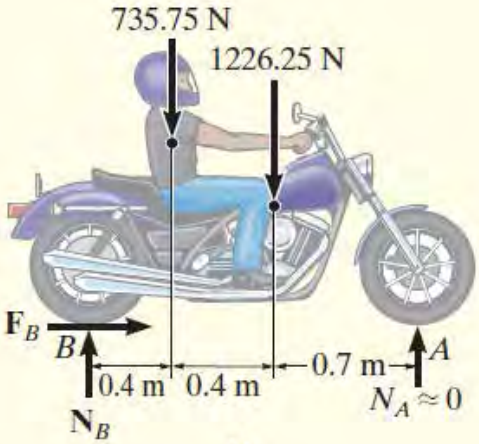
حل

د جسم آزاد او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

په دې پوښتنه کې به موږ د موټرسایکل او سور، دواړه د یوه واحد سیستم په توګه په پام کې ونیسو. لومړی دا ممکنه ده چې د دې "سیستم" د کتلی مرکز موقعیت د $\bar{x}=\sum \tilde{x}m / \sum m$ او $\bar{y} =\sum \tilde{y}m / \sum m$ معادلو په کارولو سره وټاکو. مګر دلته به موږ د موټرسایکل او سواره تول او کتله جلا په پام کې ونیسو لکه څنګه چې په آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونو کې ښودل شوي، انځور 17-11b. دا دواړې برخې د ورته تعجیل سره حرکت کوي. موږ فرض کوو چې د مخی ټیر د ځمکې څخه پورته کېدو ته نږدې دی، نو عمودی ریکشن $N_A \approx 0$ دی. په دی پوښتنه کې درې مجهوله N_B، F_B، او a_G دي.

د حرکت معادلی (Equation of Motion)

$$\pm \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735.75\text{ N} - 1226.25\text{ N} = 0$$
$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \qquad -(735.75\text{ N})(0.4\text{ m}) - (1226.25\text{ N})(0.8\text{ m}) = -(75\text{ kg}\, a_G)(0.9\text{ m}) - (125\text{ kg}\, a_G)(0.6\text{ m})$$

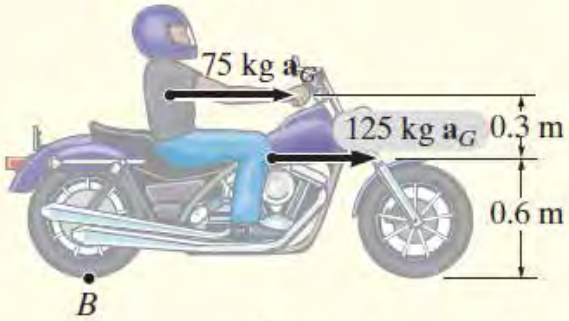


حل یی

$$a_G = 8.95\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$
$$N_B = 1962\text{ N}$$
$$F_B = 1790\text{ N}$$

له همدي امله، د جامد اصطکاک لږ تر لږه ضریب دی

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0.912 \qquad \textit{Ans.}$$

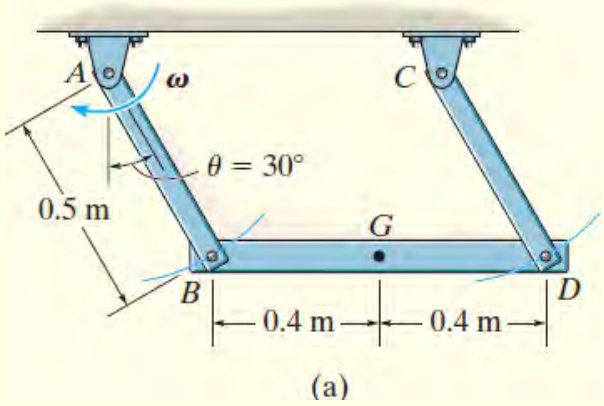


(b)

انځور 17-11

مثال 17.7

د 100 کیلوګرامه بیم BD ، چې په انځور 17-12a کې ښودل شوی، د دوو راډونو څخه ځړول شوی ده چې د هغوکتله د پام وړ نه ده. وښیی چې په هر راډ کې څومره قوه تولید شوی که $\theta = 30°$ او $\omega = 6$ rad/s وي .



(a)

انځور 17-12

حل

د آزاد بدن او کینیتیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

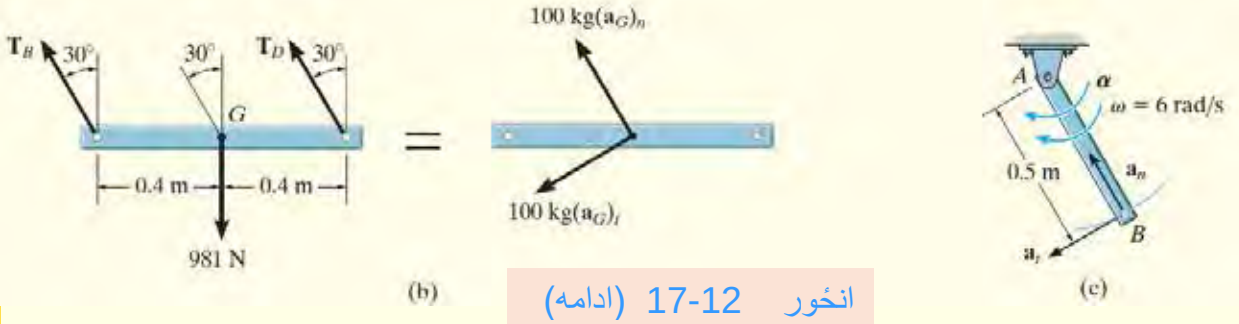
بیم منحني خطي انتقال لري، ځکه چې د بیم ټولې نقطې د دایروي لارو سره حرکت کوي. هره لاره د 0.5 متر ورته شعاع لري، خو د مختلفو انحنا مرکزونو سره. د عمودی او مماسي محورونوپه کارولو سره، د بیم لپاره آزاد بدن او کینیتیک ډیاګرامونه په انځور 17-12b کې ښودل شوي دي.

د انتقال له امله، نقطه G د نقطې B چې د راډ او بیم دواړو سره ټرلې ده، ورته حرکت لري . په یاد ولرئ چې د تعجیل مماسی جزښکته چپی خواته عمل کی ځکه چی $\boldsymbol{a}$ د ساعت په لوری ده، انځور 17-12c . برسېره پردې، د تعجیل عمودی برخه تل د انحنا مرکز ته اشاره کوي (د راډ ABلپاره د نقطې A په لور).

ځرنګه چې د AB زاویي سرعت $\omega = 6$ rad/s دی کله چې $\theta = 30^o$، نو

$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6\ \text{rad/s})^2(0.5\ \text{m}) = 18\ \text{m/s}^2$$

دلته دری مجهوله عبارت دی په T_B, T_D او $(a_G)_t$



انځور 17-12 (ادامه)

د حرکت معادلې (Equation of Motion)

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;\ T_B + T_D - 981\cos 30°\ \text{N} = 100\ \text{kg}(18\ \text{m/s}^2) \quad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;\quad 981\sin 30° = 100\ \text{kg}(a_G)_t \quad (2)$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0;\quad -(T_B\cos 30°)(0.4\ \text{m}) + (T_D\cos 30°)(0.4\ \text{m}) = 0 \quad (3)$$

د دې دریو معادلو هممهاله حل نتیجه ورکوي:

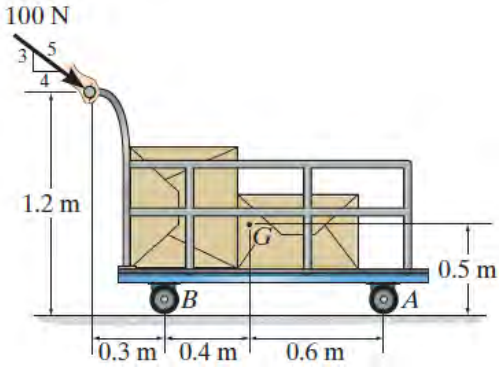
$$T_B = T_D = 1.32\ \text{kN} \qquad Ans.$$
$$(a_G)_t = 4.905\ \text{m/s}^2$$

یادونه: دا هم ممکنه ده چې د حرکت معادلې د افقي او عمودي x او y محورونو په اوږدو کې وکارول شي، مګر حل یې لږ پیچلی کیږي.

FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

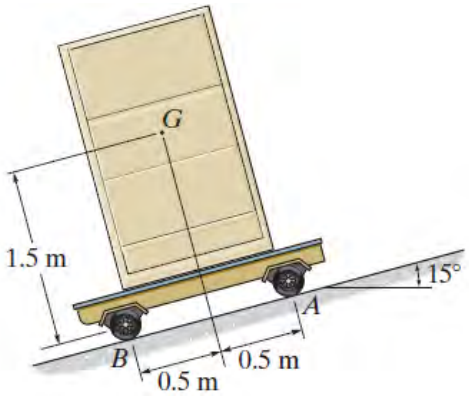
بنسټیز پوښتنې

ب 17–1. د کړاچۍ او بار ټوله کتله 100 کیلوګرامه ده. د کړاچۍ تعجیل او په A او B جوړه ټیرونو کې عمودي ریکشنونه وټاکئ. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ.



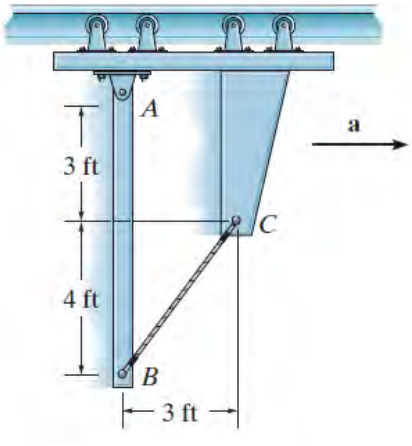
ب 17-1

ب 17–2. که د 80 کیلوګرامه الماری ته اجازه ورکړل شي چې په کږۍ سطحه ښکته لوړته خوشی شی، د الماری تعجیل او په A او B جوړه رولرونو کې نارمل ریکشنونه وټاکئ چې کتله یې له پامه وغورځول شي.



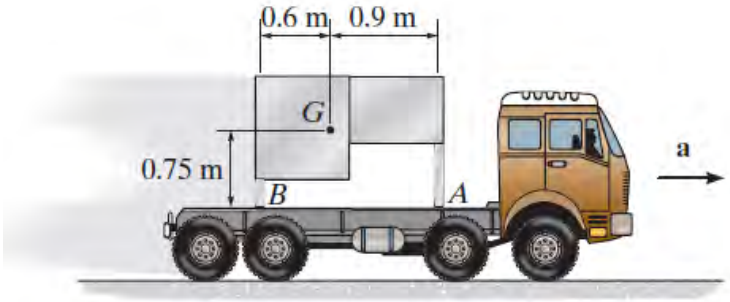
ب 17-2

ب 17–3. د 20 پونډه AB راډ د A په ټکی کې د یو حرکت کونکي چوکاټ سره ټرل شوی دی او د BC تار په وسیله په عمودي حالت کې ساتل کیږي. دغه تار اعظمي 10 پونډه فشار زغملی شي. د چوکاټ اعظمي تعجیل وټاکئ پرته له دې چې تار وشکیږی. همدارنګه په A کې د ریکشنو اړوندې اجزاوی معلومې کړئ.



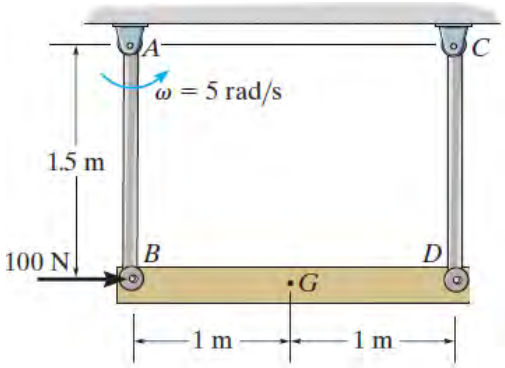
ب 17-3

ب 17–4. د ټرک اعظمي تعجیل وټاکئ پرته له دې چې 100 کیلوګرامه اسمبلی د ټرک په نسبت حرکت وکړي. همدارنګه په A او B پینو کې اړوند عمودی ریکشنونه وټاکئ. د اسمبلی د کتلی مرکز په G کې دی، او دهغې د پینواو ټرک ترمنځ د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.2$ دی.



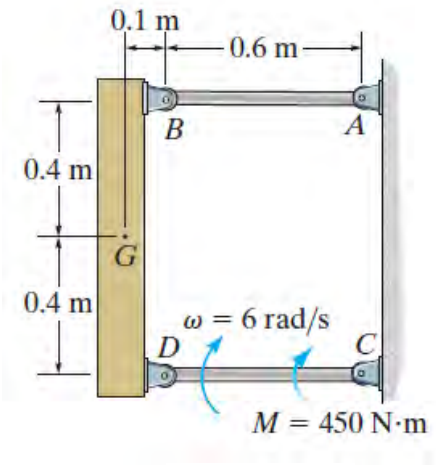
ب 17-4

ب 17–5. په بنودل شوي حالت کې دواړه راډونه د پام وړ کتله نلري او د $\omega = 5$ rad/s د ساعت ګرزیدو خلاف زاویوي سرعت سره حرکت کوي، پداسې حال کې چې په 50 کیلوګرامه میله باندې 100 نیوټنه افقي قوه عمل کوي. په راډونو کې کشش او د راډونو زاویوي تعجیل په دې شیبه کې معلوم کړئ.



ب 17-5

ب 17–6. په بنودل شوي حالت کې، راډ *CD* په زاويي سرعت، ω=6 rad/s، سره حرکت کوي. که دا د کپل مؤمنت $M = 450\ \text{N}\cdot\text{m}$ سره مخ شي، په *AB* راډ کې قوه، په پن D کې افقي او عمودي ريکشنونه، او د راډ *CD* زاويي تعجيل په دې شيبه کې معلوم کړئ. ميله 50 کيلوګرامه کتله لري او د هغې د کتلې مرکز په *G* کې دی. د *AB* او *CD* راډونو وزن له پامه غورځول شوی دی.



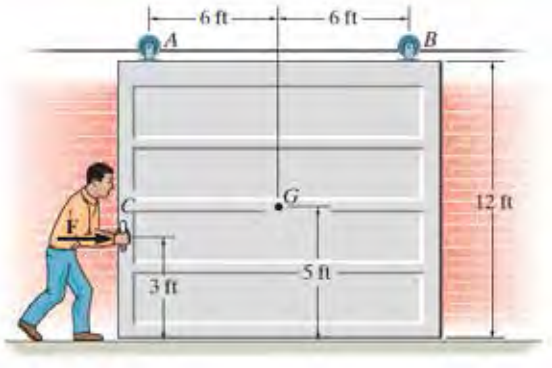
ب 17-6

PROBLEMS پوښتنې

په ټول حلونو کې بايد د آزاد بدن ډياګرام او کينټيک ډياګرام شامل کړي.

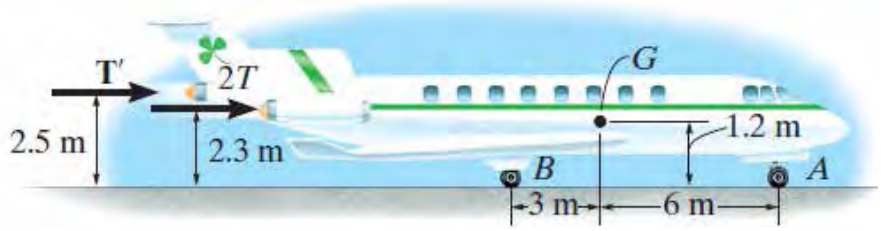
***17–24 .** دروازه 200 پونډه وزن لري او د هغې د جازبې مرکز په *G* کې دی. دروازه له آرام حالت څخه حرکت پيل کوي، او چيرې چې يو سړی په *C* کې 30 پونډه افقي قوه سره پرې فشار اچوي، معلوم کړئ چې دروازه په 2 ثانيو کې څومره حرکت کوي . همدارنګه، په *A* او *B* رولرونو کې عمودي ريکشنونه وټاکئ.

17-25. دروازه 200 پونډه وزن لري او د هغې د جازبې مرکز په G کې دی. هغه ثابته قوه *F* وټاکئ چې دروازه 12 فوټه بنې لور ته په 5 ثانيو کې له آرام حالت څخه پرانيزي. همدارنګه، په *A* او *B* رولرونو کې عمودي ريکشنونه معلوم کړئ.



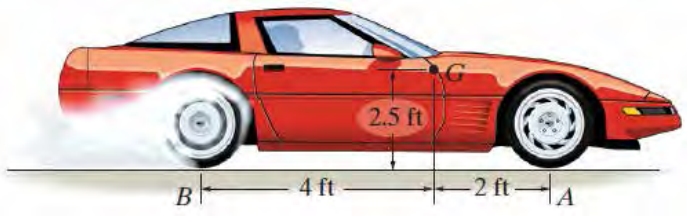
پوښتنه 17-25

17–26 . جټ الوتکه 22 میګاګرامه ټوله کتله لري او د هغې د کتلې مرکز په G کې دی. په پیل کې د الوتنې لپاره انجنونه $2T=4$ kN او $T'=1.5$ kN, ترست قوه برابروي. د الوتکې تعجیل او د هغې د مخ په ټیر A کې اود وزرو په ټیرو په B کې عمودي عکس العملونه معلوم کړئ. د ټیرونو کتله او د ټیټ سرعت له کبله د وزرو له امله د پورته کیدو قوه له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-26

17–27 . سپورټ موټر 4500 پونډه ټول لري او د جازبې مرکز په G کې دی. که له دریدلی حالت څخه پیل وکړي او کله چې تعجیل واخلي د شا ټیرونه ښوییږی. معلوم کړئ چې دا څومره وخت نیسي ترڅو 10 فوټه/ثانیه سرعت ته ورسیږي. همدارنګه، په سړک باندی د هر یوه څلورو ټیرونو نارمل ریکشنونه معلوم کړئ. د سړک د ستټیک او کینیټیک اصطکاک ضریبونه په ترتیب سره $\mu_s=0.5$ او $\mu_k=0.3$ دي. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-27

***17–28 .** بایسکل او چلوونکی 80 کیلوګرامه ټوله کتله لري چې د کتلې مرکز په G کې موقعیت لري. که د شا ټایر کې د کینیټیک اصطکاک ضریب $\mu_B=0.8$ وي، په Aاو B ټایرونوکی عمودی ریکشنونه او د چلوونکي د تجیل اندازه معلومه کړئ کله چې د بریک کولو له

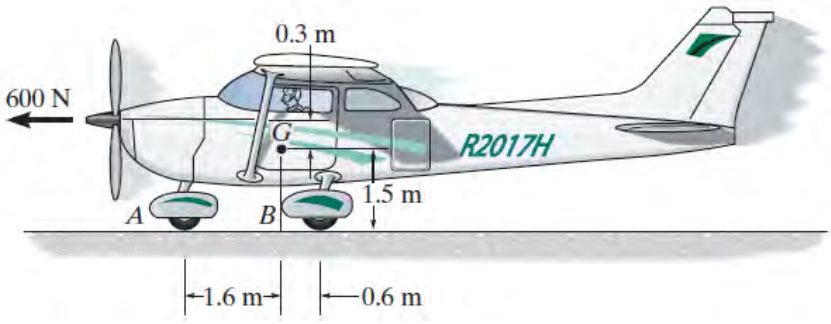
کښله د شا ټیرقلف شي. همدارنګه، د شا ټایر عمودی ریکشن معلوم کړئ کله چې بایسکل په ثابت سرعت حرکت کوي او بریکونه نه وي نیول شوی. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ.

17–29 . بایسکل او چلوونکی 80 کیلوګرامه ټوله کتله لري چې د کتلی مرکز په G کې موقعیت لري. د سړک او ټیرونو ترمنځ د کینټیک اصطکاک اصغری ضریب معلوم کړئ ترڅود شا ټیر Bد ځمکې څخه د پورته کیدو لپاره پیل وکړي کله چې چلوونکی په مخکینې ټیر بریکونه فعال کړي. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ.



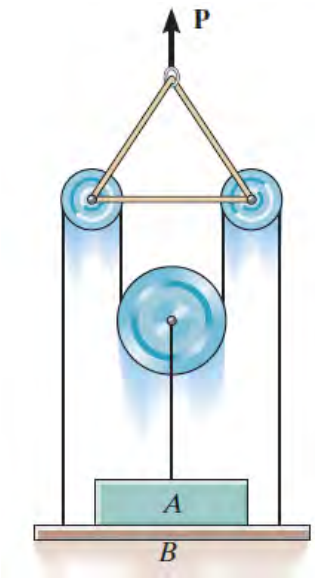
پوښتنې 17-28/29

17–30 . د الوتکې پروپیلر، د الوتو په وخت کې ، 2 میګاګرامه الوتکی ته 600 N افقی ټرسټ ورکوي. د الوتکې تعجیل او په مخکنی ټیر A کې او د هر یوه وزرو ټیرونو په B کې عمودي عکس العملونه معلوم کړئ. د وزرو د پورته کیدو ځواک له پامه وغورځوئ ځکه چې الوتکه په اصل کې په دریدلی حالت کې ده. د کتلی مرکز په G کې دی.



پوښتنه 17-30

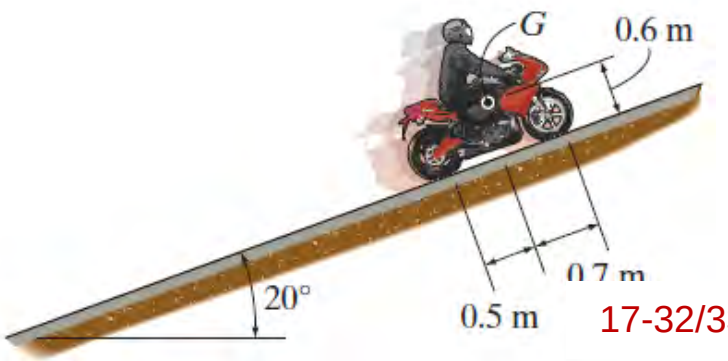
17–31 . په لاندی انځور کی ښودل شوی بلاک A ، 50 پونډه تول لري، او د تختی تول 10 پونډه دي. که P =100 lb وي، معلوم کړئ چې د بلاک A په B باندې د عمودی ریکشن قوه څومره ده. د څرخکیو او مثلثي چوکاټ د بارونو تول له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-30

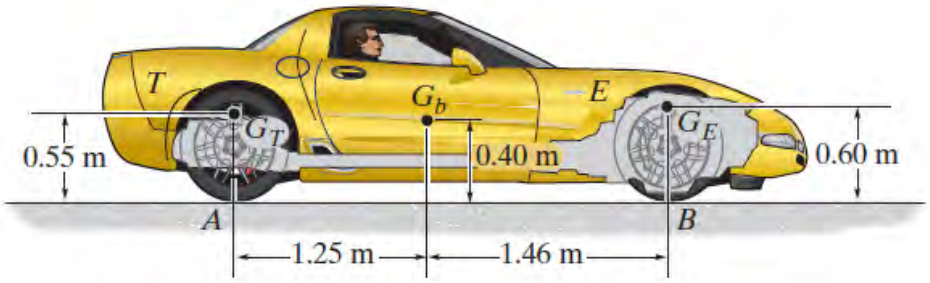
***17–32 .** موټرسایکل او چلوونکی ټوله کتله 900 کیلوګرامه ده او د کتلی مرکزیی په G کې دی. که دا د ثابت تعجیل $3\ m/s^2$ سره مخ پورته حرکت وکړی، معلوم کړئ چې په مخکینې او شا ټیرونو عمودی ریکشنونه څومره دي. همدارنګه، د شا په ټیر ضروری اصطکاکي قوه معلومه کړئ. مخکینی ټیرازاد دی چې وګرځي.

17–33 . موټرسایکل او چلوونکی ټوله کتله 900 کیلوګرامه ده او د کتلی مرکزیی په G کې دی. د شاټیر او میلان ترمنځ اصغری سټټیک اصطکاک ضریب معلوم کړئ ترڅو چلوونکی "ویلی" ترسره کړي، یعنې مخکینی ټیر د سړک څخه پورته کیدل پیل کړي. همدارنګه، په دې حالت کی تعجیل معلوم کړئ. مخکینی ټیرازاد دی چې وګرځي.



پوښتنی 17-32/33

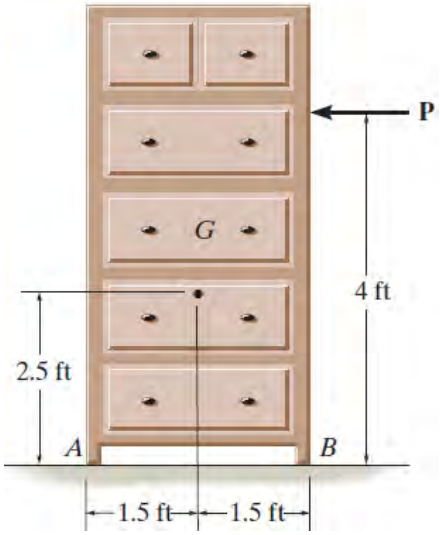
17–34 . سپورټ موټر داسې ډیزاین شوی چې 260 کیلوګرامه ماشین E او 165 کیلوګرامه ګیربکس T په ترتیب سره په مخکینۍ او شا ټیرونو باندې ایښودل شوی دی. د دوی د کتلو مرکزونه په G_E او G_T کې دي. پاتې 512 کیلوګرامه بدن او چوکاټ د کتلې مرکز په G_b کې دي. که قوه یوازې د شا ټیرونوته ورکړل شي، معلوم کړئ چې څومره لږ وخت نیسي ترڅو موټر له دریدلی حالت څخه 80 km/h تیزوالی ته ورسیږي. مخکینۍ ټیرونه ازاد ګرځي، او د هغو ټیرونو چې قوه ورکړ شوی ده او سړک ترمنځ د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.4$ دی. د ټیرونواو چلوونکي کتله له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-34

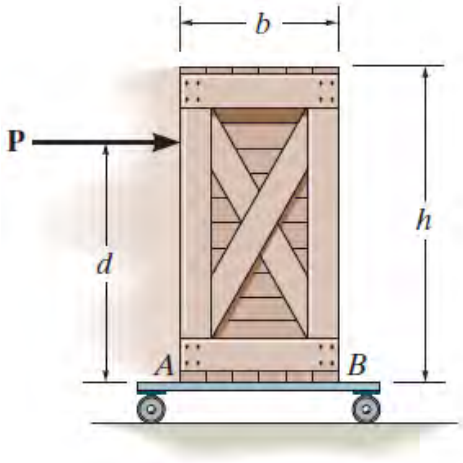
17–35 . د الماری ټول 80 پونډه دی او پر فرش باندې ټپله کیږي. که د A او B په تماس نقطو کې د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ او د کینټټیک اصطکاک ضریب $\mu_k=0.2$ وي، تر ټولو کوچنۍ قوه P معلومه کړئ چې د حرکت د پیل سبب شی. که دا قوه لږ زیاته شي، د الماری تعجیل معلوم کړئ. همدارنګه، کله چې حرکت پیل کیږي په A او B کې عمودی ریکشنونه معلوم کړئ.

***17–36 .** د الماری ټول 80 پونډه دی او پر فرش باندې ټپله کیږي. که د A او B په تماس نقطو کې د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ او د کینټټیک اصطکاک ضریب $\mu_k=0.2$ وي، معلوم کړئ چې ترټولو زیات افقي قوه P څومره کیدی شي پرته له دې چې الماری چپه شی.



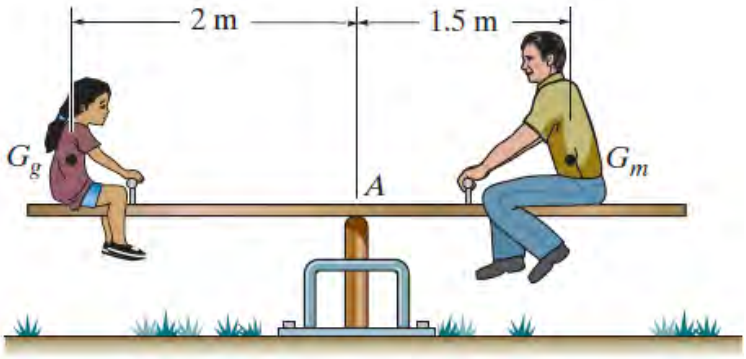
پوښتنې 17-35/36

17-37 . صندوق په کړاچی، چې د پام وړ کتله نه لري ایښودل شوی. معلومه کړئ تر ټولو هغه زیاته قوه P چې په d فاصله کې، د صندوق د ښکته نه، تطبیق شی، چې صندوق چپه نه شی.



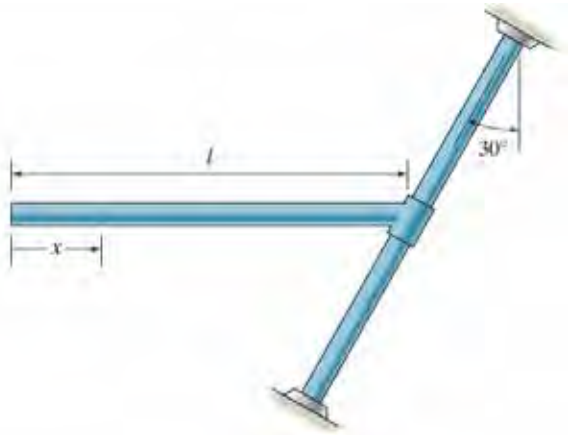
پوښتنه 17-37

17–38 . یو 75 کیلوګرامه سړی او 40 کیلوګرامه نجلۍ په ارغنچک (seesaw) باندې چې د پام وړ کتله نه لري ناست دي. هغه وخت چې سړی خپلې پښې له ځمکې څخه پورته کوي، معلوم کړئ چې د دوی تتعجیلونه څومره دي که هر یو په خپله مستقیم ناست وي، یعنې دوی ونه څرخیږی. د سړي او نجلۍ د کتلی مرکزونه په ترتیب سره په G_m او G_g کې دي.



پوښتنه 17-38

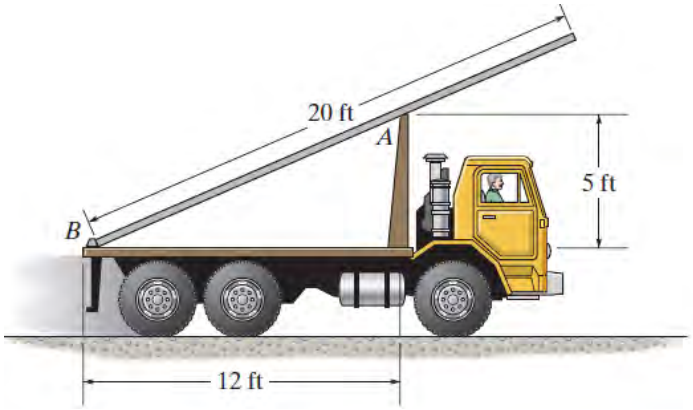
17–39 . میله د اوږدوالي پر هر واحد کی w وزن لري او د بنویی غاړکی له خوا ملاتړ کیږي. که له دریدلی حالت څخه خوشې شي، په میله کی داخلي عمودی قوه، شپر قوه، او د کوږیدو مومنټ د فاصلی x تابع په توګه معلوم کړئ.



پوښتنه 17-39

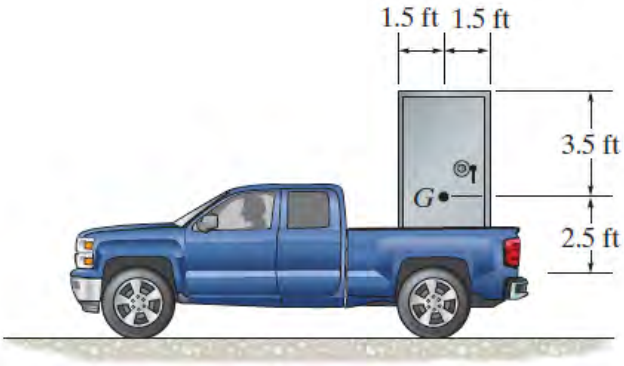
***17–40 .** یو بنوی 180 پونډه پایپ 20 فوټه اوږدوالی لري او قطریی د پام وړ نه دي. دا په یوه لاری کې لیږدول کیږي لکه څنګه چې په لاندی انځور کی بنودل شوي. معلوم کړئ چې لاری څومره زیات تعجیل کولی شي پرته له دې چې په A کې عمودی ریکشن صفر شي. همدارنګه، په B کې د افقي او عمودي اجزاوو قوی معلوم کړئ چې لاری په پایپ باندې وارد وي.

17–41 . یو بنوی 180 پونډه پایپ 20 فوټه اوږدوالی لري او قطریی د پام وړ نه دي. دا په یوه لاری کې لیږدول کیږي لکه څنګه چې په لاندی انځور کی بنودل شوي. که لاری د $a=5\ \text{ft/s}^2$ تعجیل سره حرکت وکړي، په A کې عمودی ریکشن او په B کې د ریکشن افقي او عمودي اجزاوې معلومې کړئ چې لاری په پایپ باندې وارد وي.



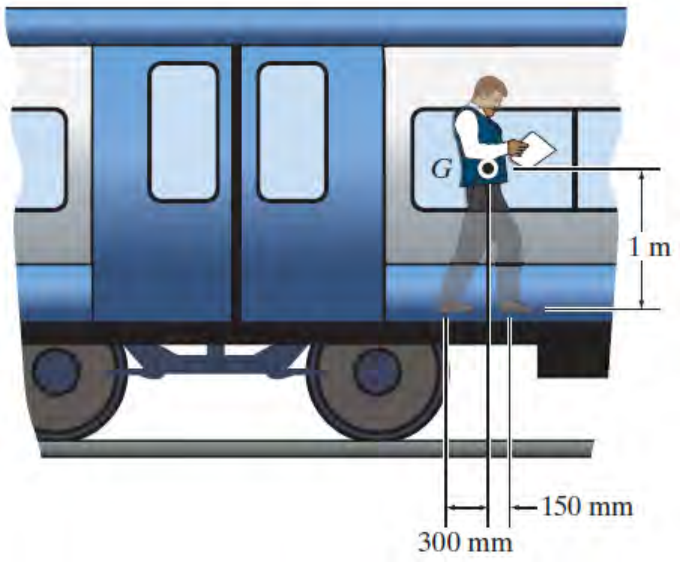
پوښتنی 17-40/41

17–42 . لارۍ د 1200 پونډه ساتونکی بکس لیږدوي چې د کتلې مرکز یې په G کې دی. معلوم کړئ چې د لارۍ تر ټولو زیات تعجیل څومره دی ترڅو بکس په لارۍ کې ونه ښویږي او چپه نه شي. د بکس او لارۍ ترمنځ د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.5$ دی.



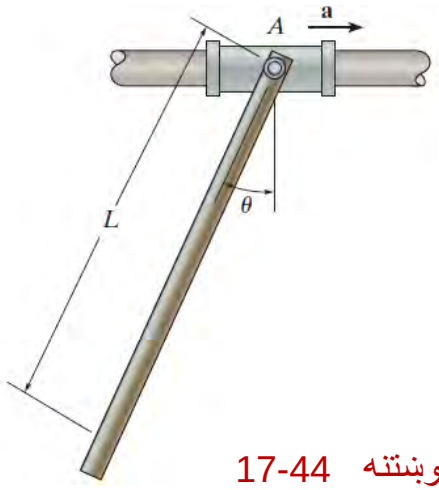
پوښتنه 17-42

17–43 . یو سړی د یوه تلونکی ګاډی په دهلیز کې ولاړ دی. که د هغه د بوټونو او فرش ترمنځ د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.5$ وي، او د هغه کتله 85 kg ده، چې د کتلې مرکز یې په G کې دی، معلوم کړئ چې د کاډی لږ تر لږه تعجیل په ښي لورڅومره دی ترڅو سړی وښویږي یا چپه شي. فرض کړئ چې سړی خپل ځان کلک ساتي.



پوښتنه 17-43

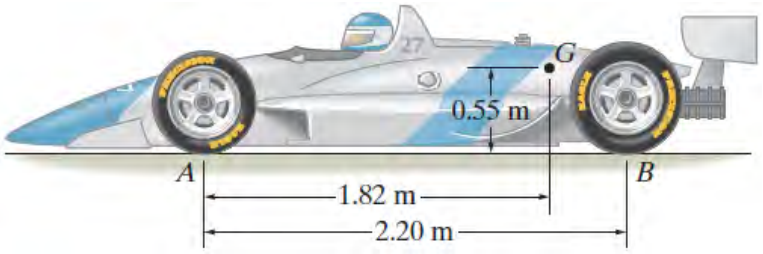
17–44* . یوه د یوشان کتلې m میله د غاړکی سره په پین ټرل شویې ده چې په ښوی افقي راډ باندې ښویږي. که غاړکی ته یو ثابت تعجیل **a** ورکړل شي، معلوم کړئ چې د میلې د میلان زاویه θ څومره ده. د غاړکی تول له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-44

17–45 . د 975 کیلوګرامه د مسابقې موټر لپاره تر ټولو زیات تعجیل معلوم کړئ چې د هغې مخکینې ټیرونه له ځمکې څخه پورته نشي او نه هم کوم ټیر د لارې پر سطحه وښویږي. د سټټیک او کینټټیک اصطکاک ضریبونه په ترتیب سره $\mu_s = 0.8$ او $\mu_k = 0.6$ دي. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ. موټر د شاټیرونه ډرایو دی، او مخکینې ټیرونه آزاد ګرځېدونکي دي.

17–46 . د 975 کیلوګرامه د مسابقې موټر لپاره تر ټولو زیات تعجیل معلوم کړئ چې د هغې مخکینې ټیرونه له ځمکې څخه پورته نشي او نه هم کوم ټیر د لارې پر سطحه وښویږي. د سټټیک او کینټټیک اصطکاک ضریبونه په ترتیب سره $\mu_s = 0.8$ او $\mu_k = 0.6$ دي. د ټیرو کتله له پامه وغورځوئ. موټر څلور ټیره ډرایودي.

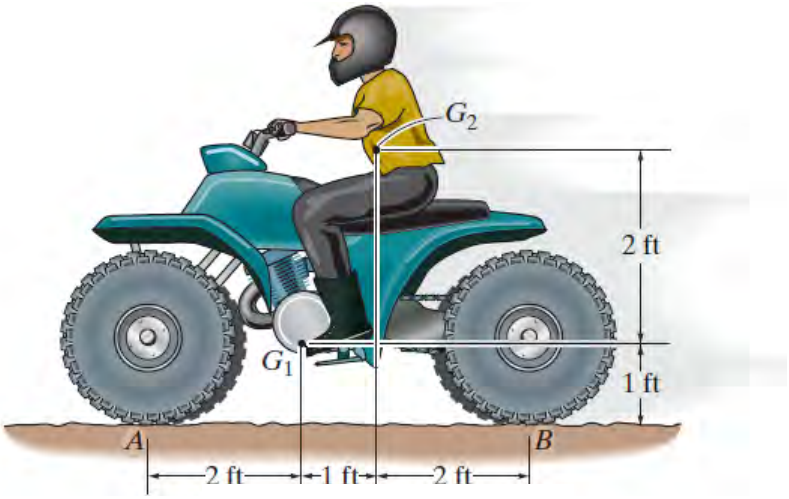


پوښتنې 17-45/46

17–47 . څلور- ټیره د 335 پونډه تول لري او د جازبی مرکز یې په G_1 کې دی، په داسې حال کې چې سوور 150 پونډه تول لري او د جازبی مرکز یې په G_2 کې دی. که انجن دومره ټورک تولیدولی شي چې د شا ټیرونه وښویږي، معلوم کړئ چې د شا ټیرونو او ځمکې ترمنځ د سټټیک اصطکاک تر ټولو لوی ضریب څومره دی ترڅو د وسیلې له چپه کیدو پرته تعجیل واخلی.

تر ټولو زیات تعجیل معلوم کړئ. د تعجیل زیاتولو لپاره، ایا سوور باید ټیټ شي یا مستقیم کښینې؟ تشریح یې کړی.مخکنې ټیرونه آزاد ګرزی، د ټیرو کتله له پامه وغورځوئ.

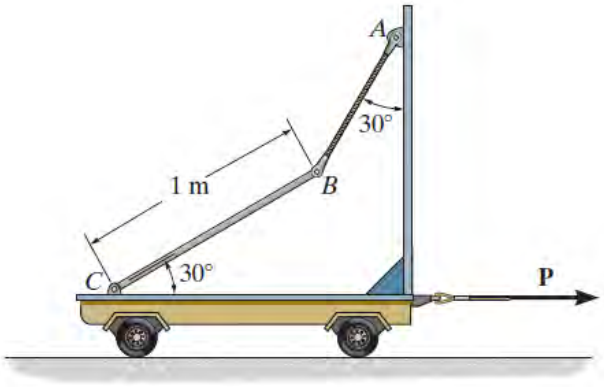
***17–48 .** څلور- ټیره 335 پونډه تول لرې او د جازبی مرکز یې په G_1 کې دی، په داسې حال کې چې سوور 150 پونډه تول لرې او د جازبی مرکز یې په G_2 کې دی.که د شا ټیرونو او ځمکې ترمنځ د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ وي، معلوم کړئ چې د څلور ټیرو وسیلې تر ټولو زیات تعجیل څومره دی پرته لدی چې چپه شی. د مخی ټیرونه ازاد کرزی. د ټیرونو کتله له پامه وغورځوئ.



پوښتنې 17-47/48

17–49 . که د کارټ کتله 30 کیلوګرامه وي او $P = 90$ N افقي قوه وربانډی عمل کوی، په راډ AB کې د کشش قوه اود یو شان BC راډ چې 15 kg دی په C سر کې د ریکشن افقي او عمودي اجزاوې معلومې کړئ.

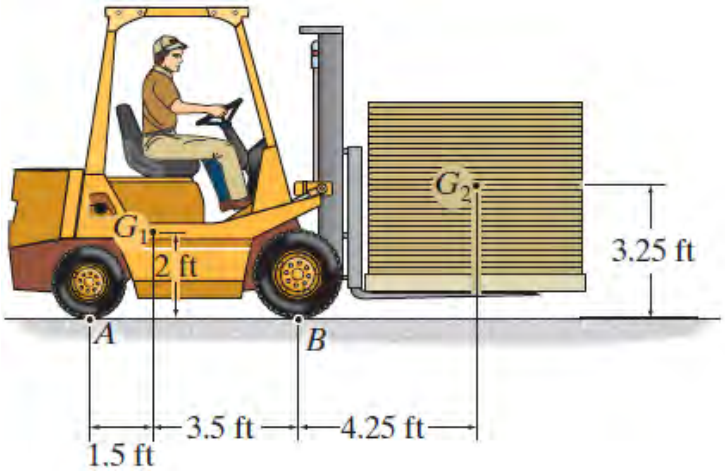
17–50 . که د کارټ کتله 30 کیلوګرامه وي، معلوم کړئ چې څومره افقي قوه P باید په کارټ باندې عمل وکړی ترڅو راډ AB سست شي. راډ BC یو شان او 15 کیلوګرامه کتله لری.



پوښتنې 17-49/50

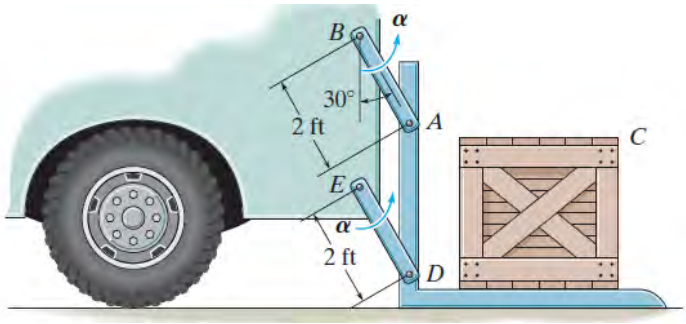
17–51 . فورکلفټ په ثابت تیزوالي 9 ft/s مخ په وړاندی په حرکت کی ده . تر ټولو لنډ ممکنه تمځای فاصله معلومه کړئ پرته لدې چې د ټیرونونه کوم یو له ځمکې څخه پورته شي. فورکلفټ 2000 lb تول لري او د جازبی مرکز یې په G_1 کې دی، په داسې حال کې چې د بار تول 900 lb دي او د جازبی مرکز یې په G_2 کې دی. د ټیرونو تول له پامه وغورځوئ.

***17–52 .** که د فورکلفټ دشا ټیرونه $F_A = 300$ lb مجموعی د سریښیدا قوه تولیدوي، د هغې تعجیل او د شا او مخکینیو جوړه ټیرونوباندې د عمودی ریکشن اندازی معلومی کړئ. فورکلفټ 2000 lb تول لري او د جازبی مرکز یې په G_1 کې دی، په داسې حال کې چې باریی 900 lb تول لري او د جازبی مرکز یې په G_2 کې دی. مخکینې ټیرونه ازاد ګرځېدونکي دي. د ټیرونو تول له پامه وغورځوئ.



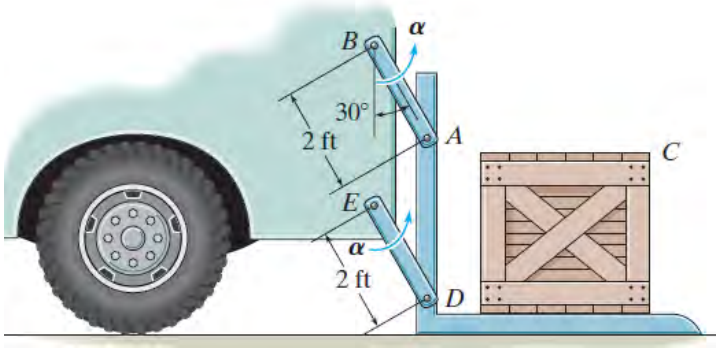
پوښتنې 17-51/52

17–53. . د کریټ C تول 150 پونډه دی او د ټرک په ایلیویټر کې پروت دی، چې د سټیټیک اصطکاک ضریب یې $\mu_s = 0.4$ دی. لویترین ابتدائي زاویوی تعجیل α د دریدلی حالت نه، چې موازي ټروندونه AB او DEوموميء، پرته له دې چې کریټ وښویږي. هیڅ ډول اوښتنه نشته.



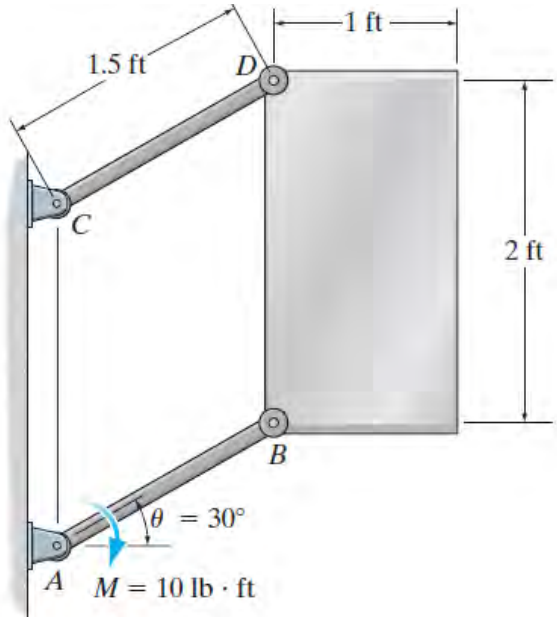
پوښتنه 17-53

17–54 . د کریټ C تول 150 پونډه دی، او د ټرک په ایلیویټر کې پروت دی. که چیرې موازي ټروندونه زاویوی تعجیل $\alpha = 2\ \text{rad/s}^2$ ترلاسه کړي، نو د ایلیویټر پر کریټ باندې ابتدایي اصتکاک او عمودی قوه معلومه کړئ.



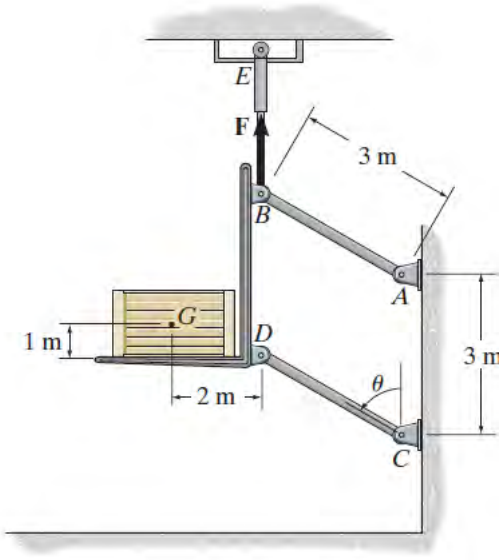
پوښتنه 17-54

17–55 . دا لاندی ښودل شوي یوشان تخته 50 پونډه تول لري. ټروند AB د یوه کپل مومنټ $M=10\ \text{lb}\cdot\text{ft}$ لاندې دی او د ساعت په لور 2 rad/s زاویوی سرعت لري کله چې $\theta=30^\circ$ وي. په ټروند CD کې جوړه شوي قوه او د تختې د کتلې مرکز د تعجیل مماسي جز په دې لحظه کې معلوم کړئ. د ټروندونو AB او CD کتلی په پام کی مه نیسئ.



پوښتنه 17-55

17–56 . که هیدرولیک سیلینډر BE په پلټفارم باندې عمودي قوه F=1.5 kN پلي کړي، نو د ټروندونو AB او CD کې هغه قوی، کله چې $\theta = 90^0$ وی، معلومی کړئ. پلټفارم په دریدلی حالت کی وی کله چې $\theta = 45°$ وی. د ټروندونو او پلټفارم تول په پام کی مه نیسي. 200 کیلوګرامه کریټ په پلټفارم نه ښویږي.



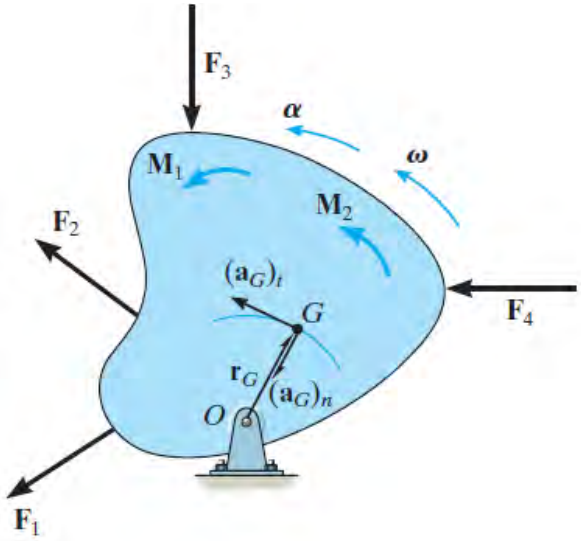
پوښتنه 17-56

17.4 د حرکت معادلې: په یوه ثابت محور ګرزیدل
(EQUATIONS OF MOTION: ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

یو سخت جسم (یا تخته) چې په انځور 17-13a کې ښودل شوي په پام کی نیسو. د دی جسم دوران د ثابت محور په شاوخوا کی، کوم چې د صفحې سره عمود او له پین څخه پر O کی تیریږی، محدود شوي. زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل د خارجي قوی او کپل مومینټ سیستم لخوا، چې پر جسم عمل کوي، رامنځته کیږي. څرنګه چې د جسم د کتلی مرکز G په یوه دایروي لاره حرکت کوي، د دې نقطې تعجیل ترټولو غوره، د هغې د مماسی او عمودي اجزاوو له لارې وړاندې کیږي. د تعجیل د مماسي جز اندازه $(a_G)_t = \alpha r_G$ ده، او باید د جسم د زاویوی تعجیل $\boldsymbol{\alpha}$ جهت سره مطابق عمل وکړي. د تعجیل عمودی جز اندازه $(a_G)_n = w^2 r_G$ ده. دا جز تل له G څخه O ته جهت لری، پرته له دې چې د w دګرزیدو جهت کومی خواته دی.

د جسم آزاد او کینټیک ډایګرامونه په انځور 17-13b کې ښودل شوي دي. دوی اجزاوې $m(\mathbf{a}_G)_t$ او $m(\mathbf{a}_G)_n$، چې په کینټیک ډایګرام کې ښودل شوي، د جسم د کتلې مرکز د تعجیل مماسی او عمودی اجزاوو سره تړاو لري. ویکتور $I_G\mathbf{a}$ په همغه جهت کې عمل کوي لکه څنګه چې $\boldsymbol{a}$ عمل کوي او د $I_G\mathrm{a}$ اندازه لري. د هغه د پایلو له مخې چې په برخه 17.2 کې ورکړل شوي، د جسم لپاره د حرکت معادلې په دې بڼه لیکل کیدی شي:

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G \qquad (17\text{–}14)$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$



(a)

د مومنټ معادله کیدی شی بدله شی د مومنټ په مجموعه چې په جسم یا بهر له هغه په هر خپل سري ټکي P باندې و نیول شی، په شرط ددې چې مجموعه د مومنټ $\sum(M_k)_P$ چې د $I_G\,\boldsymbol{a}$ ، $m(\mathbf{a}_G)_t$، او $m(\mathbf{a}_G)_n$ لخوا په دې ټکي باندې تولید شوي په پام کې ونیول شي.

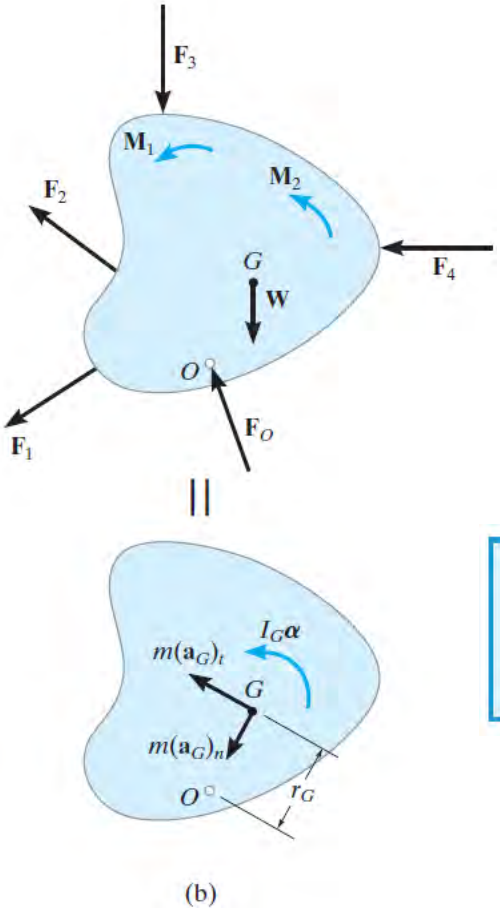
د مؤمنټ معادله د O نقطې ته (Moment Equation About Point O)

اکثره وخت مناسب ده چې په پین O کې دمؤمنتونوجمع کول تر سره شي، ترڅومجهوله قوه $\mathbf{F}_O$ له منځه یوسي. د کینیټیک ډیاګرام انځور 17-13b څخه، دا لاندې ته اړتیا ده:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma (\mathcal{M}_k)_O;$$

$$\Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G \alpha \qquad (17–15)$$

د $m(\mathbf{a}_G)_n$ مؤمنت دلته شامل نه دی، ځکه چې د دې ویکتور د عمل کربنه له O تېريږي. که مور $(a_G)_t = r_G a$ ځای په ځای کړو، نو پورته معادله داسې ليکلی شو:



$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = (I_G + mr_G^2)\alpha.$$

د موازي محور تيورۍ له مخې، $I_O = I_G + md^2$، او له دې امله په قوسونو کې راغلی عبارت د جسم انرشيايی مومنت د ثابت محور په اړه بنيي چې له O نقطې تېريږي. * په پايله کې، مور کولی شو د جسم لپاره د حرکت دري معادلې هم داسې وليکو:

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O \alpha \end{aligned} \qquad (17–16)$$

کله چې له دې معادلو څخه استفاده کوئ، په ياد ولرئ چې "$I_O a$" د $m(\mathbf{a}_G)_t$ او" I_G $\boldsymbol{a}$ " مؤمنت د O نقطې ته حسابوي، انځور 17-13b . په بل عبارت:

$$\Sigma M_O = \Sigma (\mathcal{M}_k)_O = I_O \alpha$$

* په نتيجه کی $SM_O = I_O a$ په مستقيم ډول له معادلې 17-6څخه ترلاسه کېدی شي که نقطه P د O سره يوځای انتخاب شي، په دې پوهيدلو سره چې $(a_P)_x = (a_P)_y = 0$

د تحلیل تګلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د کنټیک پوښتنو حل کولو لپاره چې د یوې جسم د څرخیدو یوه ثابت محورسره تړاولري، دا لاندې کړنلاره وکاروي :

د جسم آزاد ډیاګرام:(Free-Body Diagram)

. د انرشیل محوری سیستم n, t وټاکئ او د تعجیلونو $(\mathbf{a}_G)_n$او $(\mathbf{a}_G)_t$او همدارنګه د جسم زاویوي تعجیل $\boldsymbol{a}$ لوری او حس مشخص کړئ. په یاد ولرئ چې $(\mathbf{a}_G)_t$باید په هغه لوری عمل وکړي چې د $\boldsymbol{a}$ د څرخیدو حس سره سمون ولري، پداسې حال کې چې $(\mathbf{a}_G)_n$ تل د څرخیدود محور (د O نقطې) په لور عمل کوي.

. د آزاد جسم ډیاګرام رسم کړئ ترڅو په جسم ټولې بهرنۍ قوی او کپل مؤمنتونه حساب شي.

. د انرشیایی مؤمنت I_G یا I_O اندازه وټاکئ.

. د پوښتنې نامعلومې برخې وپیژنئ.

. که پرېکړه وشي چې د څرخیدو د حرکت معادله $\sum M_P = \sum (M_k)_P$ وکارول شي، یعنې P یوه داسې نقطه وي چې د G یا O څخه جلا وي، نو د کیینټیک ډیاګرام رسمول په پام کې ونیسئ ترڅو د $(m(\mathbf{a}_G)_n)$ ، $(m(\mathbf{a}_G)_t)$ ، او $I_G\mathbf{a}$ د اجزاوو له امله جمع شوې مؤمنت $\sum (M_k)_P$ په ښه توګه وګورئ.

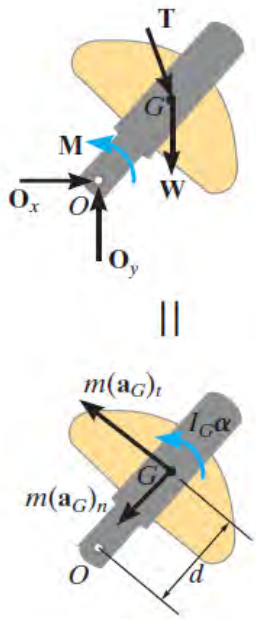
د حرکت معادلې (Equations of Motion)

. د ټاکل شوې کنوانسیون دعلامې سره سم درې د حرکت معادلې تطبیق کړئ.

. که مؤمنټ د جسم د کتلې د مرکز G په اړه راټول شي، نو $\sum M_G = I_G\mathbf{a}$ کیږي، ځکه چې $(m\mathbf{a}_G)_t$او $(m\mathbf{a}_G)_n$ د G په اړه کوم مؤمنټ نه جوړوي.

. که مؤمنت د څرخیدو محور په اتکا نقطه O کې راټول شي،





د تیلو پمپ ماشین کرانک په یو ثابت محور څرخیږی، کوم چې د چلونکی د موټرد ټورک **M** لخوا رامینځته کیږي. په آزاد جسم ډیاګرام کې ښودل شوي بارونه د کیینټیک ډیاګرام په مطابق اغیزې تولیدوي. که مؤمنت د جسم د جاذبې په مرکز G کې راټول شي، نو بیا $\Sigma M_G = I_G a$.

که چیرې مؤمنت د O په ټکې کې راټولې شي، دا باید په پام کې ونیول شي چې $(a_G)_t =$ αd ، نو

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = (I_G + md^2)\alpha = I_O\alpha.$$

نو $(ma_G)_n$ د O په اړه کوم مؤمنت نه جوړوي، او بنودل کیدی شي چې $\sum M_O = I_O a$.

کینیماتیک (Kinematics):

- که بشپړ حل د حرکت د معادلو په مرسته ترلاسه نشي، نو کینیماتیک وکاروئ.
- که چیرې زاویوي تعجیل متغیره وي، نو دا لاندی وکاروئ.

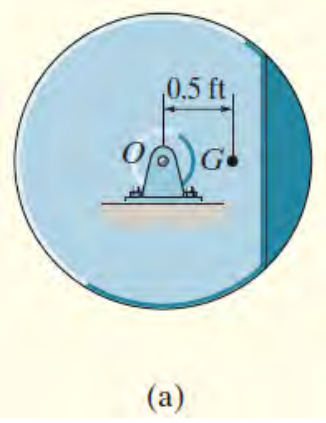
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- که زاویوی تعجیل ثابت وی دا لاندی و کاروئ

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

مثالونه

مثال 17.8



په انځور 17-14a کی بنودل شوي غیر متوازن 50 پونډه فلای ویل ، چې د جیریشن شعاع $k_G = 0.6\text{ft}$ ، هغه محورته چې د کتلې د مرکز G نه تیریږی، لرې. که د دریدلی حالت څخه خوشې شي، په دې وخت کې د پین O په نقطه کې د عکس العمل افقي او عمودي اجزاوی وموموئ.

حل:

انځور 17-14

د جسم آزاد او کینیتیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

څرنګه چې G په یوه دایروی مسیر کې حرکت کوي، نو دا به د تعجیل دواړه عمودي او مماسي اجزاوی ولري. همدارنګه، څرنګه چې a چې د فلایویل د تول له امله رامنځته کیږي، او د ساعت په لور عمل کوي، د تعجیل مماسي جز باید ښکته لور ته عمل وکړي. ولې؟
څرنګه چې $w = 0$، یوازې $m(a_G)_t = ma\ r_G$ او $I_G a$ د کینټیک ډیاګرام په انځور 17-14bکې ښودل شوي دي. دلته انرشیایی مؤمنت، د G په شاوخوا دي

$$I_G = mk_G^2 = (50\text{ lb}/32.2\text{ ft/s}^2)(0.6\text{ ft})^2 = 0.559\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

هغه دري مجهوله عبارت دی په O_n ، O_t، او a .

د حرکت معادله (Equation of Motion)

$$\stackrel{+}{\leftarrow}\Sigma F_n = m\omega^2 r_G: \qquad O_n = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

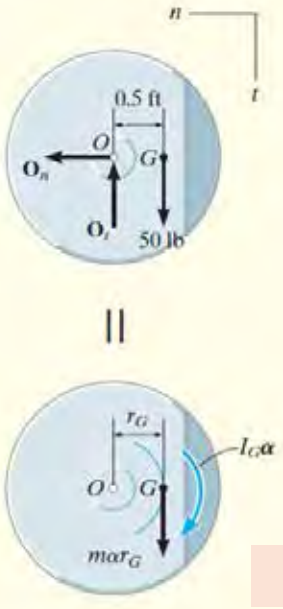
$$+\downarrow\Sigma F_t = m\alpha r_G: \qquad -O_t + 50\text{ lb} = \left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(\alpha)(0.5\text{ ft}) \qquad (1)$$

$$\curvearrowright+\Sigma M_G = I_G\alpha: \qquad O_t(0.5\text{ ft}) = (0.5590\text{ slug}\cdot\text{ft}^2)\alpha$$

له حل کیدو وروسته دا لاندی په لاس راځي

$$\alpha = 26.4\text{ rad/s}^2 \quad O_t = 29.5\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

که مؤمنت د O په ټکی کی ونیول شی ترڅو O_n او O_t حذف شي او د a لپاره مستقیم حل ترلاسه شي، انځور 17-14b . دا دوو مختلفو لارونه په یوه لاره ترسره کیدی شي



(b)

$$\curvearrowright+\Sigma M_O = \Sigma(M_k)_O:$$

$$(50\text{ lb})(0.5\text{ ft}) = (0.5590\text{ slug}\cdot\text{ft}^2)\alpha + \left[\left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)\alpha(0.5\text{ ft})\right](0.5\text{ ft})$$

$$50\text{ lb}(0.5\text{ ft}) = 0.9472\alpha \qquad (2)$$

انځور 17-14

که $M_O = I_O a$ S پلي شي، نو د موازي-محور د قضیی له مخي د O په شاوخوا کي د فلای ویل د اینرشیا مؤمنټ داسي دی:

$$I_O = I_G + mr_G^2 = 0.559 + \left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2 = 0.9472 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

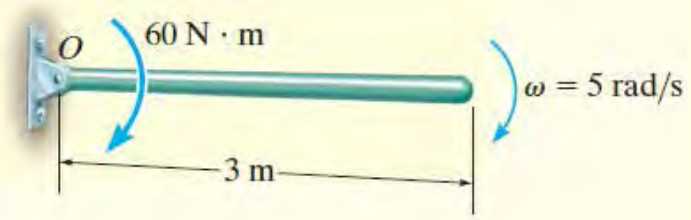
نو:

$$\curvearrowleft + \Sigma M_O = I_O \alpha; \quad (50 \text{ lb})(0.5 \text{ ft}) = (0.9472 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\alpha$$

چې دا معادله 2 ته ورته ده. د a لپاره حل کوو او په معادله 1 کي ځای پر ځای کوو چې د O_t حل په لاس راکوی چې په خوا مو په لاس راوړی وا.

مثال 17.9

په هغه لحظه کي چې په انځور 17-15a کي ښودل شوی، 20 کیلوګرامه نری راډ $w = 5$ rad/s زاویوي سرعت لري. په دې لحظه کي زاویوي تعجیل او په راډ باندی د پین عکسلعمل افقي او عمودي اجزاوی وموميئ.

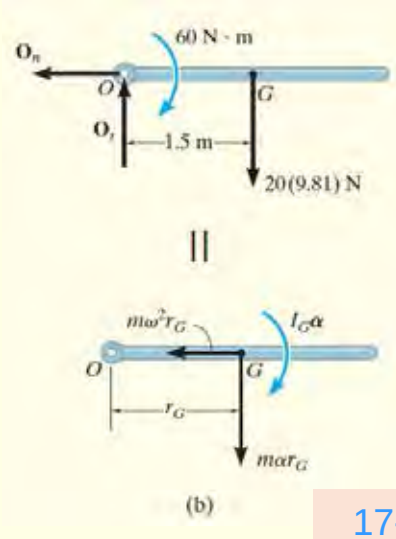


(a)

حل

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

که څنګه چې په کینټیکي ډیاګرام ،انځور 17-15b ، کي ښودل شوی، نقطه G د یوه دایروي مسیر شاوخوا حرکت کوي، نو دا دوی اجزاوی د تعجیل لري. دا مهمه ده چې مماسي جز $a_t = a\, r_G$ ښکته عمل کوی ځکه چې دا باید د a د دوران د جهت سره سمون ولري. دري مجهوله O_n، O_t، او a دي



(b)

انځور 17-15

د حرکت معادله (Equation of Motion)

$$\stackrel{+}{\leftarrow}\Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \quad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1.5\text{ m})$$
$$+\downarrow\Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad -O_t + 20(9.81)\text{ N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1.5\text{ m})$$
$$\curvearrowright+\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad O_t(1.5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = \left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

له حل کیدو وروسته دا لاندی په لاس راځي

$$O_n = 750\text{ N} \quad O_t = 19.05\text{ N} \quad \alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad Ans.$$

د دې پوښتنې لپاره یو مستقیم حل دا دی چې مؤمنت په O ټکی کې ونیسو ترڅو O_n او O_t حذف شی او د a لپاره یو مستقیم حل ترلاسه کړو. دلته

$$\curvearrowright+\Sigma M_O = \Sigma(M_k)_O: \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) =$$
$$\left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1.5\text{ m})](1.5\text{ m})$$
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad Ans.$$

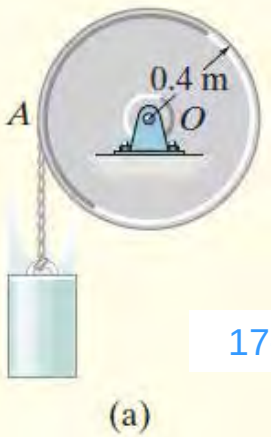
لکه څنګه چې $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ دید یوه نری (slender) راډ د پاره دی، مونږ لیکلی شو:

$$\curvearrowright+\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = \left[\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad Ans.$$

یادونه: د پرتله کولو له مخې، وروستی معادله د a لپاره تر ټولو ساده حل وړاندې کوي او د کینټیکي ډیاګرام کارولو ته اړتیا نه لري.

مثال 17.10

په انځور 17-16a کې ښودل شوی ډرم 60 کیلوګرامه کتله لري او د جایریشن شعاع یې $k_O = 0.25$ متره ده. یوه رسۍ چې کتله یې د پام وړ نده تر ډرم تاو او یو بلاک چې 20 کیلوګرامه کتله لري ور سره تړلی دی. که بلاک خوشې شي، د ډرم زاویوي تعجیل وموموئ.



انځور 17-16

حل I

د آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram) دلته به مور ډرم او بلاک جلا جلا وڅیړو، انځور 17-16b . فرض کوو چې بلاک په ښکته لور **a** تعجیل لري، چې په ډرم کې مخالف د ساعت جهت ***a*** زاویوي تعجیل لامل کیږي. د ډرم اینرشیامؤمنټ عبارت دي په:

$$I_O = mk_O^2 = (60\text{ kg})(0.25\text{ m})^2 = 3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

دلته پنځه مجهوله عبارت دی په O_x ، O_y ، T، a او a .

د حرکت معادله (Equation of Motion)

مؤمنت به په O کې ونیسو ترڅو O_x او O_y حذف شي. د ډرم او بلاک لپاره، مور لرو:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0.4\text{ m}) = (3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (1)$$

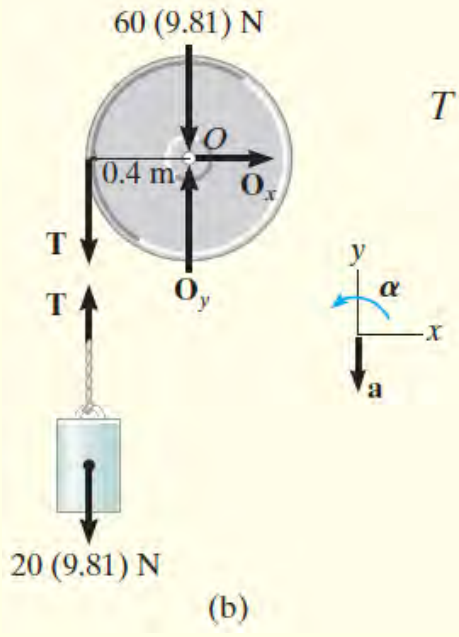
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad -20(9.81)\text{ N} + T = -(20\text{ kg})a \qquad (2)$$

کینمټیکز (Kinematics)

لکه څنګه چې د رسۍ او ډرم ترمنځ د تماس ټکی A د تعجیل یوه مماسی جز **a** لري، نو

$$\circlearrowleft +a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0.4\text{ m}) \qquad (3)$$

پورتنۍ معادلې حل کوو



$$T = 106\text{ N}\quad a = 4.52\text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2\curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

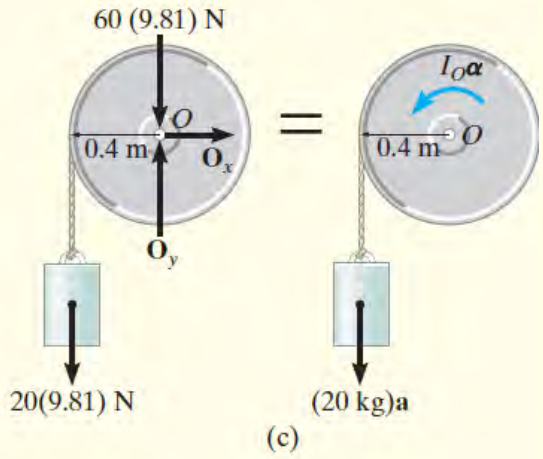
حل II

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body (and Kinetic Diagrams . په تحلیل کې ډرم او بلاک د یوه واحد سیستم په توګه په پام کې نیولوسره د کیبل کشش T حذف کیدی شي، انځور 17-16c . کینټیک ډیاګرام یې ښودل شوی دی ځکه چې مؤمنت به په O ټکی کې ونیول شي.

د حرکت معادله (Equation of Motion)

د معادلی 3 په کارولو سره او د مومنټ معادله په O ټکی تطبیق کوو تر څو O_x او O_y مجهولونه حذف شي، مونږ لرو:

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = \Sigma (M_k)_O; \qquad [20(9.81)\ \text{N}]\,(0.4\ \text{m}) =$$
$$(3.75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [20\ \text{kg}(\alpha\ 0.4\ \text{m})](0.4\ \text{m})$$
$$\alpha = 11.3\ \text{rad/s}^2 \curvearrowright \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 17-16

یادونه: که بلاک لرې شي او د 20(9.81) نیوټن قوه په رسۍ کی تطبیق شي، وښیی چې $a = 20.9\ \text{rad/s}^2$. دغه ارزښت زمونږ د نتیجې څخه لوی دی ځکه چې بلاک یوه اینرشیا لري، یا د تعجیل پر وړاندې مقاومت.

مثال 17.11

په انځور 17-17a کې ښودل شوی نری ډنډه چې کتله یې m او اوږدوالی l لري، له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $q = 0°$. په هغه لحظه کې چې $q = 90°$ وی د پین A په ډنډه باندی د قوی افقي او عمودي اجزاوی وموموئ.



د آزاد بدن او کینیتیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

د ډنډې د آزاد بدن ډیاګرام په عمومي موقعیت q کې په انځور 17-17b کې ښودل شوی دی. د اسانتیا لپاره، د A په ټکی کې د قوی اجزاوی په n او t جهتونو ښودل شوي دي. پام وکړئ چې a د ساعت په لور حرکت کوي، $(a_G)_t$ په $+t$ لوري کې عمل کوي. د A په نقطه کې د ډنډی کې نو

اینرشیایی مؤمنت $I_A = \frac{1}{2}m\,l^2$ دی. د ورکړل شوي زاویې q لپاره څلور مجهوله موجود دي : A_n، A_t، w، او a .

د حرکت معادله (Equation of Motion)

مؤمنت به په A کیونیولشی ترڅو A_n او A_t له منځه یوړل شي.

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \quad A_n - mg\sin\theta = m\omega^2(l/2) \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad A_t + mg\cos\theta = m\alpha(l/2) \qquad (2)$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = I_A\alpha; \quad mg\cos\theta(l/2) = \left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\alpha \qquad (3)$$

کینمتیکس (Kinematics)

لکه څنګه چې په معادله 3 لخوا بنودل شوي، a ثابته نه ده؛ بلکې د دندې په موقعیت، q پورې اړه لري. اړینه څلورمه معادله د کینیمتیکز په کارولو سره ترلاسه کیږي، چیرته چې a او w د q سره د لاندې معادلې له لارې ترلې دي

$$(\curvearrowright +) \qquad \omega\,d\omega = \alpha\,d\theta \qquad (4)$$

په یاد ولرئ چې د دې معادلې لپاره مثبت دساعت لورې ګرزیدنه د معادلې 3 له لورې سره سمون لري. دا مهمه ده ځکه چې موږ د یوځای حل په لټه کې یو.

په q=90° کې د w د حل کولو لپاره، له معادلو 3 او 4 څخه a حذف کړئ، چې پایله کې دا ورکوي

$$\omega\,d\omega = (1.5g/l)\cos\theta\,d\theta$$

څرنګه چې w=0 په q=0° ده، موږ لرو

$$\int_0^{\omega}\omega\,d\omega = (1.5g/l)\int_{0^\circ}^{90^\circ}\cos\theta\,d\theta$$

$$\omega^2 = 3g/l$$

دا ارزښت په معادله 1کې د q = 90° سره ځای پر ځای کړئ او د معادلو 1 څخه تر 3 پورې حل کړئ، چې پایله کې ورکوي

$$\alpha = 0$$

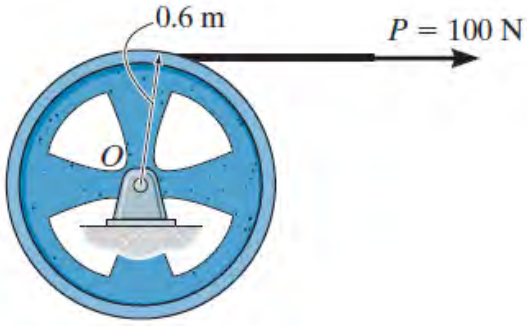
$$A_t = 0 \qquad A_n = 2.5mg \qquad Ans.$$

یادونه: که چیرې $SM_A = (\Sigma M_k)_A$ وکارول شي، نو باید د $I_G\boldsymbol{\alpha}$ او $m(a_G)_t$ مؤمنتونه په A کی ونیول شی.

FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

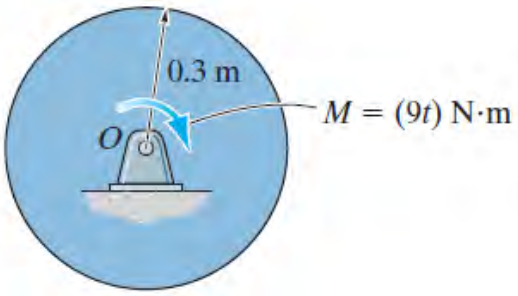
بنسټیز پوښتنې

ب 17–7. یو100 کیلوګرامه څرخ خپل مرکز O ته د جایریشن شعاع $k_O = 500mm$ لري. که څرخ له دریدلی حالت نه پیل وکړي، په $t = 3s$ کې یې زاویوي سرعت وموموئ.



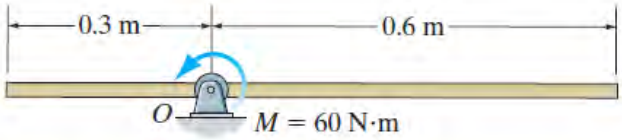
ب 17-7

ب 17–8. په یوه 50 کیلوګرامه ډیسک یو $M=(9t)$ N.m کپل مؤمنت پلي شوي دی، چیرته چې t په ثانیو کې ده. په $t = 4s$ وخت کی د ډیسک زاویوي سرعت وموموئ. ډیسک له دریدلی حالت څخه پیل کړی.



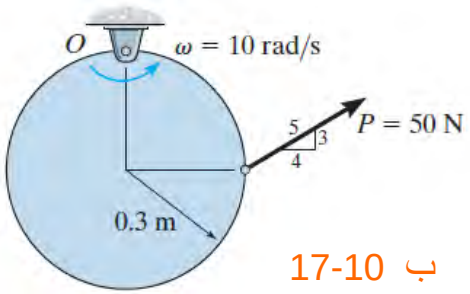
ب 17-8

ب 17–9. په بنودل شوي لحظه کې، يو يوډول 30 کيلوګرامه نرۍ راډ د ساعت د حرکت مخالف زاويوي سرعت $w = 6$ rad/s لري. په راډ باندې د پين چې په O ټکې کې موقعيت لري د ريکشن مماسي او عمودي اجزاوې، او همدارنګه د راډ زاويوي تعجيل وموميئ.



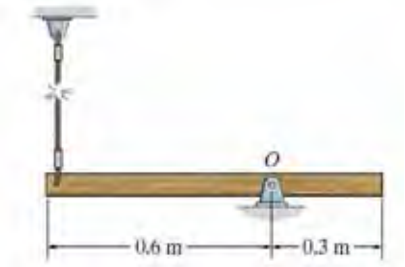
ب 17-9

ب 17–10. په بنودل شوي لحظه کې، يو 30 کيلوګرامه ډيسک د ساعت مخالف w=10 rad/s زاويوي سرعت لري. د پين چې په ټکې O کې موقعيت لري په ډيسک باندې د ريکشن مماسي او عمودي اجزاوې، او همدارنګه د ډيسک زاويوي تعجيل وموميئ.



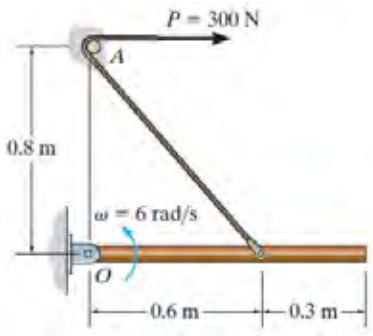
ب 17-10

ب 17–11. يوشان نرۍ (slender) راډ 15 کيلوګرامه کتله لري. په پين O کې د ريکشن افقي او عمودي اجزاوې او د راډ زاويوي تعجيل هغه وخت وموميئ کله چې تار پرې شي.



ب 17-11

ب 17–12. يو يوشان 30 کيلوګرامه نرۍ راډ د تار په وسيله پورته کيږي، چې د A په نقطه کې د يوه کوچنۍ بنوی ميخ په سرتيريږي. که راډ په بنودل شوي لحظه کې د w = 6rad/s مخالف د ساعت زاويوي سرعت ولري، په پين O کې د ريکشن مماسي او عمودي اجزاوې او د راډ زاويوي تعجيل وموميئ.

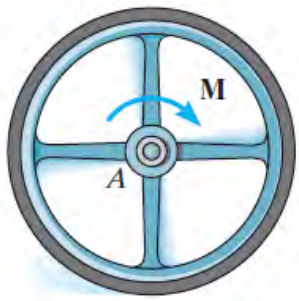


ب 17-12

PROBLEMS
پوښتنې

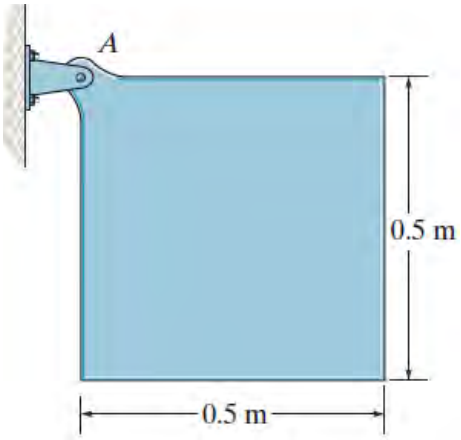
په ټول حلونو کې باید د آزاد بدن یو ډیاګرام شامل کړي.

17–57 . یو 10 کیلوګرامه څرخ د جایریشن شعاع $k_A = 200\text{mm}$ لري. که څرخ د $M = (5t)\text{Nm}$ مؤمنت تابع وي، چیرته چې t په ثانیو کې ده، په $t = 3\text{s}$ کې د څرخ زاویوي سرعت وموندئ که څرخ له دریدلی حالت څخه پیل کړی وي. همدارنګه، د ثابت پین A لخوا په څرخ باندی تطبیق شوي ریکشنونه د حرکت پر مهال محاسبه کړئ.



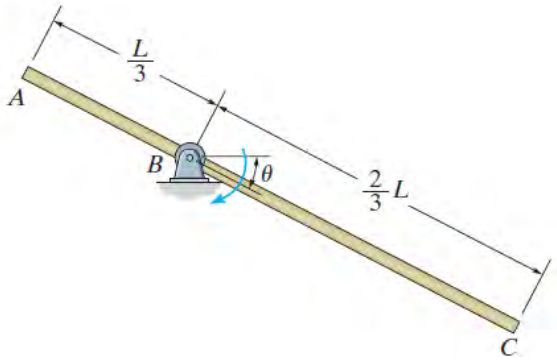
پوښتنه 17-57

17–58 یو یوشان 24 کیلوګرامه تخته په بنودل شوي حالت کې له استراحت څخه خوشې کیږي. د دې لومړنۍ زاویوي تعجیل او په پین A کې افقي او عمودي ریکشنونه وموندئ.



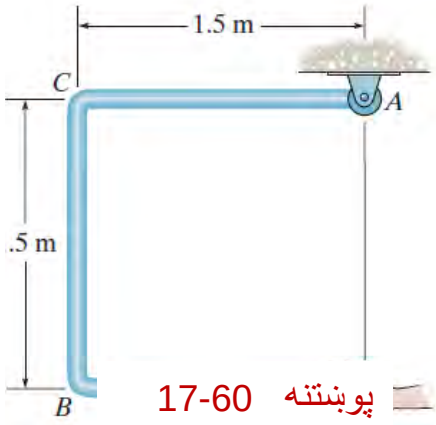
پوښتنه 17-58

17–59 یوشان نری راډ m لکتله لري. که دا له دریدلی حالت څخه کله چې $q = 0°$ خوشې شي، د ریکشن قوی اندازه چې د پین B لخوا په راډ باندی کله چې $q = 90°$ وی تطبیق کیږي، وموميئ.



پوښتنه 17-59

***17–60** کوږ راډ 2 kg/m کتله لري. که راډ په ښودل شوي حالت کې له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د راډ لومړنی زاویوي تعجیل او د A په ټکی کی افقي او عمودي ریکشنونه وموميئ.

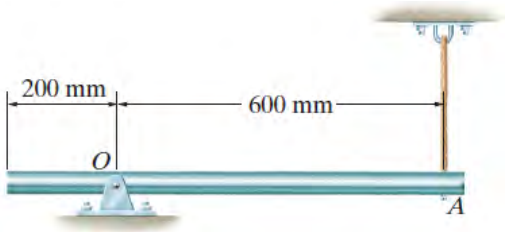


پوښتنه 17-60

17–61 دا لاندی یوشان نری راډ 5 kg کتله لري. که د A په ټکی کی تار پرې شي، په پین O کې ریکشن وموميئ:

(a) کله چې راډ لاهم په افقي حالت کې وي.

(b) کله چې راډ عمودي حالت ته تاوشي.

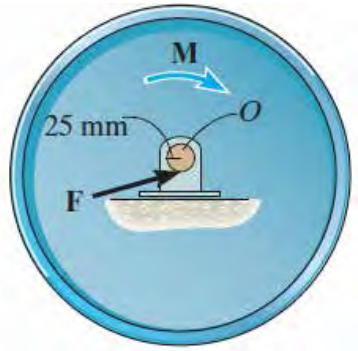


پوښتنه 17-61

17–62 یو موټور $M = 2$ N.m ثابت تورک د 50 mm قطر شافټ ته چې د 30 کیلوګرامه فلای‌ویل مرکز سره نښتی دی، تیاره وی. د بیرنګ لخوا په شافټ باندې تطبیق شوی عمومي

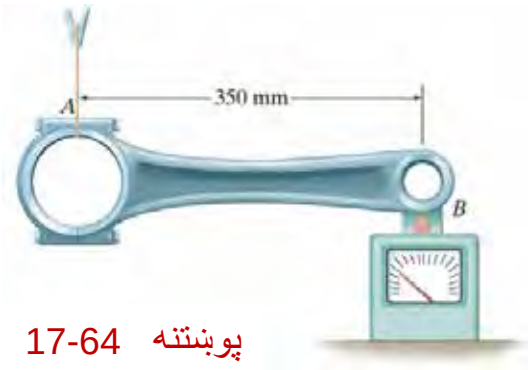
اصتکاکی قوه **F** ، چې په شافټ باندې مماسی عمل کوي، مقدار یې F=50N دی. محاسبه کړئ چې څومره وخت تورک باید په شافټ باندې عمل وکړی ترڅو د فلای ویل زاویوي سرعت له 4 rad/s څخه 15 rad/s ته لوړشي. د فلای‌ویل دجایریشن شعاع خپل مرکز O ته k_O =0.15m ده.

17–63 که د پوښتنې 17-62 موټور له شافټ څخه جلا شي کله چې د فلای‌ویل زاویوي سرعت 15 rad/s ته ورسیږي، نو M=0 دی. محاسبه کړئ چې څومره وخت به ونیسي ترڅو د 50N بیرنګ اصتحکاکی قوه فلای‌ویل ودروي.



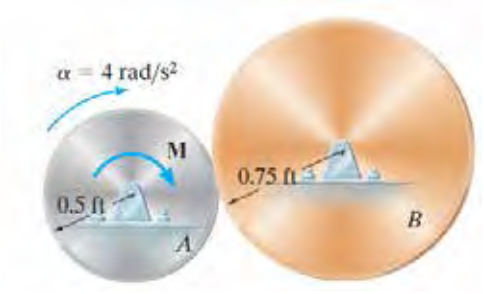
پوښتنې 17-62/63

17–64 یوه 4 کیلوګرامه راډ د اینرشیای مؤمنت I_G د تجربوي معلومولو لپاره، راډ په افقي ډول په A کې د تار په وسیله او په B کې د بیرنګ او پیزو الیکټریک سنسر په وسیله نښلول شوې دی، چې د قوی د اندازه کولو لپاره کارول کیږي. د دې توازن حالت کې په B کې قوه 14.6N اندازه کیږي. که تار خوشی شی د B په نقطه کې ریکشن 9.3N اندازه شوی، د I_G ارزښت معلوم کړئ. په دې اندازه کولو کی اتکا B حرکت نه کوي. د محاسبې لپاره، باید د G افقي ځای په ګوته شي.



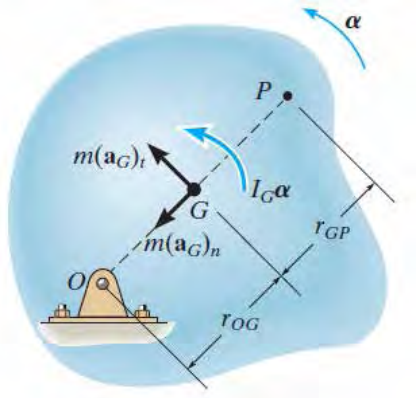
پوښتنه 17-64

17–65 ډیسک A 5 پونډه تول لري، او ډیسک B 10 پونډه تول لري. که چیرې هیڅ ښویدل د دوی ترمنځ نه وي، هغه کپل مؤمنت M محاسبه کړئ چې باید په ډیسک A باندې تطبیق شي ترڅو ده ته $4\ rad/s^2$ زاویوي تعجیل ورکړل شي.



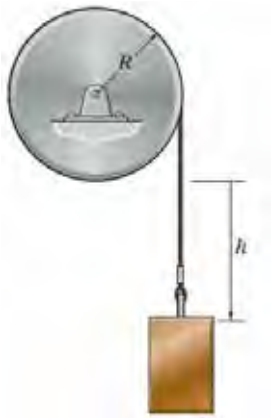
پوښتنه 17-65

17–66 د ثابت محور O په شاوخوا کې د سخت بدن عمومي دوراني حرکت لپاره کینټیک ډیاګرام په انځور کې ښودل شوی. وښیی چې $I_G\boldsymbol{a}$ له منځه وړل کیدی شي کله چې ویکتورونه $m(\mathbf{a}_G)_t$ او $m(\mathbf{a}_G)n$ په P ټکی کې ځای په ځای شي. دا نقطه د جسم د کتلې مرکز G څخه $r_{GP} = k^2_G/r_{OG}$ فاصله لري. دلته k_G د جسم د جایریشن شعاع په یوه محور ښیي کوم چې له G تیریږي. د P ټکی د جسم د شاک مرکز یا "center of percussion" په نوم یادیږي.



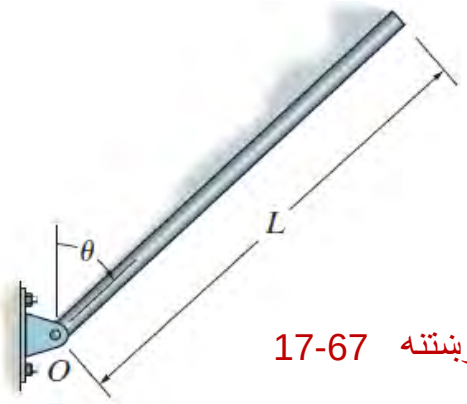
پوښتنه 17-66

17–67. ډیسک د M کتله او د R شعاع لري. که چیرې د m کتلې بلاک د رسۍ سره تړلی وي، د ډیسک زاویوي سرعت ومومئ کله چې بلاک د دریدلی حالت نه خوشې شي اوفاصله h ښکته ولویږی.



پوښتنه 17-67

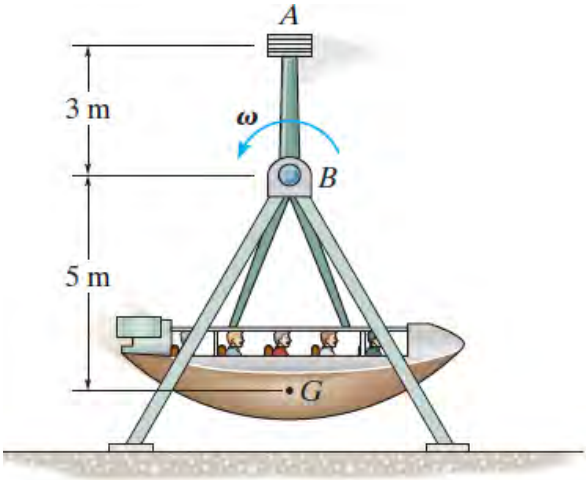
***17–68** يو راډ L اوږدوالي او m کتله لري. که چيرې د دريدلی حالت نه کله چې $\theta = 0°$ وی خوشې شي، زاويوي سرعت يې تابع د θ په توګه وموميئ. همدارنګه، په پين O کی افقي او عمودي ريکشنونه تابع د θ په توګه څرګند کړئ.



پوښتنه 17-67

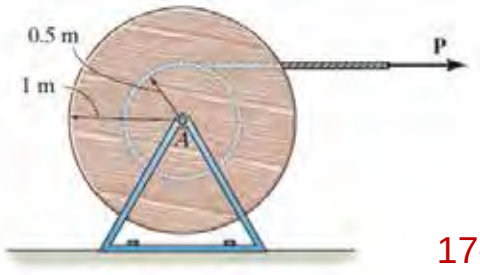
17–69. د مسافرينو، ګنډولا، او د هغې د زانګو چوکاټ، ټول 50Mg تول لري، د کتلې مرکز يې په G کې دي، او د جايريشن شعاع يې k_B =3.5m ده. برسېره پردې، د 3 Mg د فولادو بلاک په A کې د ټکی متمرکز کتلی په توګه ګڼل کيدی شي. که چيرې ګنډولا په خپل ټيټ ټکي کې په ω =1 rad/s سرعت سره په آزاده توګه حرکت وکړي په پين B کې افقي او عمودي ريکشنونه وموميئ. همدارنګه، په دې وخت کې د ګنډولا زاويوي تعجيل څه دی؟

17–70. د مسافرينو، ګنډولا، او د هغې د زانګو چوکاټ ټول 50Mg تول لري، د کتلې مرکز يې په G کې دي، او د جايريشن شعاع يې k_B =3.5m ده. برسېره پردې، د 3 Mg د فولادو بلاک په A کې د ټکی متمرکز کتلی په توګه ګڼل کيدی شي. که چيرې ګنډولا په خپل ټيټ ټکي کې په ω =1 rad/s سرعت سره حرکت وکړي ،هغه زاويه θ وموميئ چې ګنډولا به تر هغې پورې وخوځيږي مخکې له دې چې لنډمهاله ودريږي.



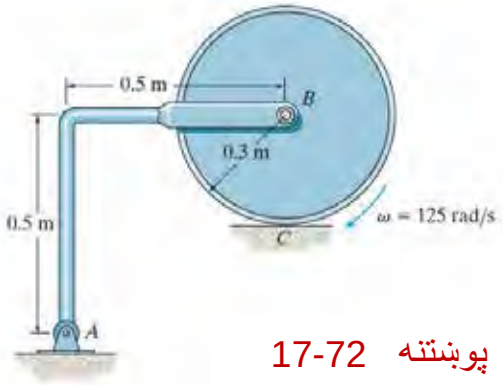
پوښتنې 17-69/70

17–71. د کیبل ریل(Reel) 400 کیلوګرامه کتله لري او د جایرشن شعاع یې $k_A = 0.75$ m ده. که چیرې قوه $P = (20t^2+80)$ N پرې عمل وکړی، د هغې زاویوي سرعت په $t = 2$ s کې وموميئ. له دریدلی حالت نه یې پیل کړي او t په ثانیو کې ده. د خلاص شوي کیبل کتله له پامه وغورځوئ، او فرض کړئ چې ریل به تل 0.50m شعاع ولري.



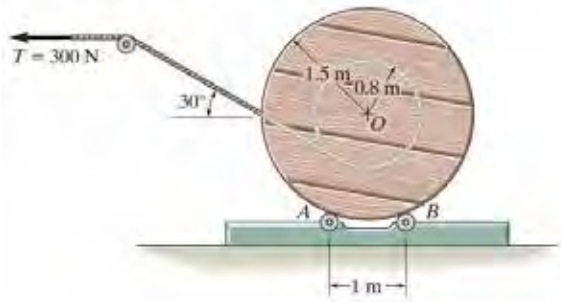
پوښتنه 17-71

***17–72.** دا لاندی 30 کیلوګرامه ډیسک په ابتدا کې په $\omega = 125$ rad/s سرعت سره ګرځي. که چیرې دا ډیسک پر ځمکه کیښودل شی چیرې چې د کینتیک اصطکاک ضریب $\mu_c = 0.5$ دی، د حرکت د دریدو لپاره اړین وخت محاسبه کړئ. افقي او عمودي اجزاوی د قوی چې غړي AB پر پین A په دې وخت کې تطبیقوي، معلوم کړئ. د AB کتله له پامه وغوځوی.



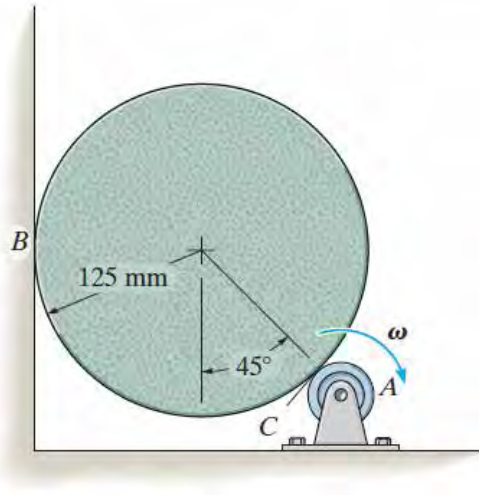
پوښتنه 17-72

17–73. دا لاندی ګوټک په کوچنیو رولرونو په A او B کې تکیه لري ، په تطبیق کولو د یوی قوه T =300 NT په کبل باندې، کبل له ګوټک څخه خلاصیږی. د 5 متره کیبل له ګوټک څخه د خلاصیدو لپاره اړین وخت محاسبه کړئ ، که چیرې ګوټک او کیبل ټوله کتله 600 kg ولري او د جایریشن شعاع یې k_O =1.2 m وي. د محاسبې لپاره، د خلاصشوی کیبل او د رولرونو کتلی له پامه وغورځوئ. رولرونه پرته له اصطکاک څخه ګرځي.



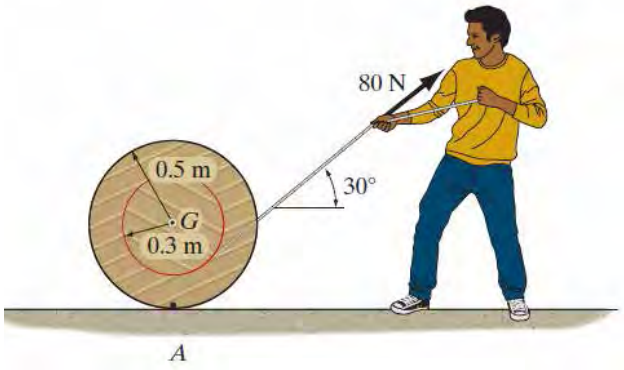
پوښتنه 17-73

17–74. دا لاندی 5 کیلوګرامه سیلینډر په ابتدا کې په دریدلی حالت کی دی کله چې د B دیوال او A روتور (rotor) سره تماس پیدا کوي. که چیرې روتور همېشه د زاویوي سرعت ω = 6 rad/s سره د ساعت په لورګرزی، د سیلینډر لومړنی زاویوي تعجیل محاسبه کړئ. د تماس سطحو B او C کې د کینیتک اصطکاک ضریب μ_k = 0.2 دی.



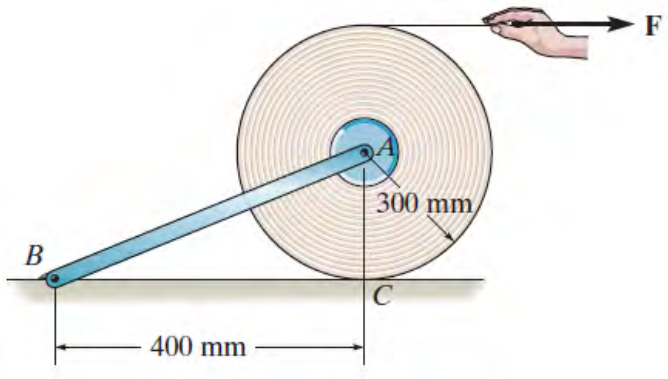
پوښتنه 17-74

17–75. سړی رسۍ په د 80 N قوه سره کشکوي. که چیرې په A کې هېڅ ښویدل نه وي، د ګوټک زاویوي تعجیل معلوم کړئ. ګوټک 60 kg کتله لري او د هغې د کتلی مرکز G ته د جایریشن شعاع یې k_G = 0.35 m ده.



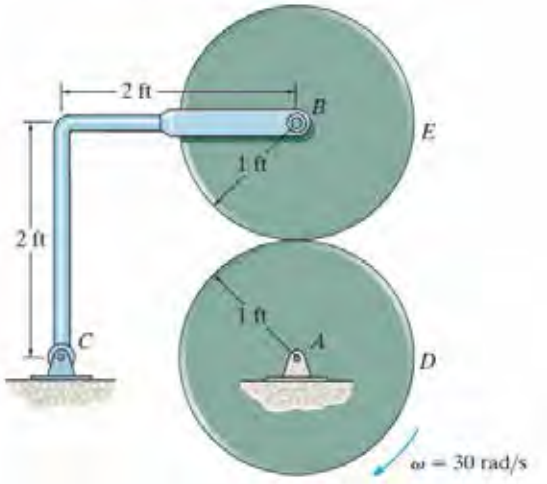
پوښتنه 17-75

***17–76.** دا لاندی 20 کیلوګرامه د کاغذ رول په یوه محور چې له A تیریږي د جایریشن شعاع k_A = 120 mm لري. دا رول د دوو برکټو AB په پایلو کی په پینوتکیه شوي دي. رول پر ځمکه پروت دی، چې د کینیتیک اصطکاک ضریب یې μ_k = 0.2 دی. که چیرې د کاغذ په پای کې F = 60 N افقي قوه عمل وکړی، د رول لومړنی زاویوي تعجیل معلوم کړئ لکه څنګه چې کاغذ خلاصیږی.



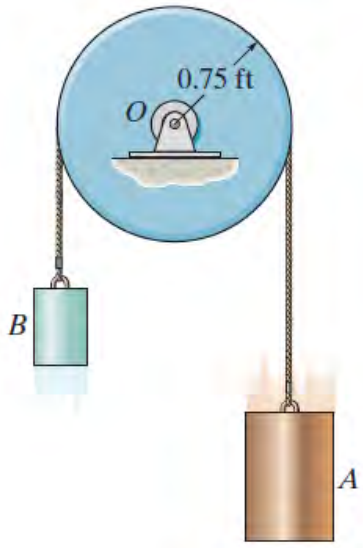
پوښتنه 17-76

17–77. ډیسک D په ثابت ډول د ساعت په لور په زاویوی سرعت $\omega = 30$ rad/s سره ګرځي. د ډیسک E تول 60 lb دی او په دریدلی حالت کی دی کله چې د D ډیسک سره تماس پیدا کړي. د ډیسک E لپاره اړین وخت محاسبه کړئ تر څو چې د D سره یو شان زاویوي سرعت ترلاسه کړي. د دواړو ډیسکونو ترمنځ د کینیتیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.3$ دی. د BC بار تول له پامه وغورځوئ.



پوښتنه 17-77

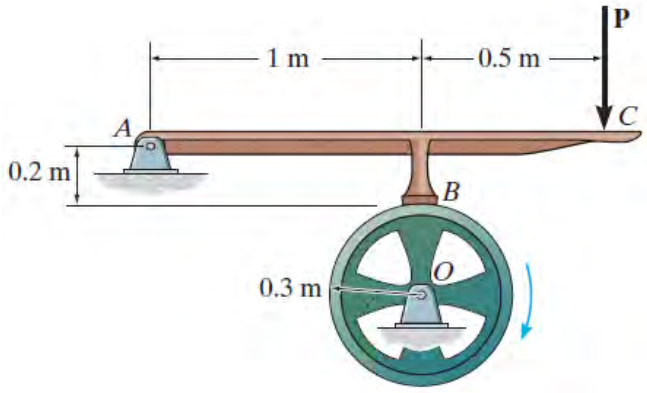
17–78 . دوه سیلینډره A او B ، چې تول یې په ترتیب سره 10 پونډه او 5 پونډه دي، د یوه رسۍ په پای کې تړل شوي چې په 3 پونډه څرخکی باندی تیریږي. که چیرې سیلینډرونه د دریدلی حالت څخه خوشې شي، د دوی سرعت په $t = 0.5$ s کې معلوم کړئ. رسۍ په څرخکی باندې نه ښویږي. د رسۍ کتله له پامه وغورځوئ. وړاندیز: "سیستم" داسی تحلیل کړئ چې دواړه سیلینډرونه او څرخکی پکې شامل وي.



پوښتنه 17-78

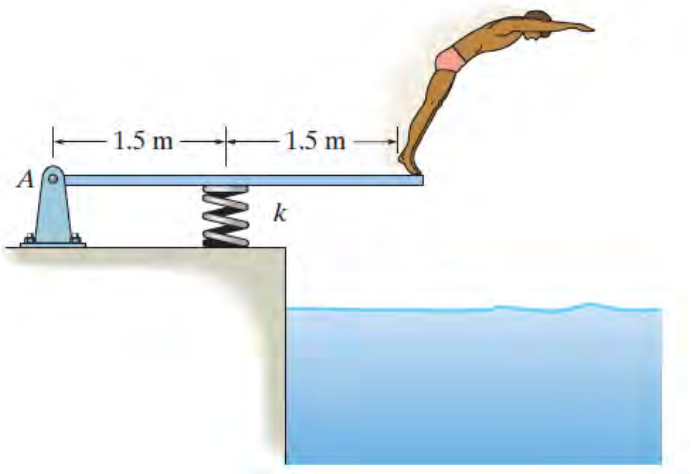
17–79. دا لاندې 50 کیلوګرامه فلایویل چې د کتلې په مرکزته یې د جایریشن شعاع k_O = 250 mm ده. مخکې له دې چې بریکونه یې ونیول شي په 1200 rev/min ثابت زاویوي سرعت سره ګرځي. که چیرې د بریک B او دفلای ویل بهرنۍ څنډې ترمنځ د کنیتیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.5$ وي، او د بریک سیستم په لاس باندې P = 300 N قوه تطبیق شي، د فلایویل د دریدلو لپاره اړین وخت محاسبه کړئ.

17–80. دا لاندې 50 کیلوګرامه فلایویل چې د کتلې په مرکزته یې د جایریشن شعاع k_O = 250 mm ده. مخکې له دې چې بریکونه یې ونیول شي په 1200 rev/min ثابت زاویوي سرعت سره ګرځي. که چیرې د بریک B او دفلای ویل بهرنۍ څنډې ترمنځ د کنیتیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.5$ وي، هغه ثابته قوه P محاسبه کړئ چې د بریک سیستم په لاس باندې تطبیق شي تر څو 100 دورونو په اوږدو کې فلایویل ودریږي.



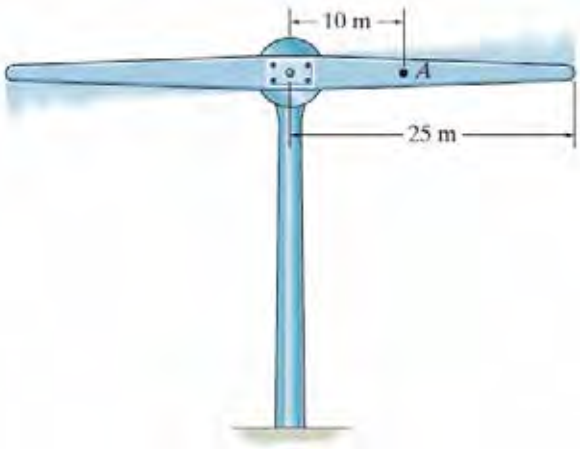
پوښتنه 79/80

17–81. د 25 کیلوګرامه ډلامبو د تختې زاویوي تعجیل معلوم کړئ، او په پین A کې د ریکشن افقي او عمودي اجزاء، په هغه لحظه کې چې سړی له بورډ څخه پورته کیږي و ټاکئ. فرض کړئ چې بورډ یو شان او سخته ده، او په هغه لحظه کې چې سړی پورته کیږی، فنر تر ټولو زیات غونج شوې وي (200 ملي متره)، $w = 0$ ، او تخته افقي ده. $k = 7$ kN/m وکاروي.



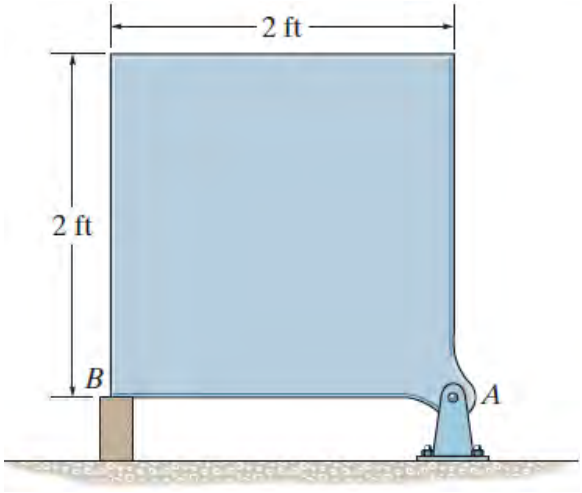
پوښتنه 17-81

17–82. توربین له روتور څخه جوړ دی چې ټورک په مرکز کې ور باندې تطبیق شوی. په هغه لحظه کې چې پرافقي حالت کې وي، زاویوي سرعت 15 rad/s او د ساعت په لور یې زاویوي تعجیل 8 rad/s^2 دی. په A غوڅه کې، داخلي عمودی قوه ، شیر قوه ، او مومنټ معلوم کړئ. فرض کړئ چې روتور 50 متره اوږد نری راډ دی چې کتله یې 3 kg/m ده.



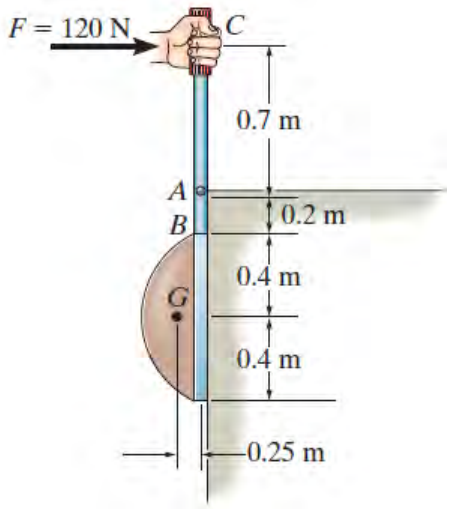
پوښتنه 17-82

17–83. که چېرې په ناڅاپي ډول اتکا په B کې لرې شي، په پين A کې لومړني ريکشنونه معلوم کړئ. تخته 30 پونډه تول لري.



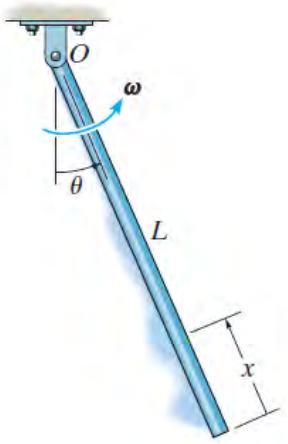
پوښتنه 17-83

***17–84.** د مرکز ګرمی ور 20 kg کتله لري او مرکز G ته يې د جايريشن شعاع $k_G =$ 0.25 m ده. که چېرې يوکارکونکی $F = 120$ N قوه يې د لاس په ځای تطبيق کړی چې ور يې خلاص کړی، کله چې ور په خلاصيدو شی د ورلومړنی زاويوي تعجيل او دريکشن افقي او عمودي اجزا وی چې پين A په هغه لحظه کې په وره باندې تطبيقوي، معلومی کړئ. د لاستي BAC کتله په محاسبه کې له پامه وغورځوئ.



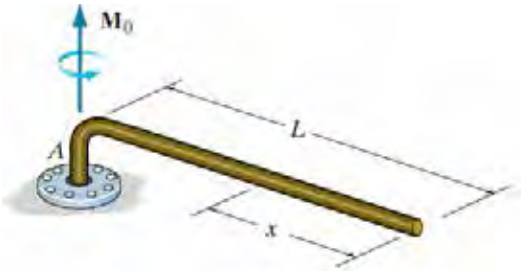
پوښتنه 17-84

17–85. دا لاندی میله په واحد اوږدوالي w تول لري. که چیرې دا په عمودي سطحه کی په ثابت نسبت w سره په O ټکی باندې ګرځي، داخلي عمودی قوه، شیر قوه ، او مومنټ د x او qله مخی معلوم کړئ.



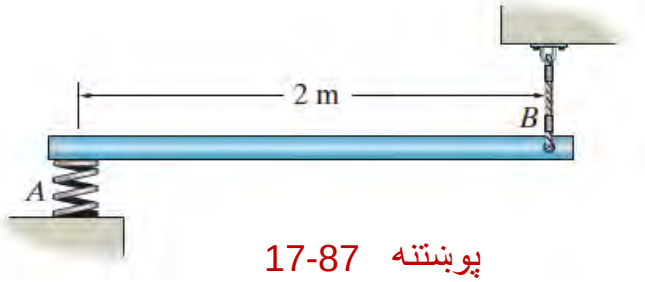
پوښتنه 17-85

17–86. یو شانته میله اوږدوالی L او کتله m لري. که چیرې کپل مومنټ M_0 د دې په پای پلی شی، داخلي عمودی قوه، شیر قوه، او تاویدونکی مؤمنت په میله کی تابع د x وروسته له دی چی M_0 پلي شي و ټاکی. بیرینګ په A کې ازاد څرخیدل کړی شی.



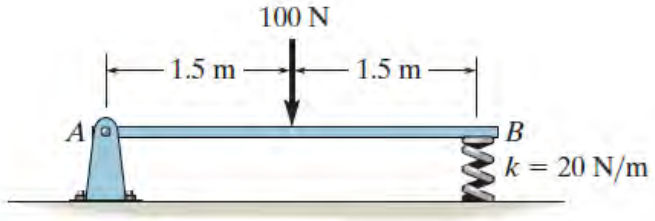
پوښتنه 17-86

17–87. دا لاندی 4kg نری راډ په A کی پرفنر او B کی پر رسۍ په افقي ډول تکیه شوی دی. په هغه لحظه کې چې په B کې رسۍ پرې شی، د راډ زاویوي تعجیل او دمیلی د کتلی د مرکز تعجیل معلوم کړئ. مرسته: د فنر سختوالی د محاسبې لپاره ضرور نه دی.



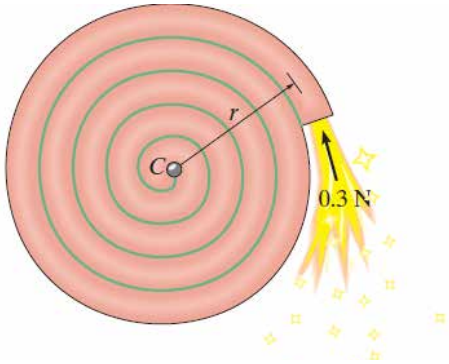
پوښتنه 17-87

***17–88.** دا لاندی 4 کیلوګرامه نری میله په A کی په پن او په B کی په فنر په افقي ډول تکیه شویده . په هغه لحظه کې چې 100 N قوه پلي کیږي ، د میلې زاویوي تعجیل او دمیلی د کتلی د مرکز تعجیل معلوم کړئ.



پوښتنه 17-88

17–89. د کترين ويل يوه اوربازی ده چې د پوډرپيچلي تيوب څخه تشکيل شوي او په مرکز کې پين شوی دی. که چيرې پوډر په ثابت کچه 20 g/s سوځوي ترڅو چې د وتلو غازونه همیشه د يو ثابته قوه، چې اندازه يې 0.3 N اوجهت يې مماس په ويل دی، د ويل زاويوي سرعت معلوم کړئ کله چې 75% کتله سوځيدلی وي. په ابتدا کې ويل په دريدلی حالت کی دی چی کتله يی 100g ده او شعاع يی r =75 mm دی. د محاسبې لپاره، ويل همیشه د نری ډيسک په توګه وګورئ.

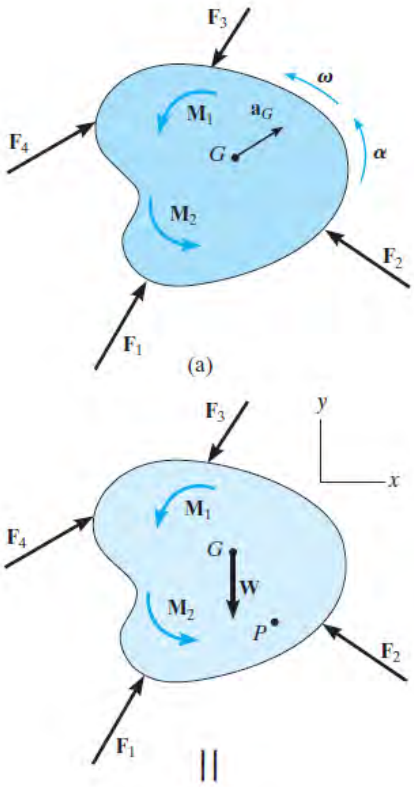


پوښتنه 17-89

17.5 . د حرکت معادلي: عمومي سطحی حرکت (EQUATION OF MOTION: GENERAL PLANE MOTION)

په انځور 17-18a کې ښودل شوي کلک جسم (يا تخته) د عمومي سطحي حرکت سره مخ دی، چې د بهرني تطبيق شوي قووی او د کپل مؤمنت سيستم له لارې رامنځته کيږي. د جسم لپاره د آزاد-بدن او کينيتيک ډياګرامونه په انځور 17-18b کې ښودل شوي دي. که چيرې د x او y انرشيايي محوري سيستم جوړ شي لکه څنګه چې په شکل کې ښودل شوي، د حرکت دري معادلې داسې دي:

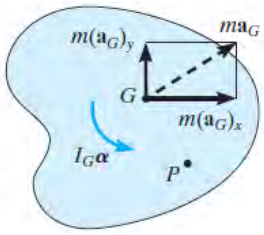
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \qquad (17–17)$$



په ځینو پوښتنو کې، ممکن مناسب وي چې د G پر ځای د P په نوم بل ټکي کې مؤمنتونه جمع کړو، ترڅو دمؤمنت د جمع کولو له معادلې څخه تر ممکنه حده ډېرې مجهولې قواوې حذ ف شي. کله چې دا طریقه وکارول شي، د حرکت عمومی درې معادلې دي

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{–}18)$$

دلته $\Sigma(M_k)_P$ د $I_G\alpha$ او ma_G (یا د دوې اجزاوو) مومنټ په P ټکي د کی استازیتوب کوي.



(b)

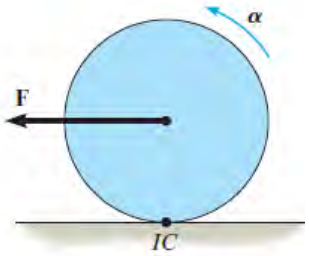
انځور 17-18

په IC د مؤمنت معادله (Moment Equation About the IC):

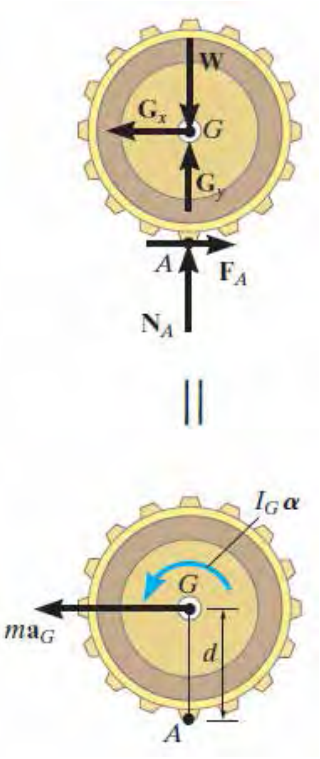
ځینې پوښتنې یو یوشان ډیسک یا دایروي شکل لرونکی جسم په نظر کې نیسي چې د زیږي سطحې پر سر پرته له ښویدو ګرځي، انځور 17-19 .

که چیرې مورِ مجموعه د مؤمنت په لحظوی مرکز د صفر سرعت سره جمع کړو، نو $\Sigma(M_k)_{IC}$ د $I_{IC}\alpha$ سره برابر کیږي، نو

$$\Sigma M_{IC} = I_{IC}\alpha \qquad (17\text{–}19)$$



دا نتیجه د $\Sigma M_O = I_O\alpha$ سره پرتله کیږي، چې د O په ټکي کې پین شوي جسم لپاره کارول کیږي، معادله 16-17. پوښتنه 90-17 .





لکه څنګه چې د خاورې تخته کونکی، یا "د پسوپښو لرونکی رولر"، مخ ته حرکت کوي، رولر عمومي سطحي حرکت لري. په آزاد-بدن ډیاګرام کې ښودل شوي قواوی په کینیتیک ډیاګرام کې ښودل شوي اغېزې رامنځته کوي. که چېرې مؤمنتونه د کتلې مرکز G ته ونیول شی، نو $\Sigma M_G = I_G\alpha$ خو که چېرې مؤمنټرنه ه د A ټکي (I_C) ته ونیولشی نو:

ځکه چې $a_G = ad$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d = I_A\alpha$$

د تحلیل تګلاره
PROCEDURE FOR ANALYSIS

کینیتیک پوښتنې چې د کلک جسم عمومي سطحي حرکت سره تړاو لري د لاندې طریقې په مرسته حل کیدی شي:

د جسم آزاد- ډیاګرام (Free-Body Diagram):

. د x او y انرشیایی محوري سیستم جوړکړئ اود جسم لپاره د آزاد- بدن ډیاګرام رسم کړئ.

. د کتلې مرکز a_G د تعجیل لوري او جهت ، او د جسم زاویوي تعجیل α مشخص کړئ.

. د I_G انرشیایی مؤمنت وټاکئ.

. د پوښتنې مجهولونه و پیژنئ.

. که پربکړه وشي چې د حرکت د دورانې معادله $\Sigma M_P=\Sigma(M_k)_P$ وکارول شي، نو د کینیتیک ډیاګرام رسمول په پام کې ونیسئ، ترڅو د $m(\mathbf{a}_G)_x$ ، $m(\mathbf{a}_G)_y$ ، او $I_G\boldsymbol{\alpha}$ اجزاوو له لارې رامنځته شوي "مؤمنتونه" ښه تصور کړئ، چې د مؤمنت د مجموعې $\Sigma(M_k)_P$ لپاره لیکل کیږي.

د حرکت معادلې(Equations of Motion) :

. د ټاکل شوي کنوانسیون سیستم سره سم د حرکت درې معادلې پلي کړئ.

کینماتیکس (Kinematics) :

. که یوازې د حرکت له معادلو څخه بشپړ حل ترلاسه نشي، نو د کینیماتیک اصول وکاروئ.

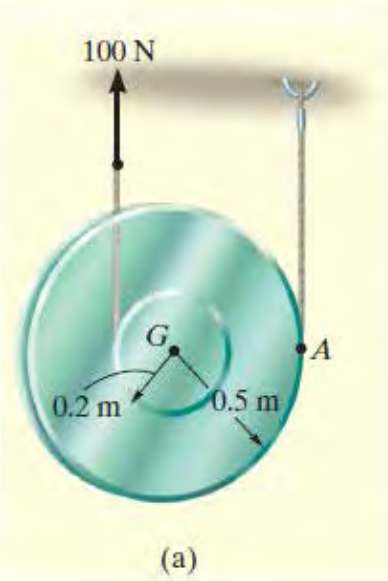
. که د جسم حرکت د اتکاوو له امله محدود وي، نواضافی معادلی کړی شو $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ څخه پلاس راوړو، کوم چې د جسم د هردوو ټکو A او B تعجیلونو اړیکه ښیي.

. کله چې یو څرخ، ډیسک، سلنډر یا توپ پرته له ښویدو دورمومي، نو $a_G = ar$ وي.

مثالونه

مثال 17.12

په انځور 17-20a کی د ګوټک زاويي تعجيل معلوم کړي.
ګوټک 8 کيلو ګرامه کتله لري او د جايريشن شعاع $k_G = 0.35\text{m}$ ده. د لږ کتلي تارونه د ګوټک په داخلي مرکز او بهرنۍ څنډې باندی تاو شوي دي.



انځور 17-20

حل I :

د آزاد بدن او کينيتيک ډياګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

انځور 17-20b وګوري. د 100 N قوی له املې $\mathbf{a}_G$ پورته خوا ته عمل کوي. سربېره پردې، $\boldsymbol{\alpha}$ د ساعت په لوري عمل کوي، ځکه چې ګوټک د A په نقطه کې د تار شاوخوا تاوېږي.

د ګوټک انرشيايي مؤمنت د کتلې مرکز ته دی

$$I_G = mk_G^2 = 8\ \text{kg}(0.35\ \text{m})^2 = 0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

دلته دری مجهوله $T, a_G,$ او a دی

د حرکت معادلې (Equation of Motion)

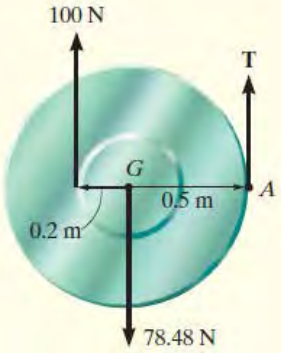
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad T + 100\ \text{N} - 78.48\ \text{N} = (8\ \text{kg})a_G \qquad (1)$$
$$\curvearrowleft +\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 100\ \text{N}(0.2\ \text{m}) - T(0.5\ \text{m}) = (0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (2)$$

کينماتيکس (Kinematics)

که چيرې د کينيماتيکس څخه د a_G او α اړيکې پيداکولولپاره ګټه واخيستل شي يو بشپړ حل ترلاسه کيږي. په دې حالت کې، ګوټک د A په ټکی کې په تار باندی "بيله له سويدو" تاوېږي. له همدې املې، مور د مثال 16.4 يا 16.15 پايلې کارولی شو، نو:

$$(\curvearrowright +)\ a_G = \alpha r; \qquad a_G = \alpha\,(0.5\ \text{m}) \qquad (3)$$

معادلی 1 تر 3 پوری حل کوو او مومنټ لرو



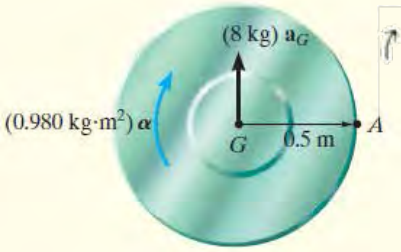
$$\alpha = 10.3\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$
$$a_G = 5.16\ \text{m/s}^2$$
$$T = 19.8\ \text{N}$$

حل II :

د حرکت معادلې (Equations of Motion)

مومنټ کولای شو چې په مؤمنت په ټکی A کی ونیسو تر څومجهول T حذف کړو. په انځور 17-20b کی، د آزاد - بدن او کینیتیک ډایګرامونو نه مومنټ لرو

||



(b)

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A;\ \ 100\ \text{N}(0.7\ \text{m}) - 78.48\ \text{N}(0.5\ \text{m}) = (0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8\ \text{kg})a_G](0.5\ \text{m})$$

معادله 3 کاروو

$$\alpha = 10.3\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

انځور 17-20

حل III :

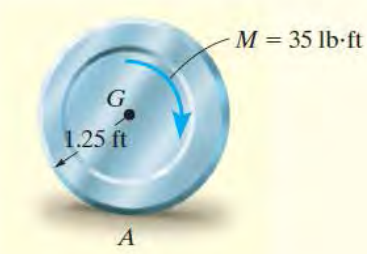
د حرکت معادلې (Equations of Motion)

د دې پوښتنې د حل کولو تر ټولو ساده لاره دا ده چې وپوهیږو چې د A ټکی د ګوټک یا سپول لپاره IC دی. نو معادله 17-19 تطبیق کیږي.

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = I_A\alpha;\ \ (100\ \text{N})(0.7\ \text{m}) - (78.48\ \text{N})(0.5\ \text{m}) = [0.980\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (8\ \text{kg})(0.5\ \text{m})^2]\alpha$$
$$\alpha = 10.3\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 17.13

د 50 پونډه وییل چې په انځور 17-21 کې ښودل شوی، د جایریشن شعاع یې $k_G = 0.70$ ft دی. که چیرې د 35 lb.ft یو کپل مؤمنت په وییل باندې پلي شي، د هغې د کتلې مرکز G تعجیل معلوم کړئ. د وییل او په A کې د سطحې تر منځ د سټټیک او کینټیک اصطکاک ضریبونه په ترتیب سره $\mu_s = 0.3$ او $\mu_k =$ 0.25 دي.



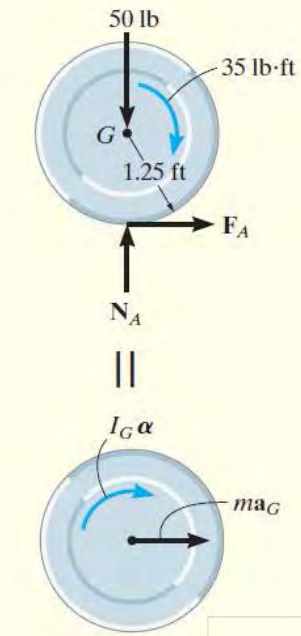
(a)

حل

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه
Free-Body and Kinetic Diagrams)

د انځور 17-21b په کتلو ښکاري چې کپل مؤمنت سبب د وییل د زاویوي تعجیل(α) د ساعت په لوري دی. د دې په پایله کې، د کتلې د مرکز تعجیل (a_G) به ښي لوري ته وي. اینرشیایی مومنټ دا دی:

$$I_G = mk_G^2 = \frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(0.70\text{ ft})^2 = 0.7609\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$



(b)

دلته مجهوله عبارت دي په , N_A ,F_A ،a_G او a

د حرکت معادلې (Equations of Motion)

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_A = \left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 50\text{ lb} = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft +\Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 35\text{ lb}\cdot\text{ft} - 1.25\text{ ft}(F_A) = (0.7609\text{ slug}\cdot\text{ft}^2)\alpha \qquad (3)$$

انځور 17-21

د مکمل حل لپاره څلورمه معادله اړین ده.

کینماتیکس (نه ښویدل) (Kinematics (No Slipping))

که ښویدل نه وی ، نو بیا

$$(\curvearrowright +) \qquad a_G = (1.25\text{ ft})\alpha \qquad (4)$$

معادلې 1 تر 4 حل کوو

$$N_A = 50.0\ \text{lb} \qquad F_A = 21.3\ \text{lb}$$
$$\alpha = 11.0\ \text{rad/s}^2 \qquad a_G = 13.7\ \text{ft/s}^2$$

دا حل د $F_A \le \mu_s N_A$ اړتیا لري. په هر حال، له دې امله چې 21.3 lb >0.3(50 lb)=15 lb وییل د تاوېدلو پر مهال ښوییږي.

ښویدل (Slipping)

معادله 4 دلته مجاز نه ده نو $F_A = \mu_s N_A$ یا :

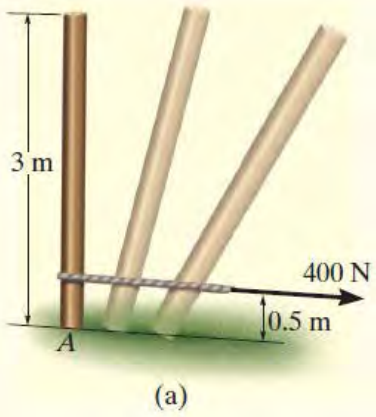
$$F_A = 0.25 N_A \qquad (5)$$

له حل کولو د معادلو 1 تر 3 او 5 دا لاندې حاصل کیږي

$$N_A = 50.0\ \text{lb} \qquad F_A = 12.5\ \text{lb}$$
$$\alpha = 25.5\ \text{rad/s}^2$$
$$a_G = 8.05\ \text{ft/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 17.14

په انځور 17-22a کې ښودل شوې یوشان نرۍ ستنۍ د 100 کیلوګرامه کتله لري. که د ستنۍ د پای او سطحې ترمنځ د سټټیک او کینټټیک اصطکاک ضریبونه په ترتیب سره $\mu_s = 0.3$ او $\mu_k = 0.25$وي، د ستنۍ زاویې تعجیل په هغه شیبه کې چې 400Nافقي قوه پرې پلی شي معلوم کړئ. ستنۍ په پیل کې په دریدلی حالت کې ده.



(a)

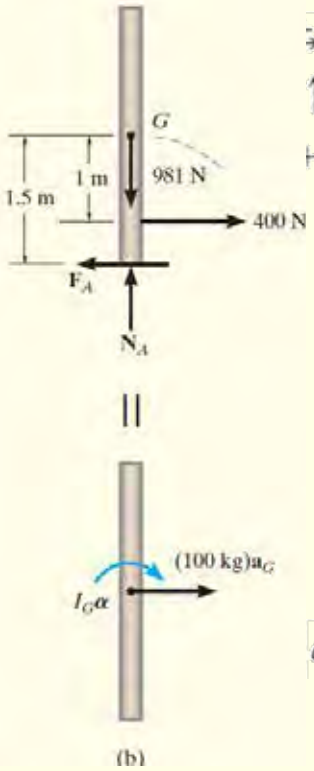
حل

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams)

انځور 17-22b د کتلې مرکز G د حرکت مسیر د یوه نامعلوم منحني مسیر په اوږدو کې دي چې د جایریشن شعاع r لري، کوم چې په پیل کې په یوه عمودي کرښه کې پروت دی. په هر حال، د y یا عمودي تعجیل هیڅ جزنشته ځکه چې ستنۍ په پیل کې په دریدلی حالت کې ده، یعنې $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$، نو $(a_G)_y =$

$v^2_{G/r} = 0$. مورِ فرض کوو چې د کتلې مرکز ښي لوري ته تعجیل کوي او ستنی د ساعت په لوري زاویي تعجیل (α) لري. مجهولونه عبارت دی په N_A، F_A، a_G ، او α .

د حرکت معادله (Equation of Motion)



$$\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 400\ \text{N} - F_A = (100\ \text{kg})a_G \qquad (1)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad N_A - 981\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

$$+\Sigma M_G = I_G\alpha; \; F_A(1.5\ \text{m}) - (400\ \text{N})(1\ \text{m}) = [\tfrac{1}{12}(100\ \text{kg})(3\ \text{m})^2]\alpha \qquad (3)$$

د مکمل حل لپاره ځلورمه معادله اړینه ده.

کینماتیکس (نه ښویدل) Kinematics (No Slipping)

د دې فرضیې سره، نقطه A د "محور" (pivot) په توګه عمل کوي، نو زاویي تعجیل (α) به د ساعت په لوري وي، نود کتلې مرکز تعجیل (a_G) به ښي لوري ته وي

$$a_G = \alpha r_{AG}; \quad a_G = (1.5\ \text{m})\,\alpha \qquad (4)$$

معادلې 1 تر 4 حل کوو

$$N_A = 981\ \text{N} \quad F_A = 300\ \text{N}$$
$$a_G = 1\ \text{m/s}^2 \quad \alpha = 0.667\ \text{rad/s}^2$$

انځور 17-22

د نه ښویېدو فرضیه اړتیا لري چې $F_A \le \mu_s N_A$. په هرحال، $0.3(981\ \text{N})=294\ \text{N} < 300\ \text{N}$ نو ستنې په A کې ښویېږي.

ښویدل (Slipping)

ددی حالت لپاره معادله 4 د قبول وړ نه ده. په بدلیل کی د اصطکاک معادله $F_A = \mu_k N_A$ بنایی وکارول شي. له دی امله

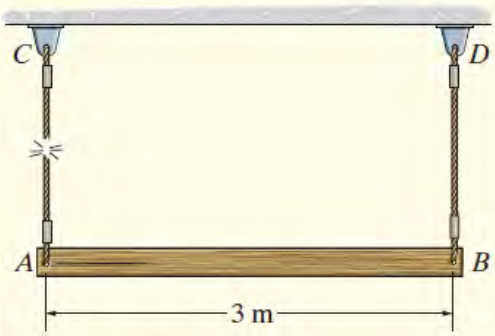
$$F_A = 0.25N_A \qquad (5)$$

د معادلو 1 تر 3 او 5 هم مهاله حل کول دا لاندی په لاس راکوي

$$N_A = 981\ \text{N} \quad F_A = 245\ \text{N} \quad a_G = 1.55\ \text{m/s}^2$$
$$\alpha = -0.428\ \text{rad/s}^2 = 0.428\ \text{rad/s}^2 \curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 17.15

په انځور 17-23a کې ښودل شوې یوشان 50 کیلوګرامه میله د تارونو AC او BD په وسیله د تعادل په حالت کې نیول شوې ده. د BD په تار کې کش او د میلې زاویي تعجیل په هغه شیبه کې چې AC پرې شي، معلوم کړئ.



(a)

انځور 17-23

حل

د آزاد بدن او کینیټیک ډیاګرامونه (Free-Body and Kinetic Diagrams

په لیدودانځور 17-23b څلور مجهوله شتون لري.اوهغه عبارت دی په T_B, $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ او a .

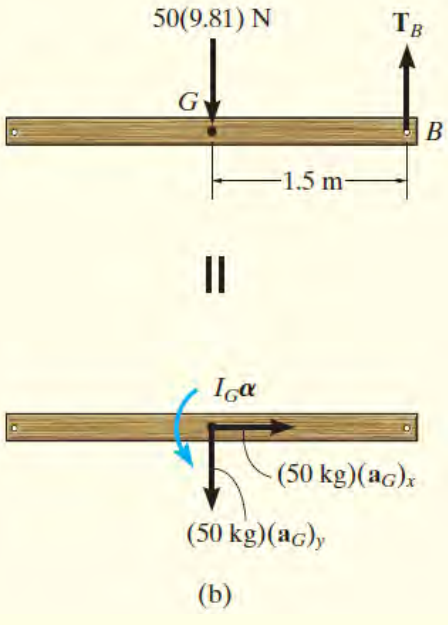
د حرکت معادلې (Equations of Motion)

$$\pm \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 0 = 50\ \text{kg}\ (a_G)_x$$
$$(a_G)_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T_B - 50(9.81)\ \text{N} = -50\ \text{kg}\ (a_G)_y \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad T_B(1.5\ \text{m}) = \left[\frac{1}{12}(50\ \text{kg})(3\ \text{m})^2\right]\alpha \qquad (2)$$

کینمټیکس (Kinematics)



(b)

څرنګه چې میله په هغه شیبه کې چې کیبل پرې شي په دریدلی حالت کې ده، نو د هغې زاویي سرعت (ω) او د نقطې B سرعت په دې شیبه کې صفر دی. له دې امله، $(a_B)_n = v^2_B/r_{BD}=0$دی. نو ځکه، $\mathbf{a}_B$ یوازې مماسي جزلري، کومه چې د x محور په امتداد ده، انځور17-23c. د نسبي تعجیل معادله د G او B ټکیو لپاره تطبیق کوو

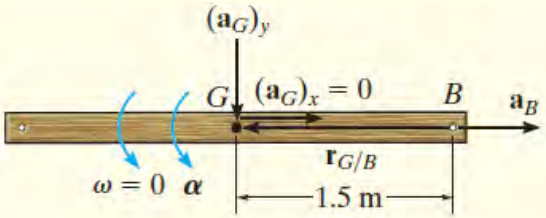
$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/B} - \omega^2\mathbf{r}_{G/B}$$
$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-1.5\mathbf{i}) - \mathbf{0}$$
$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} - 1.5\alpha\mathbf{j}$$

د دې معادلې دواړو خواو د i او j اجزاوو مساوي معامله کوو

$$0 = a_B$$
$$(a_G)_y = 1.5\alpha \qquad (3)$$

معادلې 1 تر 3 حل کولو دا لاندی په لاس راځي

$$\alpha = 4.905 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$
$$T_B = 123 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$
$$(a_G)_y = 7.36 \text{ m/s}^2$$

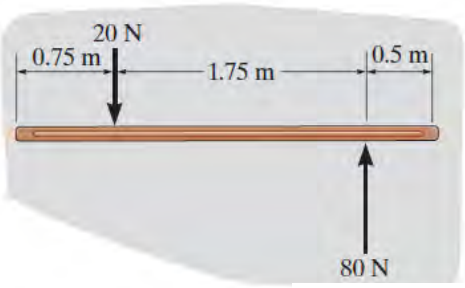


(c)

انځور 17-23

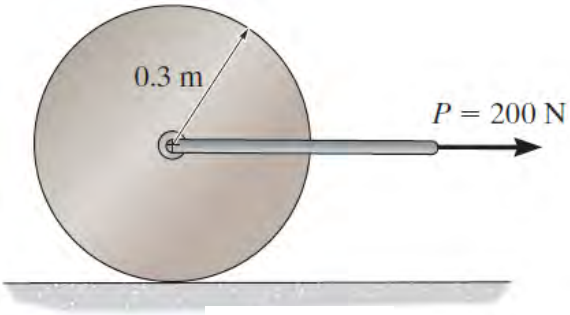
FUNDAMENTAL PROBLEMS بنسټیز پوښتنې

ب 17–13. د یوشان 60 کیلوګرامه نری میله په ابتدا کې په یوه ښویه افقي سطحه کې په دریدلی حالت کې ده کله چې قواوې پرې تطبیق شویی. د میلې د کتلې د مرکز تعجیل اود میلی زاویوي تعجیل په هغه شیبه کې معلوم کړئ.



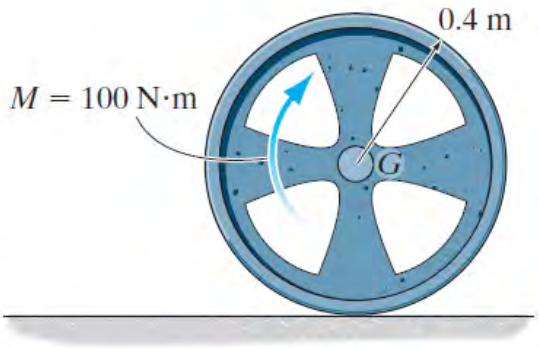
ب 17-13

ب 17–14. یو100 کیلوګرامه سلنډر پرته له ښویېدو په افقي سطحه رغړی. د کتلې د مرکز تعجیل اود هغه زاویوي تعجیل معلوم کړئ.



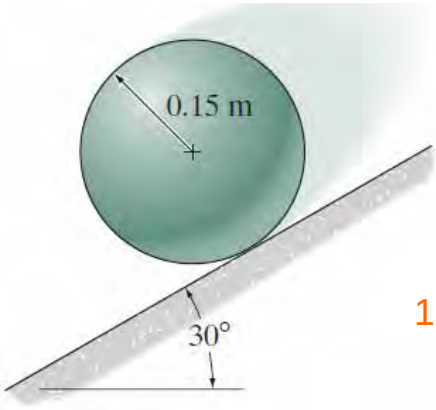
ب 17-14

ب 17–15. د 20 کیلوګرامه وییل خپل مرکز G ته k_G = 300 mm د جایریشن شعاع لري. کله چې په وییل باندی کپل مؤمنت تطبیق شي، نو دا د رغړیدو سره ښوییږي. د وییل زاویوي تعجیل او د G تعجیل معلوم کړئ. د وییل او سطحې ترمنځ د کینټیک اصطکاک ضریب μ_k=0.5 دی.



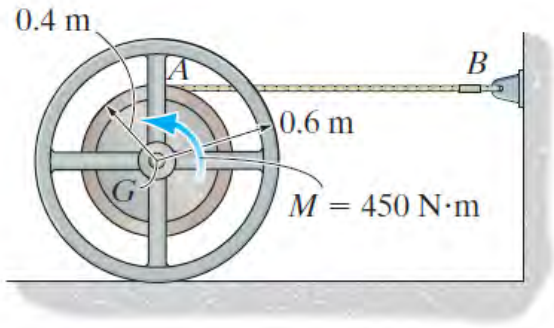
ب 17-15

ب 17–16. د 20 کیلوګرامه کره په میلان لرونکي سطحه پرته له ښویېدو په ښکته لوررغړی. د کری زاویوي تعجیل او د کتلې د مرکز تعجیل معلوم کړئ.



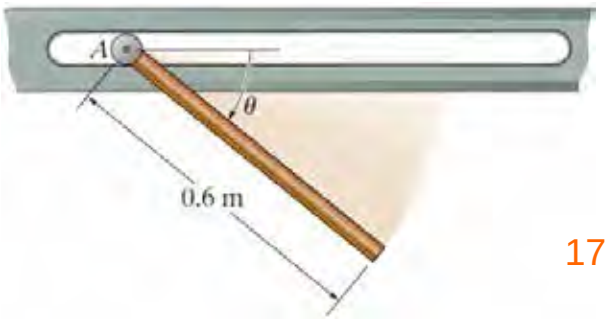
ب 17-16

ب 17–17. د 200 کیلوګرامه ګوټک د کتلې په مرکزیی د جایریشن شعاع k_G=300 mm ده. که چیرې کپل مؤمنت په ګوټک تطبیق شي او د ګوټک او ځمکې ترمنځ د کینېټیک اصطکاک ضریب μ_k=0.2 وي، د ګوټک زاویي تعجیل، د G تعجیل، اوکشش په کیبل کې معلوم کړئ.



ب 17-17

ب 17–18.یوه 12 کیلوګرامه نري میله په یوه کوچنۍ رولر A پین شوې چې په جرې کې آزادانه حرکت کوي. که میله د دریدلی حالت څخه خوشې شي چې q=0° وي، نو د میلې زاویوي تعجیل او د رولر تعجیل په هغه لحظه کی چې خوشې شی معلوم کړئ.



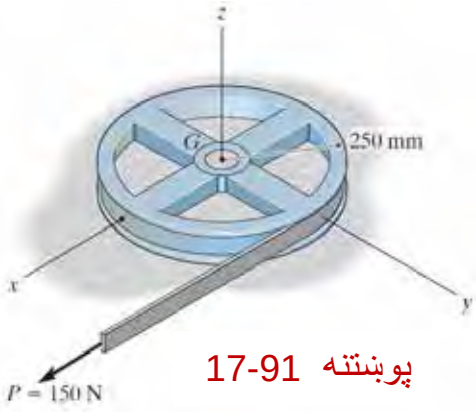
ب 17-18

PROBLEMS
پوښتنې

په ټول حلونو کې باید د آزاد بدن ډیاګرام او کینیټیک ډایګرام شامل کړي.

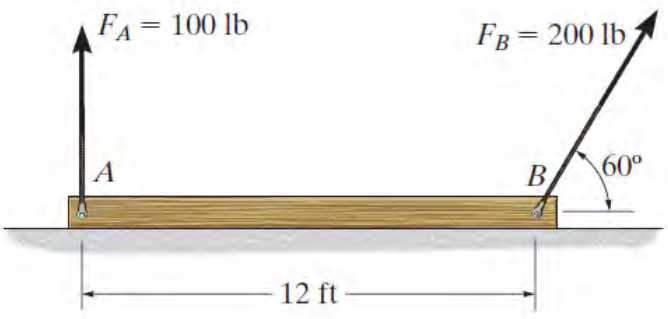
17–90 . که چیرې په انځور 17-19 کې ښودل شوي ډیسک پرته له ښویېدو څخه ورغړی (rolls) ، وښیئ کله چې مؤمنت لحظوی مرکز د صفر سرعت IC ته ونیول شی، نو دا ممکنه ده چې د مؤمنت $SM_{IC}=I_{IC}\alpha$ معادله وکارول شي ، چیرې چې I_{IC} د ډیسک د اینرشیایی مومنټ د ډیسک دی چې لحظوی محورته د صفر سرعت سره نیول شوی.

17–91. یو 75 کیلوګرامه وییل د z په محور د جایریشن شعاع $k_z = 150\ \text{mm}$, لري. که چیرې په تسمه باندی ،چې کتله یې د پام وړ نه ده، 150 نیوټنه قوه تطبیق شي، د کتلی مرکز تعجیل او زاویي تعجیل د وییل معلوم کړئ. سطحه ښویه ده او وییل په آزاد توګه ښویدی شی.



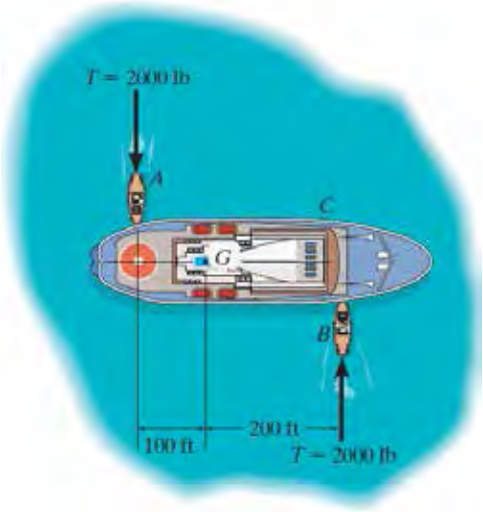
پوښتنه 17-91

***17–92 .** د یوشان 150 پونډه بیم په ابتداکی په دریدلی حالت کی ده کله چې په کیبلو باندی قوی تطبیق کیږي. د کتلی د مرکز تعجیل اندازه او د بیم زاویوي تعجیل په هم دی شیبه کې معلوم کړئ.



پوښتنه 17-92

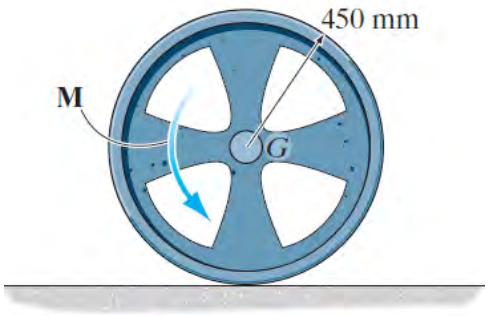
17–93 . ښودل شوی بېړۍ (10^6) 4 پونډه تول لري او د جاذبې مرکزیې په G کې دی. دوی ټګ بېړۍ چې تول یې د محسابې وړ نه دي ، د هغې د ګرځولو لپاره کارول کیږي. که هر ټګ بېړۍ 2000 پونډه قوه په بېړي تطبیق کړي ، د بېړی د جاذبې دمرکز G ابتدايي تعجیل اود دی زاویوي تعجیل معلوم کړئ. د هغې د جازبې مرکز ته د جایریشن شعاع k_G =125 ft ده. د اوبو مقاومت په نظر کې مه نیسئ.



پوښتنه 17-93

17–94 . د لاندی 75 کیلوګرامه وییل د جایریشن شعاع د کتلی مرکز ته k_G=375 mm ده. که چیرې په دې وییل باندې د 100 N.m تورک تطبیق شي، د هغې زاویوي تعجیل معلوم کړئ. د وییل او ځمکې ترمنځ د سټټیک او کینټټیک اصطکاک ضریبونه په تر تیب سره μ_s =0.2 او μ_k =0.15 دي.

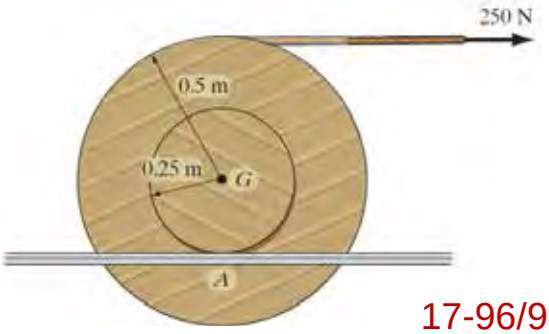
17–95. د لاندی 75 کیلوګرامه وییل د جایریشن شعاع د کتلی مرکزته k_G=375 mm ده. که چیرې په دې وییل باندې M= 150 N.m تورک تطبیق شي، د هغې زاویوي تعجیل معلوم کړئ. د وییل او ځمکې ترمنځ د سټټیک او کینټټیک اصتکاک ضریبونه په ترتیب سره μ_s =0.2 او μ_k =0.15 دي.



پوښتنې 17-94/95

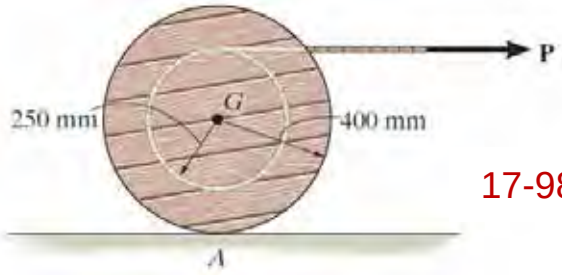
17–96* . دا لاندې ګوټک 100 کیلوګرامه کتله لري او د کتلې مرکزته یې د جایریشن شعاع $k_G = 0.3$ m ده. په کیبل د 250 نیوټنه قوه د تطبیق کیدو په صورت کې د هغې زاویې تعجیل معلوم کړئ. ګوټک پرته له ښویېدو څخه رغړی.

17–97 . دا لاندې ګوټک 100 کیلوګرامه کتله لري او د کتلې مرکز ته یې د جایریشن شعاع $k_G = 0.3$ m ده. تر ټولو د کوچنۍ سټټیک اصطکاک ضریب چې د ښویېدو مخه په A کې په ریل باندې ونیسي معلوم کړئ. د ګوټک زاویوي تعجیل څه دی؟



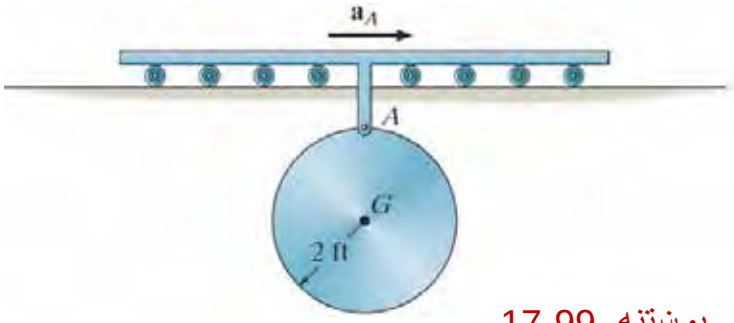
پوښتنې 17-96/97

17–98 . دا لاندې ګوټک 100 کیلوګرامه کتله لري او د کتلې مرکزته یې د جایریشن شعاع $k_G = 0.3$ m ده. که د سټټیک او کینټیک اصطکاک ضریبونه په A کې *په ترتیب سره* $\mu_s =$ 0.2 او μ_k =0.15 وي او د P قوه 600 نیوټنه وي، د ګوټک زاویوي تعجیل معلوم کړئ.



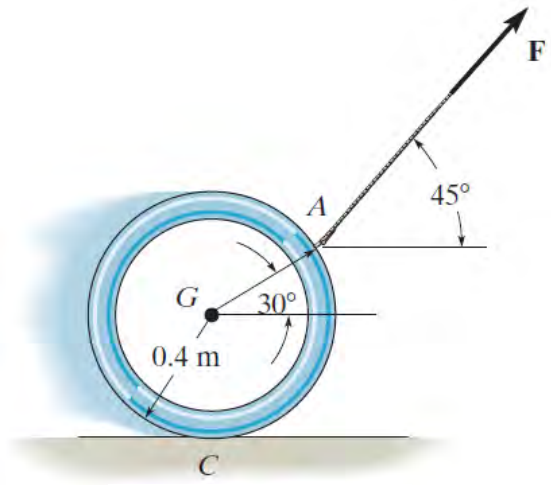
پوښتنه 17-98

17–99 . یوه 15 پونډه دایروي تخته په A کې له پین څخه ځړول شوې ده. که پین د یوه ټرک (track) سره چې $3\ \text{ft/s}^2$ تعجیل ورکړ شوی، وصل وي، په A کې د ریکشن عمودي او افقي اجزاوي او د تختې د کتلې مرکز G تعجیل معلوم کړئ. تخته په ابتدا کې په دریدلی حالت کې ده.



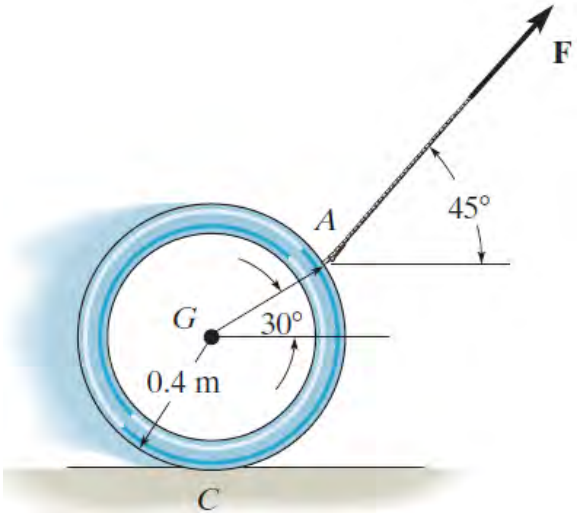
پوښتنه 17-99

***17–100 .** 10 نیوټنه قوه په 10 کیلوګرامه حلقه باندې لکه څنګه چې ښودل شوې تطبیق کیږي. که ښوییدل نه وي، د حلقې ابتدایی زاویوي تعجیل او د کتلې د مرکز تعجیل معلوم کړئ. د حلقې ضخامت د پام وړ نه دي.



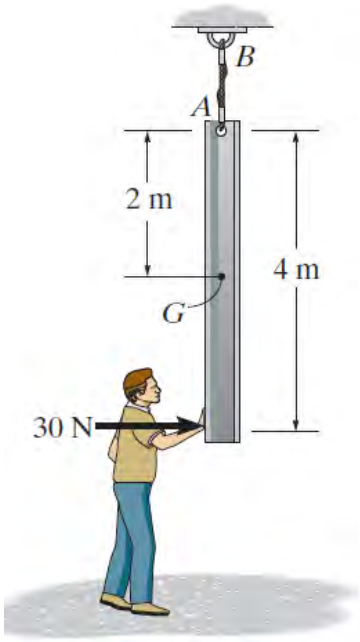
پوښتنه 17-100

17–101 . که په C کې د سټټیک اصطکاک ضریب $\mu_s = 0.3$ وي، تر ټولو هغه لویه قوه F چې کولی شي په 5 کیلوګرامه حلقه تطبیق شي پرته له دې چې وښوییږي، معلومه کړئ. د حلقې ضخامت ه د پام وړ نه دي.



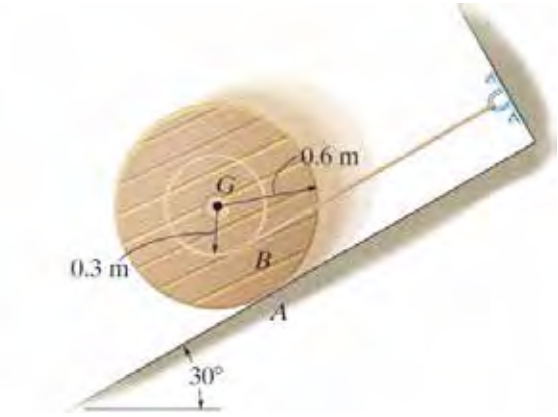
پوښتنه 17-101

17–102 . دا لاندې نرۍ 200 کیلوګرامه بیم د کیبل په واسطه، لکه څنګه چې ښودل شوی، په خپل پای کې ځړول شوی ده. که یو سړی د دې په بل پای باندې د 30 نیوټنه افقي قوه تطبیق کړي، د کتلې د مرکز G ابتدایی تعجیل، د بیم زاویوي تعجیل، کشش په AB کیبل کې ، او د A پای ابتدایی تعجیل، معلوم کړئ.



پوښتنه 17-102

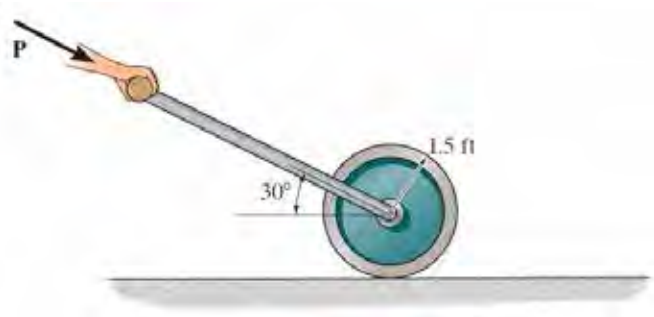
17–103 .دا لاندې ښودل شوي ګوټک 75 کیلوګرامه کتله لري او د جایریشن شعاع یې $k_G = 0.380$ m دي. دا په یوه مایله سطحه باندې موقعیت لري چې د کینټیک اصطکاک ضریب یې $\mu_k = 0.15$ دي. که ګوټک د دریدلی حالت څخه خوشې شي او په A کې وښویږي، د کیبل ابتدایی کشش او د ګوټک زاویوي تعجیل معلوم کړئ.



پوښتنه 17-103

17–104 . که چيرې P=30 lb وی، د 50 پونډه رولر زاويوي تعجيل معلوم کړئ. فرض کړئ چې رولر يوشان سيلنډر دی او هيڅ ښويېدل نشته.

17–105 . که د 50 پونډه رولر او ځمکې ترمنځ د سټټيک اصطکاک ضريب $\mu_s = 0.25$ وي، تر ټولو هغه لويه قوه P معلومه کړئ چې کولی شي په لاس نيوکی کی تطبيق شي ترڅو رولر پرته له ښويېدو څخه په ځمکه باندې ورغړی. همدارنګه، د رولر زاويوي تعجيل پيدا کړئ. فرض کړئ چې رولر يوشان سيلنډر دی.



پوښتنې 17-104/105

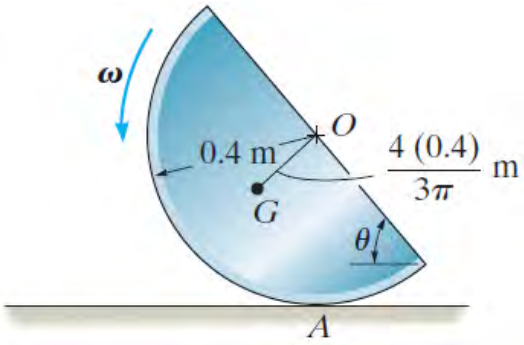
17–106 . ټرک يوګوټک چې تول يې 500 پونډه او د جايريشن شعاع يې k_G=2 ft ده، انتقالوی. د ګوټک زاويوي تعجيل معلوم کړئ که چيرې ګوټک په ټرک کې ټرل شوي نه وي او ټرک په $3\ ft/s^2$ تعجيل پيل وکړي. فرض کړئ چې ګوټک د ټرک په تخته نه ښويېږي.

17–107 . ټرک يو ګوټک چې تول يې 200 پونډه او د جايريشن شعاع يې k_G=2 ft, ده انتقالوی. د ګوټک زاويوي تعجيل معلوم کړئ که چيرې ګوټک په ټرک کې ټرل شوي نه وي او ټرک په $5\ ft/s^2$ تعجيل پيل وکړي. د ګوټک او ټرک ترمنځ د سټټيک او کينټټيک اصطکاک ضريبونه په ترتيب سره $\mu_s = 0.15$ او $\mu_k = 0.1$ دي.



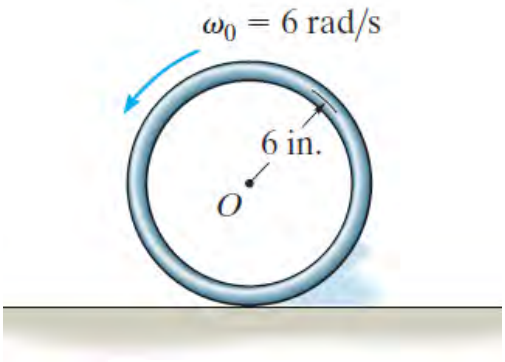
پوښتنې 17-106/107

***17–108 .** نيمه دايروي ډيسک چې د 10 کيلوګرامه کتله لري، په زاويوي سرعت w= 4 rad/s باندې تاويږی کله چې q=60° وي. که په ځای A کې د سټټيک اصطکاک ضريب $\mu_s = 0.5$ وي، معلوم کړئ چې په دې شيبه کې ډيسک ښويېږي؟



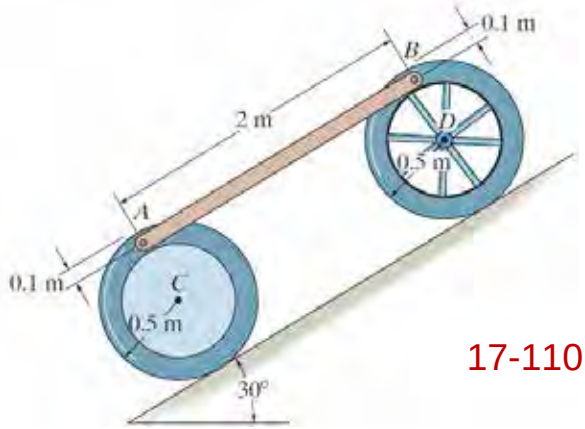
پوښتنه 17-108

17–109 . د 10 پونډه نرۍ حلقه کله چې پر سطحه کېښودل شو يې يو ابتدايی زاويوي سرعت 6 rad/s ورکړ شوی. که د حلقې او سطحې ترمنځ د کينېټيک اصطکاک ضريب $\mu_k =$ 0.3 وي، د حلقې د تګ هغه فاصله معلومه کړئ مخکې له دې چې ښويېدل يې ودريږي.



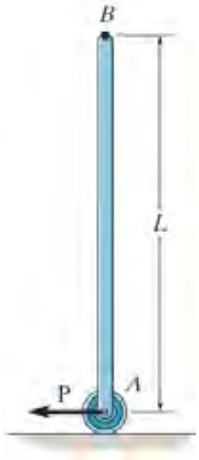
پوښتنه 17-109

17–110 . څرخ C د 60 کيلوګرامه کتله لري او د جايريشن شعاع يې 0.4 متره ده، پداسې حال کې چې د څرخ D کتله 40 کيلوګرامه ده او د جايريشن شعاع يې 0.35 متره ده. د هر څرخ زاويوي تعجيل په هغه شيبه کې چې ښودل شوي معلوم کړئ. د تړوند کتله د پام وړ نه ده او فرضکوو چې چوکاټ په سطحه نه ښويږي.



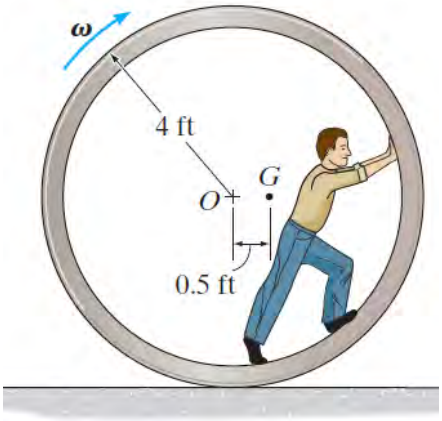
پوښتنه 17-110

17–111 . یوشان بارچې m کتله او L اوږدوالی لرې په عمودي موقعیت کې په توازن کې دي کله چې افقي قوه P په رولر A باندې تطبیق شي. د بار ابتدایی زاویوي تعجیل او د هغه د لوړې نقطې B تعجیل معلوم کړئ.



پوښتنه 17-110

***17–112 .** دا لاندې دایروي کانکریټې کلورت په w=0.5 rad/s زاویوي سرعت سره تاویږي کله چې سړې په ښودل شوي موقعیت کې وي. په دې شیبه کې د کلورت او سړي ګډ ټول 500 lb او جازبی مرکزیی G دی. د جایریشن شعاع یی G ته k_G = 3.5 ft ده. د کلورت زاویوي تعجیل معلوم کړئ. فرض کړئ چې کلورت پرته له ښویېدو تاویږي او سړی په کلورت کې حرکت نه کوی.

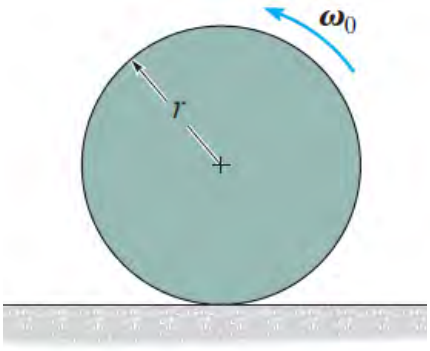


پوښتنه 17-112

17–113 . د دې لاندې یوشان ډیسک کتله m ده، او په زاویوي سرعت ω_0 سره تاویږي کله چې پرغولی کېښودل شوي وي. د ډیسک ابتدایی زاویوي تعجیل او د هغه د کتلې د مرکز تعجیل معلوم کړئ. د ډیسک او غولی ترمنځ د کینېټیک اصطکاک ضریب μ_k دی.

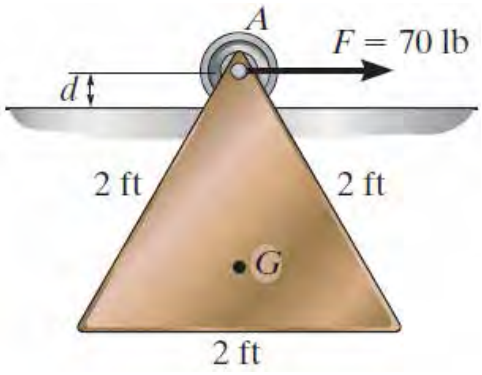
17–114 . د دې لاندې یوشان ډیسک کتله m ده، او په زاویوي سرعت ω_0 سره تاویږي. کله چې پرغولی کېښودل شوي وي. هغه وخت معلوم کړئ مخکې له دې چې ډیسک پرته له ښویېدو څخه ورغړي.

په دې شيبه کې د ډيسک زاويوي سرعت څه دی؟ د ډيسک او غولی ترمنځ د کينېټيک اصطکاک ضريب μ_k دی.



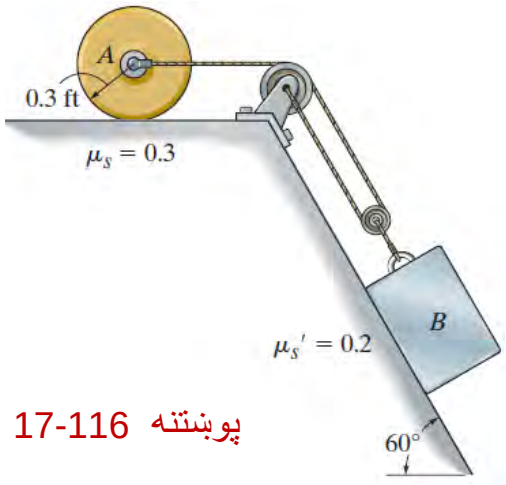
پوښتنې 17-113/114

17–115 . يوشان تخته چې تول يې 40 پونډه دي د رولر A پواسطه تکيه دی. که يو افقي قوه $F = 70$ lb په رولر تطبيق شي، د رولر د کتلې د مرکز تعجيل معلوم کړئ کله چې قوه پرې تطبيق شي. د تختې انرشيايی مؤمنت د هغې د کتلی مرکز ته $I_G = 0.414$ slug·ft^2 دی. د رولر تول او اندازه d د پام وړ نه ده.



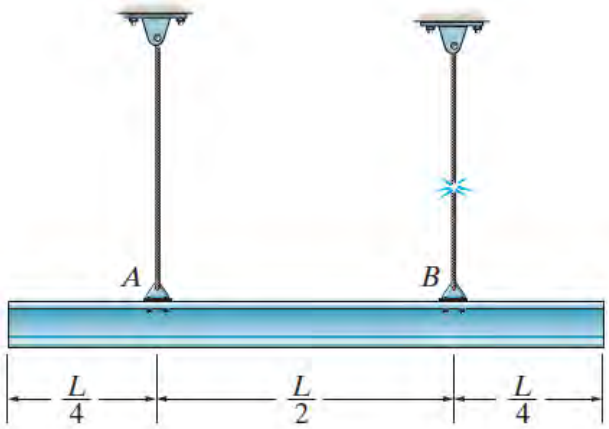
پوښتنه 17-115

***17–116 .** د سيلنډر A تول 15 پونډه دی، او هغه د کيبل او څرخکی سيستم په واسطه لکه څنګه چې ښودل شوی د 20 پونډه بلاک B سره تړلی دی. د بلاک تعجيل معلوم کړئ کله چې دی خوشې شي. د سټټيک اصطکاک ضريبونه په انځور کې ښودل شوي دي.



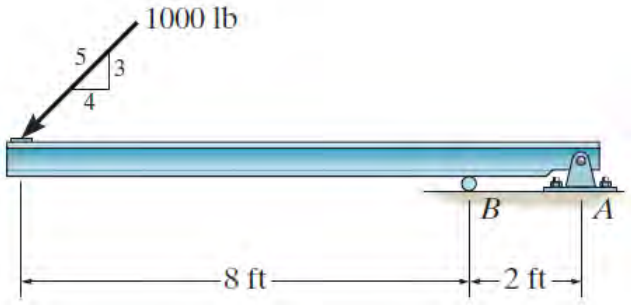
پوښتنه 17-116

17–117 . دا لاندې ښودل شوي يوشان بيم W تول لري. که دا په ابتدا کې په دريدلې حالت کې وي او په A او B کيبلونو باندې ملاتړ شي، د A په کيبل کشش معلوم کړئ که چيرې کيبل B ناڅاپه غوڅ شي. فرض کړئ چې بيم يوه نرۍ ميله ده.



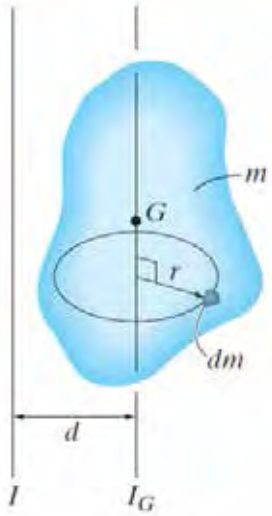
پوښتنه 17-117

17–118 . د 500 پونډه بيم په A او B کې اتکاوې لري لکه څنګه چې ښودل شوی او يوه 1000 پونډه قوه پرې تطبيق شويده. که د A پين اتکا ناڅاپه ماته شي، د بيم ابتدايي زاويوي تعجيل او د بيم د رولر اتکا قوه معلومه کړئ. د محاسبې لپاره، فرض کړئ چې بيم يوه نرۍ ميله ده چې پندوالی يې د پام وړ نه دی.



پوښتنه 17-118

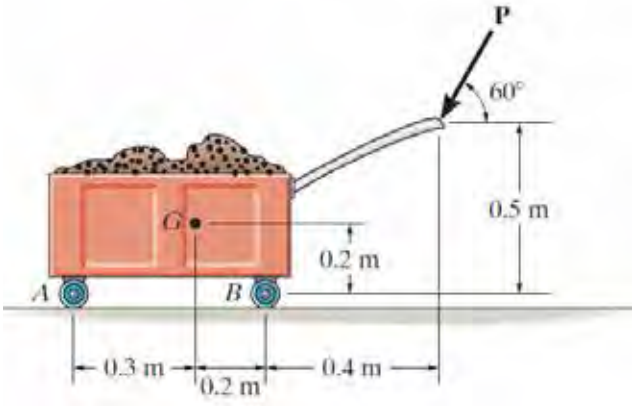
د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW		د فصل بیا کتنه
	$I = I_G + md^2$	**انرشیایی مؤمنت** (Moment of Inertia) انرشیایی مؤمنت د جسم د زاویې سرعت په بدلون کې د بدن د مقاومت اندازه ده. په $I=\int r^2\,dm$ سره تعریف شوی او د هر محور لپاره چې محاسبه کیږی مختلف به وی. ډیری جسمونه له ساده شکلونو څخه جوړ شوي. که چیرې داسې وي، نود *I* لپاره جدول شوي ارزښتونه کارول کیدی شي، لکه چې د دې کتاب د شا د پوښ په داخلی مخ کی ورکړل شوی. د مرکب جسم انرشیایی مؤمنت د هر ټاکل شوي محور لپاره، د هرې برخې انرشیایی مؤمنت د محور په اړه محاسبه کیږي او پایلې یې یوځای کیږي. دا کار اکثره د موازي-محور قضیې کارولو ته اړتیا لري.
$\Sigma F_n = m(a_G)_n$ $\Sigma F_t = m(a_G)_t$ $\Sigma M_G = 0$ Curvilinear translation	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = 0$ Rectilinear translation	**د سطحې حرکت معادلې** (Planar Equations of Motion) د حرکت معادلې د یوه سخت بدن د انتقالی او دورانی حرکت تعریف کوي. د دې لپاره چې په دې معادلو کې ټول اصطلاحات شامل شي، همیشه باید د آزاد بدن ډیاګرام ورسره شتون ولري، او د ځینو پوښتنو لپاره، ممکن د کینیتیک ډیاګرام رسم کول مرسته وکړی چې ma_G او $I_G\,\boldsymbol{\alpha}$ وښیی.
	$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$ $\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_O = I_O\alpha$ Rotation About a Fixed Axis $\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ or $\Sigma M_P = \Sigma(M_k)_P$ General Plane Motion	

د بیا کتنې پوښتنې

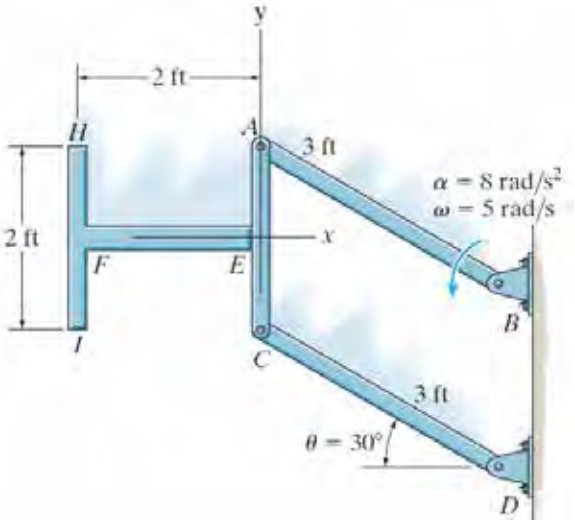
د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

ب 17–1. دلاس کړاچی 200 کیلوګرامه کتله لري او د کتلې مرکز یې په G کې دی. که چیری د $P = 50$ N قوه د کړاچی په لاس تطبیق شی، په ټیرو A او B کې عمودی ریکشنونه وټاکیمعین کړئ. د ټیرو کتله او د رغړیدومقاومت د پام وړ نه دی.



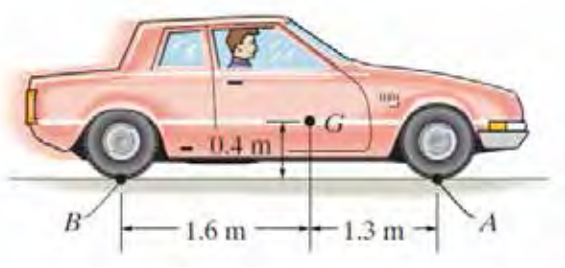
پوښتنه ب 17-1

ب 17–2. دوه 3 پونډه میلې EF او HI په ټړوند AC کې په E کې کلک ټړل شوي (ویلډ) دي. د داخلي محوري قوه E_x ، د شییر قوه E_y ، اومؤمنت M_E چې بار AC په FE باندی په E کې واردوی، وټاکی کله چې q=30° وی، ټړوند AB زاویوي سرعت w = 5 rad/s او زاویي تعجیل a = 8 rad/s² لری، لکه څنګه چې ښودل شوي.



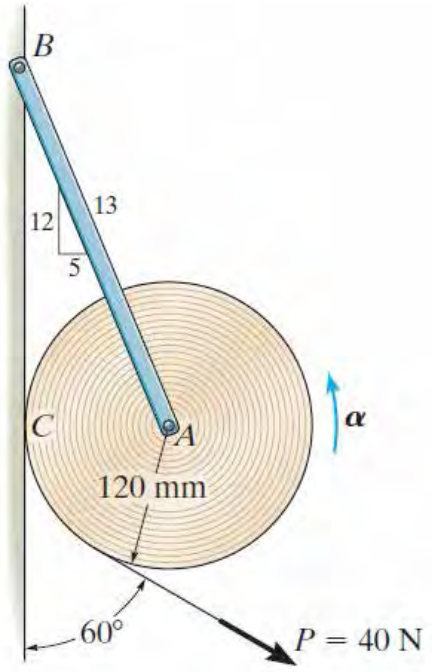
پوښتنه ب 17-1

ب 17–3. دا لاندی موټر 1.50 Mg کتله لري او د کتلی مرکزیی په G کې دی. که چېرې قوه یوازې د شا ټیروته ورکړل شي، اعظمی تعجیل چی اخستی شی معلوم کړی. د ټیرو کتله په محاسبه کی مه نیسی او فرض کړئ چې هغه ټیرونه چی قوه نه ورته رسیږی په ازاده توګه رغږی. همداراز، فرض کړئ چې هغه ټیرونه چی قوه پری عمل کوی ښوییږی او د کنټیک د اصطکاک ضریب یی $m_k = 0.3$ دی.



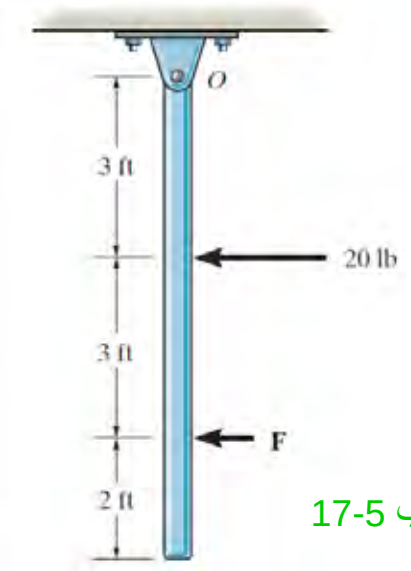
پوښتنه ب 17-3

ب 17–4. د 20 کیلوګرامه کاغذی رول، چې په لمړی مرحله کی په دریدلی حالت کی دی، په پایلوکی د برکټ AB سره په پین ټرل شوی. د کاغذ رول په دېوال تکیه کړي چیرې چې په C ټکي کی د کینیټیک اص ضریب $m_C = 0.3$ دی. که چېرې 40 N قوه په یوشان د کاغذ د تختی په پای کې تطبیق شي، د رول لومړني زاویوي تعجیل اوپه براکت کې د کشش مقدار معین کړئ کله چې کاغذ را خلاصیږی. د محاسبې لپاره، رول د یوه سلنډر په توګه معامله کړی.



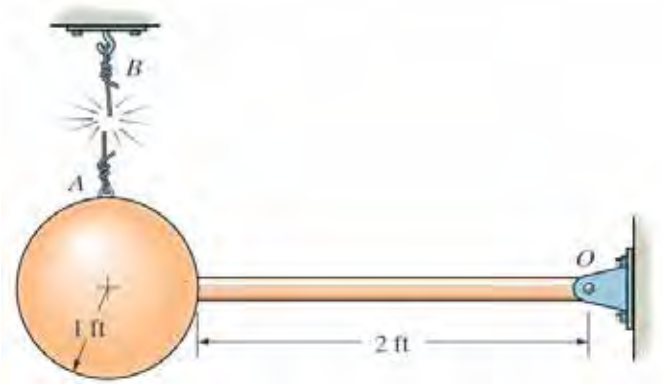
پوښتنه ب 17-4

ب 17–5. په ښودل شوي لحظه کې ، دوی قوې په 30 پونډه نرۍ میله باندې عمل کړي، چې په *O* کې پین شوی ده. د قوه **F** اندازه او د میلې لومړني زاویوي تعجیل معین کړئ ترڅود پین لخوا په میله باندې افقي ریکشن 5 پونډه وي او ښیې خواته جهت ولري.



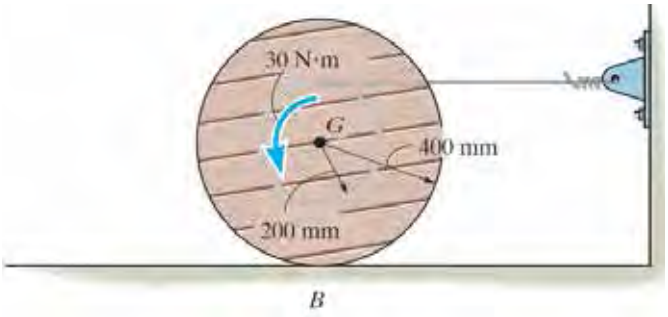
پوښتنه ب 17-5

ب 17–6. لاندی ښودل شوی پینجولم کی 30 پونډه کره او 10 پونډه نرۍ میله شامل دی. په پین *O* کې وروسته له دی چې سیم *AB* پرې شي ریکشن محاسبه کړئ.



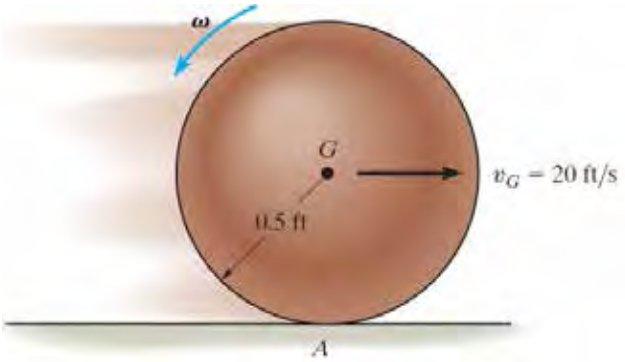
پوښتنه ب 17-6

ب 17–7. ګوټک او د هغې د هستې نه تاو شوی سیم 20 کیلوګرامه کتله لري او د سنټرویدل جایریشن شعاع یې $k_G = 250$ mm ده . که چېرې د ځمکې په سطحه د کینیټیک اصطکاک ضریب $m_B = 0.1$ وي، د ګوټک زاویوي تعجیل وټاکی کله چې د 30 N·m کپل مؤمنت پرې عمل وکا.



پوښتنه ب 17-7

ب 17–8. هغه په شا تاویدل w معین کړئ چې باید په 20 پونډه توپ پلې شي ترڅو د هغې مرکز ته لومړنی افقي سرعت $v_G = 20$ ft/s ورکړل شي، چې په عین وخت کې تاویدل او خوځېدل ودروي. د کینټیک اصطکاک ضریب $m_A = 0.3$ دی.



پوښتنه ب 17-8

آتلسم فصل

(CHAPTER 18)



رولر کوسټرونه باید وکولای شي په خوندي ډول د حلقو او چپاوونو له لارې حرکت وکړي، او د دې لپاره باید کافي انرژي ولري. د دې انرژۍ دقیقه محاسبه باید د واګونونو اندازه په پام کې ونیسي ځرنګه چې هغوی د ټرک په اوږدو کې حرکت کوي.

د یو سخت جسم سطحي کینټیکس: کار او انرژي

PLANAR KINETICS OF A RIGID BODY: WORK AND ENERGY

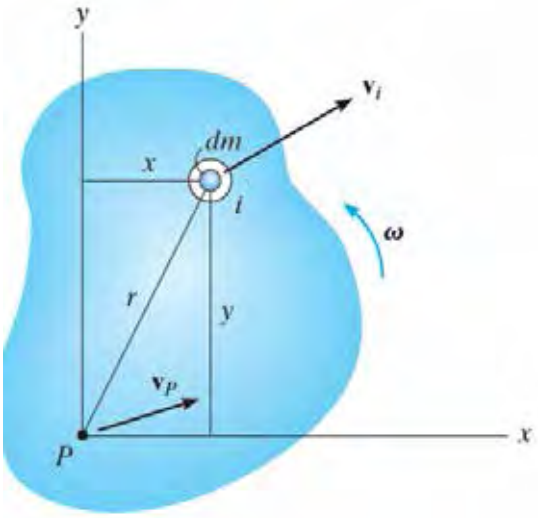
د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

- § د جسم د کینټیک انرژۍ موندلو لپاره د فورمولونو جوړه ول، او د مختلفو طریقو پیژندل چې قوه او کپل مؤمنت په څه ډول کار کوی.
- § د سخت جسم سطحی کنیتیک پوښتنو حلکولولپاره، د کار او انرژۍ داصولو پلي کول.
- § وبه ښه یو چې د ساتنې انرژۍ په څه ډول د سخت جسمومونو د سطحی کنیتیک پوښتنو حلکولو لپاره کارول کیدی شي.

18.1 کینیټیک انرژي (KINETIC ENERGY)

په دې څپرکي کې به موږ د کار او انرژۍ طریقې وکاروو ترڅو د سطحي حرکت پوښتنې چې قوه، سرعت، او بې ځایه کېدل پکې شامل دي، حل کړو. مګر لومړی به اړتیا وي چې داسې یوه طریقه رامنځته کړو چې د بدن کینټیک انرژي ترلاسه کړو کله چې بدن بیځایه کیږي (translation)، د ثابت محور په شاوخوا ګرځي، او یا عمومي سطحي حرکت لاندې وي.

د دې لپاره به موږ یو سخت جسم په پام کې ونیسو چې په انځور 18-1 کې ښودل شوی، او دلته د یوی تختې په توګه استازولی کوي چې د x–y انرشیایي ریفرینس سطحه کې حرکت کوي. د بدن یو خپلسري i ذره چې د dm کتله لري، د خپلسري نقطې P څخه د r واټن لري. که د ښودل شوي حالت په وخت کې د ذرې سرعت $\mathbf{v}_i$ وي، نو د ذرې کینټیک انرژي به وي: $T_i = \frac{1}{2}\, dm\, v_i^2$.



انځور 18-1

د ټول جسم کینټیک انرژي د بدن د هرې ذرې لپاره په ورته اصطلاحا تولیکلوسره او پایلې د اینټیګرشن نیولو سره ترلاسه کیږي، یعنې:

$$T = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_i^2$$

دا معادله په ځانګړي ډول د یوې ټاکلې نقطې P د سرعت پر بښت هم څرګندېدای شي، نه یوازې د ذرې v_i سرعت پر بښت. که بدن زاویي سرعت $\boldsymbol{\omega}$ ولري، نو د انځور 18-1 څخه موږ لاندې اړیکه ترلاسه کوو:

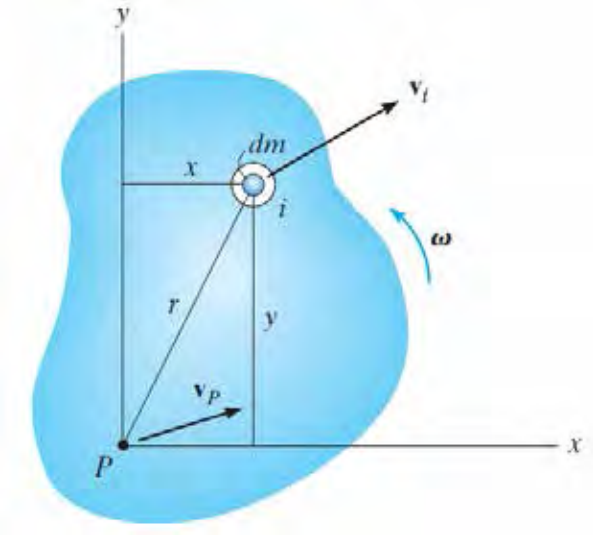
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P}\\ &= (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= [(v_P)_x - \omega y]\mathbf{i} + [(v_P)_y + \omega x]\mathbf{j}\end{aligned}$$

د v_i د اندازې مربع به په لاندې ډول وي:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i^2 &= [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2\\ &= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x\omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 x^2\\ &= v_P^2 - 2(v_P)_x\omega y + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

کله چې دا معادله د کینټیک انرژۍ په معادله کې ځای پر ځای کړو، نو لاندې ترلاسه کیږي:

$$T = \frac{1}{2}\left(\int_m dm\right)v_P^2 - (v_P)_x\omega\left(\int_m y\,dm\right) + (v_P)_y\omega\left(\int_m x\,dm\right) + \frac{1}{2}\omega^2\left(\int_m r^2\,dm\right)$$



انځور 1-18 (تکرار)

د بنې لور لومړۍ انټګریال د بدن د ټولې کتلې m استازیتوب کوي. ځکه چې $\bar{y}m = \int y\,dm$ او $\bar{x}m = \int x\,dm$، دوهم او دریم انټګریال د بدن د کتلې مرکز G موقعیت نسبت د P ته بنیي.
وروستۍ انټګریال د بدن انرشیایی مؤمنت I_p بنیي، چې د z محور ته نیول شوی چې له P تېریږي.
نو،

$$T = \frac{1}{2}mv_P^2 - (v_P)_x\omega\bar{y}m + (v_P)_y\omega\bar{x}m + \frac{1}{2}I_P\omega^2 \qquad (18\text{–}1)$$

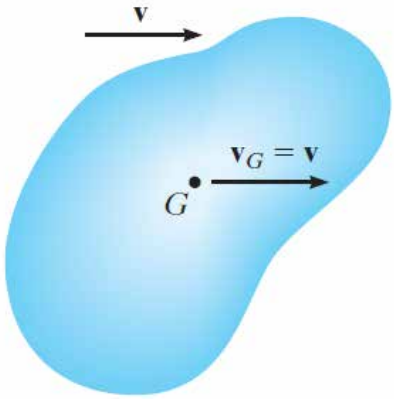
د یوه ځانګړي حالت په توګه، که چیرې ټکی P د بدن د کتلې مرکز G سره موقعیت ولري ، نو بیا ، $\bar{y} = \bar{x} = 0$ او له دې امله

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18\text{–}2)$$

د بنې لور دواړه اصطلاحی تل مثبت دي، ځکه چې v_G او w مربع شوي دي. لومړی اصطلاح د انتقالي کیناتیک انرژي استازیتوب کوي، چې د کتلې د مرکز نه نیول شوی ده، او دوهمه اصطلاح د بدن د تاویدو کینیټیک انرژي استازیتوب کوي چې د کتلې دمرکزته ده.

انتقال (Translation). کله چې یو سخت بدن د m کتلې سره د مستقیم یا منحني انتقال سره مخ شي، انځور 18-2، د تاویدو له امله کینټیک انرژي یې صفر ده، ځکه چې $w = 0$. له دې امله، د بدن کینټیک انرژي داسې کیږي:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 \qquad (18–3)$$



خوځیدل (Translation)

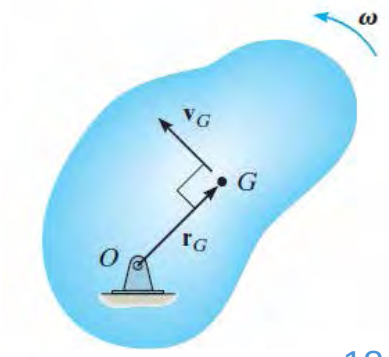
انځور 18-2

یوه ثابت محورته تاویدل (Rotation about a fixed Axis). کله چې یو سخت جسم په ثابت محور، کوم چې له O تکی تیریدونکي وي، تاو شي، انځور 18-3، جسم دواړه انتقالي او تاویدونکی انرژي لري، نو له دې امله:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18–4)$$

د جسم کینټیکي انرژي هم د O ټکي په شاوخوا کې د هغې د حرکت له مخې څرګندېدلی شي. څرنګه چې $v_G = r_G w$ ، نو $T=\frac{1}{2}(I_G + mr^2_G)w^2$. د موازي-محور قضیې له مخې، په قوسونو کې موجود اصطلاحات د جسم د انرشیایی مومنټ I_O نمایندګي کوي هغه محور ته چې د حرکت له سطحې سره عمود وی او له O ټکي څخه تېرېږي. نو ځکه، *

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (18–5)$$



انځور 18-3

تاویدل په یوه ثابت محور

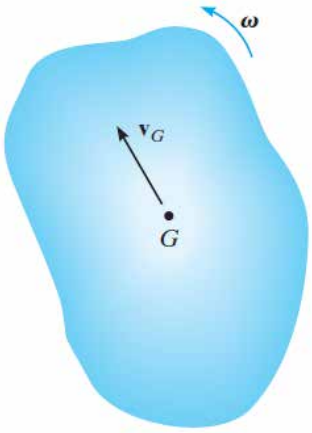
عمومي سطحي حرکت (General Plane Motion): کله چې یو سخت جسم د عمومي سطحي حرکت لاندې وي، انځور 18-4 ، دا زاویي سرعت $\boldsymbol{w}$ لري او د کتلې د مرکز سرعت $\mathbf{v}_G$ لري. نو ځکه یې د کینیټیک انرژي په لاندې ډول ده:

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18–6)$$

مور همدارنګه د جسم کینیټیکي انرژۍ محاسبه کولی شو د هغې د حرکت نه په آني مرکزچې سرعت یې صفردی. یعنی،

$$T = \tfrac{1}{2}I_{IC}\omega^2 \qquad (18–7)$$

دلته I_{IC} د جسم انرشایې مومنټ د هغه آني مرکز ته دی. د دې ثبوت د 18–5 معادلې سره ورته دی (پوښتنه 18-1 وګورئ).



انځور 18-4

عمومي سطحي حرکت

*دا مهمه ده چې د دې استنباط او د $\Sigma M_O = I_O\alpha$ ترمنځ ورته والی ته پام وشي. همدارنګه، ورته پایله په مستقیم ډول د معادلې 18–1ځخه ترلاسه کېدای شي که چیرې په O کې د P ټکی انتخاب شی، او دی ته متوجی شی چې $v_O = 0$.

د جسمونو سيستم (System of Bodies): څرنګه چې انرژي يو سکلر مقدار دي، د ټرل شويو سختو اجسامو د سيستم ټوله کينيټيک انرژي د ټولو متحرکو برخو د کينيټيکي انرژۍ مجموعه ده. د هر جسم کينيټيکي انرژي د هغه دحرکت په ډول پورې اړه لري، او د معادلې 18–2 يا د هغې د بديلو بڼو په کارولو سره موندل کيږي.

18.2 د يوې قوې کار (THE WORK OF A FORCE)

په سطحي کينيټيک پوښتنوکې چې سخت جسم پکې شامل وي، اکثراً څو ډوله قوې ليدل کيږي. د دې قوو کار په 14.1 برخه کې وړاندې شوي او لاندې د يوه لنډيز په توګه ليست کيږي.

د بدليدونکيی قوې کار (Work of a Variable Force)

که يوه بهرنۍ قوه **F** په جسم عمل وکړي، نو د هغې قوی لخوا ترسره شوی کار، کله چې جسم په مسير **s** سره حرکت کوي، انځور 18-5 ، د لاندې فورمول په واسطه محاسبه کيږي:

$$U_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_s F \cos\theta \, ds \qquad (18–8)$$

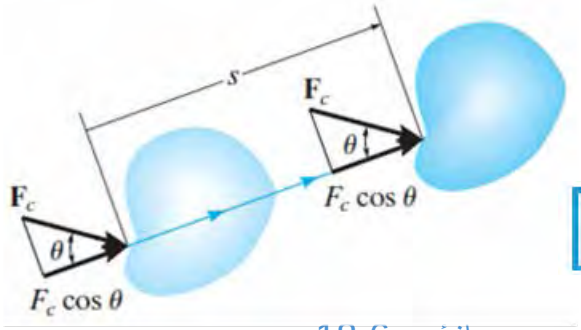


انځور 18-5

دلته θ هغه زاويه ده چې د قوې د لکۍ او بېځايه کېدو (ds) کربنو ترمنځ ده. د انټيګريشن پروسه بايد د قوې د لورۍ او شدت بدلون په پام کې ونيسي.

د ثابتې قوې کار (Work of a Constant Force)

که يوه بهرنۍ قوه $\mathbf{F}_c$ په يو جسم عمل وکړي، انځور 18-6 ، او د دې قوې شدت F_c او لورۍ θ ثابت پاتې شي، پداسې حال کې چې جسم د بېځايه کېدو نه **s** ترسره کوي، نو پورته معادله انټيګريټ کېدی شي. په دې حالت کې د قوې لخوا ترسره شوی کار کيږي:

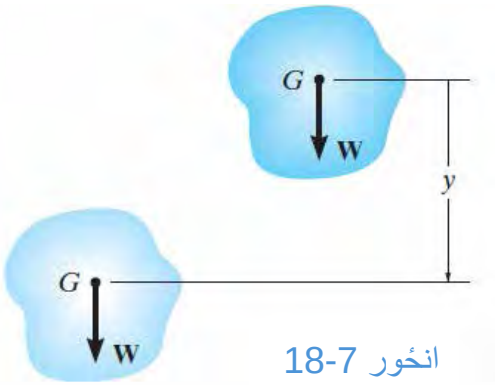


انځور 18-6

$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta)s \qquad (18–9)$$

د تول کار (Work of Weight)

د بدن تول يوازې هغه وخت کار ترسره کوي کله چې د بدن د کتلې مرکز *G* يوه عمودي بېځايه کېدنه *y* ولري. که دا بېځايه کېدل ښکته خوا وي، انځور 18-7 ، نو ترسره شوی کار مثبت وي، ځکه چې تول د بېځايه کېدو د لوري سره ورته دی.



انځور 18-7

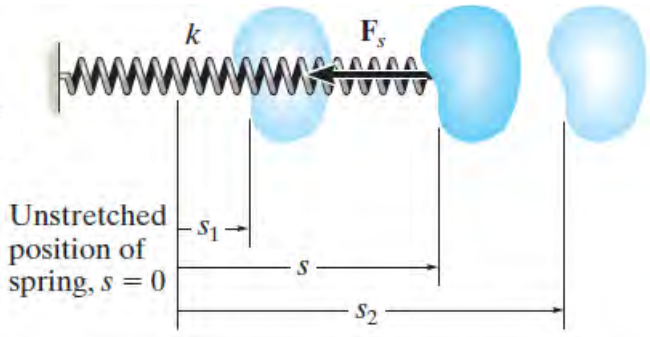
$$U_W = Wy \qquad (18–10)$$

په ورته ډول، که بېځايه کېدل پورته وي (y–)، نو کار منفي کېږي، ځکه چې تول د بېځايه کېدو مخالف لوري ته دی. په دواړو حالتونو کې، د لوړوالي بدلون کوچنی ګڼل کېږي، نو تول **W** چې د جاذبې له امله دی ثابت پاتې کېږي.

د فنر د قوې کار(Work of a Spring Force)

که يو خطي الاستيکی فنر په جسم پورې تړلی وي، نو دفنر قوه، $F_s=ks$ چې په جسم عمل کوي، کار ترسره کوي کله چې فنر له s_1 يوه بل موقعيت s_2 کشکيږی يا غونجيږی. په دواړو حالتونو کې، کاربه منفي وي، ځکه چې د جسم بېځايه کېدل د قوې په مخالف لوري کې دی، انځور 18-8 ، نو کار دی:

$$U_s = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \qquad (18–11)$$



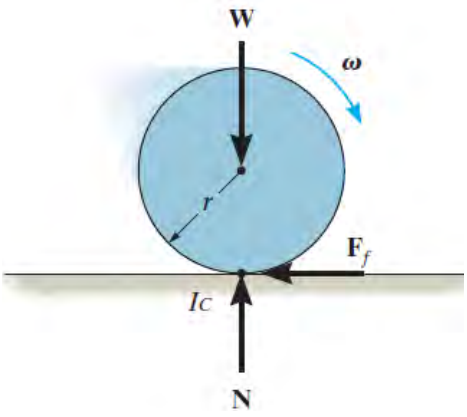
انځور 18-7

چيرې چې | S2| › |S1 |

قواوې چې کار نه کوي (Forces That Do Not Work)

ځينې بهرنې قواوې شتون لري چې د بدن د بيځايه کيدو پر مهال کار نه کوي. دا قواوې يا په بدن کې په ثابتو نقطو کې عمل کوي، يا هغه لور لري چې د بيځايه کيدو سره عمودي وي. ببلګې يې عبارت دي له هغه عکس العملونو چې د پين د تکيې پر ټکيو کې چې جسم پرې تاويږي، هغه عادي عکس العمل چې پر جسم باندې عمل کوي چې په يوه ثابته سطحه باندې حرکت کوي، او د جسم تول کله چې د جسم د جاذبې د مرکز په افقي سطحه کې حرکت کوي، انځور 18-9 . د يوه اصتکاک قوه $\mathbf{F}_f$ چې پر يو ګردي بدن باندې عمل کوي کله چې بدن پرته له ښويدو څخه په يوه زيږه سطحې رغړې ، هم کار نه کوي. * دا ځکه چې، د هرې ثانيې په ترڅ dt کې ، $\mathbf{F}_f$ په جسم باندې په يوه نقطه کې عمل کوي چې د هغې سرعت صفر وي(انې مرکز، IC)او نو د دې قوې لخوا په دغه نقطه کې ترسره شوې کار صفر دی. په بل عبارت، په دغه لحظه کې ټکی په هغه لور کې چې قوه پرې عمل کوي، نه بيځايه کيږي. له دې کبله چې $\mathbf{F}_f$ يوازې په يوه نقطه کې چې يو په بل پسې راځي په لحظوی توګه تماس نيسي، د $\mathbf{F}_f$ کار صفر دی.

* د فريکشن ځواک لخوا ترسره شوی کار کله چې بدن ښويږي ، په 14-3 برخه کې بحث شوی دی.

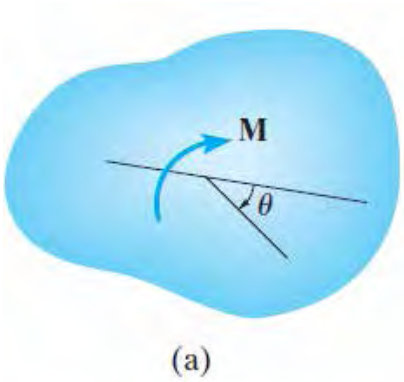


انځور 18-9

18.3 . د کپل مؤمنت کار: (THE WORK OF A COUPLE MOMENT)

يوجسم چې په انځور 18-10a کې ښودل شوی دي په پام کې نيسو. په دی جسم يو کپل مومنټ $M = Fr$ وربانډی پلی شوي . که جسم يوه کوچنۍ بيځايه کيدنه تجربه کړي، نو د کپل قواوو لخوا ترسره شوی کار د بيځايه کيدنې له املې چې د د انتقال اوتاويدو د مجموعې په توګه موندل کيدای شي. کله چې جسم انتقال کوي، د هرې قوې کار يوازې د قواوو د عمل کرښې په اوږدو کې د

بیځایه کیدنی د جز له خوا جوړیږی، ds_t، انځور 18-10b. واضح ده چې د یوې قوې "مثبت" کار د بلې قوې "منفي" کار لغوه کوي. کله چې بدن د یو کوچنی (differential) تاویدل dq په یوه اختیاري نقطه O کی تجربه کړي انځور 18-10c ، نو هره قوه یوه بیځایه کیدنه $ds_q = (r/2)\, dq$ د قوی په لورتجربه کوي. له دې امله، ټول ترسره شوی کار داسې دی

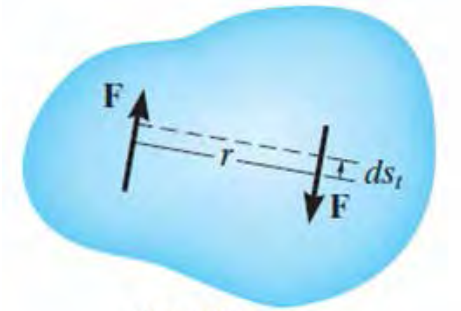


(a)

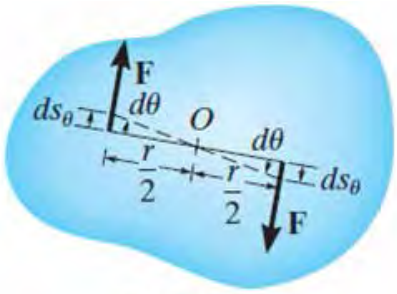
$$dU_M = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\, d\theta$$
$$= M\, d\theta$$

کار مثبت وي کله چې **M** او dq په یوه لوري په جهت کې وي او منفي وي که دغه ویکتورونه په مخالف لوری کې وي. کله چې بدن په سطحه کې د یوې محدودې زاویې q په اندازه تاو شی چې په ردینو کې اندازه کیږي، له q_1 څخه تر q_2 پورې، د یوه کپل مومنټ کار په دې توګه دی

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (18–12)$$



Translation
(b)



Rotation
(c)

انځور 18-10

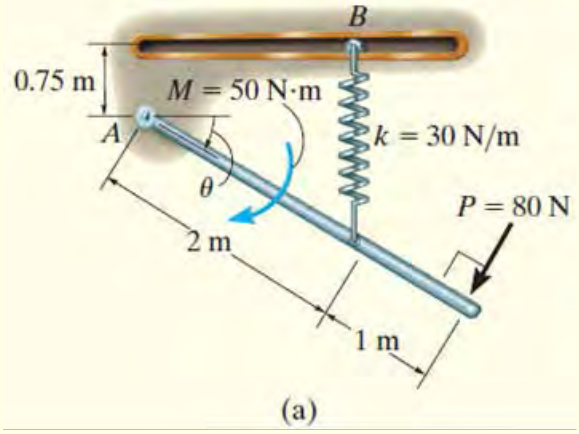
که چیرې کپل مومنټ **M** یو ثابته اندازه ولري، نو

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (18–13)$$

مثال 18.1

په انځور 18-11a کې ښودل شوی بار 10 kg کتله لري او یو کپل مومنټ $M = 50\ \text{N·m}$ او قوه $P = 80\ \text{N}$ وربانډی عمل کړي، کوم چې قوه تل د بار په پای کې عمودي تطبیق کیږي. همدارنګه، فنر 0.5 متره نه پراخ شوي اوږدوالی لري او په B نقطه کې د رولر لارښود له املې په عمودي حالت کې پاتې کیږي. ټول هغه کار چې قواوې په بار باندې ترسره کوي باید معلوم شي کله چې بار د $q = 0^o$ څخه تر $q = 90^o$ پورې بښکته تاویږي.

حل



انځور 18-11

لومړی، د بار آزاد بدن ډیاګرام رسم کیږي ترڅو ټولې هغه قواوې حساب شي چې پرې عمل کوي، انځور 18-11b .

تول W (Weight W) . له دې املې چې تول $W = 98.1\ \text{N}$ $10(9.81)$ په اندازه د 1.5 متره بښکته ځي، نو کار داسې محاسبه کیږي.

$$U_W = 98.1\ \text{N}(1.5\ \text{m}) = 147.2\ \text{J}$$

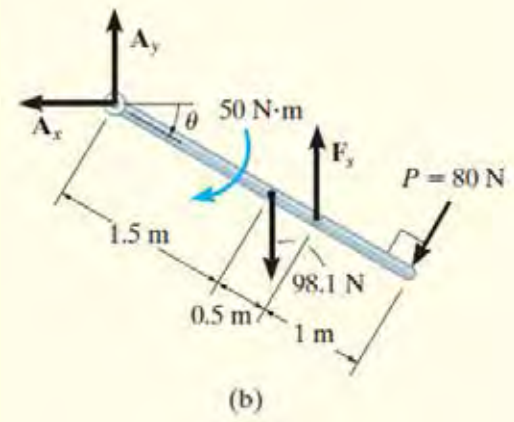
ولې کار مثبت دی؟

کپل مومنټ M (Couple Moment) . کپل مؤمنت د $q = \pi/2$ ردینو زاویوي لارې تاویږي. نو،

$$U_M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}(\pi/2) = 78.5\ \text{J}$$

د فنر قوه F_s (Spring Force F_s). کله چې $q = 0°$ وي، فنر $(0.75\ \text{m} - 0.5\ \text{m}) = 0.25\ \text{m}$ غوڑیژی، او کله چې $q = 90°$ وي، غوڑیدا کیږي $(2\text{m} + 0.75\text{m}) - 0.5\ \text{m} = 2.25\ \text{m}$ نو بیا.

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(2.25\ \text{m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(0.25\ \text{m})^2\right] = -75.0\ \text{J}$$



انځور (ادامه)18-11

د فنر قوه په بار باندې منفي کار ترسره کوي ځکه چې $\mathbf{F}_s$ د بیځایه کیدنی په مقابل لور کې عمل کوي. دا د پایلې سره سمون لري.

$$U_P = 80\ \text{N}(4.712\ \text{m}) = 377.0\ \text{J}$$

قوه P (Force P). لکه څنګه چې بار بښکته حرکت کوي، قوه په $(\pi/2)(3\ \text{m})=4.712\ \text{m}$ فاصله بیځایه کیږي. کار مثبت دی. ولې؟

$$U_P = 80\ \text{N}\ 4.712\ \text{m} = 377.0\ \text{J}$$

د پین ریکشنونه (Pin Reactions). قواوې $\mathbf{A}_x$ او $\mathbf{A}_y$ هیڅ کار نه کوي ځکه چې دوی نه بیځایه کیږي.

ټول کار (Total Work). د ټولو قواوو کار کله چې بار بیځایه کیږي، په دې توګه دی:

$$U = 147.2\ \text{J} + 78.5\ \text{J} - 75.0\ \text{J} + 377.0\ \text{J} = 528\ \text{J} \qquad \textit{Ans.}$$

18.4 د کار او انرژۍ اصول (PRINCIPLE OF WORK AND ENERGY)

د کار او انرژۍ اصول چې په برخه 14.2 کې تشریح شوی، د یوه سخت جسم په هرې ذرې باندې تطبیق کړئ او نتیجه یې په الجبرې توګه یوځای کړئ، ځرنکه چې انرژي سکیلر ده، نو مونږ ورته نتیجه د یوه سخت جسم لپاره ترلاسه کوو.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \qquad (18–14)$$



په دې باسکول پل کې مخالف جهت تول A مثبت کار ترسره کوي کله چې پل پورته کیږي، او په دې توګه د پله د تول لخوا ترسره شوی منفي کار لغوه کوي.

دا معادله څرګندوي چې د جسم ابتدايي انتقالي او تاویدونکی کنیټیک انرژي جمع د ټولو بهرنیو قواوو او کپل مومنټونو لخوا ترسره شوی کار چې پر بدن باندې عمل کوي لکه څنګه چې جسم د خپل ابتدايي ځای څخه تر وروستي ځای پورې حرکت کوي، مساوی دی د جسم په وروستی انتقالي او تاویدونکی کنټیک انرژي سره. د جسم د داخلي قواوو کار باید په پام کې ونه نیول شي، ځکه چې دغه قواوې د جوړې په توګه چې مساوي او مخالف جهت په یوه محور لري، رامنځته کیږي، نو کله چې جسم حرکت کوي، د یوې قوې کار د هغې د مخالفې قوې کار لغوه کوي. برسېره پر دې، ځرنګه چې جسم سخت دی، د دې قواوو ترمنځ هیڅ نسبي حرکت نه پیښیږي، له دی کبله داخلي کار نه ترسره کیږي.

کله چې څو سخت جسمونه په پین سره وصل شي، د غیر پراخیدونکو کیبلونو سره وصل شي، یا یو له بل سره ټرلي وي، معادله 14-18 کولی شي د ټولو وصل شویو بدنونو سیستم ته هم تطبیق شي. په ټولو دغه حالاتو کې داخلي قواوې، کومې چې مختلف غړي سره یو ځای ساتي، هیڅ کار نه کوي او له دې امله د تحلیل څخه حذف کیږي.



د ټورک یا مومنټ کار چې د موټرو لخوا رامنځته شوی په کیناتیک انرژۍ د ډرم په تاویدو بدلیږي.

د تحلیل کړنلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

د کار او انرژۍ اصول د کینیتیکي پوښتنوحل کولو لپاره کارول کیږي چې *سرعت*، *قوه*، او *بیځایه کیدنې* سره تړاو لري، ځکه چې دغه اصطلاحات په فورمول جوړولو کی شامل دي. د تطبیق لپاره، سپارښتنه کیږي چې لاندې کړنلاره وکارول شي.

کینیتیک انرژي (کینمټیکي ډیاګرامونه) Kinetic Energy (Kinematic Diagram)

- د جسم کینیتیک انرژي دوه برخې لري. د انتقال کینیتیک انرژي د کتلې مرکز د سرعت په حواله ده، $T = \frac{1}{2}mv^2_G$، او د تاویدو کینیتیک انرژي د جسم د کتلې په مرکز باندی د انرشیایی مومنټ په کارولو سره معلومیږي، $T = \frac{1}{2}I_G w^2$. په ځانګړې حالت کې تاویدل په ثابت محور (یا تاویدل په IC)، د کینیتیک انرژۍ حرکت ته محاسبه کیدی شی چی د تاویدو محورته وی، $T = ½ I_O \omega^2$.
- د سرعت لپاره کینمټیکي ډیاګرامونه د v_G او w معلومولو لپاره ګټور کیدای شي، یا د v_G او w ترمنځ د اړیکو ټینګولو لپاره.

کار (د آزاد بدن ډیاګرام) (Work (Free-Body Diagram)

- د جسم آزاد بدن ډیاګرام رسم کړئ کله چې هغه د لارې په اوږدو کې په منځنۍ نقطه کې موقعیت لري ترڅو ټولی قواوې او کپل مؤمنتونه حساب شي چې په جسم باندې کار کوي کله چې هغه په مسیر باندی مخته حرکت کوي.
- یوه قوه هغه وخت کار کوي کله چې د قوی په لور بیځایه کیدنه وشی.
- هغه قواوی چې تابع د بیځایه کیدنی وي باید د کار ترلاسه کولو لپاره انټیګرېټ شي. په ګرافیکي لحاظه، کار د قوی او بیځایه کیدنې کربنی لاندې سیمی سره مساوي دی .
- د ټول کار د د ټول د اندازی او عمودي بیځایه کیدنی د ضرب حاصل دی، $U_W = Wy$. دا مثبت دی کله چې ټول ښکته حرکت کوي.
- د یوه فنر کار په لاندې شکل د $U_s = ½ ks^2$ دی، چیرته چې k د فنر سختوالی دی او s د فنر د غځیدلو یا غونجیدلو مقدار دی.

د یوه کپل کار عبارت دی په حاصل د کپل مومنټ او زاویه په رادیانونو کې کوم چې دا تاویدنه کوي، $U_M = Mq$.

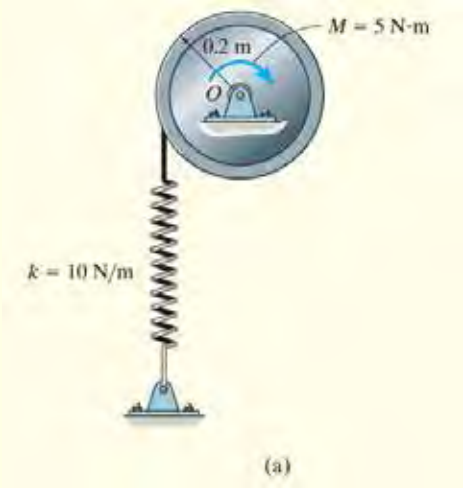
د کار د اصتلاحاتو د الجبري اضافه کولو لپاره اړینه ده چې د هر اصتلاح مناسب نښه مشخص شي. په ځانګړې توګه، کار مثبت دی کله چې قوه (جوړه مومنټ) د خپل بیځایي (تاویدنی) سره په ورته لوري کې وي؛ که نه، دا منفي کیږي .

د کار او انرژی اصول (Principle of Work and Energy).

- د کار او انرژی اصول تطبیق کړئ، $T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$. لکه څنګه چې دا یو سکیلر معادله ده، دا یوازې د یوه مجهول حل کولو لپاره کارول کیدی شي کله چې دا یو واحد کلک بدن ته تطبیق شي.

مثالونه

مثال 18.2



د 30 کیلو ګرامه ډیسک چې په انځور 18-12a کې ښودل شوی، په خپل مرکز کې د پین ملاتړ لري. هغه زاویه معلومه کړی چې ډیسک له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کړي تر څو د 2 rad/s زاویوي سرعت ترلاسه کړي. پر دې ډیسک باندې ثابت کپل مومنټ M = 5 N·m عمل کوي. فنرپه لمړنی وخت کی غزیدلی نه دی او کورډ یی د ډیسک د څنډې شاوخوا تاو شوی دی.

حل

انځور 18-12

کینیټیک انرژي (Kinetic Energy).

څرنګه چې ډیسک په ثابت محور تاویږی او په پیل کې په دریدلی حالت کې دی، نو:

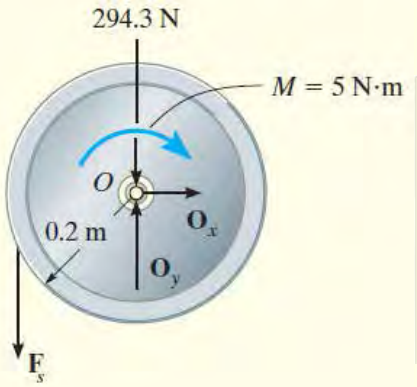
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(0.2\text{ m})^2\right](2\text{ rad/s})^2 = 1.2\text{ J}$$

کار (د آزاد بدن ډیاګرام)(Work (Free-Body Diagram) .

لکه څنګه چې په انځور 18-12b کې ښودل شوی، د پین ریکشنونه $\mathbf{O}_x$ او $\mathbf{O}_y$ او توله (294.3N)هیڅ کار نه کوي، ځکه چې دوی نه بیځایه کیږي. کپل مومنټ چې ثابته اندازه لري، مثبت کار کړي $U_M = Mq$ لکه څنګه چې ډیسک د ساعت په جهت زاویه q ردیین ګرزی، او

فنر منفي کار کوي $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$.

د کار او انرژۍ اصول (Principle of Work and Energy)



(b)

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \left\{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\right\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \left\{(5\,\text{N}\cdot\text{m})\theta - \frac{1}{2}(10\,\text{N/m})[\theta(0.2\,\text{m})]^2\right\} = \{1.2\,\text{J}\}$$

$$-0.2\theta^2 + 5\theta - 1.2 = 0$$

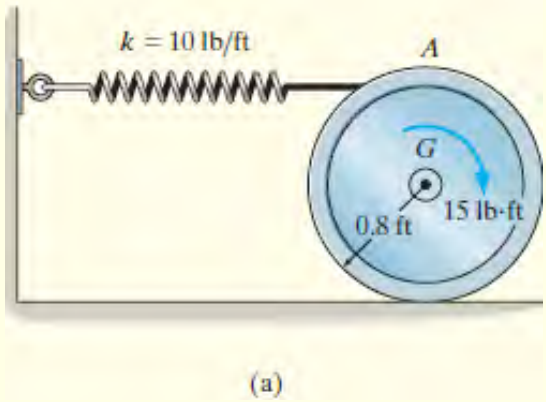
د دې دوه درجې معادلې (quadratic equation) حل کول د کوچنۍ مثبت جذر لپاره

$$\theta = 0.2423\ \text{rad} = 0.2423\ \text{rad}\left(\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}}\right) = 13.9^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 18.3

په انځور 13a-128کې ښودل شوی څرخ 40 پونډه تول لري او د کتلې مرکز G ته $k_G = 0.6$ft د جایریشن شعاع لري. که په دی څرخ د 15 lb.ft کپل مؤمنت د ساعت ګرزیدو په لور وربانډی پلي شوي وي اوبیله ښویدو د دریدلی حالت نه ورغړی، دهغې زاویوي سرعت هغه وخت ومومئ کله چې مرکز G په اندازه د 0.5ft حرکت وکړي. فنرد سختۍ ضریب $k = 10$k/ft لري او په پیل کې کله چې کپل مومنټ وربانډی پلي شي کش شوي نه دي.

حل



(a)

کینټیک انرژي (کینمتیک ډیاګرام) Kinetic Energy (Kinematic Diagram) .

څرنګه چې څرخ په پیل کې په دریدلی حالت کی دی:

$$T_1 = 0$$

د څرخ کینماتیک ډیاګرام په وروستي حالت کې په انځور 18-13b کې ښودل شوی دی. وروستی کینتیک انرژي د لاندې فورمول څخه ترلاسه کیږي:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_{IC} \omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(0.6\text{ ft})^2 + \left(\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.8\text{ ft})^2\right]\omega_2^2$$

$$T_2 = 0.6211\,\omega_2^2$$

کار (آزاد جسم ډیاګرام) (Work (Free-Body Diagram)

لکه څنګه چې په انځور 18-13cکې ښودل شوی، یوازې د فنر قوه $\mathbf{F}_s$ او کپل مومنټ کار کوي. عمودی قوه د خپل عمل په کرښه حرکت نه کوي، او د اصتکاک قوه هیڅ کار نه کوي، ځکه چې څرخ له ښویدو پرته رغړی. د $\mathbf{F}_s$ کار د لاندې معادلې له لارې ترلاسه کیږي:

$$U_s = -\frac{1}{2} ks^2$$

دلته کار منفي دی ځکه چې $\mathbf{F}_s$ د بیځیه کیدو په مخالف جهت کې ده. څرنګه چې څرخ نه ښویږي کله چې مرکز G په 0.5 فوټ حرکت کوي، نو څرخ داسې رغړی:

$$\theta = s_G/r_{G/IC} = 0.5\text{ ft}/0.8\text{ ft} = 0.625\text{ rad}.*$$

له همدې امله، فنر داسې غزیږي:

$$s = \theta r_{A/IC} = (0.625\text{ rad})(1.6\text{ ft}) = 1\text{ ft}.$$

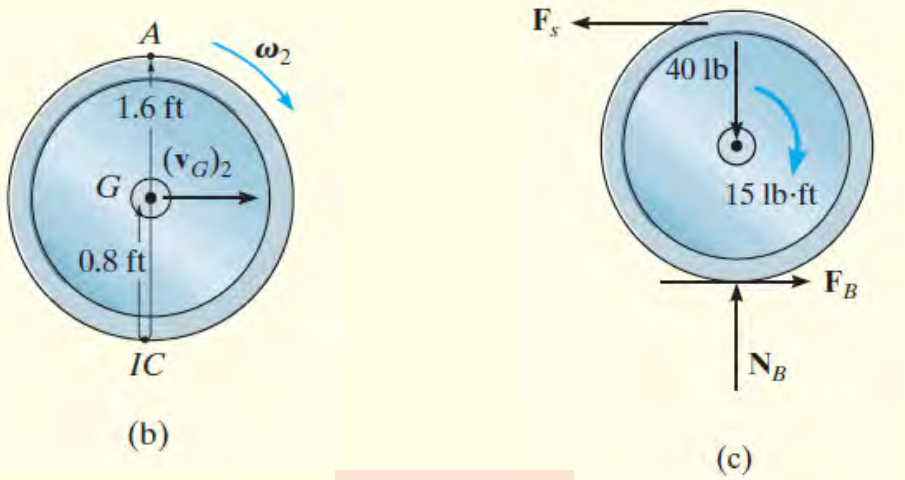
د کار او انرژی اصول (Principle of Work and Energy)

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \left\{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\right\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \left\{15\text{ lb}\cdot\text{ft}(0.625\text{ rad}) - \frac{1}{2}(10\text{ lb/ft})(1\text{ ft})^2\right\} = \{0.6211\,\omega_2^2\text{ ft}\cdot\text{lb}\}$$

$$\omega_2 = 2.65\text{ rad/s}\,\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$



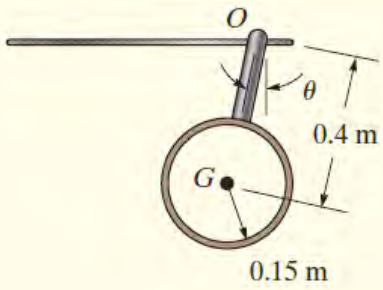
انځور 18-13

*مثال 16.4 وګوری

مثال 18.4

د 700 کیلوګرامه پایپ په مساوي ډول د فورک لفټ له دوو څانګو څخه ځړول شوی دی، لکه څنګه چې په عکس کې ښودل شوي دي. دا د ځړند یا ټال حرکت لاندې دی، په داسې حال کې چې کله $q = 30°$ وي، په موقتي ډول په دریدلی حالت کی وی. په دې حالت کې، هغه عمودي او د اصطکاک قواوې وټاکئ چې د پایپ د ملاتړ لپاره په هره څانګه باندې عمل کوي کله چې $q = 0°$ وي. د پایپ او ځړونکي اندازی په انځور 18-14a کې ښودل شوي ده. د ځړونکي تول او د پایپ پنډوالی له پامه وغورځوئ





انځور 18-14

حل

مورِ باید د حرکت د معادلو نه کارواخلو ترڅو په څانګو قوی ومومو، ځکه چې دا قوی کار نه کوي. مګر مخکې له دې چې دا کار وکړو، مورِ به د کار او انرژۍ اصول وکاروو ترڅو د پایپ زاویوي سرعت ومومو کله چې $q = 0°$ وي.

کینټیک انرژي (کینمتیک ډیاګرام) Kinetic Energy (Kinematic) Diagram .

څرنګه چې پایپ په ابتدا کې په دریدلی حالت کې دی، نو:

$$T_1 = 0$$

وروستی کینیټیکي انرژي ثابتې نقطې O یا د مرکز G ته محاسبه کیدی شي. د محاسبې لپاره، مورِ به پایپ د یوې نرۍ کړۍ په توګه وګڼو، نو $I_G = mr^2$ (جدول د دی کتاب دپوښ په داخل مخ کی وګورئ). که چېرته د G ټکی په پام کې ونیول شي، مورِ لرو:

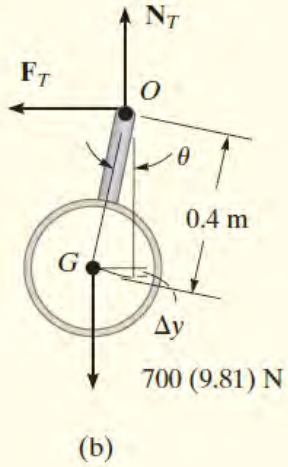
$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(700\text{ kg})[(0.4\text{ m})\omega_2]^2 + \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

که چېرته د O ټکی په پام کې ونیول شي، نو د موازي محور قضیه به وکارول شی چې I_O محاسبه شي. له همدې امله:

$$\begin{aligned} T_2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 &= \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0.4\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

کار (آزاد جسم ډیاګرام) (Work (Free-Body Diagram)).

انځور 18-14b څخه، په څانګو باندې عمودی اواصطکاکی قواوې کارنه کوي ځکه چې دوی د پایپ د ټال سره حرکت نه کوي. تول مثبت کار کوي ځکه چې تول د عمودي فاصلې y په اندازه ښکته ځي، یعنې $y = 0.4\text{m} - 0.4\cos(30°)\text{ m} = 0.05359\text{m}$.



(b)

د کار او انرژۍ اصول Principle of Work and Energy)

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{700(9.81)\text{ N}(0.05359\text{ m})\} = \{63.875\omega_2^2\}$$

$$\omega_2 = 2.400\text{ rad/s}$$

د حرکت معادلې (Equations of Motion). له انځور 18-14c چې د آزادجسم او کینیتیک ډیاګرامونو ښودل شوی، او د ω_2 د پایلې په کارولو سره، موږ لرو:

$$\pm \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad F_T = (700\text{ kg})(a_G)_t$$
$$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad N_T - 700(9.81)\text{ N} = (700\text{ kg})(2.400\text{ rad/s})^2(0.4\text{ m})$$
$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 0 = [(700\text{ kg})(0.15\text{ m})^2 + (700\text{ kg})(0.4\text{ m})^2]\alpha$$

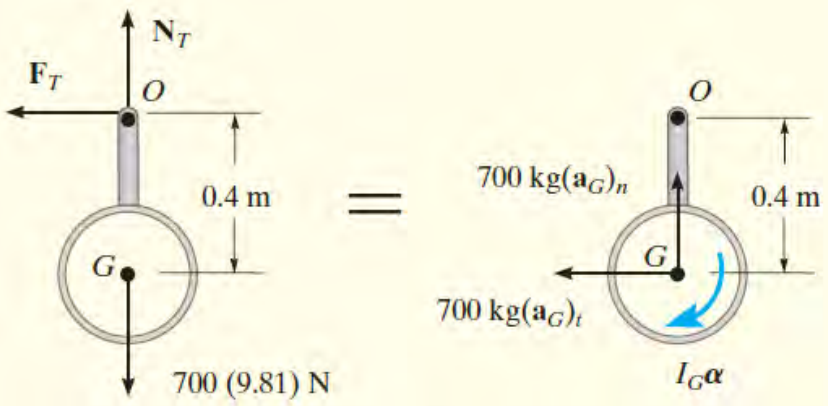
څرنګه چې $(a_G)_t = (0.4\text{ m})\alpha$ ، نو:

$$\alpha = 0 \quad (a_G)_t = 0$$
$$F_T = 0$$
$$N_T = 8.480\text{ kN}$$

څرنګه چې دوی څانګې دی چې د بار د ملاتړ کوی، نو:

$$F'_T = 0 \qquad \textit{Ans.}$$
$$N'_T = \frac{8.480\text{ kN}}{2} = 4.24\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: د ټال (swinging) حرکت له امله، څانګې د یوی لویې عمودي قوه سره مخ کیږي په پرتله د هغه قوی که بار ستټیکی وی.

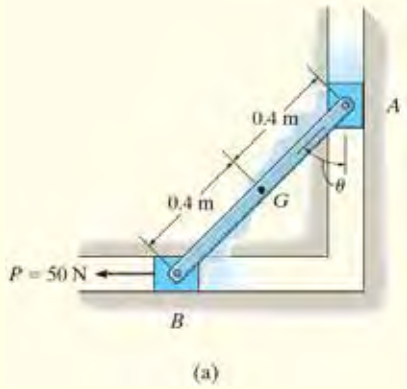


(c)

انځور 14-18 (ادامه)

مثال 18.5

10کیلوګرامه راډ چې په انځور 18-15a کې ښودل شوی، داسې محدود شوی چې پایلی یې په دوو جریو کې حرکت کړی شی. راډ لومړي په دریدلی حالت کې دی کله چې $q = 0°$ وی. که چیرې د B ښویدونکي بلاک باندې $P = 50\text{N}$ قوه عمل وکړی، نو د $q = 45°$ په حالت کې د راډ زاویوي سرعت ومومئ. د A او B بلاکونو تول او اصطکاک له پامه وغورځوئ



(a)

حل

ولې د کار او انرژۍ اصل د دې پوښتنې د حل لپاره کارول کیدی شي؟

کینټیک انرژي (کینمتیک ډیاګرامونه) Kinetic Energy (Kinematic Diagrams)

. د راډ دوه کینیمتیک ډیاګرامونه، کله چې دا په لومړي حالت 1 او وروستي حالت 2 کې وي، په انځور 18-15b کې ښودل شوي دي. کله چې راډ په 1 حالت کې وي، T_1 0 =، ځکه چې $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$. په 2 حالت کې زاویوي سرعت $\mathbf{w}_2$ دی، او د کتلې مرکز سرعت $(\mathbf{v}_G)_2$ دی. نو، کینیتیکي انرژي داسې ده:

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0.8\text{ m})^2\right]\omega_2^2 \\ &= 5(v_G)_2^2 + 0.2667(\omega_2)^2 \end{aligned}$$

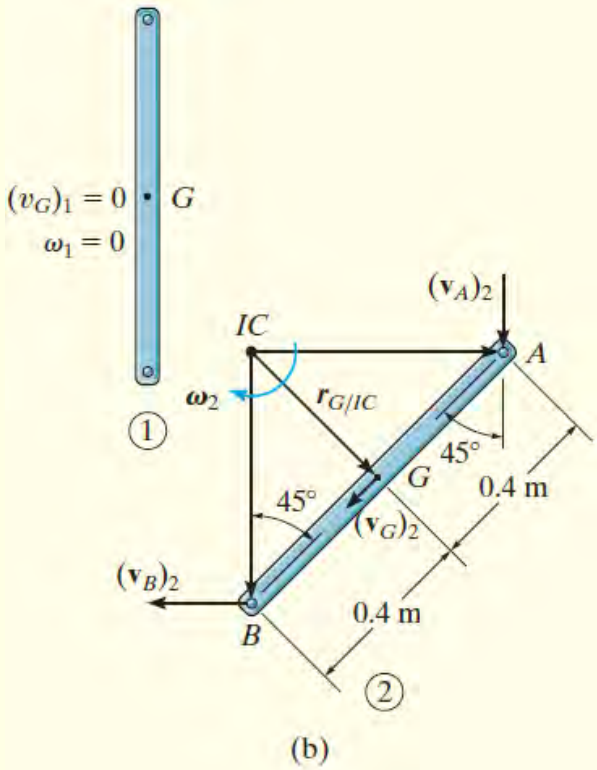
دوه مجهوله $(v_G)_2$ او ω_2 د راډ لپاره په لحظوی توګه د راډ د مرکزد صفر سرعت سره تړاو لري، انځور 15-18b . لیدل کیږی کله چې A په $(\mathbf{v}_A)_2$ سرعت سره ښکته حرکت کوي، B په افقي ډول چپې خواته په $(\mathbf{v}_B)_2$ سرعت سره حرکت کوي. د دې جهتونو په پوهیدو سره، د IC موقعیت په انځور کې ښودل شوی. نو

$$(v_G)_2 = r_{G/IC}\omega_2 = (0.4 \tan 45^\circ \text{ m})\omega_2$$
$$= 0.4\omega_2$$

له دې امله:

$$T_2 = 0.8\omega_2^2 + 0.2667\omega_2^2 = 1.0667\omega_2^2$$

البته، دا پایله $T_2 = \frac{1}{2} I_{IC}\omega_2^2$
له څخه هم ترلاسه کیدی شي



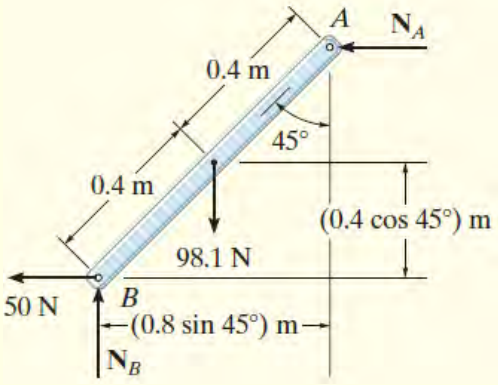
انځور 15-18

کار (آزاد جسم ډیاګرام) Work (Free-Body Diagram).

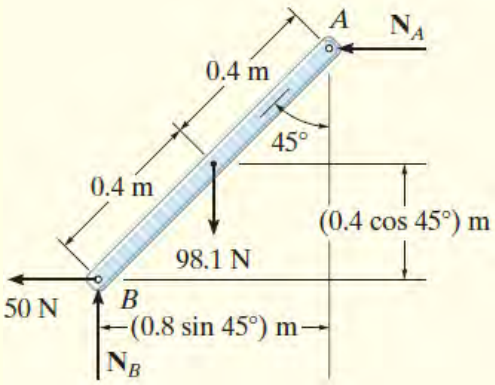
په انځور 15-18cکې، عمودي قواوي $\mathbf{N}_A$ او $\mathbf{N}_B$ کله چې راډ بیخایه کیږی کار نه کوي. ولې؟

د 98.1 N تول په عمودي فاصله Δ_y بیځایه شوی

: $\Delta_y = (0.4 - 0.4\cos 45^\circ)$ m



په داسې حال کې چې د 50 N قوه په افقي ډول فاصله s حرکت کړي.



$$s = (0.8\sin 45°)\ \text{m}$$

دواړه قواوې مثبت کار کوي. ولې؟

د کار او انرژۍ اصول (Principle of Work and Energy)

انځور 18-15

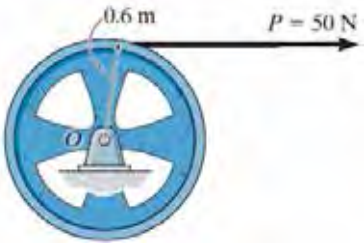
$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$
$$\{T_1\} + \{W\,\Delta y + Ps\} = \{T_2\}$$
$$\{0\} + \{98.1\ \text{N}(0.4\ \text{m} - 0.4\cos 45°\ \text{m}) + 50\ \text{N}(0.8\sin 45°\ \text{m})\} = \{1.0667\omega_2^2\ \text{J}\}$$

د w_2 لپاره یې حل کوو چې حاصل یې دی

$$\omega_2 = 6.11\ \text{rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

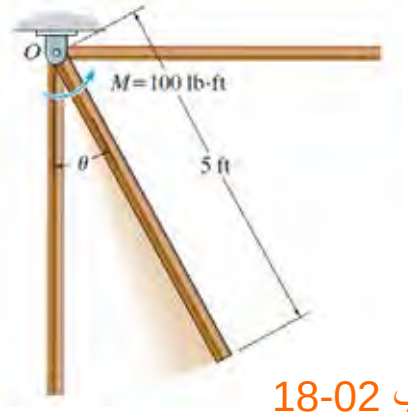
بنسټیز پوښتنې FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 18.1 . د 80 کیلوګرامه څرخ د خپلې کتلې مرکز O ته د جایریشن شعاع $k_O = 400\text{mm}$ لري. د څرخ زاویه یوې سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې 20 واړی ګرزیدا (revolutions) بشپړه کړي او پیل یې له دریدلی حالت نه کړی وی.



ب 18-01

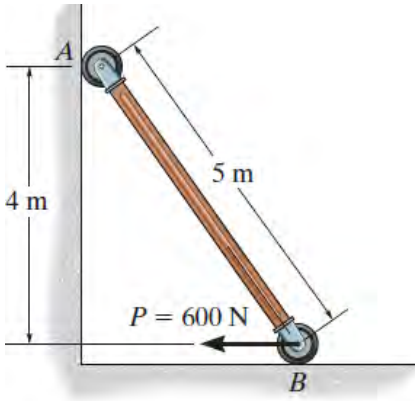
ب 18.2 . یو یوشان 50 پونډه نرۍ راډ د M = 100 lb.ft کپل مومینټ سره مخ دی. کله چې زاویه $q = 0°$ وي راډ په دریدلی حالت کی دي، زاویوي سرعت یی محاسبه کړئ کله چې زاویه $q = 90°$ شي.



ب 18-02

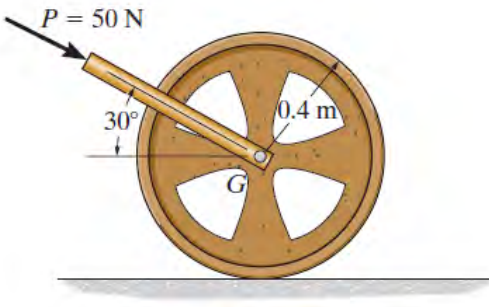
ب 18.3 .

یو یوشان 50 کیلوګرامه نرۍ راډ په ښودل شوي موقعیت کې په دریدلی حالت کی دی کله چې $P = 600N$ قوه پرې تطبیق شویی. د راډ زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې راډ عمودي موقعیت ته ورسیږي.



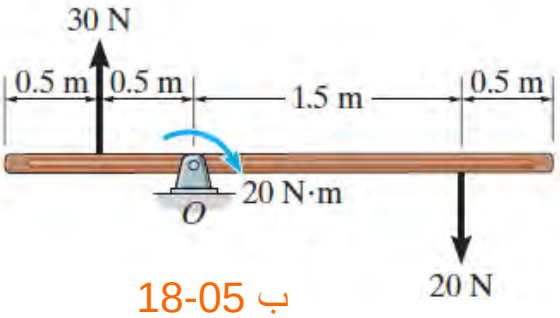
ب 18-03

ب 18.4 . د 50 کیلوګرامه څرخ د50 N قوی سره مخ دی. که چیرې څرخ له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کړي او پرته له ښویدو ورغړی، د څرخ زاویوي سرعت وروسته له 10 بشپړ ګرزیدو محاسبه کړئ. د څرخ د جایریشن شعاع یی د کتلې مرکز G ته k_G =0.3m ده.



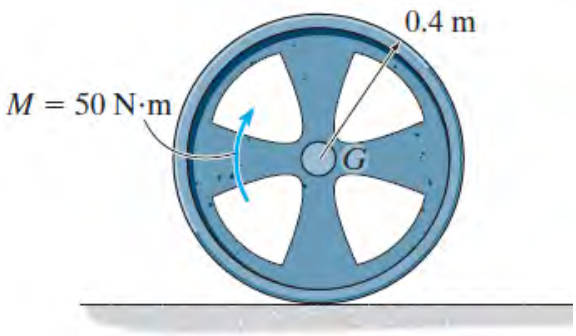
ب 18-04

ب 18.5 . که چیرې یوشان 30 کیلوګرامه نری راډ په ښودل شوی موقعیت کې په دریدلی حالت کی وی، زاویوي سرعت یی محاسبه کړئ وروسته له دې چې 4 واری بشپړې وګرزی. قواوې په راډ باندی عمودي پاتې کیږي.



ب 18-05

ب 18.6 . د 20 کیلوګرامه څرخ خپل مرکز G ته د جایریشن شعاع $k_G = 300mm$ لري، او په ښودل شوي حالت کی دریدلی دي. کله چې $M = 50\ N.m$ کپل مومینټ پری تطبیق شی، پرته له ښویدو رغړی. د څرخ زاویوي سرعت محاسبه کړئ وروسته له دې چې د ده د کتلې مرکز G پوره $s_G = 20m$ واټن تللی وی.



ب 18-06

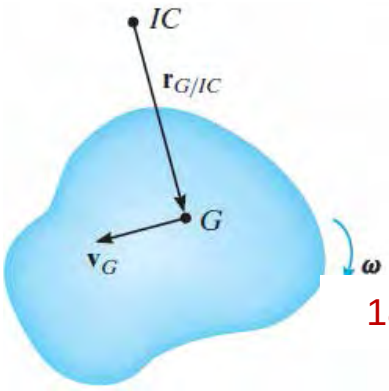
پوښتنې

PROBLE

تول حلونه باید آزاد بدن ډیاګرام ولری (Free-Body

18–1. په یوه معینه لحظه کی د m کتلی لرونکي جسم یوه زاویه یی سرعت w لري او د

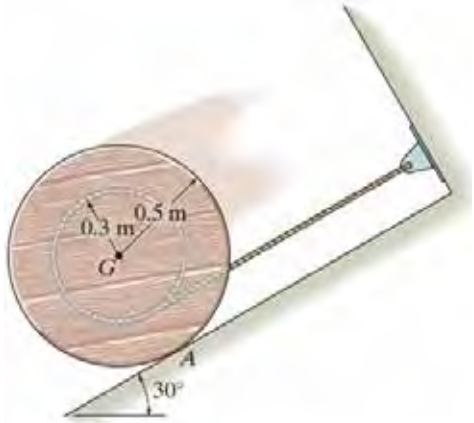
کتلې مرکزیی $\mathbf{v}_G$ سرعت لري. وښیی چې د جسم کینیټیک انرژی په لاندې ډول ښودل کیدی شي $T = \frac{1}{2} I_{IC} w^2$ ، چیرې چې I_{IC} د جسم انرشیایی مؤمنت لحظوی محورد صفر سرعت سره دي ، چې د کتلې د مرکز څخه $r_{G/IC}$ فاصله لري.



پ 18-1

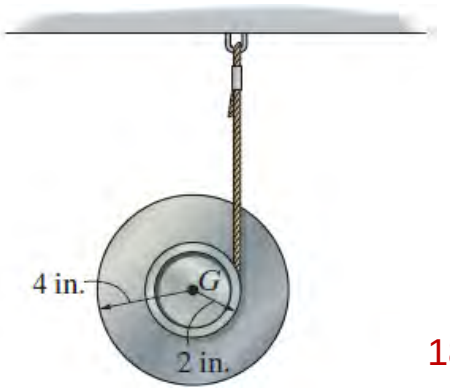
18–2 . د ګوټک کتله 60kg ده او د جایریشن شعاع یی $k_G = 0.3\text{m}$ ده. که چیرې دی د دریدلی حالت نه خوشی شی، نو د ده مرکز فاصله په مایله سطحه څومره ښکته ځی ترڅو $w = 6$ rad/s زاویوي سرعت ته ورسیږي. د اصتکاک اغیزه او د کارډ کتله چی د ګوټک تر منځنی برخه تاو شوی مه حسابوي.

18–3. پوښتنه 2- 18حل کړئ که چیرې د ګوټک او سطحې ترمنځ په A کی د کینیټیک اسطکاک ضریب $\mu_k = 0.2$ وي



پوښتنې 18-2/3

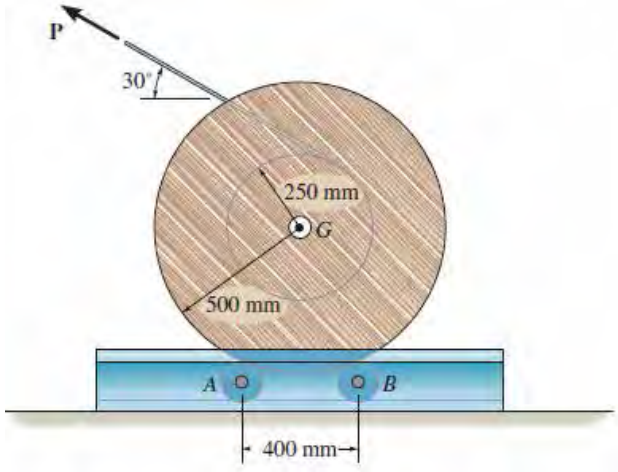
18–4* . دګوټک تول 20 lb دی او د جایریشن شعاع یی kG = 3 in ده. که چیرې له دریدلی حالت نه خوشی شي، نو دې څومره ښکته لاړ شی ترڅو د ده د مرکز سرعت 20 ft/s شي. کیبل د ګوټک له داخلی برخی تاو شوی او خلاصیږی کله چی ګوټک ښکته ځی. د کیبل کتله مه حسابوي .



پ 18-4

18–5 . یوه P= 20N قوه په کیبل باندې تطبیق کیږي، تر څو د 175 kg خرخ وګرزوی څرنګه دی په رولر A او B باندې په آرامۍ ولاړ دی. که څرخ د دریدلی حالت نه دوه واری تاو شی د څرخ زاویوي سرعت معلوم کړئ. د رولرو او د کیبل کتله مه حسابه وي. د څرخ د جایریشن شعاع مرکزی محورته $k_G = 0.42m$ ده.

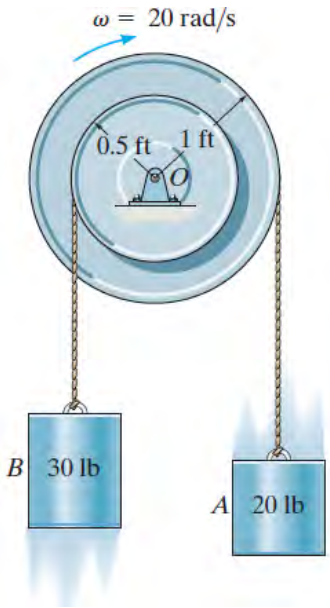
18–6 . یوه $P = 20$ قوه په کیبل باندې تطبیق کیږي، تر څو د 175 kg خرخ پرته له بنویدو په رولر A او B باندې وګرزوی. د څرخ زاویوي سرعت معلوم کړئ وروسته له هغه چې له دریدلی حالت نه دوه واری تاوشی. د کیبل کتله مه حسابوی. هر رولر د 18 کیلوګرامه سیلینډر په توګه منل کیږي چې شعاع یی 0.1m ده. د څرخ د جایریشن شعاع مرکزی محورته $k_G =$ 0.42m ده.



پوښتنې 18-5/6

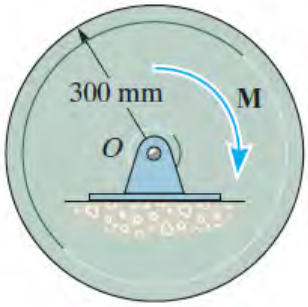
18–7 . دوه ګوني څرخکی دوه برخې لري چې یو بل سره تړلي دي. دې 50lb تول لري او د مرکز جایریشن شعاع یې $k_O = 0.6ft$ ده او په 20 rad/s زاویوی سرعت سره د ساعت په لور تاویږی. د سیستم کینیتیک انرژی معلومه کړئ. فرض کړئ چې کیبل په څرخکیو باندې نه بنویږی.

18–8* . دوه ګوني څرخکی دوه برخې لري چې یو بل سره تړلي دي. دې 50lb تول لري او د مرکز جایریشن شعاع یې $k_O = 0.6$ft ده او د 20 rad/s زاویوی سرعت سره د ساعت په لور ګرزی. د څرخکی زاویه یې سرعت معلوم کړئ په هغه لحظه کې کله چې 20 lb تول 2 ft بښکته حرکت وکړي.



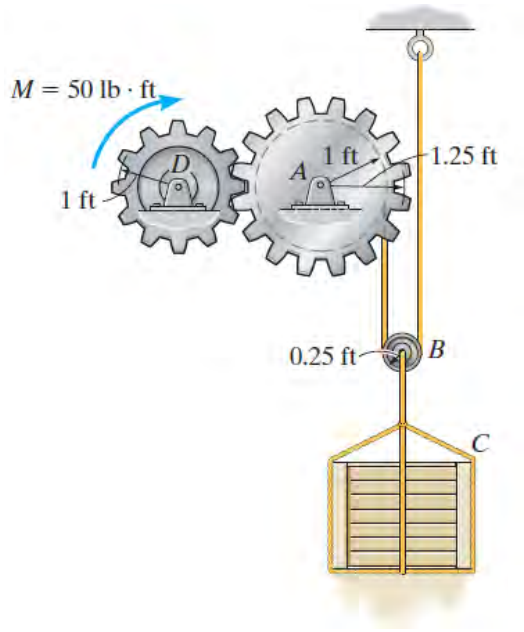
پوښتنې 18-7/8

18–9. د دیسک چې 20 kg کتله لری، او $M = (2q + 4)$ N.m مومینټ ور باندی پلی شویی، چیرې چې q په رډینو کې ده. که دریدلی حالت نه په تاویدو حرکت وکړیو پس له دوو دورو یی زاویوي سرعت معلوم کړئ.



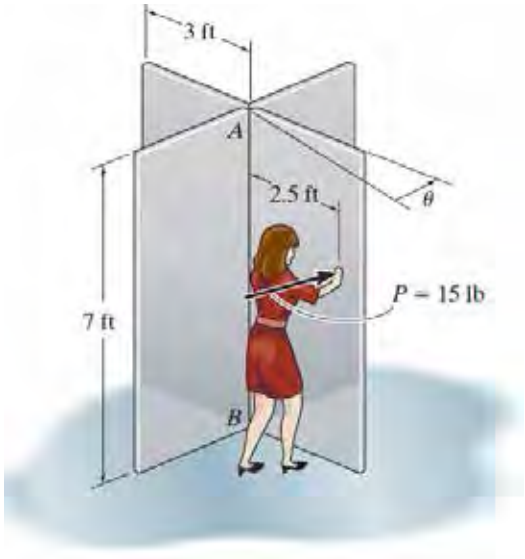
پ 18-9

18–10 . یو موټور 50 lb.ft مومینټ پنیون ګیر D ته ورکوي، چې د لوی ګیر A سره اړیکه او د ډرم سره چې کیبل پرې تاو شوی تړل شوی. که د A دتول 120 lb او د جایریشن شعاع یې $k_A = 0.6$ft وی، د 50lb بکس C سرعت معلوم کړئ کله چې هغه 5 ft له دریدلی حالت نه پورته شی. د پنیون ګیر، کیبل او پولي تول په B کی مه حسابوي.



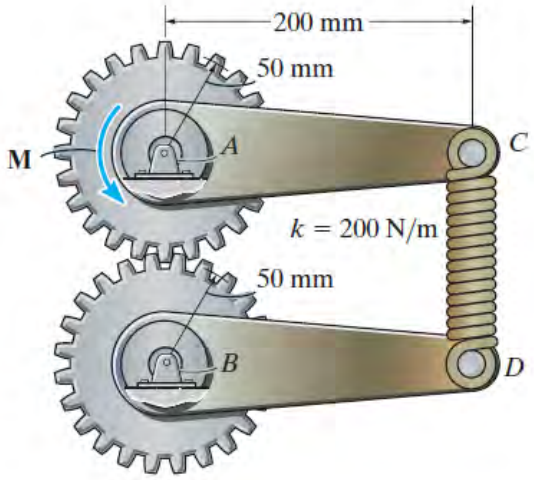
پ 18-10

18–11 . څرخيدونکي دروازه له څلورو دروازو څخه جوړ شوی چې د محور *AB* سره تړلي دي. هر دروازه فرض ده چې 50 lb نرۍ تخته ده. اصطکاک په محور کې 2 lb.ft مومينټ جوړوی چې د دروازو د تاويدلولپاره مقاومت کوي. که يوه ښځه د دروازې پر پله *P* =15 lb عمود قوه پلی کوی، د دروازې زاويوی سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې د90º وګرزی. دروازې په ابتدا کې په دريدلی حالت کی دی.



پ 18-11

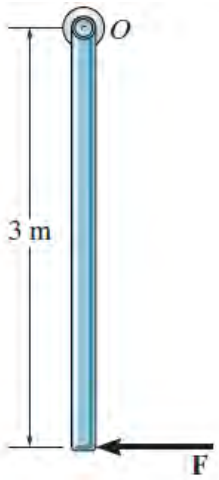
18–12 . هر ګیر 2 کیلوګرامه کتله لري او د هغوي د جایریشن شعاع د خپل کتلې مرکز A یا B پورې $k_G = 40$ mm دي. هر ټروند یا لینک د 2 کیلوګرامه کتله لري او د جایریشن شعاع وی د په پین پای ، A یا B ته $k_I = 50$ mm دي. که چېرې په ابتدا کې فنر کش شوی نه وي کله چې د $M = 20$N.m کپل مومینټ په لینک AC تطبیق شي، د لینک زاویه يې سرعت معلوم کړئ کله چې لینک AC پوره $q = 45°$ زاویوي حرکت وکړي. هر ګیر او ټروند د یو بل سره ټرلی او پر د ثابت پینو A او B باندی تاویږی.



پ 18-12

18–13 . د 10 kg یوشان نری راډ د O پین څخه په دریدلی حالت کې ځوړند دی کله چې F= 150Nقوه د ده په پای کی تطبیق شي. د راډ زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې دی 90^o د ساعت په لور تاو شی. قوه همیشه راډ ته عمودی حالت لری.

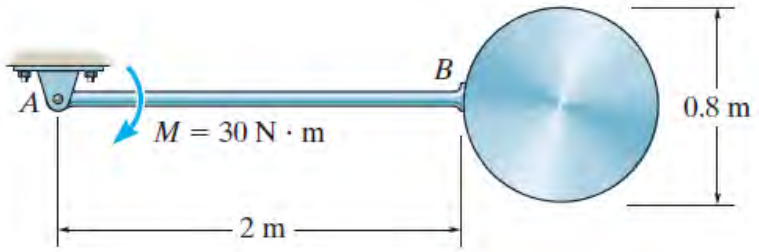
18–14 . د 10 kg یوشان نری راډ د O پین څخه په په دریدلی حالت کې ځوړند دی کله چې $F = 150$N قوه د ده پای ته تطبیق شي. د راډ زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې دی د بنودل شوی حالت نه 180^o د ساعت په لور تاو شی. قوه همیشه راډ ته عمودی حالت لری.



پوښتنې 18-13/14

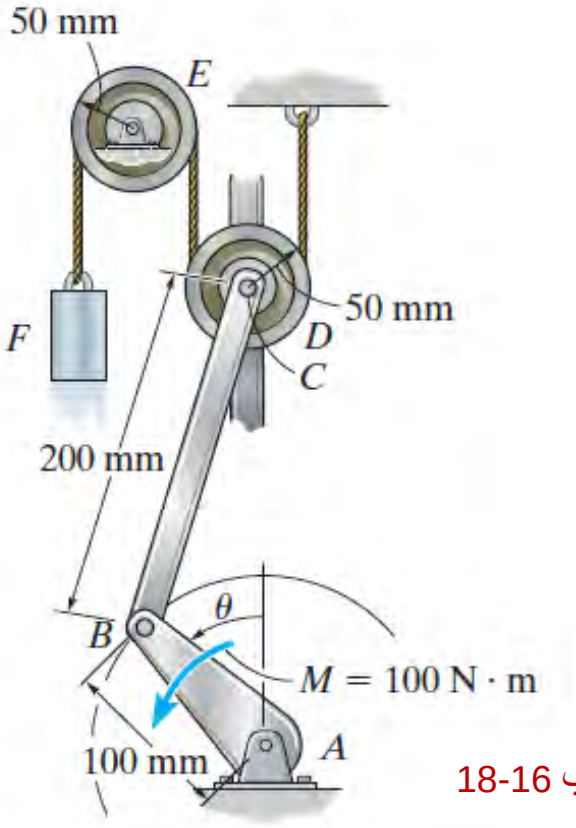
18–15 . پنجولم د 10 kg يوشان ديسک او 3 kg يوشان نرى راډ څخه جوړ شوى. كه د بنودل شوى، دريدلى حالت څخه خوشى شي، د ده زاويوي سرعت معلوم كړئ كله چې دى 90^{o} د ساعت په لور تاو شى.

.



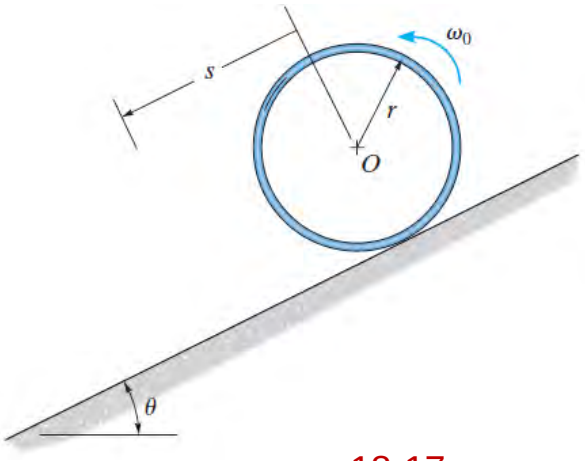
پ 18-12

18–16* سيستم له دريدلى حالت څخه خوشىشوى كله چې زاويه $q = 0°$ وي او يو ثابت مومينټ $M = 100\text{N.m}$ پرى تطبيق شي. كه چيرې د كيبل او لينک AB او BC كتلې په پام كى ونه نيول شي ، او هر څرخكى د ديسک په توګه چې 6 kg كتله لري، د 10 كيلوګرامه بلاک سرعت معلوم كړئ كله چې ټروند AB په $q = 90°$ تاو شوى دى. په ياد ولرى چې د C ټكى د عمودي لارښود پر اوږدوالي حركت كوي. همدارنګه، كيبل په څرخكى باندې نه بنويږى.



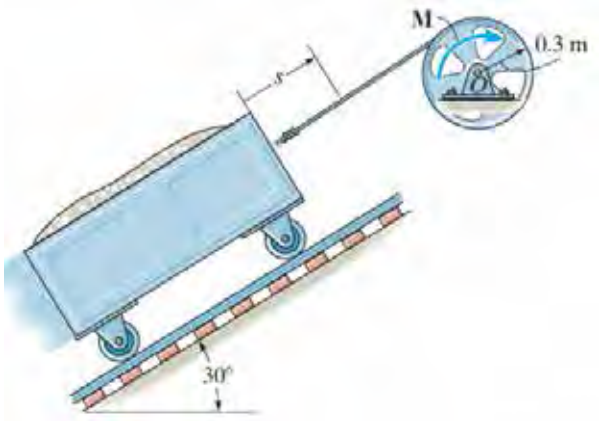
پ 18-16

18–17 . د نرۍ حلقې چې مرکز يې O او m کتله لري، w_0 زاويوي سرعت ورکړ شوی. که حلقه پرته له ښويدو ورغړۍ، د دې زاويوي سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې دا يو واټن s په هواره سطحه ښکته ځي. د دې ضخامت مه حسابه وي.



پ 18-17

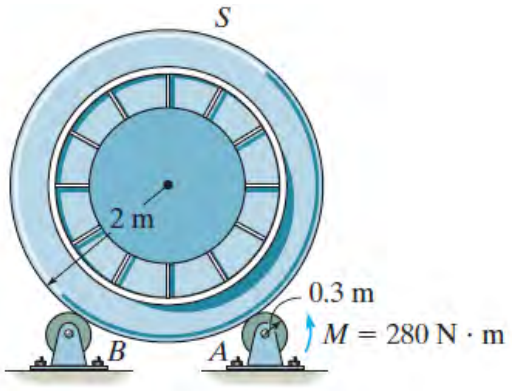
18–18 . دا لاندې 100 kg څرخ د جايريشن شعاع $k_O = 0.2m$ لري. يو موټور د ډرايو شافټ O ته $M = (40\ q + 900)N.m$ مومينټ توليد وي، چيرې چې q په رډينو کې ده. د بار وړونکي کارټ سرعت معلوم کړئ، چې د 300 kg کتله لري، وروسته له هغه چې دی $s =$ 4m سفر وکړي. په پيل کې کارټ په دريدلی حالت کی دی کله چې $s = 0$ او $q = 0°$ وي. د تړل شوې کيبل او د کارټ د ګاډيو کتله مه حسابوي .



پ 18-18

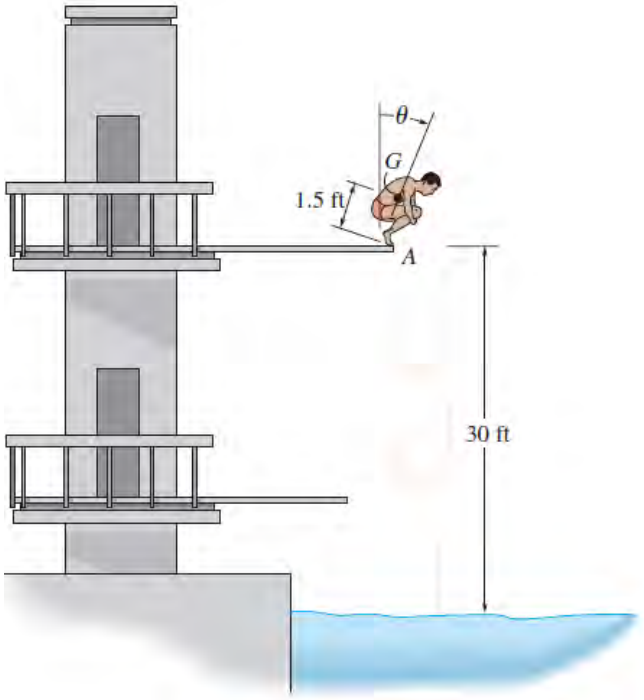
18–19 . تاويدونکي صفحه S د مرمرو تيرو مينځلو لپاره کارول کيږي. کله چې خالي وي، د دې کتله يې 800 kg او د جايريشن شعاع يې $k_G = 1.75m$ دي. د تاويدو لپاره $M =$

280N.m تورک په ډرایو څرخ په A کی تطبیق ښوی. که چیرې په A کې هیڅ ښویدل نه وي او په B کې د ملاتړ څرخ آزاد تاویدل کولای شي ، د صفحی زاویوي سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې دا 5 واری تاو شی. د A او B کتله په حساب کی مه نیسی.



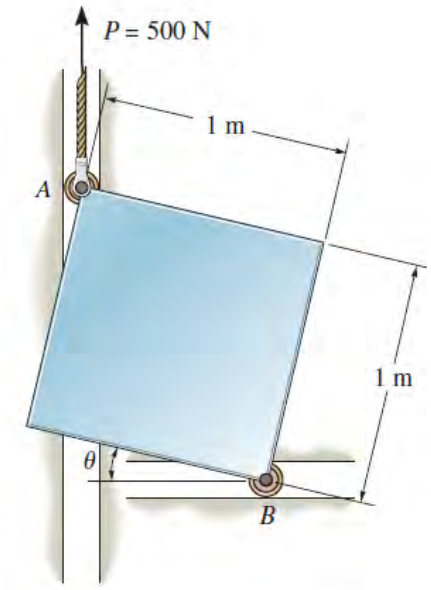
پ 18-19

18–20* . یو سړي چې تول یې 150 lb دی، لکه څنګه چې ښودل شوی، د ډایوینګ تختې پر سر غونجیږی. په دې موقعیت کې د د ده دجازبی مرکزته د جایریشن شعاع $k_G = 1.2$ft ده. که دی په دی موقعیت کې پاتې شي چې $q = 0°$ وي، د ا سړي په خپلو ګوتو په A کی تاویږی تر څو سړي له تختې سره اړیکه له لاسه ورکړي کله چې $q = 90°$ شی . که چیرې هغه سخت پاتې شي، د هغه د تاویدو شمېر مخکې له دې چې په اوبو ولګیږي تخمین کړئ او دی له 30 ft څخه غوټه کوی.



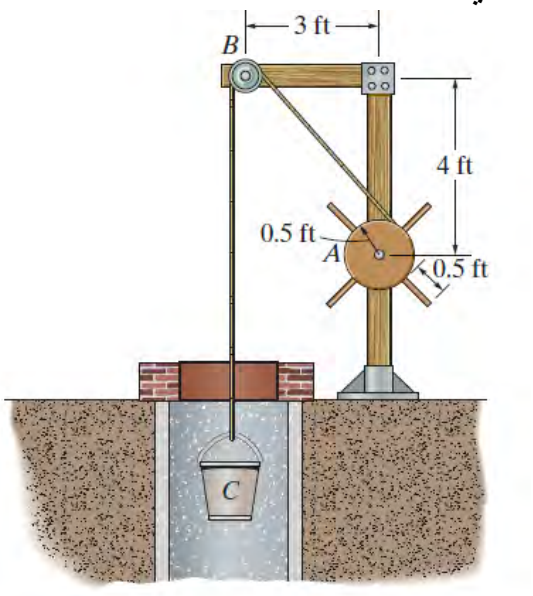
پ 18-20

18–21 . که چیرې د 60kg تختی په کونج A کې $P = 500N$ عمودي قوه تطبیق شي، او کله چې $q = 0°$ وي تخته له دریدلی حالتنه خوشی شي ، د تختې زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې $q = 45°$ شي.



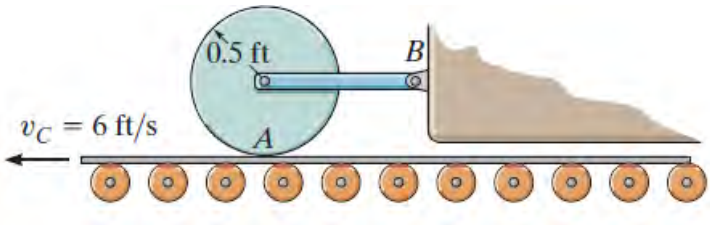
پ 18-21

18–22 . که چیرې 50 پونډه ډولجه C له دریدلی حالت څخه خوشي شي، د دې سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې دا 10 فوټه ښکته ولویږی. ونډلس A کیدي شي چې د 30 lb سیلینډر په توګه په پام کی ونیول شي ، پداسې حال کې چې پرې یې نرۍ راډونه دی چې هره یوه 2 lb تول لري. د څرخکي تول مه حسابه وي.



پ 18-22

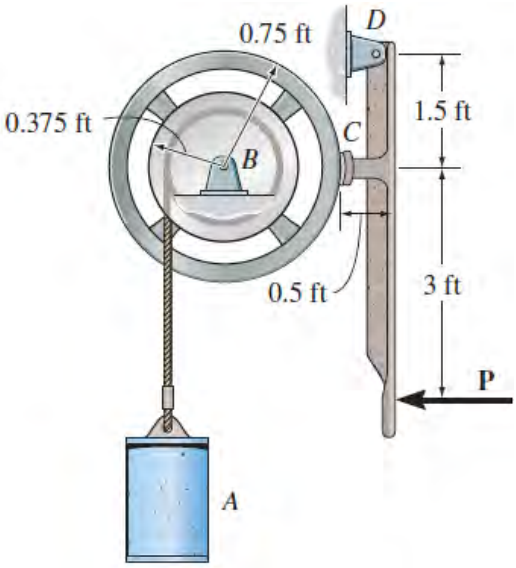
18–23. د 100 lb ډیسک او د کانویر تسمی ترمنځ د متحرک اصطکاک ضریب $\mu_A = 0.2$ دی. که کانویور تسمه په $v_C = 6$ ft/s تیزوالی حرکت وکړي اود ډیسک ور باندی ایښی وی، د ډیسک د ثابت زاویوي سرعت ترلاسه کولو لپاره د ډیسک د تاویدو شمېر معلوم کړئ.



پ 18-23

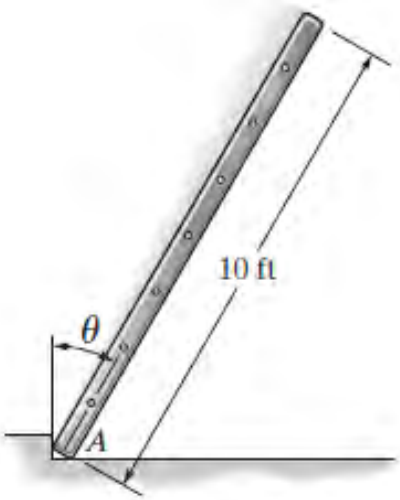
***18–24**. دا لاندې 50 lb سلنډر A په 20 ft/s ښکته حرکت کوي کله چې بریک ونیول شی. که څرخ B وروسته له 5 واره تاویدو ودرول شي، هغه ثابته قوه P چې باید د بریک په لاس باندې تطبیق شي معلومه کړئ. د بریک پټی C اود څرخ ترمنځ د متحرک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.5$ دی. د څرخ تول 25 lb دی او د کتلی مرکز ته یی د جایریشن شعاع $k = 0.6$ ft ده.

18–25 . کله چې د بریک په لاس باندې 30lb قوه تطبیق شي، د 50 پونډه سلنډر A په 20 ft/s تیزوالی سره ښکته حرکت کوي. معلومه کړئ چې څرخ B څو واری تاو شی مخکې له دې چې ودریږي. د بریک پټی C اود څرخ ترمنځ د متحرک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.5$ دی. د څرخ تول 25 lb دی او د کتلې مرکز ته یی د جایریشن شعاع k = 0.6ft دی.



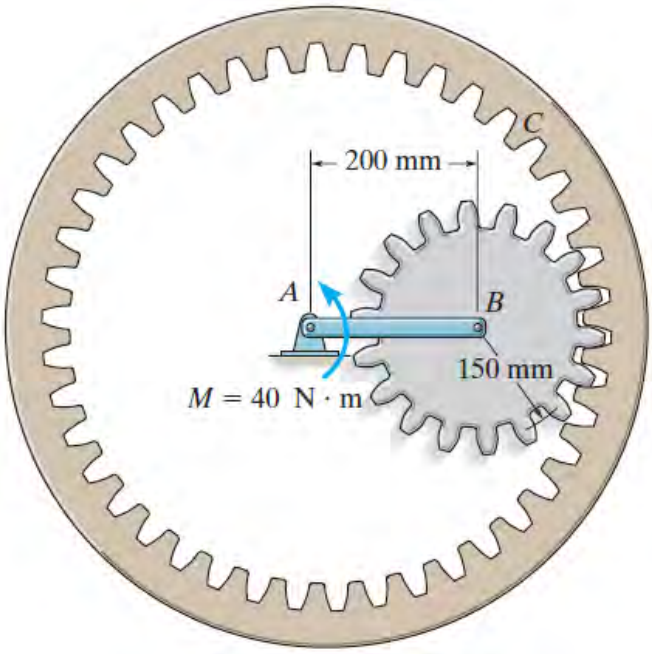
پوښتنې 18-24/25

18–26 . یوه یوشان زینه چې تول یې 30 lb دی، د عمودي حالت څخه چې په دریدلی حالت کی ده، خوشی شویی. معلومه کړئ په کومه زاویه θ کې د زینې لاندې پای A له ځمکې څخه پورته کیږي. د محاسبې لپاره زینه د نری راډ په توګه فرض کړئ او د A په نقطه کې اصطکاک له پامه وغورځوئ.



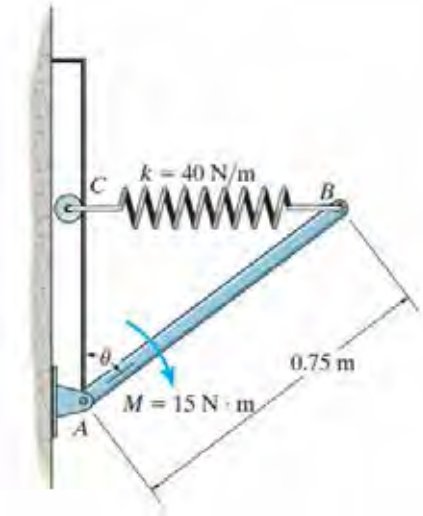
پ 18-26

18–27. په ټروند AB یو کپل مؤمنت $M = 40\ \text{N}\cdot\text{m}$ تطبیق شوي دي. که حلقوي ګیر C ثابت وي، معلومه کړئ چې د 15 کیلو ګرامه داخلي ګیر زاویوي سرعت څومره دی کله چې لینک له دریدلی حالت څخه دوی دوري تکمیل کړي وي . د لینک کتله له پامه وغورځوئ او داخلي څرخ د ډیسک په توګه فرض کړئ. حرکت په عمودي سطحه کې ترسره کیږي.



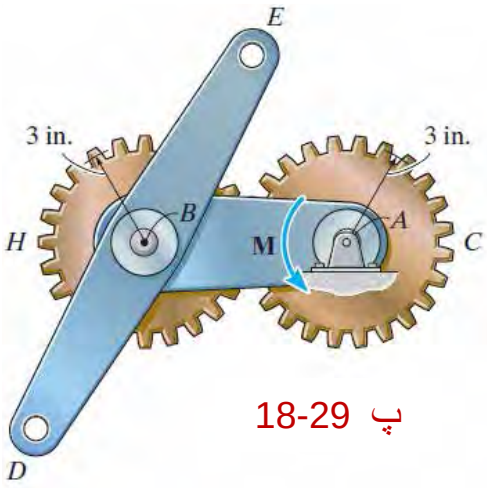
پ18-27

18–28* . دا لاندی 10 kg راډ AB په A نقطه کې د پین سره تړل شوی دي او یو کپل مؤمنت $M = 15\ \text{N}\cdot\text{m}$ وربانډی تطبیق کېږي. که راډ له دریدلی حالت نه خوشې شي چې فنر په $\theta = 30°$ زاویه کې کش شوی نه وي ، معلومه کړئ چې په $\theta = 60°$ کې د راډ زاویوي سرعت څومره دی. د راډ د حرکت په دوران کې فنر تل افقي پاتې کېږي، ځکه چې په C نقطه کې د رولر ملاتړ لري.



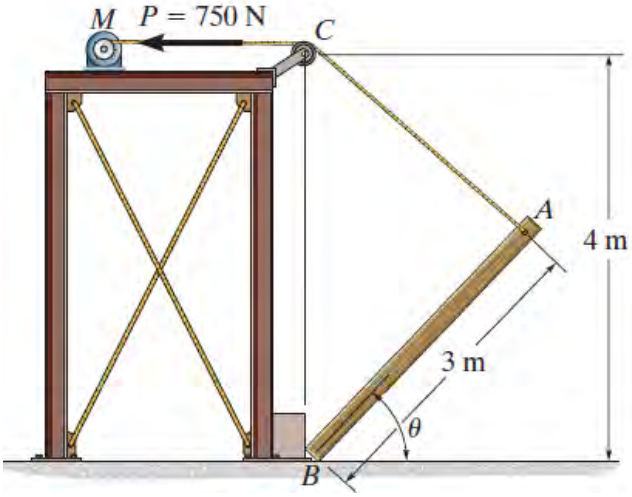
پ 18-28

18–29 . ګیرونه Cاو H هر یو 0.4 lb تول لري او د دوی د جایرېشن شعاعوی د کتلې مرکز ته $k_A = k_B = 2$ in دی. د یوشان تړوند AB تول 0.2 lb او د جایرېشن شعاع یې $k_A = 3$ in ده، په داسې حال کې چې د تړوند DE تول 0.15 lb او د جایرېشن شعاع یې $k_B = 4.5$ in ده. که په تړوند AB باندې $M = 3\ \text{lb}\cdot\text{ft}$ کپل مؤمنت تطبیق شي او په پیل کې سیستم په دریدلی حالت کې وي، معلوم کړئ کله چې تړوند AB په 360^o تاو شي، د تړوند DE زاویوي سرعت څومره دی. د ګیر C د حرکت مخنیوی شوی او حرکت په افقي سطحه کې ترسره کېږي. همدارنګه، د H ګیر اوDE تړوند په B نقطه کې په یوه شافټ باندې یوځای تاویږی.



پ 18-29

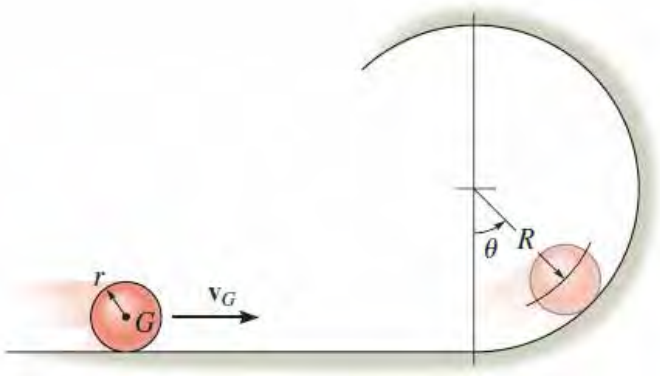
18–30 . موټور M یوه ثابته قوه 750 N په رسۍ باندې تطبیق کوي. که د 100 kg پایه په $q=0°$ کې په دریدلی حالت کې وي، معلومه کړئ چې په $q = 60°$ کې به د پایې زاویوي سرعت څومره دی. د څرخکې د اندازې او کتله له پامه وغورځوئ او پایه د نرۍ راډ په توګه فرض کړئ.



پ 18-30

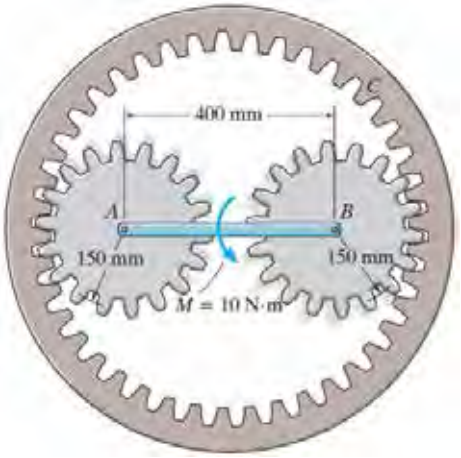
18–31 . یو توپ د m کتله او r شعاع سره په افقي سطحه غورځول کېږي داسې چې پرته له ښویدو رغړی. معلومه کړئ د هغې زاویوي سرعت کله چې $\theta = 90°$ شي او د هغې ابتدايي سرعت v_G وي څنګه چې ښودل شوي.

18–32* . یو توپ د m کتله او r شعاع سره په افقي سطحه غورځول کېږي داسې چې پرته له ښویدو رغړی. معلومه کړئ د هغې د کتلې مرکز G اصغری سرعت v_G به څومره به وي تر څو د $R + r$ شعاع حلقه کې تاوشي پرته لدې چې د ټرک نه جلا نشي.



پ 18-31/32

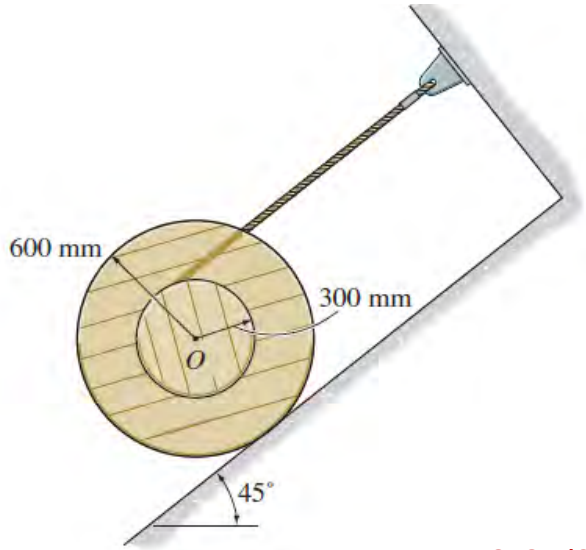
18–33. دا لاندی 2 kg ګیرونه A او B د 3 kg نری بار په دواړو سرونو کې ټړل شوي دی. ګیرونه د ثابت حلقوي ګیرC د ننه په افقي سطحه کې تاوپږی. که د بار په مرکز کې N·m 10 تورک تطبیق شي، معلومه کړئ چې بار باید څو واری تاو شی ترڅو له دریدلی حالت نه $w_{AB} = 20$ rad/s زاویوي سرعت ته ورسیږي. د محاسبی لپاره فرض کړی چی ګیرونه نری ډسکو ته ورته دی. که ګیرونه په عمودي سطحه کې وي، پایله څه ده؟



پ 18-33

18–34 . په لاندی انځور کی ښودل شوي ګوټک 100 kg کتله لري او د هغې د کتلې مرکز O ته د جایرېشن شعاع 400 mm لری. که له دریدلی حالت څخه خوشې شي، معلومه کړئ کله چې د ګوټک مرکز O په سطحه باندی 2 m ښکته ولاړ شی، د هغه زاویوي سرعت څومره دی؟ د ګوټک او د مایلی سطحې ترمنځ تماس ښوی دی.

18–35. په لاندی انځور کی ښودل شوي ګوټک 100 kg کتله لري او د هغې د کتلې مرکز O ته د جایرېشن شعاع 400 mm لری. که له دریدلی حالت څخه خوشې شي، معلومه کړئ چې کله چې د ګوټک مرکز O په سطحه باندی 2 مترہ ښکته ولاړشي، د هغه زاویوي سرعت څومره دی؟ د ګوټک او د مایلی سطحې ترمنځ د کینټیک اصطکاک ضریب $\mu_k = 0.15$ دی.



پ 18-34/35

18.5 د انرژي ساتل (CONSERVATION OF ENERGY)

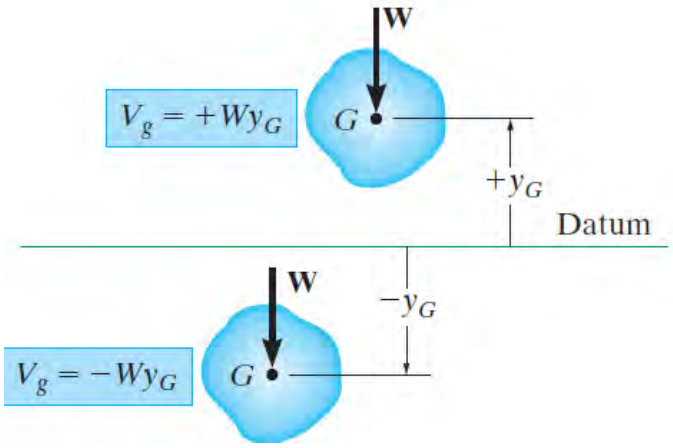
کله چې په يوه سخت جسم باندې د قوو سيستم چې يوازې محافظوی قواوی وی عمل کوی، د انرژۍ د ساتلو قضيه کارول کېدای شي ترڅو هغه پوښتنه حل کړي، که نه په نورمال ډول د کار او انرژۍ د اصولو په کارولو حل کېږي. دا اصول اکثراً اسانه دي ځکه چې د محافظتي قوی کار د مسير څخه آزاد وي او يوازې د جسم په ابتدايي او پايلني حالتونو پورې اړه لري. لکه چې په 14.5 برخه کی ښودل شوی وو چی د محافظوی قوی کار مساوی کیږی د جسم د بوتنشل انرجی په تفاوت سره چې د انتخابی مبدا نه انتخاب شوی وی.

د جازبی پوتينشل انرژي (Gravitational Potential Energy).

څرنګه چې د جسم ټول تول د هغې د ثقل په مرکز کې متمرکز ګڼل کېږي، د جسم د جازبی پوتينشل انرژي د هغې د ثقل مرکزموقعيت د انتخاب شوی افقي محور څخه د لوړوالي يا ټيټوالي د اندازی په پوهېدو سره ټاکل کېږي.

$$V_g = Wy_G \qquad (18–15)$$

د دې فورمول له مخې، که G د معیاری کرښی څخه پورته وي، پوتينشل انرژي مثبت ګڼل کېږي ځکه چې وزن مثبت کار ترسره کوي کله چې جسم ښېرته معیاری کرښی ته راګرځي. که G د معیاری کرښی څخه لاندې وي ($-y_G$) د جازبی پوتينشل انرژي منفي ګڼل کېږي، ځکه چې تول منفي کار ترسره کوي کله چې جسم ښېرته معیاری کرښی ته راګرځي.



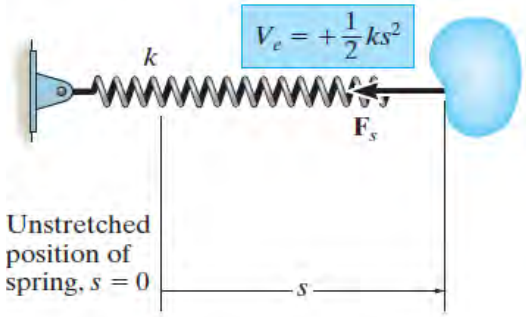
د جاذبې پوتينشل انرژي

انځور 16-18

الستيکي پوتينشل انرژي (Elastic Potential Energy).

هغه قوه چې د الستيکي فنر له خوا توليديږي، هم محافظوی قوه ده. هغه پوتينشل انرژي چې يو فنر د خپلې ابتدايي ($s = 0$) حالت څخه تر غوڑيدو يا غونجيدو پورې (s) يوه جسم ته ورکوي، د لاندې فورمول له مخې محاسبه کيږي انځور 18-17 :

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \qquad (18–16)$$



ايلستيک پوتينشل انرژي

په بدل شوې شکل (deformed) کې، د فنر قوه چې په جسم باندې عمل کوي، تل د دې وړتيا لري چې مثبت کار وکړي کله چې فنر خپل اصلي حالت (undeformed) ته راستنيږي (برخه 14.5 وګورئ).

د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy) . په عموم حالت کې، که چېرې يو جسم د جاذبوي او الاستيکي قواوو لخوا اغيزمن شي، ټول پوتينشل انرژي کولی شي د پوتينشل تابع په توګه څرګند شي چې الجبري مجموعه ښيي.

$$V = V_g + V_e \qquad (18–17)$$

په دې پوهيدلو سره چې د محافظوی قواوو کار کولی شي د دوی د پوتينشل انرژيو ترمنځ توپير په توګه وليکل شي، يعنې، $(\Sigma U_{1\text{-}2})_{cons} = V_1 - V_2$، معادله 14-16، مورِ کولی شو د يوه سخت جسم لپاره د کار او انرژۍ اصل داسې وليکو:

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{noncons} = T_2 + V_2 \qquad (18–18)$$

دلته $(\Sigma U_{1\text{-}2})_{noncons}$ د غير محافظوی قواوو لکه اصطکاک د کار استازيتوب کوي. که چېرې دا اصتلاح صفر وي، نو

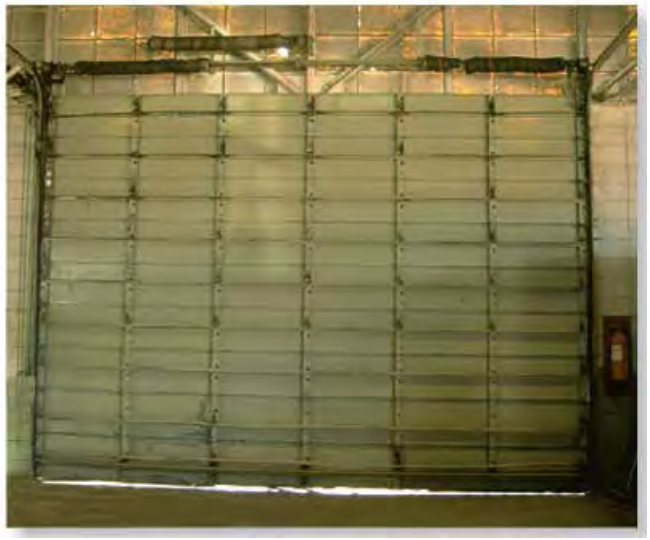
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (18–19)$$

دا معادله د انرژۍ د ساتنې قانون (Conservation of energy) په توګه یادیږي. دا څرګندوي چې د جسم د پوتینشیل او کینیتیک انرژۍ مجموعه ثابته پاتیکیږی کله چې جسم له یوه موقعیت څخه بل ته حرکت وکړي. دغه قانون د ښوی، پن نښلول شوی سخت جسمونه، هغه جسمونه چی د نه غزیدونکی کورډ په واسطه نښلول شوي وي، او هغه جسمونه چی په یو په بل کې نښلول شوي وی هم تطبیق وړ دی.

په دې ټولو حالتونو کې، هغه قواوې چې د تماس په ټکیو کې عمل کوي، له تحلیل څخه حذف کیږي، ځکه چې دغه قواوې د مساوي خو متضاد همخطې جوړو په بڼه رامنځته کیږي او د قوو هره جوړه له یو شان فاصلی تیریږی کله چی سیستم تغیر د موقعیت کوی.

دا مهمه ده چې په یاد ولرو چې یوازې هغه پوښتنی چې محافظوی قوی پکې شاملی وي د (18-19) معادلې په کارولو سره حل کیدی شي. لکه څنګه چې په (14.5) برخه کې ذکر شوی، وچ اصتکاک یا د مایع مقاومت قواوی، چې په سرعت یا تعجیل پورې تړاو لري، محافظوی نه دی. د دغو قواوو کار د حرارتي انرژۍ په بڼه بدلیږي، چې د تماس سطحو د تودولو لپاره کارول کیږي، او په پایله کې دا د انرژي چاپیریال ته وزی او بیا ترلاسه کیدی نه شي.

له همدې امله، هغه پوښتنی چې د اصتکاک قواوی پکې شامل وي، د کار او انرژۍ د اصول له مخی د (18-18) معادلې په ډول کارولو سره، که هغه تطبیق کیدی شی، یا د حرکت د معادلو په واسطه ، حل کیدی شي.



هغه تورشن فنر چې د ګراج د دروازې په سر کې ځای پر ځای شوي دي، د دروازې د ښکته کیدو پر مهال پورته خوا تاویږي. کله چې دروازه پورته کیږي، په فنر کې ذخیره شوې پوټنشل انرجی د دروازې د تول د جاذبې پوټنشل انرژۍ ته بدلیږي، چې په دې توګه دروازه په اسانۍ سره خلاصیږي.

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د تحلیل کړنلاره

د انرژۍ د ساتنې معادله د هغو پوښتنو د حل لپاره کارول کیږي چې په سرعت، بېځایه کید نه، او ساتونکیو قواوو سیستمونو پورې اړه ولري. د تطبیق لپاره، سپارښتنه کیږي چې لاندې کړنلاره تعقیب شي:

پوتنشل انرژي (Potential Energy)

- د جسم یا سیستم د دوه ډیاګرامه رسم کړی چې د جسم یا سیستم لمړنی او وروستي موقعیتونو په مسیر کې وښودل شي.
- که د جاذبې مرکز (G) د عمودي بېځایه کیدو تابع وي، نو یو ثابت افقي ریفرنس (datum) وټاکئ چې د هغه څخه د جسم د جاذبې پوتنشل انرژي V_g اندازه کړئ.
- د جاذبې د مرکز لوړوالی y_G له ریفرنس څخه او د هر ټرلي فنر غځیدنو یا غونجیدنو معلومات کیدی شی د پوښتنې د هندسې نه چې په دواړو ډیاګرامو کې وښودل شوی په لاس راځی.
- پوتنشل انرژي د $V = V_g + V_e$ نه په لاس راتلی شی. دلته $V_g = Wy_G$ چې کیدی شی مثبت یا منفي وی، او $V_e = \frac{1}{2} ks^2$ به تل مثبت وي، چې دلته k د فنر د سختی نمبراو s د فنرغځیدنه یا غونجیدنه ده.

کنتیک انرژي (Kinetic Energy)

- **د** جسم کنتیک انرژي دوی برخې لري، انتقالي کنتیک انرژي چې د کتلې د مرکز څخه ریفرینس کیږی، $T = \frac{1}{2} mv^2_G$ ، او د تاویدونکی کنټیک انرژي چې د کتلې له مرکزه اندازه کیږی، $T = \frac{1}{2} I_G w^2$.
- کینمټیک ډیاګرامونه د سرعت لپاره کیدی شی د v_G او w د اړیکو جوړولو لپاره ګټور وی.

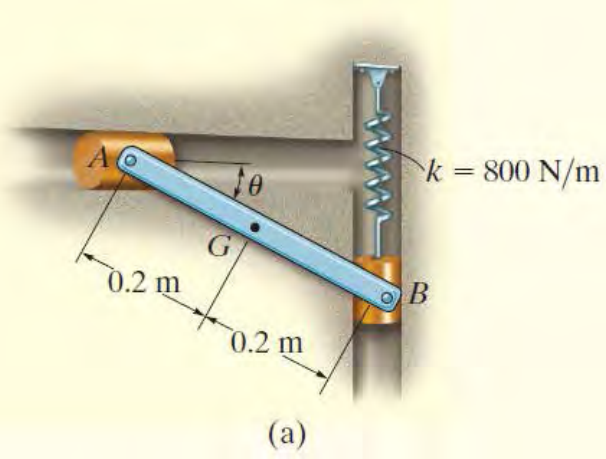
د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy)

د انرژۍ د ساتنې معادله وکاروئ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

مثالونه

مثال 18.6

د 10 kg میله AB چې په انځور 18-18a کې ښودل شوې ده، په داسې ډول محدوده شوې چې د هغې پایلې په افقي او عمودي جریو کې حرکت کړي. د فنرسختوالی $k = 800\ \text{N/m}$ دی او فنرغځیدلی نه وي (unstretched) کله چې زاویه $\theta = 0^o$ وي. اړینه ده چې د AB زاویوي سرعت ω په هغه وخت کې ومومو چې زاویه $\theta = 0^o$ وي، کله چې میله د $\theta = 30^o$ څخه په دریدلی حالت کې خوشې شي. د ښویدونکیو بلاکونو کتله په پام کې مه نیسئ.



انځور 18-18

حل:

په دې مسله کې، سیستم له میلې AB او فنر څخه جوړ دی.

پوټنشل انرژي (Potential Energy) .

په انځور 18-18b کې د میلې دوه ډیاګرامونه رسم شوي، چې د هغې لومړنی او وروستی موقعیت ښیي.

د جاذبې پوټنشل انرژي د اندازه کولو لپاره ریفرنس (datum) د میلې د هغه موقعیت په کربنه کې ټاکل شوی، چې کله زاویه $\theta = 0^o$ وي.

لومړنی موقعیت:(Position 1)

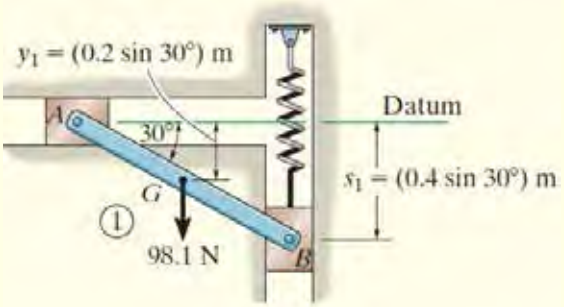
کله چې میله په موقعیت 1 کې وي، د هغې د جاذبې مرکز G د ریفرنس له کربنې لاندې پروت دي، نو د هغې جاذبې پوټنشل انرژي منفي ده. په فنر کې مثبته الاستیکی پوټنشل انرژي ذخیره شوې، ځکه چې فنر په $s_1 = (0.4\sin 30^o)\ \text{m}$ اندازه غځیدلی دی . نو بیا

$$V_1 = -Wy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2$$

$$= -(98.1\ \text{N})(0.2\sin 30^\circ\ \text{m}) + \tfrac{1}{2}(800\ \text{N/m})(0.4\sin 30^\circ\ \text{m})^2 = 6.19\ \text{J}$$

د میلې 2 موقعیت :(Position 2) د جاذبې پوټنشل انرژي V_2 صفر ده، ځکه چې د جاذبې مرکز G د ریفرنس په کربنه ځای لري.

.



فنر غځيدلی نه دي (unstretched) ، نو $s_2 = 0$ له دي امله:

$$V_2 = 0$$

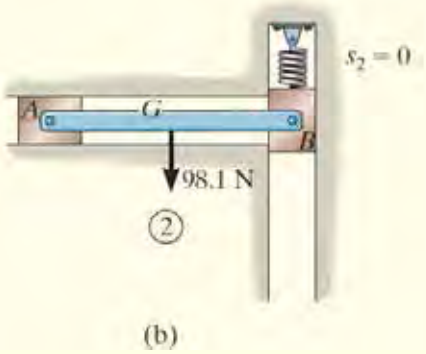
متحرکه انرژي (Kinetic Energy) .

په موقعيت 1 کي:

میله د دریدلی حالت څخه خوشي شوی، نو د جاذبي مرکز سرعت $(v_G)_1 = w = 0$ دی.

له همدي امله، د موقعيت 1 متحرکه انرژي:

$$T_1 = 0$$



(b)

په موقعيت 2 کي:

د ميلي زاويوي سرعت ω_2 دی.

د ميلي د جاذبي مرکز سرعت $(v_G)_2$دی.

د موقعيت 2 لپاره د متحرکی انرژی معادله:

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0.4\text{ m})^2\right]\omega_2^2$$

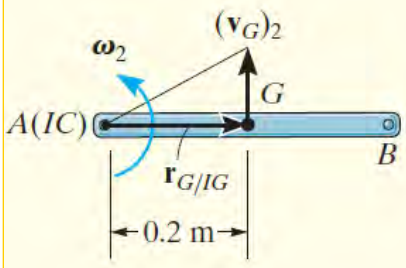
د ميلي د جاذبي مرکز د سرعت محاسبه:

په کارولو د کينماتيک $(v_G)_2$ د w_2 سره تړاو ښودل کيدی شي آنځور 18-18c . په دی حالت کی، د صفر سرعت انی مرکز (IC) د ميلي په پای A کي دی، نود ميلي د جاذبي مرکز د سرعت اړيکه عبارت ده په $(v_G)_2 = (r_{G/IC})\,\omega_2 = (0.2\text{ m})\omega_2$=

په پورته افاده ځای په ځای کول او بيا يی ساده کول(يا په کارولود $\left(\frac{1}{2}I_{IC}w^2_2\right)$ مور لرو:

$$T_2 = 0.2667\omega_2^2$$

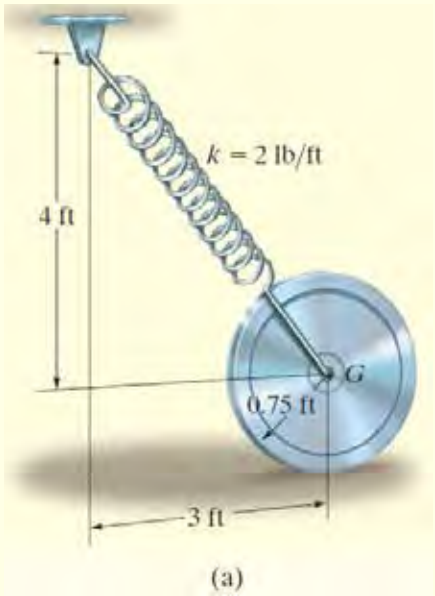
د انرژۍ د ساتنې معادله (Conservation of Energy):



(c)

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{6.19\,\text{J}\} = \{0.2667\omega_2^2\} + \{0\}$$
$$\omega_2 = 4.82\ \text{rad/s}\curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 18.7



(a)

انځور 18- 19

په انځور 18-19a کې ښودل شوی څرخ، 30 پونډه تول لري او د جایریشن شعاع یې $k_G = 0.6$ft ده. دا د یوه فنر سره تړل شوی چې د سختۍ ضریب یې k =2 ft.lb دی او د هغه نه غځیدلي اوږدوالی 1 ft دی. که څرخ د ښودل شوي حالت څخه خوشې شي او پرته له ښویېدو ورغړی، د څرخ د زاویوي سرعت اندازه کړئ کله چې د G ټکی 3ft چپ لور ته حرکت وکړي.

حل

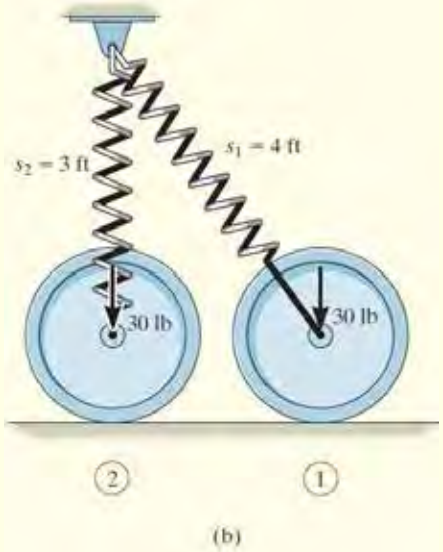
په دې سیستم کې څرخ اوفنر شامل دي .

پوټنشل (ممکنه) انرژي (Potential Energy)

په انځور 18-19bکې د څرخ دوه حالتونه ښودل شوي، لومړی، په پیل کې او دویم، په وروستي حالت کې. دلته د جاذبې معیاری کربنې ته اړتیا نشته ځکه چې تول عمودي بیځایه شوی نه دی. د پوښتنې د هندسي معلوماتو له مخې، په پیل کې فنرپه اندازه د $s_1 = (\sqrt{3^2 + 4^2} - 1) = 4$ ft اوږد شوی، او په وروستي حالت کې د فنر اوږدوالی $s_2 = (4-1) = 3$ft دی. له دې امله، د فنر مثبته ممکنه انرژي داسې ده:

$$V_1 = \tfrac{1}{2}ks_1^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \text{lb/ft})(4\ \text{ft})^2 = 16\ \text{ft}\cdot\text{lb}$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2}ks_2^2 = \tfrac{1}{2}(2\ \text{lb/ft})(3\ \text{ft})^2 = 9\ \text{ft}\cdot\text{lb}$$

حرکتی انرژي (Kinetic Energy) .



انځور 18-19

ځرخ د دریدلی حالت څخه خوشې شوی، نو د G ټکی لومړنی سرعت $(\mathbf{v}_G)_1 = 0$ دی، له همدې امله $\mathbf{w}_1 = 0$ نو:

$$T_1 = 0$$

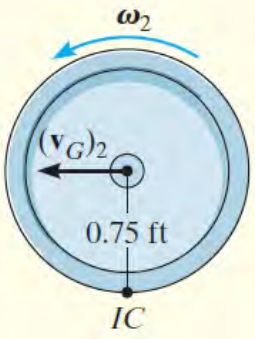
ځرنګه چې د صفر سرعت آني مرکز په ځمکه دی، د انځور 18–19c، مورِ لرو:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{IC} \omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.6\text{ ft})^2 + \left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.75\text{ ft})^2\right]\omega_2^2$$

$$= 0.4297\omega_2^2$$

د انرژۍ د ساتنې معادله:(Conservation of Energy)



انځور 18-19

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$

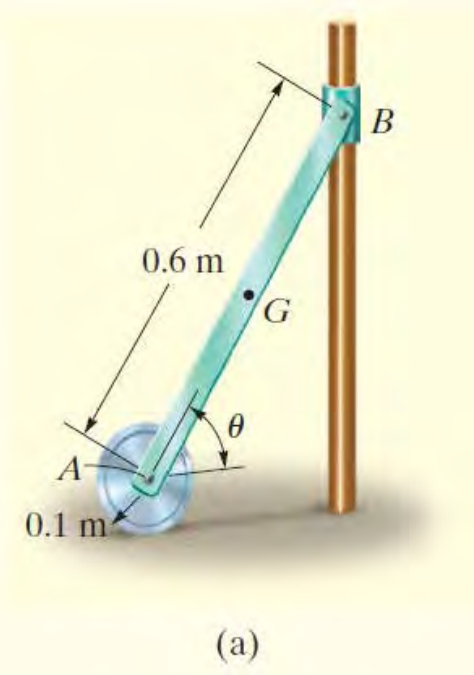
$$\{0\} + \{16\text{ ft}\cdot\text{lb}\} = \{0.4297\omega_2^2\} + \{9\text{ ft}\cdot\text{lb}\}$$

$$\omega_2 = 4.04\text{ rad/s}\ \curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه :که د کار او انرژۍ اصول د دې پوښتنې د حل لپاره وکارول شول، نو د فنر کار باید دفنر د قوې د اندازې او سمت د بدلون په پام کې نیولو سره وټاکل شي.

مثال 18.8

یو 10-kg ډیسک په انځور 18-20aکې ښودل شوی، د AB یو شان 5 kg راډ سره تړل شوی دی. که چیرې دا اسمبلۍ په $\theta = 60°$ کې له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د راډ د زاویوي سرعت اندازه وکړئ کله چې $\theta = 0°$ وي. فرض کړئ چې ډیسک پرته له ښویېدو رغړی. په B نقطه کې د غاړکی تول او دلاربښود اصتکاک له پامه وغورځوئ.



(a)

حل

سیستم د ډیسک او راډ څخه جوړ دی.

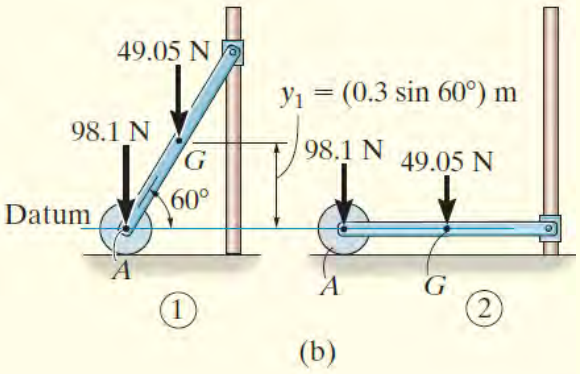
ممکنه انرژي (Potential Energy) . د راډ او ډیسک دوه ډیاګرامونه، کله چې دوی په خپل لومړي او وروستي حالت کې وي، په انځور 18-20bکې ښودل شوي دي. د اسانتیا لپاره، معیاری کربنه د A ټکی څخه تېره شوې ده.

کله چې سیستم په لومړي حالت کې وي، یوازې د راډ تول مثبته ممکنه انرژي لري. له همدې امله:

$$V_1 = W_r y_1 = (49.05\ \text{N})(0.3\sin 60^\circ\ \text{m}) = 12.74\ \text{J}$$

کله چې سیستم په دویم حالت کې وي، راډ او ډیسک، دواړو تولونه صفرممکنه انرژي لري. ولې؟ ځکه:

$$V_2 = 0$$



(b)

حرکتی انرژي (Kinetic Energy) .

په پیل کې، ټول سیستم په دریدلی حالت کې دی، نو:

$$T_1 = 0$$

په وروستي حالت کې، میله زاویوي سرعت $(\omega_r)_2$ لري، او د هغې د کتلې مرکزسرعت $(v_G)_2$ دی، انځور 18-20c . څرنګه چې میله په بشپړه توګه غځېدلی، ډیسک په دې لنډ مهاله وخت کې په دریدلی حالت کې دی، نو $(v_A)_2 = 0$ $(\omega_d)_2 = 0$:

انځور 18-20

د میلې لپاره، د هغې د کتلې مرکز سرعت $(v_G)_2$ ، د صفر سرعت انی مرکز کې چې د A په ټکی کې دی، د $(\omega_r)_2$ سره اړیکه جوړوی، انځور 18–20c. نو:

$$(v_G)_2 = r_{G/IC}(\omega_r)_2 \text{ or } (v_G)_2 = 0.3(\omega_r)_2$$

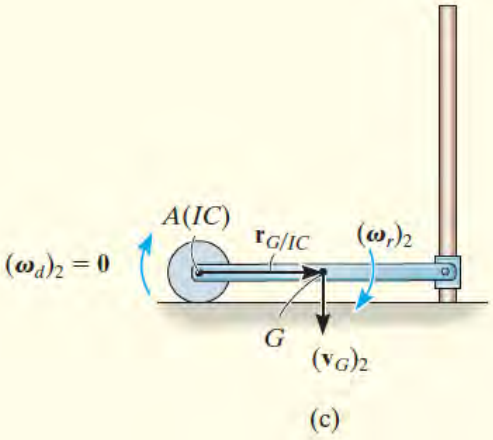
له همدې امله:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_r(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_r)_2^2 + \frac{1}{2}m_d(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}I_A(\omega_d)_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(5\text{ kg})[(0.3\text{ m})(\omega_r)_2]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5\text{ kg})(0.6\text{ m})^2\right](\omega_r)_2^2 + 0 + 0$$

$$= 0.3(\omega_r)_2^2$$

د انرژۍ د ساتنې معادله:(Conservation of Energy)



(c)

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{12.74\text{ J}\} = \{0.3(\omega_r)_2^2\} + \{0\}$$
$$(\omega_r)_2 = 6.52\text{ rad/s}\ \text{↓} \qquad \textit{Ans.}$$

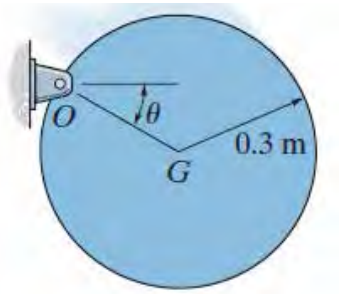
انځور 18-20

یادونه :مور کولای شو د میلې وروستۍ کینټیک انرژي هم د لاندې فورمول په کارولو سره محاسبه کړو:

$$T_2 = \tfrac{1}{2}I_{IC}\omega_2^2.$$

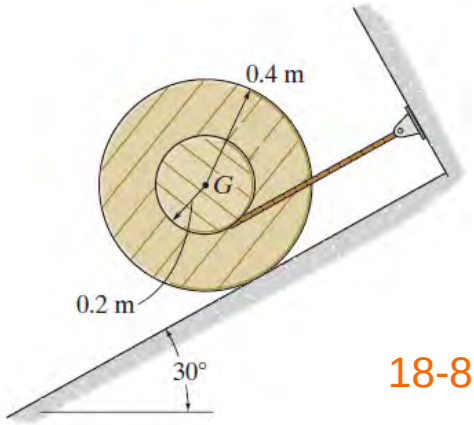
بنسټیز پوښتنې FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 18.7. که 30 کیلوګرام ډیسک له دریدلی حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 0°$ وي، د دې زاویه یوې سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 90°$ وي.



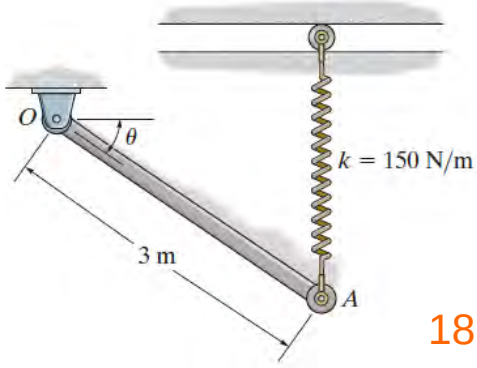
ب 18-07

ب 18.8. د 50 کیلوګرام ریل د خپل مرکز G ته د جایریشن شعاع $k_G = 300mm$ لري. که دی له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې د ده مرکز G د ښویی مایلی سطحی په اوږدو کی 6 m ښکته تګ کړی وي.



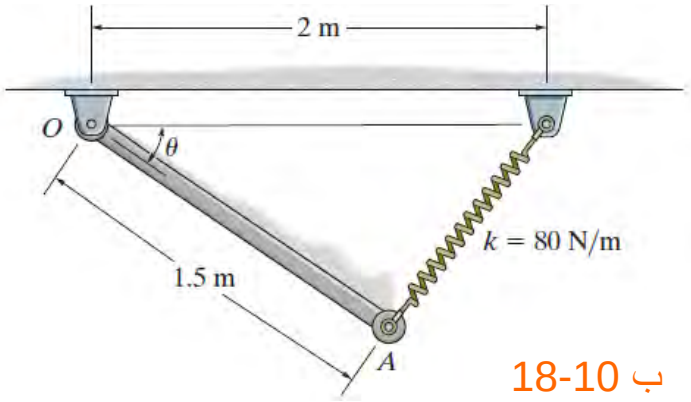
ب 18-8

ب 18.9. د 60 kg میله OA له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $q = 0°$ وي. د دې زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 45°$ وي. فنر د حرکت پر مهال عمودي پاتې کیږي او کله چې $q = 0°$ وي، فنرغځیدلی نه وی.



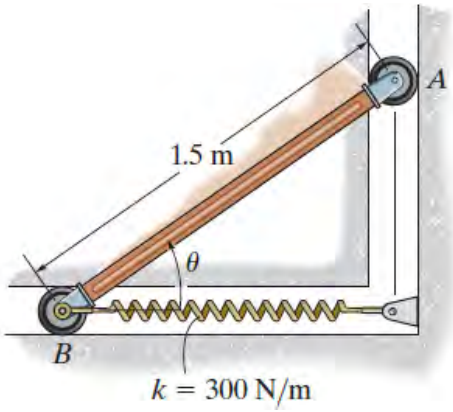
ب 18-9

ب 18.10. د 30 kg میله له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $q = 0°$ وي. د دې زاویوی یې سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 90°$ وي.



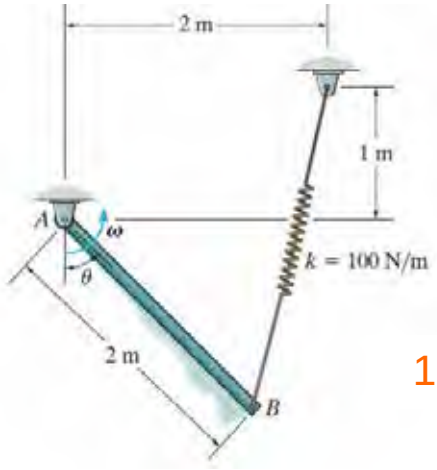
ب 18-10

ب 18.11 . د 30 kg میله له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $q = 45°$ وي. د دې زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 0°$ وي. فنر کله چې $q = 45°$ وي، غځیدلی نه وی.



ب 18-11

ب 18.12 . د 20 kg میله له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې $q = 0°$ وي. د دې زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 90°$ وي. فنر 0.5 m بېله غځیدو اوږدوالی لري.



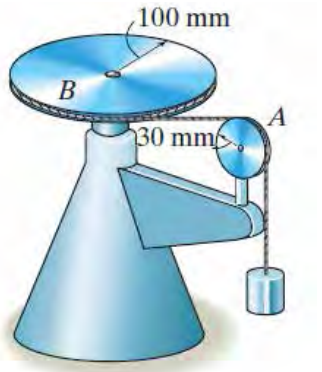
ب 18-12

پوښتنې

PROBLEMS

*18–36 .په دې اسمبلی کې 3 kg څرخکی *A* او 10 kg څرخکی *B* شامل دي. که 2 kg بلاک له رسۍڅخه ځړول شوی وي، د بلاک سرعت محاسبه کړئ کله چې دا له دریدلي حالت څخه 0.5 متر ښکته شي. د رسۍ کتله مه حسابوي او څرخکیان د نرۍ ډیسکونو په توګه وبولی. هېڅ ښویدل نه کیږي.

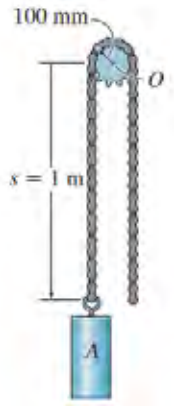
18–37 . په دې اسمبلی کې 3 kg څرخکی *A* او 10 kg څرخکی *B* شامل دي. که 2 kg بلاک له رسۍڅخه ځړول شوی وي، د بلاک د ښکته کېدو فاصله محاسبه کړئ، که چېرې له دریدلي حالت څخه پیل شي ترڅو *B* د زاویوي سرعت 6 rad/s ولري. د رسۍ کتله مه حسابوي او څرخکیان د نرۍ ډیسکونو په توګه وبولی. هېڅ ښویدل نه کیږي.



پ 18-36/37

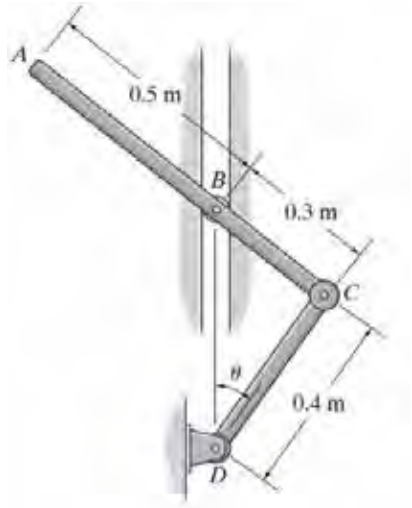
18–38.یو زنځیر چې بې اغیزه کتله لري، د سپروکیټ پر سراچول شوی دی چې 2 kg کتله او د جایریشن شعاع $k_O = 50$ mm لري. که 4 kg بلاک *A* له دریدلي حالت څخه په s = 1m موقعیت کې خوشې شي، د سپروکیټ زاویه یوي سرعت محاسبه کړئ په هغه لحظه کې چې s = 2m وي.

18–39 . پوښتنه 18-38 حل کړئ که چیرې زنځیر د 0.8 kg/m کتله ولري. د محاسبې لپاره، د زنځیر هغه برخه چې د سپروکیټ پر سر تاو شوې مه حسابوي.



پ 18-38/39

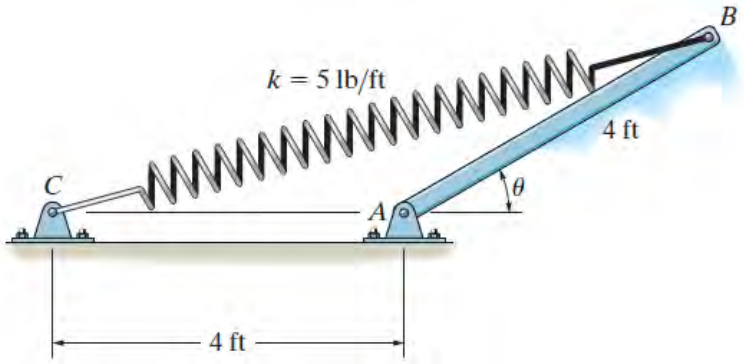
*18–40 . د 6 کیلوګرامه ABC راډ د 3 کیلوګرامه CD راډ سره وصل دی. که سیسټم له دریدلی حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 0°$ وي، د راډ ABC زاویوي سرعت محاسبه کړئ په هغه لحظه کې چې په افقی حالت کی شی.



پ 18-40

18–41. د 25 پونډه نری راډ AB د فنر BC سره تړل شوی دی چې نا غوړیدلی اوږدوالی 4ft لري. که راډ له دریدلي حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 30°$ وي، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ په هغه لحظه کې چې $q = 90°$ وي.

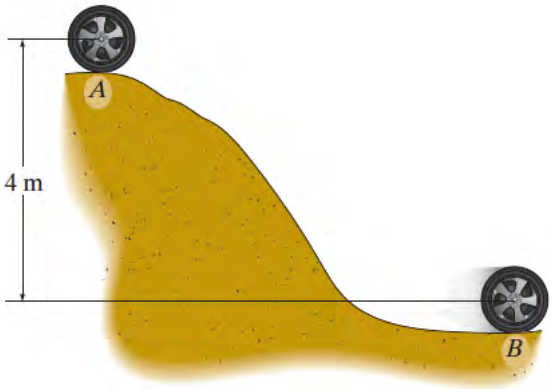
18–42. د 25 پونډه نری راډ AB د فنر BC سره تړل شوی دی چې نا غوړیدلی اوږدوالی 4ft لري. که راډ له دریدلي حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 30°$ وي، د ږدې زاویوي سرعت محاسبه کړئ په هغه لحظه کې چې فنر نه وی غزیدلی.



پ 18-41/42

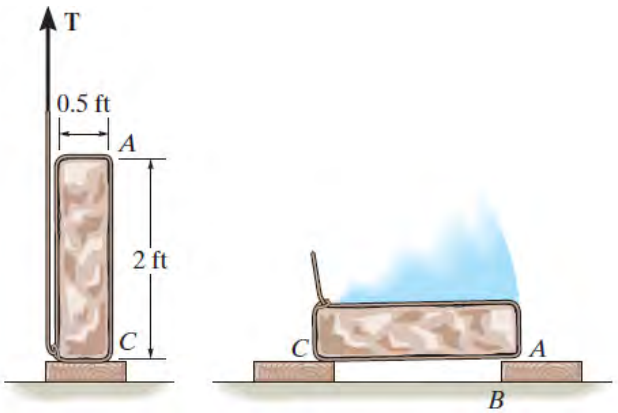
18–43 . تیر 8 کیلوګرامه کتله لري، چې شعاع k_Gیی 0.3 m ده، او د جایریشن شعاع یی د جازبی مرکز G ته = 0.25 ده.

که دا د پوښتنې د سر څخه له دریدلې حالت څخه خوشې شي، د هغې د مرکز سرعت محاسبه کړئ کله چې دا د پوښتنې بیخ ته رابښکته شي که چیرې دی بې بنویدو رورغړی.



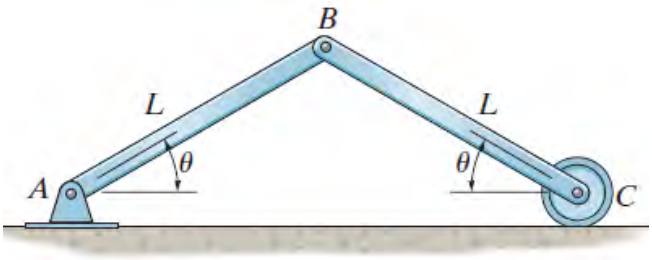
پ 18-43

*18–44 . یو یوشان 150 lb ډبره (مستطیلي بلاک) د عمودي تار په واسطه ورو ورو پورته کیږي ترڅو ډبره ولاړه شی. که وروسته دا په ($T = 0$) له بنسټیز متوازن دریدلي موقعیت څخه په ازاده توګه ولوېږي، د دې سرعت محاسبه کړئ کله چې کونج A په B کی په بنودل شوی سطحه باندې ولګیږي. ډبره په خپل کونج C کی نه بنویږی لکه چې دا را لویږی.



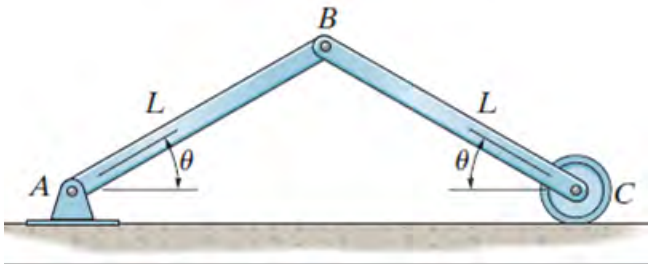
پ 18-44

18–45 .دوه میلې له دریدلي حالت څخه خوشې کیږي په q موقعیت کې. د دوې زاویوي سرعتونه محاسبه کړئ کله چې افقي حالت ته را شي. د رولر C کتله په پام کی مه نیسئ. هر میله m کتله او L اوږدوالی لري.



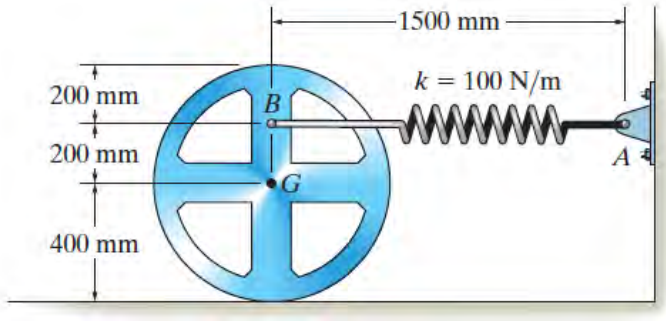
پ 18-45

18-46. دوه میلې له دریدلي حالت څخه خوشې کیږي له $q = 90°$ موقعیت نه. د دوې زاویوی سرعتونه محاسبه کړئ کله چې دوی افقی حالت ته راشی. د رولر C کتله په پام کی مه نیسئ. هره میله m کتله او L اوږدوالی لري.



پ 18-46

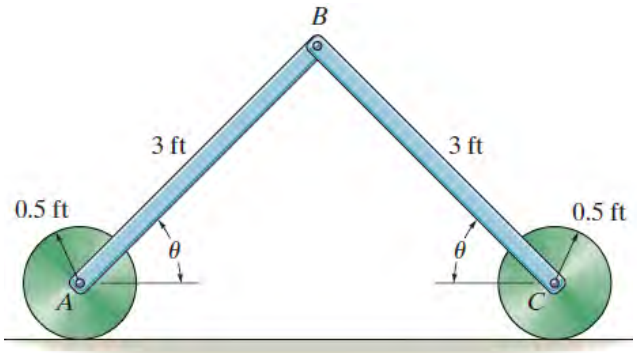
18–47 . د دی لاندی 40 kg څرخ د جایریشن شعاع یی خپل جاذبې مرکز G ته $k_G =$ 250mm ده. که دا بې له ښویدو ورغړول شی، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې دی په 90º زاویه له ښودل شوې موقعیت څخه د ساعت په لور وګرځي. فنر AB سختي د 100 N/m ده او نا غزیدلی اوږدوالی 500 mm لري. څرخ له دریدلې حالت څخه خوشې شوی دی.



پ 18-47

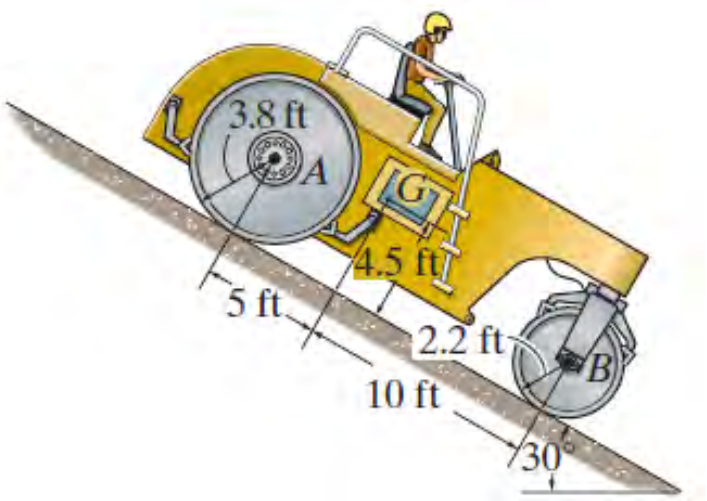
*18–48. دا لاندې اسمبلی دوه 8 lb میلې لري چې د دوو 10 lb ډیسکونو سره په پین تړل شوي دي. که میلې له دریدلي حالت څخه کله چې $q = 60°$ وي خوشې شي، د دوې زاویوي سرعتونه معلوم کړئ کله چې $q = 0°$ وي. فرض کړئ چې ډیسکونه بې له ښویدو رغړی.

18–49.دا لاندې اسمبلی دوه 8 lb میلې لري چې د دوو 10 lb ډیسکونو سره په پین تړل شوي دي. ه میلې له دریدلي حالت څخه کله چې $q = 60°$ وي خوشې شي، د دوې زاویوي سرعتونه معلوم کړئ کله چې $q = 30°$ وي. فرض کړئ چې ډیسکونه بې له ښویدو رغړی.



پ 18-48/49

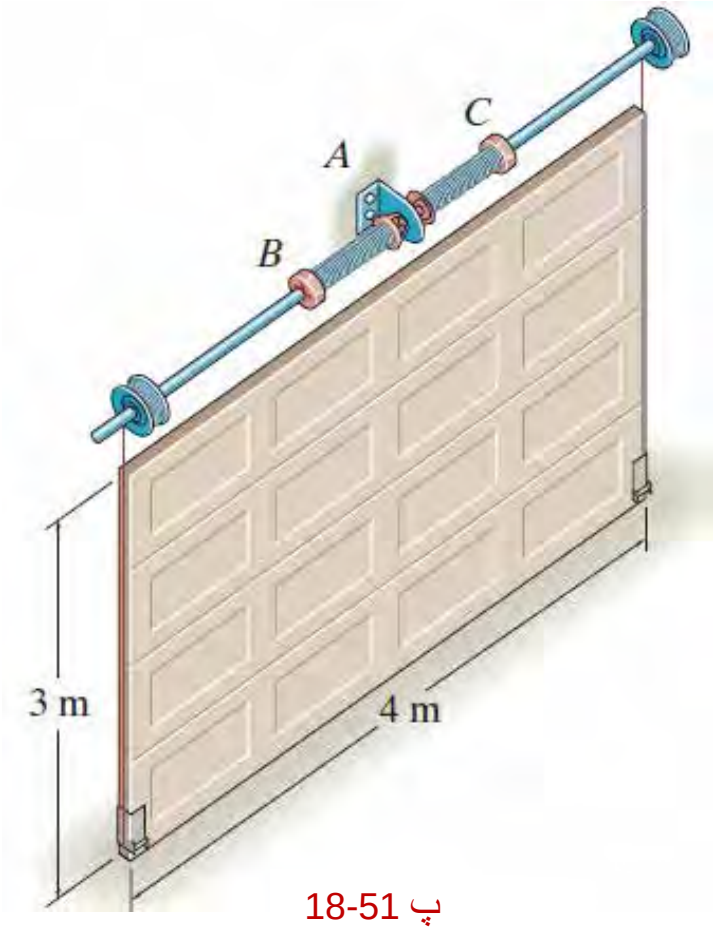
18–50 . د سړک تخته کونکی په مایله لاره په $v_G = 5ft/s$ روان دی کله چې موټور ودرولشی. د رولر B زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې تخته کونکی 20 ft په سطحه ښکته تګ کړی وي. د تخته کونکی جسم، پرته له رولرونو څخه، 8000 lb تول لري او د جاذبې مرکز یې په Gکې دی. د دواړو شا رولرونه هر یو 400 پونډه تول لري او د جایریشن شعاع یې k_A = 3.3ftده. د مخی رولر 800 lb تول لري او د جایریشن شعاع یې $k_B = 1.8ft$ ده. رولرونه چې رغړی نه ښوییږی.



پ 18-50

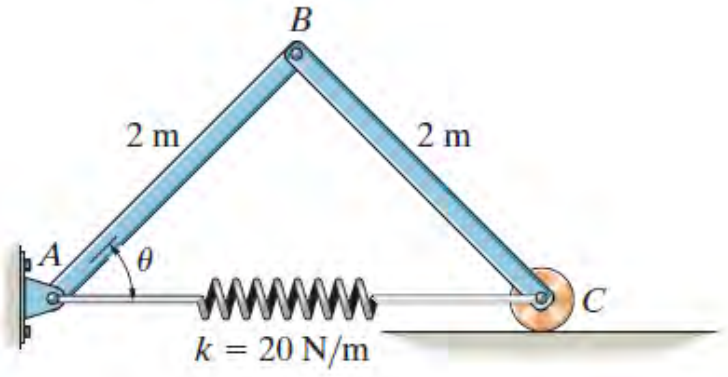
18–51 . دا لاندی د ګراج یوشان دروازه 150 کیلوګرامه کتله لري اوپه پایلو کی د ښویو ټرکو له لارو لارښود کیږي. پورته کول د دروازی د دوو فنرونو په واسطه کیږي، چې په نقطه Aکې د انکر(anchor) براکټ سره او په B او C ټکیو کی د ضد توازن شافت سره ټرل شوي دي. کله چې دروازه پورته کیږي، فنرونه له شافته څخه ځان خلاصوي، کوم چې د پورته کولو سره مرسته کوي. که هر فنر $M = (0.7q)$ N.m ټورژن مؤمنت ورکړي، چې q په ردینوکې ده، زاویه q_0 محاسبه کړئ چې په هغې کې دواړه کینې او ښی اړخو فنرونه په A کې وصل شي ترڅو دروازه په بشپړه توګه د فنرونو لخوا متوازنه شي، یعنې کله چې دروازه په عمودي موقعیت کې وي او لږ قوه پورته ورکړل شی، فنرونه به دروازه د اړخ پټیو په اوږدو کې افقي حالت ته پورته کړي پرته له دې چې وروستی زاویوی سرعت ولري.

یادونه: د ټورژنل فنر الستیکی پوتانسیال انرژي $V_e = 1/2\ k\ q^2$ ده، چیرې چې $M = k\ q$ او په دې حالت کې $k = 0.7$ N.m/rad دی.



پ 18-51

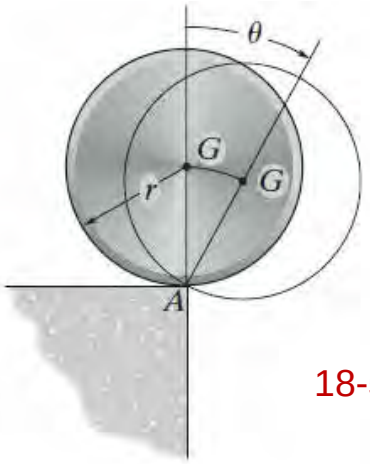
*18–52 . دوه 12 kg نري راډونه په پين سره ټرل شوي دي او په $q = 60°$ موقعيت کې له دريدلی حالت څخه خوشې کيږي. که فنر 1.5 m نه غوڑيدلی اوږدوالی ولري، د راډ BC زاويوي سرعت محاسبه کړئ کله چې سيستم په $q = 0°$ موقعيت کې وي. د رولر C کتله په پام کی مه نيسئ.



پ 18-52

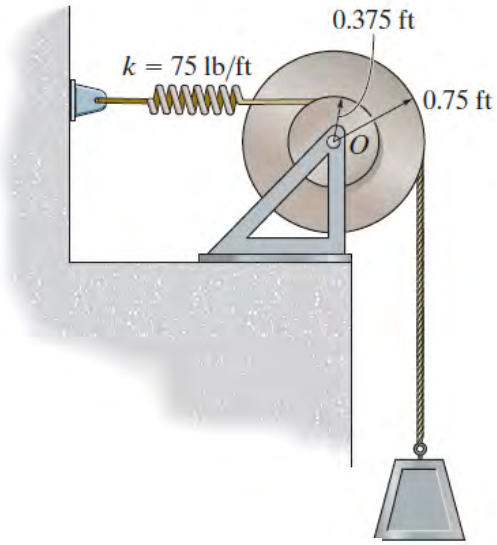
18–53 .د کاغذ غټ رول 20 kg کتله لري او شعاع يې $r = 150mm$ دی، د يوه کونج پر څنډه پروت دي، داسې چې د کاغذ پای چې په څنډه کې دی، د افقي سطحې سره ټرلی دی. که کاغذ

له خپل متوازن موقعیت څخه لږ مزاحمت ورکړلشی، زاویه q محاسبه کړئ کله چې هغه د کونج A څخه بښکته لویدل پیلوي. د کاغذ د رول د جایریشن شعاع $k_G = 75\text{mm}$ ده.



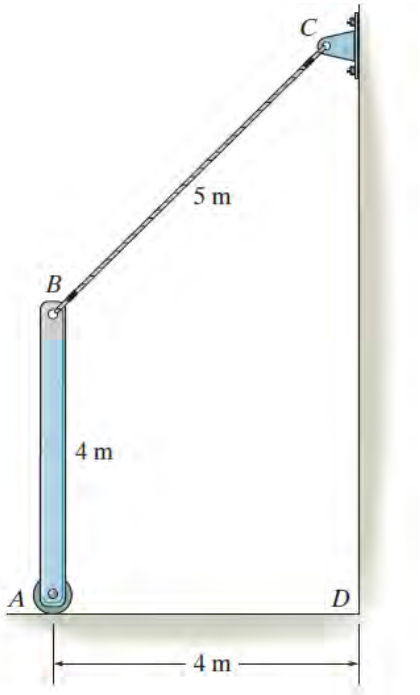
پ 18-53

18–54 . که 250 پونډه بلاک له دریدلې حالت څخه خوشې شي کله چې فنر په نه غزیدلی حالت کی وی، د بلاک سرعت محاسبه کړئ کله چې دی 5 ft بښکته لاړشي. د فنر 50 پونډه تول لري او د جاذبې مرکز O ته یې د جایریشن شعاع $k_O = 0.5\text{ ft}$ ده.



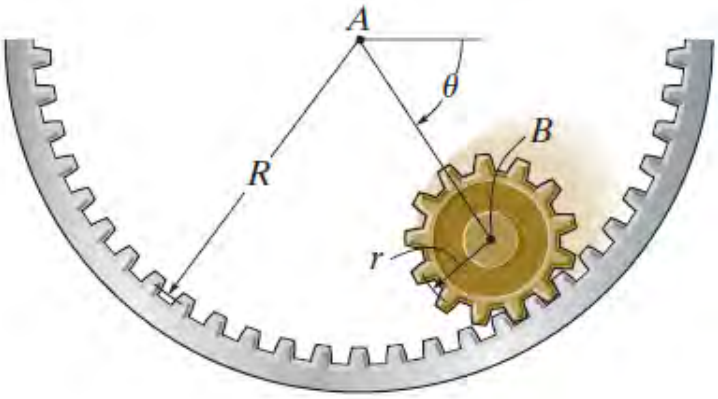
پ 18-54

18–55 . دا لاندې 15 kg نرۍ میله په پیل کې په دریدلی حالت کی ده. او په عمودي موقعیت کې ولاړه وي کله چې لاندې برخه A لږ ښیې خواته حرکت کوي. که چیرې د حرکت لاره ښویه وي، د A برخې سرعت محاسبه کړئ کله چې دا د کونج D سره ټکر وکړي. د میلې حرکت په عمودي سطحه کې محدود شوی دی. د BC تار کتله په پام کی مه نیسئ.



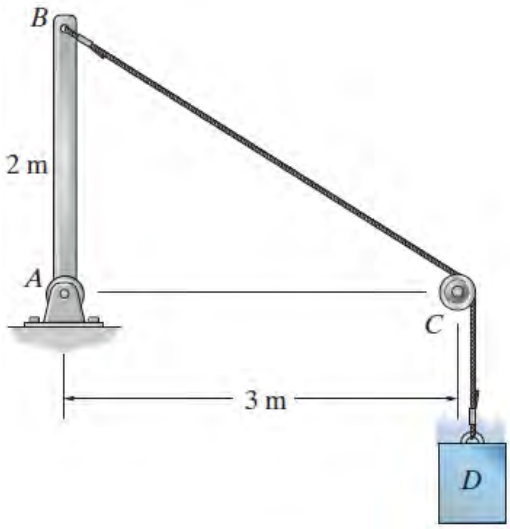
پ 18-55

*18–56 . وړوکی ګیر د m کتله لري او د یوشان ډیسک په توګه بلل کیدی شي. که دی له دریدلی موقعیت څخه په $q = 0°$ کې خوشې شي، او په ثابت دایروي لاره د ګیر باندې ورغړی، د شعاعي کربنی AB زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې $q = 90°$ وي.



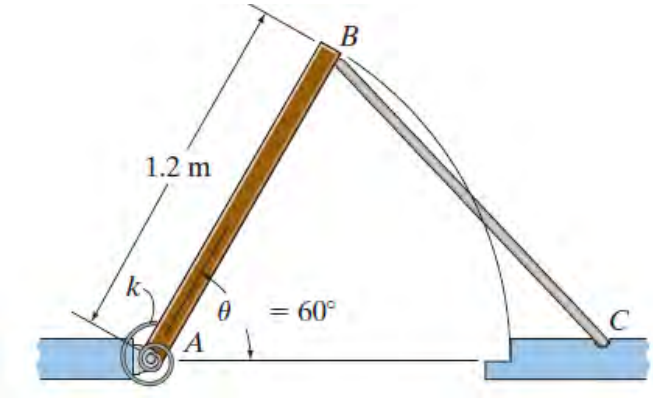
پ 18-56

18–57 . نرۍ راډ 10 کیلوګرامه کتله لري او له دریدلې حالت څخه خوشې کیږي کله چې دا په عمودي موقعیت کې وي. د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې دی افقي شي. په D ټکی کې ټرلی بلاک د 4 کیلوګرامه کتله لري. د رسۍ او څرخکي کتله په C کی د پام وړ نه ده.



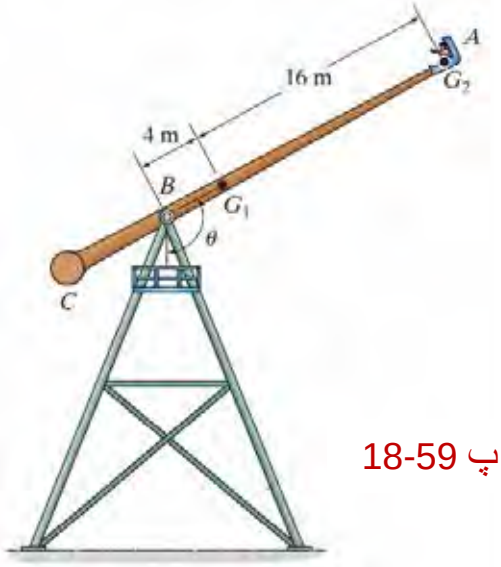
پ 18-57

18–58. یوشان مستطیلي تخته د دروازه 25 کیلوګرامه کتله لري او د BC راډ لخوا په $q =$ 60° موقعیت کې په تعادل کې نیول شوې ده. کله چې د BC ملاتړ راډ لرې شي، د ټورژنل فنر لپاره د A په ټکی کې اړینه سختي (stiffness) محاسبه کړئ، ترڅو د دروازی زاویوي سرعت صفر شي کله چې دروازه ټرل شوي موقعیت ($q = 0°$) ته ورسیږي. فنر کله چې $q = 60°$ وي، غزیدلی نه دی.



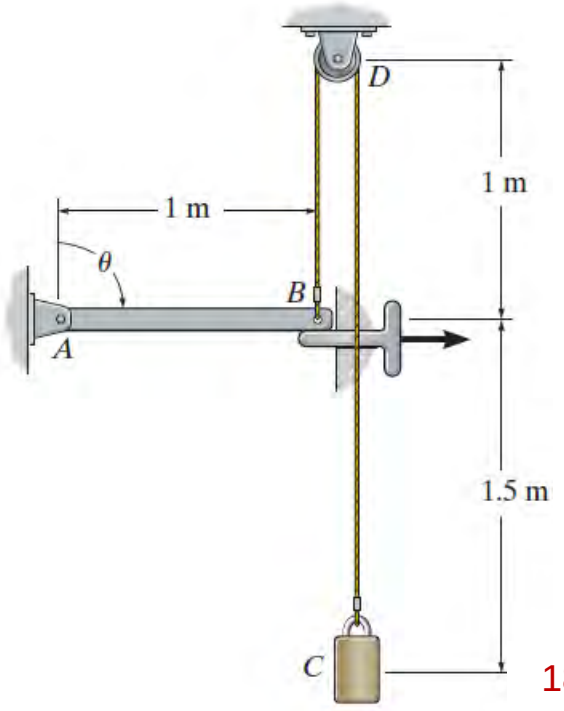
پ 18-58

18–59 . د تفريحي پارک سورلی لپاره، لاس او څوکۍ د1.5 Mgکتله لري، چې د جاذبې مرکز يې په G_1 کې دی. مسافرچې په A کې ناست دی 125 kg کتله لري، او د جاذبې مرکز يې په G_2کې دی. که لاس $q = 150°$ موقعیت ته پورته شي او بیا له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د مسافر تیزوالۍ محاسبه کړئ کله چې $q = 0°$ وي. د لاس د جایریشن شعاع $k_{G1} = 12m$ د جاذبې مرکز G_1 ته لري. د مسافر اندازه له پام نه وغورځوی.



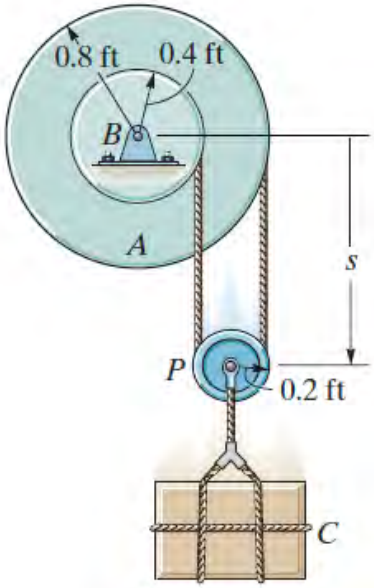
پ 18-59

*18-60. یوشان راډ AB د 12 kg کتله لري او په A کې په پین تړل شوی دی. که په B کې اتکا لرې شي ($q = 90°$) ، د 5 کیلوګرامه بلاک C سرعت محاسبه کړئ په هغه لحظه کې چې راډ په $q = 150°$ ښکته لور تاو شی. په D کې د څرخکۍ اندازه اوکتله په پام کې مه نیسئ.



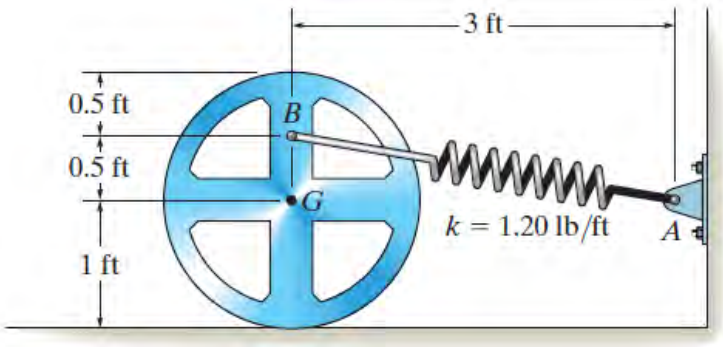
پ 18-60

18–61. څرخکی A د 30 lb تول لري اود مرکزجایریشن شعاع یی $k_B = 0.6\text{ft}$ ده. د lb 20 کریټ C تیزوالی محاسبه کړئ کله چې په $s = 10\text{ft}$ موقعیت کې وي. په پیل کې کریټ له دریدلي حالت څخه خوشې شوی کله چې $s = 5\text{ft}$ وي. څرخکی P په ښکته لور پرته له ښویدورغړی. د محاسبې لپاره، د څرخکی او رسی کتله چې د څرخکی A له داخلي او خارجي برخو نه خلاصیږی په پام کی مه نیسی.



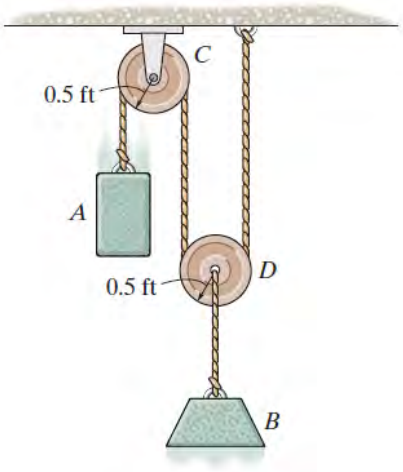
پ 18-61

18–62 . دا لاندی 50 lb څرخ د جایریشن شعاع د خپل جاذبې په مرکز G ته $k_G = 0.7\text{ft}$ لري. که دا بې له ښویدو ورغړی، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې دا له ښودل شوې موقعیت څخه 90^o د ساعت ګردش په لور وګرځي. د فنر AB سختی 1.20 lb/ft ده او نه غزیدلی اوږدوالی یی 0.5 ft دی. څرخ له دریدلی حالت څخه خوشې شوی دی.



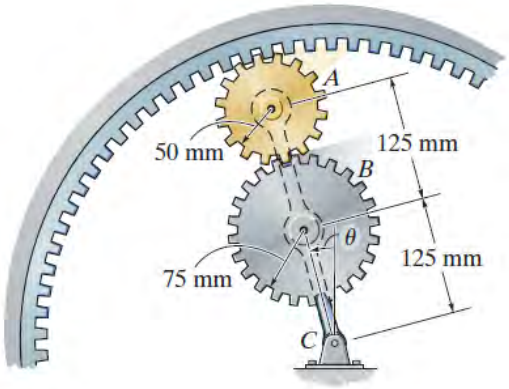
پ 18-62

18–63 . په سیستم کی 60 lb او 20 lb بلاکونو A او B ، په ترتیب سره، او 5 lb څرخکی C او D لري چې د نریو ډیسکونو په توګه ګڼل کیدی شي. د بلاک A تیزوالی محاسبه کړئ کله چې بلاک B له دریدلي حالت څخه 5 ft پورته ولاړ شی. فرض کړئ چې رسی په څرخکیو نه ښویږی او د رسی کتله په پام کی مه نیسی.



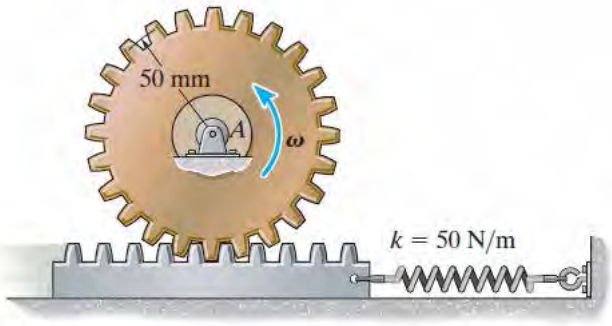
پ 18-63

*18-64 .د ګیر A کتله 0.5 kg ده، اود جایریشن شعاع $k_A = 40mm$ ده، او ګیر B 0.8kg کتله لري او د جایریشن شعاع یی $k_B = 55mm$ ده. ټرونډ په C کې پین شوی دی او 0.35 kg کتله لري. که ټرونډ د نری راډ په توګه وګڼل شی، د راډ زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې سیستم له دریدلی حالت ($q = 0°$) څخه خوشې شي او $q = 90°$ ته راښکته شي.



پ 18-64

18–65 . ګیر په A کې پین شوی دی چې 0.3 kg کتله لري، اودجایریشن شعاع $k_A =$ 25mm دی. د ګیر لاندی رخداره پټی 0.5 kg کیلوګرامه کتله لري. که فنر 50 mm وغوڑیژی او له دریدلی حالت څخه خوشې شي ، د ګیر زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې فنر 20 mm غونج شي. اصتکاک له پامه وغورځوی.



پ 18-65

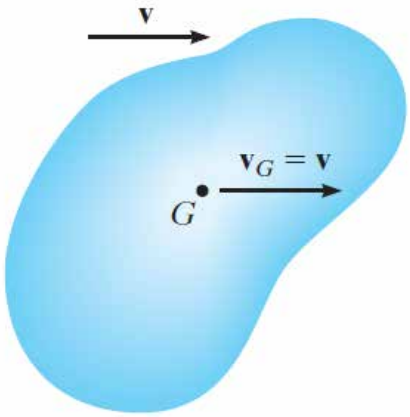
د فصل بيا کتنه

د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW

کينيټيک انرژي (Kinetic Energy)

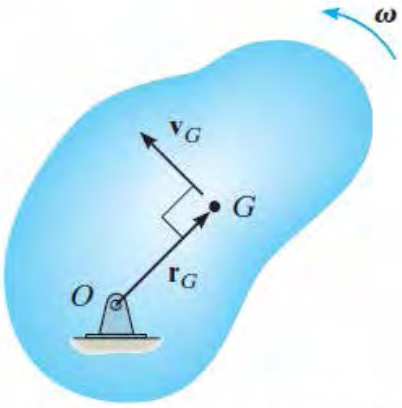
د يو سخت جسم کينيټيک انرژي چې سطحي حرکت ترسره کوي، د دې د کتلې د مرکز حرکت يا د جسم حرکت په يوه ثابت محور يا لحظوی محور د تاويدو محاسبه کيدی شي. دا شاملیږی د سکيلر مجموعه د انتقالي او تاويدونکی کينيټيک انرژيو سره.



خوځيدل (Translation)

خوځيدل (Translation)

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2$$



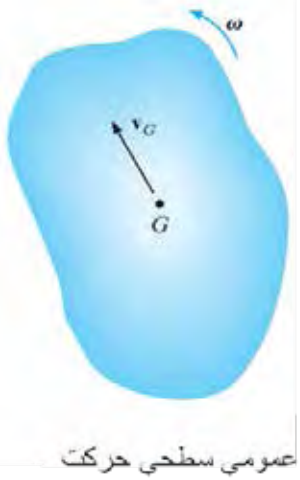
Rotation About a Fixed Axis

تاويدل په يوه ثابت محور

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2$$

or

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2$$



عمومي سطحي حرکت

عمومي سطحي حرکت

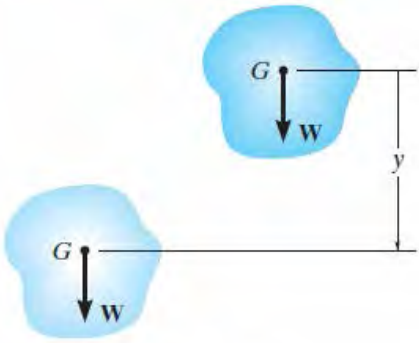
$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2$$

or

$$T = \tfrac{1}{2}I_{IC}\omega^2$$

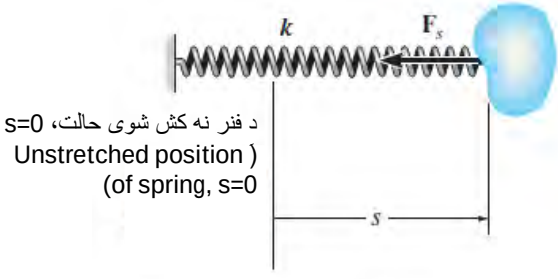
د قوی او د کپل مومینټ کار (Work of a Force and a Couple Moment)

يو قوه کار کړي کله چې دا د قوه په خپل لوري کې د ds بيځايه کيدنه ترسره کړي، او يو کپل مومينټ کار کوي کله چې دا يو تاويدل ترسره کړي.

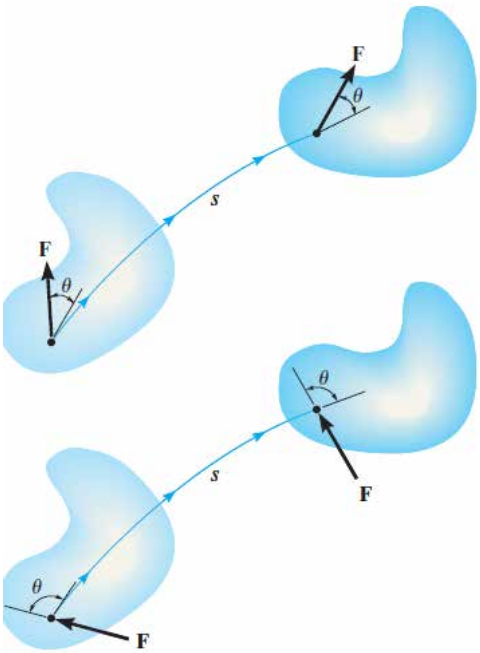


$$U_W = Wy$$

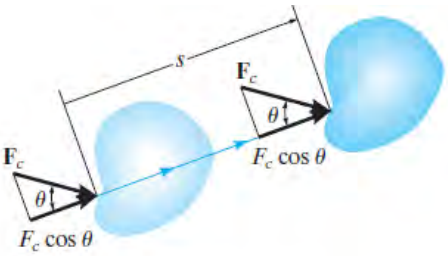
وزن (Weight)



$$U = -\frac{1}{2}k\,s^2$$



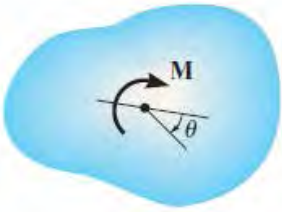
$$U_F = \int F\cos\theta\, ds$$



$$U_{F_c} = (F_c \cos \theta)s$$

Constant Force

ثابت قوه



$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$$

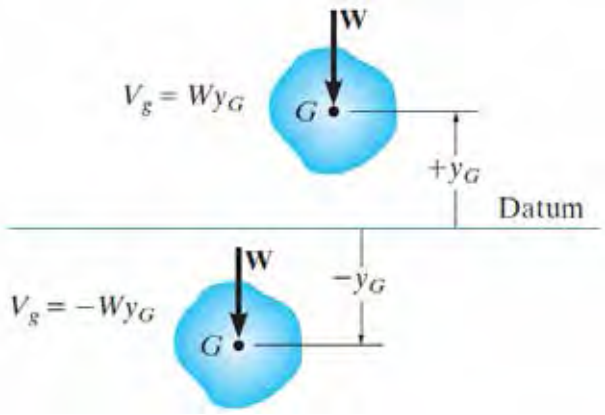
$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Constant Magnitude

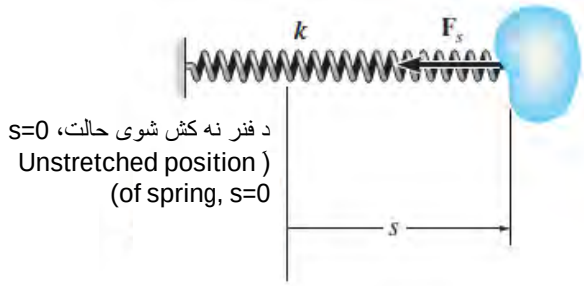
ثابت مقدار

د کار او انرژۍ اصول (Principle of Work and Energy) هغه پوښتنې چې سرعت، قوه، او بیځایه کیدو پورې اړه لري، د کار او انرژۍ د اصول په کارولو سره حل کیدی شي. د تطبیق لپاره، باید یو د آزاد بدن ډیاګرام رسم شي ترڅوکارد ټولو قوو او کپل مومینټونو حساب کړلشی کوم چې په بدن باندې عمل کړي او د لارې په اوږدو کې حرکت کوي.	$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
د انرژۍ ساتنه (Conservation of Energy) که یو سخت بدن یوازې د محافظتي قواوو تابع وي، نو د انرژۍ ساتنې معادله کولی شي د پوښتنې د حل لپاره وکارول شي. دغه معادله بنیی چې د بدن د پوتانشیل او کینیټیک انرژیو مجموعه په هرو دوو ټکیو د لارې په اوږدو کې همداسې یو شان پاتې کیږی.	$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$ $$\text{where } V = V_g + V_e$$

پوتانشيل انرژي د بدن د جاذبې او الاستيکی پوتانشيل انرژيو مجموعه ده. د جاذبې پوتانشيل انرژي به مثبته وي که د بدن د جاذبې مرکز د يوې معياري ټکی (datum) څخه پورته موقعيت ولري. که د معياري ټکی نه لاندې وي، نو به منفي وي. الاستيکی پوتانشيل انرژي تل مثبته وي، پرته له دې چې فنر غزيدلی وي يا غونج شوی وی.



د جاذبې پوتينشيل انرژي
Gravitational potential)
(energy



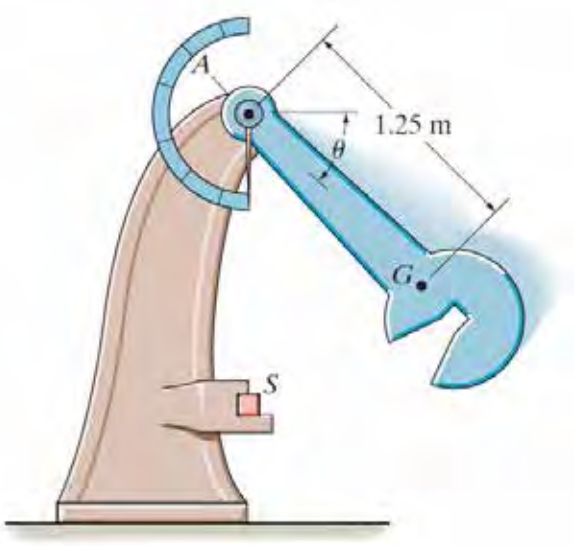
$$V_e = -\frac{1}{2} k s^2$$

ايلاستيک پوتينشيل انرژي
(Elastic potential energy)

د بیا کتنې پوښتنې

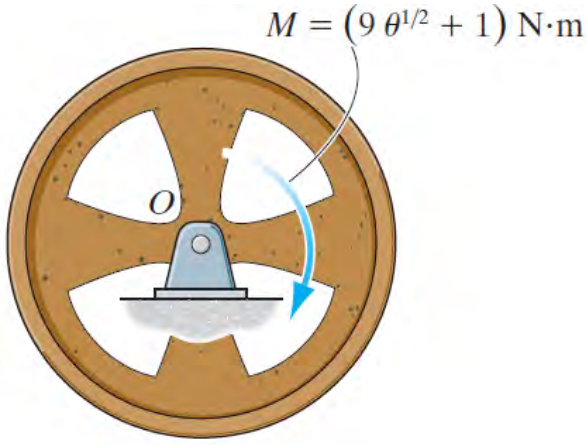
د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

ب 18–1. پیندولم د چارپي (Charpy) امپکت ماشین 50 کیلوګرامه کتله لري او د جایریشن شعاع یی $k_A = 1.75\text{m}$ ده. که دا له دریدلي حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 0°$ ، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ مخکې له دې چې د نمونه S سره ولګی، یعنی $q = 90°$.



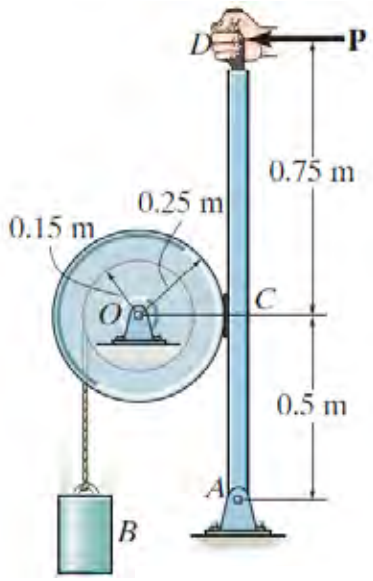
پوښتنه ب 18-1

ب 18–2. دا لاندې 50kg فلای ویل د جایریشن شعاع $k_O = 200\text{mm}$ د کتلی مرکز ته لري. که په ده باندی $M = (9\sqrt{\theta} + 1)\ \text{N.m}$ تورک پلې شي، چې چیرې q په ردینوکې ده، د ده زاویوي سرعت محاسبه کړئ کله چې دی 5 واری له دریدلی حالت نه پوره تاو شی.



پوښتنه ب 18-2

ب 18–3. لاندی ډرم 50 kg کتله لري اود جایریشن شعاع یی پین O ته $k_O = 0.23\text{m}$ دی. 15 کیلوګرامه بلاک B له دریدلی حالت څخه 3 متره ښکته لویږی پرته له دې چې بریک ACD وکارول شي. د بلاک سرعت د دې شیبې لپاره محاسبه کړئ. که د بریک او پټۍ C کې د کینیټیک اصتکاک ضریب $m_k = 0.5$ وي، د P قوه محاسبه کړئ چې باید د بریک په لاستی تطبیق شي ترڅو بلاک وروسته له دې چې دی نور 3 متره ښکته لاړ شی شي ودرول شي. د لاستي پنډوالی په پام کی مه نیسی.



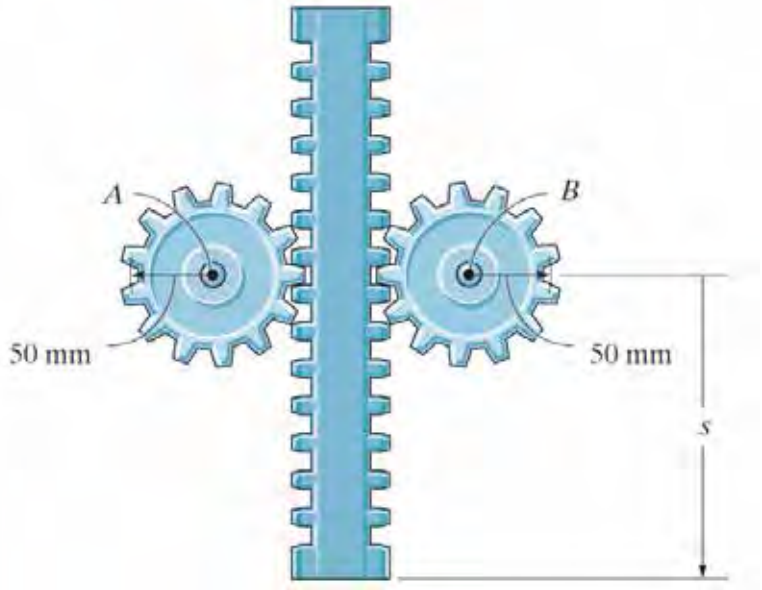
پوښتنه ب 18-3

ب 18–4. ګوټک د 40 کیلوګرامه کتله لري او د جایریشن شعاع یي $k_O = 0.3\text{m}$ دی. که 10 کیلوګرامه بلاک له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د دې لپاره چې ګوټک $w = 15\ \text{rad/s}$ زاویوی یي سرعت ولري، د بلاک د غورځیدو فاصله محاسبه کړئ. همدارنګه، د تار کشش کله چې بلاک حرکت کوي څه ده؟ د تار کتله په پام کی مه نیسی.



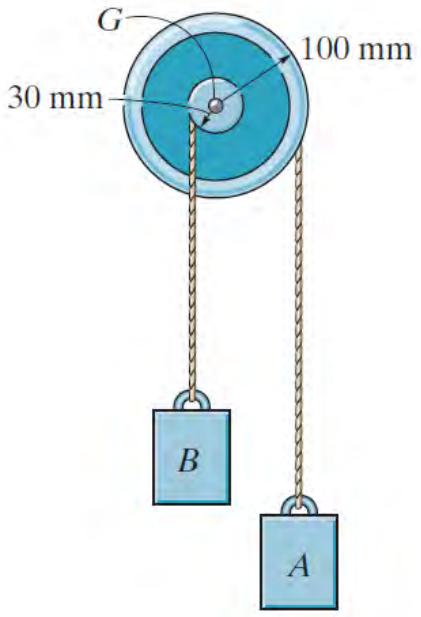
پوښتنه ب 18-4

ب 18–5. دا لاندی ګیر رخداره پایه 6kg کتله لري، او هر ګیر د 4 kg کتله لري او د جایریشن شعاع یی $k = 30\text{mm}$ خپلو مرکزو ته ده. که رخداره پایه په پیل کې په 2 m/s سرعت سره ښکته حرکت کوي، کله چې $s = 0$ ، د رخداره پایی تیزوالی محاسبه کړئ کله چې $s = 600\text{mm}$ وي. ګیرونه خپلو مرکزونو A او B ته په آزادانه توګه ګرځي.



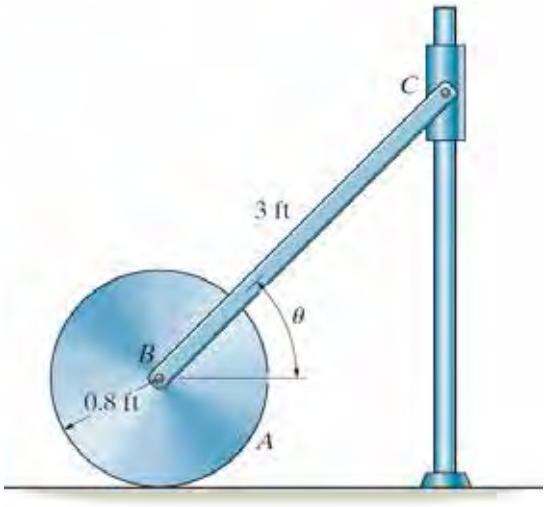
پوښتنه ب 18-5

ب 18–6. مرکب ډیسک څرخکی د مرکز او نښلول شوې خارجي ګردی برخې څخه جوړ دی. که دا 3 کیلوګرامه کتله او د جایریشن شعاع $k_G = 45\text{mm}$ ولري، د بلاک A تیزوالی محاسبه کړئ کله چې A له دریدلی حالت څخه 0.2 متره ښکته شي. بلاکونه A او B هر یو د 2 کیلوګرامه کتله لري. د تارونو کتله په پام کی مه نیسی.



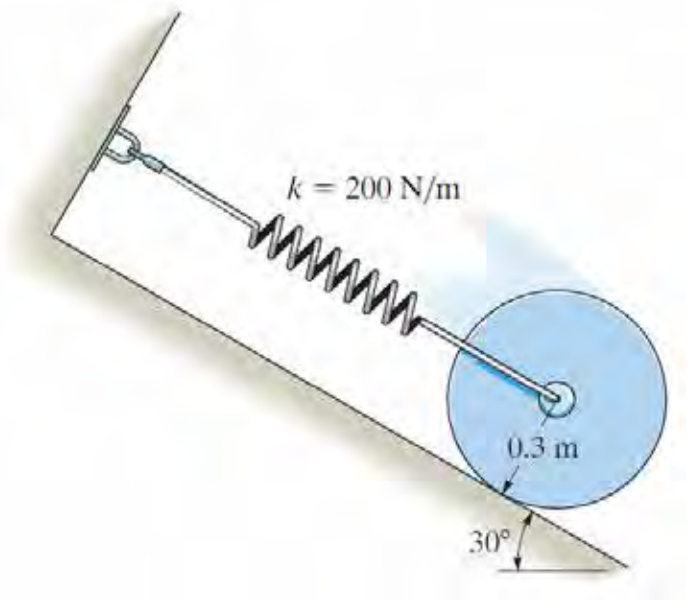
پوښتنه ب 18-6

ب 18–7. سیستم 20lb ډیسک A ، 4lb نری راډ BC ، او 1lb بنوی غاړکی C لري. که ډیسک پرته له بنویدو څخه ورغړی، د کالر سرعت محاسبه کړئ کله چې راډ افقي شي، یعني q = 0°. سیستم له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي کله چې q = 45° وي.



پوښتنه ب 18-7

ب 18–8. په هغه شیبه کی چې فنر په نه غوڑیدونکی حالت کی شی، د 40 kg ډیسک مرکز تیزوالی 4 m/s کی دي. له دې نقطې څخه د ډیسک د بنکته کیدو فاصله d محاسبه کړئ مخکې له دې چې په لحظوی توګه ودریږي. ډیسک پرته له بنویدو څخه رغړي.



پوښتنه ب 18-8

نونسم فصل

(CHAPTER 19)



په فضاء کې فضانورد د لنډو امپلسونو په کارولو د جټ پنډې په واسطه مانورې ترسره کوي. د حرکت پایلې د امپولس او مؤمنتم طریقو په کارولو سره ټاکل کیدی شي.

د يو سخت جسم سطحي کينټيکس:
امپلس او مومنتم

PLANAR KINETICS OF A RIGID BODY:

IMPULSE AND MOMENTUM

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

- § د بدن د خطي او زاويوي مؤمنتم د فرمولونو جوړول.
- § د خطي او زاويي امپلس او مؤمنتم اصولو تطبيق کول د کلک بدن د سطحي کينټيک پوښتنو د حل لپاره.
- § د مؤمنتم د ساتنې د کارولو بحث کول.
- § د غير متمرکز تاثير (eccentric impact) ميخانيکيت تحليل.

19.1 خطي او زاويوي مؤمنتم (LINEAR AND ANGULAR MOMENTUM)

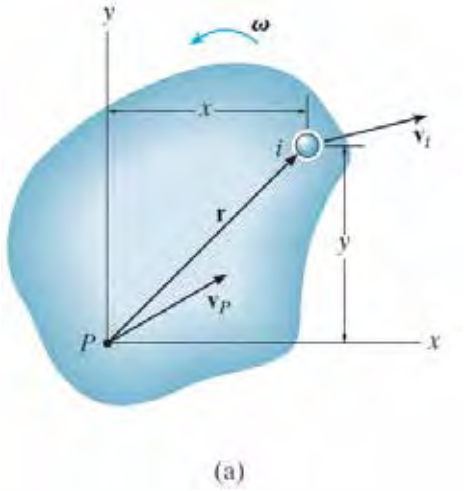
په دې فصل کې به مونږ د خطي او زاويوي امپولس او مؤمنتم اصول وکارو تر څو هغه پوښتنې حل کړو چې قوه، سرعت، او وخت په کې وي او دکلک بدن د سطحي حرکت سره تړاو لري. مخکې له دې چې دا وکړو، مونږ به لومړی د يوه بدن د خطي او زاويوي حرکت موندلو طريقې جوړې او ترتيب کړو، پدې فرضيه چې بدن د يوې انرشيل x-y ريفرينس سطحي په پرتله متناظر دی.

خطی مؤمنتم (Linear Momentum).

د يو کلک بدن خطي حرکت د بدن د ټولو ذراتو د خطي حرکت ويکتوری جمع کولو سره معلوميږي، يعنې $\mathbf{L} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. خرنګه چې $\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_G$ (برخه 15.2 وګورئ)، نو مونږ کولای شو چې د بدن د کتلې له مرکز څخه خطي مؤمنتم وښودل شی، يعنې

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \qquad (19–1)$$

دا معادله بنيي چې د بدن خطي مؤمنتم يو ويکټوري مقدار دی چې د $m\mathbf{v}_G$ اندازه لري، او په عمومی توګه ً په kg.m/s يا slug.ft/s واحدونو نداره کيږي، او جهت يې د $\mathbf{v}_G$ له لارې تعريف کيږي، چې د بدن د کتلې د مرکز سرعت دی.



(a)

انځور 19-1

زاويوي مؤمنتم (Angular Momentum)

بدن چې په انځور 19-1a کې ښودل شوی په پام کی ونيسی، چې دعمومي سطحي حرکت ته تابع دی. د بدن يوه انتخابی ذره (i) يوه معينه کتله m_i او سرعت $\mathbf{v}_i$ لري. د دې ذری زاويوي مؤمنتم P تکی ته د هغې د خطي مؤمنتم P ته د "مؤمنت" سره برابر دی، يعنې

$$(\mathbf{H}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i$$

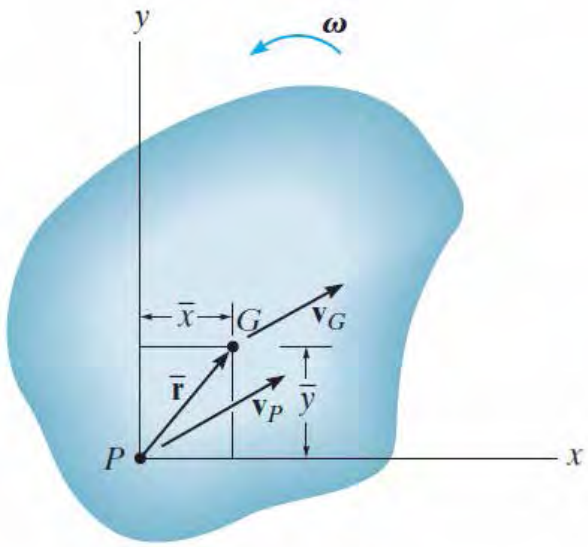
دا مؤمنتم هم د P نقطې د سرعت له مخې څرګندیدلی شي پر ځای د $\mathbf{v}_i$ سرعت. که چيرې بدن يو زاويوي سرعت $\mathbf{w}$ ولري، نو له انځور 19-1a څخه مونږ لرو

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P} = \mathbf{v}_P + \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

که $dm_i \longrightarrow m_i$ وښودل شي، $\mathbf{v}_i$ د $\mathbf{v}_P$ په بڼه څرګند شي او کارتېزين ويکټورونه وکارول شي، نو مومنټ لرو

$$(H_P)_i\,\mathbf{k} = m_i\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \;\times\; [(v_P)_x\,\mathbf{i} + (v_P)_y\,\mathbf{j} + w\mathbf{k} \;\times\; (x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j})]$$

$$(H_P)_i = -\,dm_i y(v_P)_x + dm_i x(v_P)_y + dm_i w r^2$$



انځور 19-1(ادامه)

(b)

$$(H_P)_i\mathbf{k} = m_i(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]$$
$$(H_P)_i = -dm_i y(v_P)_x + dm_i x(v_P)_y + dm_i \omega r^2$$

د ټول بدن د کتلی m باندې انټګريشن کولو سره، مومنټ ترلاسه کوو

$$H_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(v_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(v_P)_y + \left(\int_m r^2\,dm\right)\omega$$

دلته H_P د بدن زاويوي مؤمنتم ښودل کيږي په يوه محور (z محور) چې عمود د حرکت په سطحه دي او د P ټکی څخه تيريږي. څرنګه چې $\bar{y}m = \int y\,dm$ او $\bar{x}m = \int x\,dm$ ، د لومړۍ او دويمې برخې د ښي لور د انټګريشن له لارې د بدن د کتلی مرکز G موقعيت نسبت P ته پيداکيږي، انځور 19-1b. وروستی انټګريشن د بدن انرشيايی مؤمنت P ټکی ته ښيي. نو،

$$H_P = -\bar{y}m(v_P)_x + \bar{x}m(v_P)_y + I_P\omega \qquad (19\text{–}2)$$

دا معادله يوه ساده شکل ته راښکته کيږي که P د بدن د کتلې مرکز G سره يو ځای شي، چې په دې صورت کې $\bar{x} = \bar{y} = 0$. له همدې امله،

$$H_G = I_G\omega \qquad (19–3)$$

*دا هم يوې ساده بڼې ته راګرځي، $H_P = I_P\omega$. که چيرې ټکی P يو ثابت ټکی وي(9–19معادله وګورئ) يا که د P سرعت د PG کرښې سره سم وي.

دلته د بدن زاويوي حرکت G ته مساوی دی د بدن د انرشيا د مومينټ هغه محور ته چې د G نه تيريږی او د بدن د زاويوي سرعت سره. پوه شئ چې $\mathbf{H}_G$ يو ويکټوری مقدار دی چې اندازه يې $I_G\omega$ ده، چې عموماً په $kg \cdot m^2/s$ يا $slug \cdot ft^2/s$ واحدونو کې اندازه کيږي، او لوری يې د $\mathbf{w}$ لخوا تعريف شوی دی، چې تل د حرکت په سطحه عمود وي . معادله 19-2 کيدی شی د بدن د کتلې مرکز د سرعت د x او y اجزاوو $(\mathbf{v}_G)_x$ او $(\mathbf{v}_G)_y$ ، او د بدن د انرشيا مومنټ I_G په اصتلاحاتو کې بيا ليکل کيدی شي. څرنګه چې G په $(\bar{x},\bar{y})$ کوارډناټو کې موقعيت لري، نو دموازی محورونو د قضيې په اساس، $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. په 19-2 معادله کې يی ځای پر ځای کوو او د اصتلاحاتو له ترتيبولو وروسته، مونږ لرو.

$$H_P = \bar{y}m[-(v_P)_x + \bar{y}\omega] + \bar{x}m[(v_P)_y + \bar{x}\omega] + I_G\omega \qquad (19–4)$$

د انځور 19-1b د کينيماتيکي ډياګرام څخه، $\mathbf{v}_G$ کولی شي د $\mathbf{v}_P$ په اصطلاح کی وښودل شی، لکه

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}$$
$$(v_G)_x\mathbf{i} + (v_G)_y\mathbf{j} = (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

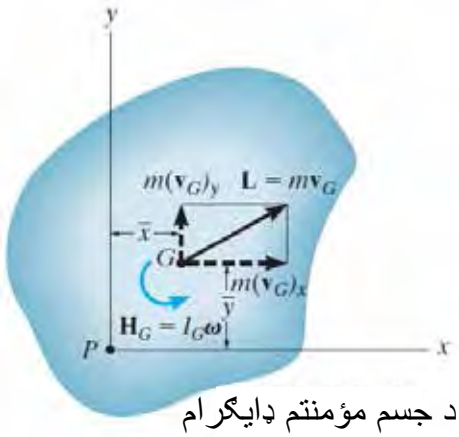
کراس ضرب ترسره کولو او د اړونده $\mathbf{i}$ او $\mathbf{j}$ اجزاوې سره مساوی کيدلو وروسته دوه سکيلر معادلې ورکوي

$$(v_G)_x = (v_P)_x - \bar{y}\omega$$
$$(v_G)_y = (v_P)_y + \bar{x}\omega$$

دغه نتيجی په معادله 19-4 کې ځای پر ځای کوو او حاصل يی ورکوي

$$(\circlearrowleft +)H_P = -\bar{y}m(v_G)_x + \bar{x}m(v_G)_y + I_G\omega \qquad (19–5)$$

لکه څرنګه چې په انځور 19-1c کې ښودل شوي، دغه نتيجه ښيي چې کله د بدن زاويوي حرکت د نقطې P په اړه حساب شي، نو دا مساوی دی په مومنټ د خطي مومنتم $m\mathbf{v}_G$ ، يا د هغواجزاو $m(\mathbf{v}_G)_x$ او $m(\mathbf{v}_G)_y$ ، مومنټ P ته ، جمعه د زاويوي مومنتم $I_G\,\mathbf{w}$ سره. د دې نتايجو څخه کار اخيستلو سره، مور اوس دري ډوله حرکتونه په پام کې نيسو.



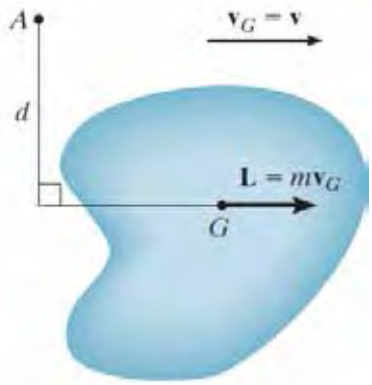
د جسم مؤمنتم ډايګرام

(c)

انځور 19-1(ادامه)

انتقال (Translation). کله چې يو سخته جسم د خطي يا منحني انتقال ته مخ شي، لکه څنګه چې په انځور 19-2a کې ښودل شوي، نو $\mathbf{w} = 0$ وي او د دې د کتلې مرکز سرعت $\mathbf{v}_G$ =$\mathbf{v}$لري. له دې امله، خطي مومنتم، او زاويوي مومنتم G ته، داسې کيږي

$$\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= 0 \end{aligned} \qquad (19\text{–}6)$$



انتقال

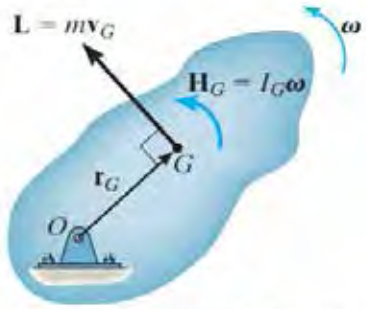
(a)

انځور 19-2

که چيرې زاويوي مؤمنتم يوه بل ټکی A ته محاسبه شي، نو د خطي مؤمنتم **L** "مومنټ" بايد د دې نقطې په اړه پيدا شي. څرنګه چې d د "مومنټ لاس" دی، لکه څنګه چې په انځور 19-2a کې ښودل شوي، نو د معادلې 19-5 له مخې، $H_A = (d)(mv_G)$ ↰

په ثابت محور تاويدل (Rotation About a Fixed Axis).

کله چې يو سخت جسم په ثابت محور تاو مومي، لکه څنګه چې په انځور 19-2b کې ښودل شوي، نو خطي مؤمنتم، او زاويوی مومنتم G ته، داسې کيږي



تاويدل په يو ثابت محور

انځور 19-2

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega \qquad (19–7)$$

ځينې وختونه دا مناسب وي چې زاويوي مومنتم پين O ته محسابه شي. په دې پام کې نيولو سره چې **L** يا ($\mathbf{v}_G$) تل د $\mathbf{r}_G$ سره عمودي وي، موږ لرو

$$(\curvearrowright +)\ H_O = I_G\omega + r_G(mv_G) \qquad (19–8)$$

څرنګه چې $v_G = r_G v$ دی، دا معادله داسې ليکل کيدی شي $H_O = (I_G + mr^2_G)w$. د موازي محور قضيې په کارولو سره*

$$H_O = I_O\omega \qquad (19–9)$$

د محاسبې لپاره، نو يا معادله 19-8 يا 19-9 کارول کيدی شي.

*دا ورته والئ د دې نتيجې او معادلې 16-17 ($\Sigma M_O = I_O a$) او معادلې 18-5 ($T = 12\ I_O w^2$) ترمنځ بايد په ياد ولرى. همدارنګه، همدغه نتيجه د معادلې 19-2 څخه ترلاسه کيدی شي که چيرې د P ټکی په O کی وټاکل شي، په دې پوهيدل چې $(v_O)_x = (v_O)_y = 0$ دی.

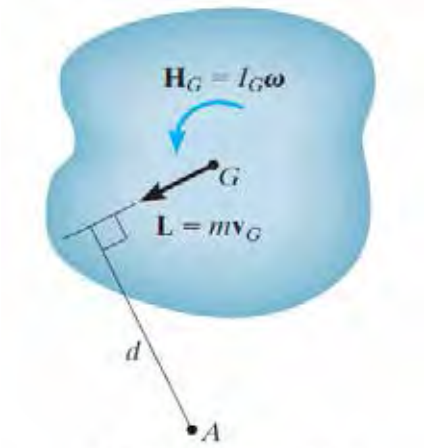
عمومي سطحي حرکت (General Plane Motion). کله چې يو سخته جسم د

عمومي سطحي حرکت سره مخ شي، لکه څنګه چې په

انځور 19-2c کې ښودل شوي، نو خطي مؤمنتم، او زاويوي مؤمنتم،

G ته داسې کيږي

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega \qquad (19–10)$$



عمومي سطحي حرکت

(c)

انځور 19-2 (ادامه)

که چيرې زاويوي مؤمنتم د A تکی ته حساب شي، انځور 19-2c ، نو د **L** او $\mathbf{H}_G$ مومنټ بايد د دې نقطې په اړه شامل شي. په دې حالت کې

$$(\circlearrowright +) \quad H_A = I_G\omega + (d)(mv_G)$$

دلته d د مومنټ لاس دی، لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوی.

د ځانګړي حالت په توګه، که د A ټکی د انی صفر سرعت مرکز وي، نو بيا، لکه څنګه چې په معادله 19-9 کې دی، مور کولی شو پورته معادله په ساده شوې بڼه وليکو

$$H_{IC} = I_{IC}\omega \qquad (19–11)$$

چيرته چې I_{IC} د بدن انرشيايی مومنټ IC ته دی. (پوښتنه 19-2 وګورئ.)

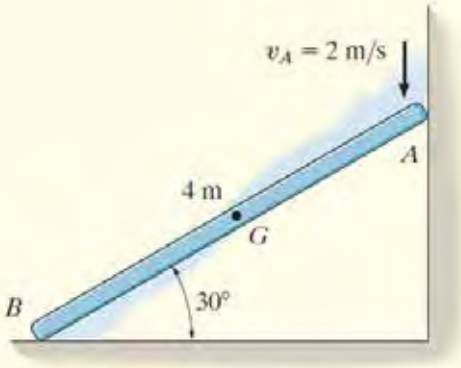
مثال

مثال 19.1

په يوه ټاکلي وخت کې، يو 5 کيلو ګرامه نری بار چې په انځور 19-3a کې ښودل شوی حرکت لري. د ده زاويوي مومنټم G ټکی ته او IC ته په دې وخت کې محاسبه کړئ.

حل

بار (Bar). دغه بارعمومي سطحي حرکت ترسره کوي . *IC* په انځور 19-3b کې ټاکل شوی دی، ترڅو چې



(a)

انځور 19-3

$$\omega = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ m} \cos 30^\circ} = 0.5774 \text{ rad/s}$$

$$v_G = (0.5774 \text{ rad/s})(2 \text{ m}) = 1.155 \text{ m/s}$$

نو

$$(\curvearrowright +) H_G = I_G \omega = \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) = 3.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$

Ans.

زاویوي مؤمنتم *IC* ته عبارت دي په

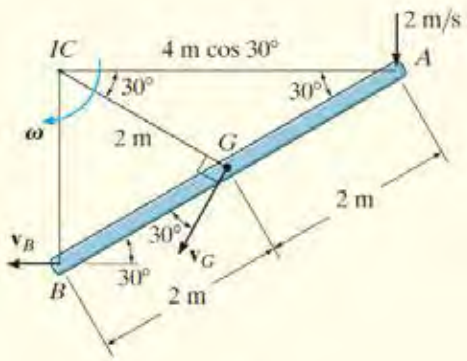
$$\begin{aligned}(\curvearrowright +) H_{IC} &= I_G \omega + d(m v_G) \\ &= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) + (2 \text{ m})(5 \text{ kg})(1.155 \text{ m/s}) \\ &= 15.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright \end{aligned}$$

Ans.

مور همدا رنګه دا لاندی کارولي شو

$$\begin{aligned}(\curvearrowright +) H_{IC} &= I_{IC} \omega \\ &= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2 + (5 \text{ kg})(2 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) \\ &= 15.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright \end{aligned}$$

Ans.



(b)

انځور 19-3

19.2 د امپلس او مؤمنتم اصول (PRINCIPLE OF IMPULSE AND MOMENTUM)

لکه څنګه چې د ذرې د حرکت لپاره حالت دی، د سخته جسم لپاره د امپلس او مومنتم اصول هم جوړیدی شی کله چې د حرکت معادله د کینیمتیکس سره یو ځای شی.

د خطي امپلس او مومنتم اصول (PRINCIPE of Linear Impulse and Momentum)

د سخت جسم لپاره د انتقالی حرکت معادله لیکل کیدی شي

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m(d\mathbf{v}_G/dt) = \Sigma \mathbf{F}$$

څرنګه چې د جسم کتله ثابته ده،

$$\Sigma \mathbf{F} = d/dt\,(m\mathbf{v}_G)$$

دواړو خواوې په dt ضربوو او له $t = t_1$ ، $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_1$ څخه تر $t = t_2$ ، $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_2$ پورې انتیګریټ کوو چې راکوی:

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 - m(\mathbf{v}_G)_1$$

دا معادله **د خطي امپلس او مؤمنتم اصول** په نوم یادیږي. دا ښیی چې مجموعه د ټولو خارجي امپلسونوکوم چې د بهرنیو قواوو سیستم لخوا په بدن باندې د t_1 څخه تر t_2 پورې عمل کوی، مساوی کیږی د بدن د خطي مومنتم د بدلون سره د دی وخت په اوږدو کی.

د زاویوی امپلس او مومنتم اصول (Principle of Angular Impulse and Momentum) .

$\Sigma M_G = I_G a = $ نو، چیرې بدن عمومي سطحې حرکت ولري که $I_G(dw/dt)$. څرنګه چې انرشیایی مؤمنټ ثابت دی

$$\Sigma M_G = \frac{d}{dt}(I_G \omega)$$

د دواړی خواوی په dt ضربوو او بیا یی د $t = t_1$ ، $w = w_1$ څخه تر $t = t_2$ ، $w = w_2$ پورې انتیګریټ کوو چې دالاندی راکوی:

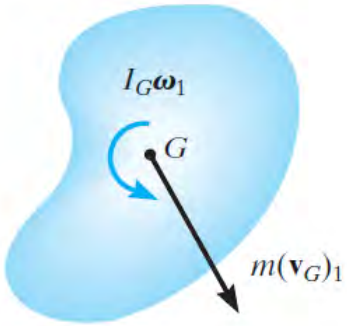
$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\, dt = I_G\omega_2 - I_G\omega_1 \qquad (19\text{–}12)$$

په ورته ډول، د ثابت محور په اړه چې د O ټکی نه تیریږي، معادله 17-16 ($\Sigma M_O =$ I_O (dw/dt)) کله چې انټیګریټ شي، داسې کیږي

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O \, dt = I_O\omega_2 - I_O\omega_1 \qquad (19–13)$$

معادلې 19-12 او 19-13 **د زاویوي امپلس او مومنټم اصول** په نوم یادیږي. دواړه معادلې بنیی چې مجموعه د ټول زاویوي امپلسونو چې د t_1 څخه تر t_2 پورې په بدن عمل کوي، مساوی کیږی د بدن د زاویوي مومنټم بدلون سره په همدی وخت کی.

د دې مفاهیمو د لنډیز لپاره، که حرکت په $x–y$ سطحه کې واقع شي، لاندې درې سکیلر معادلې لیکل کیدی شي ترڅو د بدن سطحی حرکت توضیح کړي.



لمړه نی مؤمنتم ډایګرام

$$m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt = m(v_{Gx})_2$$

$$m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = m(v_{Gy})_2 \qquad (19–14)$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G \, dt = I_G\omega_2$$

(a)

د دې معادلو اصتلاحات کیدي شي د بدن لپاره په امپلس او مومنټم ډیاګرامونو کې په ګرافیکي توګه وښودل شي، انځور 19-4 . خطي مومنټ $m\mathbf{v}_G$ د بدن د کتلې مرکز کې تطبیق شوی، انځور 19-4aاو 19-4c ؛ په داسې حال کې چې زاویوي مومنټ I_G **w** یو ازاد ویکتور دی، او له دې املې، لکه د کپل مومنټ، کولی شي د بدن په هرې ټکی کې تطبیق شي. کله چې د امپلس ډیاګرام جوړ شي، انځور 19-4b ، قواوې **F** او مومنټ **M** د وخت سره بدلون کوي، او د انټیګرالونو له لارې بنودل کیږي. خو، که چیرې **F** او **M** ثابت وي، نو انټیګریشن د امپلسونو حاصل وررکوي $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$ او $\mathbf{M}(t_2 - t_1)$. دا همدا حال د بدن وزن **W** لپاره دی، انځور 19-4b.

معادلې 19-14 کیدی شي په ټول سیستم د ټرل شویو بدنونو با ندی تطبیق شي، په ځای د دی چې په هر بدن باندی په جلا توګه تطبیق شی. دا هغه اړتیا له منځه وړی چې هغه امپلسونو چې په

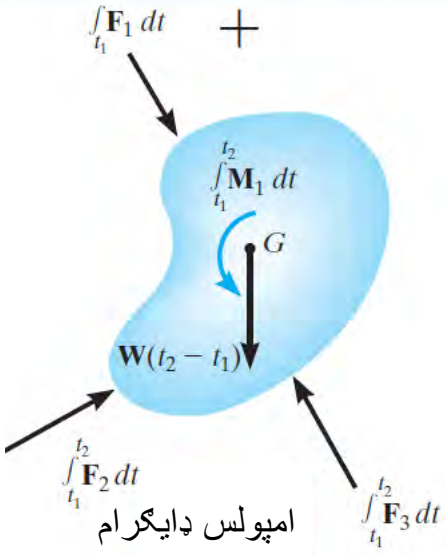
وصليدونکيو ټکيو کی مينځ ته راځي شامل شي، ځکه چې دوی د سيستم په داخل کی دی حذف کيږي. د نتيجوي معادلو ښودلو لپاره به په سمبوليکي بڼه په لاندی ډول وليکل شي

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم}\\ \text{خطي مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{x1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم خطي}\\ \text{امپولس}\end{matrix}\right)_{x(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم خطي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{x2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم خطي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{y1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم خطي}\\ \text{امپولس}\end{matrix}\right)_{y(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم خطي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{y2}$$

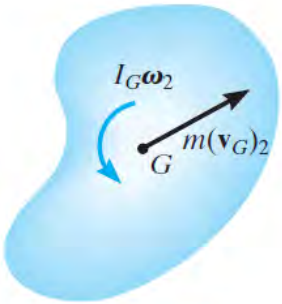
$$\left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم زاويوي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم زاويوي}\\ \text{امپولس}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{سيستم زاويوي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{O2}$$

(19–15)



(b)

لکه څنګه چې په دريمه معادله کي ښودل شوی، د سيستم زاويوي مؤمنتم او زاويوي امپلس بايد د سيستم د تولو بدنونو لپاره د يوی ورته مرجع ټکی *O ته* حساب شي.



حاصل شوي
مؤمنتم ډايګرام

(c)

انځور 19-4

PROCEDURE FOR ANALYSIS د تحلیل کړنلاره

د امپلس او مومنټم اصول د کینیټیکي پوښتنو د حل لپاره کارول کیږي کوم چې د سرعت، قووه، او وخت سره تړاو لري، ځکه چې دغه اصطلاحات یې په جوړیدو کې شامل دي.

ازاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram)

- د x ، y، z انیرشیل فریم ریفرینس باید وټاکل شي اود ازاد بدن ډیاګرام رسمول اړین دی ترڅو ټولې قواوې او کپل مومنټونه کوم چې په بدن باندې امپلسونه تولیدوي محاسابه شي.
- د بدن د کتلې د مرکز د لمړنۍ او پایلې سرعت $\mathbf{v}_G$ او د بدن زاویوی سرعت $\mathbf{w}$ لوري اوجهت باید وټاکل شي. که چیرې د دې حرکتونو څخه کوم یو نامعلوم وي، نو دا فرض کړئ چې د دې اجزاوو حس(جهت) د مثبت انیرشیل کوارډینیټونو په لوردی.
- انرشیایی مومنټ I_G یا I_O محاسبه کړئ.
- د یوې بدیلې طریقې په توګه، د بدن یا د بدنونو د سیستم لپاره د امپلس او مومنټم ډیاګرامونه رسم کړئ، لکه چې په انځور 4-19کې ښودلشوی. دا ډیاګرامونه ځانګړې مرسته کوي ترڅو د "مومنټ" اصطلاحات د زاویوي امپلس او مؤمنټ په اصول کې و لیدلې شي، که چیرې غوښتنه ثابت ټکی O *ته وی*، IC، یا د بدن د کتلې مرکز G څخه پرته بلې نقطې په اړه وي.

د امپلس او مومنټ اصول (Principle of Impulse and Momentum)

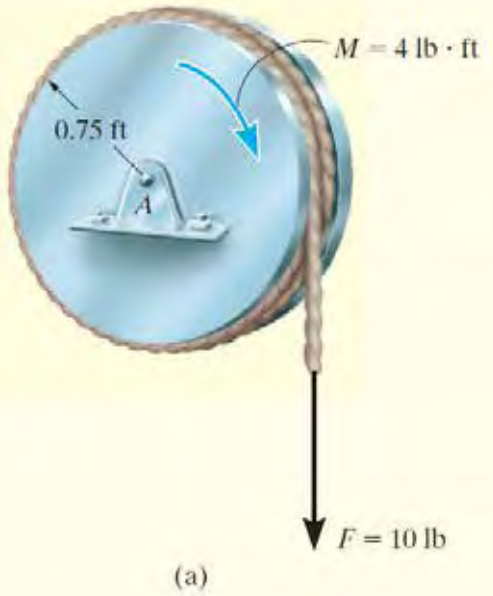
- د امپلس او مومنټ دري سکیلر معادلې پلي کړئ.
- د سخت بدن زاویوي مؤمنټم چې د ثابت محور په اړه تاویږي، د $m\mathbf{v}_G$ مومنټ جمع $I_G\,\mathbf{w}$ د محور په اړه دی. دا د $H_O = I_O\,w$ سره مساوي دی، چیرې چې I_O د بدن انرشیایی مؤمنټ د محور په اړه دی.
- هغه قواوې چې د وخت تابع وي باید د امپلس ترلاسه کولو لپاره انټیګریټ شي.
- د زاویوي امپلس او مؤمنټم اصول اکثر وخت د نامعلومو امپولسی قواوو د حذف کولو لپاره کارول کیږي، کوم چې د یوه مشترک محورسره موازي یا د هغه محورڅخه تیریږي، ځکه چې د دې قواوو مومنټ د دې محور په اړه صفر دی.

کینیمتیکس (Kinematics)

- که چیرې د بشپړ حل لپاره له درېو معادلوڅخه زیاتو ته اړتیا وی، نودا ممکن ده چې د بدن د کتلې دمرکز سرعت د بدن د زاویوي سرعت سره د کینیمتیکس په کارولو سره ارتباط ورکړل شي.

مثال 19.2

په 20 lb ډسک چې په انځور 19-5a کې ښودل شوی دی، 4 lb.ft کپل مومنټ او د 10 lb قوه چې د یوی رسۍ له لارې چې د ډسک په محیطي برخه تاو شویی وربانډی عمل کوی. د دې ډسک زاویوي سرعت دوه ثانیې وروسته له سکون حالت څخه معلوم کړئ.
همدارنګه، د پین د ریکشن قوی اجزاوې څه دي؟



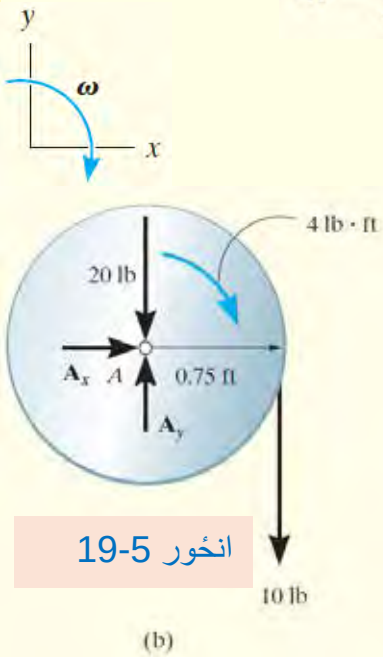
(a)

حل

څرنګه چې زاویوي سرعت، قوه، او وخت په پوښتنه کې شامل دي، نو مورِ به د امپلس او مومنټم اصول د حل لپاره پلي کړو.

د ازاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram) . انځور 19-5b . د ډسک د کتلې مرکز نه خوځیږي؛ خو، بهرنۍ قوه د دې سبب کیږي چې ډسک د ساعت په جهت تاوشی. د ډسک انرشیایی مومنټ د هغه ثابت محور په اړه چې تری تاویږی، دی.

$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.75\text{ ft})^2 = 0.1747\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$



انځور 19-5
(b)

د امپلس او مؤمنټم اصول (Principle of Impulse and) .

$$(\pm\rightarrow) \quad m(v_{Ax})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Ax})_2$$

$$0 + A_x(2\text{ s}) = 0$$

$$(+\uparrow) \quad m(v_{Ay})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Ay})_2$$

$$0 + A_y(2\text{ s}) - 20\text{ lb}(2\text{ s}) - 10\text{ lb}(2\text{ s}) = 0$$

$$(\curvearrowright+) \quad I_A\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0 + 4\text{ lb}\cdot\text{ft}(2\text{ s}) + [10\text{ lb}(2\text{ s})](0.75\text{ ft}) = 0.1747\omega_2$$

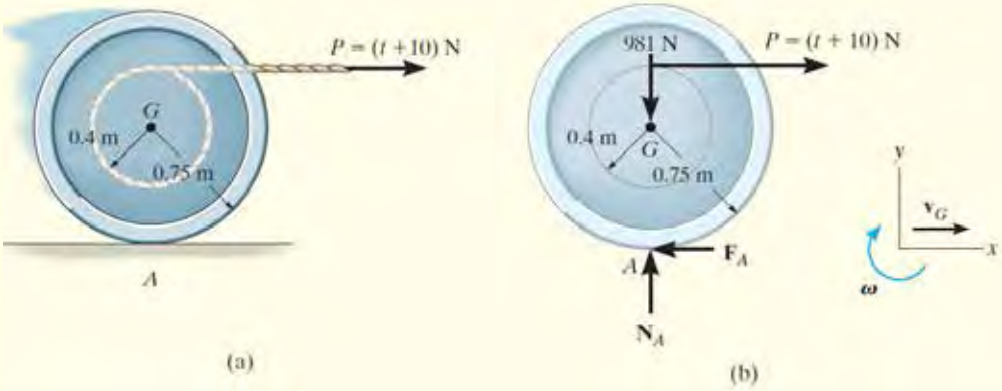
دا معادلی حل کوو او دا په لاس راځي

$$A_x = 0 \qquad Ans.$$

$$A_y = 30\ \text{lb} \qquad Ans.$$

$$\omega_2 = 132\ \text{rad/s}\circlearrowleft \qquad Ans.$$

مثال 19.3 هغه 100 kg ګوټک چې په انځور 19-6a کې ښودل شوی دی، دجایریشن شعاع يې KG =0.35 m ده. یوه کیبل د ګوټک د مرکزی حصی شاوخوا تاو شوي، او یو افقي قوه چې متغیر انداز P = (t +10)N لري ورباندی تطبیق شوی ده، چیرې چې *t* په ثانیو کې ده. که ګوټک په ابتدا کې په دریدلی حالت کی وي، نو په 5 ثانیو کې يې زاویوي سرعت معلوم کړئ. فرض کړئ چې ګوټک په *A* نقطه کې پرته له ښویدو څخه ر ځغرې.



انځور 19-6

حل

د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram) . د ازاد بدن ډیاګرام څخه، انځور19-6b ، متغیرقوه **P** به د اصطکاک متغیر قوه $\mathbf{F}_A$ جوړه کړي، او له دې امله د **P** او $\mathbf{F}_A$ لخوا تولید شوي امپلسونه باید د انتیګریشن له لارې معلوم شي. قوه **P** د کتلی مرکز ته $\mathbf{v}_G$ سرعت ښیي لورته ورکوي ، اوله دې امله ګوټک د ساعت په لورزاویوي سرعت **w** لري.

د امپلس او مومنټم اصول (Principle of Impulse and Momentum) . د زاویوي امپلس او مومنټم اصول په مستقیم ډول د A ټکی ته، *IC* ته پلي کیدی شي ترڅو د زاویوي سرعت **w** ترلاسه شي، او د نامعلوم اصطکاک امپلس حذف کړي.

$$(\curvearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$0 + \left[\int_0^{5s} (t + 10)\ \text{N}\, dt\right](0.75\ \text{m} + 0.4\ \text{m}) = [100\ \text{kg}\ (0.35\ \text{m})^2 + (100\ \text{kg})(0.75\ \text{m})^2]\omega_2$$

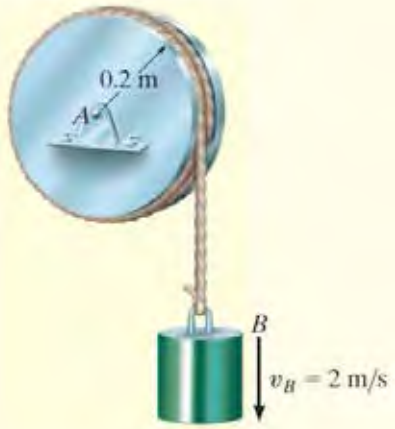
$$62.5(1.15) = 68.5\omega_2$$

$$\omega_2 = 1.05\ \text{rad/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه : هڅه وکړئ چې دا پوښتنه د امپلس او مومنټم اصول G ته پلي کړئ او د خطي امپلس او مومنټم اصول په x لوري کې وکاروئ.

مثال 19.4

سیلنډرB ، چې په انځور 19-7a کې ښودل شوی دی، 6 kg کتله لري. دا د یوی رسی سره تړلی دی کوم چې د 20 kg ډسک د محیط شاوخوا باندې تاو شوی ده او د ډسک انرشیایی مومنټ $I_A = 0.40\ \text{kg.m}^2$ دی. که چیرې سیلنډر په ابتدا کې په 2 m/s تیزوالي سره ښکته حرکت کوي، نو په 3s کې یې تیزوالی معلوم کړئ. د رسئ کتله په محاسبه کې له پامه وغورځوی.



(a) انځور 19-7

حل I

د ازاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram) . د سیلنډر او ډسک ازاد بدن ډیاګرامونه په انځور 19-7b کې ښودل شوي دي. ټولی قواوې ثابت دي ځکه چې د سیلنډر ټول د حرکت سبب کیږي. د سیلنډر ښکته حرکت، $\mathbf{v}_B$، سبب کیږی چې د ډسک $\mathbf{w}$ د ساعت په لور وی.

د امپلس او مومنټم اصول (Principle of Impulse and Momentum) . په پلی کولو د زاویوي امپلس او مومنټم اصول په A ټکی کی کولی شو په تحلیل کی $\mathbf{A}_x$ او $\mathbf{A}_y$ حذف کړو. نو بیا له دې امله، **ډیسک (Disk)**

$$(\curvearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2(\omega_1) + T(3\ \text{s})(0.2\ \text{m}) = (0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

سلنډر (Cylinder).

$$(+\uparrow) \qquad m_B(v_B)_1 + \Sigma \int F_y\, dt = m_B(v_B)_2$$

$$-6\ \text{kg}(2\ \text{m/s}) + T(3\ \text{s}) - 58.86\ \text{N}(3\ \text{s}) = -6\ \text{kg}(v_B)_2$$

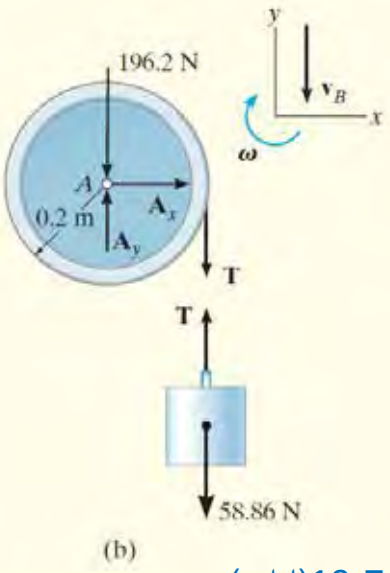
کینیماتیک (Kinematics) .

خرنګه چې $w = v_B / r$ ، نو $w_1 = (2\ \text{m/s}) / (0.2\ \text{m}) =$ او 10 rad/s

$$\omega_2 = (v_B)_2/0.2\ \text{m} = 5(v_B)_2$$

د معادلو په تعویض کولو او حل کولو سره $(v_B)_2$ په لاس راځی.

$$(v_B)_2 = 13.0\ \text{m/s} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 7-19(ادامه)

حل II

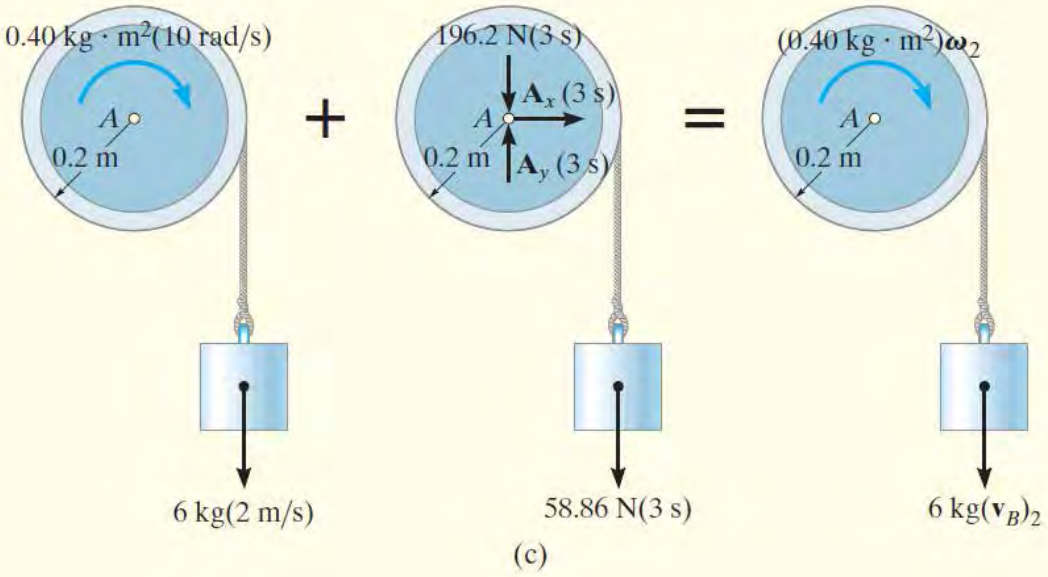
د امپلس او مومنټم ډیاګرامونه (Impulse and Momentum Diagram). مور کولی شو $(v_B)_2$ په مستقیمه توګه له سیستم تر لاسه کړو ځکه چې سیستم له سیلنډر، رسی ، او ډسک څخه جوړ شوی دی. د امپلس او مومنټم ډیاګرامونه رسم شوي دي ترڅو د زاویوي امپلس او مومنټم اصول د A ټکی ته روښانه کړی، انځور 19-7c .

د زاویوي امپلس او مومنټم اصول (Principle of Angular Impulse and Momentum) . په پوهیدلو سره چې $w_1 = 10$ rad/s او $w_2 = 5(v_B)_2$ ، نو مور لرو

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{سیستم زاویوي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{سیستم زاویوي}\\ \text{امپلس}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{سیستم زاویوي}\\ \text{مؤمنتم}\end{matrix}\right)_{O2}$$

$$(\curvearrowleft +)\left(\sum \begin{matrix}\text{syst. angular}\\ \text{momentum}\end{matrix}\right)_{A1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{syst. angular}\\ \text{impulse}\end{matrix}\right)_{A(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{syst. angular}\\ \text{momentum}\end{matrix}\right)_{A2}$$

$$(6\text{ kg})(2\text{ m/s})(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(10\text{ rad/s}) + (58.86\text{ N})(3\text{ s})(0.2\text{ m})$$
$$= (6\text{ kg})(v_B)_2(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)[5(v_B)_2]$$
$$(v_B)_2 = 13.0\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 19-7(ادامه)

مثال 19.5

د شارپي اغیزی ټسټ (Charpy impact test) د موادو د ټسټ کولو لپاره کارول کیږي ترڅو د هغې د انرژي دجذب ځانګړتیاوې د اغیزی یا امپکت پر مهال معلومې کړي. دا ټسټ د پینجولم په کارولو سره ترسره کیږي چې په انځور 19-8a کې ښودل شوی، چې د m کتله، د کتلی مرکز په G کې، او د G ته د جایریشن شعاع k_G لري. د پین A څخه تر P پورې فاصله r_P معلومه کړئ چیرې چې د نمونې S سره د امپکت پر مهال د پین A افقي قوه تقریباً صفر وي. د محاسبې لپاره، فرض کړئ چې د ازموینې نمونه د پینجولم ټوله کینیاتیک انرژي جذبوي په هغه وخت کې چې دا لویږی او په دې توګه پینجولم د حرکت کولو څخه ودروي کله چې $q = 0^o$ وي.

حل

د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram) . لکه څنګه چې په ازاد بدن ډیاګرام کې ښودل شوی، انځور 19-8b ، د پوښتنې شرایطو سره اړتیا ده چې د A په ټکی کې افقي قوه صفر وي. د امپکت څخه مخکې، پینجولم د ساعت په لور زاویوي سرعت w_1 لري، او د پینجولم د کتلې مرکز چپ ته په $(v_G)_1 = \bar{r}w_1$ سره حرکت کوي.



انځور 19-8

د امپلس او مومنټم اصول (Principle of Impulse and Momentum) . مورږ به د زاویوي امپلس او مومنټم اصول په A ټکی کې پلی کړو. له دې امله

$$I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$(\curvearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 - \left(\int F\,dt\right) r_P = 0$$

$$m(v_G)_1 + \Sigma \int F\,dt = m(v_G)_2$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad -m(\bar{r}\omega_1) + \int F\,dt = 0$$

د امپکت $\int F\,dt$ له منځه وړل او ځای په ځای کولو د $I_A = mk^2_G + m\bar{r}^2$ لامل کیږي:

$$[mk_G^2 + m\bar{r}^2]\omega_1 - m(\bar{r}\omega_1)r_P = 0$$

د mw_1 فکتورول او د r_P لپاره د حل کولو په توګه، مورږ ترلاسه کوو

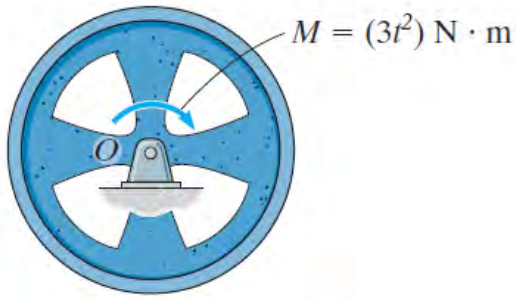
$$r_P = \bar{r} + \frac{k_G^2}{\bar{r}} \qquad Ans.$$

یادونه: داسې تعریف شوی چې د P ټکی د سخت ګذار مرکز (center of percussion) بلل کیږي. که چېرې د ټکر کولو نقطه P ته ځای پر ځای شي، نو په پین کی جوړه شوی قوه به ډیره کمه وی. ډیری سپورتي رکټونه، کلبونه او نور داسې ډیزاین شوي چې د ټکر نقطه د سخت ګذار مرکز کې واقع وي. له دی امله، د لوبغاړي په لاس کې هیڅ "درد" یا لږه حساسیت راځي .
(پوښتنه 17-66او 19-1 وګورى)

بنسټیز پوښتنې

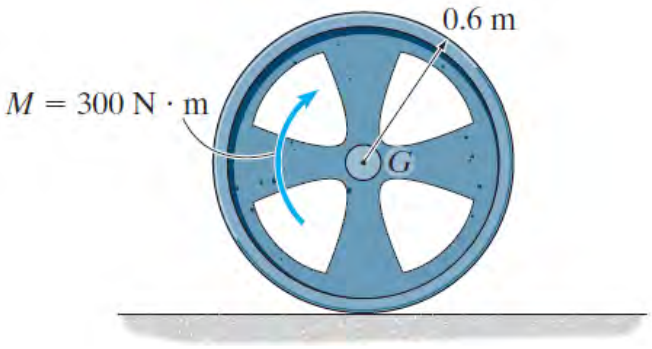
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 19-1 . یو 60 kg ویل لرو چې خپل مرکز O ته یې د جایریشن شعاع $k_O = 300$ mm ده. که چېرې $M = (3t^2)$ N . m کپل مومنټ وربانده پلی شی، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د ویل زاویوي سرعت کله چې $t = 4s$ وي او له دریدلي حالت نه پیل وکړی، معلوم کړئ.



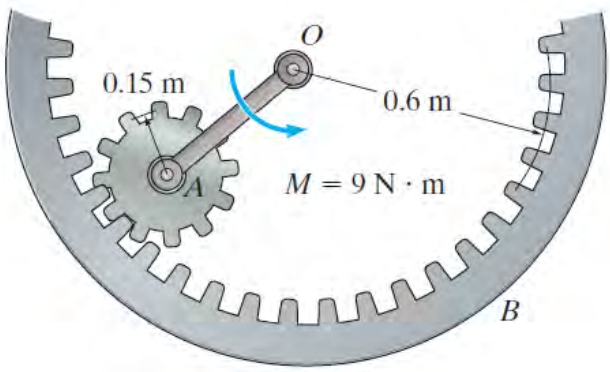
ب 19-01

ب 19-2 . د 300 kg ویل د کتلی مرکز G ته د جایریشن شعاع $k_G = 400$ mm لري. که په ویل باندی $M = 300$ N . m کپل مومنټ پلی شی او هیڅ ښویدل نه وي، نو د 6s وروسته، چې له دریدلی حالت نه پیل کوی، د هغه زاویوي سرعت معلوم کړئ. همدارنګه، د اصطکاک هغه قوه چې ځمکه په ویل پلیی کوي معلومه کړئ.



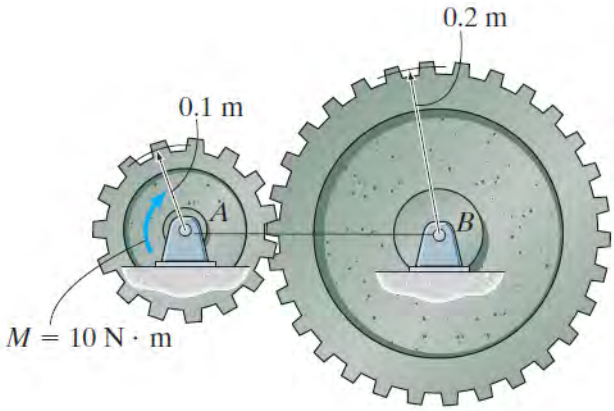
ب 19-02

ب 19-3 . که چېرې د نه حسابیدو کتلی لرونکي راد OA باندی $M = 9$ N . m کپل مومنټ پلی شی، نو د 10 کیلو ګرامه داخلي ګیر زاویوي سرعت وروسته له $t = 5s$ معلوم کړی کله چې له دریدلی حالت نه یې پیل کړی وی. ګیر د خپل کتلې مرکز ته د جایریشن شعاع $k_A = 100$ mm لري، او په ثابت بیروني ګیر B باندې رغړلي. حرکت په افقي سطحه کې ترسره کیږي.



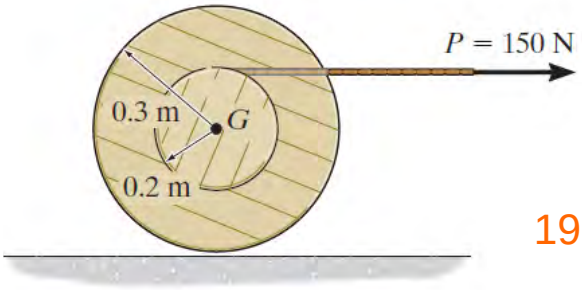
ب 19-03

ب 19-4 . د 10 kg او 50 kg ګيرونه A او B د خپلو اړوندو کتلو مرکزونو ته د جايريشن شعاعوی $k_A = 80$ mm او $k_B = 150$ mm لري. که په ګير A باندی $M = 10$ N . m کپل مومنټ له دريدلی حالت نه پلی شی، نو د ګير B زاويوي سرعت کله چې $t = 5$s وي، معلوم کړئ.



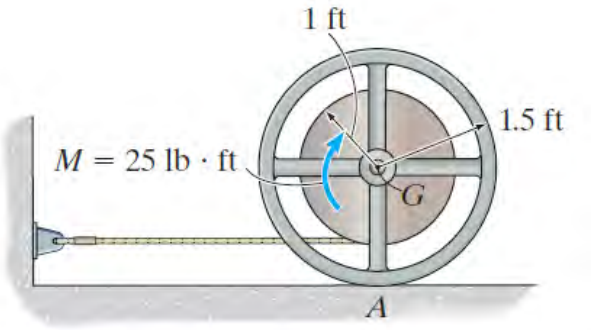
ب 19-04

ب 19-5 . 50 کيلو ګرامه ګوټک د افقي قوه $P = 150$ N لاندي دی. که ګوټک پرته له بنويدو ورغړی، نو له دريدلی حالت نه د هغې زاويوي سرعت وروسته له 3s ثانيو معلوم کړئ. د ګوټک د کتلی مرکز ته يی د جايريشن شعاع $k_G = 175$ mm ده.



ب 19-05

ب 19-6 . د دی لاندی ریيل تول 150 lb او د هغې د جاذبی مرکز ته یی د جایریشن شعاع $k_G = 1.25$ ft ده. که په دې باندی د $M = 25$ lb . ft تورک پلي شي، او کله چې تورک پلي شي دا له دریدلی حالت نه حرکت پیل کوي، نو 3s ثانیو وروسته د هغې زاویوي سرعت معلوم کړئ. د ریيل او افقي سطحی ترمنځ د کینټیک اصطکاک ضریب $m_k = 0.15$ دی.



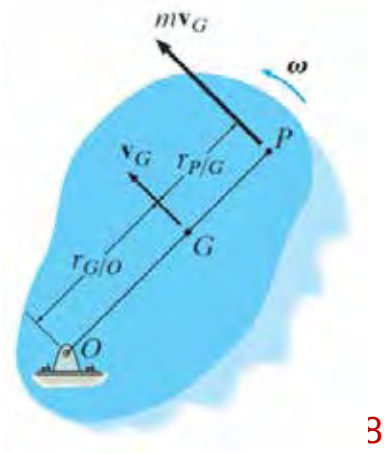
ب 19-06

پوښتنې

PROBLEMS

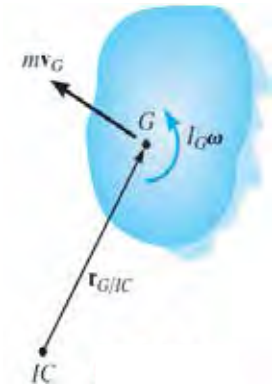
تول حلونه باید آزاد بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram) ولري

19-1 . د سخت بدن (تخته) چې کتله یې m ده په یوه محور چې له ثابت نقطې O څخه تېریږي په زاویوي سرعت ω سره څرخیږي. وښیی چې د ټول بدن ذراتو مومنټونه کولی شي د یوه واحد ویکتور په توګه څرګند شي چې د mv_G اندازه لري او د P نقطې له لارې عمل کوي، چې د پرکشن مرکز په نوم یادیږي او د کتلې مرکز G څخه په $r_{P/G} = k^2_G/r_{G/O}$ فاصله کې موقعیت لري. دلته k_G د بدن د جایریشن شعاع ده، چې په یوه محورمحاسبه شوی کوم چې د حرکت په سطحه عمود او له G تیریږي.



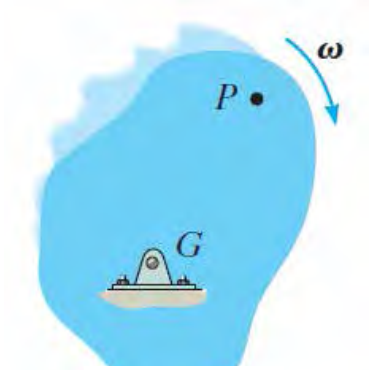
پ 19-3

19-2. په یوه ټاکل شوي لحظه کې، د بدن خطي مومنټ $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ او زاویوي مؤمنت $\mathbf{H}_G = I_G\mathbf{w}$ لري، چې د کتلې مرکز ته محاسبه شوي. وښیی چې د بدن زاویوي مومنټ کوم چې د صفر سرعت آني مرکز IC په اړه محاسبه کیږي، کیدی شی د $\mathbf{H}_{IC} = I_{IC}\mathbf{w}$ په بڼه څرګند شي، چیرې چې I_{IC} د بدن د انرشیایی مومنټ نمایندګي کوي چې د د صفر سرعت آني محور ته نیول شوی. لکه څنګه چې ښکاره شوي، IC د کتلې مرکز G څخه د $r_{G/IC}$ فاصله کې موقعیت لري.



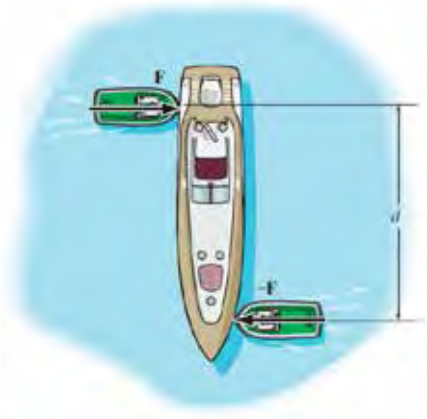
پ 18-2

19-3. دا لاندی یوه تخته په یوه ثابت محور ګرزی کوم چې عمود په تخته او د هغې د کتلې مرکز G څخه تېرېږي، وښیی چې زاویوي مومنټم یې د یوه بل ټکی P سره یو شان دی.



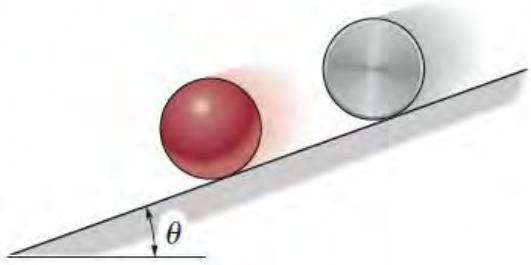
پ 18-3

19-4*. دوه ټګ بېړۍ هره یوه د بېړۍ پر مرکزي کرښه باندې تل عمود ی یوه ثابت قوه $\mathbf{F}$ پلیی کوی. که د بېړۍ کتله m وي او د کتلې مرکز G ته د جایریشن شعاع k_G ولري، نو د بېړۍ زاویوي سرعت د وخت t له مخی معلوم کړئ. بېړۍ په پیل کې په دریدلی حالت کې ده.



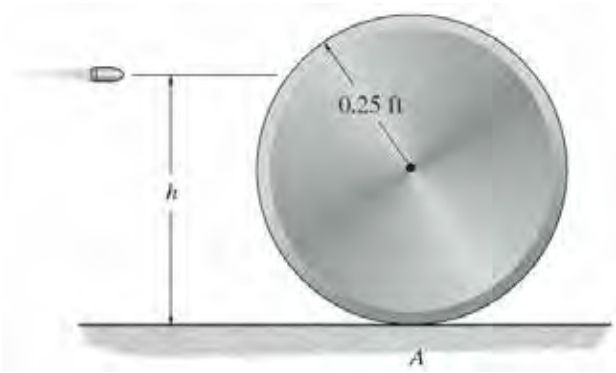
پ 19-4

19-5 . یوه کره (sphere) او سیلینډر له دریدلی حالت څخه په مایل سطحه باندې خوشې کیږي په $t = 0$. که هر یو کتله m او شعاع r ولري، نو د دوی زاویوي سرعتونه په t وخت کې معلوم کړئ. فرض کړئ هیڅ ښویدل نه کیږي.



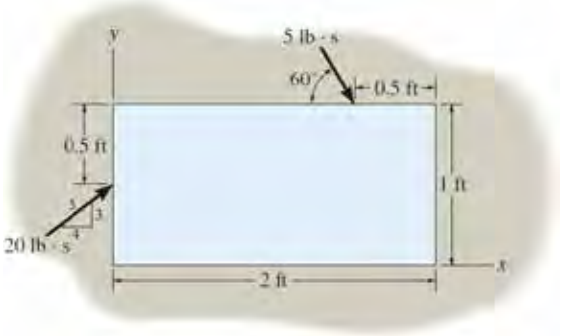
پ 19-5

19-6 . دا لاندی ښودل شوي لوړوالی h معلوم کړئ کوم چې په یوه 15 lb تول ډیسک باندی ګولی ولګی او لامل کیږی چی ډیسک ورغړي بی له ښویدو په ټکې A کی. *یادونه*: دا اړتیا لري چې په A نقطه کې د اصطکاک قوه په عمده توګه صفر وي.



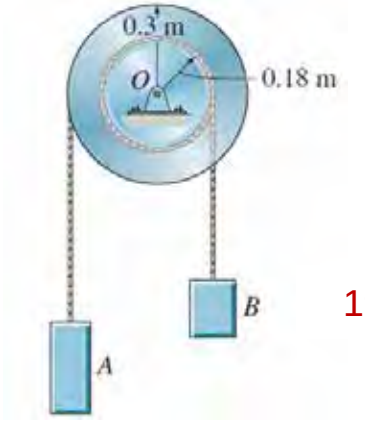
پ 19-6

19-7 .دا لاندی 10-lb مستطیلي تخته په یوه ښوی افقي غولی په دریدلی حالت کې پرته ده. که دی ته ښودلشوی افقي امپلسونو ورکړل شي، نو د هغې زاویوي سرعت او د کتلې د مرکز سرعت معلوم کړئ.



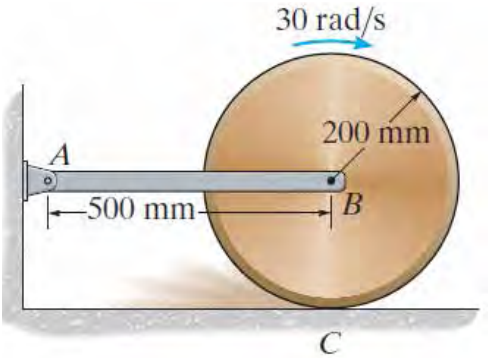
پ 19-7

*19-8 . ګوټک 30 kg کتله لري او د جايريشن شعاع يې $k_O = 0.25$ m ده. په انځور کې ښودل شوي بلاک A ، 25 kg کتله لري او بلاک B ، 10 kg کتله لري. که دوی له دريدلي حالت څخه خوشې شي، هغه وخت چې بلاک A ، 2 m/s سرعت ته رسيږي معلوم کړئ. د رسۍ کتله په پام کې مه نيسئ.



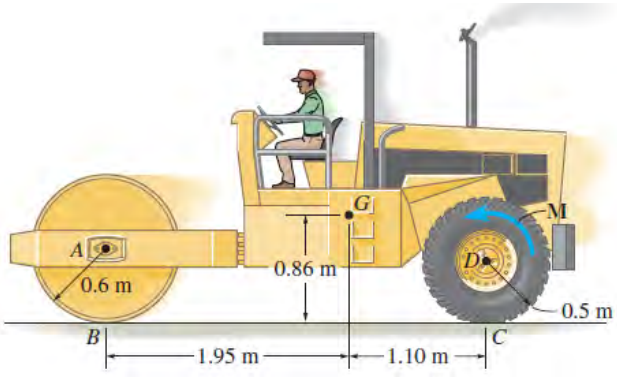
پ 19-8

19-9 . د 50 kg کيلو ګرامه سيلينډر کله چې د سطحې سره په ټکي C کې له ګې 30 rad/s زاويوي سرعت لري. که د کينټيک اصطکاک ضريب $m_C = 0.2$ وي، نو معلوم کړئ چې څومره وخت به ونيسي ترڅو سيلينډر له ګرزيدا ودريږي. په دې وخت کې څومره قوه په ټرونډ AB کې توليد کيږي؟ د سيلينډر محور د دوو متجانسو ټرونډونو سره ټرلی ده .(يوازې AB ښودل شوی). د ټرونډو تول له پامه وغورځوئ.



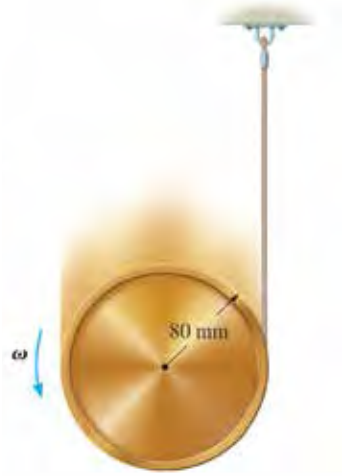
پ 19-9

19-10 . د رولر چوکات 5.5 Mg کتله لري اود کتلې مرکز يې G دي. رولر 2Mg کتله لري او د جايريشن شعاع يې د کتلې مرکز ته k_A =0.45 m دي. که يو $M = 600$ N.m کپل مومنټ د شا په ټيرو پلي شي، نو د کمپکټر تيزوالی په $t = 4$s کې معلوم کړئ، چې له دريدلی حالت نه پيل کيږي. هيڅ ښويدنه نه کيږي. د چلولو ټيرو کتله په پام کې مه نيسئ.



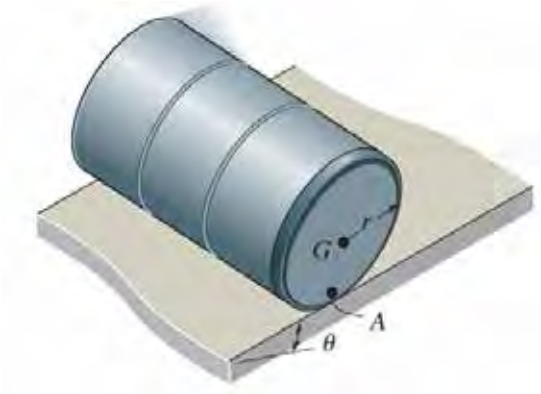
پ 19-10

19-11 . یو سیم چې کتله یې د پام وړ نه ده د یوه 2-kg ډیسک په بهرنی سطحه تاو شوي دی. که ډیسک له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د هغې زاویوي سرعت په 3 s ثانیو کی معلوم کړئ.



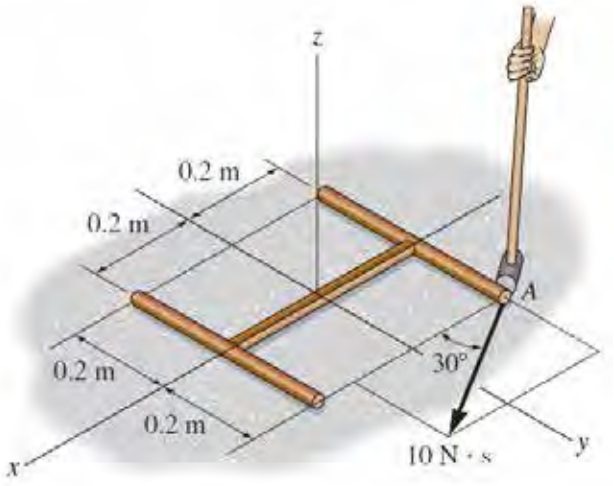
پ 19-11

*19-12 . د ډرم کتله m ، شعاع یې r او د جایریشن شعاع k_G لري، په یوه مایل سطحه باندې رغړی، چې د سټټیک اصطکاک ضریب μ_s دي. که ډرم له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د سطحی د میلان اعظمي زاویه q معلومه کړئ ترڅو دی پرته له له ښویدو ورغړی.



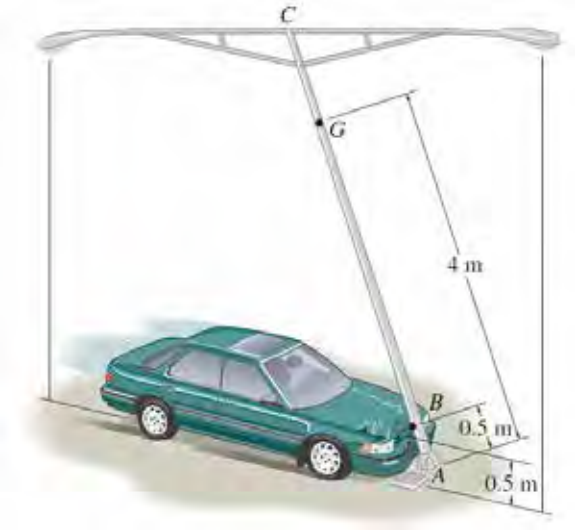
پ 19-11

19-13 . دا لاندی ښودل شوي ښوی راډ اسمبلۍ په دریدلی حالت کې ده او په سوټک په نقطه A کې په 10 N.s امپولس سره وهل کیږي. د اسمبلۍ زاویوي سرعت او د هغې د کتلې د مرکز د سرعت اندازه وروسته له دې چې وه وهل شی ومومئ. راډونه یو متر اوږده او 6 KG/m تول لري.



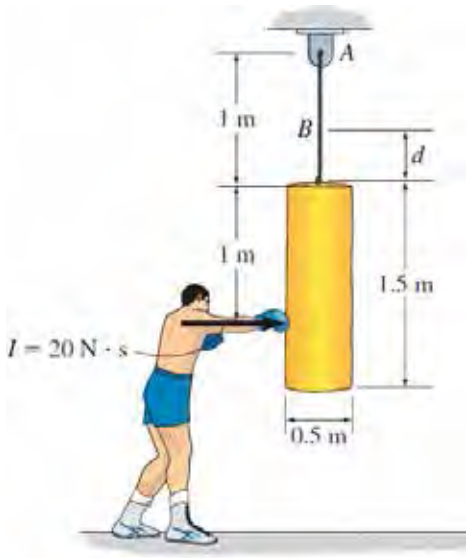
پ 19-13

19-14 . موټر د چراغ له یوې پایې سره ټکر کوي، پایه داسی ډیزاین شوی چې په لږ مقاومت سره له بنسټ څخه ماته شي. د ټکر له ویډیو څخه لیدل کیږي چې پایه AC چې په عمود ی حالت کی وه، هغی ته 60 rad/s زاویوي سرعت ورکړل شوي. پایه 175 kg کتله لری، او د کتلې مرکز یی په نقطه G کې دي ، او د جایریشن شعاع یی په هغه محور چې د پایې د اسمبلی به سطحه عمود او د G څخه تیریږي په اندازه د KG = 2.25m دي. هغه افقي امپلس پیداکړی چې موټریی په هغه شیبه کې پایې ته ورکوي کله چې AC په عمودي حالت کی وي.



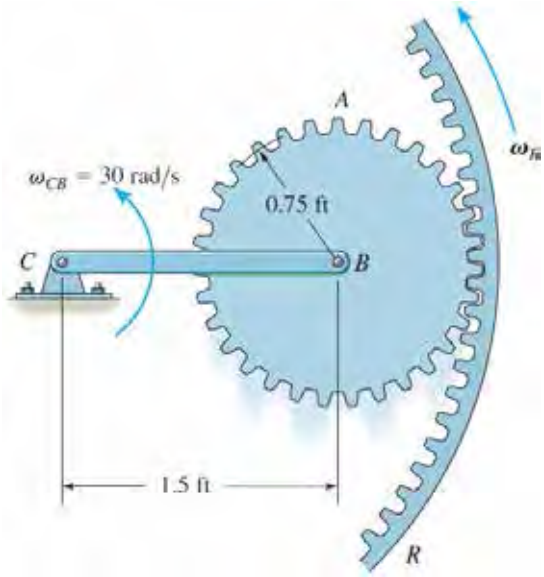
پ 19-14

19-15 . که یو بوکسرپه 75 kg د بوکس کڅوړه باندې د I =20 N .s امپلس وارد کړي، د کڅوړې زاویوي سرعت اندازه وروسته له دې چې وه وهل شی ومومئ. همدارنګه، د *B* نقطې موقعیت د *d* له مخی چی کڅوړه وربانډی څرخی معلوم کړی. کڅوړه د یوه عادی سلنډر په توګه وګڼئ.



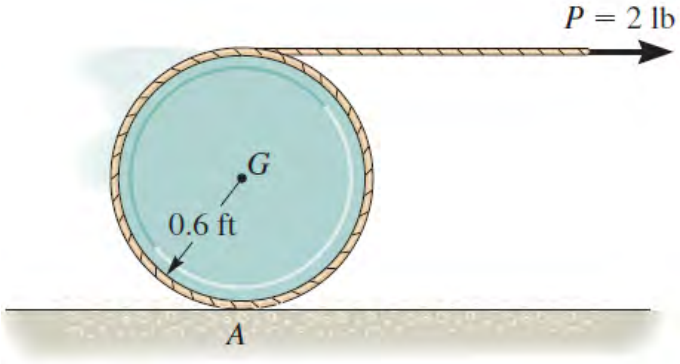
پ 19-15

*19-16 . ګیر *A* په داخلي سطحه د ګردې ګیر رک *R* چې د 2.25 ft شعاع لري ګرځي. که *A* د 4 lb توله او د جایریشن شعاع یې K_B = 0.5 ft وي، د هغې زاویوي مومنټم په نقطه *C* کې مشخص کړئ کله چې ω_{CB} = 30rad/s = او ω_R =0 (a) ، ω_R = 20 rad/s (b) وي.



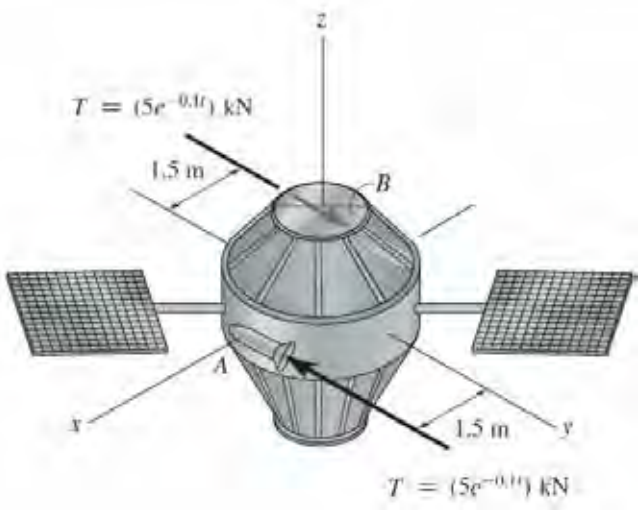
پ 19-16

19-17 . یوه نازکه رسۍ د 50 lb سلنډر شاوخوا تاو شوی او د هغې په پای یوه ثابته افقي قوه د $P = 2\text{lb}$ پلي شوی. که سلنډر په A کې له ښویدوپرته ورغړي ، د هغې زاویوي سرعت په 4 s کې مشخص کړئ کله چې له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کیږي. د رسۍ ضخامت له پامه وغورځوئ.



پ 19-17

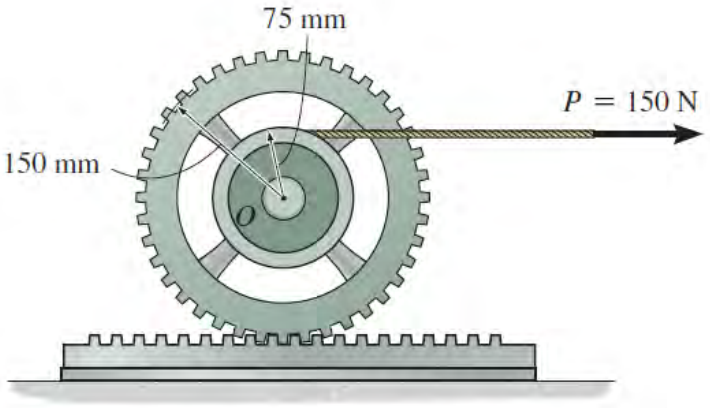
19-18 . د 200 kg مصنوعي سپوږمکۍ په مرکزی محور z د جایریشن شعاع $k_z = 1.25\text{m}$ لري. په پیل کې دا د $w_0 = \{1500\mathbf{k}\}\ \text{rev/min}$ زاویوي سرعت سره تاویږي. که د A او B دواړه جټونه ، کوم چې د x-y سطحه کې موقعیت لري ، په یوه وخت کې چالان شي او $T = (5e^{-0.1t})\ \text{kN}$ ټرسټ رامنځته کړي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د سپوږمکۍ زاویوي سرعت پنځه ثا نیې ورسته له هغه چې جټونه چالان شی معلوم کړی.



پ 19-18

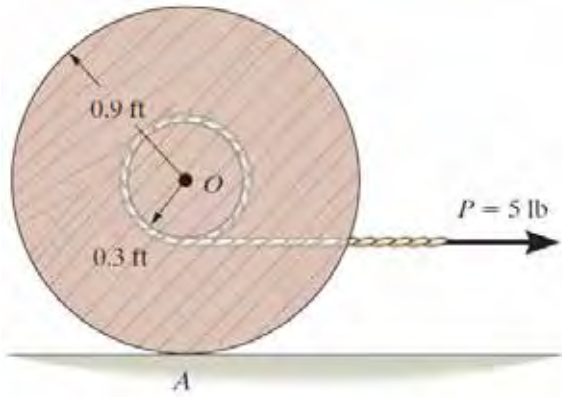
19-19 .که په رسۍ یوه افقي قوه د $P = 150\ \text{N}$ پلې شي، او د ګیر رک د افقي سطحې سره کلک ټرل شوی، د ګیر زاویوي سرعت په 4 s کې مشخص کړئ کله چې له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کیږي. د ګیر کتله 50 kg ، او د هغې د جایریشن شعاع د کتلې مرکز O ته $k_O = 125\text{mm}$ دي.

*19-20. که په رسۍ یوه افقي قوه د P =150 N پلي شي، او ګیر په یوه ثابت پن په O کې کلک ټرل شوی وی، د ګیر زاویوي سرعت، او د 20 kg ګیر رک سرعت په 4 s کې معلوم کړئ، کله چې له سکون څخه حرکت پیل کوي. د ګیر کتله 50 kg ده او د هغې د جایریشن شعاع k_O =125mm ده. فرض کړئ چې د ګیر رک او افقي سطحې ترمنځ تماس ښوې دی.



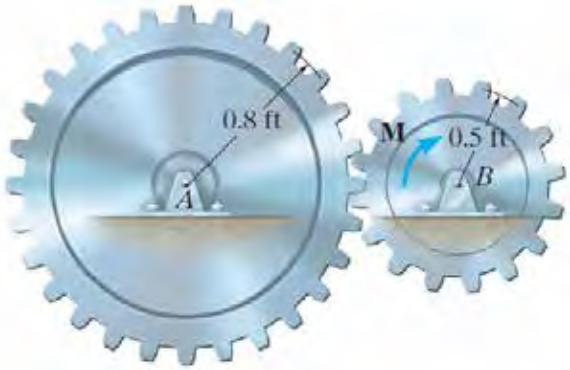
پ 19-19/20

19-21. دا لاندی ګوټک 30 lb تول لري او د جایریشن شعاع یې k_O =0.45 ft ده. یوه رسۍ د هغې د داخلي برخې شاوخوا تاو شوی او د هغې په پای یوه افقۍ قوه P = 5 lb پلي شوي. د ګوټک زاویوي سرعت په 4 s کې معلوم کړئ کله چې له سکون حالت څخه حرکت پیل کیږي. فرض کړئ چې ګوټک پرته له ښویدو رغړی.



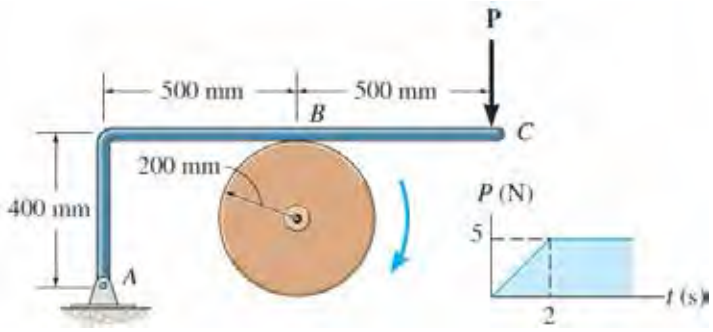
پ 19-21

19-21. د A او B دوه ګیرونه W_A = 15 lb اود جایریشن شعاع k_A = 0.5 ft او 10 lb W_B = او k_B = 0.35 ft د جایریشن شعاع په ترتیب سره لري. که یو موټور ګیر B ته $M = 2(1-e^{-0.5t})$ lb.ft کپل مؤمنت ورکړي، چیرې چې t په ثانیو کې وي، د A ګیر زاویوي سرعت په t =5 s کې معلوم کړئ کله چې حرکت له دریدلی حالت څخه پیل کیږي.



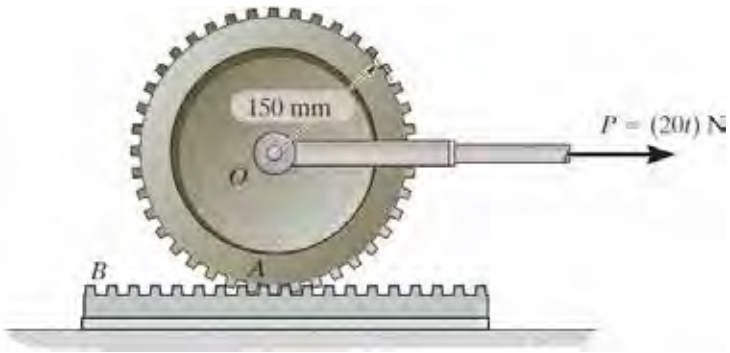
پ 19-22

19-23. دا لاندی ښودل شوی 12-kg کیلو ګرامه ډیسک زاویوي سرعت $w = 20$ rad/s لري. که د ABC بریک داسې تطبیق شي چې د P قوی شدت د وخت سره په ښودل شوي ډول بدلون مومي، هغه وخت معلوم کړئ چې ډیسک ودریږي. په B ټکی کې د کینتیک اصطکاک ضریب $m_k = 0.4$ دی. د بریک ضخامت له پامه وغورځوئ.



پ 19-23

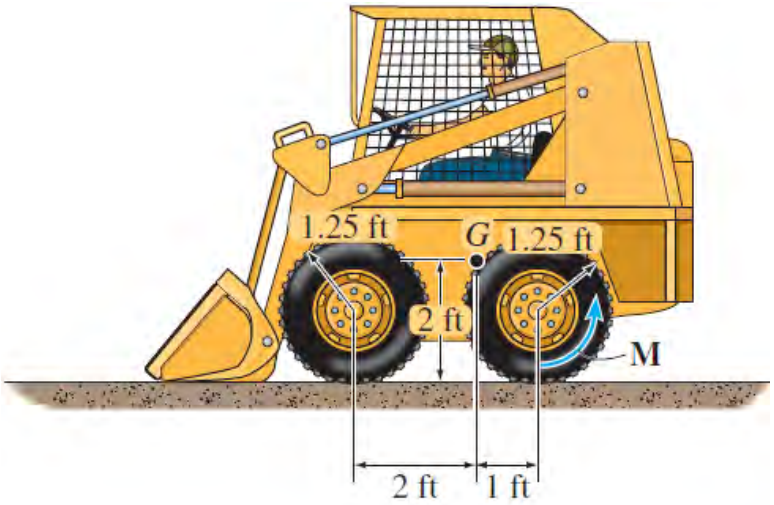
*19-24. په 30-kg کیلو ګرامه ګیر باندې یوه قوه $P = (20t)$N تطبیق شوی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. د ګیر زاویوي سرعت په $t = 4$ s کې معلوم کړئ، کله چې حرکت له دریدلی حالت څخه پیل کیږي. د ګیر رک B په افقي سطحه ټرلشوی، او د ګیر د جایریشن شعاع د کتلی مرکز O ته $k_o = 125$ mm ده.



پ 19-24

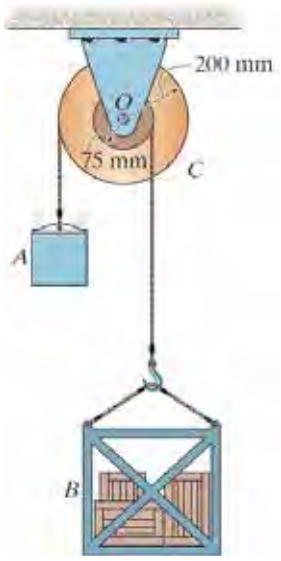
19-25. د سکيډ سټير لوډر بدن او بکټ 2000 lb تول لري، او د هغې د جاذبې مرکز په G کې موقعیت لري. هر یو د څلورو ټایرونو 100 lb تول لري او د هغې د جایریشن شعاع د جاذبې مرکزته 1 ft دي. که انجن هر یو د شا ډرایو ټایرونو ته $M = 100$ lb. ft تورک ورکړي، په t 10s =کې د لوډر سرعت معلوم کړئ، کله چې له دریدلی حالت څخه حرکت پیل کړی. ټایرونه پرته له ښویدو رغړی.

19-26. د سکيډ سټير لوډر بدن او بکټ 2000 lb تول لري، او د هغې دجاذبې مرکز په G کې موقعیت لري. هر یو د څلورو ټایرونو 100 lb تول لري او د هغې د جایریشن شعاع د جاذبې مرکز ته 1 ft دي. که لوډر په 10 s ثانیو کې له دریدلی حالت څخه 20 ft/s سرعت ته ورسیږي، د M تورک چې هر یو د شا ډرایو ټیرونو ته ورکول کیږی معلوم کړی. ټایرونه پرته له ښویدو رغړی.



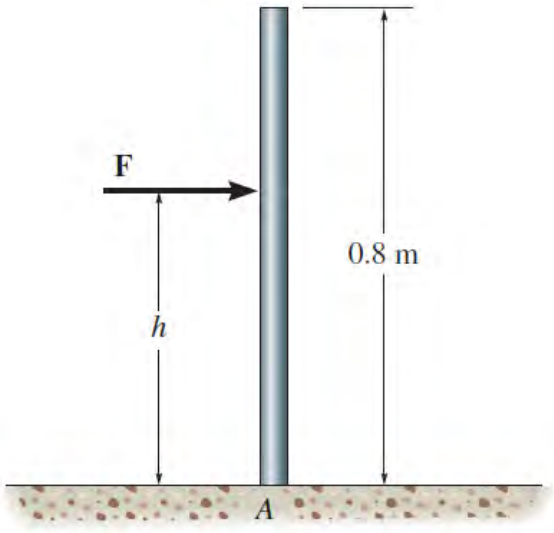
پ 19-25/26

19-27. دوه ګونی څرخکی له دوو څرخونو څخه جوړ شوی دی چې د یو بل سره ټرلی او په یوه ډول سره تاویږي. د څرخکی 15 kg کتله لری او د جایریشن شعاع یی $k_o = 110$ mm ده. که په A کې بلاک 40 kg کتله ولري او په B کې کانټینر او د هغې د منځپانګې سره 85 kg کتله ولري، د کانټینر تیزوالی په $t = 3$ s کې معلوم کړئ کله چې له دریدلی حالت څخه خوشې شي



پ 19-27

19-27 . يو نرۍ راډ چې 4 kg کيلو ګرامه کتله لري او لکه څنګه چې ښودل شوي دي په عمودي توګه په توازن کې دي. هغه لوړوالی *h* معلوم کړئ چې په افقي قوه F سره وه وهل شي او په ځمکه باندې ونه ښويږي. دا اړينه ده چې په *A* کې د اصطکاک قوه په حقيقت کې صفر وي.



پ 19-28

19.3 د مومنټم ساتنه (CONSERVATION OF MOMENTUM)

د خطي مومنټم ساتنه (Conservation of Linear Momentum) . که په

يو ځانګړي جهت کې د ټولو خطي امپلسونو مجموعه، په يوه ټرلي سخت جسماني سيستم باندې، صفر وي، نو د دې سيستم خطي مومنتم ثابت يا په دې جهت کې ساتل شوی دي. يعني:

$$\left(\sum \text{سيستم خطي مؤمنتم}\right)_1 = \left(\sum \text{سيستم خطي مؤمنتم}\right)_2 \qquad (19–16)$$

دې معادلې ته د ***خطي مومنتم د ساتنې معادله*** (conservation of linear momentum) ويل کيږي.

بې له دې چې په محاسباتو کې د پام وړ تېروتنې راوستل شي، ممکنه ده چې معادله (19–16) په يو ځانګړي لوري کې هم تطبيق شي، په کوم کې چې خطي امپلسونه (impulses) کوچنی يا غيرامپلسي (*non-impulsive*) وي. په ځانګړې توګه، غيرامپلسي قواوې هغه وخت رامنځته کيږي کله چې کوچني قواوې په ډېر لږ وخت کې عمل وکړي.

معمولي ببلګې کېدای شي د لږ بيځايه شوي فنر قوه، د نرمې ځمکې سره د لومړني تماس قوه، او په ځينو حالاتو کې د جسم تول شامل وي.

د زاويوي مومنټم ساتنه (Conservation of Angular Momentum)

د يوه ټرلي سختو اجسامو سيستم زاويوي مومنتم د سيستم د کتلې د مرکز G يا د يوه ثابت ټکي O په اړه هغه وخت ساتل کيږي، کله چې د دې ټکو په اړه د ټولو زاويوي امپلسونو مجموعه صفر يا د پام وړ کوچنی وي (غيرامپلسي). په دې حالت کې د (19–15) درېيمه معادله داسې کيږي:

$$\left(\sum \text{سيستم زاويوي مؤمنتم}\right)_{O1} = \left(\sum \text{سيستم زاويوي مؤمنتم}\right)_{O2} \qquad (19–17)$$

دې معادلې ته د زاويوي مومنتم د ساتنې معادله ويل کيږي.

د يوه سخت جسم په حالت کې، معادله 19-17 چې ټکي G کې تطبيق شوې وي، داسې کيږي :

$(I_G\mathbf{w})_1=(I_G\mathbf{w})_2$.

د ببلګې په توګه، يو لامبوزن په پام کې ونيسئ چې د ډايونګ بورډ څخه د ټوپ وهلو وروسته يو هوايي قلاب وهي. د هغه د مرکز د کتلې G په اړه زاويوي مومنتم ساتل کيږي، ځکه چې د هغه پايله لرونکی تول د همدې ټکي له لارې تېرېږي. کله چې هغه خپل لاسونه او پښې خپلې سينې ته نږدې کوي، د هغه د بدن انرشيايی مؤمنت (moment of inertia) کم کيږي او له همدې امله د هغه زاويوي سرعت زياتيږي (ځکه چې $I_G\mathbf{w}$ بايد ثابت پاتې شي). که هغه د اوبو ته له ننوتلو څخه مخکې خپل بدن مستقيم کړي، د هغه د بدن انرشيايی مؤمنت زياتيږي او په همدې توګه د هغه زاويي سرعت کميږي.

ځرنګه چې د هغه ټول د حرکت په جریان کې خطي امپولس (linear impulse) رامنځته کوي، دا بېلګه دا هم ښیي چې ځنګه د یوه جسم زاویوي حرکت ساتل کېدای شي، خو د خطي مومنټم ساتنه نه وي. دا ډول حالات هغه وخت رامنځته کېږي کله چې بهرني قواوې چې خطي امپلسونه رامنځته کوي، د جسم د کتلې مرکزیا له یوه ثابت دوراني محور له لارې تېرېږي.

د تحلیل کړنلاره PROCEDURE FOR ANALYSIS

د خطي یا زاویوي مومنټم د ساتنې تطبیق به د لاندې طرزالعمل په کارولو سره ترسره کېږي:

د آزاد-بدن ډیاګرام (Free-Body Diagram).

1. د *x* او *y* اینرشیای چوکاټ جوړ کړئ او د جسم یا د جسمونو سیسټم لپاره د ټکر په وخت کې د آزاد-بدن ډیاګرام رسم کړئ. د دې ډیاګرام څخه، ټولې تطبیق شوي قواوې به "امپولسی (impulsive) " یا "غیرامپولسي (non-impulsive) " په توګه وښودلشی.
2. د آزاد-بدن ډیاګرام په کتنه سره، د خطي مومنټم ساتنه په هغه لوري کې تطبیق کیږی چیرته چې په جسم یا سیسټم باندې هیڅ بهرني امپولسی قواوې عمل نه کوي. د زاویوي مومنټم ساتنه هغه وخت تطبیق کړئ کله چې ټول بهرني امپولسی قواوې د ثابت ټکي *O* یا د جسم د کتلې مرکز *G* په اړه صفر مومنټ یا صفر زاویوي امپلس رامنځته کړي.
3. بدیل ټګلاره دا ده د جسم یا د جسمونو سیسټم لپاره د امپلس او مومنټم ډیاګرامونه رسم کړئ. دا ډیاګرامونه په ځانګړې توګه ګټوردي کله چې د زاویوي مومنټم ساتنې معادله کې د "مومنټ "اصطلاحات لیدل غواړئ، په ځانګړې توګه که زاویوي مومنټونه د جسم د کتلې د مرکز *G* پر ځای په بل ټکي کې محاسبه کېږي.

د مومنټم ساتنه (Conservation of Momentum)

1. خطي یا زاویوي مومنټم ساتنه په مناسبو جهتونو کې تطبیق کړئ.

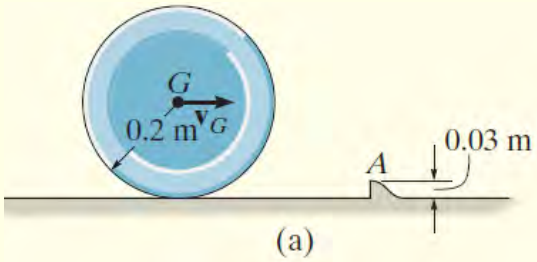
کینیماتیک (Kinematics)

1. که حرکت پیچلی ښکاري، د کینیمتیک (سرعت) ډیاګرامونه ګټور کېدای شي ترڅو اړینې کینیماتیکي اړیکې ترلاسه شي.

مثال 19.6

مثال

په انځور 19-9a کې ښودل شوی 10kg څرخ انرشیای مؤمنت $I_G = 0.156 kg.m^2$ لري. که چیرې دا څرخ ښویدنه او په شا تګ (rebound) ونه کړي ، نود هغه لږ تر لږه سرعت $\mathbf{v}_G$ وټاکئ ترڅو د مانع A څخه تیر شي.



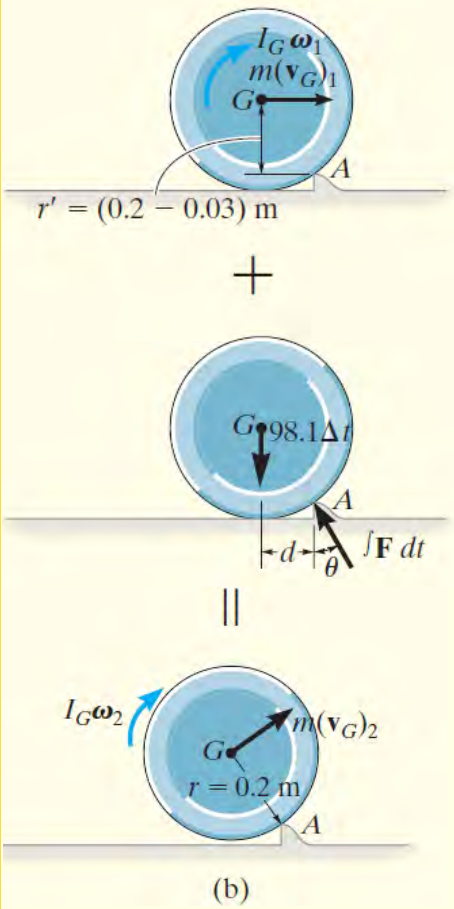
(a)

حل:

د امپلس او مؤمنتم ډیاګرامونه (Impulse and Momentum Diagrams):

څرنګه چې هیڅ ښویدنه یا په شا تګ نه کیږي، څرخ اساساً په A نقطه باندې اتکا یا (pivots) جوړوی. دا حالت په انځور 19-9b کې ښودل شوی، چې په ترتیب سره ښیي، د څرخ مومنتم له امپکت مخ کې، څرخ ته دامپلسونوورکول د امپکت په وخت کې، او د څرخ مومنتم وروسته له امپکت نه. یوازې دوه امپلسونه (قواوی) په څرخ عمل کوي. د پرتله کولو له مخې، قوه چې په A باندې عمل کوی د تول په پرتله ډیره لویه ده، اوځرنګه چې د ټکر وخت خورا لږ دی، تول د نا امپولس په توګه ګڼل کیدی شي. په A باندې د امپولس قوه $\mathbf{F}$ مجهوله اندازه او مجهول جهت q لري. مورږ کولی شو دا قوه له تحلیل څخه حذف کړو ځکه چې زاویوی مومنتم په A کی اساساً خوندي دي ځکه چې

$$(98.1\ \Delta t)d \approx 0$$



(b)

د زاویوي مومنتم ساتنه (Conservation of Angular Momentum):

انځور 19-9

د انځور 19-9b ته په کتنه لیکلی شو

$$(\curvearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

$$(0.2\ \text{m} - 0.03\ \text{m})(10\ \text{kg})(v_G)_1 + (0.156\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_1) =$$

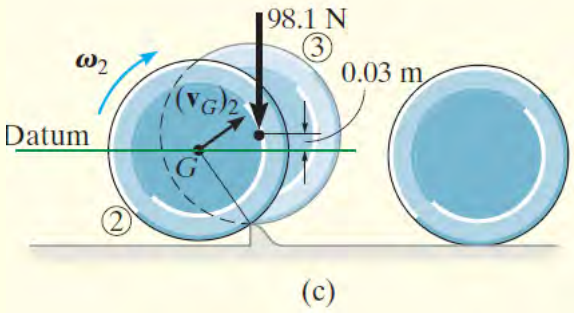
$$(0.2\ \text{m})(10\ \text{kg})(v_G)_2 + (0.156\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_2)$$

کینمټیکس (Kinematics):

څرنګه چې هیڅ ښویدنه نه پیښیږي، په عمومي ډول $w = v_G/r = v_G/0.2m = 5v_G$.
دا په پورتنۍ معادله کې ځای په ځای کوو او له ساده کولو وروسته لاندې نتیجه ورکوي :

$$(v_G)_2 = 0.8921(v_G)_1 \qquad (1)$$

د انرژۍ ساتنه* (Conservation of Energy) :



(c)

د دې لپاره چې څرخ له خنډ څخه تیر شي، لکه چې په انځور 19-9c کې ښودل شوي څرخ باید موقعیت 3 ته ورسیږي. له همدې امله، که $(v_G)_2$ یا $(v_G)_1$] باید لږ تر لږ وي، دا اړینه ده چې د څرخ کینیټیکي انرژۍ په موقعیت 2 کې د موقعیت 3 د پوتنټیل انرژۍ سره برابره وي. دیتم د جاذبې مرکز له لارې اینښودل کیږي، لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوی، او د انرژۍ د ساتنې معادله پلي کوو، مور لرو

$$\{T_2\} + \{V_2\} = \{T_3\} + \{V_3\}$$
$$\left\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}(0.156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2^2\right\} + \{0\} = \{0\} + \{(98.1\text{ N})(0.03\text{ m})\}$$

په دې معادله کې، معادله 1 او $w_2 = 5(v_G)_2$ ځای په ځای کوو او حل یې دا په لاس راکوي

$$(v_G)_1 = 0.729\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

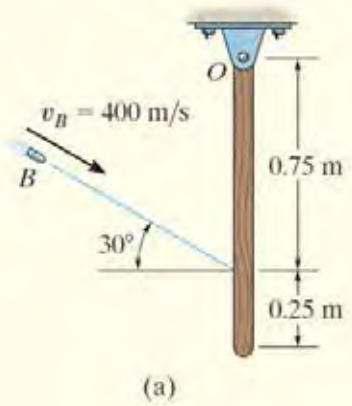
*دا قاعده د امپکت په جریان کې نه پلي کیږي، ځکه چې په امپکت کې انرژي له منځه ځي. خو، د امپکت وروسته، لکه څنګه چې په انځور 19-9c کې ښودل شوی، دا قاعده کارول کیدی شي.

مثال 19.7

په انځور 19-10a کې یو 5-kg نری تیوب ښودل شوی ، چې په O کې پین دی او په پیل کې په دریدلی حالت کې دی. که چیرې 4-g مرمۍ په 400 m/s سرعت سره ولګیږي، لکه څنګه چې په انځور کې ښودل شوی. د تیوب زاویوي سرعت وټاکئ وروسته له دې چې مرمۍ په تیوب کې ننوزي.

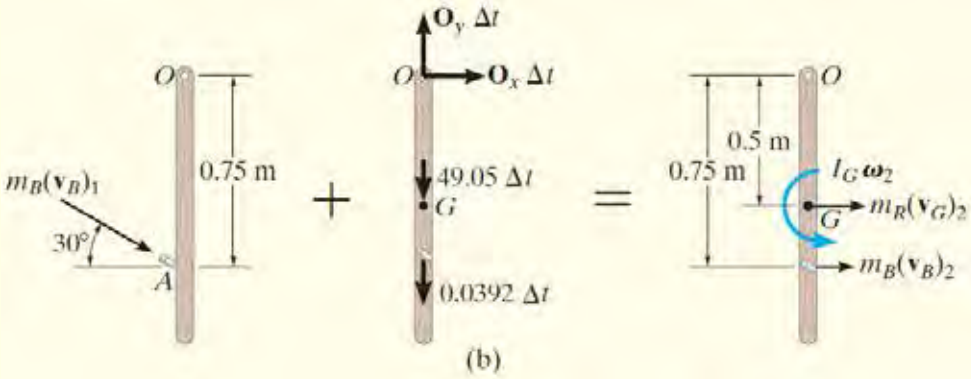
حل:

د امپلس او مؤمنټم ډیاګرامونه (Impulse and Momentum Diagrams):



انځور 19-10

که چیرې مرمۍ او ټیوب د یوه واحد سیسټم په توګه وکتل شي نو بیاهغه امپلس چې مرمۍ یې په ټیوب باندې وارده وی، د تحلیل څخه له منځه وړل کیدی شي. د اصولو د وضاحت لپاره، د امپلس او مومنټم ډیاګرامونه په انځور 19-10b کې ښودل شوي دي. د مومنټم ډیاګرامونه د امپکت څخه یوه احظه مخکې او وروسته رسم شوي دي. لکه څنګه چې د امپولس ډیاګرام کې ښودل شوی، خارجي امپولسونه په O نقطه کې د ریکشنونو او د مرمۍ او ټیوب د تولونو له خوا رامنځته کیږي. لکه څنګه چې د امپکت وخت Δt خورا کم دی، ټیوب یوازې لږ مقدار حرکت کوي، نو د تول امپلسونو "مومنټ" په O نقطه کې اساسا صفر دي. له دې امله زاویوی مومنټم د دې نقطې په اړه خوندي دي.



د زاویوي مؤمنټم ساتنه (Conservation of Angular Momentum) . له انځور 19-10b څخه موږ لرو

$$(\circlearrowleft +) \qquad \Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2$$

$$m_B(v_B)_1 \cos 30°(0.75\text{ m}) = m_B(v_B)_2(0.75\text{ m}) + m_R(v_G)_2(0.5\text{ m}) + I_G\omega_2$$

$$(0.004\text{ kg})(400\cos 30°\text{ m/s})(0.75\text{ m}) =$$

$$(0.004\text{ kg})(v_B)_2(0.75\text{ m}) + (5\text{ kg})(v_G)_2(0.5\text{ m}) + \left[\tfrac{1}{12}(5\text{ kg})(1\text{ m})^2\right]\omega_2$$

یا

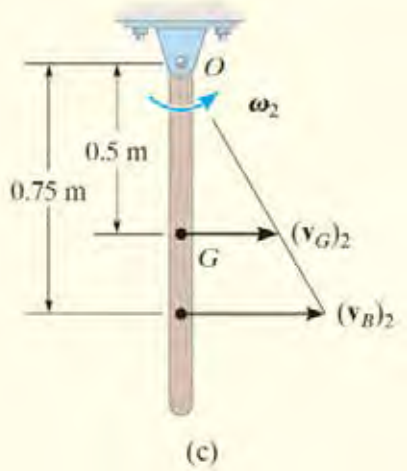
$$1.039 = 0.003(v_B)_2 + 2.50(v_G)_2 + 0.4167\omega_2$$

کینمټیکس (Kinematics): څرنګه چې ټیوب په O کې پین دی، له انځور 19-10c څخه موږ لرو

$$(v_G)_2 = (0.5\text{ m})\omega_2 \quad (v_B)_2 = (0.75\text{ m})\omega_2$$

داړه پورتنۍ معادله کې ځای پرځای کوو چې حل کول یې لاندې نتیجه ورکوي

$$\omega_2 = 0.623\text{ rad/s}\curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$



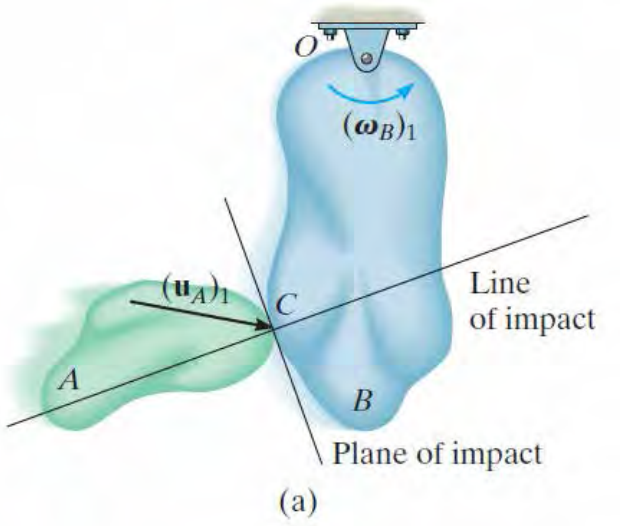
انځور 19-10

19.4 . غیر مرکزي ټکر (ECCENTRIC IMPACT)

د ذرو د مرکزي او مایل امپکت مفاهیم په 15.4 برخه کې وړاندې شوي وو. اوس به موږ دا بحث وغځوو او د دوو اجسامو غیر مرکزي امپکت بحث به وکړو. غیر مرکزي امپکت هغه وخت پیښیږي کله چې د دوو اجسامو د کتلې مرکزونو ترمنځ کرښه د امپکت د کرښې سره سمون نه لري.* دا ډول امپکت هغه وخت پیښیږي کله چې یو یا دواړه جسمونه وه نه شی کړی چې د یوه ثابت محور پر شاوخوا تاوشی.

د بیلګې په توګه، په انځور 19-11a کې د A او B جسمونو ترمنځ په C ټکی کې امپکت وګورئ. دا فرض کیږي چې د امپکت څخه مخکې B د زاویوی سرعت $(\mathbf{w}_B)_1$ سره د ساعت په

مخالف سمت څرخیږی، او د تماس نقطه C چې په A باندې موقعیت لري د سرعت $(\mathbf{u}_A)_1$ سره روانه ده. د دواړو اجسامو د کینیمتیک ډیاګرامونه د امپکت څخه مخکې په انځور 19-11b کې ښودل شوي دي.



دلته اجسام ښوي دي، نو هغه امپلس قوی چې دوی پر یو بل باندې واردوی د امپکت د کرښې په اوږدو کې وي. له همدې امله، د C نقطې د سرعت جز چې د B په جسم باندې دی، چې د امپکت د کرښې په اوږدوالی دی، $(v_B)_1 = (v_B)_1 r$ دی، انځور 19-11b . په ورته توګه، په A جسم باندې د سرعت جز $(\mathbf{u}_A)_1$ د تماس د کرښې په اوږدو کې $(\mathbf{v}_A)_1$دی. د دې لپاره چې امپکت رامنځته شي، باید $(v_A)_1 > (v_B)_1$ وي.

د امپکت په جریان کې، د دواړو اجسامو ترمنځ یو برابر خو مخالف امپلسی قوه $\mathbf{P}$ واردیږی چې د تماس په نقطه کې د دوی شکلونه بدلیږي. د دې بدلون امپلس د دواړو اجسامو لپاره په امپلس ډیاګرامونو کې ښودل شوی دی، انځور 19-11c . برسېره پر دې، د تماس په نقطه C کې په څرخیدونکي جسم باندې دامپلس قوه د O په نقطه کې د پین ریکشنونه رامنځته کوي. په دې ډیاګرامونو کې دا فرض کیږي چې دا امپلسونه د اجسامو د غیر امپلسي تولونو په پرتله ډیرې لویې دي، چې نه دی ښودل شوی. کله چې په نقطه C کې بدلون اعظمي شي، نو په دواړو اجسامو کې Cنقطه د امپکت د کرښې په اوږدو کې یو ګډ سرعت $\mathbf{v}$ لري، انځور 19-11d وګورئ. بیا د بیا رغونې (restitution) مرحله پیښیږي چې په هغې کې اجسام هڅه کوي خپل اصلي شکلونه بیرته ترلاسه کړي. د بیا رغونې مرحلې د دواړو اجسامو ترمنځ یو برابر خو مخالف د بیا رغونې امپلس رامنځته کوي لکه څنګه چې په امپلس ډیاګرام کې ښودل شوی، انځور 19-11e. وروسته له بیا رغونې څخه، اجسام له یو بل لرې کیږی چې په B جسم کې C نقطه د سرعت $(\mathbf{v}_B)_2$ او په A جسم کې C نقطه د سرعت $(\mathbf{u}_A)_2$ سره حرکت کوي، انځور 19-11f ، چیرې چې $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

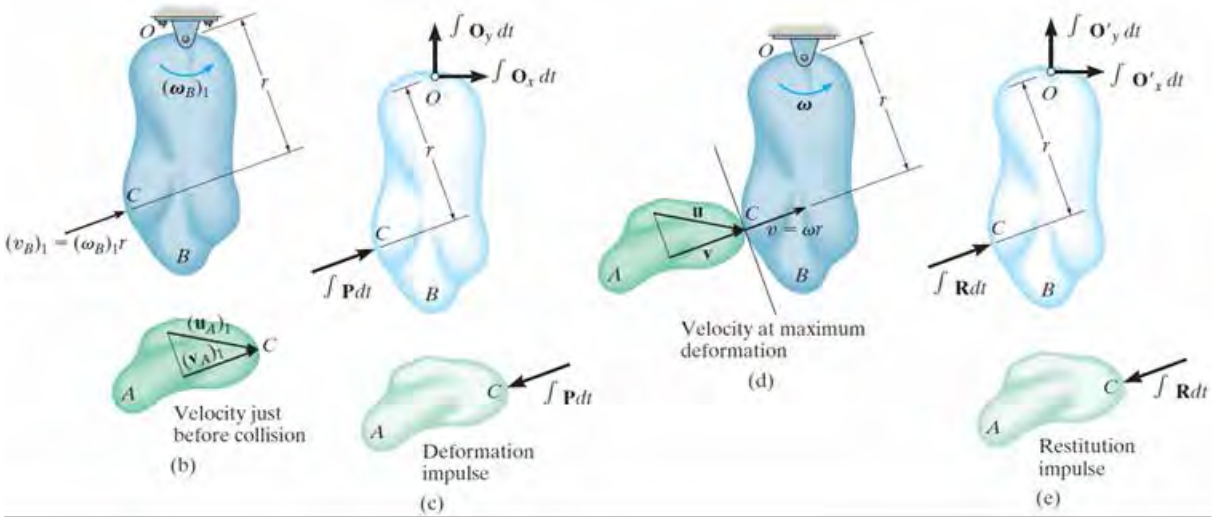
عمومًا، د دوو اجسامو د امپکت مسله لپاره د دوو مجهولونو پیدا کولو لپاره اړتیا لري ، تر څو دا دوه مجهوله $(v_A)_2$ او $(v_B)_2$ پیدا شي، او دا فرض کیږي چې $(v_A)_1$ او $(v_B)_1$ معلوم وي. د داسې ستونزو د حل لپاره باید دوه معادلې ولیکل شي. لومړی معادله عموماً د زاویوي مومنتم د ساتنې د قاعدې پلي کولو سره تړاو لري. د مثال په توګه، د اجسامو A او B په حالت کې، زاویوي مومنتم په O نقطه کې خوندي کیږي ځکه چې په C کې امپلسونه د سیستم دننه دي او امپلسونه په O کې صفر مؤمنت ایجاد وي (یا صفر زاویوي امپلس) په O رامنځته کوي. دویمه معادله د بیا رغونې

ضریب، e، په تعریف سره ترلاسه کیدی شي، کوم چې د بیا رغونې د امپلس او د بدلون د امپلس نسبت دی .



دا د غیر مرکزي امپکت یوه بیلګه ده چې د دې بولینګ بال او پین ترمنځ رامنځته کیږي.

*کله چې دا کرښې سره یو ځای شي، مرکزي امپولس رامنځته کیږي او ستونزه د دې په خیر تحلیل کیدی شي لکه څنګه چې په 15.4 برخه کې بحث شوی دی



د اصلاح شوې بیا رغونې (restitutive coefficient) معادلې د ټاکلو لپاره، موږ به لومړی د زاویوي امپولس او مومنتم اصول O ټکی ته په جسم B کې پلي کړو. د امپکت څخه مخکې وخت نه تر هغه ځایه چې اعظمي بدلون ومومي، دوام ورکړو، انځورونه 19-11b, 19-11c او 19-11d ، موږ لرو:

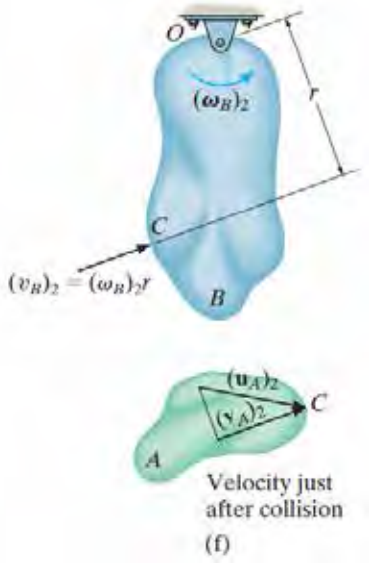
$$(\downarrow+) \qquad I_O(\omega_B)_1 + r\int P\,dt = I_O\omega \qquad (19–18)$$

دلته I_O انرشیایی مؤمنت د بدن B د O تکی ته دي. په ورته توګه، د زاویوي امپلس او مومنتم اصول د اعظمي بدلون لحظی څخه تر امپکت وروسته وخت ته پلي کوو، له انځورونو 19-11d, 19-11e او 19-11f څخه لاندې معادله وړاندې کیږي:

$$(\circlearrowleft +) \qquad I_O\omega + r\int R\,dt = I_O(\omega_B)_2 \qquad (19–19)$$

د معادلو 19-18 او 19-19 حل کوو د $\int Pdt$ او $\int Rdt$ لپاره په ترتیب سره، او د e فورمول لپاره دا لاندی په لاس راځي:

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{r(\omega_B)_2 - r\omega}{r\omega - r(\omega_B)_1} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$



په همدې ډول، موږ کولی شو یو معادله ولیکو چې د بدن A د سرعت $(v_a)_1$ او $(v_a)_2$ اندازه ګاني اړیکه لري. نتیجه داسې ده

$$e = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

د پورته دوه معادلو ترکیب کول د مشترک سرعت v له منځه وړلو سره د مطلوبې نتیجې سبب کیږي، یعنې:

$$(+\nearrow) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}} \qquad (19–20)$$

دغه معادله د معادلې 11-15 سره یو شی ده، چې د دوو ذراتو ترمنځ د مرکزي امپکت لپاره تر لاسه شوې وه. دا وایي چې د بیا رغونی ضریب (restitutive coefficient) مساوی دی په

نسبت د نسبی سرعت د جلا کولو د تماس د ټکیو (C) پس له امپکټ نه او نسبي سرعت سره چی ذری یو بل ته نیږدی کیږی یوازی د امپکټ نه مخ کی. د دې معادله د لاسته راوړلو د پاره، موږ فرض کړل چې د دواړو بدنونو د تماس نقطې د امپکت نه مخکې او وروسته دواړه پورته او ښي لوري ته حرکت کوي. که د تماس کومه نقطه کښته او کین لوري ته حرکت وکړي، نو د دې نقطې سرعت باید په معادله 20-19 کې منفي مقدار وپیژندل شي.

خو، دا مهمه ده چې پوه شو، چې دغه تحلیل په انجنیرۍ کې یوه ډېره محدوده غوښتنه لري، ځکه چې د e ارزښت دغږ مرکزي امپکت لپاره ډیر حساس دی چی د موادو، هندسې، او د امپکت کوونکو بدنونو د سرعت سره تړاو لری.

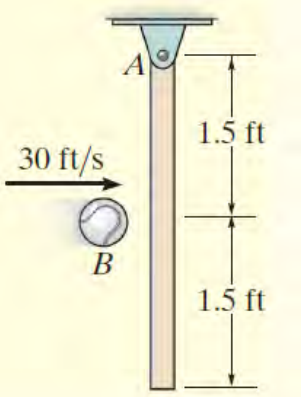




د امپکت پر مهال، د ډېرو لویو لارو د نښو ستنې د دې لپاره ډیزاین شوي چې د خپلو اتکاوو څخه وځی او په اسانۍ سره د خپلو ګنډوکی ماتی شي. دا د هغوی په بنسټ کې د سلاټ شوي اړیکو او د ستنې په منځنۍ برخه کې د پوره پرې کیدنو لخوا ښودل شوي دي.

مثال 19.8

یوه 10 lb نری ډنډه د A په ټکی کی له پین څخه ځوړند شوي ده، انځور 19-12a . که یو 2-lb پونډه توپ B د ډنډې په مرکز کی په 30 ft/s سرعت سره وویشتل شي، نو د امپکت وروسته د ډنډې زاویوي سرعت معلوم کړئ. د بیرته عادی کیدو ضریب (restitutive coefficient) e =0.4 دی.



(a)

انځور 19-12

حل :

د زاویوي حرکت ساتنه (Conservation of Angular Momentum). که مور توپ او ډنډه د یوه واحد سیستم په توګه وګڼو، انځور 19-12b ، نو د نقطې A په اړه زاویوي مومنتم ساتل کیږي ځکه چې د ډنډې او توپ ترمنځ امپلسي قوه داخلي ده. همدارنګه، د توپ او ډنډې تولونه غیر امپولسي دي. که مور د توپ او ډنډې د سرعتونو سمتونه، چې د امپکت وروسته په کینماتیک ډیاګرام ښودل شوي،انځور 19-12c ، نو مور اړتیا لروچې

$$(\circlearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m_B(v_B)_1(1.5\text{ ft}) = m_B(v_B)_2(1.5\text{ ft}) + m_R(v_G)_2(1.5\text{ ft}) + I_G\omega_2$$

$$\left(\frac{2\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(30\text{ ft/s})(1.5\text{ ft}) = \left(\frac{2\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_B)_2(1.5\text{ ft}) +$$

$$\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_G)_2(1.5\text{ ft}) + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(3\text{ ft})^2\right]\omega_2$$

څرنګه چې $(v_G)_2 = 1.5\ w_2$ نو بیا

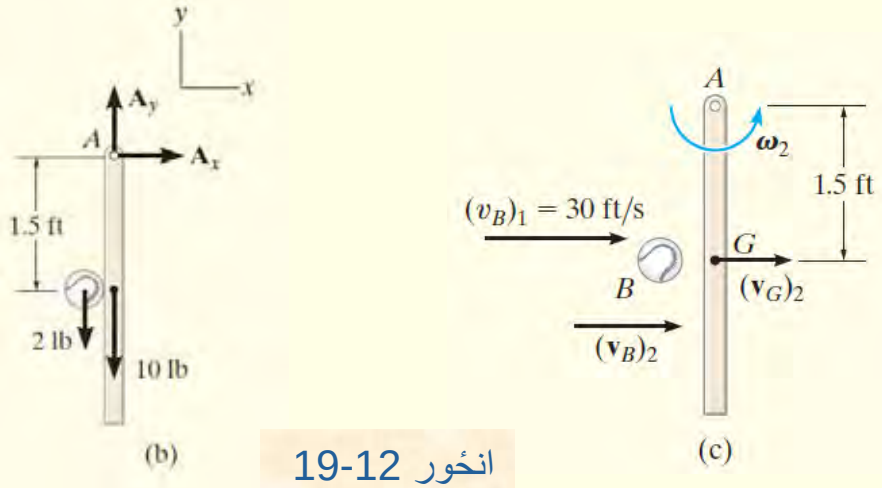
$$2.795 = 0.09317(v_B)_2 + 0.9317\omega_2 \qquad (1)$$

د بیرته عادی کیدو ضریب (Coefficient of Restitution).

د انځور 19-12c، له مخی موږ لرو

$$(\pm) \qquad e = \frac{(v_G)_2 - (v_B)_2}{(v_B)_1 - (v_G)_1} \qquad 0.4 = \frac{(1.5\text{ ft})\omega_2 - (v_B)_2}{30\text{ ft/s} - 0}$$

$$12.0 = 1.5\omega_2 - (v_B)_2 \qquad (2)$$



انځور 19-12

معادلی 1 او 2 حل کوو، لاندی په لاس راځی

$$(v_B)_2 = -6.52\text{ ft/s} = 6.52\text{ ft/s} \leftarrow$$

$$\omega_2 = 3.65\text{ rad/s} \curvearrowleft \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

PROBLEMS

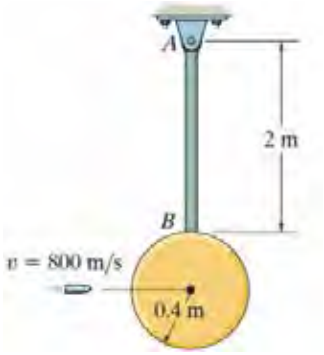
19-29 . د ریکارډ پلیر ټرن ټیبل T ، 0.75 kg کتله او د جایریشن شعاع یې $k_z = 125$ mm ده. دا په $w_T = 2$ rad/s سرعت سره په آزادانه توګه ګرځي کله چې یو 50-g ګرامه ریکارډ (نرۍ ډیسک) پرې رالویږي. د ټرن ټیبل زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې رکارډ په ټرن ټیبل باندې له ښویدو وډیږي.



پ 19-29

19-30 . یوه 10-g ګرامه ګولۍ چې سرعت یې 800 m/s دی، په 5-kg کیلوګرامه ډیسک ویشتل شویی، لکه څنګه چې په لاندې انځور کې ښودل شوي ده. کله چې ګولۍ په ډیسک ننوزي د ډیسک زاویوي سرعت معلوم کړئ. همدارنګه، هغه زاویه q محاسبه کړئ چې ډیسک په ټال کې وډیږي. ډیسک لمړۍ په دریدلی حالت کې دی. د راډ AB کتله او د داخل شوي ګولۍ اخرنۍ زاویوي مومنتم له پامه وغورځوی.

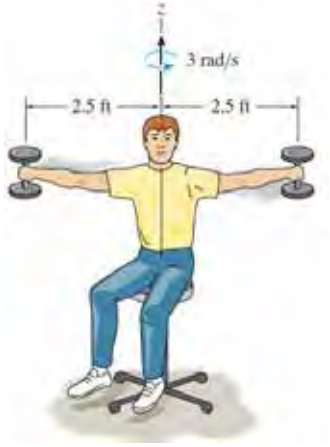
19-31 . یوه 10-g ګرامه ګولۍ چې سرعت یې 800 m/s دی، په 5-kg کیلوګرامه ډیسک ویشتل شویی، لکه څنګه چې په لاندې انځور کې ښودل شوي ده. د ګولۍ په ډیسک ننوزي د ډیسک زاویوي سرعت معلوم کړئ. همدارنګه، هغه زاویه q محاسبه کړئ چې ډیسک په ټال کې وډیږي. ډیسک لمړۍ په دریدلی حالت کې دی. د راډ AB کتله 3 kg ده. د ننوتلیې ګولۍ اخرنۍ زاویوي مومنتم له پامه وغورځوی.



پ 19-30/31

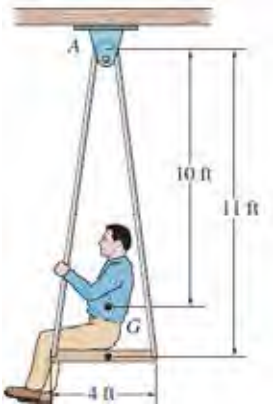
*19-32 یو سړی په تاویدونکې څوکۍ ناست دی او دوه 5-lb تولونه یې په خپلو غځولیو لاسونو کې نیولي دي. که دی په 3 rad/s په دې وضعیت کې تاویږي، د ده زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې تولونه دننه ورشي او د تاویدو محور څخه 0.3 ft فاصله ولري. فرض کړئ چې دی

160 lb تول لرى او د z محور ته يى د جايريشن شعاع يې k_z= 0.55 ft ده. د ده د لاسونو کتله او د تولونو اندازه د محاسبې لپاره په پام کى مه نيسى.



پ 19-32

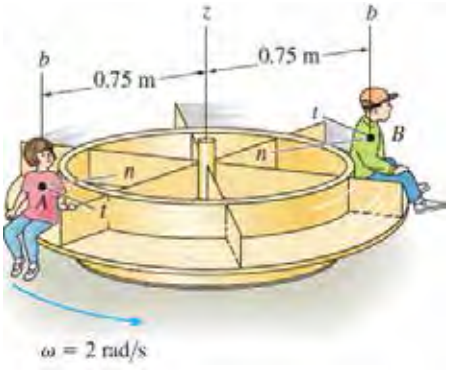
19-33 .د زانګو پليټ فارم يوه 200-lb پونډه تخته لري چې د څلورو راډونو سره ځوړند شوې ده او د راډونو تول د محاسبې وړ نه دي. کله چې زانګو په دريدلى حالت کې وي، يو 150-lb سړى د پليټ فارم څخه ټوپ وهى کله چې د هغه د جاذبى مرکز G له پينA څخه 10 ft فاصله لري. دا ټوپ وهل په 5 ft/s افقي سرعت سره ترسره کيږي، کوم چې په G کى له زانګو اندازه شوې دى. د زانګو هغه زاويوي سرعت چې د سړى له ټوپوهلو وروسته په زانګو کى جوړيږي محاسبه کړئ .



پ 19-33

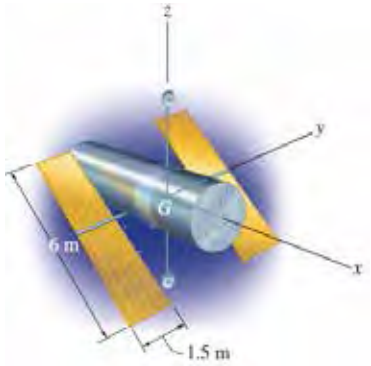
19-34. دوه ماشومان A اوB ، چې هر يو يى 30 kg کتله لري، د ميرۍ ګورونډ په ژى ناست دي چې په w = 2 rad/s ګرزى. د ماشومانونه پرته، ميرۍ ګورونډ 180 kg تول لري او د جايريشن شعاع يى k_z =0.6 m ده. د ميرۍ ګورونډ زاويوي سرعت معلوم کړئ کله A په افقي ډول د n- لوري ته په 2 m/s سرعت سره ټوپ وکړي ، چې د ميرۍ ګورونډ نه اندازه شوې وي. د ميرۍ ګورونډ زاويوي سرعت به څو وي کله B بيا افقي ډول د $+t$ لوري ته په 2 m/s سرعت

سره ټوپ وکړي، چې د میرۍ ګو روند نه اندازه شوې وي؟ اصطکاک او د هر ماشوم اندازه له پامه وغورځوی.



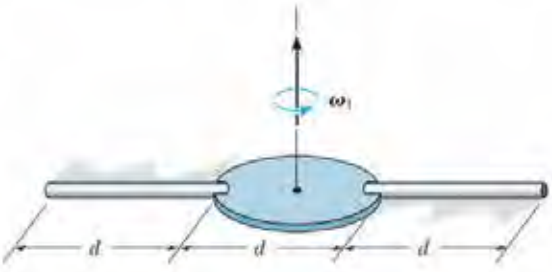
پ 19-34

19-35 . د هبل فضايي ټلیسکوپ له دوو سولر پینلونه قدرت اخلی لکه څنګه چې ښودل شوي دي. د ټلیسکوپ بدن د 11 Mg کتله لري او د جایریشن شعاع وی یې $k_x = 1.64m$ او $k_y =$ 3.85m دی، چیرۍ چې سولر پنلونه لکه نازکی تختې ګنل کیدی شي چې هر یو یې د 54 kg کتله لري. د داخلي ډرایو له امله، پینلونه ته زاویوي سرعت {0.6j} rad/s ورکړل شوی دی، نسبت ټلیسکوپ ته. د ټلیسکوپ زاویوي سرعت چې د پینلونو د ګرځېدو له امله رامینځته کیږي معلوم کړئ. مخکې له دې چې پینلونه وګرځي، ټلیسکوپ په $\mathbf{v}_G$ = {-400**i** +250**j** +175**k**} m/s روان وا. د هغې مداري ګرځیدنه په پام کی مه نیسی.



پ 19-35

19-36 . هر یو د دواړو اوږدو ډنډو او ډیسک یو شان کتله m لري. همدارنګه، د هرې ډنډې اوږدوالی د ډیسک د قطر d سره برابر دی. که چیرې دا ټولګه په زاویوي سرعت w_1 سره و ګرځی کله چې ډنډې بهر ته غزیدلیی وی، د ټولګې زاویوي سرعت معلوم کړئ که د داخلي لارو له مخی ډنډې عمودي موقعیت ته راشي.



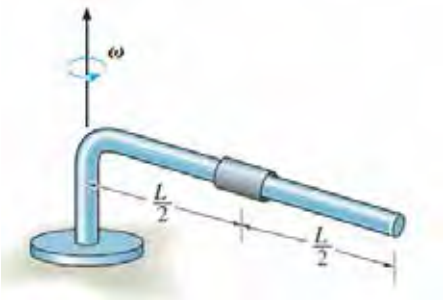
پ 19-36

19-37 . ډیسک A د 20 lb پونډه تول لري. یو نه غزیدونکی کیبل د 10 lb تول سره تړل شوی او د ډیسک نه تاو شوی دی. تول 2 ft راښکته شوي مخکې له دې چې د کیبل غونجیدل خلاص شی. که چیرې امپکت بشپړ ایلستیکي وي، یعنې $e = 1$ ، د ډیسک زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې امپکت ترسره شي.



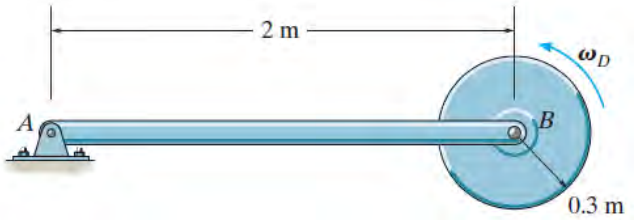
پ 19-37

19-38 . لاندی ښودل شوی راډ L اوږدوالی او m کتله لري. یوه ښویه غاړکی (collar) چې اندازه یې د حساب وړ نه ده او کتله یې د راډ د ځلورمه برخه کیږی، د راډ په منځنی برخه کې ایښودل شوی ده. که راډ د خپل پای په شاوخوا کې په آزاد ډول په w زاویوي سرعت سره په خپل پای څرخیږی او غاړکی خوشی شی، نو د راډ زاویوي سرعت معلوم کړئ مخکې له دې چې غاړکی له راډ څخه والوزی. همدارنګه، د غاړکی سرعت څومره دی کله چې له راډ څخه وځي؟



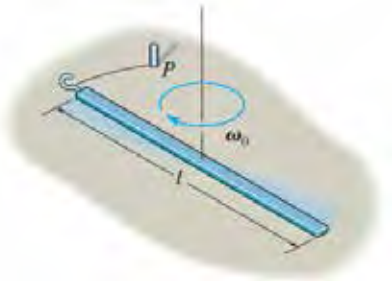
پ 19-38

19-39 . دا لاندی 12-kg راډ *AB* د 40-kg ډیسک سره په پین ټرلی دی. که چیرې ډیسک ته زاویوي سرعت w_D = 100 rad/s ورکړل شي پداسې حال کې چې راډ په دریدلې حالت کې پاتې وي، او بیا ټوله اسمبلي خوشې شي، نو د راډ زاویوي سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې ډیسک د راډ په پرتله د اصطکاک مقاومت له امله په B کې د ګرځېدو څخه ودریږي. حرکت په افقي سطحه کې دی. په ګنډه *A* کې د اصطکاک مقاومت په پام کې مه نیسئ.



پ 19-39

*19-40 . یو نری راډ *m* کتله او w_0 زاویوي سرعت لري چې په یوه ښویه سطحه باندی ګرځي. د راډ نوي زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې د ده پای پرمیخ ولګیږي او په *P* کې دمیخ سره ونیښلول شي او راډ پرته له دی چې بیرته راستون شی په هغه ځای کې څرخیدل مومي. پوښتنه حل کړئ (a) د ورکړل شویو پارامترونو په کارولو سره، (b) کله چې m = 2 kg ، w_0 = 4 rad/s، او l = 1.5m وی .



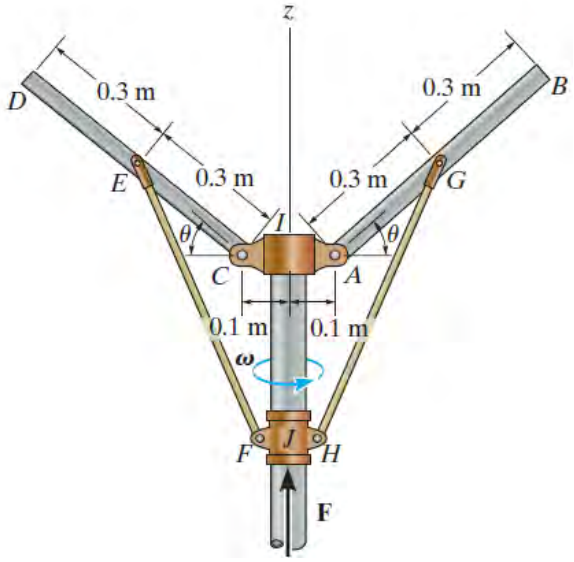
پ 19-40

19-41 . د امپکت ازموینه په یوه ثابت د ټکر مادل سره ترسره کیږي کوم چې د 300-lb تول له دریدلی حالت څخه چې زاویه یې q=30° ده، خوشي شي تر څو په مادل په q = 90° زاویه کې ولګیږي. که چیرې د مادل او درانه تول ترمنځ د بیرته عادی کیدو ضریب (restitution coefficient) e = 0.4 وي، نو د د درانه متحرک تول زاویه q معلومه کړئ چې له امپکت وروسته یې بیرته راتګ کړی مخکې له دې چې په موقتي ډول ودریږي.



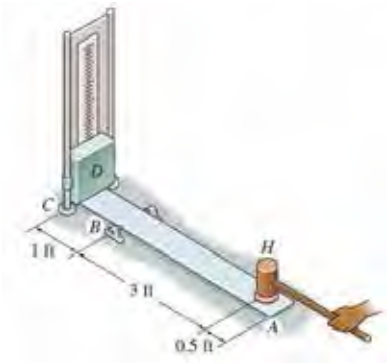
پ 19-41

19-42 . عمودي شافټ په زاويوي سرعت 3 rad/s سره څرخيږي کله چې $q = 0^o$ وي. که يوه قوه **F** په غاړه کې باندی پلی شي ترڅو $q = 90^o$ شي، نو د شافټ زاويوي سرعت معلوم کړئ. همدارنګه، د قوه **F** لخوا ترسره شوی کار محاسبه کړئ. د *GH* او *EF* راډونو او *I* او *J* غاړکيوکتله په پام کې مه نيسی. *AB* او *CD* راډونو هر يو 10 kg کتله لري.



پ 19-42

19-43 . يو د 30-lb سخته تخته په 15-lb سوټک H سره وهل کيږي . د ټکر مخکې، سوټک په نرمۍ ډول نيول شوی او 75 ft/s عمودي سرعت لري. که چيرې د سوټک د سر اود تختې ترمنځ د بيرته رغيدو ضريب e =0.5 وي، نو د 50-lb بلاک *D* تر ټولو لوړ لوړوالی معلوم کړئ. بلاک کولی شي په آزاد ډول د دوو عمودي لارښود راډونو په اوږدو کې حرکت وکړي. تخته په پيل کې په افقي حالت کې ده.



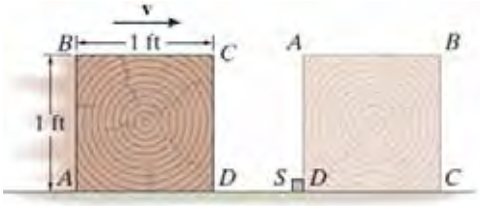
پ 19-43

*19-44 . دا لاندی پینډولم د یو 5-lb نری راډ *AB* او 10-lb د لرګی بلاک لري. یوه ګولی چې تول یې 0.2 lb دی، د بلاک مرکز ته په 1000 ft/s سرعت سره ویشتل کیږي. که پینډولم په پیل کې په دریدلی حالت کی وی، وي، او ګولی په بلاک کې د ننه ځای پرځای شي، نو د پینډولم زاویوي سرعت د امپکت وروسته معلوم کړئ. د خښی شوې ګولی د پایلې زاویوي مومنتم به پام کی مه نیسی.



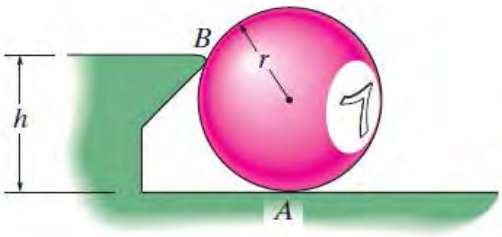
پ 19-44

19-45 . دا لاندی 10-lb بلاک په ښویه سطحه ښویږي ترڅو چې د *D* کونج د *S* مانع بلاک سره ولګیږي. د بلاک حد اقل سرعت **v** معلوم کړئ کوم چې دا به په مانع ډوګلشی او په څنګ به ولویږی لکه څنګه چې په انځور کی ښودل شوي . د *S* اندازه په پام کی مه نیسی.
مرسته: د امپکت پر مهال د بلاک تول غیرامپولسی وګڼئ.



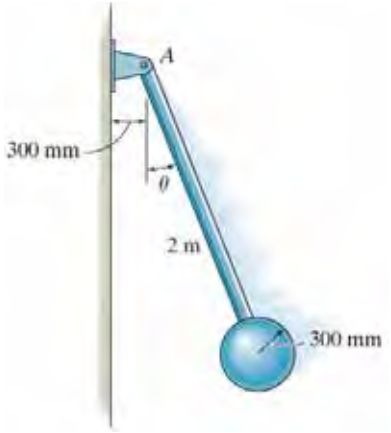
پ 19-45

19-46 . د بیلیارد میز د بمپر یا څنډی لوړوالی *h* معلوم کړئ، ترڅو کله چې د بیلیارد توپ د کتلی *m* پرې امپکت وکړي، د اصطکاک قوه به دتوپ او میزترمنځ په *A* کی جوړه نشي. فرض کړئ چې بمپر یوازې افقي قوه په توپ واردوی.



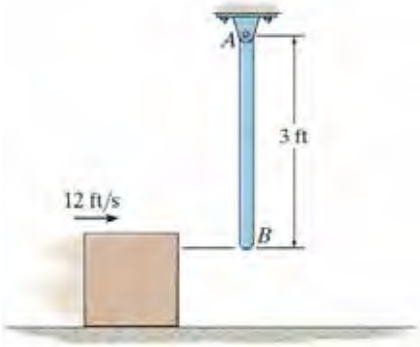
پ 19-46

19-47 . پېنډولم یوه 15-kg کلک توپ او 6-kg راډ لري. که دا په $q_1 = 90^o$ زاویه کې له دریدلی حالت څخه خوشې شي، نو د توپ زاویه q_2 معلومه کړئ وروسته له دې چې توپ په دیوال ولګیږي، بیا په شا ه تګ وکړي، او پېنډولم تر هغه ځایه پورته شي چې لحظوی توقف وکړي. فرض کړئ چې e =0.6 ده.



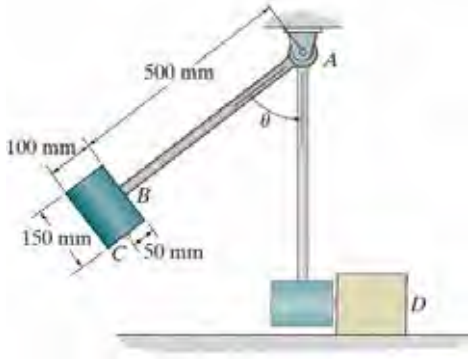
پ 19-47

*19-48 . یو 4-lb راډ AB په عمودي وضعیت کې ځوړند دی. یو 2-lb پوندې بلاک، چې په یوه ښویه افقي سطحه په 12 ft/s سرعت سره روان دی، د راډ د پای B سره امپکت کوي. له امپکت وروسته د بلاک سرعت معلوم کړئ. د بلاک او راډ ترمنځ په B ټکی کې د بیرته عادی کیدوضریب e =0.8 دی.



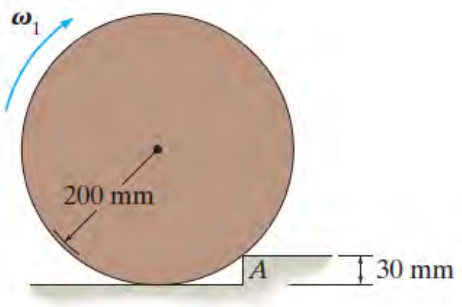
پ 19-48

19-49 . سوټک له 10-kg کیلوګرامه کلک سلنډر C او 6-kg کیلوګرامه یو شان نرۍ راډ AB څخه جوړ شوي. که چیرې سوټک له دریدلی حالت څخه خوشې شي کله چې $q = 90^o$ وي او د 30-kg کیلوګرامه بلاک D ته امپکت وکړي کله چې $q = 0^o$ وي، نو د بلاک D سرعت او د سوټک زاویوي سرعت د امپکت وروسته معلوم کړئ. د سوټک او بلاک ترمنځ دبیرته روغیدو ضریب e = 0.6 دی.



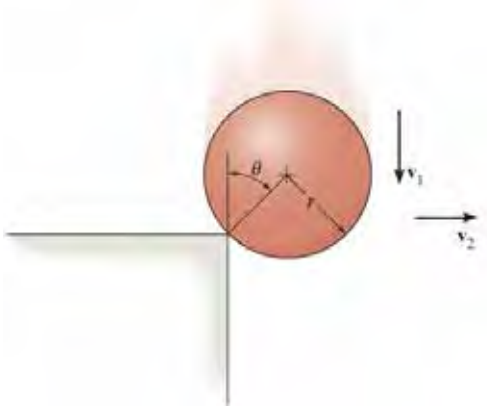
پ 19-49

19-50 . دا لاندی 20-kg کیلوګرامه ډیسک له مانع سره پرته له راستنیدو امپکت کړي. د ډیسک تر ټولو لوی زاویوي سرعت w_1 معلوم کړئ کوم چې ډیسک پرته له دې چې د مانع A سره تماس له لاسه ورکړي، ولري.



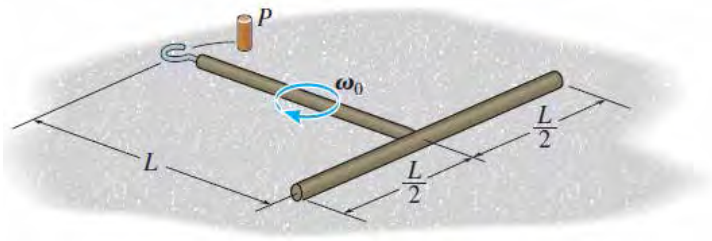
پ 19-50

19-51 . یو جامد توپ چې کتله m لري په سرعت $\mathbf{v}_1$ په یوه زیږه څنډه غورځول کیږي. که چیرې دا په افقي ډول د څنډې نه په سرعت $\mathbf{v}_2$ بیرته حرکت وکړي، زاویه q معلوم کړئ کوم چې دا تماس واقع کیږي. فرض کړئ چې کله توپ د څنډې سره امپکت کوي، هیڅ ښویدنه نه وی. دبیرته ستنیدوضریب e دی.



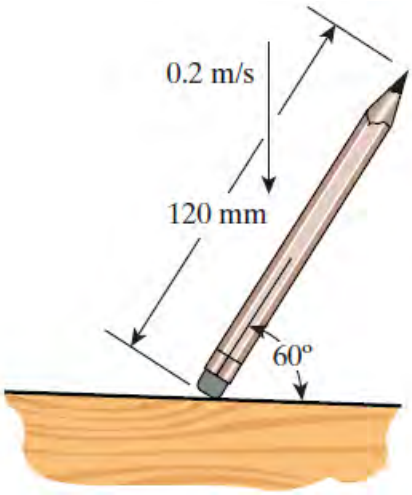
پ 19-51

*19-52 . دا لاندی یوشان راډ اسمبلي په زاویوي سرعت $\mathbf{w}_0$ سره مخکې له دې چې میخ *سره امپکت* وکړي ، په ښویه افقي سطحه کې ګرځي، او پرته له دې چې بیرته تګ وکړي. د اسمبلي زاویوي سرعت له امپکت وروسته معلوم کړئ. هر راډ m کتله لري.



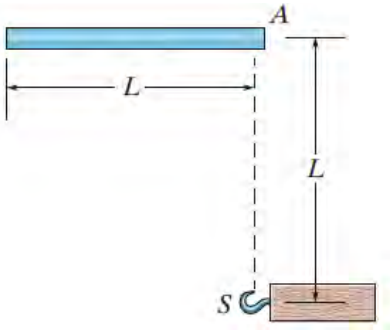
پ 19-52

19-53 . یو 50-kg ګرامه پنسل (یو شان نرۍ راډ) په 0.2 m/s سرعت سره له امپکت څخه مخکې پرمیز لویږی. که دا د افقي سطحی سره په 60^o زاویه کې وي، او د امپکت پرمهال بنویدنه ونکړی، نو د امپکت وروسته د بیرته ګرزیدو زاویوي سرعت w او د ده د کتلې مرکز سرعت v_Gمعلوم کړئ. e = 0.8 دی.



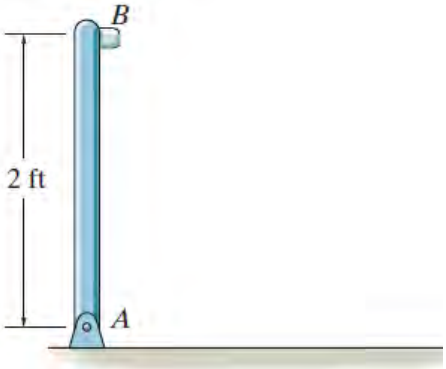
پ 19-53

19-54 . د کتلې m او اوږدوالی L راډ له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي پرته له دې چې څرخ ومومي. کله چې دا په فاصله د L راښکته شي، پای A د چنګک S سره امپکت کوي او یو دایمي تړون جوړه وي. د راډ زاویوي سرعت w معلوم کړئ وروسته له دې چې 90^o څرخ و خوری. د راډ تول د امپکت پر مهال د غیر امپولسی قوی په توګه حساب کړی.



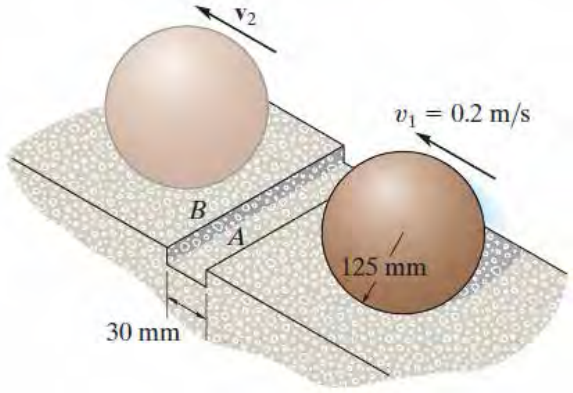
پ 19-54

19-55 . یو 15-lb پونډه راډ AB له دریدلی عمودی حالت څخه خوشې کیږي. که چیرې د فرش او بالښت B د بیرته ستنیدو ضریب e = 0.7 وي، د راډ پای به څومره لوړوالی وکړی وروسته له دې چې د فرش سره ټکر وکړي.



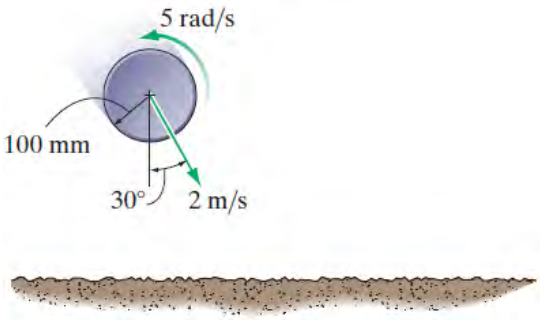
پ 19-55

*19-56 . یو توپ چې کتله یې 8-kg او ابتدایي سرعت یې $v_1 = 0.2$ m/s دی، د 30-mm سوروری جرې نه تیریږي. فرض کړئ چې توپ د جرې د تماس له کونج، لومړی A او بیا B څخه پرته له ښویدوتیریږي ، د توپ پایلی سرعت v_2 معلوم کړئ کله چې دی بلې خوا ته ورسیږي.



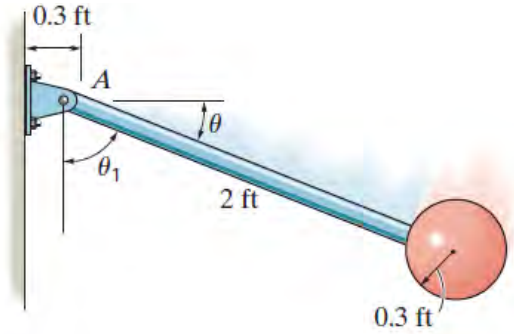
پ 19-56

19-57 . یو د 2-kg ډیسک په زیره سطحه په ښودل شوی سرعت او زاویوي سرعت سره غورځول کیږي. که چیرې ښویدنه نه وي، اود بیا روغیدنی ضریب $e = 0.5$ وي، نو د ډیسک سرعت او زاویوي سرعت وروسته له ټوپوهلومعلوم کړئ .



پ 19-57

19-58 . دا لاندی پینډولم له 10-lb کلک توپ او 4-lb راډ څخه جوړشوي دی. که دا له دریدلي حالت څخه خوشې شي کله چې $q=0^o$ وي، نو د توپ د بیرته ستنیدو (rebound) زاویه q_1 معلوم کړئ وروسته له دې چې توپ په دیوال ولګی او پینډولم له هغه ځایه پورته خوا حرکت وکړي تر څو ودریږي. $e = 0.6$ فرض کړئ



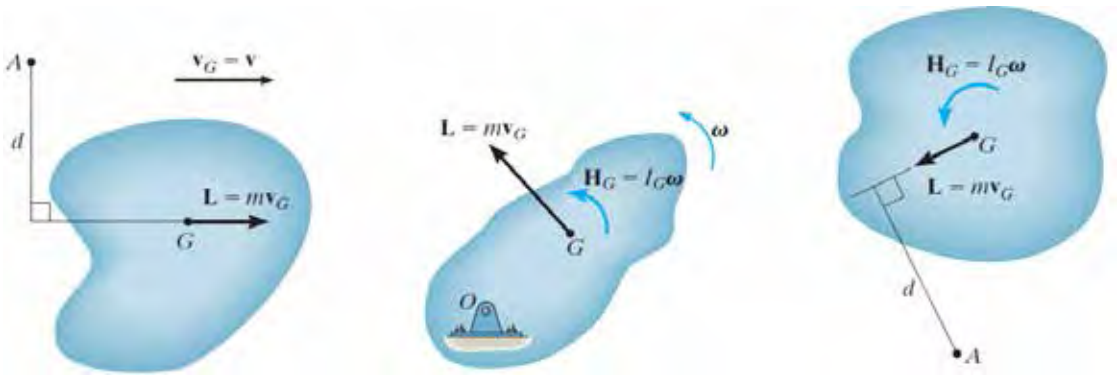
پ 19-58

د فصل بيا کتنه

د فصل بيا کتنه CHAPTER REVIEW

خطی او زاويوي مومنټم (Linear and Angular Momentum)

د يوه کلک بدن خطي او زاويوي مومنټم کيدای شي د هغه د کتلې مرکز G ته نسبت ورکړل شي. که چيرې زاويوي مومنټم په يوه داسې محور ته معلوم شي چې د کتلې له مرکز څخه نه تيريږي، نو زاويوي مومنټم د $\mathbf{H}_G$ او **L** مومينټ جمع کولو له لارې دی محور ته معلوم کيږي.



خوځيدل

دوران په يو ثابت محور

حرکت په عمومي سطحه

$$L = mv_G \qquad H_G = 0 \qquad H_A = (mv_G)d$$

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega \qquad H_O = I_O\omega$$

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega \qquad H_A = I_G\omega + (mv_G)d$$

د امپولس او مومنټم اصول (Principle of Impulse and Momentum)

د خطي او زاويوي امپولس او مومنټم اصول د هغو مسايلو د حل لپاره کارول کيږي چې د قوی، سرعت او وخت سره تړاو لري. د دې معادلاتو د تطبيقولونه مخکې، دا مهمه ده چې د x ، y، z انرشيايي محوري سيستم جوړ شي. د بدن د ازاد-ډياګرام هم بايد رسم شي تر څو

$$m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Gx})_2$$

$$m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Gy})_2$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2$$

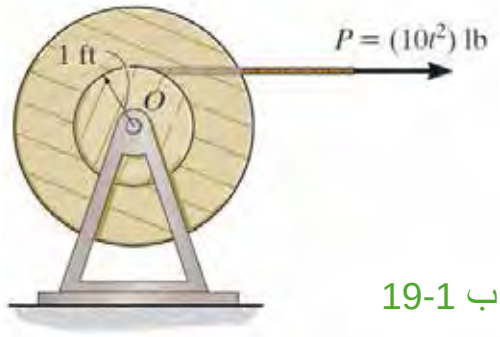
ټولې قواوې او کپل مومینټونه چې بدن ته امپولس ورکوي حساب شي.	

د مومنټم ساتنه (Conservation of Momentum) که چيرې د کلک جسمونو په يوه ټرلي سيستم باندې د پلې شوي خطي امپولسونو مجموعه په يوه ځانګړي جهت کې صفر وي، نو د دې سيستم خطي مومنټم په دغه جهت کې ساتل شوي دي. د زاويوي مومنټم ساتنه هغه وخت رامنځته کيږي چې امپولسونه له يوه محور څخه تيريږي يا هغه ته موازي وي. مومنټم هم ساتل کيږي که چېرې خارجي قواوې کوچنۍ وي او په دې توګه په سيستم باندې غير امپولسي قواوې رامينځته کوي. د ازاد-بدن ډياګرام بايد د هر تطبيق لپاره مل وي تر څو قواوې د امپولسي يا غير امپولسي په توګه طبقه بندي کړي او هغه محور معلوم کړي چې زاويوي مومنټم ساتل کيدی شي.	$\left(\sum \text{سيستم خطي مؤمنتم}\right)_1 = \left(\sum \text{سيستم خطي مؤمنتم}\right)_2$ $\left(\sum \text{سيستم زاويوي مؤمنتم}\right)_{O1} = \left(\sum \text{سيستم زاويوي مؤمنتم}\right)_{O2}$
غيرمرکزي امپکت (Eccentric Impact) که چيرې د امپکت کرښه د دوو امپکت کونکو سخت جسمونو د کتلې مرکزونو له کرښې سره برابرنه وي، نو غير مرکزي امپکت رامنځته کيږي. که چيرې د امپکت وروسته د بدنوحرکت معلومول اړين وي، نو اړينه ده چې د سيستم لپاره د مومنټم د ساتنې معادله په پام کې ونيول شي او د روغيدنې (restitution) ضريب معادله وکارول شي.	$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

د بیا کتنې پوښتنې

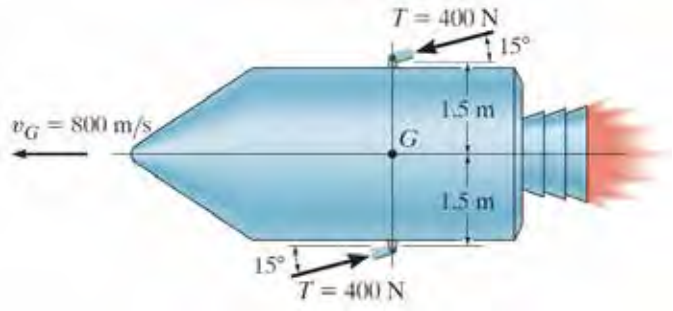
د بیا کتنې پوښتنې REVIEW PROBLEMS

ب 19–1. په کبل باندې یوه قوه $P = (10\ t^2)$lb تطبیق شوې ده، چیرې چې t په ثانیو کې ده. 3 s وروسته د ګوټک زاویوي سرعت معلوم کړئ کله چې P له آرام حالت نه پیل په پلې کیدو وکړي. ګوټک 150 lb تول لري او د جایریشن شعاع یې مرکز O ته 1.25 ft ده .



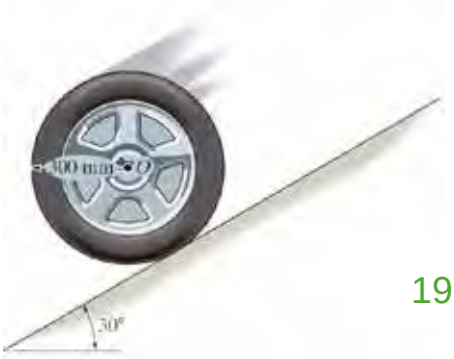
پوښتنه ب 19-1

ب 19–2. د فضایي کپسول کتله 1200 kg او انرشیایی مؤمنت یې $I_G = 900\ kg.m^2$ هغه محور ته چې له G څخه تیریږي او د صفحې سره عمودي جهت لري. که دا مخ په وړاندې په v_G =800 m/s تیزوالي سره حرکت کوي او د دوو جیټونو له لارې چې 400 N قوت په 0.3 s کې وړاندې کوي، تر څو یوه اړخ ته وګرځي، د جیټونو بندولو وروسته د کپسول زاویوي سرعت معلوم کړئ.



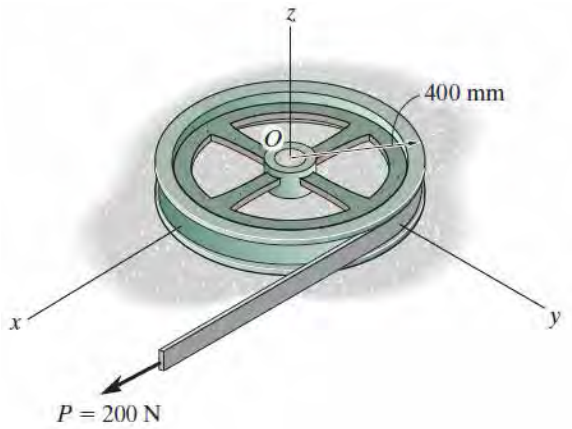
پوښتنه ب 19-2

ب 19–3. دا لاندې ښودل شوي ټایر 9 kg کتله اود جایریشن شعاع k_O =225 mm لري. که دا له دریدلې حالت څخه خوشې شي او په ښودل شوې لور ورغړي ، د t =3 s پر مهال د ده مرکز O تیزوالی معلوم کړئ.



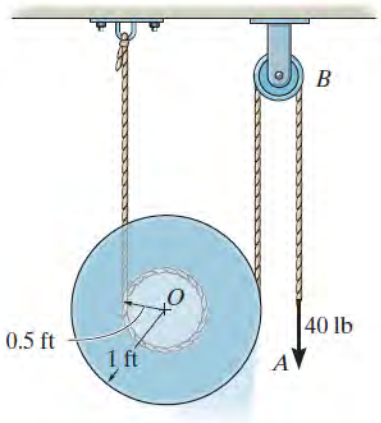
پوښتنه ب 19-3

ب 19–4. دا څرخ 100 kg کيلوګرامه تول او جايريشن شعاع يې د z محور ته k_z = 300 mm ده. هغه په يوه بنويه افقی سطحه پروت دي. که په تسمه يوه قوه P =200 N پلي شي، نو د څرخ زاويوي سرعت او د دي د مرکز O تيزوالی دري ثانيې وروسته د قوی د تطبيق نه معلوم کړئ.



پوښتنه ب 19-4

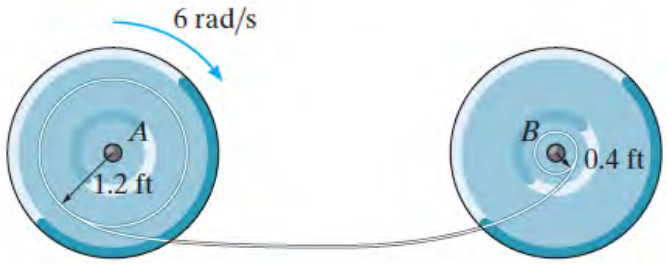
ب 19–5. ګوټک 30 lb تول اود جايريشن شعاع يې k_O =0.65 ft ده. که په A کې 40 lb قوه تطبيق شي، نو د ګوټک زاويوي سرعت په t =3 s کې چې له آرام حالت پيل کيږي معلوم کړئ. د څرخکی او کارډ کتله په محاسبه کی مه نيسی.



پوښتنه ب 19-5

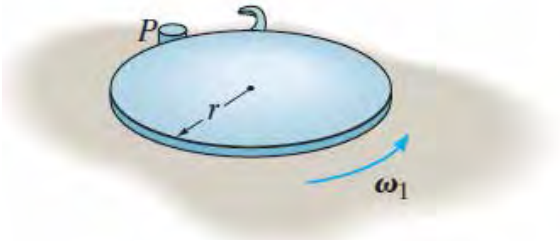
ب 19–6. ګوټک B په ارام حالت کې دی او ګوټک A په 6 rad/s سره څرخي کله چې د دوی ترمنځ نښلونکي تار کی سستوالی يا ګونځه له منځه ځي. که تار و نه غځيږی، د هر ګوټک وروسته له هغه چی تار سيخ شی زاويوي سرعت معلوم کړي. د ګوټکونو A او B تولونه او د

جيرپشن شعاعوی په ترتيب سره $W_A = 30$ lb ، $k_A = 0.8$ ft، $W_B = 15$ lb، $k_B = 0.6$ ft. لری.



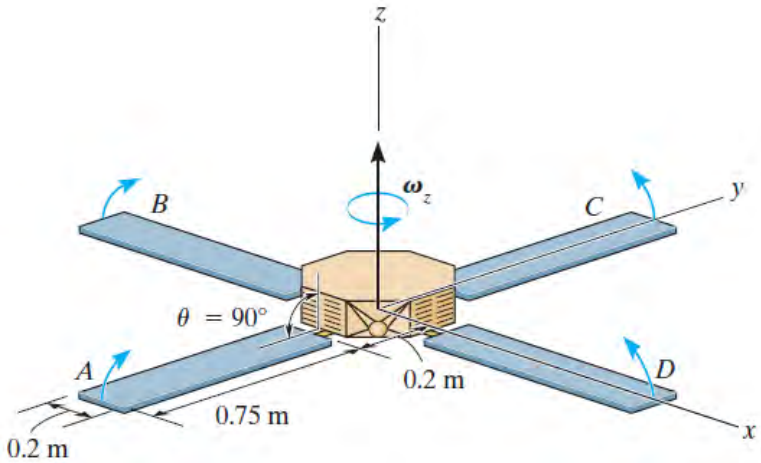
پوښتنه ب 19-6

ب 19–7. يو نازک ډيسک د m کتله او زاويوي سرعت w_1 سره پر يوه بنويه سطحه څرخيږي. د هغې نوې زاويوي سرعت معلوم کړئ کله چې د هغې پر څنډه چنګګ د ميخ P سره امپکت وکړي او ډيسک يوازې د P شاوخوا څرخی پرته له بيرته راستنيدونه.



پوښتنه ب 19-7

ب 19–8. فضايي سيټلايټ 125 kg کتله او انرشيايی مؤمنت $Iz = 0.940\ kg.m^2$ لري، او دا پرته له څلور سولر پينلونو A ، B، C، او D دی. هر سولر پينل 20 kg کتله لري او د يوې نازکی تختې په توګه ګڼل کيدی شي. که سيټلايټ په اصل کې د z محور شاوخوا په $w_z = 0.5$ rad/s سره څرخی کله چې $q = 90^o$ وي، نو د څرخش نسبت معلوم کړئ کله چې ټول پنلونه پورته شي او په هماغه وخت کې $q = 0^o$ موقعيت ته ورسيږي.



پوښتنه ب 19-8

شلم فصل

(CHAPTER 20)



د دي برجي کرين د عملياتو لپاره د هغې د دري بعدي حرکت کينيماتيک کنټرول اړين دی.

د يوه سخت جسم دري بعدي کينيماتيک
(THREE-DIMENSIONAL KINEMATICS OF A RIGID BODY)

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

- د يوه جسم کينيماتيک تحليل کيږی کوم چې په يوه ثابت نقطه خرخيږي او عمومي سطحه کی هغه حرکت کوی.
- د يوه سخت جسم نسبي حرکت تحليل د متحرکو او څرخيدونکيو محورونو په کارولو سره.

20.1 په یوه ثابته نقطه تاویدل (ROTATION ABOUT A FIXED POINT)

کله چې یو سخت جسم په یوه ثابته نقطه تاویږی، د جسم د یوه ذره د حرکت لاره د یوی کری (sphere) په سطحه باندې پرته وي، چې شعاع یې r دی او مرکزیی په ثابته نقطه کې موقعیت لري. له دې املې چې حرکت په دې لاره کې له یو لړۍ تاویدو څخه جوړ شوی، مونږ به لومړی د تاویدو بیځایه کیدو د خواصو سره اشنایي پیدا کړو.

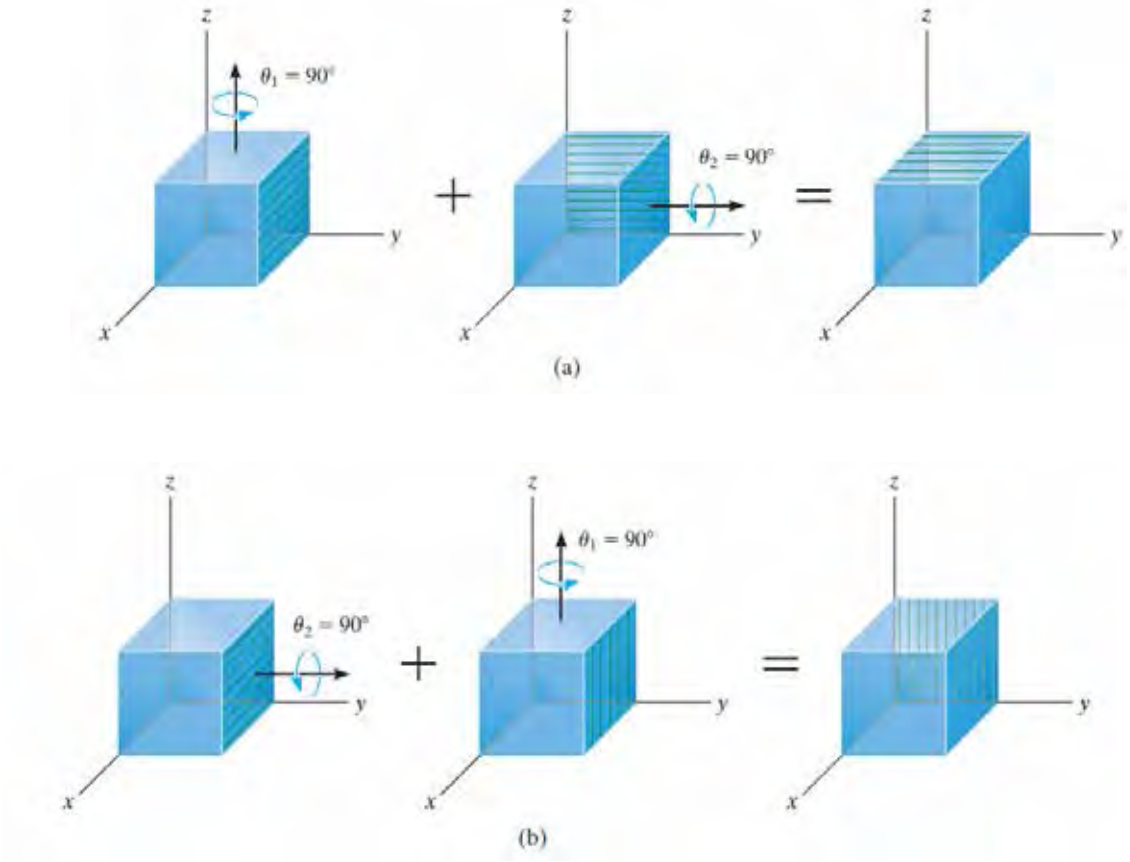


بوم پریوه ثابت ټکی باندې تاویږی ځکه چې دا پورته او ښکته تاویدی شی، او فریم کولای شي په عمودي محور وګرځي.

د اویلر تیورم (Euler's Theorem) . د اویلر تیورم وایي چې دوه "جزونه" تاویدل مختلفو محوروته چې له یوه ټکی څخه تیریږي، د یوه نتیجوي تاویدلو سره معادل دي چې د همدغه ټکی څخه تیریږي. که چېرې له دوو زیات تاویدل پلي شي، نو دوی ټول په جلا جلا جوړو کې راټولیدلی شي، او هر جوړه کولی شي نوره هم کمه شي او د یو واحد تاویدلو په توګه راټول شي.

معین تاویدل (Finite Rotations) . که چېرې په اویلر تیورم کې د تاویدلو اجزاوې معینی وی، نو دا مهمه ده چې د پلي کیدو ترتیب وساتل شي. د بېلګې په توګه، هغه دوه معین تاویدل $q_1 + q_2$ چې په بلاک باندې پلي شوي، انځور .20-1a . هر یو تاویدل 90^o اندازه لري او جهت یې د ښي لاس د قاعدې له مخې دي، لکه څنګه چې په غیشی باندې ښودل شوې دی. د بلاک وروستی موقعیت په ښي لور کې ښودل شوې دي. که دا دوه تاویدل په سرچپه توګه، یعنی $q_1 + q_2$، لکه څنګه چې په انځور 20-1b کې ښودل شوي، پلي شي، نو د بلاک وروستی موقعیت به لکه څنګه چې په انځور 20-1a کې دی، نه وي. ځکه چې معین تاویدل د کمیوتیټیو جمع کولو د قانون ($q_1 + q_2 \neq q_2 + q_1$) ته تابع نه دي، نو دوی نه شي کولای د ویکتورونو په توګه طبقه بندي شي. دا درک کړئ چې که کوچني، خو معین تاویدل د دې ټکي د توضیح لپاره

کارول شوي وی، مثلاً 10^o پر ځای د 90^o، نو د بلاک وروستی موقعیت به بیا هم توپیر ولري؛ خو په دې حالت کې به توپیریوازې یو کوچنی مقدار به وي .

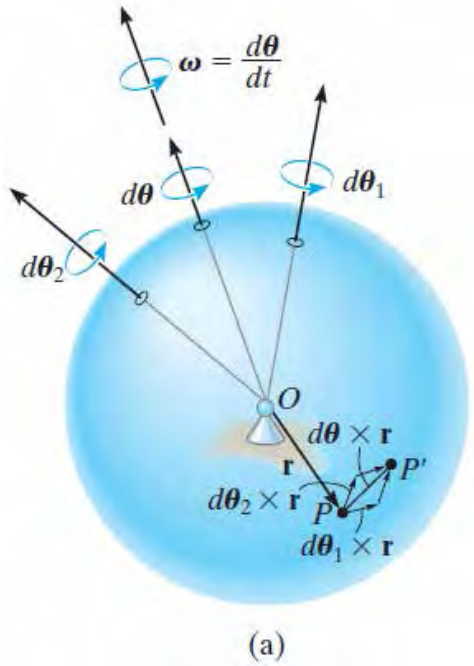


انځور 20-1

بې نهایت کوچني تاویدل (Infinitesimal Rotations) .

کله چې د یوه جسم زاویوي درې بعدي حرکتونه تعریف کیدونکي وي ، یوازې هغه تاویدل چې بې نهایت کوچني وي په پام کې نیول کیږي. داسې تاویدل کیداي شي د ویکتورونو په توګه طبقه بندي شي، ځکه چې دوی په هر ویکتوري ډول سره جمع کیدای شي. د دې د ښودلو لپاره، د ساده کولو لپاره فرض کړو چې خپله سخت جسم یوه کره (sphere) ده چې هغه په مرکزي ثابت ټکی O تاویږی، لکه څنګه چې په انځور 20-2a کې ښودل شوې ده. که مونږ په جسم دوه بې نهایت کوچني تاویدل $dq_1 + dq_2$ پلي کړو، نو دا ښکاري چې د P ټکی په $dq_1 \times \mathbf{r} + dq_2 \times \mathbf{r}$ لاره حرکت کوي او په پای کې به په P' کې موقعیت ولري. که چیرې دواړه مسلسل تاویدل په ترتیب $dq_1 + dq_2$ پلي شوي وای، نو د P محصله بیځای کیدنه به $dq_2 \times \mathbf{r} + dq_1 \times \mathbf{r}$ وی او بیا P به P' ته حرکت وکړي. دا ځکه پیښیږي چې د ویکتور کراس محصول د توزیعي قانون

(distributive) تابع دی، يعني $r * (dq_2 + dq_1) = (dq_1 + dq_2) \times \mathbf{r}$ ، او له همدې امله بې نهايت کوچني تاويدل ويکتورونه دي، ځکه چې دا کميتونه اندازې او جهت دواړه لري، او د (ويکتور) جمع کولو ترتيب يې مهم نه دی، يعني $dq_2 = dq_2 + dq_1$. $dq_1 + dq_2$ دوه "اجزاوي" تاويدل dq_1 او dq_2 په انځور 20-2a ، د يوه واحد محصلې تاويدلو $dq = dq_1 +$ سره معادل دي، چې دا د اويلر د قضيې نتيجه ده.



(a)

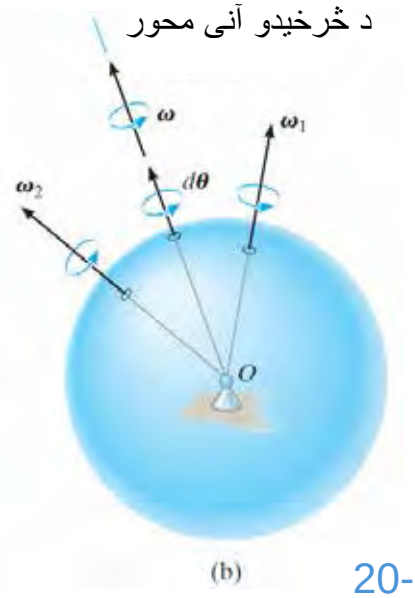
زاويوي سرعت (Angular Velocity)

که چيرې جسم په ثابت ټکی د زاويوي تاويدلو dq تابع وي ، د جسم زاويوي سرعت د هغه د مشتق وخت ته، لخوا تعريف کيږي

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (20\text{–}1)$$

د **w** د لوري مشخصوونکي کربنه، چې د dq سره يوشان جهت لری، د **تاويدونکی آنې محور** (instantaneous axis of rotation) په نوم يادېږي، انځور 20-2b . عمومًا، دا محور د وخت په هره لحظه کې لوری بدلوي. ځرنګه چې dq يوه ويکتوري اندازه ده، نو w هم يوه ويکتوري اندازه ده، او د ويکتور د جمع کولو له مخې، که جسم د دوو جزونو زاويوي حرکتونو تابع وي، $\mathbf{w}_1 = \dot{\mathbf{q}}_1$ او $\mathbf{w}_2 = \dot{\mathbf{q}}_2$ نو محصله زاويوي سرعت به يې وی $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ وي .

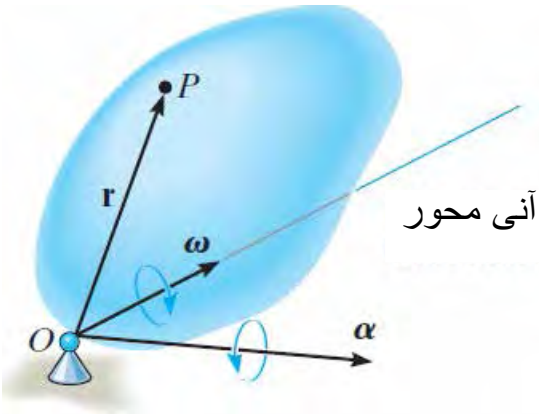
د څرخيدو آنی محور



انځور 20-2

زاويوي تعجيل (Angular Acceleration). د جسم زاويوي تعجيل د هغه د زاويوي سرعت د وخت د مشتق له مخې ټاکل کيږي، يعني

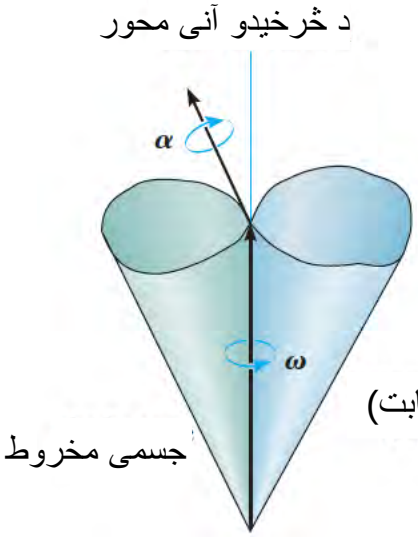
$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \qquad (20–2)$$



د څرخيدو آنی محور

انځور 20-3

د ثابت ټکی په اړه حرکت، ***a*** بايد د **w** د اندازې او هم لوری بدلون ته اړيکه لری، نو په عمومي توګه، ***a*** به د تاويدود آنی محور په اوږدو کې جهت و نه لری، انځور20-3 .



کله چې د تاویدوآنی محور لوری (یا د **w** د عمل کرښه) په فضا کې بدلون مومي، د محور هندسی مرکز(locus)یو **فضای مخروط** (space cone) جوړوي، انځور 20-4 . که د دې محور د لوري بدلون د تاویدونکی جسم په نسبت ولیدل شي، نو د محور هندسی مرکزیو **جسمی مخروط** (body cone) جوړوي.

په هر ورکړل شوي لحظه کې، دا مخروطونه د تاویدونکی آنی محور په اوږدو کې یو بل سره یوځای کیږي، او کله چې جسم په حرکت وي، د جسم مخروط داسې ښکاري کوم چې په دننه سطحه یا په بهرني سطحې د فضا یی مخروط کې رغړي. که چیرې لاره د مخروطونو د خلاصو پایلونو لخوا تعریف شي د **w** ویکتور د سر لخوا ښودل شوی، نو **a** باید په هر ورکړل شوي لحظه کې د دې لارو سره مماس عمل وکړي، څرنګه چې د **w** د بدلون کچه وخت ته د **a** سره برابره ده، انځور 20-4 .

د دې مفکورې د ښودلو لپاره، فرض کړئ چې د انځور 20-5a کې ډیسک چې د راډ په اړه د $\mathbf{w}_s$ په سرعت سره تاویږی، پداسې حال کې چې راډ او ډیسک د عمودي محور په اړه د $\mathbf{w}_p$ په سرعت سره تاویږی. نو، د ډیسک مجموعی زاویوي سرعت $\mathbf{w} = \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_p$ دی.
لکه څنګه چې دټکی او د تماس نقطه *P* صفر سرعت لري، نو د دې دوو نقطو ترمنځ پر کرښه ټولې نقطې باید صفر سرعت ولري. له همدې امله، دواړه **w** او تاویدونکی آنی محور په اوږدو د *OP* کې دي. نو، لکه څنګه چې ډیسک تاویږی، دا محور داسې ښکاري چې په ثابت فضایی مخروط سطحې په اوږدو کې حرکت کوي، لکه څنګه چې په انځور20-5b کې ښودل شوی. که محور د تاویدونکی ډیسک له لوری څخه وکتل شي، نو دا محور بیا داسې ښکاري چې د جسم د مخروط سطحې باندې حرکت کوي. که **w** ثابته اندازه ولري، نو **a** یوازې د **w** د لوري بدلون ښیي، چې د مخروطونو سر د **w** په څوکه کې مماس دی لکه څنګه چې په انځور 20-5b کې ښودل شوی .

سرعت (Velocity). کله چې **w** مشخص شي، د جسم د هرې نقطې سرعت چې په ثابت ټکی تاویږی، کیدي شي د همدغو طریقو په کارولو سره چې جسم په ثابت محور تاویږی وټاکل شي. نو، د کراس ضربولو په مرسته

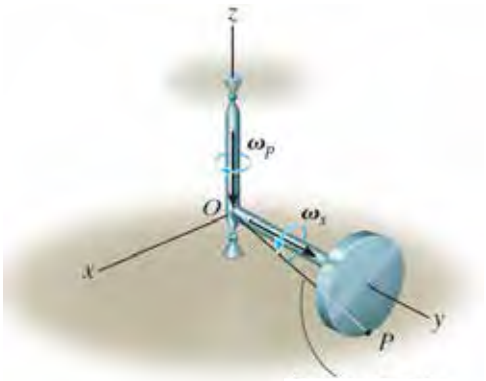
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (20–3)$$

چیرې چې **r** د نقطې موقعیت کوم چې د ثابت نقطې *O* څخه اندازه کیږي ټاکي ، انځور 20-3 .

تعجیل (Acceleration) . که چیرې **w** او **a** په یوه ورکړل شوې لحظه کې معلوم وي، نو د یوې نقطې تعجیل بیا کولی شي د وخت د مشتق نیولو د معادلې 20-3 څخه ترلاسه شي. دا پایله ورکوي

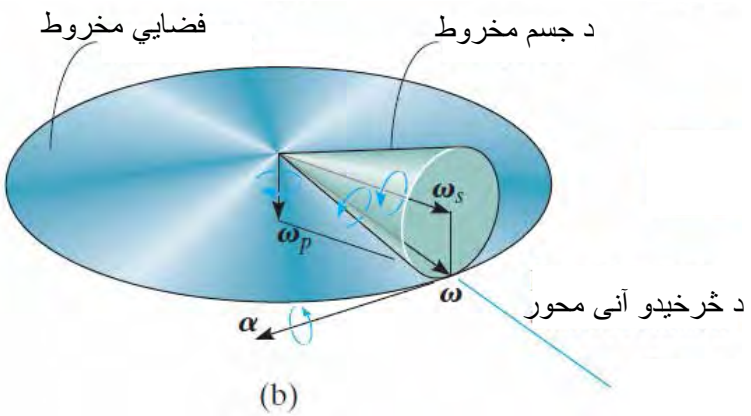
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (20–4)$$

20.2* . د وخت مشتق د ویکتور چې د ثابت یا خوځیدونکی تاویدونکی سیستم څخه اندازه کیږي (THE TIME DERIVATIVE OF A VECTOR MEASURED FROM A FIXED OR TRANSLATING-ROTATING SYSTEM)



د څرخیدو آنی محور

(a)



(b)

انځور 20-5

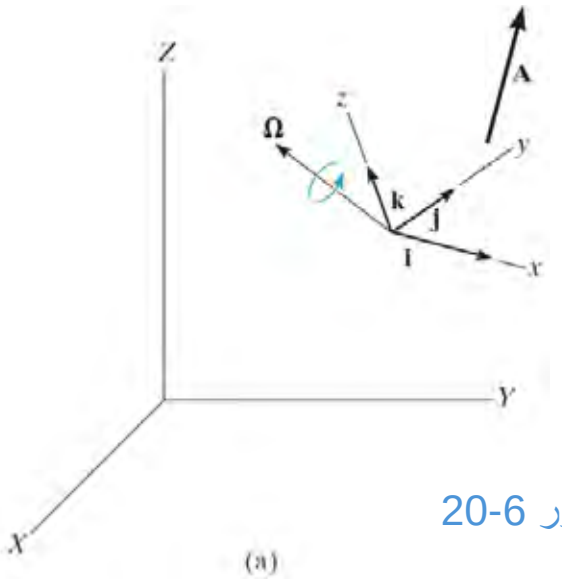
په ډیرو ډولونو د پوښتنو کې کله چې د جسم حرکت یوه ثابت ټکی ته وی، زاویوي سرعت **W** یی د هغې د اجزاوو په توګه مشخص کیږي. بیا، که چیرې د جسم زاویوي تعجیل **a** باید وټاکل شي، نو دا به ډیر اسانه وي چې د **W** د وخت مشتق د یوه محوری سیستم چی تاویږی، کوم چې د **W** د یوی یا ډیرو اجزاوو لخوا تعریف شوې، په کارولو سره پیدا کړو. د بېلګې په توګه، د انځور 20-5a کې د ډیسک په حالت کې، چیرې چې $\mathbf{w} = \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_p$ دی. د x، y، z محورونه کولای شي د $\mathbf{w}_p$ زاویوي سرعت ولري، او بیا **a** د دې محورونو په نسبت سره ټاکل کیدی شي. د دې دلیل لپاره، او د نورو کارونو لپاره وروسته، یوه معادله به اوس حاصل کړو چې د وخت مشتق د هر ویکتور **A** تعریفوي له خوځیدونکی- تاویدونکی مرجعې څخه د هغې د وخت مشتق سره چی د یوه ثابتی مراجعی پواسطه تعریف شوي.

فرض کړئ چې حرکت کوونکي محوری مرجع سیستم x ، y، z د زاویوي سرعت **Ω** سره تاویږی، کوم چې د ثابت X ، Y، Z محورونو څخه اندازه کیږي، انځور 20-6a . په راتلونکي بحث کې، دا به مناسب وي چې ویکتور **A** د دې د**i** ، **j**، **k** اجزونو په اصطلاحاتو کې څرګند کړو، کوم چې د حرکت کوونکو محورنو لوری تعریفوي. له همدې امله:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

که چیرې د وخت مشتق د حرکت کوونکي چوکاټ مراجعې په نسبت واخیستل شي، نو یوازې د **A**د اجزاوو په اندازو کې بدلون باید حساب شي، ځکه چې د اجزاوو لوری د حرکت کوونکي مراجعې په نسبت نه بدلیږي. له همدې امله

$$(\dot{\mathbf{A}})_{xyz} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} \qquad (20–5)$$



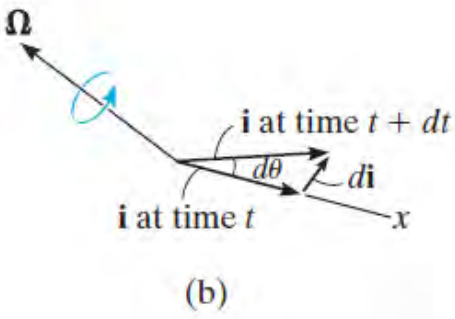
(a)

انځور 20-6

کله چې د **A** وخت مشتق د ثابت چوکاټ مراجعې په نسبت واخیستل شي، نو مونږ لرو

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} + A_x\dot{\mathbf{i}} + A_y\dot{\mathbf{j}} + A_z\dot{\mathbf{k}}$$

د واحد ویکتورونو د وخت مشتق به اوس په پام کې ونیول شي. د ببلګې په توګه، $\dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}$ $\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}$ i



(b)

i یوازې د $\dot{\mathbf{i}} = d\mathbf{i}/dt$ لوري کې د وخت په نسبت بدلون څرګندوي ، څرنګه چې **i** تل د 1 واحد اندازه لري. لکه څنګه چې په انځور 20-6b کې ښودل شوی، دا بدلون، **di**، مماس دی د لارې په اوږدو کې چې د **i** د غشي د سر لخوا توصیف کیږي، لکه څنګه چې **i** تال خوری د **Ω** د تاویدو له مله . د **di** د اندازې د بدلون کچه $\boldsymbol{\Omega}\ 1 = (d\theta/dt)\ 1$، او له دې امله مونږ کولی شو د **di** د اندازې او لوري د بدلون لپاره د کراس ضربولو په کارولو سره محاسبه کړو، $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$. عمومًا، نو*

دا پایلې په پورته معادله کې ځای پر ځای کولو او د معادلې 20-5 په کارولو سره، مونږ ترلاسه کوو

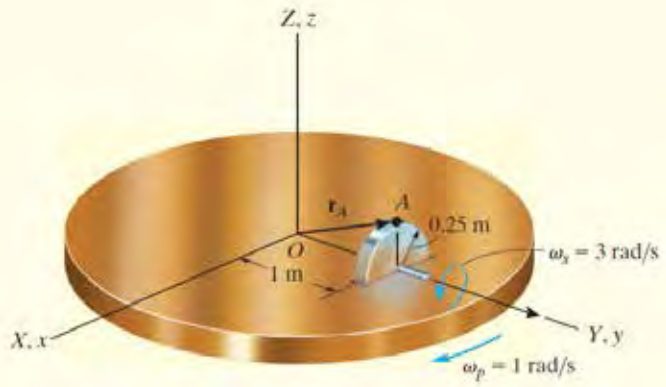
$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \qquad (20\text{–}6)$$

دا مهمه پایله به په ټوله 20.4 برخه او 21 فصل کې وکارول شي. دا وایي چې د هر ویکتور **A** د وخت مشتق، لکه څنګه چې د ثابت X ، Y، Z مراجعې چوکاټ څخه مشاهده کیږي، مساوي دی د **A** د وخت بدلون سره چې د x ، y، z خوځیدونکي-تاویدونکیو مراجعې چوکاټ څخه لیدلکیږی، معادله 20-5 ، جمع **Ω** X A ، د **A** بدلون چې د x ، y، z چوکاټ د تاویدو له امله رامینځته شوی. په پایله کې، معادله 20-6 باید هر وخت وکارول شي کله چې **Ω** د **A** په لوري کې بدلون رامنځته کړي لکه څنګه چې د X ، Y، Z مراجعې څخه لیدل کیږي. پام وکړئ چې که x، y، z محورونه خوځیدل وکړي ، نو **Ω** = 0 وي، او نو $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz}$. په بل عبارت، د **A** د وخت بدلون کچه لکه څنګه چې د دواړو محوری سیستمونو څخه لیدل کیږي، یو شان به وي.

*دا فارمولونه په 16.8 برخه کې هم پراختیا وموندله، چې د محورونو د سطحی حرکت په اړه وو.

مثال 20.1

دا لاندی ډیسک چې په انځور 20-7 کې ښودل شوی د خپل اکسل محور سره په ثابت زاویې سرعت w_s =3 rad/s تاویږي پداسې حال کې چې افقي پلټ فارم چې ډیسک پکې نصب شوی دی د عمودی محور شاوخوا په ثابت نسبت w_p = 1 rad/s سره ګرځي . د ډیسک زاویوي تعجیل او په ډیسک کې د A ټکی سرعت او تعجیل مشخص کړئ کله چې دا په ښودل شوي موقعیت کې وي.



انځور 20-7

حل

د O ټکی د ډسک لپاره یو ثابت د تاویدو ټکی دی، که چیرې ډسک دې ټکی ته د مخروط په شکل وغځول شي. د A ټکی د سرعت او تعجیل معلومولو لپاره، لومړی ضروري ده چې د ډسک زاویې سرعت **w** او زاویې تعجیل **a** معلوم کړو، ځکه چې دا ویکټورونه په 20-3 او 20-4 معادلو کې کارول کیږي.

زاویوي سرعت (Angular Velocity) :

زاویې سرعت، چې لهX ، Y، Zځخه اندازه کیږي، په ساده ډول عبارت دې په ویکټورې جمع کول د دوو جزونو د حرکت. په دې توګ

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$$

زاویوي تعجیل (Angular Acceleration) :

څرنګه چې د **w** اندازه ثابته ده، یوازې د هغې په لوري کې بدلون، لکه څنګه چې د ثابت ریفرنس څخه لیدل کیږي، د ډسک زاویوي تعجیل **a** رامنځته کوي. یو لاره چې د **a** ترلاسه کولو لپاره کارول کیږي، د **w** د دواړو جزو د وخت مشتق محاسبه کول دي چې د معادلې 20-6 څخه استفاده کیږي. په هغه وخت کې چې په انځور 20-7 کې ښکاره شوی، تصور وکړئ چې ثابت

X، Y، Z او يو ګرځيدونکی x ، y، z چوکاټ يو ځای کيږي. که چيرې څرخيدونکی x ، y، z چوکاټ انتخابشی چی زاويي سرعت $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_p = \{-1\mathbf{k}\}$ rad/s ولری، نو $\mathbf{w}_s$ به هميشه دy (نه دY) محور په لور جهت لری، او د $\mathbf{w}_s$ بدلون د وخت سره لکه څنګه چې دx ، y، z څخه ليدل کيږي صفر دی؛ يعني، $(\dot{\mathbf{w}}_s)_{xyz} = 0$ (ا ندازه او لوري د $\mathbf{w}_s$ ثابت دي). له دې کبله

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0} + (-1\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = \{3\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$

د هماغه محورونو د تاويدو په انتخاب سره، $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_p$، يا حتی که $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$، د وخت مشتق $(\dot{\mathbf{w}}_p)_{xyz} = 0$، څرنګه چې $\mathbf{w}_p$ دx ، y، z له مخې ثابت اندازه او لوری لري. له دې کبله

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

له دی کبله زايوي تعجيل د ډيسک عبارت دي په

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{3\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

سرعت او تعجيل (Velocity and Acceleration).

سرعت او تعجيل د A ټکي له کارولو د معادلو 20-3 او 20-4 موندل کيدی شي.

په پوهيدلو د $\mathbf{r}_A = \{1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}$ m انځور 20-7 مورِ لرو

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) = \{1.75\mathbf{i}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A)\\ &= (3\mathbf{i}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times [(3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})]\\ &= \{-2.50\mathbf{j} - 2.25\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}\end{aligned}$$

مثال 20.2

په یوه لحظه کی $q = 60°$ کې، په انځور 20-8 کې جایروټاپ د زاویوی حرکت دري برخې لري لکه څنګه چې ښودل شوي او اندازه یې په لاندې ډول تعریف شوي ده:

تاویدل (*spin*): $\mathbf{w}_s = 10$ rad/s چې په 6 rad/s^2 نسبت سره زیاتیږي

نوتیشن (*Nutation*): $\mathbf{w}_n = 3$ rad/s ، چې په 2 rad/s^2 نسبت سره زیاتیږي

پریسشن (*Precession*): $\mathbf{w}_p = 5$ rad/s ، چې په 4 rad/s^2 نسبت سره زیاتیږي

د پورته برخې زاویې سرعت او زاویې تعجیل معلوم کړئ.

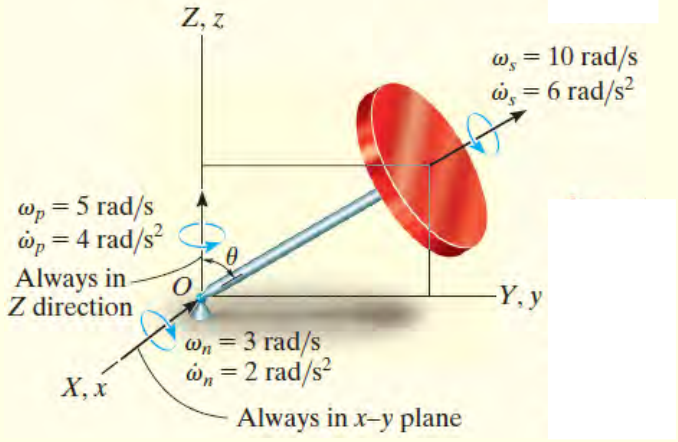
حل

زاویوي سرعت (Angular Velocity) :

پورتنۍ برخه (top) په ثابت ټکی O تاویږی. که چیرې ثابت او ګرځیدونکي فریمونه په ښودلې لحظه کې یو ځای وي، نو زاویوي سرعت د **i**، **j**، **k** اجزاوو په توګه ښودل کیدی شی، چې د x، y، z فریم څخه اندازه شوي وي؛ یعنې

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= -\omega_n\mathbf{i} + \omega_s \sin\theta\mathbf{j} + (\omega_p + \omega_s\cos\theta)\mathbf{k}\\ &= -3\mathbf{i} + 10\sin 60°\mathbf{j} + (5 + 10\cos 60°)\mathbf{k}\\ &= \{-3\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}\end{aligned}$$

زاویوي تعجیل (Angular Acceleration) :



لکه څنګه چې په مثال 20.1 کې حل شوی، زاویي تعجیل **a** به په څیرلو د هر زاویوي سرعت د ا جزاوو د وخت د بدلون سره په جلا ډول ټاکل کیږي. مور به Ω غوره کړو د x، y، z ریفرنس لپاره ترڅو دا چې د **w** جز چې د x، y، z څخه لیدل کیږی او ثابت جهت ولري.

د پورتنۍ برخې (ټاپ) د حرکت دقیق لیدنه څرګندوي چې $\mathbf{W}_s$ د x، y، z په پرتله ثابت لوری لري، که چیرې دا محورونه په $\mathbf{\Omega} = \mathbf{W}_n + \mathbf{W}_p$ تاو شی. نو بیا

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + (\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{\omega}_s \\ &= (6 \sin 60°\mathbf{j} + 6 \cos 60°\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (10 \sin 60°\mathbf{j} + 10 \cos 60°\mathbf{k}) \\ &= \{-43.30\mathbf{i} + 20.20\mathbf{j} - 22.98\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

څرنګه چې $\mathbf{W}_n$ همیشه په ثابته X–Y سطحه کې پراته دی، دا ویکټور ثابت لوری لري، که چیرې حرکت د x، y، z محورونو څخه وګوري چې تاویدل لري

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p \,(\text{not } \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p).$$

نو بیا

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_n = -2\mathbf{i} + (5\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i}) = \{-2\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\}\,\text{rad/s}^2$$

په پای کې، جز $\mathbf{W}_p$ همیشه د Z محور په اوږدو کې پروت وي، نو دلته دا اړینه نه ده چې د x، y، z محورونه په تاویدلوتوګه وګڼل شي، یعنې $\mathbf{\Omega} = 0$. له دې امله موږ لرو

نو موږ لرو

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_p = \{4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

له دې امله، د ټاپ زاویې تعجیل داسې دی

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{-45.3\mathbf{i} + 5.20\mathbf{j} - 19.0\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

20.3 . عمومي حرکت (GENERAL MOTION)

په انځور 20-9 کې يو جامد جسم ښودل شوی دی چې په دريو خاوو کی عمومي حرکت لري، چيرې چې زاويوي سرعت يی **w** او زاويي تعجيل يی **a** دي. که چيرې د *A* ټکی حرکت $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{a}_A$ معلوم وي، نو د بلې ټکی *B* حرکت د نسبي حرکت تحليل په کارولو سره معلوميدلی شي. په دې برخه کې به، د نسبي حرکت تعريف لپاره به يو ليږدونکی (translating) محوری سيستم و کارول شی، او په بله برخه کې به يو ريفرنس چې څرخيدونکی او هم ليږدونکی وي، وربانډی غور وشی



انځور 20-9

که مبدا د ليږدونکی سيستم x، y، z (**Ω = 0**) په (اساسي ټکی) *A* کی موقعيت ولري، نو په هغه وخت کې چې بنودلشوی، د جسم د انی حرکت د مجموعې په توګه ، چې حرکت يې $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{a}_A$ دی، او د جسم تاويدل آنی محور ته چې له ټکي A تيريږي، کتل کيدی شي. څرنګه چې بدن سخت دی، د *B* ټکی حرکت د يوه ليدونکی لخوا کوم چې په نقطه *A* کی موقعيت لري، نو هغه برابر دی د جسم تاويدونه يوه ثابت ټکی ته. دا نسبي حرکت د تاويدو په آنی محور ته رامنځته کيږي او د لاندې معادلو سره تعريف کيږي: $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{B/A}$, معادله 20-3 او $\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}_{B/A})$ معادله 20-4 . د ليږدونکی محورونو لپاره، نسبي حرکتونه د مطلق حرکتونو سره تړاو لري: لکه , $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ او $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ معادلې 15-16 او 16-17 په ترتيب سره، له دې امله، د *B* ټکی مطلق سرعت او تعجيل د لاندی معادلو له لارې معلوميدلی شي

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (20\text{–}7)$$

او

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (20\text{–}8)$$

دا دوی معادلې په اصل کې د يو جامد جسم د عمومي سطحې حرکت د معادلو 16-16 او 16-18 ته ورته دي . خو، په کارولو کې د دې خوا حرکت لپاره ستونزه راځي، ځکه چې **a** بايد د **w** اندازه او هم د جهت بدلون اندازه کړي.

د ډیری تطبیقاتو لپاره، د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{a}_B$ ترلاسه کولو یوه اسانه لاره داده چې په یاد ولروچی: $v_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{W} \times \mathbf{r}_{B/A}$:او له دې سره معادله 20-7 داسې کیږي $= v_B - v_A$

د کراس ضربول بنیي چې $\mathbf{v}_{B/A}$ په $\mathbf{r}_{B/A}$ او $\mathbf{W}$ دواړو عمود دی، او له دې سره، د معادلی B-14 د ضمیمی B له مخې، مونږ ارتیا لرو چې

$$\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} = 0 \qquad (20–9)$$

د وخت مشتق یی نیسو چې $\mathbf{a}_{B/A}$ په لاس راوړو، مونږ لرو

$$\mathbf{v}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} + \mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{a}_{B/A} = 0 \qquad (20–10)$$

نو بیا

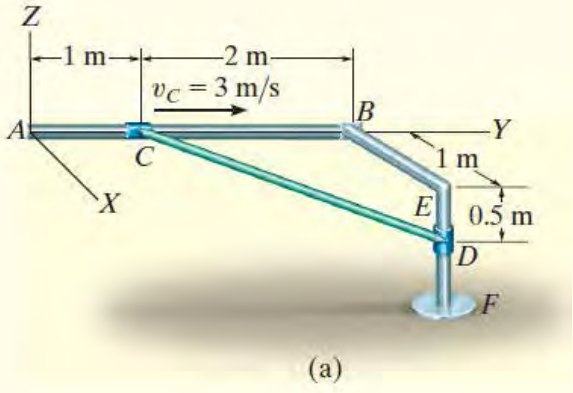
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

د لاندې مثال دوهم حل د دې نظریې پلي کولو بیلګه بنیي .

مثالونه

مثال 20.3

که چیرې په انځور 20-10a کې د C غړوندی په 3 m/s تیزوالی سره د B په لور حرکت وکړي، په D کې د غړوندی سرعت او زاویوي سرعت د بار CD په بنودل شوي لحظه کې مشخص کړئ. بار د بال-او- ساکټ بندونو په واسطه د هغې په پایلوټکیو کی د غړوندیوسره وصل دی.



(a)

حل I

په بار CD عمومي حرکت پلي شوي دي. ولي؟

سرعت په ټکی D د بار کی د سرعت په ټکی C کی په دی لاندی معادله سره تړاو لري

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

ثابت او لیږد یدیونکی ریفرینس فریمونه فرض کیږي چې په پام نیولي لحظه کی سره یو ځای کیږي، انځور 20-10b . مورږ لرو

$$\mathbf{v}_D = -v_D\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_C = \{3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{r}_{D/C} = \{1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\}\ \text{m} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

دا په پورته معادله کی ځای پر ځای کوو او حاصل یی دي

$$-v_D\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 2 & -0.5 \end{vmatrix}$$

دا معادله پراخه وو او د **i, j, k** د اجزاوی د یو بل سره برابرول دا لاندی ورکوي

$$-0.5\omega_y - 2\omega_z = 0 \qquad (1)$$
$$0.5\omega_x + 1\omega_z + 3 = 0 \qquad (2)$$
$$2\omega_x - 1\omega_y + v_D = 0 \qquad (3)$$

دغه معادلې څلور مجهوله لري.* څلورمه معادله کولی شي وليکل شي که د **W** جهت مشخص شي. په دې اړه، د **W** هر جز چې د بار د محور په اوږدو کې عمل کوي، د غړوندیو حرکت کولو باندې هیڅ اغیزه نلري، بلکې دا جز یوازې بار په خپل محور تاوه وی. له همدې امله، که **W** د بار د محور پر عمودي لوری مشخص شي، نو **W** باید یو ځانګړی اندازه ولري چې پورته معادله دقناعت وړ شی. له دې امله،

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_{D/C} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})\cdot(1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) = 0$$
$$1\omega_x + 2\omega_y - 0.5\omega_z = 0 \qquad (4)$$

معادلې 1 تر 4 یو ځاي حل کوو او دا لاندی په لاس راځي

$$\omega_x = -4.86\ \text{rad/s} \quad \omega_y = 2.29\ \text{rad/s} \quad \omega_z = -0.571\ \text{rad/s}$$
$$v_D = 12.0\ \text{m/s, so that} \quad \omega = 5.40\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

* که څه هم دا حالت دی، د $\mathbf{v}_D$ اندازه ترلاسه کیدی شي. د بېلګې په توګه، معادلې 1 او 2 د $\mathbf{W}_y$ او $\mathbf{W}_x$ لپاره د $\mathbf{W}_z$ له مخې حل کړئ او دا په معادله 3 کې ځای پر ځای کړئ. تاسو به وموميء چې $\mathbf{W}_z$ له منځه ځي، او دا به د $\mathbf{v}_D$ لپاره حل ممکن کړي.

حل II

له معادلې 20-9 کار اخلو

$$\mathbf{v}_{D/C} = \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_C = -v_D\mathbf{k} - 3\mathbf{j}$$

نو بیا

$$\mathbf{r}_{D/C} \cdot \mathbf{v}_{D/C} = (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) \cdot (-v_D\mathbf{k} - 3\mathbf{j}) = 0$$
$$(1)(0) + (2)(-3) + (-0.5)(-v_D) = 0$$
$$v_D = 12\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

څرنګه چې **W** عمود دی په $\mathbf{r}_{D/C}$ ، نو بیا له معادلې 20-7 څخه:

$$\mathbf{v}_{D/C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

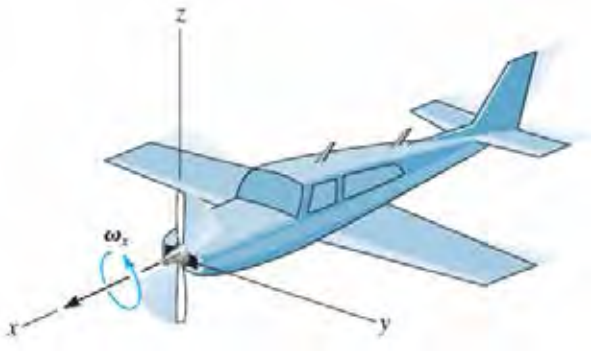
مونږ لرو

$$v_{D/C} = \omega\, r_{D/C}$$
$$\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2} = \omega\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-0.5)^2}$$
$$\omega = 5.40\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

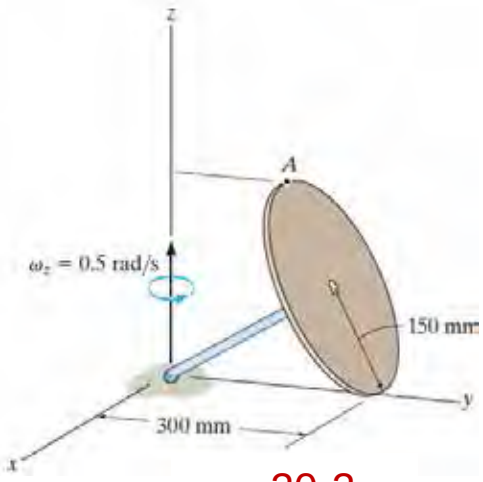
PROBLEMS

20–1 . د هوايي جهاز پرا ېپلر په ثابت دايره وي تيزوالي w_x **i** سره تاويږی، پداسې حال کې چې الوتکه په ثابت کچه w_t يو دور کوي. د پرا ېپلر زاويوی تعجيل د لاندې شرايطو پر اساس محاسبه کړئ (a) :که چيرې دور افقي وي، يعنی w_t **k** ، او (b)که چيرې دور عمودي وي، ښکته خواته، يعنی، w_t **j**.



پ 20-1

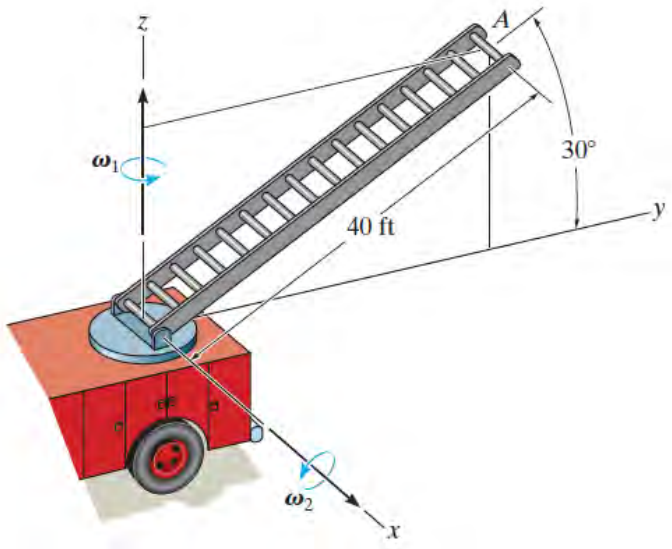
20–2 . ډیسک په z محور په ثابت کچه $w_z = 0.5$ rad/s سره په افقي سطحه باندې پرته له بنویدو تاویږی. سرعت او تعجیل د A تکی په ډیسک، محاسبه کړئ.



پ 20-2

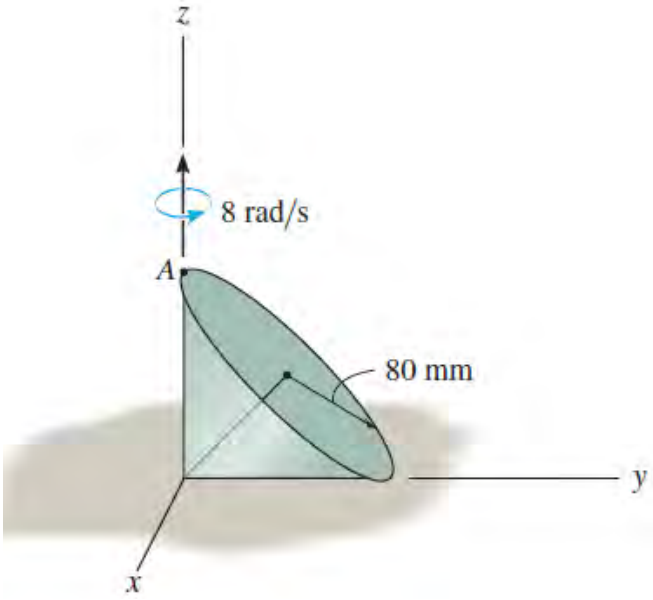
20–3 . د اور وژنې د ټرک زینه په z محور کې په زاویوي سرعت $w_1 = 0.15$ rad/s سره تاویږي ، کوم چې په 0.8 rad/s² سره زیاتوالی کوي. په هماغه وخت کې دا پورته په ثابت نسبت $w_2 = 0.6$ rad/s سره تاویږی. په دی شیبه کی د A ټکی سرعت او تعجیل محاسبه کړئ، کوم چې د زینې په سر کې موقعیت لري.

***20–4 .** د اور وژنې د ټرک زینه په z محور کې په زاویوي سرعت $w_1 = 0.15$ rad/s سره تاویږي ، کوم چې په 0.20 rad/s² سره زیاتوالی کوي. په هماغه وخت کې دا پورته په ثابت سرعت $w_2 = 0.6$ rad/s سره تاویږی، اوپه 0.4 rad/s² سره زیاتوالی کوي. په دی شیبه کی د A ټکی سرعت او تعجیل محاسبه کړئ، کوم چې د زینې په سر کې موقعیت لري.



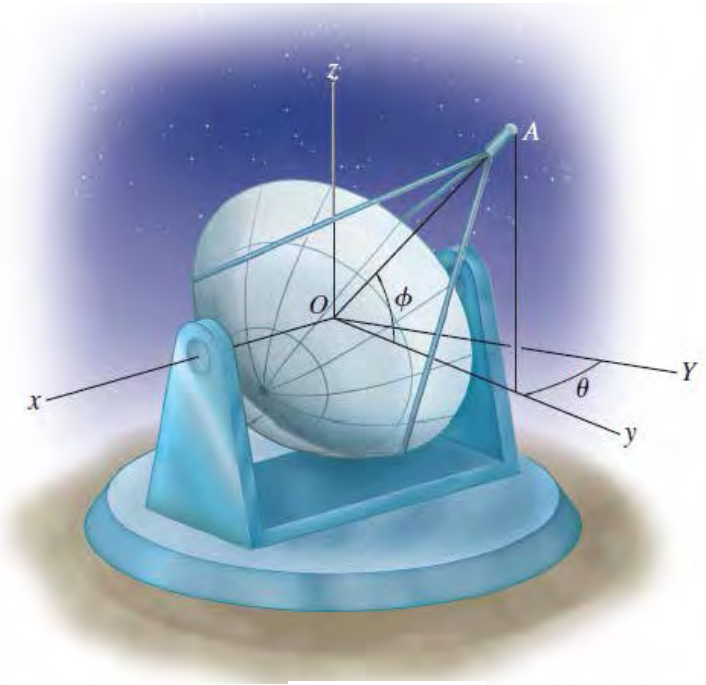
پ 20-3/4

20–5 . دا لاندی مخروط په دایروی شکل رغړي او په ثابت نسبت $w_z = 8$ rad/s په z محور تاویږی. که چیرې مخروط بې له بنویدو رغړي ، زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل یی محاسبه کړئ. همدارنګه، د A ټکي سرعت او تعجیل څه دي؟



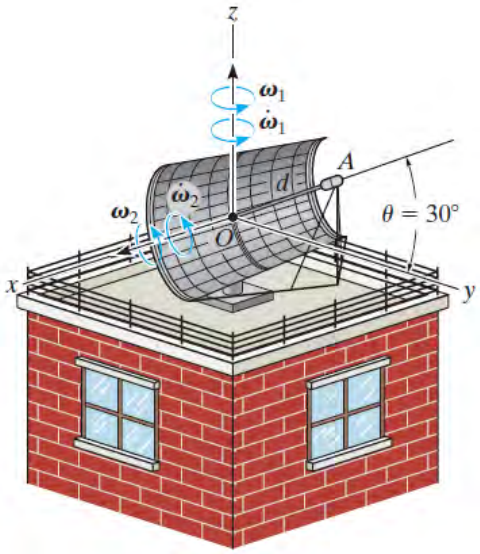
پ 20-5

20–6 . دا لاندی أنتن د جیټ الوتکې حرکت تعقیبوي. په هغه لحظه کې چې $q = 25°$ او $f = 75°$ وي، ثابت زاویوي بدلونونه $\dot{q} = 0.4$ rad/s او $\dot{f} = 0.6$ rad/s دي. په د لحظه کی د سیګنال هارن A سرعت او تعجیل محاسبه کړئ. د OA فاصله 0.8 متره ده.



پ 20-6

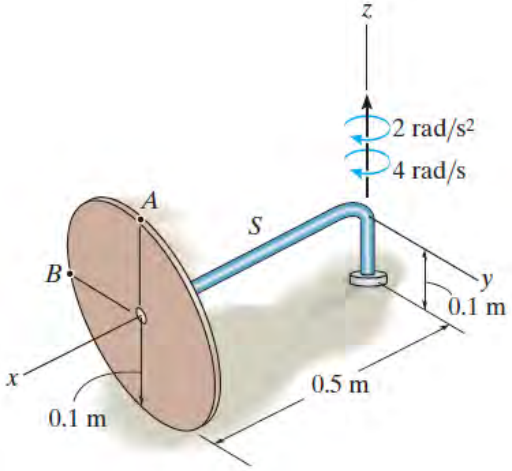
20–7 . په یوه ورکړل شوي وخت کې، آنتن په z محور زاویوي حرکت $w_1 = 3$ rad/s او $\dot{w}_1 = 2$ rad/s² لري. په عین وخت کې، $q = 30°$، د x محور په شاوخوا کې زاویوي حرکت $w_2 = 1.5$ rad/s او $\dot{w}_2 = 4$ rad/s² دی. د سیګنال هارن A سرعت او تعجیل په دغه وخت کې محاسبه کړئ. د O څخه تر A پورې فاصله $d = 3$ ft ده.



پ 20-7

20–8* . ډیسک په S شافټ ناویږي، پداسې حال کې چې شافټ په z محور په $w_z = 4$ rad/s سره تاویږي، کوم چې په 2 rad/s² سره زیاتوالی مومي. د A ټکې سرعت او تعجیل په ورکړل شوي وخت کې محاسبه کړئ. هیڅ ښویدنه نه کیږي.

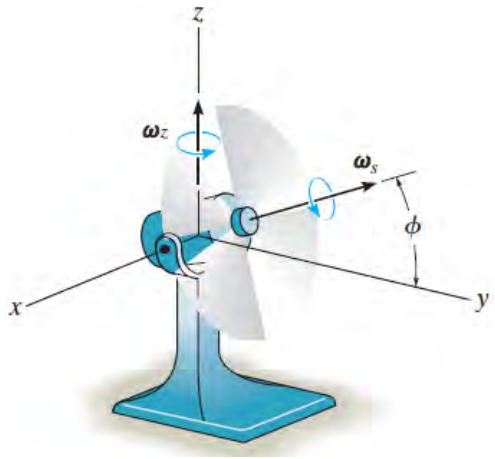
20–9 . ډیسک په S شافټ تاویږي، پداسې حال کې چې شافټ په z محور په $w_z = 4$ rad/s سره تاویږي، کوم چې په 2 rad/s² سره زیاتوالی مومي. د B ټکې سرعت او تعجیل په ورکړل شوي وخت کې محاسبه کړئ. هیڅ ښویدنه نه کیږي.



پ 20-8/9

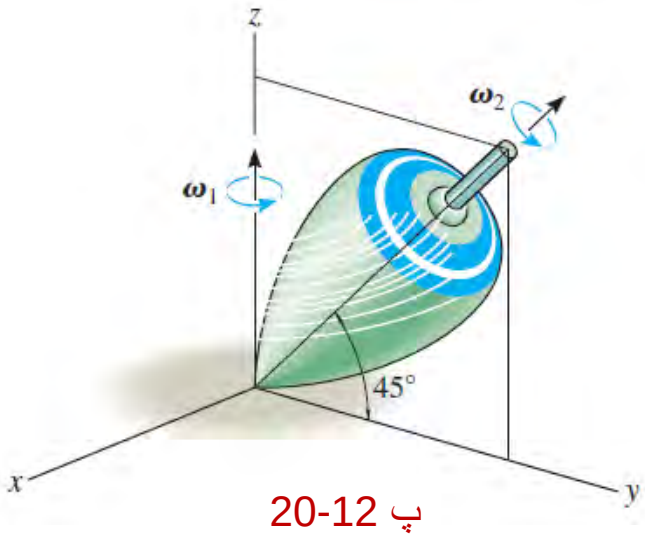
20–10. برقي پکه په يوه څرخيدونکي اتکا باندې نصب شوی ده، داسې چې پکه په **z** محور په ثابت سرعت $w_z = 1$ rad/s سره ګرځي او د پکې په لې په ثابت نسبت $w_s = 60$ rad/s سره تاويږی. که چيرې $f = 45°$ د حرکت لپاره وي، د په لو زاويوی سرعت او زاويوی تعجيل محاسبه کړئ.

20–11. برقي پکه په يوه څرخيدونکي اتکا باندې نصب شوی ده، داسې چې پکه په **z** محور په ثابت نسبت $w_z = 1$ rad/s سره تاويږی او د پکې په لې په ثابت نسبت $w_s = 60$ rad/s سره تاويږی. که چيرې په هغه وخت کې $f = 45°$ ، $\dot{f} = 2$ rad/s د حرکت لپاره وي، د په لو زاويوی سرعت او زاويوی تعجيل محاسبه کړئ.



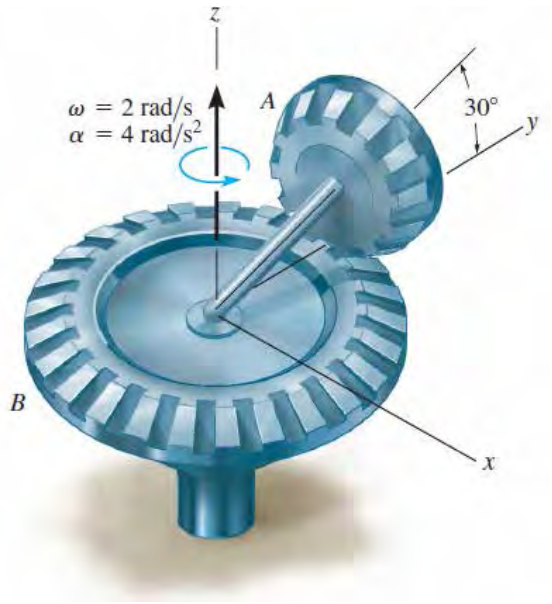
پ 20-10/11

***20–12** . د پورته خوا (ټاپ) حرکت داسې دی چې په ورکړل شوي وخت کې دا په **z** محور په $w_1 = 0.6$ rad/s سره تاويږي، پداسې حال کې چې دا په $w_2 = 8$ rad/s کې څرخيږي. د پورته خوا (ټاپ) زاويوی سرعت او زاويوی تعجيل په همدې لحظه کې محاسبه کړئ. پايله د کارټيزين ويکتور په توګه څرګنده کړئ.



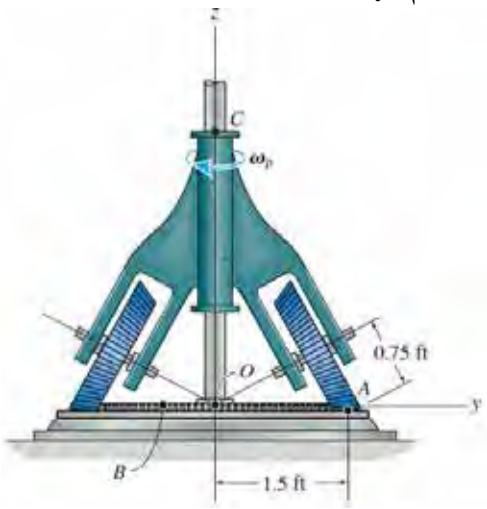
پ 20-12

20–13. بیول(bevel) ګیر A په ثابت ګیر B رغړي. که چیرې په ورکړل شوي وخت کې شافټ، چې A وربانده ترلی دي، په 2 rad/s سره تاویږی او زاویوی تعجیل یې 4 rad/s² دي، د ګیر A زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل محاسبه کړئ.



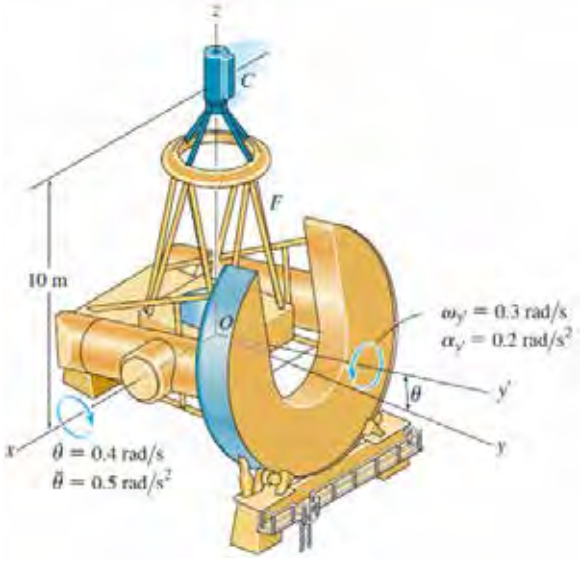
پ 20-13

20–14 . که چیرې فریم په ثابت زاویوی سرعت $\mathbf{w}_p = \{-10\mathbf{k}\}$ rad/s سره تاویږی او افقي ګیر B په ثابت زاویوی سرعت $\mathbf{w}_B = \{5\mathbf{k}\}$ rad/s سره تاویږی، د بیول(bevel) ګیر A زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-14

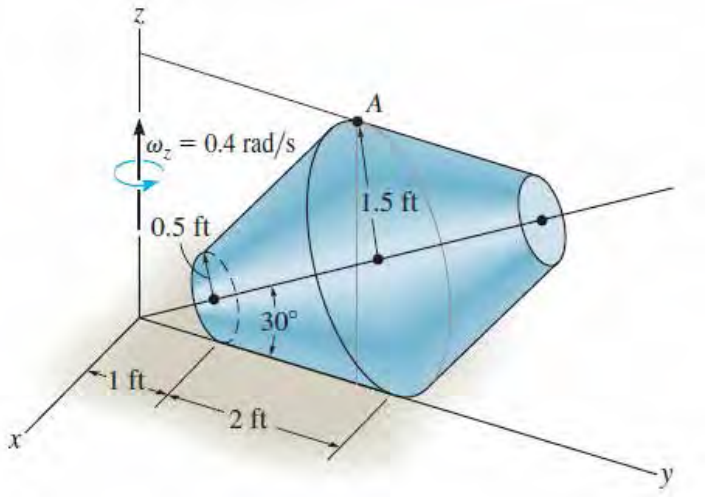
20–15 . ټلسکوپ په فریم F باندې نصب شوی دی چې کولای شي په آسمان کې هرې نقطې ته برابر شی. په هغه وخت کې چې $q = 30°$ وي، فریم زاویوی تعجیل $a_{\dot{y}} = 0.2\ rad/s^2$ او زاویوی سرعت $w_{\dot{y}} = 0.3\ rad/s$ ، د $\dot{y}$ محورته لری، او $q^{\cdot\cdot} = 0.5\ rad/s^2$ او $q^{\cdot} = 0.4$ rad/sدی. د وسیلې د کپسول C سرعت او تعجیل په دغه لحظه کې معلوم کړئ.



پ 20-15

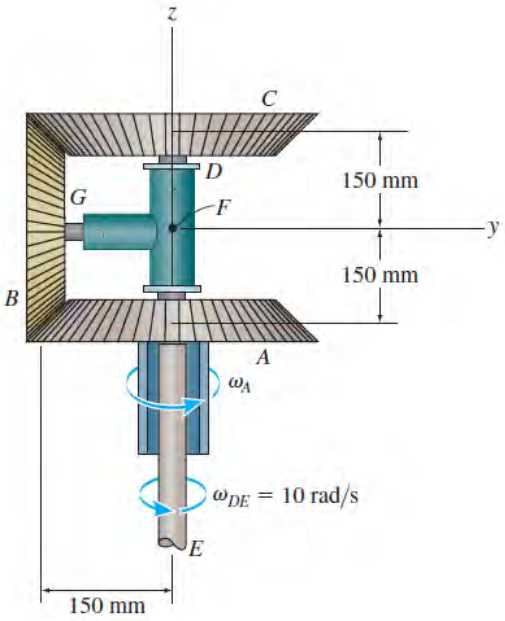
***20–16 .** غوڅ شوي مخروط په z محور بې له سویدو په افقي سطحه او په ثابت سرعت w_z = 0.4 rad/s سره تاویږي . په مخروط د ټکي A سرعت او تعجیل معلوم کړئ.

20–17 . غوڅ شوي مخروط په z محور بې له ښویدو په افقي سطحه په سرعت $w_z = 0.4$ rad/s سره، که چیرې په همدې وخت کې w_z زیاتیږی په $\dot{w}_z = 0.5\ rad/s^2$ سره، په مخروط د ټکي A سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



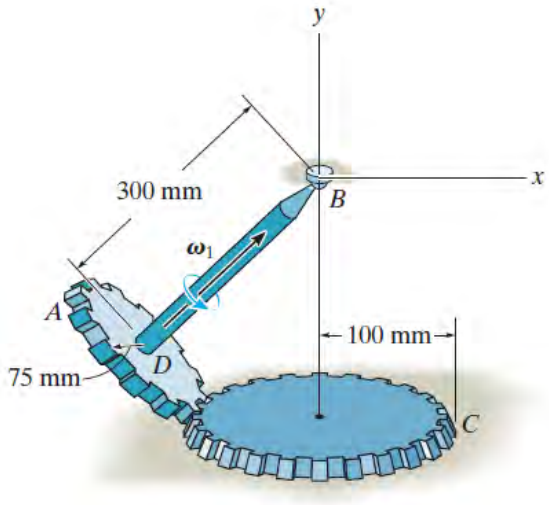
پ 20-16/17

20–18 . ګیر C د شافټ DE لخوا په حرکت راځی، په داسې حال کې چې ګیر B په خپل محور GF آزادانه څرخیږي، کوم چې په شافټ DE آزادانه حرکت کوي. که چیرې ګیر A ثابت ونیول شي ($w_A = 0$) او شافټ DE په ثابت زاویوی سرعت $w_{DE} = 10$ rad/s سره حرکت کوي، د ګیر B زاویوی سرعت معلوم کړئ.



پ 20-18

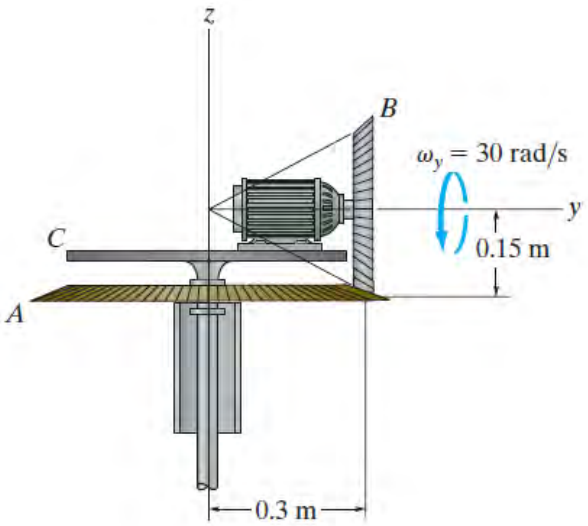
20–19 . شافټ BD په B نقطه کې د بال او ساکټ جاینټ سره وصل شوی دی، او یو بیول ګیر A د ده بلې خواته وصل شوی دی. دا ګیر د ثابت ګیر C سره په تماس کې دی. که شافټ او ګیر A په ثابت زاویوی سرعت $w_1 = 8$ rad/s سره څرخیږي، د ګیر A زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-19

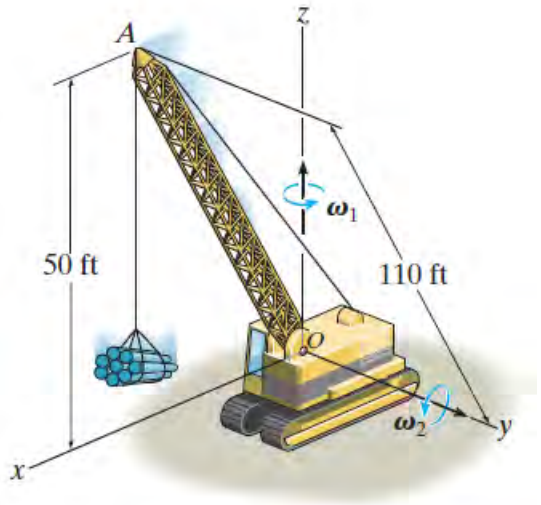
***20–20 .** ګیر B د موټور په وسیله چې په ګرزیدونکی میز C باندې ټینګ شوی، چلول کیږي. که چیرې ګیر A کلک نیول شوی وي، او د موټور شافټ د ثابت زاویوی سرعت $w_y = 30$ rad/s سره تاویږی، د ګیر B زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل معلوم کړئ.

20–21 . ګیر B د موټور په وسیله چې په ګرزیدونکی میز C باندې ټینګ شوی، چلول کیږي. که چیرې ګیر A او موټور شافټ په ثابت زاویوی تیزوالی په $w_A = \{10k\}$ rad/s او w_y = {30j} rad/s په ترتیب سره تاوشی، د ګیر B زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل معلوم کړی.



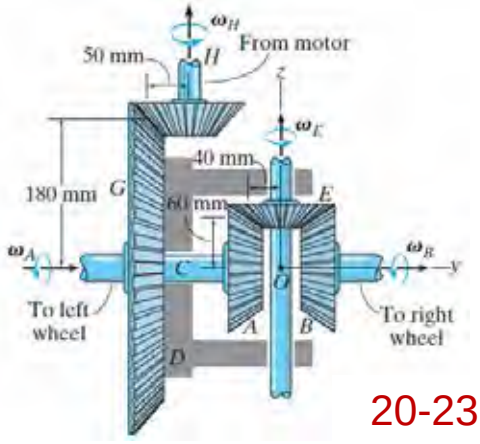
پ 20-20/21

20–22 . د کرین بوم OA په z محور په ثابت زاویوی سرعت $w_1 = 0.15$ rad/s سره تاویږي ، پداسې حال کې چې دا په ثابت زاویوی سرعت $w_2 = 0.2$ rad/s بشکته لورته تاویږی. د بوم د سر ټکي A سرعت او تعجیل په ورکړل شوي وخت کې معلوم کړئ.



پ 20-22

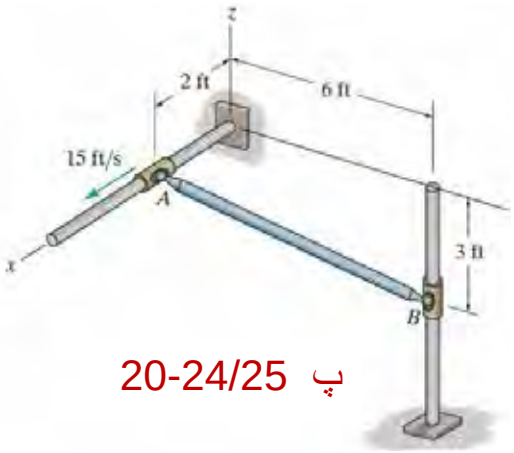
20–23 . د موټور توپیر(differential) دوه شاتنۍ ټیرونه ته اجازه ورکوي چې د مختلفو تیزوالی سره تاو شی کله چې موټرپه منحني کرښه حرکت کوی. د عملیاتو لپاره، شاتنۍ اکسلونه د ټیرونه سره په یوه سر کې ټرل شوي دي او په بل پای کې بیول ګیر *A* او *B* لري. توپیری صندوق *D* په کینې شافټ باندې اینبودل شوی دی خو کولی شي چې په *C* باندی پرته له اکسل څخه تاو شی. صندوق د پینیون ګیر *E* ته په اکسل باندی اتکا ورکوي چې د ګیر *A* او *B* سره یوځای (mesh) کیږی. په پای کې، د حلقې ګیر *G* د توپیر صندوق سره کلک ټرل شوی دی ترڅو صندوق د حلقې ګیر سره تاوشي کله چې ورستنی د ډرایو پینیون *H* لخوا حرکت کوي. دا ګیر، لکه د توپیری صندوق، د کینې ټیر په اکسل باندی په ازاده توګه تاویدی شی. که چیرې ډرایو پینیون د $w_H = 100$ rad/s سره څرخیږي او پینیون ګیر *E* په خپل شافټ باندی په $w_E = 30$ rad/s سره وڅرخیږي، د هر اکسل زاویوی سرعت w_A او w_B معلوم کړئ.



پ 20-23

***20-24 .** د *AB* میله د غړوندیو سره په دواړو پایلو کی د بال او ساکت جاینټونو سره ټرل شوې ده. که چیرې غړوند *A* په $w_A = 15$ ft/s سرعت سره په ښودل شوي وخت کې حرکت وکړي، د غړوند *B* سرعت معلوم کړئ.

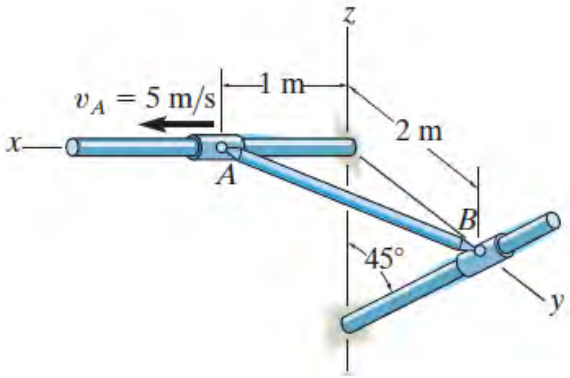
20-25. د *AB* میله له غړوندویو سره په دواړو پایلو کی د بال او ساکت جاینټونو سره ټرل شوې ده. که چیرې غړوند *A* د تعجیل $a_A = 2$ ft/s² سره په ښودل شوي وخت کې حرکت وکړي، د غړوند B تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-24/25

20–26 . میله AB له غړوندو سره په دواړو پایلو کی د بال او ساکت جاینټونو سره ټړل شوې ده. که چیرې غړوند A په ثابته میله سره په $v_A = 5\ m/s$ حرکت وکړي، د میلې زاویوی سرعت او د غړوند B سرعت په ورکړل شوي وخت کې معلوم کړئ. فرض کړئ چې د میلې زاویوی سرعت د میلې د محورسره عمودي وي.

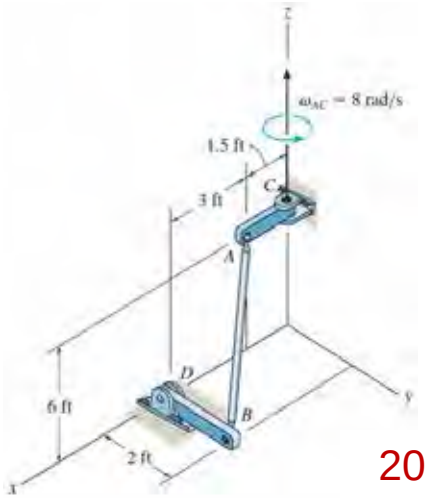
20–27 . . میله AB له غړوندو سره په دواړو پایلو کی د بال او ساکت جاینټونو سره ټړل شوې ده. که چیرې غړوند A په ثابته میله سره په $v_A = 5\ m/s$ حرکت وکړي، او تعجیل $= 2\ m/s^2$ a_A په دی وخت کی لري، د میلې زاویوی تعجیل او د غړوند B تعجیل په ورکړل شوي وخت کې معلوم کړئ. فرض کړئ چې د میلې زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل د میلې په محورعمود دي.



پ 20-26/27

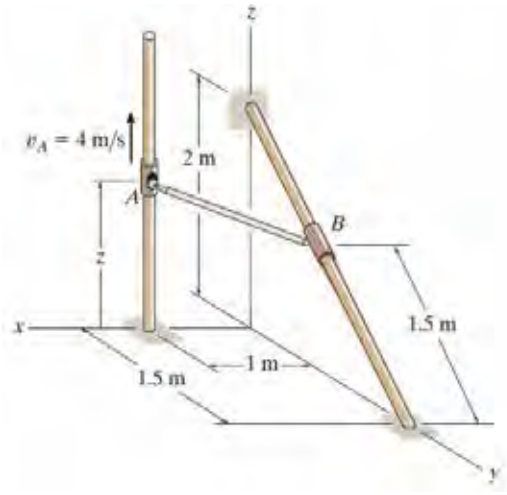
20–28* میله AB د تاویدونکي لاس سره په بال او ساکت جاینټونو ټړل شوې ده. که چیرې AC په پن C باندی په ثابت زاویوی سرعت 8 rad/s سره تاویږي، د ټروند BD زاویوی سرعت په بښودل شوي وخت کې معلوم کړئ.

20–29 . میله AB د تاویدونکي لاس سره په بال او ساکت جاینټونو ټړل شوې ده. که چیرې AC په پن C باندی په زاویوی سرعت8 rad/s او اویوی تعجیل6 rad/s² سره تاویږي ، د ټروند BD زاویوی سرعت او زاویی تعجیل په بښودل شوي وخت کې معلوم کړئ.



پ 20-28/29

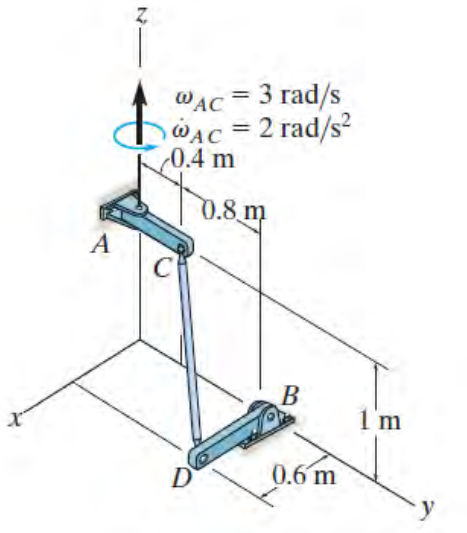
20–30 . میله AB په پایلو کی د غړوند یو سره د بال او ساکت جاینټونو په واسطه ټرل شوې ده. که چیرې غړوند A په $v_A = 4$ m/s تیزوالی سره حرکت کړي، د غړوند B تیزوالی په هغه وخت کې چې $z = 2$ m دی، معلوم کړئ. فرض کړئ چې د میلې زاویوی سرعت د میلې د محورسره عمود وي.



پ 20-30

20–31 . میله CD د تاویدونکیو لاسو سره په بال او ساکت جاینټونو ټرل شوې ده. که چیرې AC په ښودل شوې حرکت کې وي، د ټروند BD زاویوی سرعت په ښودل شوې وخت کې معلوم کړئ.

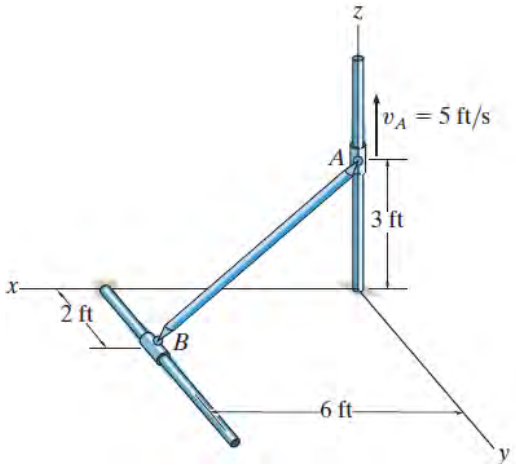
20–32 . میله CD د تاویدونکیو لاسو سره په بال او ساکت جاینټونو ټرل شوې ده. که چیرې AC ښودل شوې حرکت کې وي، د ټروند BD زاویوی تعجیل په ښودل شوې وخت کې معلوم کړئ.



پ 20-31/32

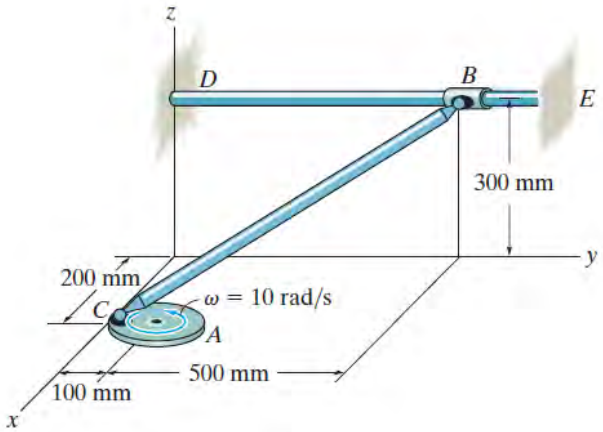
20–33 . که چیرې میله په پایلو کې د بال او ساکټ جاینټونو سره په ښویو غړوندو A او B سره وصل شوې وي، د غړوند B سرعت په ورکړل شوي وخت کې معلوم کړئ که چیرې A په ثابت تیزوالی $v_A = 5$ ft/s سره پورته حرکت وکړی. همدارنګه، د میلې زاویوی سرعت معلوم کړئ که چیرې دا د میلې محور ته عمود وي.

20–34* . که چیرې غړوند A په پوښتنه 20-33 کې په تعجیل $\mathbf{a}_A = \{-2\mathbf{k}\}$ ft/s² سره پورته حرکت وکړي په هغه وخت کې چې د ده تیزوالی $v_A = 5$ ft/s وي، د غړوند B تعجیل په ورکړل شوي وخت کې معلوم کړئ.



پ 20-33/34

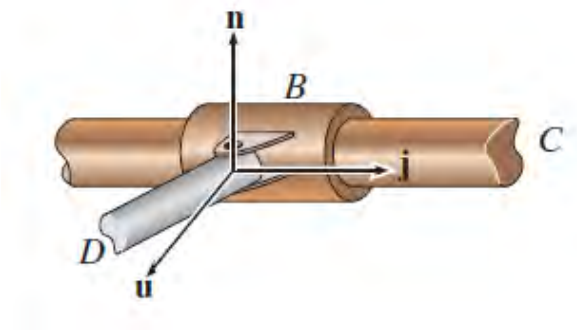
20–35 . ډیسک A په ثابت زاویوی سرعت 10rad/s سره تاویږی. که چیرې میله BC د ډیسک او غړوند سره د بال او ساکټ جاینټونو سره ټرل شوی وی، د غړوند B سرعت په ښودلشوي وخت کې معلوم کړئ. همدارنګه، د میلې زاویوی سرعت ω_{BC} به څه شی وی که چیرې دا د میلې په محور عمود وي.



پ 20-35

***20–36 .** پوښتنه 20–33 حل کړئ که چيرې په *B* نقطه کې وصل کيدل د بال او ساکت جوينټ پرځای د پين سره ترسره شوی وي، لکه څنګه چې په لاندی انځور کې ښکاره شوی. د دې حل لپاره د يو اضافي معادلې ترلاسه کولو لپاره له **V # u = 0** څخه استفاده وکړئ

.اشاره: محدوديت راډ ته اجازه ورکوی چې په دواړو خاوو بار (**j** لوري) او د پن محور (**n** لوري) په اوږدو کې تاو شی. څرنګه چې د **u** لوري د تاويدو جز نشته، يعنې، د **n** او **j** سره عمود دي چيرې چې **u = j X n**، د حل لپاره اضافي مساوات د **w . u = 0** څخه ترلاسه کيدی شي. ويکتور **n** د $\mathbf{r}_{D/B} \times \mathbf{r}_{C/B}$ په څير په ورته لوري کې دی.



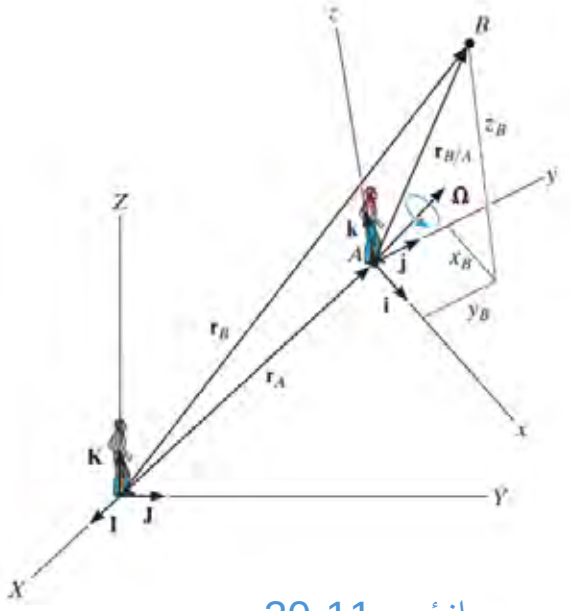
پ 20-36

*20.4 . د نسبي حرکت تحليل د خوځيدونکيو او تاويدونکيومحورونو سره: (RELATIVE- MOTION ANALYSIS USING TRANSLATING AND ROTATING AXES)

د يو سخت جسم دري-بعدي حرکت تحليل کولو ترټولو عمومي لاره د x ، y، z محورونو کارول دي چې دواړه خوځيدونکی او تاويدونکی حالت نسبت يو بل چوکاټ X ، Y، Z ته ولری. دا تحليل هم د دې امکان برابروي چې د ميکانيزم پر ښلابښلو برخو کې موقعيت لرونکيو دوو ټکيو *A* او *B* حرکتونه معلوم کړي، او د يوی ذری د بلی په پرتله نسبي حرکت معلوم کړو کله چې يوه يا دواړه ذري د انحنا لرونکيولارو په اوږدو کې حرکت کوي.

لکه څنګه چې په انځور 20-11 کې ښودل شوي، د *A* او *B* ټکو موقعيتونه د X ، Y، Z په چوکاټ کی د موقعيت ويکتورونو $\mathbf{r}_A$ او $\mathbf{r}_B$ لخوا مشخص شوي دي. د *A* ټکي د x ، y، z کوآرډينيټ سيستم مبداء ده، چې د X ، Y، Z په نسبت خوځيدنه او تاويدنه کوی. د هغه لحظې په

اړه چې پام کې نیول شوی، د ټکي A سرعت او تعجیل $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{a}_A$ دي، او د x ، y، zمحورونو زاویوی سرعت او زاویوی تعجیل $\boldsymbol{\Omega}$ او $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$ دي. دغه ټول ویکتورونه د X ، Y، Z چوکاټ په نسبت اندازه شوي دي، که څه هم دوی کولای شي چې د کارتیزین اجزاوو په بڼه د هر یوه محور په اوږدو کې وښودل شی.



انځور 20-11

موقیعت (Position). که موقیعت د "B د A په پرتله" د نسبي موقیعت ویکتور $\mathbf{r}_{B/A}$ لخوا مشخص شي، انځور 20-11 ، نو د ویکتور د جمعې له لارې،

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad (20–11)$$

چیرې چې

$\mathbf{r}_B$ = د B موقعیت

$\mathbf{r}_A$ = د مبدا A موقعیت

$\mathbf{r}_{B/A}$ = موقعیت "د B نسبت A ته"

سرعت (Velocity). د نقطې B سرعت چې د X ، Y، Z څخه اندازه کیږي، کولی شي د معادلې 20-11 د وخت مشتق اخیستلو له لارې معلوم شي

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

لومړۍ دوی اصطلاوی د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{v}_A$ نمايندگي کوي. وروستی اصطلا کيدی شی د 20-6 معادلي په کارولو سره وارزول شي، څرنګه چې $\mathbf{r}_{B/A}$ د تاويدونکيو مرجعي څخه اندازه کيږي. له دې امله

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{\mathbf{r}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (20–12)$$

نو بيا

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \quad (20–13)$$

چيرۍ چې

$\mathbf{v}_B$ = د B سرعت

$\mathbf{v}_A$ = د مبداء A سرعت مرجع x,y,z ته

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = سرعت د " B د A په پرتله" لکه څرنګه چې ليدونکی تاويدونکيو x ، y، z مرجعي سره ترلې لخوا اندازه کيږي.

$\mathbf{W}$ = د فريم x,y,z مرجع زاويوي سرعت

$(\mathbf{r}_{B/A})$ = د B موقعيت نسبت A ته

تعجيل (Acceleration). د نقطې B تعجيل چې د X، Y، Z څخه اندازه کيږي، د معادلې 20-13 د وخت مشتق اخيستلو له لارې معلوميږي

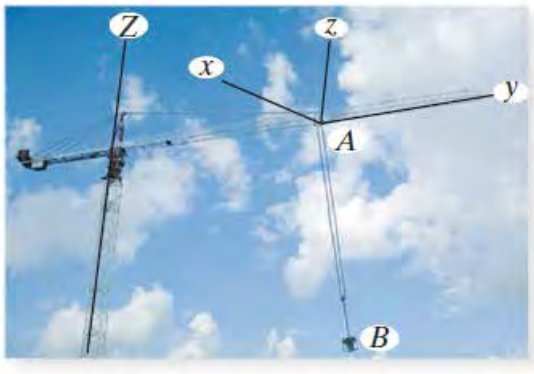
$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

د کين خوا اصطلاح او د بنې خوا لومړۍ اصطلاح په ترتيب سره د $\mathbf{a}_B$ او $\mathbf{a}_A$ نمايندگي کوي. وروستی اصطلاح د معادلې 12-20 په کارولو سره ارزول کيدی شي، او وروستی اصطلاح د معادلې 6-20 په تطبيق کولو سره ارزول کيږي، کوم چې حاصل ورکوي

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{v}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

دلته $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ د B تعجيل د A په پرتله دی چې د x ، y، z څخه اندازه کيږي. دا نتيجه او معادله 12-20 په پورته معادله کې ځای پر ځای کولو او ساده کولو سره، مور ترلاسه کوو

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \quad (20–14)$$



د کانکریټ ډولچه B د پیچلی فضایي حرکت سره مخ کیږی چی دپه Z محورد بوم تاویدل، د کړاچی A حرکت په بوم باندی، او د کیبل AB د پراخیدو او ټال وهلو له امله رامنځته کیږي. یو خوځیدونکی -تاویدونکی x ، y، z کوارډنیټ سیستم کیدی شی په کړاچی جوړ شی، او بیا د نسبي حرکت تحلیل پکار وړل کیدی شي ترڅو دا حرکت مطالعه شي

چیرته چې

$\mathbf{a}_B$ = د B تعجیل

$\mathbf{a}_A$ = د x ، y، z مراجعې د مبداء A تعجیل

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = د "B موقیعت د A په پرتله" نسبي تعجیل او نسبي سرعت لکه څنګه چې د ناظر له خوا د تاویدونکیو x ، y، z چوکاټ څخه اندازه کیږي

$\boldsymbol{\Omega}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ = د x ، y، z چوکاټ زاویوي تعجیل او زویوي سرعت

$\mathbf{r}_{B/A}$ = د "B موقیعت د A په پرتله"

معادلې 20-13 او 20-14 د هغو معادلو سره ورته دي چې په 16.8 برخه کې د نسبي سطحي حرکت تحلیل کولو لپاره کارول شوي دي.* په هغه حالت کې، بیا هم، د کارولو ساده کیدی شي ځکه چې $\boldsymbol{\Omega}$ او $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ یو ثابت لوری لري چې تل د حرکت د سطحې سره عمود وي. د دریم خاوی حرکت لپاره، $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ باید د معادلې 20-6 په کارولو سره معلوم شي، ځکه چې $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ په دواړو د $\boldsymbol{\Omega}$ په کچې او لوری بدلون پورې تړلی دی.

*د اصطلاحاتود تشریح لپاره 16-8 برخی ته مراجعه وکړئ

د تحلیل کړنلاره (PROCEDURE FOR ANALYSIS)

د ذراتو یا سختو اجسامو دري بعدي حرکت د معادلو 13-20 او 14-20 سره د لاندې کړنلارې په کارولو سره تحلیل کیدی شي.

د کوارډنیټ محورونه (Coordinate Axes) . د X ، Y ، Z او x ، y ، z کوارډنیټ محورونو موقعیت او ترتیب غوره کړئ. ډیری وختونه حلونه اسانه ترلاسه کیدی شي که چیرې په هغه لحظه کې چې په پام کې نیول کیږي (1) : د محورونه مبدا یو ځای وی. (2) محورونه هم لوری وي. (3)محورونه موازي وي.

- که چیرې په یوه پوښتنه کې د زاویوي سرعت څو اجزاوی شاملی وی، نو محاسبې به اسانه شي که چیرې د x ، y، z محورونه داسې غوره شي چې یوازې یو جز د زاویوي سرعت ولیدل شی دی چوکاټ ته ($\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$) او چوګاټ د $\boldsymbol{\Omega}$ تاویدی شی چې د زاویوی سرعت د نورو اجزاوو سره ښودل شوی وی.

کینمتیکي معادلې (Kinematic Equations). وروسته له دې چې د خوځیدونکی چوکاټ مرکز A تعریف شي او د خوځیدو ټکی B مشخصه شي، معادلې 13-20 او 14-20 باید په سمبولیک بڼه ولیکل شي لکه څنګه چې لاندې دي

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- که چیرې $\mathbf{r}_A$ او $\boldsymbol{\Omega}$ داسې بڼکاري چې جهت بدل کړي کله چې له ثابت X ، Y، Z چوکاټ څخه ولیدلشی، نو بیا ذبر داره محورونه، x'، y'، z' وکاروئ چې تاویدل $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$ لري. بیا معادله 6-20 کارول کیږی چې $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ معلوم کړی او د خوځنده x ، y، z محورونو د مرکز حرکت $\mathbf{v}_A$ او $\mathbf{a}_A$ محاسبه کیږي .
- که چیرې $\mathbf{r}_{B/A}$ او $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ داسې بڼکاري چې د x ، y، z څخه مشاهده کیدو پر مهال لوري بدلوی، نو د دوه ذبرونو مراجعې محورونه x" ، y"، z" وکاروئ چې د $\boldsymbol{\Omega}'' = \boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ تاویده ولری، او د $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$ معلومولو لپاره معادله 6-20 تطبیق کړئ او نسبي حرکت $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ او $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ محاسبه کړئ .
- وروسته له دې چې د $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ، $\mathbf{v}_A$، $\mathbf{a}_A$، $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$، $(\mathbf{v}_{B>A})_{xyz}$او $(\mathbf{a}_{B>A})_{xyz}$ وروستۍ بڼې ترلاسه شي، د پوښتنې عددي ډاټا ځای پر ځای کیدی شي او اصطلاحات ارزول کیږي. د دې ویکټورونو ټولې اجزاوی کیدی شی د X ، Y، Z یا د x ، y، z محورونو سره و ټاکل شي. دا انتخاب تصادفي دی،پدی شرط چې یوه محوری بسته د واحد ویکټورونو وکارول شي.

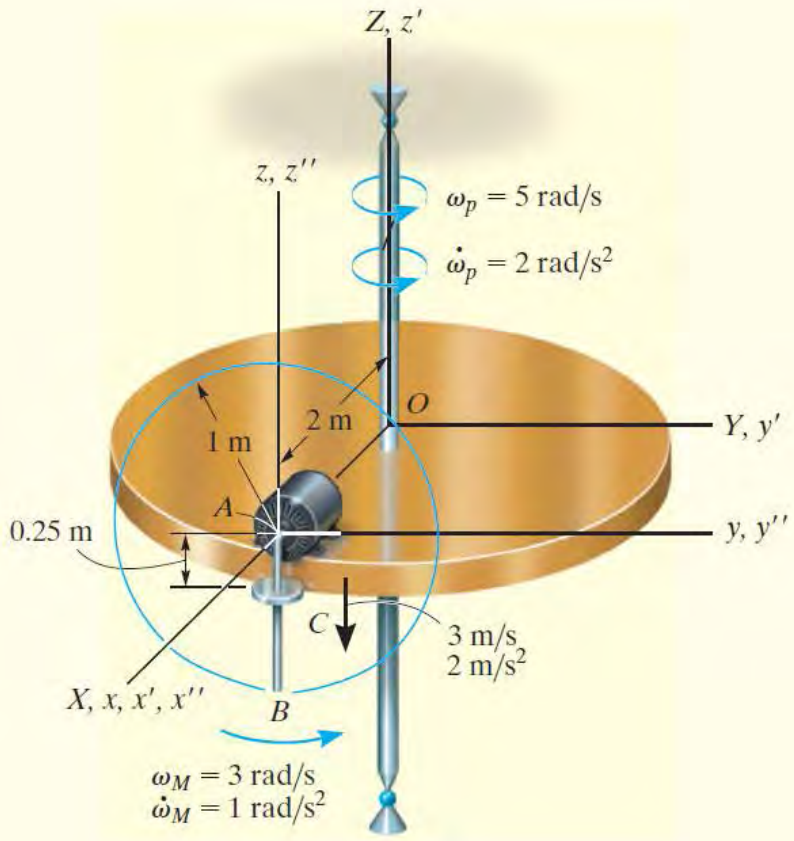
مثالونه

مثال 20.4

یو موټور او ټرلی راډ AB هغه زاویوي حرکتونه لري چې په انځور 20-12 کې ښودل شوي دي. د راډ په اوږدو کې غړوند C چې د A څخه 0.25 m فاصله لري، په راډ کې ښکته روان دي چې سرعت یې 3 m/s او تعجیل یې 2 m/s^2 دی. د دې لحظې لپاره د C سرعت او تعجیل معلوم کړئ.

حل

د کوارډینیټ محورونه (Coordinate Axes) : د ثابت X ، Y، Z مراجعې مبده د پلیټفارم په مرکز کې ټاکل شوي، او د خوځیدونکیو x ، y، z مراجعې مبده په A ټکی کې موقعیت لري، انځور 20-12 . څرنګه چې غړوندی د دوو برخو زاویوي حرکت تابع دی، $\mathbf{w}_p$ او $\mathbf{w}_M$ ، نو دا داسی ګڼل کیږي چې زاویوي سرعت $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_M$ په x,y,z کی لري. له دې امله، دx ، y، z محورونه به د پلیټفارم سره ټرلي وي ترڅو $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_p$ شي.



انځور 20-12

کینماتیکي معادلي (Kinematic Equations) : معادلي 13-20 او 14-20، چې د Cاو A نقطو ته پلي کیږي، په دې ډول کیږي:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

د A حرکت (Motion of A) دلته $\mathbf{r}_A$ د X ، Y، Z په پرتله لوری بدلوي. د $\mathbf{r}_A$ د وخت مشتقاتو موندلو لپاره، مونږ به د x′ ، y′، z′ محورونه وکاروو چې د X ، Y، Z محورونو سره یو ځای دي او د $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{w}_p$ سره ګرځي. له دې امله $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_p = \{5\mathbf{k}\}$ rad/s، ($\boldsymbol{\Omega}$ د X، Y، Z په پرتله لوری نه بدلوي).

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\}\ \text{m}$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

د C حرکت د A په پرتله (Motion of C with Respect to A) دلته $\mathbf{r}_{C/A}$ د x ، y، z په پرتله لوری بدلوي، نو د دې د وخت مشتقاتو موندلو لپاره، د x″ ، y″، z″ محورونه کاروو چې د $\boldsymbol{\Omega}'' = \boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_M$ سره تاویږي. له دې امله

$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_M = \{3\mathbf{i}\}$ rad/s، ($\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ د x ، y، z په پرتله لوری نه بدلوي).

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_{C/A} = \{-0.25\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times \mathbf{r}_{C/A}$$
$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0.25\mathbf{k})] = \{0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$$

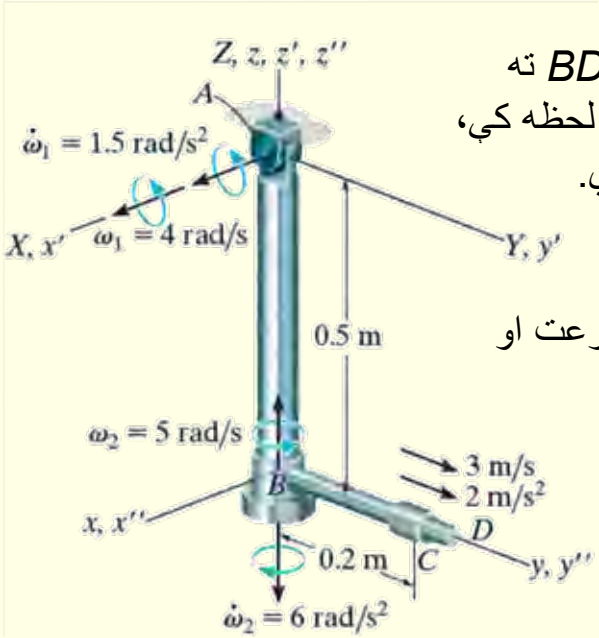
$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}$$
$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$$

د C حرکت (Motion of C)

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} \\
&= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\
&= \{10.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.} \\
\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} \\
&= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] \\
&\quad + 2[5\mathbf{k} \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) \\
&= \{-57.5\mathbf{i} + 22.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}
\end{aligned}$$

مثال 20.5

په انځور 20-13 کې ښودل شوی پینډولم له دوو راډونو څخه جوړ شوي دی؛ AB د A په پایله کی د پین اتکاء لري او یوازې د Y–Z په سطحه کې تاال وهی، پداسې حال کې چې بیرنګ په B کې راډ BD ته اجازه ورکوي چې په راډ AB و څرخی. په یوه ټاکلې لحظه کې، راډونه هغه زاویوي حرکتونه لري چې ښودل شوي دي. همدارنګه، یو غړوندی C چې د B څخه 0.2 m لری دی، سرعت یې 3 m/s او تعجیل یې 2 m/s^2 د راډ په اوږدو کې دی. د دې لحظې لپاره د غړوندی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



انځور 20-13

حل I

د کوارډینیټ محورونه (Coordinate Axes) : د ثابت X ، Y، Z چوکاټ مبده به په A کې و ټاکو. د غړوندی حرکت په اسانه ډول د B څخه لیدل کیږی، نو د x ، y، z چوکاټ مبده به په دې نقطه کې موقعیت ولري. موږ به $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_1$ او $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_2$ غوره کړو.

کینماتیکي معادلې (Kinematic Equations) :

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

د B حرکت (Motion of *B*) : د $\mathbf{r}_B$ د وخت مشتقاتو موندلو لپاره، فرض کړی چی د x′ ، y′، z′ محورونه د $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{w}_1$ سره تاویږي. نو

$$\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1 = \{4\mathbf{i}\}\ \text{rad/s} \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}' = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \{1.5\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_B = \{-0.5\mathbf{k}\}\ \text{m}$$
$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B = \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$$

د C حرکت د B په پرتله (Motion of *C* with Respect to *B*) : د $\mathbf{r}_{C/B}$ د وخت مشتقاتو موندلو لپاره د x ، y، z په پرتله، د x″ ، y″، z″ محورونه پرپردو چې د $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_2$ سره تاو شي. نو بیا

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2 = \{5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s} \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \{-6\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.2\mathbf{j}\}\ \text{m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C/B} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j} = \{-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 3\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j}) + [5\mathbf{k} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})]$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

د c حرکت (Motion of C).

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j} + (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + (1.5\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j}) + [4\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j})]$$
$$+ 2[4\mathbf{i} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] + (-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

حل II

د کوارډنیټ محورونه (Coordinate Axes) : دلته به موږ اجازه ورکوو چې د x ، y، z محورونه په داسې ډول تاو شي:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$$

نو بیا

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}.$$

د *B* حرکت (Motion of *B*) : د پوښتنې د محدودیتونو له مخې، $\mathbf{w}_1$ د X ، Y، Z په پرتله لوری نه بدلوي؛ خو د $\mathbf{w}_2$ لوری د $\mathbf{w}_1$ په اندازه بدلیږي. نو، د $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ د موندلو لپاره، د x′ ، y′، z′ محورونه د *A* په ځای کې د X ، Y، Z محورونو سره یوځای شوی، ترڅو $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{w}_1$ شي. بیا د $\boldsymbol{\Omega}$ د اجزاوو د مشتقاتو اخیستو سره

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1] + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2] \\ &= [1.5\mathbf{i} + \mathbf{0}] + [-6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} \times 5\mathbf{k}] = \{1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

همدارنګه، $\mathbf{w}_1$ د $\mathbf{r}_B$ لوری بدله وي، نو د $\mathbf{r}_B$ د وخت مشتقاتو موندلو لپاره کولی شو د پورته تعریف شویو ډبرلرونکیو محورونو څخه استفاده وکړو. له دې امله

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B \\ &= \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\}\ \text{m/s} \\ \mathbf{a}_B &= \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B \\ &= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

د *C* حرکت د *B* په پرتله (Motion of *C* with Respect to *B*) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{xyz} &= \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_{C/B} &= \{0.2\mathbf{j}\}\ \text{m} \\ (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} &= \{3\mathbf{j}\}\ \text{m/s} \\ (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} &= \{2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

د C حرکت (Motion of C)

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$
$$= 2\mathbf{j} + [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})] + 3\mathbf{j}$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\}\ \text{m/s} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + [(1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})]$$
$$+ (4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 0.2\mathbf{j}] + 2[(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 3\mathbf{j}] + 2\mathbf{j}$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

PROBLEMS

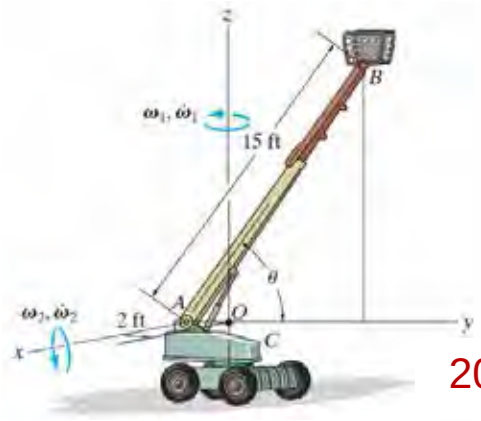
20–37 . مثال 20.5 حل کړئ، داسې چې د x ، y، z محورونه د منحنی خطی تګ سره خوځیږي، $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ، په داسې حال کې چې غړوندی داسې ښکاري چې دواړه زاویوي سرعت $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ او شعاعي حرکت لري.

20–38 . مثال 20.5 حل کړئ ، د دې سره چې د x ، y، z محورونه د راډ *BD* سره کلک شویی ترڅو $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ شي. په دې حالت کې چې غړوندی یوازې د *BD* په اوږدو کې شعاعي ډول بهر ته خوځیږي؛ له دې امله $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

20–39 . په هغه لحظه کې چې $q = 60^o$ وي، د ساختماني لفټ تلسکوپي بوم *AB* په *z* محور په ثابت زاویوي سرعت $\mathbf{w}_1 = 0.5$ rad/s سره تاویږي او په پین د *A* په ځای کې په ثابت زاویوي تیزوالی $\mathbf{w}_2 = 0.25$ rad/s سره ګرځي. په ورته وخت کې، بوم د 1.5 ft/s سرعت سره غځیږی، او 0.5 ft/s^2 تعجیل لري، چې دواړه د ساختماني لفټ په پرتله اندازه شوي دي. د دې لحظې لپاره د بوم په پای کې د *B* ټکی چې د بوم پا پای کی ده، سرعت او تعجیل معلوم کړئ.

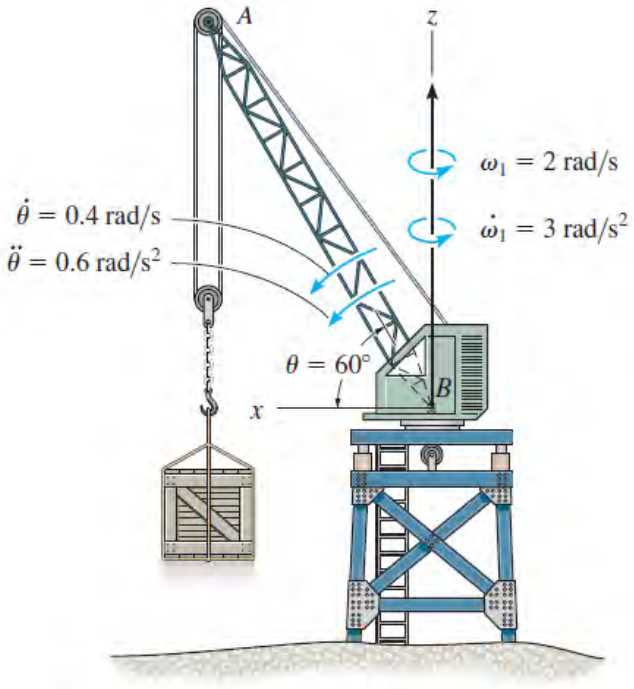
20–40 . په هغه لحظه کې چې $q = 60^o$ وي، ساختماني لفټ په *z* محور باندی په زاویوي سرعت $\mathbf{w}_1 = 0.5$ rad/s او زاویوي تعجیل $\dot{\mathbf{w}}_1 = 0.25$ rad/s^2 سره ګرزی، پداسې حال کې چې تلسکوپي بوم *AB* د *A* په پین په زاویوي سرعت $\mathbf{w}_2 = 0.25$ rad/s او زاویوي تعجیل $\dot{\mathbf{w}}_2$

$0.1\ rad/s^2$ = سره تاویږی. په ورته وخت کې، بوم د $1.5\ ft/s$ سرعت سره غځیږی، او $0.5\ ft/s^2$ تعجیل لري، چې دواړه د فریم په پرتله اندازه شوي دي. د دې لحظې لپاره د بوم په پای کې د B ټکی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-39/40

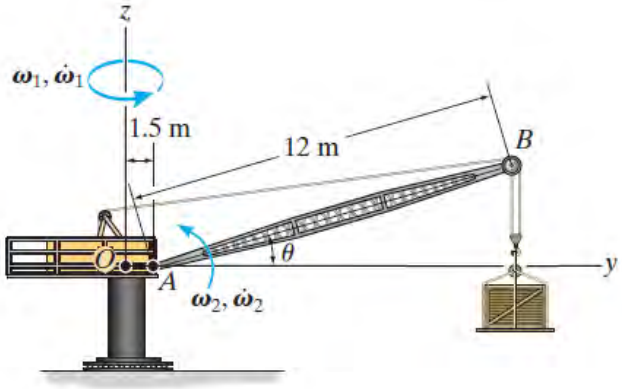
20–41. په یوه ټاکلي وخت کې د برج کرین بوم AB د ښودل شوي حرکت سره په z محور تاویږی. په همدې وخت کې، $q = 60°$ او بوم ښکته لوري ته تاویږی چې $\dot{q} = 0.4\ rad/s$ او $\ddot{q} = 0.6\ rad/s^2$. په دې وخت کې د بوم د A پای سرعت او تعجیل معلوم کړئ. د بوم اوږدوالی $l_{AB} = 40\ m$ دی.



پ 20-41

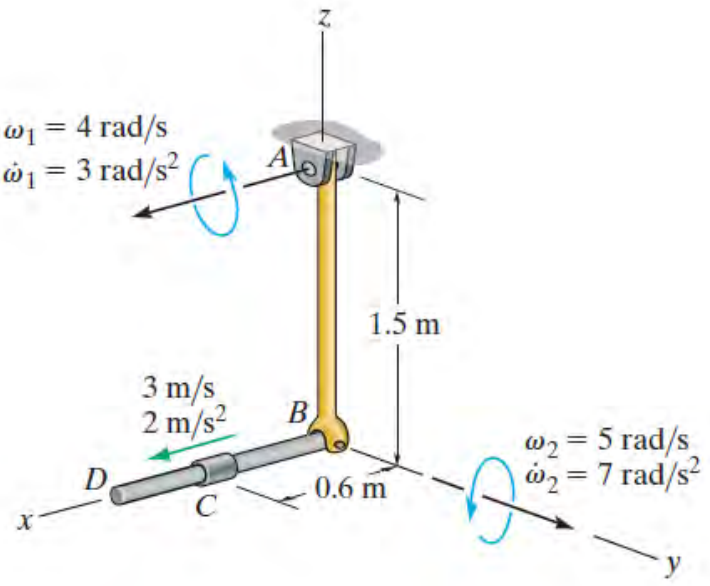
20-42: په هغه وخت کې چې زاویه $q = 30^o$ وي، د کرین چوکاټ او بوم AB په ترتیب سره په ثابت زاویوي سرعت $w_1 = 1.5\ rad/s$ او $w_2 = 0.5\ rad/s$ سره تاویږي. په دې وخت کې د B ټکی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.

20–43 : په هغه وخت کې چې زاویه $q = 30^o$ وي، د کرین چوکات په ثابت زاویوي سرعت $w_1 = 1.5$ rad/s او زاویوی تعجیل $\dot{w}_1 = 0.5$ rad/s² سره تاویږي ، پداسې حال کې چې بوم AB د زاویوي سرعت $w_2 = 0.5$ rad/s او زاویوي تعجیل $\dot{w}_2 = 0.25$ rad/s² سره تاویږي. په دې وخت کې د B ټکی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



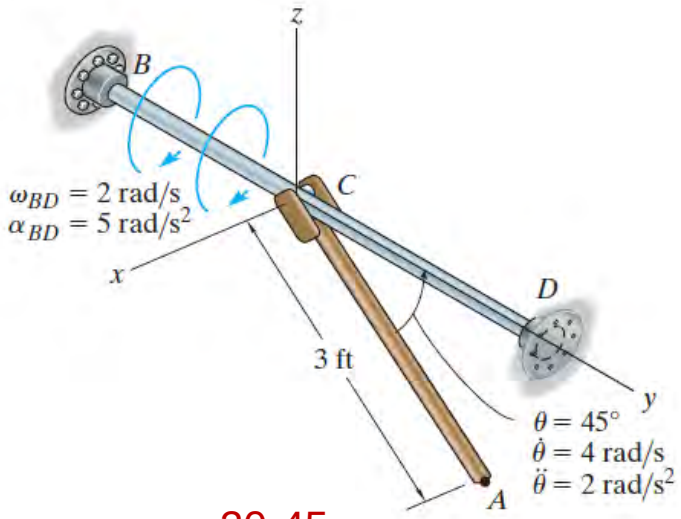
پ 20-42/43

20–44* : په بنودل شوی وخت کې ، د AB لاس په ثابت پین A سره په زاویي سرعت $w_1 = 4$ rad/s او زاویي تعجیل $\dot{w}_1 = 3$ rad/s² سره تاویږي. په ورته وخت کې، راډ BD د AB لاس په پرتله په زاویوي سرعت $w_2 = 5$ rad/s سره تاویږی او په $\dot{w}_2 = 7$ rad/s² سره زیاتیږي. همدارنګه، غړوندی C د راډ BD په اوږدوالی په سرعت 3 m/s او تعجیل 2 m/s² سره حرکت کوي، دواړه د راډ په پرتله اندازه شوی. په دې وخت کې د غړوندی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-44

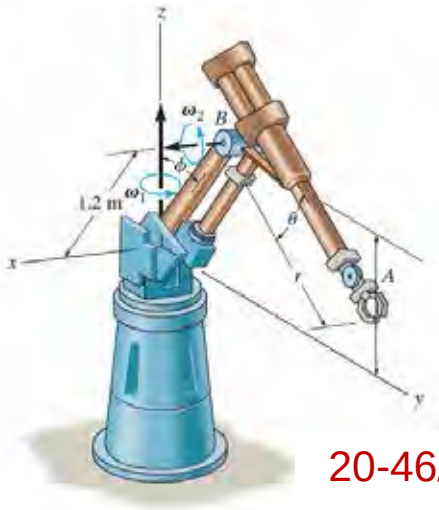
20–45 : په یوه ټاکلي وخت کې، راډ BD په x محور باندې په زاویوي سرعت $w_{BD} = 2$ rad/s او زاویوي تعجیل $a_{BD} = 5\ rad/s^2$ سره تاویږي. همدارنګه، کله چې زاویه $q = 4^o$ وي، ټرونډ AC په زاویوي سرعت $q^{\cdot} = 4$ rad/s او زاویوي تعجیل $q^{\cdot\cdot} = 2\ rad/s^2$ سره تاویږي. په دې وخت کې د ټرونډ په A ټکی کې سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-45

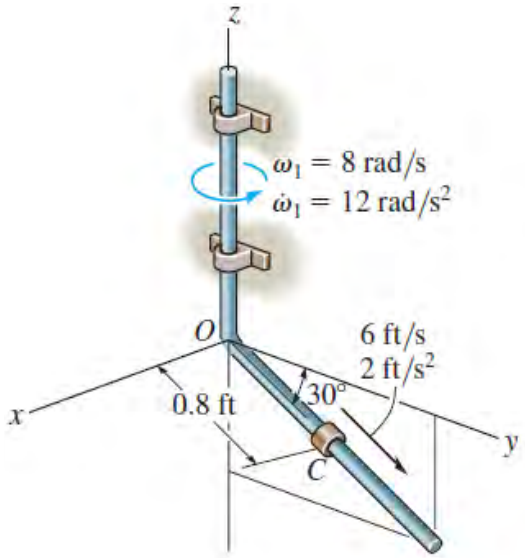
20–46 : په یوه بنودل شوی وخت کې، صنعتي ګرځیدونکی لاس د z په محور په $w_1 = 5$ rad/s او د B په بند باندې په $w_2 = 2$ rad/s سره تاویږي. په دې وخت کې د نیونکي A سرعت او تعجیل معلوم کړئ، کله چې $q = 45^o$ او $f = 30^o$ او $r = 1.6$ m وي.

20–47 : په یوه بنودل شوی وخت کې، صنعتي ګرځیدونکی لاس د z په محور په $w_1 = 5$ rad/s او په $\dot{w}_1 =$ rad/s^2 سره تاویږي؛ او په بند B باندې په $w_2 = 2$ rad/s او $\dot{w}_2 = 3$ rad/s^2 سره تاویږي. په دې وخت کې د نیونکي A سرعت او تعجیل معلوم کړئ، کله چې $q = 45^o$ او $f = 30^o$ او $r = 1.6$ m وي.



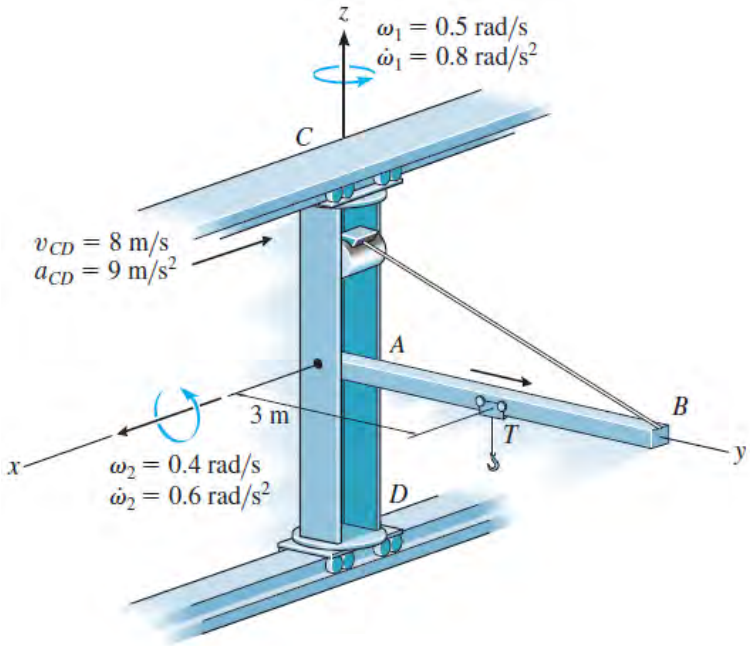
پ 20-46/47

20–48* : په یوه ټاکلي وخت کې، دا لاندی راډ، ښودل شوی زاویوي حرکت لری، پداسې حال کې چې غړوندی C د راډ په پرتله په 6 ft/s سرعت او د $2\ ft/s^2$ تعجیل سره ښکته کیږي. په دې وخت کې د غړوندی سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-48

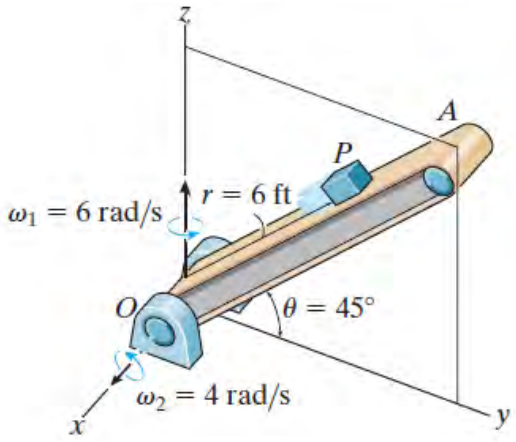
20-49: په یوه ټاکلي وخت کې، کرین د ټرک په اوږدوالی په v_{CD} =8 m/s سرعت او 9 m/s^2 تعجیل سره حرکت کوي. په ورته وخت کې، ښودل شوي زاویوي حرکتونه لري. که چیرې ټرالي T د بوم AB په اوږدو کې په 3 m/s نسبی تیزوالی او د $5\ m/s^2$ نسبی تعجیل سره بهر ته حرکت کوي، د ټرالي سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-49

20-50 : په ښودل شوي وخت کې لاس OA د کانوییر تسمې په z محور په ثابت زاویوي سرعت $w_1 = 6$ rad/s سره تاویږی، پداسې حال کې چې په همغه وخت کې لاس د ثابت زاویوي سرعت $w_2 = 4$ rad/s سره پورته تاویږی. که کانوییر په ثابت کچه $\dot{r} = 5$ ft/s سره روان وي، د صندوق P سرعت او تعجیل پدی لحظه کی معلوم کړئ د صندق اندازه په پام کی مه نیسی.

20-51 : په ښودل شوي وخت کې لاس OA د کانوییر تسمې په z محور په ثابت زاویوي سرعت $w_1 = 6$ rad/s سره تاویږی، پداسې حال کې چې په همغه وخت کې لاس د ثابت زاویوي سرعت $w_2 = 4$ rad/s سره پورته تاویږی. که کانوییر په ثابت کچه $\dot{r} = 5$ ft/s سره روان وي او په $\ddot{r} = 8$ ft/s^2 سره زیاتیږي، د صندوق P سرعت او تعجیل معلوم کړئ. د صندق اندازه په پام کی مه نیسی.

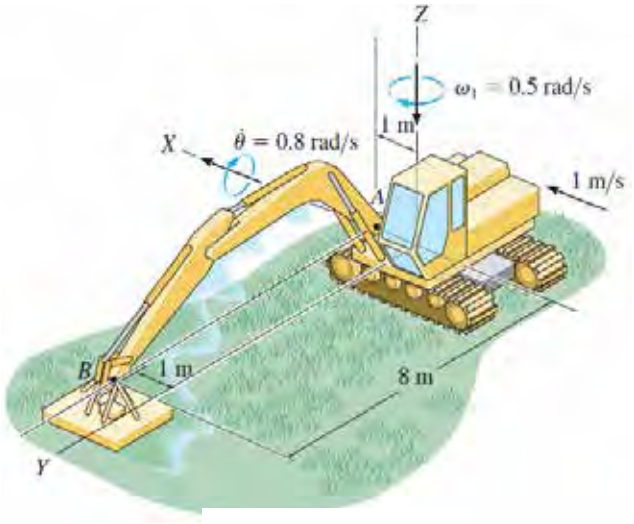


پ 20-50/51

***20-52 .** په ښودل شوی وخت کې ، د وښو او بوټیو ریبونکی ماشین چوکاټ د x په جهت په 1 m/s ثابت سرعت سره حرکت کوي، او کابین یی په عمودي محور په زاویوي سرعت $w_1 = 0.5$ rad/s سره تاویږي. په همدې وخت کې، بوم AB زاویوي سرعت $\dot{q} = 0.8$ rad/s په ښودل شوی لوري کې لری. په دې وخت کې د B تکی ، چې د ریبونکی سره وصل دی، سرعت او تعجیل معلوم کړئ.

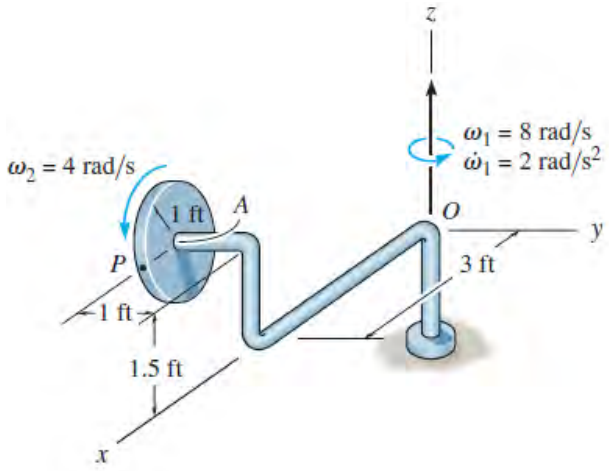
20-53 : په ښودل شوی وخت کې ، د وښو او بوټیو ریبونکی ماشین چوکاټ د x په جهت په 1 m/s ثابت سرعت سره حرکت کوي، او کابین یی په عمودي محور په زاویوي سرعت $w_1 = 0.5$ rad/s سره تاویږي. په همدې وخت کې، بوم AB زاویوي سرعت $\dot{q} = 0.8$

rad/s لري چې په $\ddot{q} = 0.9\ \text{rad/s}^2$ سره زیاتیږي. په دې وخت کې د B تکی ، چې د ریبونکی سره وصل دی، سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-52/53

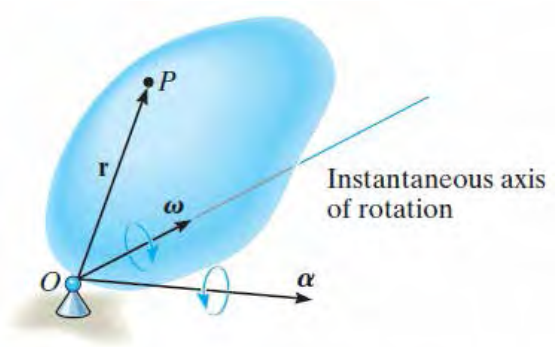
20-54 : په ښودل شوي وخت کې، راډ په z محور باندی په زاویي سرعت $w_1 = 8$ rad/s او زاویوي تعجیل $\dot{w}_1 = 2\ \text{rad/s}^2$ سره څرخیږی. په همغه وخت کې، ډسک په یوه ثابت سرعت $w_2 = 4$ rad/s سره څرخیږی چې د راډ په پرتله اندازه کیږي. په دې وخت کې د ډسک د P ټکي سرعت او تعجیل معلوم کړئ.



پ 20-54

د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW	د فصل بيا کتنه



$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

په ثابت ټکی تاویدل (Rotation About a Fixed Point)

کله چې یو جسم په ثابت ټکی O تاو یږی، نو ټکي په جسم هغه لاره تعقیبوي چی په سطحه د یوې کرۍ، چې مرکز یی په O کې دی واقعکیږی.

لکه څنګه چې زاویوي تعجیل د زاویوي سرعت د بدلون کچه په وخت کې ده، نو دا اړینه ده چې د w د وخت مشتق ترلاسه کولو پر مهال د هغې د مقدار او د حهت بدلون اندازی معلومی شي .د دې لپاره، زاویوي سرعت اکثراً د هغې د اجزاوو حرکتونو په توګه مشخص کیږي، ترڅو د دې اجزاووڅخه یو شمېر د تاویدونکي محورونو x، y، z په پرتله ثابت پاتې شي چې د Ω سره تاویږی. که دا حالت رامنځته شي، نو د ثابت محور په اړه د وخت مشتق په لاندې ډول ټاکل کیدی شي:

$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}.$$

کله چې w او a معلوم شي، نو د جسم د هرټکی P سرعت او تعجیل معلومیدی شی.

عمومي حرکت (General Motion) که چېرې جسم عمومي حرکت وکړي، نو د ټکي *B*په جسم باندې حرکت د بل ټکي *A* د حرکت سره د نسبي حرکت د تحلیل په کارولو سره ترسره کیدی شي، چې لیږدونکي یا انتقالی محورونه د A سره وصل شوي وي.	$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$ $$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$
د نسبي حرکت تحلیل د خوځیدونکیو او تاویدونکیو محورونو په کارولو سره (Relative-Motion Analysis Using Translating and Rotating Axes) د دوو ټکو *A* او *B* حرکت په یوه جسم باندې، یا د یوې لړۍ ټرل شویو اجسامو، او یا چیرې چې هر ټکی په دوو مختلفو لارو باندې موقعیت لري، کیدی شي چې په کارولو د نسبي حرکت تحلیل د خوځیدونکیو او لیږدونکي محورونو په *A* کې، د یو بل سره تړاو ورکړل شي. کله چې معادلې د $\mathbf{v}_B$ او $\mathbf{a}_B$ موندلو لپاره پلي کیږي، نو دا مهمه ده چې د $\mathbf{r}_A$، $\mathbf{r}_{B/A}$ ، $\boldsymbol{\Omega}$ ، او $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ د اندازې او د هغو د جهتونو بدلیدل، کله چې د دوی د وخت مشتقونه اخلو، په پام کې ونیول شي ترڅو $\mathbf{v}_A$، $\mathbf{a}_A$، $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$، $\dot{\Omega}$ ، او $\dot{\Omega}_{xyz}$ وموندل شي . د دې کار په ښه توګه کولو لپاره، ښایي د 6-20 معادلې څخه ګټه واخستل شي.	$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$ $$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

يوويشتم فصل

(CHAPTER 21)



په دي موټرسايکل باندې اغېزه کوونکي قواوې کيدی شي د دې فصل د حرکت معادلو په کارولو سره چې په دې فصل کې بحث شوی دی وټاکل شي.

د يوه سخت جسم دري بعدي کينيتيکس
(THREE-DIMENSIONAL KINETICS OF A RIGID BODY)

د فصل موخې
CHAPTER OBJECTIVES

- په مختلفو محورونو د يوه جسم د انرشيايي مؤمنت اود انرشيايي ضربولو، طريقو لاس ته راوړلومعرفي کول.
- د کار او انرژۍ اصول او د خطي او زاويوي امپلس او مومينټم د تطبيق څرنګوالی ښودل په يوه سخت جسم چې دري بعدي حرکت لري.
- د دري بعدي حرکتونو لپاره د حرکت د معادلو منځ ته راوړل او پلي کول.
- د جايروسکوپي او له تورک -آزاد، حرکت مطالعه کول.

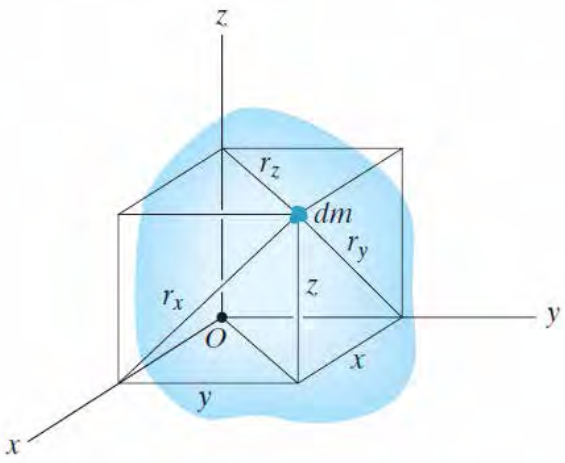
*21.1 مؤمنت او انرشیایی لاس ته راوړنې (MOMENTS AND PRODUCTS OF INERTIA)

د یوه جسم د سطحي حرکت مطالعې پر مهال، اړینه وه چې انرشیایی مؤمنت I_G معرفي شي، کوم چې د حرکت د سطحی پر محور باندې عمود ټاکل شوې او د جسم د ثقل مرکز G څخه تیریږي. د درې بعدي حرکت تحلیل لپاره، کله نا کله اړینه وي چې شپږ انرشیایی مقدارونه محاسبه شي. دغه اصطلاحات، چې د مؤمنت او انرشیا یی حاصل لرونکیو په نوم یادیږي، د یوې جسم د کتلې توزیع په ځانګړې توګه تشریح کوي، کوم چې په نسبت د یوه ټاکلي محوري سیستم سره چې ځانګړی جهت او د مبداء نقطې مشخصات لري.

انرشیایی مؤمنت (Moment of Inertia).

د یو جسم د یوه واړه عنصر dm انرشیایی مؤمنت په یو د دریو محوری سیستم کې په هر یوه محور په دې ډول تعریف کیږي: د عنصر کتله ضرب د محور څخه تر عنصر پورې د لږ تر لږه فاصلې مربع. د مثال په توګه، لکه څنګه چې په انځور 21-1 کې ذکر شوی، $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$، نو د عنصر د کتلې انرشیایی مؤمنت د x محور په اړه داسې دی:

$$dI_{xx} = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$



انځور 21-1

د ټول جسم انرشیایی مؤمنت I_{xx} د جسم د انټیګرشن کولو له لارې ټاکل کیدی شي. له دې امله، د هر محور لپاره، مونږ کولی شو ولیکو:

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int_m r_y^2 dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \qquad (21\text{–}1)$$
$$I_{zz} = \int_m r_z^2 dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

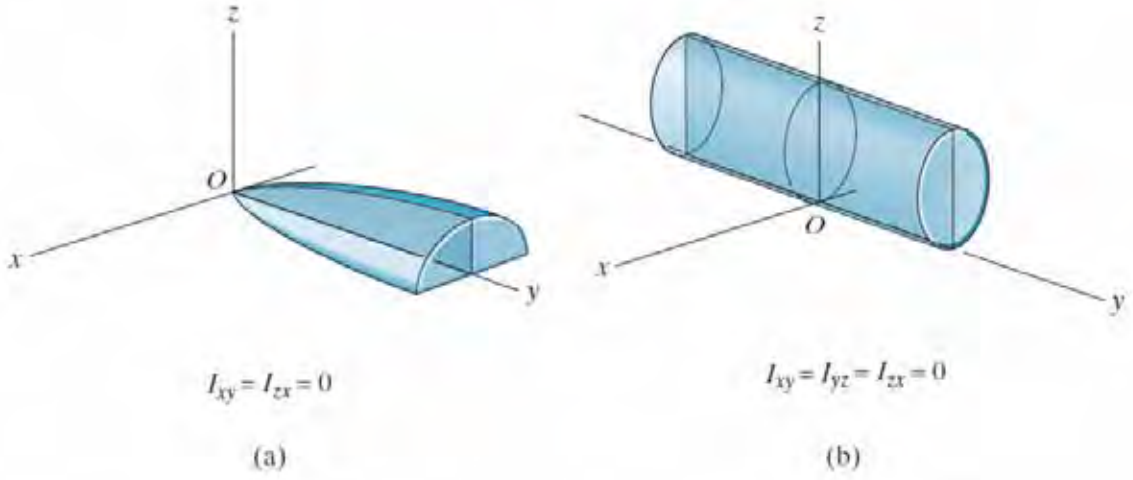
په هر یوه حالت کې، انرشیایی مؤمنت تل یو مثبت مقدار دی، ځکه چې دا د کتلې dm د ضرب د فاصلو د مربعو سره یو ځای کیږی، چې دواړه تل مثبته وي.

د انرشیا ضرب (Product of Inertia) . د واړه عنصر dm **انرشیایی حاصل** نسب دوو عمودي سطحو ته په دې ډول تعریف کیږي: د عنصر کتله ضرب د هرې سطحې څخه تر عنصر پورې، عمودي (یا لږ تر لږه) فاصله . د مثال په توګه، دا فاصله x تر $y–z$ سطحې پورې، او y دی تر $x–z$ سطحې پورې، لکه څنګه چې په انځور 21-1 کې ښودل شوی. د انرشیا ضرب dI_{xy} دعنصر لپاره په دې توګه محاسبه کیږي:

$$dI_{xy} = xy\, dm$$

همدارنګه یادونه باید وشي چې $dI_{yx} = dI_{xy}$ دی. انټیګریشن د ټول جسم پرکتلې باندی، د بدن د انرشیا ضرب د هرو سطحو د یو ځایوالی د پاره بیا داسې کیږي:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\, dm \qquad (21–2)$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \int_m xz\, dm$$



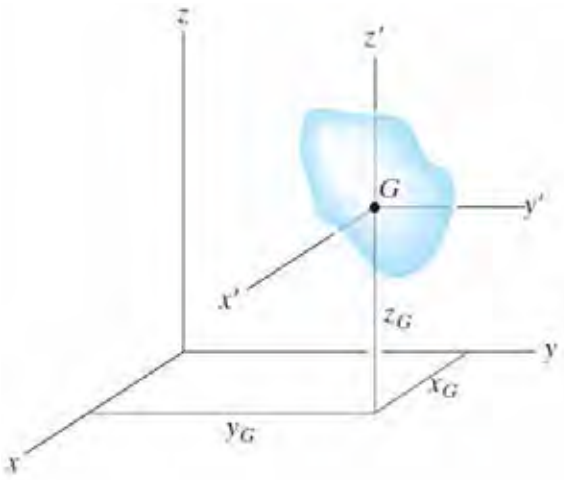
انځور 21-2

د انرشیایي مؤمنت په پرتله چې تل مثبت وي، د انرشیا د ضرب حاصل کیدای شي مثبت، منفي یا صفر وي. پایله د هغه دوو تعریف کوونکیو محوري سیستمونو په الجبرایي نښو پورې تړاو لري، کوم چې یو له بل څخه په خپلواکه توګه بدلیږي. که چیرې یوه یا دواړې عمودي سطحې د کتلې لپاره متناظره سطحې وي، نو د دې سطحو په اړه د انرشیا د ضرب حاصل به صفر شي. په داسې حالاتو کې، د کتلې عناصر به په جوړه توګه په هره خوا د متناظرې سطحې کې ځای ولري. په یوه اړخ د سطحې کې ، د عنصر لپاره د انرشیا د د ضرب محصول به مثبته وي، پداسې حال کې چې په بل اړخ کې د اړوند عنصر لپاره د انرشیا د ضرب محصول به منفي وي، نو ټولیزه نتیجه به صفر وي. د مثال په توګه، لکه څنګه چې په انځور 21-2a کې ښودل شوی، د $y–z$ سطحه د تناظر سطحه ده، نو $I_{xy} = I_{zx} = 0$ دي. د I_{yz} محاسبه به مثبت نتیجه ورکړي، ځکه چې ټول عناصر د کتلې یوازې مثبت y او z محوري کوارډنیټ کاروي. د استوانه لپاره، چې محورونه یې لکه څنګه چې په انځور 21-2b کې ښودل شوي، $x–z$ او $y–z$ دواړې د تناظر سطحې دي. له همدې امله:

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

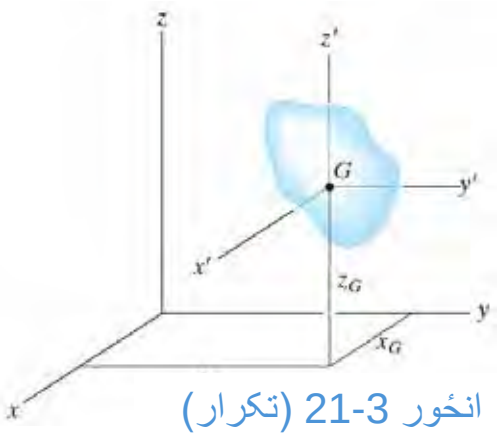
د موازي محور او موازي سطحې قضې (Parallel-Axis and Parallel-Plane Theorems)

هغه تخنیکونه چې د جسم د انرشیا مؤمنت ټاکلو لپاره د انټیګریشن نیولو له لارې کارول شوي وو، په 17.1 برخه کې تشریح شوي دي. همدارنګه د یوه مرکب جسم د انرشیایي مؤمنت ټاکلو لارې چارې هم بحث شوې وې، یعنې هغه بدن چې د ساده برخو څخه جوړ شوی وي، لکه څنګه چې د دی کتاب په شاته پوښ کې ښودل شوي. په دواړو دې حالتونو کې د حسابونو لپاره د **موازي محور قضیه** اکثراً کارول شوی ده. دا قضیه د جسم د انرشیا مؤمنت د هغه محور څخه چې د کتلې له مرکز G څخه تېریږي، انتقالوي یوه موازي محور ته چې د بلې نقطې څخه تېریږي. که چیرې G محوري کوارډنیټ x_G ، y_G، z_G وي، انځور 21-3 ، نو د موازي محور معادلې چې د x ، y، zمحورونو په اړه د انرشیا مؤمنت محاسبه کولو لپاره کارول کیږي، داسې دي:



$$\begin{aligned} I_{xx} &= (I_{x'x'})_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ I_{yy} &= (I_{y'y'})_G + m(x_G^2 + z_G^2) \\ I_{zz} &= (I_{z'z'})_G + m(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned} \qquad (21–3)$$

د مرکب جسم د انرشیا د ضرب محصو ټاکل د جسم د انرشیایی مؤمنت په څېر ترسره کیږي. دلته، په هر صورت، د موازي سطحی قضیه مهمه ده. دغه قضیه د جسم د انرشیا د ضرب محصول د انتقال لپاره کارول کیږي، چې د هغه دریوعمودي سطحو چې د جسم د کتلې مرکز څخه تېریږي نیول شوی، او هغه د موازي دریو عمودی سطحو ته چې د بلې نقطې O څخه تېریږي یوړل شی. که چیرې د سطحو ترمنځ عمودي فاصلې x_G ، y_G، z_G تعریف شي، انځور 21-3 ، نو د موازي سطحو قضیه د هر انرشیا د ضرب محصول لپاره په دې ډول لیکل کیدی شی:



انځور 21-3 (تکرار)

$$I_{xy} = (I_{x'y'})_G + mx_Gy_G$$
$$I_{yz} = (I_{y'z'})_G + my_Gz_G$$
$$I_{zx} = (I_{z'x'})_G + mz_Gx_G \qquad (21–4)$$

د دې فارمولو استخراج د هغه طریقی سره چی د موازي محور معادلې لپاره ورکړل شوې ورته دی، 17.1 برخه .

د انرشیا ټینسر (Inertia Tensor). د جسم انرشیایي خصوصیات په بشپړه توګه د نهو کلمو لخوا تشریح کیږي، چې شپږ یې خپلواکې دي. د دې کلمو مجموعه د معادلو 21-1 او 21-2 په کارولو سره تعریف شوې او په دې ډول لیکل کیدی شي:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

دا ارایه (array) د **انرشیا ټینسر*** په نوم یادیږي. دا د جسم لپاره یو ځانګړی ډله ارزښتونه لري کله چې د هر ځای د مبداء O تکی او محوری سیستمونو د جهت لپاره ټاکل کیږي.

په عمومي ډول، د O تکی لپاره مور تل کولی شو یو ځانګړی تمایل د محورونو مشخص کړو چې د جسم د انرشیا ضرب محصول صفر شي. کله چې دا ترسره شي، د انرشیا ټینسر "قطري" بلل کیږي او په ساده شوی شکل کې لیکل کیدی شي:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

دلته $I_x = I_{xx}$ ، $I_y = I_{yy}$، او $I_z = I_{zz}$ د جسم لپاره د ***اصلي انرشيا مؤمنتونه*** (principal moments of inertia) بلل کيږي، چې د **انرشيا د اصلي محورونو** په اړه محاسبه شوي دي. د دې درې اصلي انرشيايي مؤمنتو څخه، يو به د جسم د انرشيا مؤمنت اعظمي وي او بل به يې د جسم تر ټولو کوچنی د انرشيا مؤمنت وي.



*منفي نښې دلته شاملې دي ترڅو وروسته د بدن زاويوي مومينټم تشريح شي. معادله 10-21 وګورئ.

د فضا يي سرويس (شټل) د حرکت د ديناميکي تحليل وړتيا يوازې په دې صورت کې شوني ده که د هغې انرشيايي مؤمنت او د انرشيا ضرب محصول په اړه معلومات موجود وي چې د هغې د کتلې مرکز په نسبت محاسبه شوي وي.

د انرشيا د اصلي محورونو د جهتونو رياضيکي ټاکنه دلته نه بحث کيږي (د دې لپاره پوښتنه 21-22 وګورئ). خو داسې ډيرې حالتونه شته چې د اصلي محورونو ټاکل د مستقيمې لیدنې له لارې ممکن وي. د پخوانۍ بحث څخه څرګنده شوه چې که متناظر محورونه داسې تنظيم شي چې دوه له دري ګوني عمودي سطحو څخه چې محورونه شاملوي د جسم د تناظر سطحی وي، نو د جسم ټول انرشيايي ضربونه د دې متناظرو سطحو په اړه صفر کيږي، او له همدې امله دغه د کوارډنيټ محورونه د انرشيا اصلي محورونه دي. د مثال په توګه، د انځور 21-2B کې ښودل شوي *x* ، *y*، *z* محورونه د استوانې لپاره د انرشيا اصلي محورونه په *O* ټکی کی دي.

د انرشيا مؤمنت د يوه تصادفي محور په اړه (Moment of Inertia About an Arbitrary Axis)

. فرض کړئ چې د جسم بدن د انځور 21-4 په څيردی، چيرې چې د انرشيا ټينسر نهه عناصر د x ، y، z محورونو په اړه چې په *O* ټکی کې مبداء لري، معلوم شوي دي. دلته موږ غواړو د جسم د انرشيا مؤمنت د *Oa* محور په اړه وټاکو، چې د واحد ويکتور $\mathbf{u}_a$ لخوا تعريف شوی دی. د تعريف له مخې، $I_{Oa}=\int b^2\,dm$، چيرې چې *b* د عنصر *dm* څخه تر *Oa* پورې عمودي فاصله ده. که چيرې د *dm* موقعيت د **r** په کارولو سره وټاکل

شي، نو $b = r \sin(q)$ کیږي، چې دا د کراس ضرب $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$ اندازه ده.
نوانرشیاسی مؤمنت په دې ډول څرګندیدلی شي:

$$I_{Oa} = \int_m |(\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})|^2 dm = \int_m (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) dm$$

په عمومي توګه، $\mathbf{u}_a = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ او $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، نو $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$ په دې ډول دی :

$$\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_y z - u_z y)\mathbf{i} + (u_z x - u_x z)\mathbf{j} + (u_x y - u_y x)\mathbf{k}$$

پس له تعویضه، او کله چې د ډات ضربول ترسره شي، مونږ ترلاسه کوو:

$$I_{Oa} = \int_m [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2] dm$$

$$= u_x^2 \int_m (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int_m (z^2 + x^2) dm + u_z^2 \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

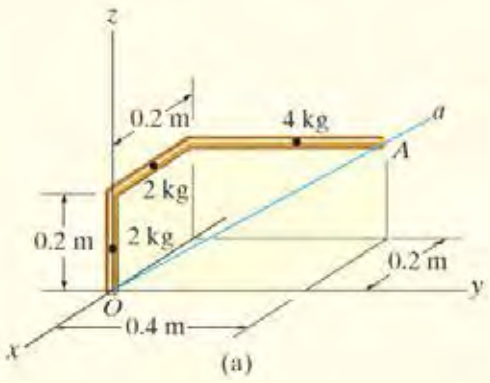
$$- 2u_x u_y \int_m xy\, dm - 2u_y u_z \int_m yz\, dm - 2u_z u_x \int_m zx\, dm$$

پوهیږو چې انتیګرالونه د جسم د انرشیایي مؤمنت او انرشیایی ضرب سره تړاو لري، له معادلې 21-1 او 21-2، مونږ ترلاسه کوو:

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_x u_y - 2I_{yz}u_y u_z - 2I_{zx}u_z u_x \quad (21\text{–}5)$$

په دې
توګه، که چیرې د انرشیا ټینسر د x ، y، z محورونو لپاره ټاکل شوی وي، نو د جسم د انرشیا مؤمنت د مایل شوي Oa محور په اړه پیدا کیدی شي. د محاسبې لپاره، د محورونو د جهت کوساینونه u_x ، u_y ، او u_z باید وټاکل شي. دغه کلمي د همغږۍ د لوړی زاویو α\alphaα، β\betaβ، او γ\gammaγ کوساینونه مشخصوي چې د مثبت Oa محور او مثبت x ، y ، z محورونو ترمنځ جوړ شوي (ضمیمه B وګورئ).

مثال 21.1



د کاږه شوی راډ د انرشیا مومینټ د Oa محور ته معلوم کړئ.
د هرو دریو برخو کتله په انځور کی ورکړل شوی ده.

حل:

د معادلی 21-5 کارولو څخه مخکې، لومړی دا اړینه ده چې د راډ د x ، y، z محورونو په اړه د انرشیا مومینټونه او د انرشیا ضرب معلوم کړو. دا د یوه نری راډ د انرشیا مومینټ د فورمول په کارولو سره ترسره کیږي، چې $I = \frac{1}{12} ml^2$ ، او د موازي محورو او موازي سطحو قضیو (معادلې 21-3 او 21-4) تطبیق دي.
راډ په درېو برخو به وویشل شي او د هرې برخې د کتلې مرکز موقعیت به معلوم کړو، انځور 21-5b ، مورِ لرو:

$$I_{xx} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + \left[0 + 2(0.2)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.480\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2((-0.1)^2 + (0.2)^2)\right] + \left[0 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.453\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zz} = \left[0 + 0\right] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(-0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.400\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(-0.2)(0.2)] = -0.160\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yz} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(0.2)(0.2)] = 0.160\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

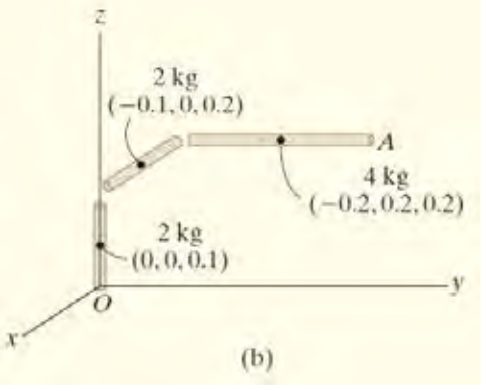
$$I_{zx} = [0 + 0] + [0 + 2(0.2)(-0.1)] + [0 + 4(0.2)(-0.2)] = -0.200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

د Oa محور په واحد ویکتور سره تعریف شوی دي

$$\mathbf{u}_{Oa} = \frac{\mathbf{r}_A}{r_A} = \frac{-0.2\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}}{\sqrt{(-0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.2)^2}} = -0.408\mathbf{i} + 0.816\mathbf{j} + 0.408\mathbf{k}$$

نو بیا

$$u_x = -0.408 \quad u_y = 0.816 \quad u_z = 0.408$$



(b)

دا پایلي په معادله 21-5 کي ځای په ځای کوواو نتیجه یی دا ده:

انځور 21-5

$$\begin{aligned} I_{Oa} &= I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \\ &= 0.480(-0.408)^2 + (0.453)(0.816)^2 + 0.400(0.408)^2 \\ &\quad - 2(-0.160)(-0.408)(0.816) - 2(0.160)(0.816)(0.408) \\ &\quad - 2(-0.200)(0.408)(-0.408) \\ &= 0.169\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

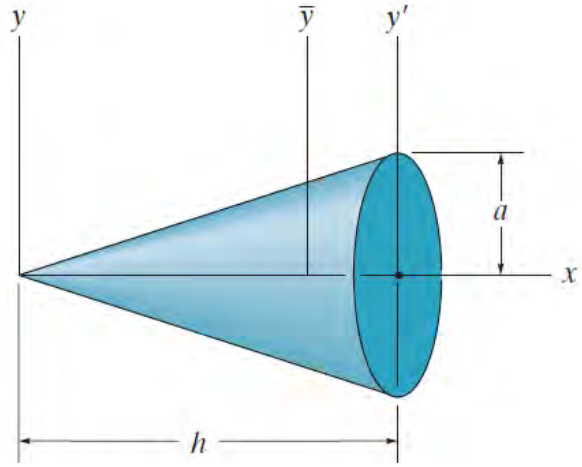
Ans.

پوښتنې

PROBLEMS

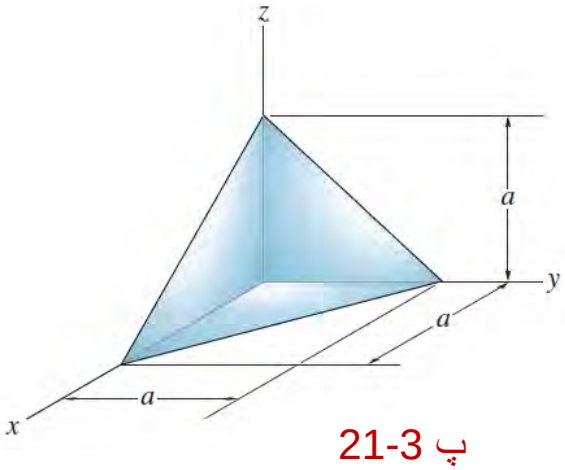
21–1 . ثابت کړئ چې د يوه جسم د انرشيايي مومينټونو مجموعه $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ د x ، y، z محورونو د جهت سره تړاو نه لري، او يوازې د مبداء په موقعيت پورې اړه لري.

21–2. د يوه مخروط لپاره انرشيايي مومينټ د عمودي محور $\bar{y}$ په اړه چې د مخروط د کتلې د مرکز څخه تيريږي وټاکئ. انرشيايي مومينټ په موازي محور y' چې د مخروط د بيخ د قطر څخه تيريږي څه دی ؟ مخروط m کتله لري.



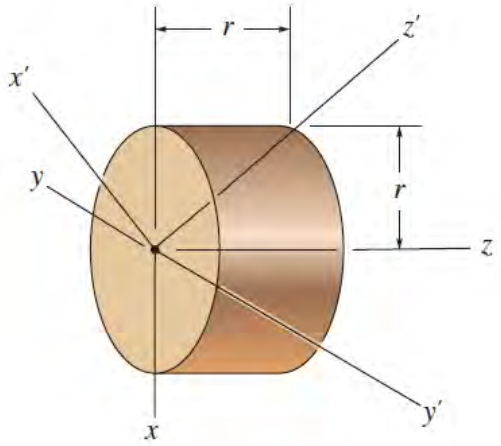
پ 21-2

21–3. د يو متجانس څلورسطحی (tetrahedron) هرم انرشيايي ضريب I_{xy} محاسبه کړئ. د موادو کثافت ρ دی. نتيجه يې د جسم د ټولې کتلې m له جنسه بيان کړي. وړانديز: ضخامت dz د مثلثي عنصر لپاره وکاروئ ، او بيا dI_{xy} د عنصر د اندازې او کتلې له جنسه چې د پوښتنې 21-6 نتيجه وکارو، محاسبه کړی.



پ 21-3

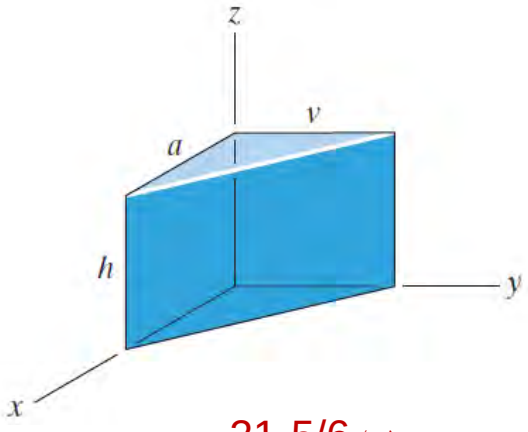
*21–4 یو متجانس (homogeneous) سلنډر چې m کتله لري، انرشیایی مومینټونه یې $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ محرونوته محاسبه کړئ.



پ 21-4

21–5 د متجانس منشور (prism) انرشیایی ضرب I_{yz} د مستقیم انتګریشن په وسیله محاسبه کړئ. د موادو کثافت ρ دی. نتیجې یې د منشور د ټولې کتلې m له مخی بیان کړي .

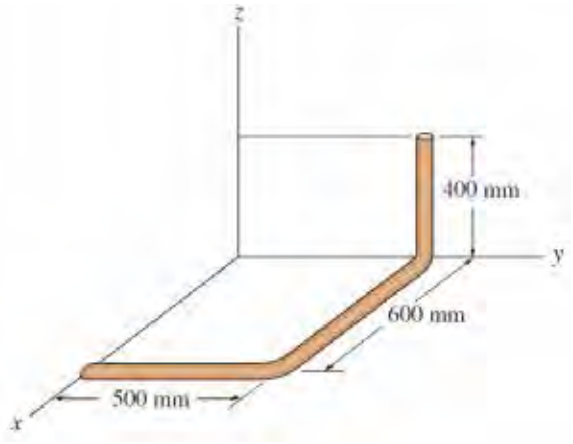
21–6 . د متجانس منشور (prism) انرشیایی ضرب I_{xy} د مستقیم انتګریشن په وسیله محاسبه کړئ. د موادو کثافت ρ دی. نتیجې یې د منشور د ټولې کتلې m له مخی بیان کړي .



پ 21-5/6

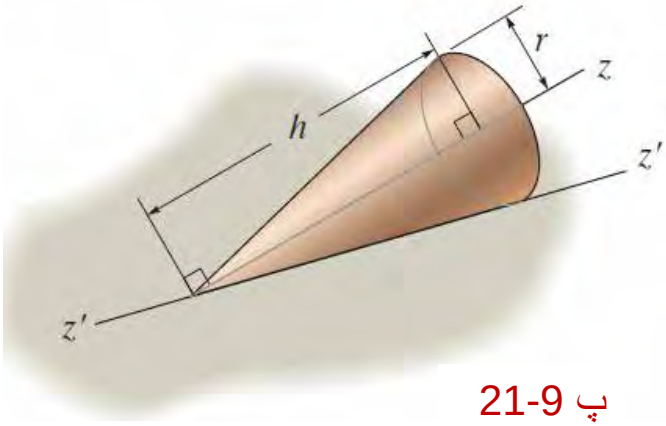
21–7 . د کوږ شوی راډ لپاره انرشیایې ضرب I_{xy} محاسبه کړئ. راډ په واحد اوږدوالی کی 2 kg/m کتله لري.

21–8 . د کوږ شوی راډ لپاره انرشیایی مومینټونه I_{zz} , I_{yy} , I_{xy} محاسبه کړئ. راډ په واحد اوږدوالی کي kg/m 2 کتله لري.



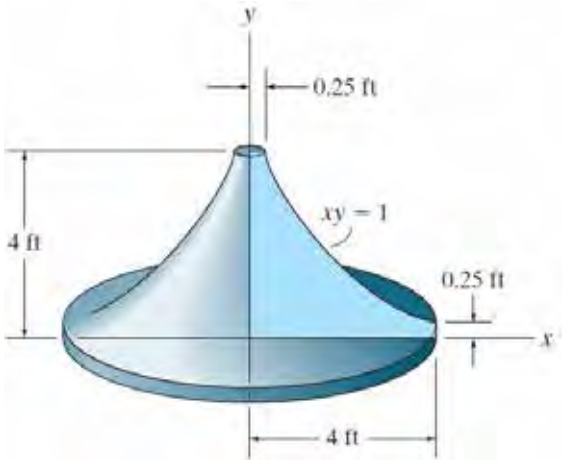
پ 21-7/8

21–9 . د مخروط انرشیا مومینټ z' محور ته محاسبه کړئ. د مخروط تول 15 lb دی، لوړوالی یې $h = 1.5$ ft دی، او شعاع یې $r = 0.5$ ft دی.



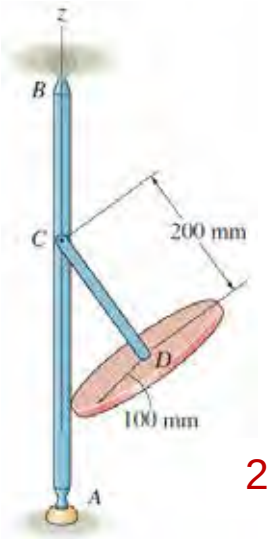
پ 21-9

21–10. د y محور په اړه د بنودل شوي جامد شکل لپاره د جایریشن شعاع k_x او k_y محاسبه کړئ . بنودلشوي جامد په څرخولو د سیوری شوی ساحې په y محور جوړ شوي. د موادو کثافت ρ دی.



پ 21-10

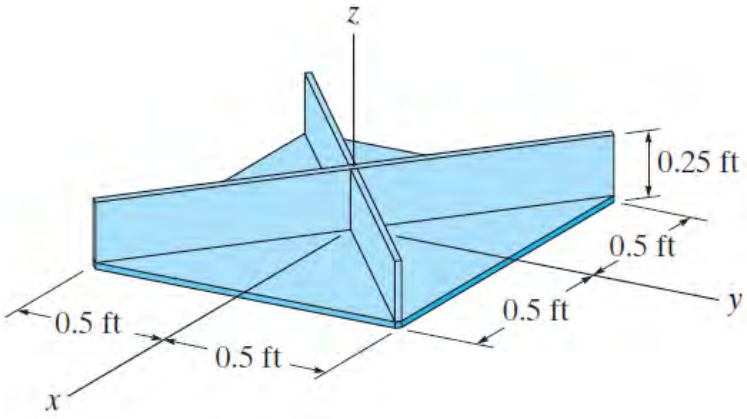
21–11 . د 1.5 kg راډ *CD* او 7 kg ډیسک نه جوړ شوی ساختمان انرشیا یی مومینټ ***z*** محور ته محاسبه کړئ. د موادو کثافت ρ دی.



پ 21-11

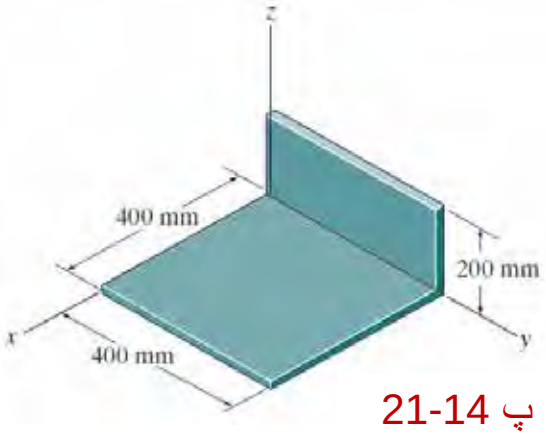
***21–12 .** د ترکیبي تختې ټولیز انرشیایی مومینټ I_{xx} محاسبه کړئ. د تختې ځانګړی تول 6 lb/ft^2 دي.

21–13 . د ترکیبي تختې ټولیز انرشیایی ضرب I_{yz} محاسبه کړئ. تخته 6 lb/ft^2 تول لري.



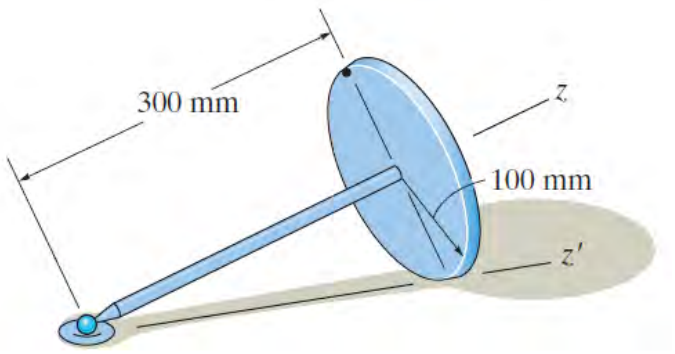
پ 21-12/13

21–14 . د نازک تختې انرشیایی ضربو I_{yz}, I_{xy} او I_{xz} محاسبه کړئ. د موادو کثافت 50 kg/m^2 دی.



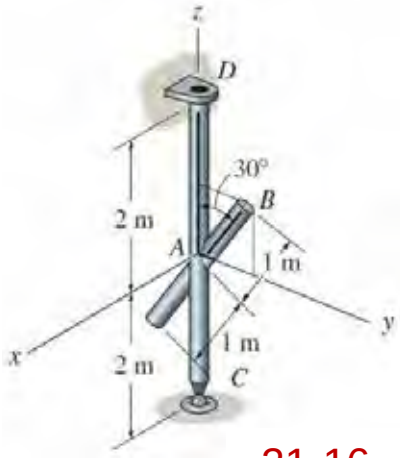
پ 21-14

21–15 . د 1.5 kg راډ او 4 kg ډیسک دواړو، انرشیایی مومینټ z' محور ته محاسبه کړئ.



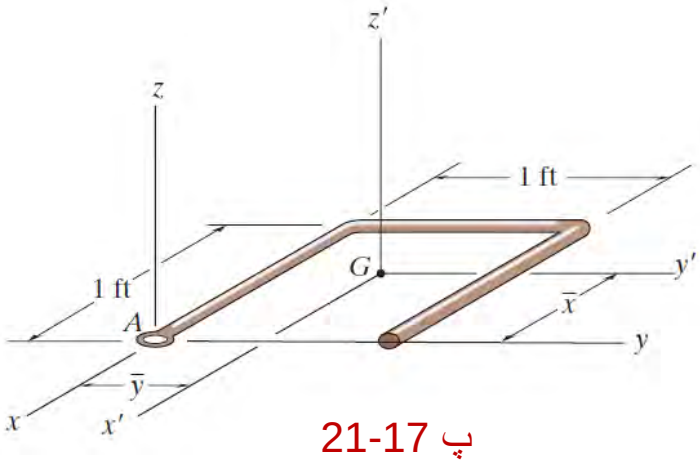
پ 21-15

*21–16 . د راډونو د جوړښت انرشیایی مومینټونه د x, y او z محورونو په اړه محاسبه کړئ. راډ 0.75 kg/m کتله لري.



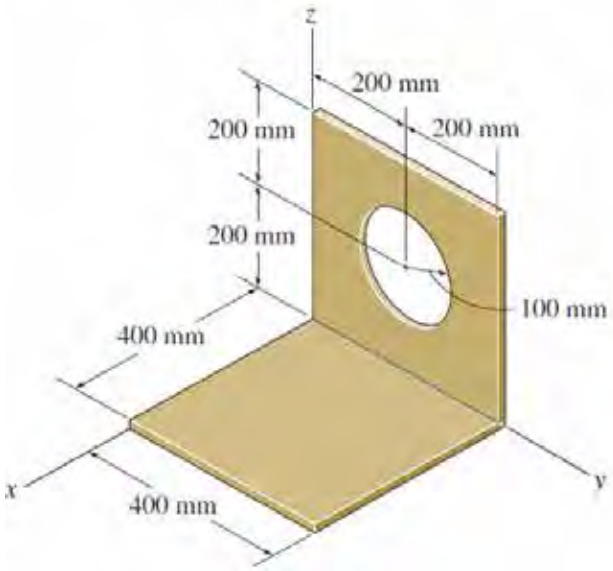
پ 21-16

21–17 . کوږ شوی راډ 1.5 lb/ft تول لری. د ثقل مرکز $G(\bar{x},\bar{y})$ موقعیت پیدا کړئ، او د انرشیایی اصلي مومینټونه $I_{x'}$، $I_{y'}$, او $I_{z'}$ د راډ $\dot{x}$, y' او z' محورونو ته محاسبه کړئ.



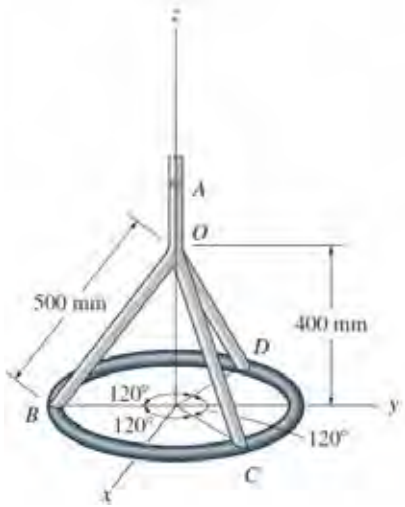
پ 21-17

21–18 . د نازکی تختې انرشیای ضربو I_{xy} , I_{yz} او I_{xz} محاسبه کړئ. د کتلی کثافت پر واحده سطحه 50 kg/m^2 دی.



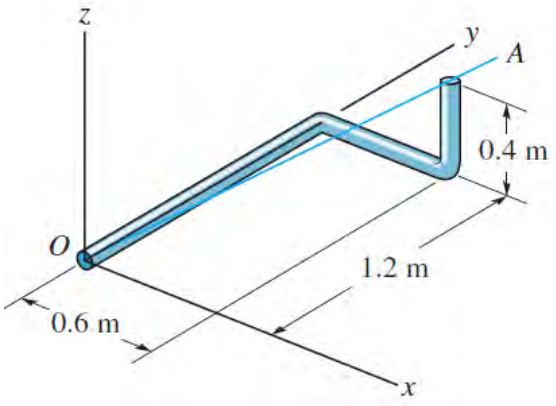
پ 21-18

21–19 . د راډ او نازکی حلقې جوړښت انرشیا یی مومینټ د **z** محور ته محاسبه کړئ. راډ او حلقه په واحد اوږدوالي کی 2 kg/m کتله لري.



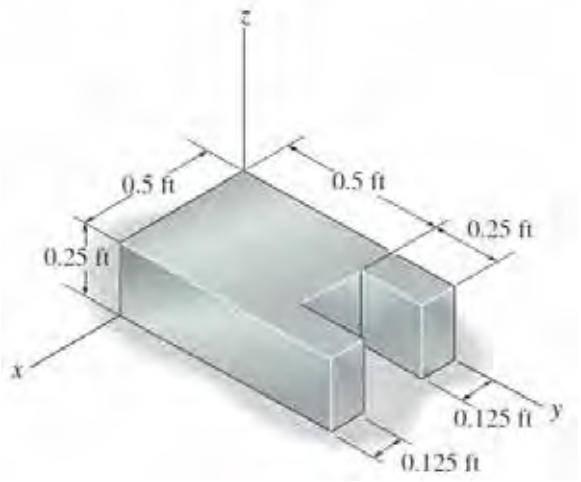
پ 21-19

*21–20 . دا لاندی کوږ راډ 4 kg/m کتله لري. د OA محور ته د راډ د انرشیا مومینټ محاسبه کړئ.



پ 21-20

21–21 . د لاندی بنودل شوي جامد انرشیایی ضرب I_{xy}, I_{yz} , او I_{xz} محاسبه کړئ. مواد یی فولاد دی، او ځانګړی تول یی 490 lb/ft³ دی.



پ 21-20

21.2. زاويوي مومنتم (ANGULAR MOMENTUM)

په دې برخه کې به موږ هغه اړین معادلو ته انکشاف ورکړو چې د یوه سخت جسم د هرې نقطې په اړه د زاویوي مومنتم اندازه کولو لپاره کارول کیږي. دا معادلې د امپلس او مؤمنتم اصولو ته او د سخت جسم د تاویدو حرکت معادلې د انکشاف لپاره یوه وسیله برابروي.

تصور کړئ چې یو سخت جسم په انځور 21-6 کې د m کتله لري او د کتلې مرکز موقعیت یې G دی. د X ، Y، Z کوارډینیټ سیستم یو انرشیایی فریم دی، او له همدې امله، د دې محورونه ثابت دي یا په یوه ثابت سرعت سره انتقال کوي. زاویوي مؤمنتم چې له دې مرجعي څخه اندازه کیږي، د هرې تصادفي نقطې A په اړه محاسبه کیږي. د موقعیت ویکټورونه $\mathbf{r}_A$ او $\boldsymbol{r}_A$ د کوارډینیټ له مبداء څخه تر نقطې A او د A څخه د جسم د i ام ذرې ته رسم شوي دي. که چیرې د دې ذرې کتله m_i وي، نو د نقطې A ته زاویوي مؤمنتم دی:

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

چیرې چې $\mathbf{v}_i$ د ذرې سرعت دی چې د X ، Y، Z کوارډینیټ سیستم څخه اندازه کیږي. که چیرې جسم د $\mathbf{w}$ زاویوي سرعت ولري، نو $\mathbf{v}_i$ ممکن د A د سرعت سره اړیکه ولري چې د معادلې 20-7 په کارولو سره ترلاسه کیږي، یعنې

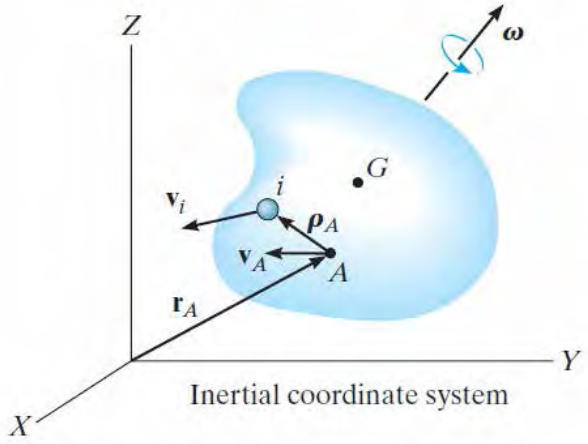
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

په دې توګه

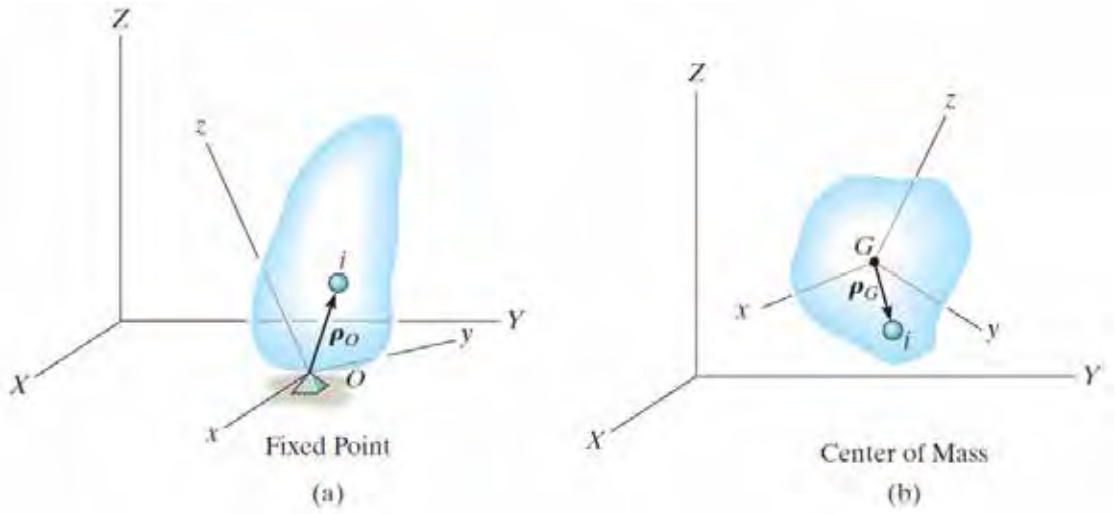
$$\begin{aligned}(\mathbf{H}_A)_i &= \boldsymbol{\rho}_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \\ &= (\boldsymbol{\rho}_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i\end{aligned}$$

د جسم د ټولو اجزاوو د مؤمنت جمع کولو لپاره انټیګریشن اړین دي. څرنګه چې $m_i \longrightarrow dm$ مومړ لرو:

$$\mathbf{H}_A = \left(\int_m \boldsymbol{\rho}_A dm\right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \qquad (21\text{–}6)$$



انځور 21-6



انځور 21-7

ثابت ټکی O (Fixed Point O). که چیرې A په جسم کې ، انځور 21-7a ، ثابت ټکی O و ګرځي نو بیا $v_A = 0$ او معادله 21-6 په دې لاندې ډول بدلیږي

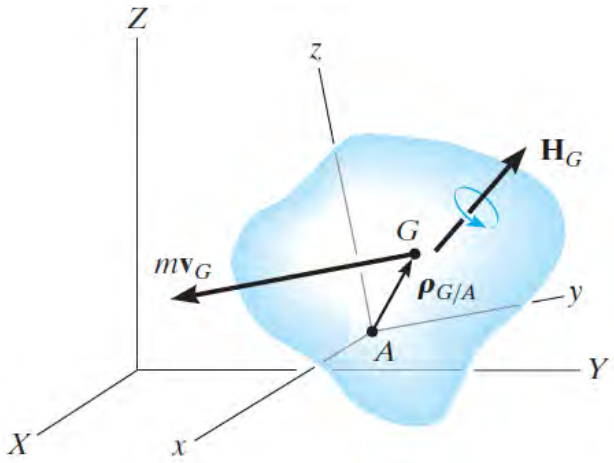
$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm \qquad (21\text{–}7)$$

د کتلې مرکز G (Center of Mass G). که A د جسم د کتلې مرکز G کې موقعیت ولري، انځور 21-7b ، نو بیا $\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ او

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm \qquad (21\text{–}8)$$

اختیاري ټکی A (Arbitrary Point A).عموماً، A کیدای شي د O یا G پرته بل ټکی وي، انځور 21-7c ، په دې صورت کې معادله 21-6 بیا هم ممکنه ده چې په لاندې شکل ساده شي (پوښتنه 21-23 وګورئ)

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}9)$$



اختیاري ټکي

(c)

دلته زاویوی مومنټم له دوو برخو څخه جوړ شوی دی — مؤمنت د جسم د خطي مؤمنتم $m\mathbf{v}_G$ په ټکی A کی چې په (ویکتوري ډول) د زاویوی مؤمنتم $\mathbf{H}_G$ سره یوځای کیږي. معادله 21-9 هم کولی شي د جسم زاویوی مؤمنتم په ثابت ټکی O کی معلوم کړي. پایلې، البته، به همغه وي لکه څنګه چې د اسانه معادلی 21-7 څخه ترلاسه کیږي

د H مستطیلي اجزاوی (Rectangular Components of H).

د معادلو 21-7 څخه تر 21-9 پوري د عملي استفادې لپاره، زاویوی مومنټم باید د خپلو سکیلر اجزاوو سره څرګند شي. د عمومي جوړښت لپاره، په یاد ولرئ چې معادلې 21-7 او 21-8 دواړی په لاندی څیره دی:

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm$$

د $\mathbf{H}$ ، r ، او $\mathbf{w}$ څرګندول د خپلو x ، y، z اجزاوو سره ، مورِ لرو:

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \int_m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times [(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})] dm$$

د کراس ضرب پراخول او د ټرمونو یوځای کول، مورِ ترلاسه کوو

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \left[\omega_x \int_m (y^2 + z^2)dm - \omega_y \int_m xy\, dm - \omega_z \int_m xz\, dm\right]\mathbf{i}$$
$$+ \left[-\omega_x \int_m xy\, dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2)dm - \omega_z \int_m yz\, dm\right]\mathbf{j}$$
$$+ \left[-\omega_x \int_m zx\, dm - \omega_y \int_m yz\, dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2)dm\right]\mathbf{k}$$

د اړوندو **i** ، **j**، **k** اجزاوو سره مساوي کول او دا پیژندل چې انتیګرالونه د مومنټونو او انرشیایی ضربو نمایندګي کوي، مور ترلاسه کوو

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \qquad (21\text{–}10)$$

دا معادلې نورې هم ساده کیدای شي که چیرې د x ، y، z محورونو کوردیناتونه داسې ځای پر ځای شي چې دوی د جسم د *انرشیا اصلي محورونو* ته بدل شي. کله چې دغه محورونه وکارول شي، انرشیایی ضرب $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ کیږي، او که چیرې د x ، y، z محورونو په اړه د انرشیا اصلي مومنټونه د $I_x = I_{xx}$ ، $I_y = I_{yy}$، $I_z = I_{zz}$ په توګه وښودل شی، نو بیا د زاویوی مؤمنتم درې اجزاوې په لاندې ډول کیږي

$$H_x = I_x\omega_x \quad H_y = I_y\omega_y \quad H_z = I_z\omega_z \qquad (21\text{–}11)$$

د ایمپلس او مؤمنتم اصول (Principle of Impulse and Momentum).

اوس چې د جسم لپاره د زاویوی مؤمنتم د معادلو جوړیدلو پراختیا موندلې، د ایمپلس او مؤمنتم اصول، لکه څنګه چې په 19.2 برخه کې بحث شوی، د هغه کینیټیک پوښتنو د حل لپاره کارول کیدی شي چې قوه، سرعت، او وخت په کې ګډون لري. د دې حالت لپاره، لاندې دوی ویکتوري معادلې شتون لري

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (21\text{–}12)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (21\text{–}13)$$

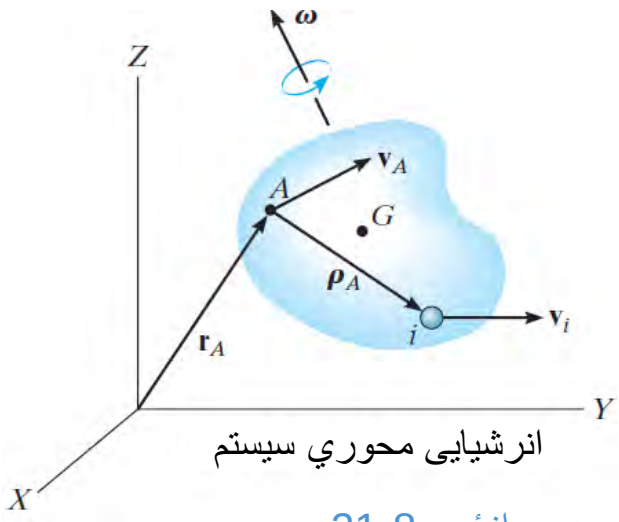
په درییز ابعادو کې هر ویکتوري اصطلاح کیدی شی د خپلو دریو سکیلر اجزاوو په واسطه څرګند شي، او په دې توګه ټولې شپږ سکیلر معادلې لیکل کیدی شي. دري معادلې د خطي ایمپلس او مؤمنتم د x ، y، z جهتو سره تړاو لري، او نورې دري معادلې د جسم زاویوی ایمپلس او مؤمنتم د x ، y، z محورونو سره تړاو لري. مخکې له دې چې دا معادلې 21-12 او 21-13 د پوښتنو د حل لپاره پلي شي، ښایی د 19.2 او 19.3 برخو موادو بیاکتنه وشي.



د استرونات مخکښ حرکت د هغه یا هغې د فضا کالیو سره وصل شوي کوچني د جهت ورکولو جیټونو په وسیله کنټرول کیږي. هغه ایمپلسونه چې دا جیټونه یې برابروي باید په دقت سره مشخص شي تر څو د تاویدو او د موقعیت د له لاسه ورکولو څخه مخنیوی وشي© NASA) .

21.3 کینیتیک انرژی (KINETIC ENERGY)

د دې لپاره چې د کار او انرژی اصول د سخت جسم د عمومي حرکت پوښتنو د حل لپاره پلي شي، لومړی اړتیا ده چې د جسم د کنټیک انرژی لپاره فورمول ترتیب شي. که د جسم ذره ، انځور 21-8، کتله m_i او $\mathbf{v}_i$ سرعت ولري، چې د انرشیل چوکاټ X ، Y، Z ته اندازه شوي وي، نو بیا د دې ذرې کینیتیک انرژی داسې ده



انرشیایی محوري سیستم

انځور 21-8

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

که د یوه تصادفي ټکی A په جسم کې سرعت معلوم وي، نو $\mathbf{v}_i$ کولای شي د $\mathbf{v}_A$ سره د معادلې $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \mathbf{w} \times \mathbf{r}_A$ په واسطه ارتباط پیدا کړي. د دې اصطلاح په کارولو سره، د ذره لپاره د کنټیک انرژی داسې کیږي:

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) m_i + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i$$

د ټول جسم لپاره د کنټیک انرژی د جسم د ټولو ذرو د کنټیک انرژیو په جمع کولو سره ترلاسه کیږي. دې لپاره یو انټګریشن ته اړتیا ده. ځرنګه چې $m_i \longrightarrow dm$ دی، مونږ ترلاسه کوو

$$T = \tfrac{1}{2} m (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A dm \right) + \tfrac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm$$

په ښې لور کې وروستی عبارت د ویکتور د هویت (identity) په کارولو سره بیا لیکل کیدی شي:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$، چیرې چې $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$، $\mathbf{b} = \mathbf{r}_A$ او $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A$. وروستی نتیجه دا ده

$$T = \tfrac{1}{2} m (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A dm \right)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \qquad (21\text{–}14)$$

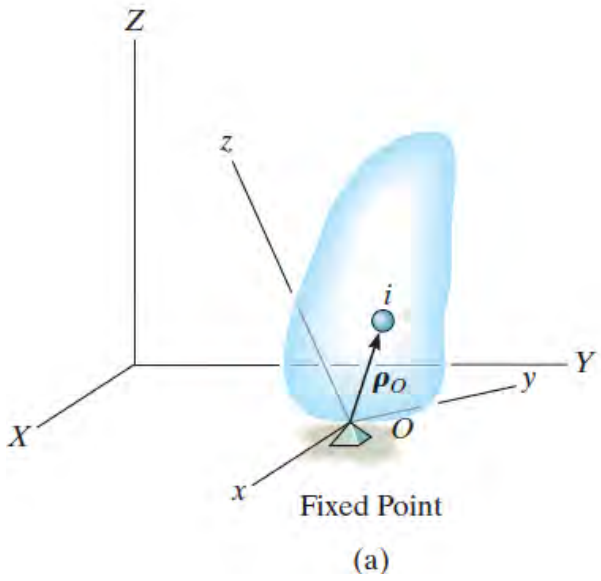
ساده کول هغه وخت رامنځته کیږي چیرې د ریفرینس ټکی A یا ثابت ټکی یا د کتلې مرکز وي.

ثابت نقطه O (Fixed Point O) : که A په جسم کې یو *ثابت ټکی* O وي، انځور 21-7a ، نو $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ ، او د معادلې 21-7 په کارولو سره، مونږ کولی شو معادله 21-14 داسې خرګند کړو

$$T = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

که چیرې x ، y، z محورونه د بدن لپاره د انرشیا اصلي محورونه وښیي، نو بیا $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ او $\mathbf{H}_O = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}$. ځای پر ځای کول او د ډات – ضرب عملیات ترسره کولو وروسته دا لاندې نتیجه ورکوي

$$T = \tfrac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \tfrac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \tfrac{1}{2} I_z \omega_z^2 \qquad (21\text{–}15)$$



انځور 21-7 (تکرار)

د کتلې مرکز G (Center of Mass G) : که A د جسم د کتلې مرکز G کې موقعیت ولري، انځور 21-7b ، نو $\int r_A \, dm = \mathbf{0}$ او د معادلې 21-8 په کارولو سره، مور کولی شو معادله 21-14 داسې ولیکو

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

د ثابت ټکی په څیر، په ښې لور کې وروستی عبارت ښی لورته په سکلر بڼه ښودل کیدی شي، په دې صورت کې

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (21\text{–}16)$$

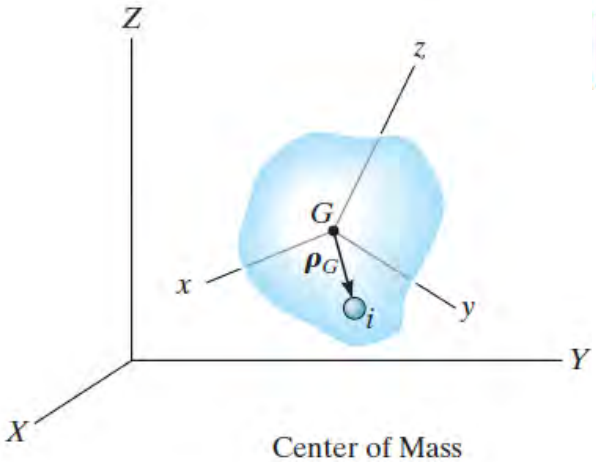
دلته دا ښکاري چې کنټیک انرژی دوی برخې لري؛ یعنې، د کتلې د مرکز انتقالي کنټیک انرژی، $\frac{1}{2}mv^2_G$، او د جسم تاویدونکی کنټیک انرژی.

د کار او انرژی اصول (Principle of Work and Energy) : کله چې د جسم لپاره د

کنټیک انرژی تروښودل شی، د ***کار او انرژی اصول*** کارول کیدی شي ترڅو هغه حرکنټیکی پوښتنې حل کړی چې په هغه کې قوه، سرعت، او بیځایه کیدنه شامل وي. د دې حالت لپاره

یوازې یوه سکلر معادله کولای شي د هر جسم لپاره ولیکل شي، یعني

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \qquad (21–17)$$



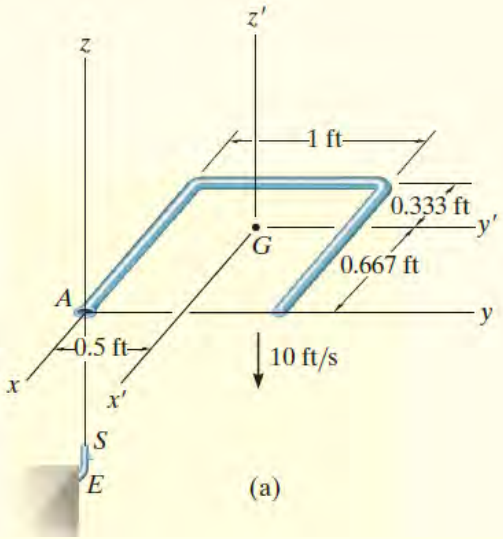
انځور 21-7 (تکرار)

د دې معادلې د تطبیق کولو څخه مخکې، باید د 18.1 تر 18.4 برخې بیا و کتنه وشي

مثالونه

مثال 21.2

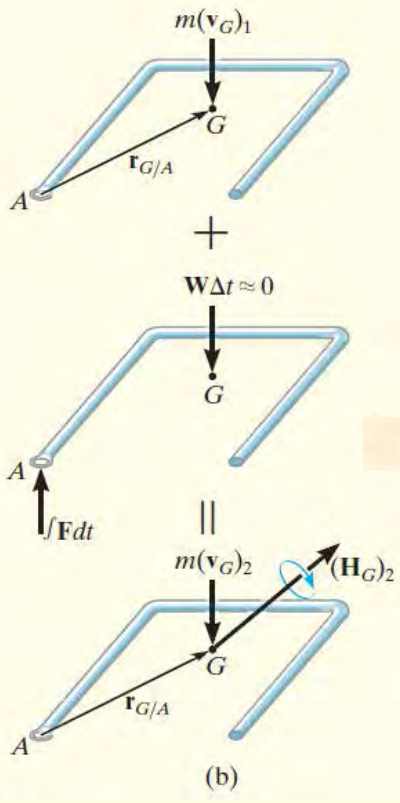
په انځور 21-9a کې راډ په واحد اوږدوالی کې د 1.5 lb/ft وزن لري. د دې زاویوي سرعت معین کړئ یوازې وروسته له دې چې د A پای د E په چنګګ باندې ولګیږي. چنګګ د راډ لپاره دوامداره تړاو چمتو کوي د فنر- قلف میکانیزم S له لارې. د دې څخه مخکې چې چنګګ ته وټکیږي، راډ د $(v_G)_1 = 10$ ft/s تیزوالی سره ښکته رالویږي.



حل :

د امپلس او مؤمنتم اصول کارول کیږي ځکه چې امپکت رامنځته کیږي.

د امپلس او مؤمنتم ډاګرامونه (Impulse and Momentum Diagrams):



انځور 21-9

انځور 21-9b . د لنډې مودې Δt په جریان کې، په ټکي A کې د امپلس قوه $\mathbf{F}$ د راډ مؤمنتم بدلوي . (د راډ د وزن $\mathbf{W}$ لخوا په دې وخت کې رامنځته شوې امپلس د $\int \mathbf{F}\,dt$ په پرتله کوچنۍ ده، نو هغه په نظر کې نه نیول کیږي، یعني وزن یو غیر امپلسی قوه ده). له دې امله، د راډ زاویوي مؤمنتم په نقطه A کی ساتل (conserved) کیږي ځکه چې د $\int \mathbf{F}\,dt$ مؤمنت د A په اړه صفر ده.

د زاویوي مؤمنتم ساتنه (Conservation of Angular Momentum):

معادله 21-9 باید د راډ زاویوي مؤمنتم پیدا کولو لپاره وکارول شي، ځکه چې A د چنګګ سره د امپلس اړیکې وروسته ثابت نقطه نه کیږي . د

$$\mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_2 + (\mathbf{H}_G)_2 \qquad (1)$$

انځور 21-9b په حواله، $(\mathbf{H}_A)_1 = (\mathbf{H}_A)_2$، یا

له انځور 21-9a څخه، $\mathbf{r}_{G/A} = \{-0.66\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}\}$ ft . برسېره پر دې، د حرف برسیره ذبر شوي محورونه د راډ لپاره د انرشیا اصلي محورونه دي ځکه چې

$$I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{z'y'} = 0.$$

له دې امله، له معادلې 21-11 له مخې،

$$(\mathbf{H}_G)_2 = I_{x'}\omega_x\mathbf{i} + I_{y'}\omega_y\mathbf{j} + I_{z'}\omega_z\mathbf{k}$$

د انرشیا اصلي مؤمنت عبارت دي له:

21- (پوښتنه $I_x = 0.0272$ slug.ft^2 , $I_y = 0.0155$ slug.ft^2, $I_z = 0.0427$ slug.ft^2 17 وګوري). په معادله 1 کې ځای پر ځای کو,، مونږ لرو

$$(-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-10\mathbf{k})\right] = (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-v_G)_2\mathbf{k}\right] + 0.0272\omega_x\mathbf{i} + 0.0155\omega_y\mathbf{j} + 0.0427\omega_z\mathbf{k}$$

پراخول او د اړوند **i** ، **j**، **k** برخو برابرول نتیجه ورکوي:

$$-0.699 = -0.0699(v_G)_2 + 0.0272\omega_x \quad (2)$$
$$-0.932 = -0.0932(v_G)_2 + 0.0155\omega_y \quad (3)$$
$$0 = 0.0427\omega_z \quad (4)$$

کینماتیک (Kinematics). په پورته معادلو کې څلور مجهوله دي؛ مګر یو بل معادله ترلاسه کیدی شي که چیرې **w** د $(\mathbf{v}_G)_2$ سره د کینماتیک په واسطه وصل شي. ځکه چې $w_z = 0$ (معادله 4) او د امپکت وروسته راډ د ثابت نقطې *A* په اړه تاویدل کړي، نو معادله 3-20 کارول کیدی شي، په دې صورت کې:

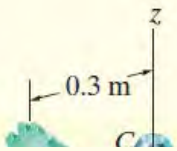
$$(\mathbf{v}_G)_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}, \text{ or}$$
$$-(v_G)_2\mathbf{k} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) \times (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$
$$-(v_G)_2 = 0.5\omega_x + 0.667\omega_y \quad (5)$$

د معادلو 2، 3، او 5 په یوځای حل کولو سره دا لاندی نتیجه په لاس راځي:

$$(\mathbf{v}_G)_2 = \{-8.41\mathbf{k}\}\ \text{ft/s} \quad \boldsymbol{\omega} = \{-4.09\mathbf{i} - 9.55\mathbf{j}\}\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

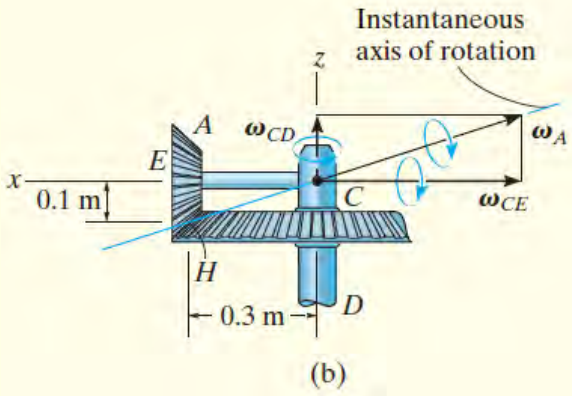
مثال 21.3

په انځور 21-10a کې ښودل شوي عمودي شافت *CD* باندی 5N·m تورک تطبیق کیږي، کوم چې 10 kg ګیر *A* ته اجازه ورکوي چې د اکسل *CE* په شاوخوا کې آزادانه وګرځي. که چیرې *A* له دریدلي حالت څخه پیل کړي، د *CD* زاویوي سرعت معین کړئ وروسته له دې چې دوه چرخشونه ترسره کړي. د *CD* او *CE* کتله نادیده نیول کیدي شي او فرض کړئ چې *A* د یوه نری ډیسک په توګه تخمین کیدی شي. ګیر *B* ثابت دی.



حل

د کار او انرژی اصول د حل لپاره کارول کیدی شي. ولې؟



(b)

انځور 21-10

کار(Work) : که *CD* ، *CE*، او *A* د تړل شویو بدنونو یو سیستم وګڼل شي، یوازې تطبیق شوی تورک M کار ترسره کوي. د *CD* لپاره د دوو چرخشونو لپاره، دا کار دی:

$$\Sigma U_{1-2} = (5\ \text{N·m})(4\pi\ \text{rad}) = 62.83\ \text{J}.$$

حرکتي انرژی (Kinetic Energy) : ځکه چې ګیر په پیل کې په ارامه حالت کې دی، نو د هغه پیل حرکت انرژی صفر ده. د ګیر لپاره یو کینماتیکي ډایګرام کله چې دا حرکت کوي، په انځور 21-10b کې ښودل شوی. که چیرې د *CD* زاویوي سرعت w_{CD} واخستل شي، نو د *A* زاویوي سرعت $\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_{CD} + \boldsymbol{w}_{CE}$ کیږي. ګیر کولای شي د بې وزنه اوږد شوي د جسم یوه برخه وګڼل شي چې د *ثابت نقطې* *C* په شاوخوا کې دوران کوي. د دې جسم حرکت آني محور د *CH* کرښه ده، ځکه چې دواړه نقطې *C* او *H* په جسم (ګیر) کې صفر سرعت لري او له دې امله باید پر دې محور باندې موقعیت ولري. دې ته اړتیا لري چې $\boldsymbol{w}_{CD}$ او $\boldsymbol{w}_{CE}$ برخې د معادلې $w_{CD}/0.1\ \text{m} = w_{CE}/0.3\ \text{m}$ او یا $w_{CE} = 3w_{CD}$ له لارې تړل شوي وي نو بیا :

$$\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} \qquad (1)$$

په انځور 21-10a کې *x* ، *y*، *z* محورونه د ګیر لپاره د C په نقطه کې د *انرشیا اصلي محورونو* استازیتوب کوي. ځکه

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (2)$$

چې نقطه C د دوران ثابت نقطه ده، نو معادله 15-21 ممکنه ده د حرکت انرژی معلومولو لپاره تطبیق شي، یعني:

د موازي-محور تیورم کارولو سره، د ګیر د انرشیا مؤمنت په نقطه C کې لاندې ډول دي

$$I_x = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 0.05\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 + 10\text{ kg}(0.3\text{ m})^2 = 0.925\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

لکه څنګه چې $w_x = -3w_{CD}$ ، $w_y = 0$، $w_z = w_{CD}$، معادله 2 داسې کیږي

$$T_A = \tfrac{1}{2}(0.05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.925)(\omega_{CD})^2 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

د کار او انرژی اصل (Principle of Work and Energy): د کار او انرژی اصول تطبیق کولو سره، مور ترلاسه کوو

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 62.83 = 0.6875\omega_{CD}^2$$
$$\omega_{CD} = 9.56\text{ rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

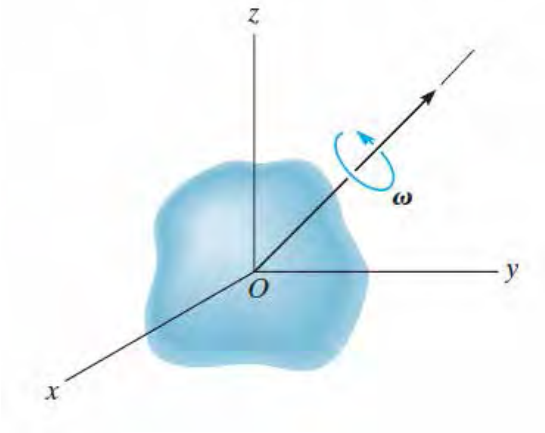
PROBLEMS

21–22 . که چیرې یو جسم هیڅ ډول متناظر سطحي ونلري، نو د انرشیا اصلي مؤمنت ریاضیکي ډول سره ټاکل کیدی شي. د دې څرنګوالي د ښودلو لپاره، هغه سخت جسم په نظر کې ونیسئ چې په یوه اصلي محور د انرشیا په اوږدو کې په زاویوي سرعت ω سره څرخي. که

چيرې د دې محور په اړه د انرشيا اصلي مؤمنت I وي، نو زاويي حرکت کولای شي داسې څرګند شي : $\mathbf{H} = I\mathbf{w} = I w_x \mathbf{i} + I w_y \mathbf{j} + I w_z \mathbf{k}$. د $\mathbf{H}$ برخې هم کولی شي د معادلو 21-10 په واسطه څرګند شي، چيرې چې د انرشيا ټينسور فرض کيږي چې معلوم دي. د $\mathbf{H}$ د دواړو څرګندونو د $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$، او $\mathbf{k}$ برخې برابرې کړئ او w_x ، w_y، او w_z نامعلوم وګڼئ. د دې درې معادلو حل ترلاسه کيږي، چې کله د ضريبونه د دټرمينينټ صفر وي. ښودل کړئ چې دا دټرمينينټ، کله چې پراخ شي، مکعب معادله توليدوي

$$I^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})I^2$$
$$+ (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx} - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I$$
$$- (I_{xx}I_{yy}I_{zz} - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{yy}I_{zx}^2 - I_{zz}I_{xy}^2) = 0$$

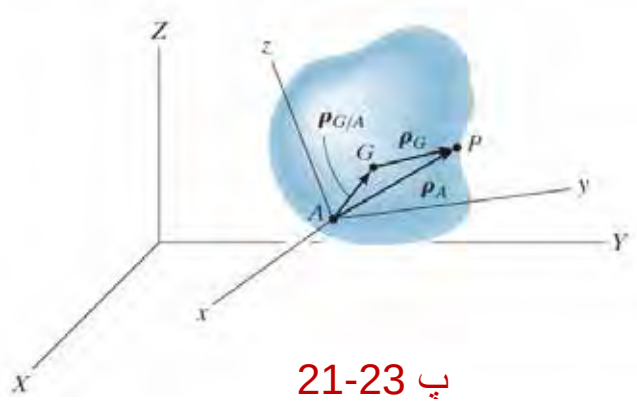
د دې معادلې د حل څخه ترلاسه شوي د I درې مثبت ريښې، د انرشيا اصلي مؤمنت I_x ، I_y، او I_z استازيتوب کوي.



پ 21-22

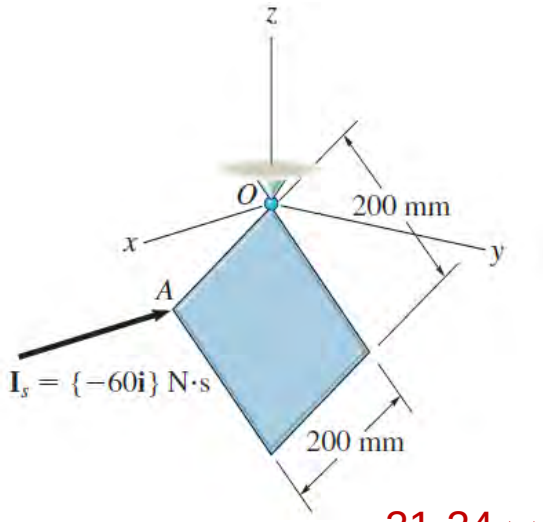
21-23 . وښايی چې که چيرې د يو جسم زاويوي مؤمنتم نسبت يوه تصادفي ټکي A ته وټاکل شي، نو بيا $\mathbf{H}_A$ کولای شي د معادلې 21-9 په واسطه څرګند شي. دا اړتيا لري چې $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_G +$ $\mathbf{r}_{G/A}$ په معادله 21-6 کې ځای پر ځای کړئ او پراخه يې کړئ، يادونه بايد وشي چې

$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{G/A}$ او $\int \mathbf{r}_G \, dm = \mathbf{0}$ د کتلې مرکز د تعريف له مخې



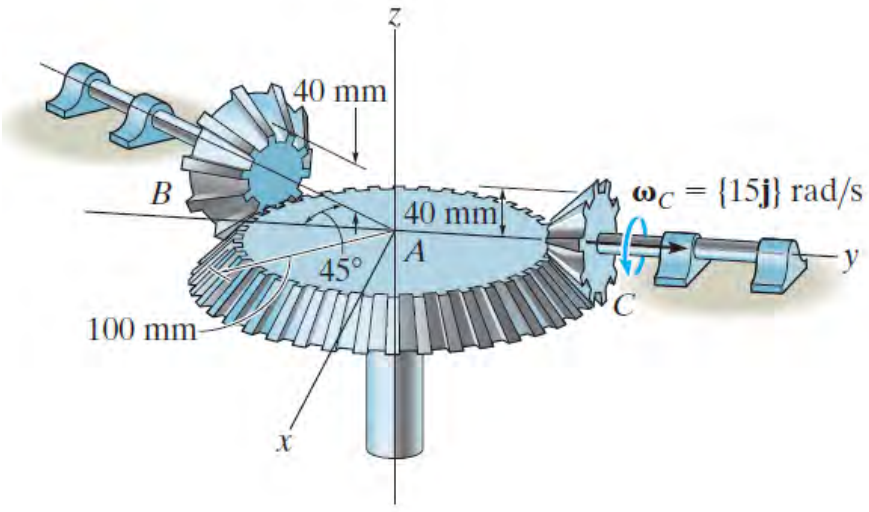
پ 21-23

21-24* . یوه نرئ تخته چې د هغې اندازه 4 kg ده، هغه له یوه کنج د بال او ساکت ګنډی O له لارې ځړول شوې ده. که چیرې یو تیږه په عمودي ډول د هغې سطحې ته په کنج A کې د یوه امپلس په مرسته برخورد وکړي، چې امپلس یې $\mathbf{I}_s = \{-60\mathbf{i}\}$ N .s ده، نو د تختی د دوران آنې محور و ټاکې او هم د O په ځای کې ایجاد شوې امپلس معلومه کړئ.



پ 21-24

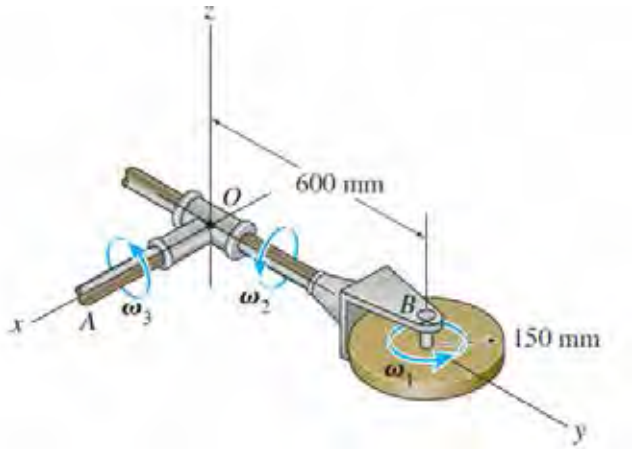
21-25 . لوی ګیر 5 kg ټوله کتله لري او د هغې د ګردش شعاع k_Z = 75 mm دي. ګیر B او C هر یو د 200 g کتله لري او د خپل وصلیدونکي شافت په محور د جایریشن شعاع یې 15 mm ملي متره ده. که چیرې ګیرونه په ګنډه کار کوي او C زاویوي مؤمنتم $\mathbf{w}_C = \{15\mathbf{j}\}$ rad/s لري، نو د دې ګیرونو لپاره د مجموعي زاویوي مؤمنتم معلوم کړئ.



پ 21-25

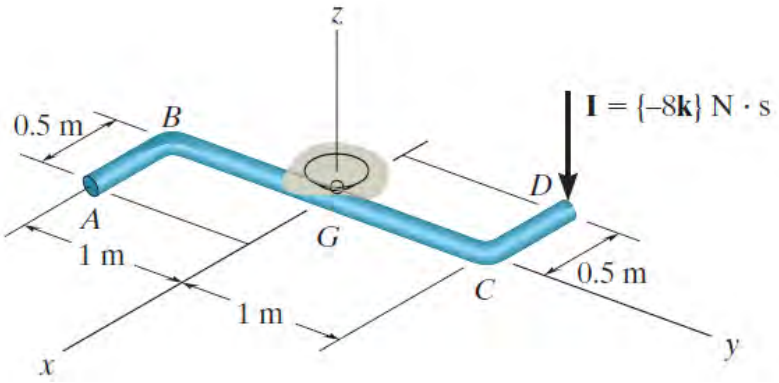
21-26 . دا لاندی 10 kg ګردي ډیسک په خپل محور باندې په ثابت زاویي سرعت $w_1 =$ 15 rad/s سره څرخي. په ورته وخت کې، د *OB* لاسنیونکی او د *OA* شافت په خپلو محورونو په ثابت زاویي سرعتونو $w_2 = 0$ rad/s او $w_3 = 6$ rad/s سره څرخي. د ډیسک زاویي حرکت د نقطې *O* په اړه او د هغې حرکت انرژی معلومه کړئ.

21-27. دا لاندی 10 kg ګردي ډیسک په خپل محور باندې په ثابت زاویي سرعت $w_1 = 15$ rad/s سره څرخي. په ورته وخت کې، د *OB* لاسنیونکی او د *OA* شافت په خپلو محورونو په ثابت زاویي سرعتونو $w_2 = 10$ rad/s او $w_3 = 6$ rad/s سره څرخي. د ډیسک زاویي حرکت د نقطې *O* په اړه او د هغې حرکت انرژی معلومه کړئ.



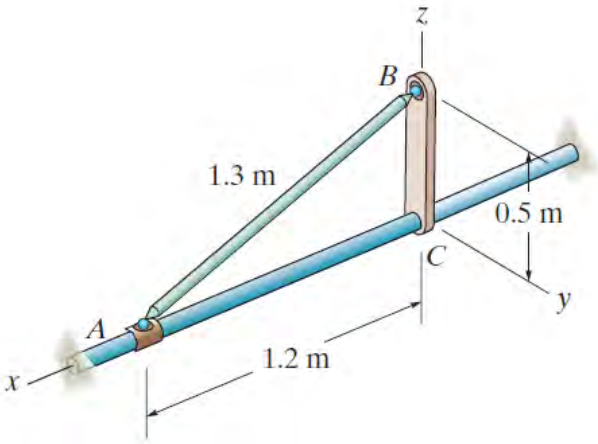
پ 21-26/27

*21-28 . دا لاندی راډ اسمبلي د G نقطه کې د بال او ساکت اتکاء سره په ګنډه کې ځړول شوی ده. هره برخه یې 0.5 kg/m کتله لري. که چیرې مجموعه په پیل کې په ارام حالت کې وي او یوه امپلس $\mathbf{I} = \{-8\mathbf{k}\}$ N.s په D کې تطبیق شي، نو د امپلس وروسته د اسمبلی زاویوي سرعت معلومه کړئ.



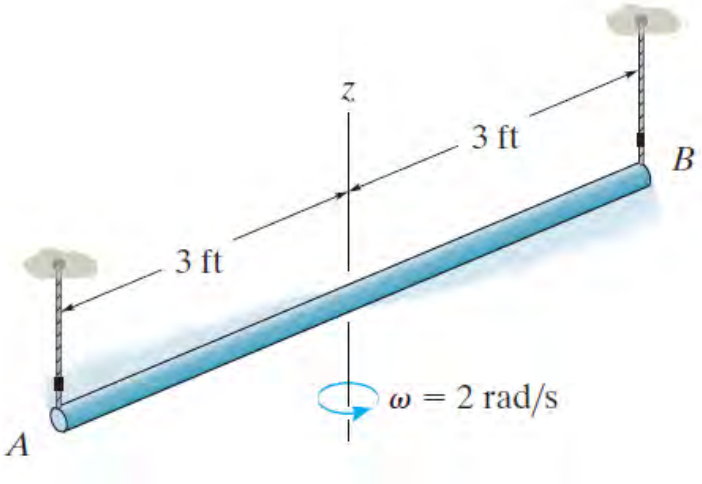
پ 21-28

21-29 . د 4 kg کیلوګرامه راډ AB په A ټکي کې د 1 kg حلقې سره او د 2 kg ټروند BC سره چې د بال او ساکت ګنډې له لارې وصل شوي، متصل دی. که راډ د استراحت څخه په ښکاره شوی موقعیت کې خوشې شي، نو د لینک زاویوي سرعت معلومه کړئ وروسته له دې چې 180^o درجې دوران وکړي.



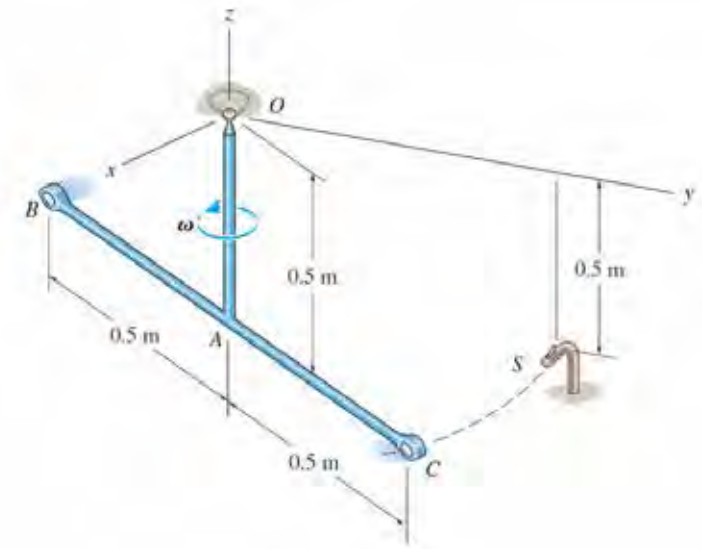
پ 21-29

21-30 . د راډ وزن 3 lb/ft دی او د A او B په نقطو کې د موازي تارونو له لارې ځړول شوی دی. که راډ په z محور باندې په زاویوي سرعت 2 rad/s سره څرخي، نو معلومه کړئ چې څومره لوړ د راډ مرکز هغه وخت لوړ شي کله چې راډ په لنډه توګه ودریږي.



پ 21-30

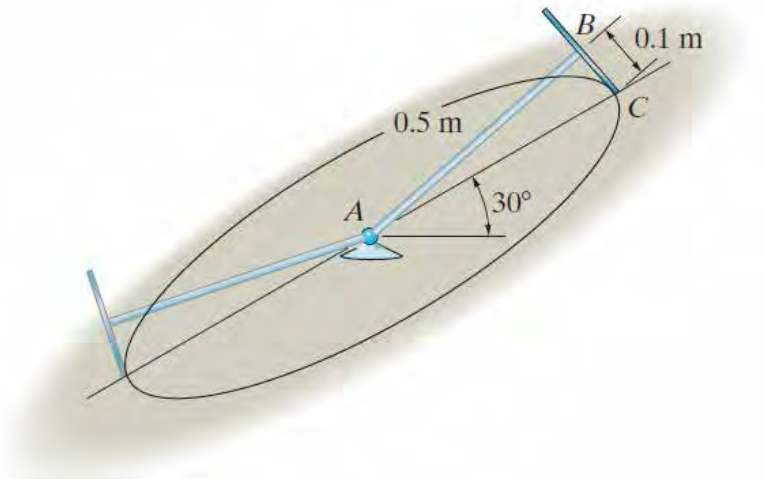
21-31 . د راډ اسمبلي کتله 2.5 kg اندازه لري او د زاويوي سرعت ثابت $\mathbf{w} = \{2\mathbf{k}\}$ rad/s سره څرخي کله چې د C په نقطه کې حلقه د S په ځای کې يوه دايمي اړيکه ترلاسه کړي. د امپلس وروسته د اسمبلی زاويوي سرعت فوراً معلومه کړئ.



پ 21-31

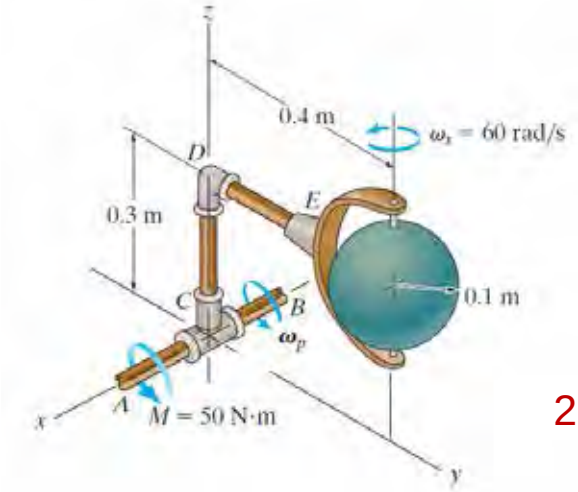
***21-32 .** د 2 kg کيلوګرامه نری ډيسک د نازک راډ سره تړلی دی چې د A په نقطه کې د بال او سوکت ګنډی سره ثابت دی. که چيرې ډيسک د استراحت څخه خوشې شي، نو د ډيسک

دوران معلومه کړئ کله چې ډیسک خپل ترټولو ټیټ حالت ته ورسیږي. د راډ کتله نادیده ونیسئ. ډیسک پرته له خوښیدو څخه غځیږي.



پ 21-32

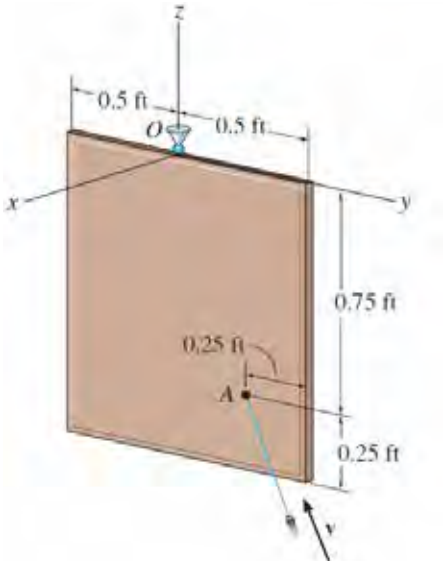
21-33 . د 20kg کره (sphere) په محور کې په ثابت زاویوي سرعت $w_s = 60$ rad/s سره څرخي. که چیرې شافت AB ته ټورک $M = 50$ N.m تطبیق شي، چې دا سبب کیږي چې دا دوران وکړي، نو د w_p اندازه وروسته له دې چې شافت د 90^o درجه چرخش وکړي معلومه کړئ. په پیل کې، $w_p = 0$. د CDE بازو کتله نادیده ونیسئ.



پ 21-33

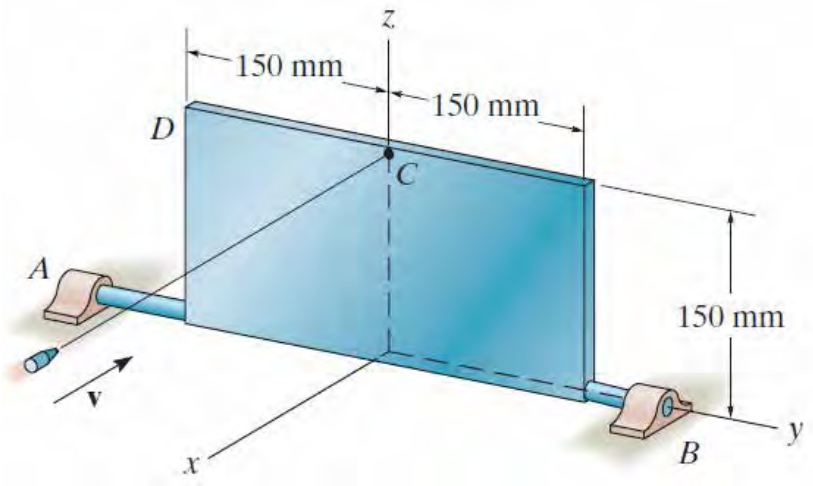
21-34 . د 25 lb نرۍ تخته د بال او ساکټ ګنډۍ څخه O ته ځړول شوې ده. یو 0.2-lb پروژیکټایل په سرعت $\mathbf{v} = \{-300\mathbf{i} - 250\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}$ ft/s د تختۍ ته ویشتل شوې او په نقطه A کې په تخته کې ځای پر ځای شو. د امپکت وروسته د تختۍ زاویوي سرعت او هغه محور چې پر هغه دوران پیل کیږي معلوم کړئ. وروسته له دې چې پروژیکټایل تختۍ ته داخل شو، د هغې کتله نادیده ونیسئ.

21-35 . پوښتنه 21-34 حل کړئ که پروژیکټایل د تختی څخه په 275 ft/s سرعت سره له هغې څخه په همدغه لاره ووزي.



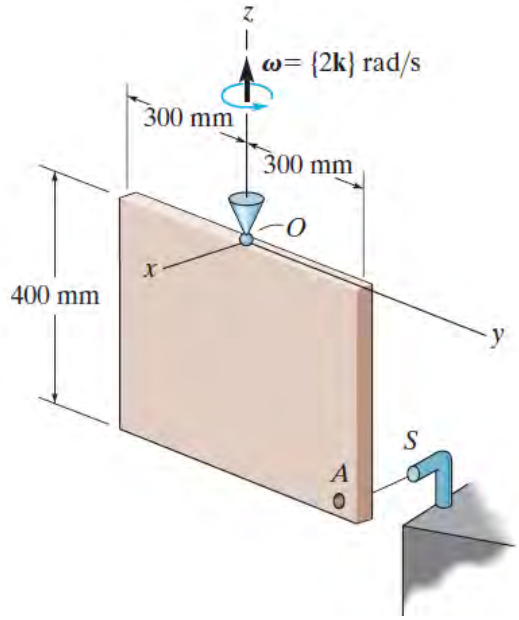
پ 21-34/35

***21-36 .** د 15 kg مستطیل تخته په *y* محور په آزاده توګه دوران کوي ځکه چې د *A* او *B* په ټکیو کې بییرنګ اتکاوي لري. کله چې تخته په عمودي سطحه کې متوازن وي، یوه 3 g مرمۍ په سرعت **v** = {-2000**i**} m/s سره عمود د تختی په سطحه وویشتل شي. د تختې زاویوي سرعت معلومه کړئ هغه وخت چې هغه 180º درجه دوران کړي. که چیرې مرمي په *C* کې د ورته سرعت **v** سره د *D* کونج ته وویشتل شي، آیا زاویوي سرعت ورته پاتې کیږي؟ ولې یا ولې نه؟



پ 21-36

21-37 . د 5-kg نرۍ تخته د O په نقطه کې د بال او ساکټ ګنډې له لارې ځړول شوې ده. دا د ثابت زاویوي سرعت $\mathbf{w} = \{2\mathbf{k}\}$ rad/s سره څرخي کله چې کونج A کې په چنګک S ولګیږي او یوه دایمي اړیکه چمتو کوي. د امپکت وروسته د تختې زاویوي سرعت فوراً معلومه کړئ.



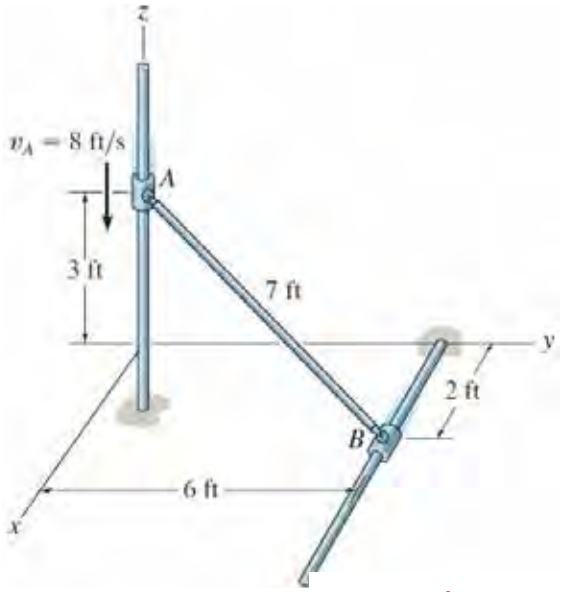
پ 21-37

21-38 . راډ AB د 6 lb وزن لري او د هغې دواړه پایونه د بال او ساکټ ګنډو له لارې د دوه همواره پټو سره وصل دی. که چیرې پټی A په 8 ft/s سرعت سره ښکته کیږي، نو د راډ حرکتي انرژۍ په هغه وخت کې معلوم کړئ.

21-39 . په ښودل شوی لحظه کې پټی A په 6 lb راډ باندې په $v_A = 8$ ft/s سرعت سره ښکته کیږي، د پټی A وروسته د 3 ft ښکته کیدوسره د راډ حرکتي انرژۍ معلومه کړئ. هره پټی د راډ سره د بال او ساکټ ګنډو له لارې وصل شوی. اصتکاک، د راډ ضخامت، او د پټیو کتله نادیده ونیسئ.

اشاره: د راډ زاویوي سرعت چې د

راډ محور ته عمودي دی، وکاروئ.



پ 21-38/39

21.4* د حرکت معادلې(EQUATIONS OF MOTION)

دا چې د جسم د انرشیایی ځانګړتیاوو او زاویوي مؤمنتم تشریح کولو سره مو اشنایی پیدا کړه ، اوس کولی شو چې د جسم د حرکت تشریح کولو لپاره په ګټورو شکلونو سره معادلې ولیکو.

د انتقالي حرکت معادلې (Equations of Translational Motion) : د یو

جسم انتقالي حرکت د جسم د کتلې د مرکز د تعجیل له مخی تعریف شوی دی، چې د یوه انرشیایی X، Y، Z ریفرینس څخه اندازه کیږي. دغه معادله په ویکتوري شکل په لاندی ډول لیکل کیدی شي

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad (21–18)$$

او یا په دریو سکیلر معادلو

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma F_z &= m(a_G)_z \end{aligned} \qquad (21–19)$$

دلته، $\mathbf{S F} = \mathbf{S} F_x \mathbf{i} + \mathbf{S} F_y \mathbf{j} + \mathbf{S} F_z \mathbf{k}$ ټول هغه بهرني قواوی ښیي چې په جسم باندې تطبیق شوي دي.

د تاویدلو حرکت معادلې (Equations of Rotational Motion) : په 15.6

برخه کې، مور 15-17 معادله جوړه کړه، یعنې

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (21–20)$$

دغه معادله ښیی چې د ټولو بهرنی قواوو مومنټو نو مجموعه چې د یوه سخت جسم د سیستم په زرو په باندی یوه *ثابت ټکی* O ته عمل کوی، مساوی کیږی په ټول زاویوي مؤمنتم د زرو د وخت د بدلون سره په دی ټکی O کې. کله چې د بهرنیو قوو مومینټونه د سیستم د کتلی د مرکز G په

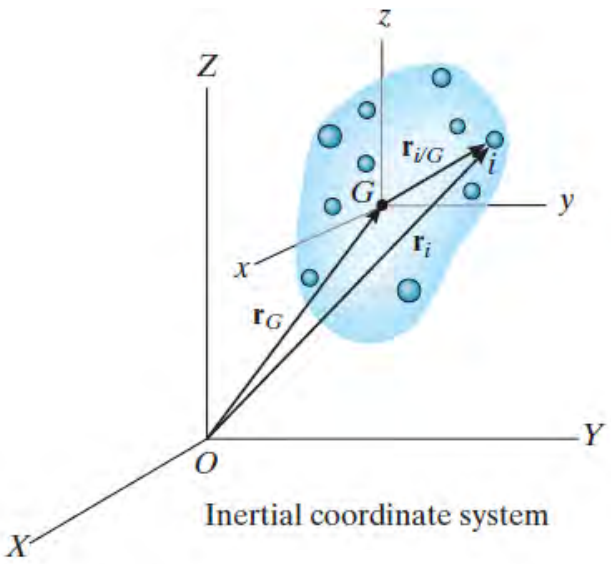
اړه جمع شي، بیا هم ورته ساده شکل د معادلې 21-20 ترلاسه کیږي، چې د مومینټ مجموعه $\mathbf{S}\,\mathbf{M}_G$ او د زاویوي مؤمنتم $\mathbf{H}_G$ تر منځ اړیکه څرګندوي.

د دې ښودلو لپاره، د ذراتو سیستم په نظر کې ونیسئ، لکه چې په انځور 21-11 کې ښودل شوی، چیرې چې x ، y، z محورونه د G په مرکز کې موقیعت لري، او د X ، Y، Z انرشیایی محوری سیستم په پرتله حرکت کوي. په عمومي توګه، G *تعجیل* لري، نو د تعریف له مخې، انتقالي فریم انرشیایی ریفرینس نه دی. د i مې ذری زاویوي مؤمنتم د دې فریم په اړه بیا داسې دی، چې

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G}$$

چیرې چې $\mathbf{r}_{i/G}$ او $\mathbf{v}_{i/G}$ د i مې ذری موقعیت او سرعت د G په اړه بنیي. د وخت مشتق اخیستو سره، مونږ لرو:

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$



انځور 21-11

د تعریف له مخې، $\mathbf{v}_{i/G} = \dot{\mathbf{r}}_{i/G}$. نو، د بنې اړخ لومړی عبارت صفر دی ځکه چې د ورته ویکتورونو کراس ضرب صفر دی. همدارنګه، $\mathbf{a}_{i/G} = \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$، نو له دې امله

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

د جسم د نورو ذرو لپاره هم ورته عبارتونه لیکل کیدی شي. کله چې پایلې جمعه شي، مومنټ تر لاسه کوو

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_{i/G})$$

دلته $\dot{\mathbf{H}}_G$ د جسم ټول زاویوي مؤمنتم د G په اړه د وخت د بدلون نسبت بنیي.

د i مې ذرې لپاره نسبي تعجیل د معادلې $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$ له مخې تعریف شوی دی، چیرې چې $\mathbf{a}_i$ او $\mathbf{a}_G$ په ترتیب سره د i مې ذرې او د G نقطې تعجلونه بنیي چې د انرشایی ریفرینس فریم ته اندازه شوي دي. د بدلیدو (substituting) او پراخولولو سره، د ویکتور کراس ضرب د توزیعي ځانګړتیا (distributive property) څخه استفاده کول، مومنټ تر لاسه کوو

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i\mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

د کتلې مرکز د تعریف له مخې، مجموعه $(\sum m_i)\bar{\mathbf{r}} = (\sum m_i\mathbf{r}_{i/G})$ صفر ته مساوي ده، ځکه چې د G په اړه دموقعیت ویکتور $\bar{\mathbf{r}}$ صفر دی. نو، د پورته معادلې وروستی برخه صفر ده. د حرکت د معادلې په کارولو سره، د $m_i\mathbf{a}_i$ ضرب د ith ذرې پر وړاندې د بهرني قوې $\mathbf{F}_i$ په بدل کې ځای پر ځای کیدی شي. د $\mathbf{S M}_G = \mathbf{S}(\mathbf{r}_{i/G} \mathbf{X} \mathbf{F}_i)$ په کتنه سره، نو وروستی نتیجه داسې لیکل کیدی شي:

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (21\text{–}21)$$

د ځینې پوښتنو لپاره دا مناسب وي چې x ، y، z محورونه یوازې تاو شي، د انتقال په ځای. که چېرې دې محورونو ته زاویوي سرعت $\mathbf{W}$ ورکړل شي، نود وخت مشتق $\dot{\mathbf{H}} = d\mathbf{H}dt$، لکه څنګه چې په معادلو 20-21 او 21-21 کې کارول شوي، باید د ا تویدل وښیی چې د انرشیایی X ، Y، Z محورونو څخه اندازه کیږي. دا د معادلې 20-6 کارولو ته اړتیا لري، په دې صورت کې معادلې 20-21 او 21-21 داسې کیږي

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O$$
$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}22)$$

دلته $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz}$ د $\mathbf{H}$ د وخت تغییر کچه ده چې د x ، y، z رفرینس څخه اندازه کیږي.

د x ، y، z محورونو د حرکت تعریفولو لپاره درې لارې شتون لري. په واضحه توګه، د دې ریفرینس سیستم حرکت باید داسې انتخاب شي چې د ځانګړي پوښتنې د حل لپاره د ساده ترینه مجموعه د معادلو تولید کړي.

x,y,z محورونه چې حرکت لري W= 0 (x,y,z Axes Having Motion) W=0

x,y,z محورونه داسې انتخابیږي چې یوازې انتقالیږي د انرشیل X,Y,Z نسبت چوګاټ ته. پدې کار باندې 21-22 معادله ساده کیږي ځکه چې W = 0 ده. کیدې شي چې جسم دې محوروته *w* تاویدل ولري، چې پدې حالت کې مومنټونه او د انرشیا دضرب د جسم به د وخت د تابع په توګه وښودلشي. په ډیرو حالتو کې به دا ستوزمن کاروی، چې پدې ډول انتخابول د محورو به محدود استعمال ولري.

x, y, z محورونه چې حرکت لري W = 0 (x,y,z Axes Having W=0 (Motion

x، y، z محورونه داسې انتخاب کیدې شي چې ثابت وي او د جسم سره په حرکت کې وي. مؤمنتونه او انرشیا ضرب د جسم نسبت دې محورونو ته به په حرکت کې ثابت وي. څرنګه چې W= *w* نومعادله 21-22 کیږي

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}23)$$

مور کولې شو چې د دې ویکتور معادلو هره یوه په دري سکیلر معادلو وښیو، د 21-10 معادلو په کارولو سره. که چیرې د O او G فرعي برخې ته پام ونه کړو، نو مور لرو

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) \\
&\quad - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \\
\Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) \\
&\quad - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\
\Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) \\
&\quad - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x)
\end{aligned} \qquad (21\text{–}24)$$

که چیرې x ، y، z محورونه د انرشیا اصلي محورونه وټاکل شي، نو د انرشیا ضرب صفر کیږي، لکه $I_{xx} = I_x$ ، او داسې نور، دا پورته معادلې به داسې شي

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y
\end{aligned} \qquad (21\text{–}25)$$

دا معادلي په تاريخي توګه د ***اويلر د حرکت معادلي*** (Euler equations of motion) په توګه پيژندل کيږي، چې د سويس رياضي پوه، ليونارد اويلر، لخوا لومړی ځل منځ ته راغلی. دغه معادلي يوازې د ټکو O يا G په اړه د مومنتونو دمجموعي لپاره تطبيق کيږي.

کله چې دا معادلي تطبيق کيږي، بايد دا پوه شو چې $\dot{w}_x$, $\dot{w}_y$, $\dot{w}_z$ د x ، y، z اجزاوی د w د وخت مشتقي دي لکه څنګه چې د x ، y، z څخه ليدل کيږي. د دې موندلو لپاره، لومړی اړينه ده چې w_x, w_y , w_z په هغه وخت کې پيدا شي کله چې x ، y، z محورونه په عمومي موقعيت کې ځای پرځای شوي وي او بيا د وخت مشتق واخلو، يعنې $(\dot{w})_{xyz}$. خو، په دې حالت کې x ، y، z محورونه په $\mathbf{W} = \boldsymbol{w}$ تاويږی، نو بيا معادله 20-6 په دا ډول کيږي:

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}$$

. $\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz}$: نو ، $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ څرنګه چې . $\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{w}$

دا مهمه نتيجه ښيي چې د محورونو سره د $\boldsymbol{w}$ د وخت مشتق نسبت محورونو X Y، Z ته يعنې $\dot{\boldsymbol{w}}$، هم کولی شي $(\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz}$ ترلاسه کړي. عموماً دا د پايلې موندلو لپاره تر ټولو اسانه لاره ده، لکه څنګه چې په 21.5 مثال کې ښودل شوي.

x، y، z محورونه چې حرکت لري W¹ w (y,z Axes Having Motion .(x، W¹ w

د محاسبې ساده کولو لپاره، د $\dot{\boldsymbol{w}}$ موندلو لپاره، ډيری وخت مناسب وي چې x ، y، z محورونه داسې وټاکل شي چې د دوی زاويوي سرعت $\mathbf{W}$ وی کوم چې د جسم د زاويوي سرعت $\boldsymbol{w}$ څخه مختلف وي. دا ځانګړې توګه د څرخيدونکيو ټاپونو او جيروسکوپونو تحليل لپاره مناسب دي، چې د دوی څرخيدونکی محورونو په اړه *متناظر* وي.* کله چې دا حالت وي، مومنتونه او د انرشيا ضرب په څرخيدونکي محورو ثابت پاتې کيږي.

معادلي 21-22 د دې ډول محورونو لپاره تطبيق کيږي. د دې دوو ويکتوري معادلو هره يوه د دری سکيلر معادلو يوه سيټ ته راکميدای شي چې د معادلو 21-25 § په څير لاس ته راځي ، يعنې:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (21\text{–}26)$$

دلته W_x, W_y, W_z د x، y، z اجزاوې د W دي، چې د انرشیایی ریفرینس فریم څخه اندازه اندازه شوي دي، او w_x, w_y, w_z باید د x ، y، z محورونو په نسبت چې د W تاویدل لري، وټاکل شي. مثال 21.6 وګورئ.

د دې مومنټ معادلو هره مجموعه، لکه معادلې 21-24 ، 21-25، یا 21-26، د درېو لومړنیو درجو غیر خطي ډیفرینسیال معادلو یوه لړۍ استازیتوب کوي چې "یو ځای شوې" دي، ځرنګه چې د زاویوې سرعت اجزاوې په ټولو برخو کې موجودې دي. د یوې ځانګړې ستونزې حلولو بریا په دې معادلو کې په دې پورې تړلې ده چې مجهول کوم دي. یقیناً ستونزې منځ ته راځي کله چې یو څوک هڅه کوي چې د w مجهول اجزاوې حل کړي کله چې بهرني مؤمنتونه تابع د وخت وي. نورې ستونزې کیدای شي هغه وخت منځ ته راشي کله چې د مومنټ معادلې د انتقالي حرکت د دریو سکیلر معادلو 19-21 سره یو ځای شي . د مثال په توګه، دا هغه وخت کیدای شي چې کله د بدن تاویدل د هغې د کتلې د مرکز انتقال سره تړاو ولري، لکه د یوی حلقی حالت چې پرته له ښویدو د ځمکې پر سر رغړی. داسې پوښتنې، چې باید په یو وخت کې ډیفریشیل معادلو یو ځای حلول عموماً د کمپیوټر په مرسته د عددي میتودونو په کارولو سره حل کیږي. په ډیرو انجنیرۍ پوښتنو کې، په هرصورت، مور ته د جسم د حرکت په اړه معلومات ترلاسه شوی وی او اړتیا وی چې هغه مومنټونه چې پر جسم باندې تطبیق شوي دي، وټاکو. ډیری پوښتنې مستقیم حلونه لري، نو په دې توګه د کمپیوټر تخنیکونو ته اړتیا نشته.

* ددی ډول وسایلو مفصل بحث په برخه 21.5 کی ورکړل شوي دي.

§ پوښتنه 21-42 وګوري.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د یو کلک جسم د درې اړخیز حرکت پوښتنی د لاندې کړنلاری په کارولو سره حل کیدی شي:

د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram).

- د جسم یو آزاد ډایګرام د هغې شپېې لپاره چې په پام کې نیول شوي رسم کړئ اود x ، y، z کوآرډینیټ سیستم مشخص کړئ. د دې رفرینس مبداء باید د جسم د کتلې مرکز G کې ځای پرځای شي، یا په نقطه O کې وي چې په یو انرشیل فریم کې ټینګ شوی وی او یا د جسم په یوه بې کتلې اوږدوالی باندې موقعیت لري.

- نامعلومه اجزاء دعکس العملی قواووکیدی شي چې په مثبت جهت سره ښکاره شي .
- د پوښتنی د نوعیت پراساس، دا پریکړه وکړئ چې کوم ډول تاویدونکی حرکت W باید د x ، y، z کوآرډینیټ سیستم ولري، یعني $W=0$، $W = w$، یا $W \neq w$. کله چې انتخاب کوی، په یاد ولرئ چې د مؤمنټ معادلې ساده کیږي کله چې محورونه په داسې ډول حرکت وکړي چې دوی د جسم لپاره د انرشیایی اصلي محورونه (principal axes) په توګه په ټولو وختونو کې وښودل شي.

- د جسم لپاره اړین مؤمنټونه او د انرشیایي ضرب محاسبه کړئ د x ، y، z محورونو په پرتله.

کینماتیک (Kinematics).

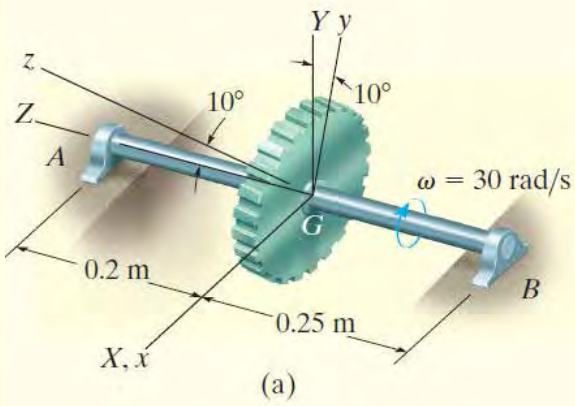
- د جسم د زاویوي سرعت دx ، y، z اجزاء معلوم کړئ او د **w** وختي مشتقات پیدا کړئ.
- یادونه وکړئ که **W = w** وي، کله چې $\dot{W} = (\dot{W})_{xyz}$. نو مور کولی شو دX ، Y، Z محورونو په پرتله د **w** وختي مشتق پیدا کړو، $\dot{W}$ ، او بیا د دې اجزاء $\dot{w}_x$, $\dot{w}_y$, $\dot{w}_z$ معلوم کړو، یا مور کولی شو د **w** اجزاء د*x* ، *y*، *z* محورونو سره، کله چې محورونه په عمومي موقعیت کې موقعیت لري، پیدا کړواو بیا د دې اجزاء د اندازو وختي مشتق واخلئ، $(\dot{W})_{xyz}$.

د حرکت معادلې (Equation of Motion).

- د دوه ویکټور معادلې 18-21 او 22-21 تطبیق کړئ، یا د دې ستونزې لپاره مناسب د*x* ، *y*، *z* کوآرډینیټ سیستم لپاره شپږ د سکلر اجزاء معادلې تطبیق کړئ.

مثالونه

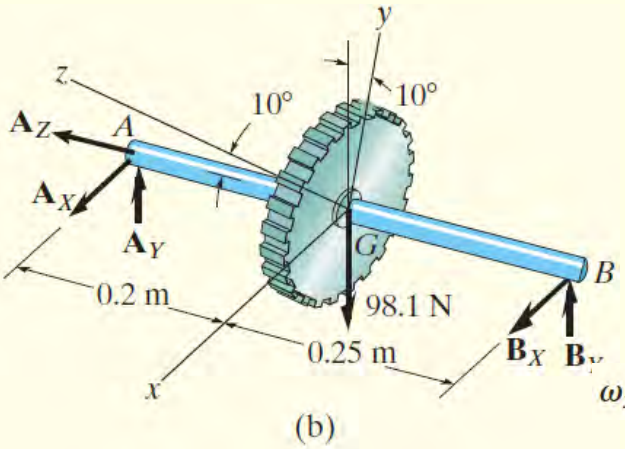
مثال 21.4



په انځور 21-12a کې ښکاره شوی ګیر 10kg کیلوګرامه کتله لري اوپه 10° زاویه په تاویدونکی شفټ چې د پام وړ کتله نه لری کې نصب شوی دی. که چېرې $I_x = I_y = 0.05$ ، $I_z = 0.1$ kg.m^2، او شافټ په **w** =30 rad/s ثابت زاویوي سرعت سره تاویږی، نو په دی وخت کې د ټرست بیرینګ *A* او جرنل بیرینګ *B* لخوا په شافټ باندی وارد شوي د ریکشن اجزاوی معلومی کړئ.

حل

آزاد بدن ډایګرام (Free-Body Diagram). انځور 21-12b و ګوري. د*x* ، *y*، *z*کوارډینیټ سیستم مبداء د ګیر د کتلې مرکز *G* کې ده، کوم چې یو ثابت ټکی هم دی. محورونه په ګیر کې ثابت شوي او د ګیر سره تاویږی، تر څو دا محورونه تل د ګیر لپاره اصلي انرشیایی محورونه نمایندګي کوی. له دې امله، **W = w** .



(b)

کینماتیکس (Kinematics). لکه څنګه چې په انځور 21-12c کې ښودلشوی، د ګیر زاویوي سرعت **w** ثابته اندازه لري او تل د شافټ *AB* محور په لور وي. څرنګه چې دا ویکتور د X،Y، Z انرشیایی فریم ریفرینس څخه اندازه کیږي، دx ، y، z محورونو د هر موقعیت لپاره،

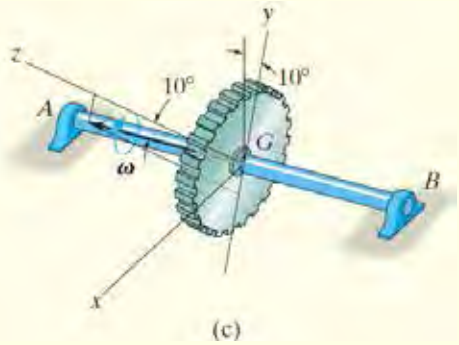
$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = -30 \sin 10° \quad \omega_z = 30 \cos 10°$$

دا اجزا د *x* ، *y*، *z* محورونو د هرې عمومي موقیعت لپاره ثابت پاتې کیږي، نو د x ، y، z محورونو په پرتله $\dot{w}_x = \dot{w}_y = \dot{w}_z = 0$. همدا رنګه، دا هم یادونه وکړئ چې څرنګه **W = w** ، نو $\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz}$. له دې امله، موږ کولی شو دا د **w** وخت مشتقونه د *X* ، *Y* ، *Z* محورونو په نسبت هم پیدا کړو. ځکه چې **w** ثابت اندازه او لوری لري(+Z) ، نو $\dot{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$ ، او بیا $\dot{w}_x = \dot{w}_y = \dot{w}_z = 0$. سربیره پردې، څرنګه چې *G* یو ثابت ټکی دی، $(a_G)_x = (a_G)_y = (a_G)_z = 0$.

د حرکت معادلې (Equations of Motion). معادلې 21-25 تطبیق کوو (**W = w**)

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$-(A_Y)(0.2) + (B_Y)(0.25) = 0 - (0.05 - 0.1)(-30 \sin 10°)(30 \cos 10°)$$
$$-0.2A_Y + 0.25B_Y = -7.70 \qquad (1)$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$A_X(0.2) \cos 10° - B_X(0.25) \cos 10° = 0 - 0$$
$$A_X = 1.25B_X \qquad (2)$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$
$$A_X(0.2) \sin 10° - B_X(0.25) \sin 10° = 0 - 0$$
$$A_X = 1.25B_X (\text{check})$$

معادله 21-19 تطبیق کوو، موږ لرو



(c)

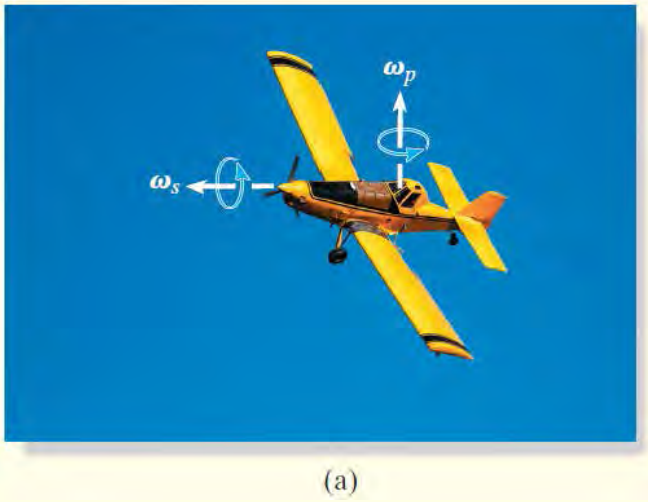
$$\Sigma F_X = m(a_G)_X: \quad A_X + B_X = 0 \qquad (3)$$
$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y: \quad A_Y + B_Y - 98.1 = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z: \quad A_Z = 0 \qquad \text{Ans.}$$

معادلې 1 تر 4 یو ځای حل کوو او دا لاندې په لاس راځي.

$$A_X = B_X = 0 \quad A_Y = 71.6 \text{ N} \quad B_Y = 26.5 \text{ N} \qquad \text{Ans.}$$

مثال 21.5

په انځور 21-13a کې ښودل شوی الوتکه په w_p ثابت افقی تاویدونکی حرکت ترسره کوي. په دې حرکت کې، د پروپیلر سرعت په اندازه د w_s دی. که پروپیلر دوی پری ولري، نو هغه مؤمنت چې د پروپیلر شافټ یی په پروپیلر باندې واردوي، معلوم کړئ ، په هغه حالت کی چی پری په عمودي حالت کې وي. د ساده کولو لپاره، فرض کړئ چې پری یو شان نری بارغوندی دی چې انرشیایی مؤمنت I په هغه محورچی په پرو باندی عموداو د بار له مرکزه تیریږي ، لري ، او د انرشیایی مؤمنت یی په اوږدیز محور د صفر دی.



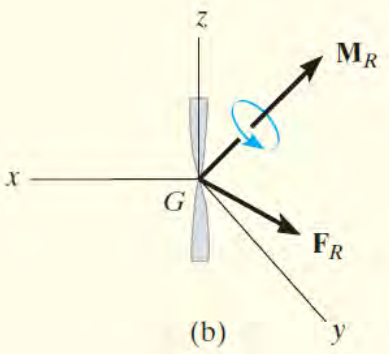
(a)

حل:

آزاد بدن ډایګرام (Free-Body Diagram).

انځور 21-13b وګوري. د وصلونکي شافټ ریکشنونه چې په پروپیلر باندې واردیږي، د $\mathbf{F}_R$ او $\mathbf{M}_R$ محصلو لخوا ښودل شوي دي. (د پروپیلر تول فرض شوی چې بې اغیزی دی.) د x ، y، z محورونه په پروپیلر کې داسی ثابت دي ، تر څو دغه محورونه تل د پروپیلر لپاره د اصلي انرشیایی محورونه استازیتوب وکړي. انرشیایی مؤمنت I_x او I_y برابرې دي ($I_x = I_y = I$) او $I_z = 0$ دي.

کینماتیکس (Kinematics).



(b)

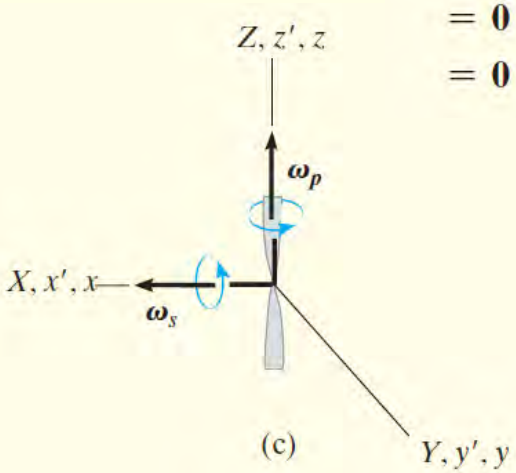
د پروپیلر زاویوي سرعت چې د X ، Y ، Z محورونو څخه لیدل کیږی، د x ، y، z محورونو سره یو ځای دی، انځور 21-13c ، په لاندې توګه دی $\mathbf{w} = \mathbf{w}_s + \mathbf{w}_p = \mathbf{w}_s\,\mathbf{i} + \mathbf{w}_p\,\mathbf{k}$، نو د x ، y، z اجزاوې د $\mathbf{w}$ عبارت دی په

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$

څرنګه چې $\mathbf{W} = \mathbf{w}$ ، نو $\dot{\mathbf{W}} = (\dot{\mathbf{W}})_{xyz}$. د $\dot{\mathbf{W}}$ موندلو لپاره، کوم چې د ثابت X ، Y ، Z محورونو په نسبت د وخت مشتق دی، مونږ باید معادله 20-6 وکاروو ځکه چې $\mathbf{w}$ د X ، Y ، Z محورونو په نسبت خپل لوری بدلوي. د هرې اجزا د وخت بدلون، $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_s + \dot{\mathbf{w}}_p$ د X ، Y ، Z محورونو په نسبت داسی موندل کیدی شي چې مونږ یو

دریم کوارډینیټ سیستم $\dot{x}$ ، $\dot{y}$، $\dot{z}$ معرفي کړو، چې زاویوي سرعت یې $\dot{W} = w_p$ دی او د X، Y، Z محورونو سره په هغه لحظه کې یو ځای دی. نو،

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} \\ &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{x'y'z'} + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_p \mathbf{k} \times \omega_s \mathbf{i} + \mathbf{0} = \omega_p \omega_s \mathbf{j}\end{aligned}$$



انځور 13-21

څرنګه چې د X ، Y ، Z محورونه د x ، y، z محورونو سره په هغه لحظه کې یو ځای دي، نو د $\dot{\mathbf{W}}$ اجزا په x ، y، z کې په لاندې ډول دي :

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$

دغه ورته پایلې کولای شو په مستقیمه توګه محاسبه کولو د $(\dot{W})_{xyz}$ سره هم ترلاسه کړو؛ خو دا به لږ نور کار وغواړي. د دې لپاره، اړینه ده چې پروپیلر (یا د x ، y، z محورونه) په یوه عمومي موقعیت کې وګورو لکه څنګه چې په انځور 21-13d کې ښودل شوی. دلته الوتکه په یوه زاویه f (فی) ګرزیدلیی او پروپیلر په یوه زاویه ψ (سای) د الوتکې په پرتله ګرزیدلیی ده. پام وکړئ چې w_p تل د ثابت Z محور سره سم لوری لري او w_s د x محور تعقیبوي. له دې امله، د w عمومي اجزاوې دي :

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = \omega_p \sin\psi \qquad \omega_z = \omega_p \cos\psi$$

څرنګه چې w_s او w_p ثابت دي، او د دې اجزاوو د وخت مشتقې کیږي:

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \cos\psi\,\dot{\psi} \qquad \omega_z = -\omega_p \sin\psi\,\dot{\psi}$$

خو $f = y = 0^\circ$ او $\dot{y} = w_s$ هغه لحظه کې چې په پام کې نیول شوی ده. له دې امله،

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_s & \omega_y &= 0 & \omega_z &= \omega_p \\ \dot{\omega}_x &= 0 & \dot{\omega}_y &= \omega_p \omega_s & \dot{\omega}_z &= 0\end{aligned}$$

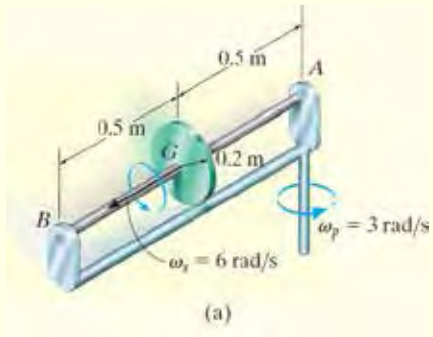
دا هم هغه پایلي دي چې مخکې ترلاسه شوې وې.

د حرکت معادلې (Equations of Motion). معادله 21-25 تطبیق کوو، موږ لرو

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = I(0) - (I - 0)(0)\omega_p$$
$$M_x = 0 \qquad Ans.$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = I(\omega_p\omega_s) - (0 - I)\omega_p\omega_s$$
$$M_y = 2I\omega_p\omega_s \qquad Ans.$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0(0) - (I - I)\omega_s(0)$$
$$M_z = 0 \qquad Ans.$$

مثال 21.6

هغه 10 kg فلایویل (یا نازک ډیسک) چې په انځور 21-14a کې ښودل شوی، په ثابت زاویوي سرعت سره په شافټ باندې تاویږي (څرخي) چې زاویوي سرعت یې $w_s = 6$ rad/s دی. په ورته وخت کې، شافټ په A بیرینګ کې د زاویوي سرعت $w_p = 3$ rad/s سره تاویږی. که چیرې A ټرست بیرینګ او B جورنل بیرینګ وي، نو د حرکت له کبله د ریکشنونو اجزاوی په اتکاوو کې معلومې کړئ .

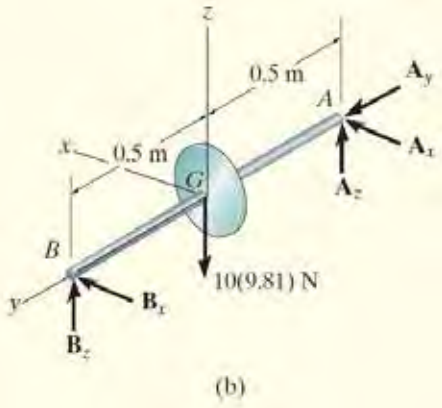


(a)

حل I

آزاد بدن ډایګرام (Free-Body Diagram). انځور 21-14b د x ، y، z کوارډینیټ سیستم د مبدا موقعیت د فلای ویل د کتلې مرکز G کې دی. دلته موږ اجازه ورکړو چې دغه کوارډینیټونه زاویوي سرعت $W = w_p = \{3k\}$ rad/s ولري. که څه هم فلای ویل د دې محورونو په پرتله څرخي، انرشیایی مؤمنت ثابت پاتې کیږي، یعنې:*

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



(b)

انځور 21-14

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

کینماتیکس (Kinematics).

د تصادف له مخی انرشیل X ، Y ، Z چوکاټ ، انځور 21-14 ، فلای‌وېل (flywheel) یو زاویوي سرعت $\mathbf{w}=\{6\mathbf{j}+3\mathbf{k}\}$ rad/s لري ، نو:

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = 6\text{ rad/s} \quad \omega_z = 3\text{ rad/s}$$

د $\mathbf{w}$ وخت مشتق نسبت د x ، y، z محورونو ته باید معلوم شي. په دې حالت کې دواړه $\mathbf{w}_p$ او $\mathbf{w}_s$ خپلی اندازی یا لوری نه بدلوي، نو:

$$\dot{\omega}_x = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

د حرکت معادلې (Equations of Motion).

معادلې 21-26 تطبیق کوو ($\mathbf{W}^1$ $\boldsymbol{\omega}$) او دا لاندی په لاس راځي

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0 - (0.2)(3)(6) + 0 = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0 + 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0 + 0$$

* دا به په مثال 21.5 د پروپلر لپاره درست نه وي.

معادله 21-19 تطبیق کوو ، مونږ لرو

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_x + B_x = 0$$
$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_y = -10(0.5)(3)^2$$
$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad A_z + B_z - 10(9.81) = 0$$

وروسته له دی چی دا معادلې حل کړو، دا لاندی په لاس راځي

$$A_x = 0 \quad A_y = -45.0\,\text{N} \quad A_z = 52.6\,\text{N} \qquad \textit{Ans.}$$
$$B_x = 0 \quad B_z = 45.4\,\text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

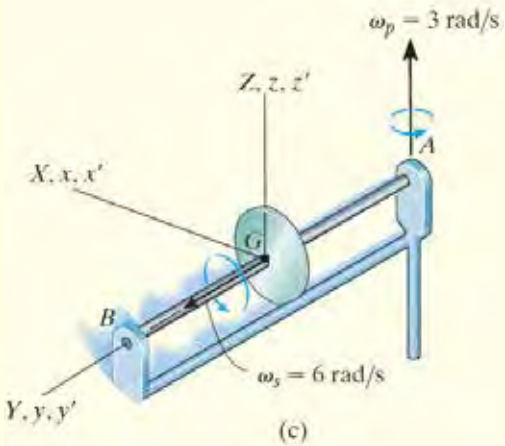
یادونه :که چیرې د مخ وړاندې کېدو (precession) سرعت $\mathbf{w}_p$ نه وای موجود، نو د A او B په نقطو کې د z قوی جز به مساوی په 49.05 N وی. خو په دې حالت کې، د اجزاوو ترمنځ توپیر د "جایروسکوپیک مومنټ (gyroscopic moment) " له امله رامنځته شوی، کوم چې کله چې یو تاوېدونکی جسم د بل محور په اوږدو کې مخوړاندې شي. مونږ به دا اغیز په تفصیل سره په راتلونکي برخه کې مطالعه کړو

حل II

دا مثال هم د اویلر د حرکت معادلو په کارولو سره حل کیدی شي، معادلې 25-21. په دې حالت کې $\mathbf{W} = \mathbf{w} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s دی، او د وخت مشتق $(\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz}$ هم د ثابت X ، Y، Zمحورونو په نسبت موندل کیدی شي ځرنګه چې $\dot{\boldsymbol{w}} = (\dot{\boldsymbol{w}})_{xyz}$. دا محاسبه د دې لپاره ترسره کیدی شي چې x ، y، z محورونه د زاویوي سرعت $\mathbf{W} = \mathbf{w}_p$ ولري، انځور14c-21 . د معادلې 6-20 تطبیق کول .

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + 3\mathbf{k} \times (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \{-18\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$

$$\dot{\omega}_x = -18\,\text{rad/s} \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$



مؤمنت معادلی بیا کیږي

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0.1(-18) - (0.2 - 0.1)(6)(3) = -3.6$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$0 = 0 - 0$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0$$

حل يې نو بيا د مخکې په شان په وړاندې ځي.

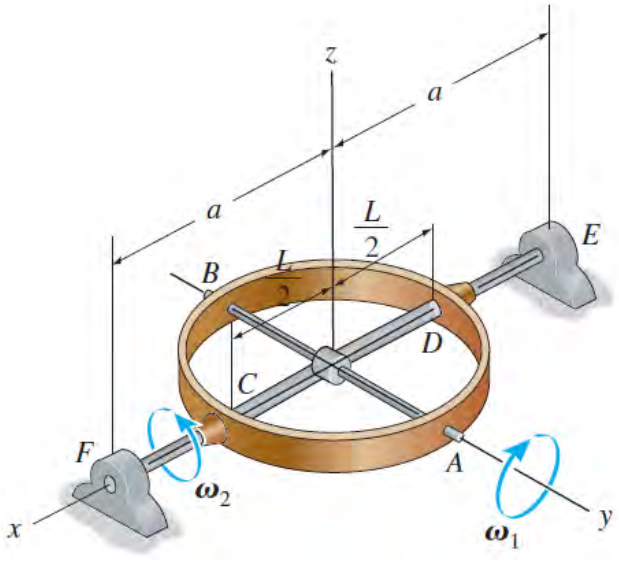
پوښتنې PROBLEMS

***21–40 .** د تاويدو د حرکت معادله د سکېلر په شکل د x محور په شاوخوا کې ترلاسه کړئ که w W^1 او د جسم مؤمنتونه او د انرشيا ضرب د وخت په پرتله ثابت نه وي.

21–41 . . د تاويدو د حرکت معادله د سکېلرپه شکل د x محور په شاوخوا کې ترلاسه کړئ که w W^1 او د جسم مومنتونه او د انرشيا ضرب د وخت په پرتله ثابت وي.

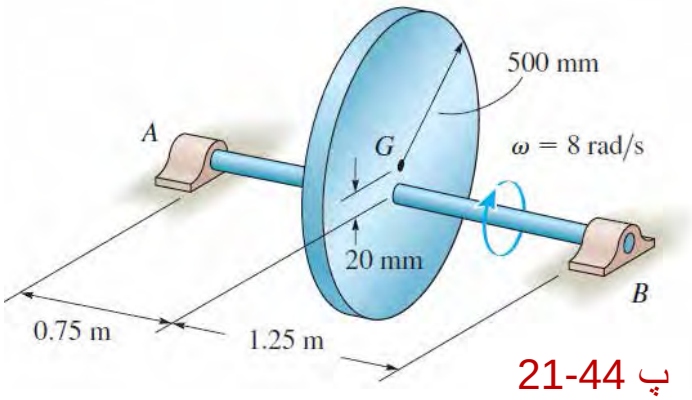
21–42 . د اويلر د حرکت معادلې د w W^1 لپاره ترلاسه کړئ، يعنې معادلې 21-26 .

21–43 . د CD راد د m کتله او L اوږدوالي سره د ثابت زاويوي اندازه w_1 سره په AB محور څرخي، پداسې حال کې چې شافټ EF په ثابت زاويوي اندازه w_2 سره څرخي. د X ، Y ، او Z غبرګون اجزاوي د ټرست بيرينګ E او جرنل بيرينګ F کې په دې مهال کې معلومې کړئ. د نورو غړيو کتلې له پامه وغورځوئ.



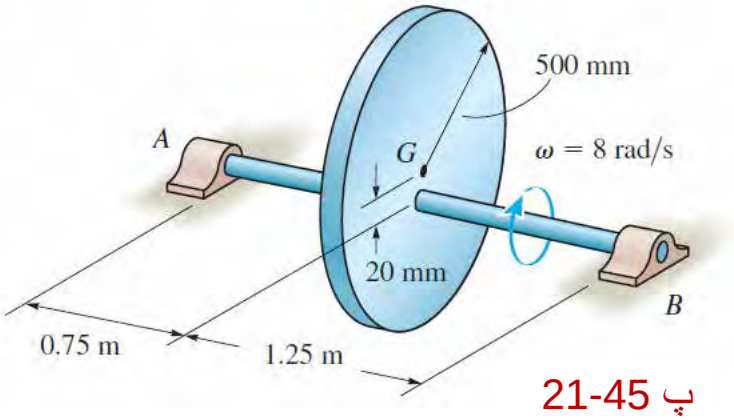
پ 21-43

***21–44 .** د 40 کیلوګرامه فلای ویل (ډیسک) چې د خپل اصلي مرکز G څخه 20 ملي متره لرې نصب شوی دی. که چیرې شافټ په ثابت تیزوالی $w = 8$ rad/s سره تاویږی، په جورنل بیرینګونو A اوB کې د لږ تر لږه غبرګون قواوې پیدا کړئ.



پ 21-44

21–45 . د 40 کیلوګرامه فلای ویل (ډیسک) چې د خپل اصلي مرکز G څخه 20 ملي متره لرې نصب شوی دی. که چیرې شافټ په ثابت تیزوالی $w = 8$ rad/s سره تاویږی، په جورنل بیرینګونو A اوB کې د اعظمي غبرګون قواوې پیدا کړئ.

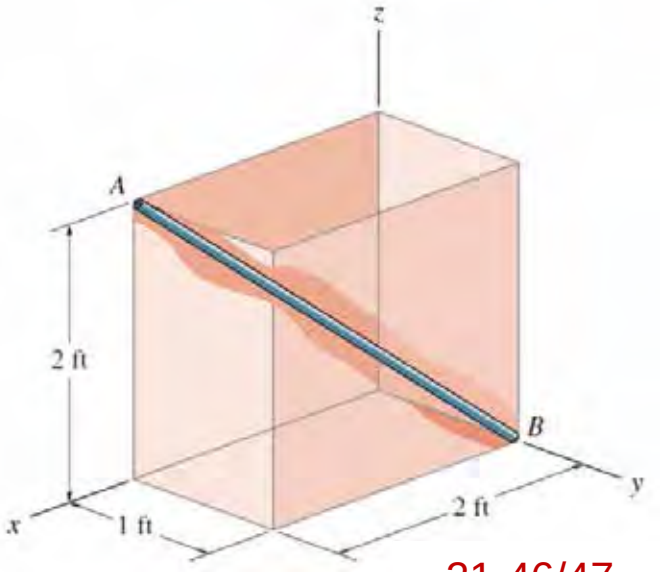


پ 21-45

21–46 . د 4 پونډه بار د یوه پرانیستي بکس په ښویوکونجونو باندې ځای پر ځای شوی دی. په هغه لحظه کې چې ښودل شوې دی، بکس یو سرعت $\mathbf{v} = \{5\mathbf{k}\}$ ft/s او یوتعجیل $\mathbf{a} = \{2\mathbf{k}\}$ ft/s² لري. د x ، y، z اجزاوې د قوو چې کونجونه یې پر بار باندې واردوي معلوم کړئ.

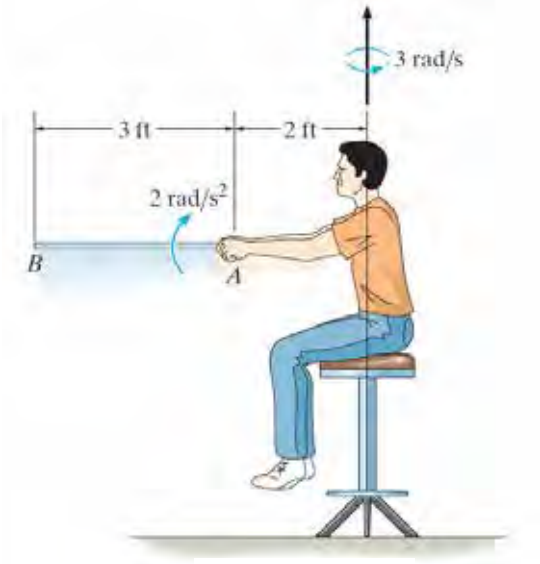
21–47 . د 4 پونډه بار د یو پرانیستي بکس په ښویوکونجونو باندې ځای پر ځای شوی دی. په

هغه لحظه کې چې بښودل شوې دی، بکس یوه سرعت $\mathbf{v} = \{3\mathbf{j}\}$ ft/s او یوتعجیل $\mathbf{a} = \{-6\mathbf{j}\}$ ft/s² لري. د x ، y، z اجزاوې د قوو چې کونجونه یې پر بار باندې واردوي معلوم کړئ.



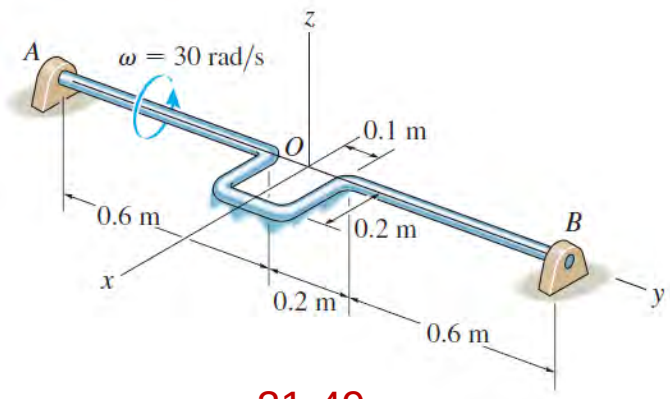
پ 21-46/47

21–48* . سړی په یوه څرخېدونکي چوکۍ باندې ناست دی چې ثابت زاویوي سرعت 3 rad/s سره تاویږی. هغه یوشان 5 پونډه راد AB افقي نیولې دی. هغه ناڅاپه راډ ته زاویوي تعجیل په 2 rad/s² ورکوي، چې د هغه (سړي) په نسبت اندازه کیږي، لکه څنګه چې بښودل شوې دی. هغه اړینه قوی او مؤمنت اجزاوې د نیولو په ځای A، کی معلومی کړئ چې د دی کار ترسره کولو د پاره ضروری دی. محورونه د راډ د کتلې مرکز G کې وټاکئ، چې z+ پورته وي او y+ د راد د محور سره سم په A لور کې وي.



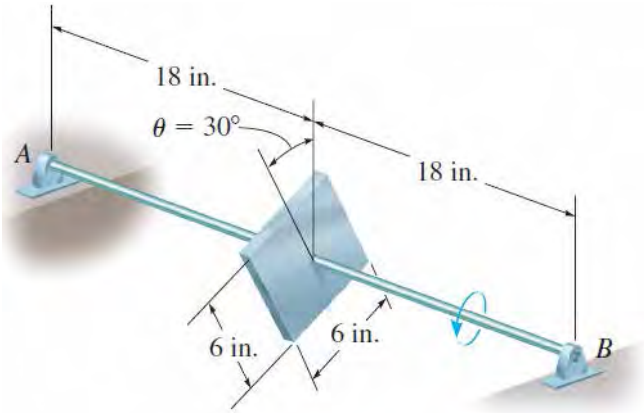
پ 21-48

21–49 . شفټ د یوه راډ څخه چې 2 kg/m کتله لري جوړ شوی دی. د x ، y، z اجزاوې د ریکشن کوم چې په بیرینګونو *A* او *B* کې، په هغه لحظه کې چې شفټ په آزادانه توګه په زاویوي سرعت w = 30 rad/s څرخیږی، معلومی کړئ. د شافټ زاویوي تعجیل په دې لحظه کې څه دی؟ بیرینګ *A* کولای شي په *y* لور کې د قوی جز ته تکیه ورکړي، پداسې حال کې چې بیرینګ *B* دا کارنه شي کولی.



پ 21-49

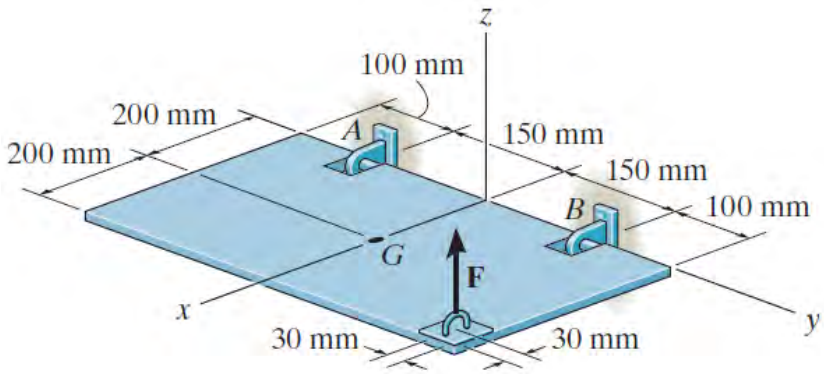
21–50 . د 20-lb تخته په شافټ *AB* باندې حای پر حای شوې ده چې د تختې سطحه د عمود سره $\theta = 30°$ زاویه جوړوي. که شفټ په بنودل شوې لوري سره په زاویوي سرعت 25 rad/s سره څرخي، د بیرینګ اتکاو *A* او *B* کې عمودي ریکشنونه معلوم کړئ کله چې تخته په بنودل شوي موقعیت کې وي.



پ 21-50

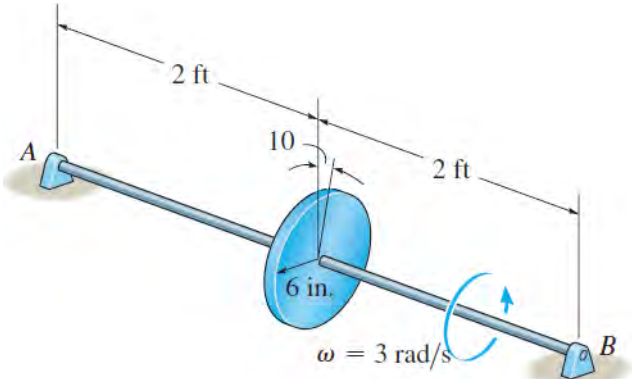
21–51 . یوشان هچ دروازه چې 15 kg کتله لري او د کتلې مرکز یې په *G* کې دی، په افقي سطحه د *A* او *B* بیرینګونو لخوا تکیه شویی. که په دروازه باندې یوه عمودي قوه *F* = 300 N لکه څنګه چې بنودل شوی، عمل وکړی، د بیرینګونو د ریکشن اجزاوې او د دروازې زاویوي تعجیل معلوم کړئ. بیرینګ *A* د *y* په لور کې د قوی د جز مقاومت کوي، پداسې حال کې چې

بیرینګ B يې نه شي کولی. د محاسبې لپاره، دروازه د یوی نازکی تختی په توګه فرض کړئ او د هر بیرینګ اندازه په پام کی مه نیسئ. دروازه په ابتدا کې په دریدلی حالت کې ده.



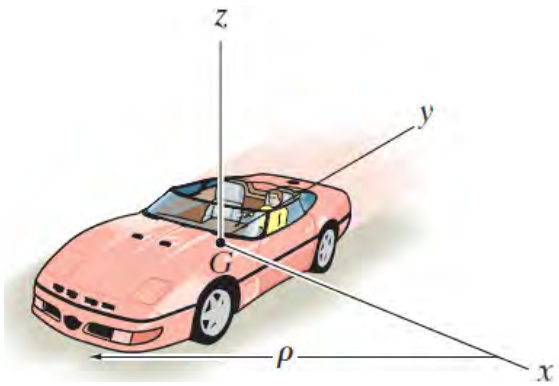
پ 21-51

***21–52 .** 20-lb ډیسک په افقي شفټ *AB* باندې ځای پر ځای شوی دی چې د هغې سطحه د عمود سره 10° زاویه جوړوي. که چیرې شافټ په زاویوي سرعت 3 rad/s سره تاو شی، د بیرینګونو عمودي غبرګونونه پیدا کړی کله چې ډیسک په بشودل شوي موقعیت کې وي.



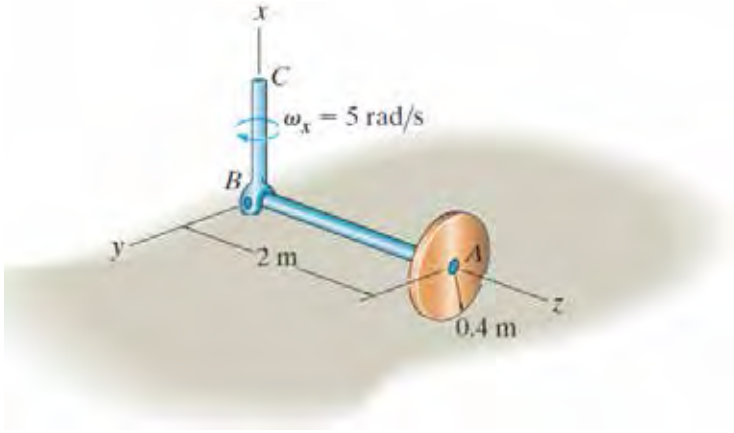
پ 21-52

21–53 . موټر په منحني سړک چې شعاع *r* لري په حرکت کی دي ، پدې توګه د هغې دکتلې مرکز یو ثابت سرعت v_G لري. د *x* ، *y*، *z* محورونو په پرتله د تاویدو حرکت معادلې ولیکئ. فرض کړئ چې د موټر شپږ مومنټونه او د انرشیا ضرب د دې محورونو په پرتله معلوم دي.



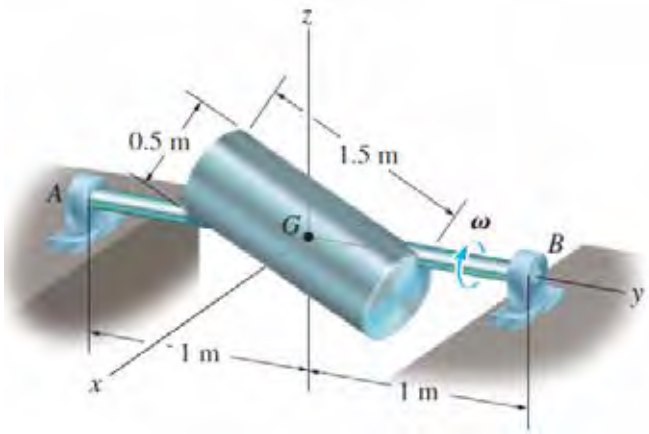
پ 21-53

21–54 . 10-kg ډیسک په شافټ *AB* څرخي، پداسې حال کې چې شافټ په *BC* باندې په ثابت $w_x = 5$ rad/s سره تاویږی. که ډیسک پر ځمکه ونه بنویږي، د هغې وارد شوي عمودی او اصتکاکي قوی په مځکه معلومی کړئ. د شافټ *AB* کتله په پام کی مه نیسی.



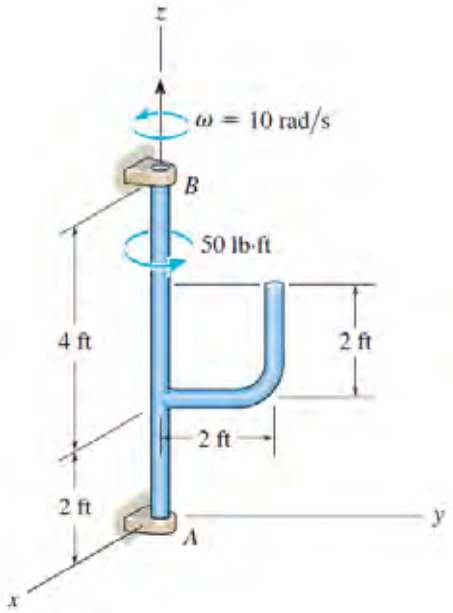
پ 21-54

21–55 . سیلندر چې 30 kg کتله لري او په یوه اکسل نصب شوی چې په *A* او *B* بیرینګونو اتکا لري. که چیرې اکسل د یوه کپل مؤمنت $\mathbf{M} = \{-30\mathbf{j}\}$ N·m تابع وي، او په هغه لحظه کې زاویوي سرعت $\mathbf{w} = \{-40\mathbf{j}\}$ rad/s ولري، په بیرینګونو کې عمودي اجزاوې د قوی په دې لحظه کې معلومی کړئ.



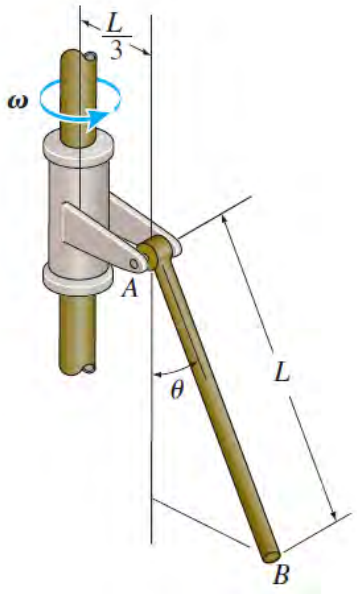
پ 21-55

21–56* . د راډ اسملي lb/ft 5 تول لړی. دا په B کې په یوه بنوی جورنل بیرینګ لخوا اتکاء کیږي، چې د قوی x اوy ریکشنونه جوړه وي ، او په A کې د یوه بنوی ټرست بیرینګ لخوا اتکاء کیږي، چې د قوی x ، y، او z ریکشنونه جوړه وي. که چیرې د 50 lb·ft تورک د راډ AB په اوږدو کې وارد شي، د بیرینګونو د ریکشنونو اجزاوې معلومی کړئ کله چې د اسمبلي زاویوي سرعت w = 10 rad/s په هغه لحظه کې وي.



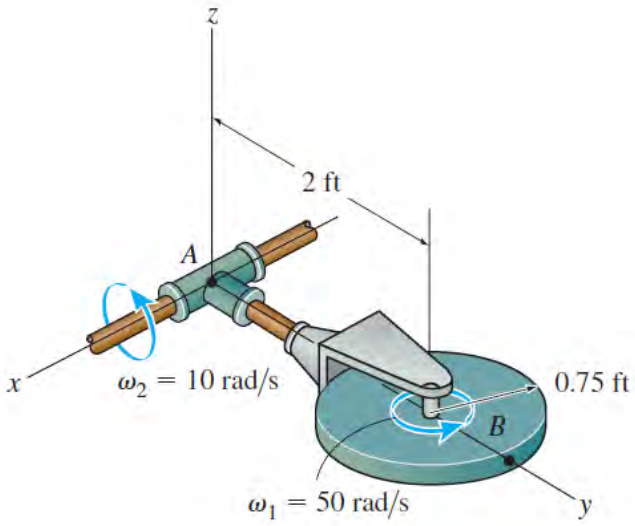
پ 21-56

21–57 . نازک راډ AB چې کتله یې m ده او دا د یوه بنوی پین له لارې د برکیت سره په A کې ټرل شوی دی. بریکټ د شافټ سره کلک ټرل شوي دی. د شافټ اړین ثابت زاویوي سرعت w معلوم کړئ، تر څو راډ د عمود سره یو زاویه q جوړه کړي .



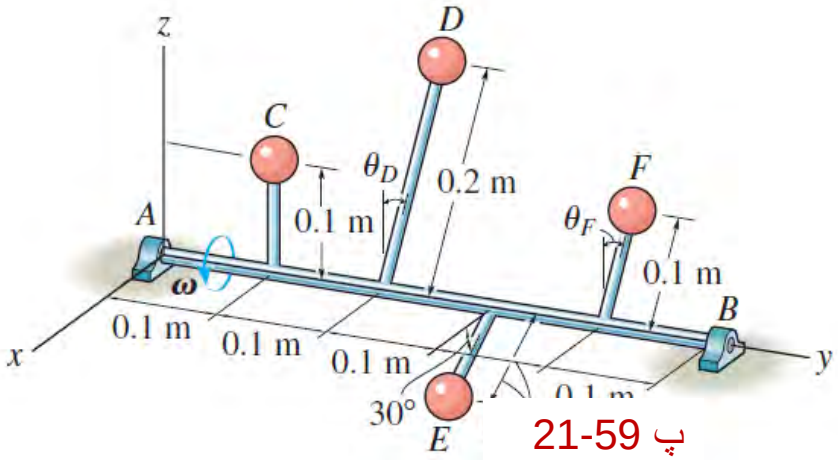
پ 21-57

21–58 . 50-lb ډیسک په ثابت زاویوي کچه $w_1 = 50$ rad/s سره په خپل اکسل څرخي. په ورته وخت کې، شافټ په ثابت زاویوي کچه $w_2 = 10$ rad/s سره څرخي. په لاس نیوکې A کې په هغه لحظه کې د رامنځته شوې مؤمنت اجزاوی x ، y، z معلومی کړئ. د لاس نیونکي AB تول به پام کی مه نیسی.



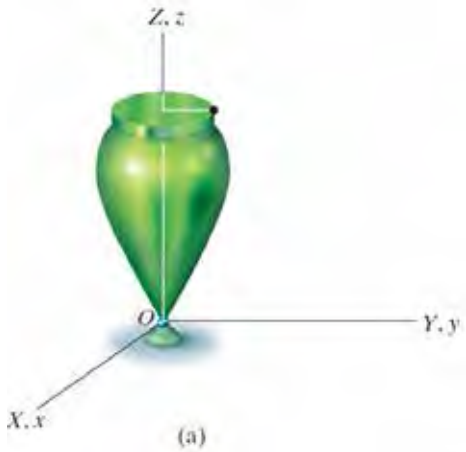
پ 21-58

21–59 . څلور کرې (spheres) د شافټ AB سره تړلې دي. که چیرې $m_C = 1$ kg او $m_E = 2$ kg وي، د کره D او F کتلې او د راډ زاویې q_D او q_F معلومی کړئ تر څو شافټ په دینامیک ډول متوازن شي، یعنې د شافټ په تاویدو کی یوازې عمودي غبرګونونه پر بیرینګونو A او B کی جوړوی. د راډ کتله په پام کی مه نیسی.



پ 21-59

21.5 جایرسکوپي حرکت (GYROSCOPIC MOTION)



(a)

په دې برخه کې به مونږ د یوه جسم (چې غټه لوړه برخه لري) د حرکت معادلې رامینځته کړو چې د یوه محور په اړه متناظر وي او یوه ې ثابت ټکی ته تاویږی. دا معادلې په ځانګړي ډول د په زړه پورې یوی آلې، جایروسکوپ، د حکت لپاره هم پلي کیږي.

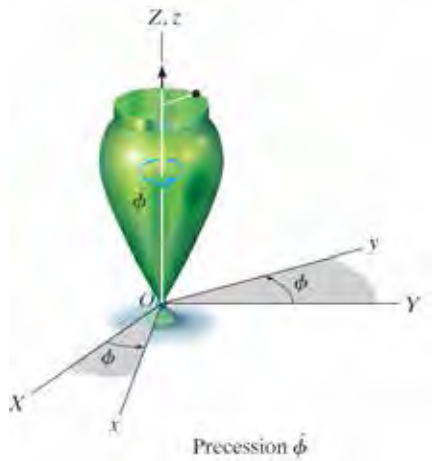
د جسم حرکت به د یولر زاویو φ, θ, ψ (في، تیتا، سای) په کارولو سره تحلیل شي. د دې لپاره چې وښیو څنګه دوی د یوه جسم وروستی موقعیت تعریفوي، مونږ به هغه لوړه برخه په پام کې ونیسو چې په انځور 21-15a کې ښودل شوې، او په انځور 21-15d کې یی وروستی موقعیت ښودلشوی. مونږ به د ثابتو X, Y, Z محورونو او د x, y, z محورونو دویم سیټ وکاروو چې په لوړه برخه کې نصب شوی دی. د X, Y, Z او x, y, z محورونو په یوځای پیلولو سره، انځور 21-15a ، د جسم وروستی موقعیت د لاندې درې مرحلو په کارولو سره ټاکل کیږي:

1 . جسم د Z یا (z محور) په اړه د f زاویې له لارې وځرخوئ($0 \le f < 2p$) ،انځور 21-15b .

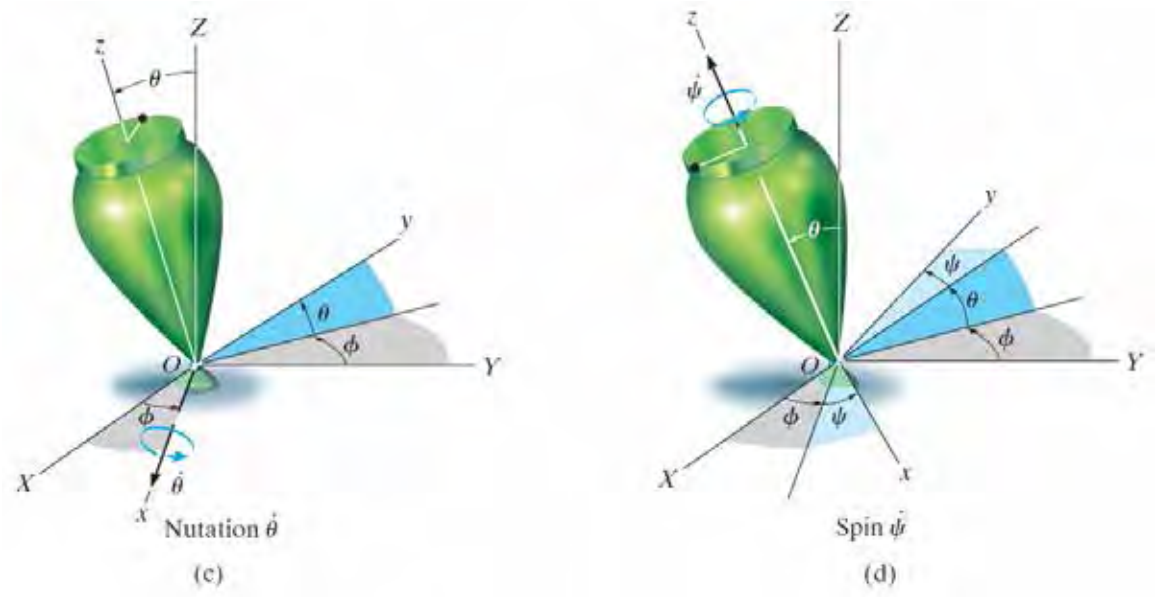
2 . جسم د x محور په اړه د θ زاویې له لارې وځرخوئ ($0 \le \theta \le p$)، انځور 21-15c .

3 . جسم د z محور په اړه د ψ زاویې له لارې وځرخوئ ($0 \le \psi \le 2p$) ترڅو وروستی موقعیت ترلاسه شي، انځور 21-15d .

د دې دریو زاویو ترتیب، f ، θ بیا ψ ، باید وساتل شي، ځرنګه چې محدود تاویدل ویکټورونه نه دي ، دا خبره په یاد ولرئ، انځور1-20. که څه هم دا حالت دی، تفاضلي تاویدل $d\Phi, d\theta, d\psi$ ویکټورونه دي، او نو د لوړې برخې زاویوي سرعت ω د ایولر زاویو د وخت مشتقاتو په توګه ځرګندیدی شي. د زاویوي سرعت اجزاوې $\dot{f}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ په ترتیب سره د مختګ (precession)، غورځېدل (nutation)، او تاویدل (spin) په نوم پیژندل کیږي.



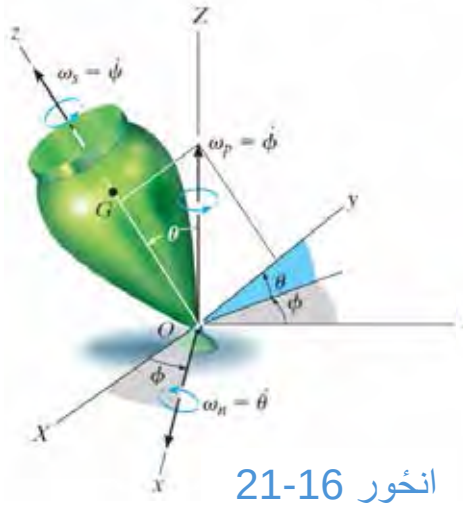
(b)



د دوی مثبت لوري په انځور 21-16 کې ښودل شوي دي. لیدل کیږي چې دا ټول ویکټورونه یو بل ته عمودي نه دي؛ خو بیا هم، د جسم (لوړې برخې) زاویوي سرعت $\boldsymbol{\omega}$ کیدی شي د دې درېو اجزاوو په توګه وښودلشی.

څرنګه چې جسم (لوړه برخه) د z یا د څرخېدو محور په اړه متناظر دی، نو د x, y, z محورونو نښلول د لوړې برخې سره اړین نه دی ځکه چې د لوړې برخې انرشیالي خصوصیات به د حرکت په جریان کې د دې فریم په نسبت ثابت پاتې شي. نو ځکه $\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n$ ، انځور 21-16، او په دې توګه د لوړې برخې زاویوي سرعت دی

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$
$$= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\sin\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k} \qquad (21\text{–}27)$$



انځور 21-16

د محورونو زاویوي سرعت عبارت دی په

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}$$
$$= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\sin\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \qquad (21\text{–}28)$$

د x, y, z محورونه د لوړې برخې لپاره د انرشیا اصلي محورونه څرګندوي، نو د انرشیا مومنټونه به د $I_{xx} = I_{yy} = I$ او $I_{zz} = I_z$ په توګه وښودل شي. څرنګه چې $\boldsymbol{\omega}$ W¹ معادلې 26-21 د تاویدو د حرکت معادلو د رامینځته کولو لپاره کارول کیږي. په دې معادلو کې د اړونده زاویوي سرعت اجزاوې چې د معادلو 21-27 او 21-28 په واسطه تعریف شوي دي، د هغوی اړوند د وخت مشتقات، او د انرشیا مومنټ اجزاوې، ځای پر ځای کول، لاندې پایلې راکوي

$$\Sigma M_x = I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta) + I_z\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$
$$\Sigma M_y = I(\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_z\dot{\theta}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (21\text{–}29)$$
$$\Sigma M_z = I_z(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta)$$

هر مومنټ مجموعه یوازې په ثابت ټکی O یا د کتلې مرکز G کې پلي کیږي. څرنګه چې معادلې د غیر خطي دوهمه درجه تفاضلي معادلو د ټرلي سیټ استازیتوب کوي، په عمومي ډول یو ټرل شوی-معین حل نشي ترلاسه کېدی. پر ځای یې، د یولر زاویې f ، θ، او ψ ممکن د وخت د تابع په توګه د عددي تحلیل او کمپیوټري تخنیکونو په کارولو سره په ګرافیکي ډول ترلاسه شي.

خو بیا هم، یو ځانګړی حالت شتون لري چې د معادلې 21-29 ساده کول پکې ممکن دي. عموماً د سم یا ثابت مختګ (steady precession) په نوم یادیږي، دا هغه وخت پېښیږي کله چې د غورځېدو زاویه θ ، مختګ $\dot{f}$ ، او څرخېدل $\dot{\psi}$ ټول ثابت پاتې شي. معادلې 21-29 بیا د لاندې شکل ته ساده کیږي

$$\boxed{\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})} \qquad (21\text{–}30)$$

$$\Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

معادله 21-30 نورهم ساده کیدی شي. په یاد ولرو چې له معادلې 21-27 څخه،

$$\omega_z = \dot{f}\cos\theta + \dot{\psi} \quad ، \quad \text{نو داسې:}$$

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,(\sin\theta)\omega_z$$

یا

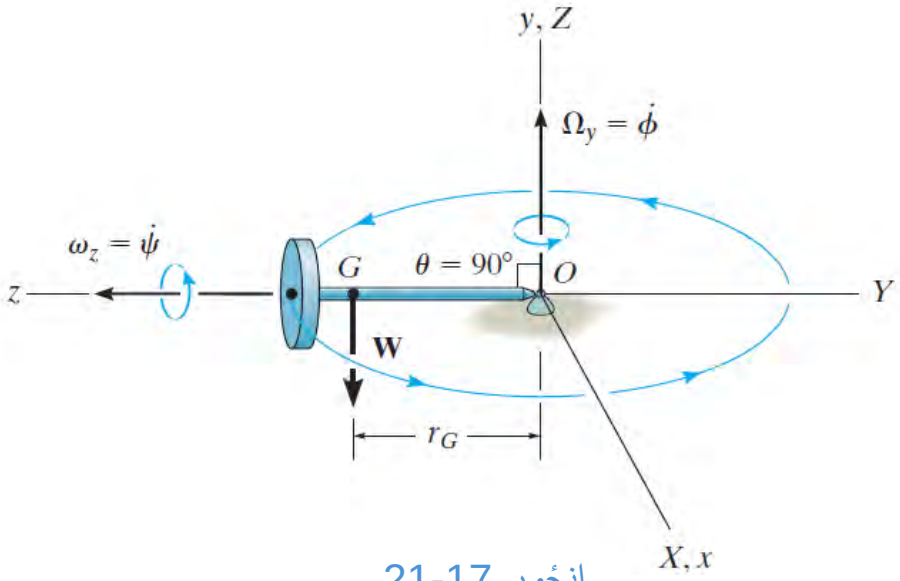
$$\boxed{\Sigma M_x = \dot{\phi}\sin\theta(I_z\omega_z - I\dot{\phi}\cos\theta)} \qquad (21\text{–}31)$$

په زړه پوری ده چې یادونه وشي چې څرخېدل(spin) $\dot{\psi}$ محور ته په مومنټ باندې څه اغیزې لري. د دې د ښودلو لپاره، په شکل 21-17 کې څرخېدونکی روټر په پام کې ونیسئ. دلته $\theta = 90°$، چې په دې حالت کې معادله 21-30 د لاندې شکل ته ساده کیږی

$$\Sigma M_x = I_z \dot{\phi}\dot{\psi}$$

یا

$$\Sigma M_x = I_z \Omega_y \omega_z \qquad (21–32)$$



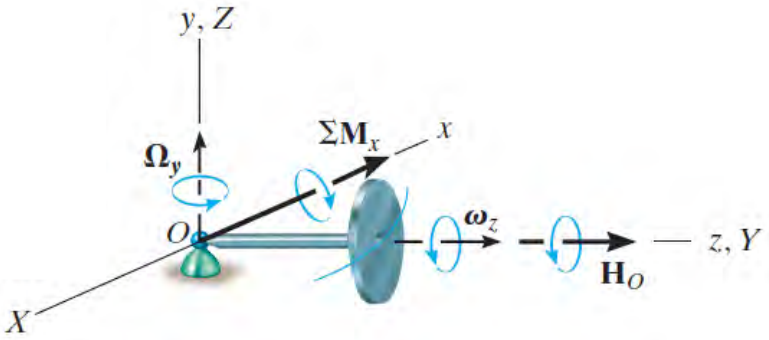
انځور 21-17

په فطري ډول، سړی به تمه لري چې روټر د جاذبې د اغیزې لاندې ښکته ولویږي! خو بیا هم، دا هیڅکله داسې نه ده، په دې شرط چې د $I_z W_y \omega_z$ ضرب داسې غوره شي چې د روټرد تول مومنټ $M_x = Wr_G$ S د O په اړه توازن وکړي. دا غیر معمولي پدیده د کلک بدن حرکت اکثراً د **جایروسکوپیک اغیزې** (*gyroscopic effect*) په نوم یادیږي .

د جایروسکوپیک اغیزې یوه لا زیاته په زړه پورې نندارې د جایروسکوپ د عمل د څیړنې څخه راځي، چې اکثراً د ***جایرو*** (gyro) په نوم یادیږي. یو جایرو یو روټر دی چې د خپل تناظر محور په اړه په خورا لوړه کچه څرخي. دا څرخېدل عمودي محور ته د هغې د مختګ (precession) په پرتله د پام وړ زیات دی. نو، د ټولو عملي موخو لپاره، د جایرو زاویوي مومنټم کیدی شي داسې وانګیرل شي چې د هغې د څرخېدو محور په اوږدودی. نو، د جایرو روټر لپاره چې په انځور 21-18 کې ښودل شوی، $\omega_z \gg W_y$، او د O نقطې په اړه د زاویوي

$$\Sigma \mathbf{M}_x = \boldsymbol{\Omega}_y \times \mathbf{H}_O \qquad (21–33)$$

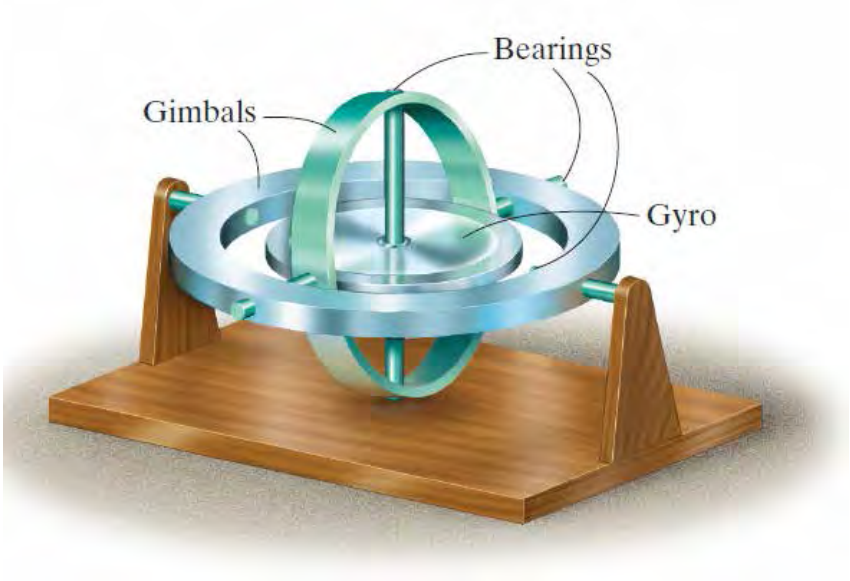
مومنټم اندازه، لکه څنګه چې د معادلې 21-11 څخه ټاکل شوی، د لاندې بڼې ته راځي $H_O = I_z\omega_z$. څرنګه چې د $\mathbf{H}_O$ دواړه اندازه او لوری د x, y, z څخه د کتلو په صورت کې ثابت دي، د معادلې 21-22 مستقیم پلي کول دا راکوي.



انځور 21-18

بڼې لاس قاعدې په کارولو سره چې د کراس ضرب (cross product) کې کارول کیږي، لیدل کیدی شي چې $\mathbf{W}_y$ تل $\mathbf{H}_O$ یا (ω_z) څرخیږی د $\mathbf{S}\,\mathbf{M}_x$ په لوري. په اصل کې، د جایرو د زاویوي مومنټم په لوري کې بدلون، $d\mathbf{H}_O$، برابر دی د جایرو د ټول زاویوی امپلس O ته، یا په بل عبارت $d\mathbf{H}_O = \mathbf{S}\,\mathbf{M}_x\,dt$، معادله 21-20. همدارنګه، څرنګه چې $H_O = I_z\omega_z$ او $\mathbf{S}\,\mathbf{M}_x$ ، $\mathbf{W}_y$ او $\mathbf{H}_O$ یو بل ته عمودي دي، معادله 21-33 معادلې 21-32 ته کمیږي.

کله چې یو جایرو په ګیمبل کړیو کې نصب شي، انځور 21-19، دا د خپلې قاعدې ته د بهرنیو مومنټونو له پلي کیدو آزاد کیږي. نو، په تیوري کې، د هغې زاویوي مومنټم $\mathbf{H}$ به هیڅکله مختګ (precess) ونه کړي، بلکې، خپل ثابت جهت د څرخېدو د محور په امتداد به وساتي کله چې قاعده وڅرخول شي. دا ډول جایروسکوپ د ***آزاد جایرو*** (free gyro) په نوم یادیږي او د جایرو کمپاس په توګه ګټور دی کله چې د جایرو د څرخېدو محور شمال لوري ته متوجه وي. خو په حقیقت کې، د ګیمبل میکانیزم هیڅکله د اصطکاک څخه بشپړ آزاد نه وي، نو داسې یوه اله یوازې د بیړیو او الوتکو د محلي لارښوني (navigation) لپاره ګټور دی. د جایروسکوپیک اغیزه همدارنګه په سمندر کې د بیړیو د څرخېدو حرکت او د توغندیو او مرمیو د مسیرونو د ثبات لپاره د یوې وسیلې په توګه ګټوره ده. سربیره پر دې، دا اغیزه د هغو شفټونو او بیرینګونو په ډیزاین کې د پام وړ اهمیت لري چې د روټرونو لپاره دي او د جبري مختګ (forced precessions) لاندې راځي، لکه څنګه چې په 21.6 مثال کې بحث شوی دی.





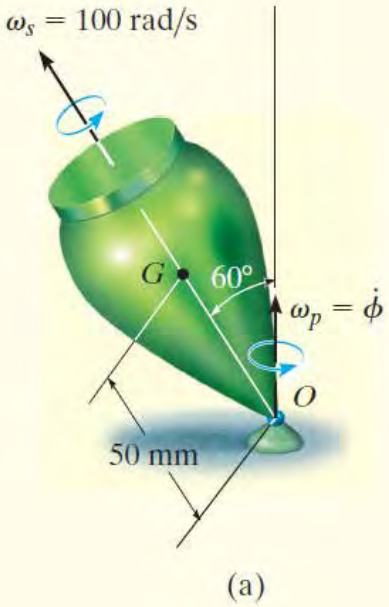
دجایرو څرخیدل ددی فریم د جایروسکوپ په چوکاټ کي د ګیرو څرخېدل زاویوي مومنټم $\mathbf{H}_O$ رامینځته کوي، چې لوریي بدلون مومي کله چې چوکاټ د عمودي محور په اړه مختګ (precesses) w_p کوي. ګیروسکوپ به بنکته و نه لویږي ځکه چې د هغې د تول **W** مومنټ د اتکا په اړه د $\mathbf{H}_O$ د لوري بدلون سره متوازن کیږي.

انځور 21-19

مثالونه

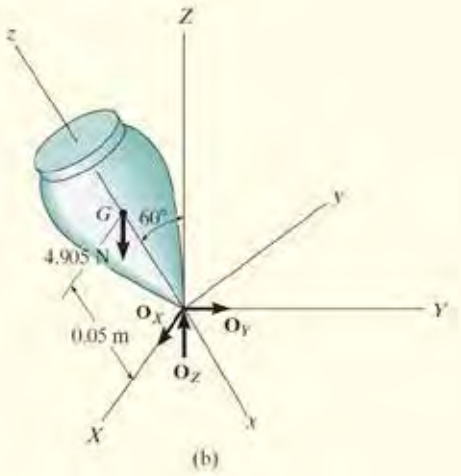
مثال 21.7

په انځور 21-20a کې ښودل شوې لوړه برخه 0.5 kg کتله لري او د عمودي محور په اړه په ثابته زاویه $\theta = 60^o$ مختګ (precessing) کوي. که دا د زاویوي سرعت $\omega_s = 100$ rad/s سره وخرځي، د هغې مختګ ω_p وټاکئ. فرض کړئ چې د لوړې برخې محوري او عرضاني د انرشیا مومنټونه په ترتیب سره $0.45\ (10^{-3})\ kg.m^2$ او $1.20(10^{-3})\ kg.m^2$دي، چې د ثابت ټکی O په نسبت اندازه شوي دي .



(a)

حل



(b)

د حل لپاره معادله 21-30 کارول کیږي ځکه چې حرکت سم مختګ (steady precession) دی. لکه څنګه چې په آزاد-جسم دیاګرام کې ښودل شوي، انځور 21-20b ، د کواړنیت محورونه په عادي طریقه ټاکل شوي دي، یعنې، د مثبت z محور د څرخېدو په لوري، د مثبت Z محور د مختګ په لوري، او د مثبت x محور د مومنټ په لوري ΣM_x (انځور 21-16 ته مراجعه وکړئ). نو،

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$4.905\ \text{N}(0.05\ \text{m})\sin 60^\circ = -[1.20(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\,\dot{\phi}^2]\sin 60^\circ\cos 60^\circ + [0.45(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2]\dot{\phi}\sin 60^\circ(\dot{\phi}\cos 60^\circ + 100\ \text{rad/s})$$

یا

$$\dot{\phi}^2 - 120.0\dot{\phi} + 654.0 = 0 \qquad (1)$$

دا پورتنی دوهمه درجه معادله د مختګ حل کول راکوی:

$$\dot{\phi} = 114 \text{ rad/s} \quad \text{(high precession)} \qquad \textit{Ans.}$$

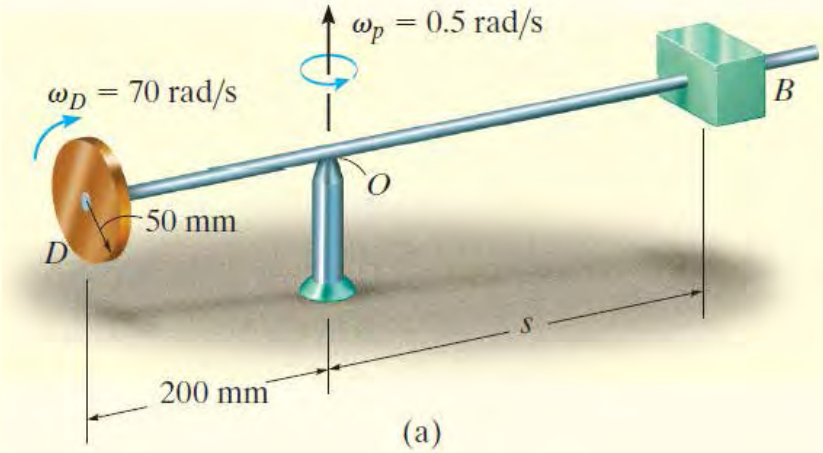
او

$$\dot{\phi} = 5.72 \text{ rad/s} \quad \text{(low precession)} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه:په واقعیت کې، عموماً د لوړې برخې د کم مختګ مشاهده کیږي، ځرنګه چې لوړ مختګ به ډیرې حرکتي انرژۍ ته اړتیا ولري.

مثال 21.8

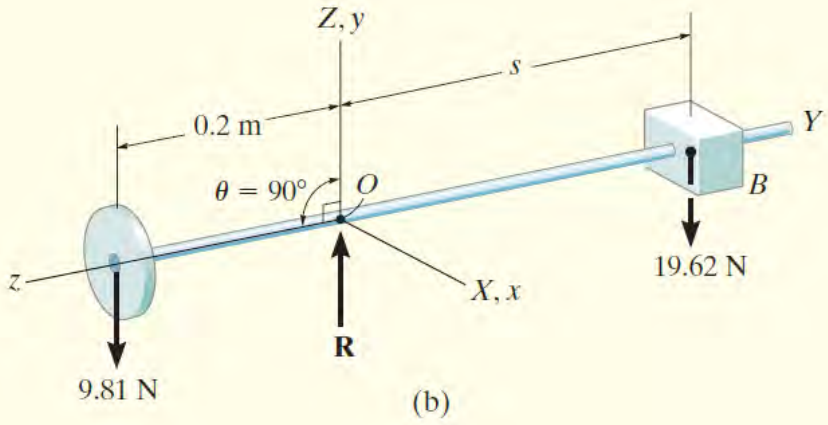
په انځور 21-21a کې 1kg ډیسک بنودل شوی چې په خپل محور په ثابت زاویوي سرعت $w_D = 70$ rad/s سره ځرخیږي. په B نقطه کې بلاک 2 kg کتله لري، او د هغې موقعیت د s په تنظیم سره کولی شو د ډیسک مخکې تګ د O نقطې په شاوخوا بدل کړو، په داسې حال کې چې محور افقي پاتې کیږي. هغه موقعیت s پیدا کړئ چې ډیسک ته اجازه ورکوي چې د محور په شاوخوا ثابت مخکې تګ ($w_p = 0.5$ rad/s (precession ولري. د محور وزن په پام کې مه نیسئ.



حل:

د جوړښت د آزاد جسم ډیاګرام په انځور 21-21 b کې ښودل شوی دی. د *x, y, z* او *X, Y, Z* کوردینات سیستمونو لپاره مبداء په ثابته نقطه *O* کې موقعیت لري. په معمولي مفهوم کې، د *Z* محور د مخکې تګ (precession) محور په امتداد غوره شوی، او د *z* محور د څرخیدو محور په امتداد دی، داسې چې $\theta = 90^o$ څرنګه چې مخکې تګ ثابت دی، د حل لپاره معادله 21-32 کارول کیدی شي.

$$\Sigma M_x = I_z \Omega_y \omega_z$$



(b)

د اړتیا وړ معلومات ځای پر ځای کول:

$$(9.81\text{ N})\,(0.2\text{ m}) - (19.62\text{ N})s = \left[\tfrac{1}{2}(1\text{ kg})(0.05\text{ m})^2\right]0.5\text{ rad/s}(-70\text{ rad/s})$$

$$s = 0.102\text{ m} = 102\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

21.6 بیله تورکه حرکت (TORQUE-FREE MOTION)

کله چې په یو جسم باندې یوازې د ځمکې د جاذبې قوه عمل کړي، د جسم عمومي حرکت ته **"بیله تورکه حرکت"** ویل کیږي. دا ډول حرکت د سیارې، مصنوعي سپوږمکۍ، او توغندیو ځانګړتیا ده چیرې چې د هوا اصطکاک په پام کې و نه نیولشي.

د دې حرکت د څانګړتیاوو د تشریح لپاره، فرض کړي چې د جسم د کتلې ویش محوري متناظروالی لري. هغه سپورمکی چې په انځور22-21 کې ښودل شوی ده، د دې ډول جسم یوه بیلګه ده، چیرې چې د z محوریی د متناظروالي محور دی. د x, y, z کوآرډینیټ سیستم مبداء ټکی G دی، چې دلته $I_{zz} = I_z$ او $I_{xx} = I_{yy} = I$ دی. څرنګه چې یوازې د ځمکې د جاذبې قوه د جسم پر وړاندې عمل کوي، د کتلې په مرکز د مومینټم جمع صفر ده. د معادلې 21–21 څخه، دا معنی لري چې د جسم زاویوی مومینټم باید ثابت پاتې شي، یعنې:

$$\mathbf{H}_G = \text{constant}$$

د دې مهال په پام کې نیولو سره، فرض کړي چې د انرشیایی ریفرینس فریم داسې ترتیب شوی چې مثبت Z محور د $\mathbf{H}_G$ سره سمون لري او د y محور په هغه سطحه کې پروت دی چې د z او Z محورونو ترمنځ جوړه شوې ده (انځور22-21). د اویلر زاویه چې د Z او z ترمنځ رامنځته کیږي، q ده. نو، د دې محورونو په ټاکلو سره، زاویوی مومینټم داسې څرګندولی شو:

$$\mathbf{H}_G = H_G \sin\theta\,\mathbf{j} + H_G \cos\theta\,\mathbf{k}$$

برسېره پر دې، د معادلې 21-11 په کارولو سره، مور لاندې معادله ترلاسه کوو:

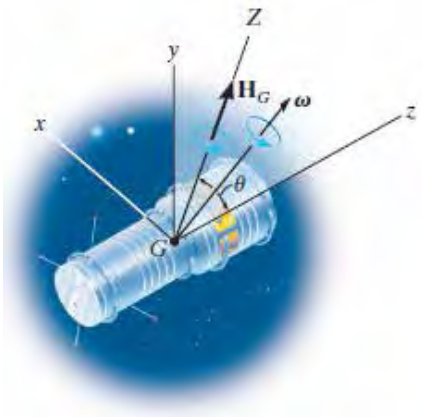
$$\mathbf{H}_G = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$$

د پورتنیو دو معادلو i, j, او k اجزاوې یو بل سره مساوی ایږدو او دا لاندې په لاس راځي.

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \frac{H_G \sin\theta}{I} \quad \omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} \qquad (21\text{–}34)$$

یا

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{H_G \sin\theta}{I}\mathbf{j} + \frac{H_G \cos\theta}{I_z}\mathbf{k} \qquad (21\text{–}35)$$



انځور 21-22

په ورته توګه، د معادله 21-27 اړوندو **i** ، **j**، او **k** اجزاوی د معادله 21-34 اړوند اجزاوو سره مساوی اړدو ، مور ترلاسه کوو

$$\dot{\theta} = 0$$
$$\dot{\phi}\sin\theta = \frac{H_G \sin\theta}{I}$$
$$\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} = \frac{H_G \cos\theta}{I_z}$$

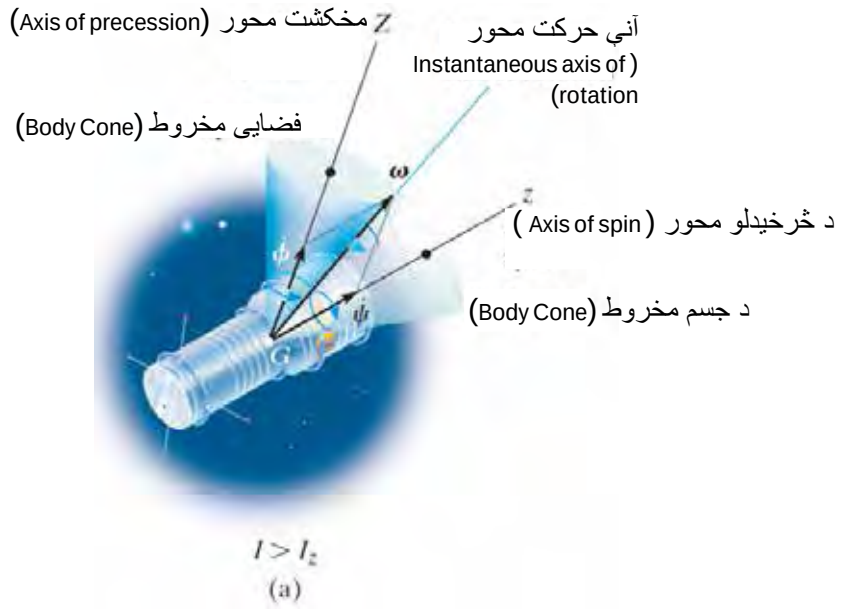
له حل کولو وروسته دا لاندی په لاس راځي

$$\theta = \text{constant}$$
$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$
$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I\,I_z} H_G \cos\theta \qquad (21\text{–}36)$$

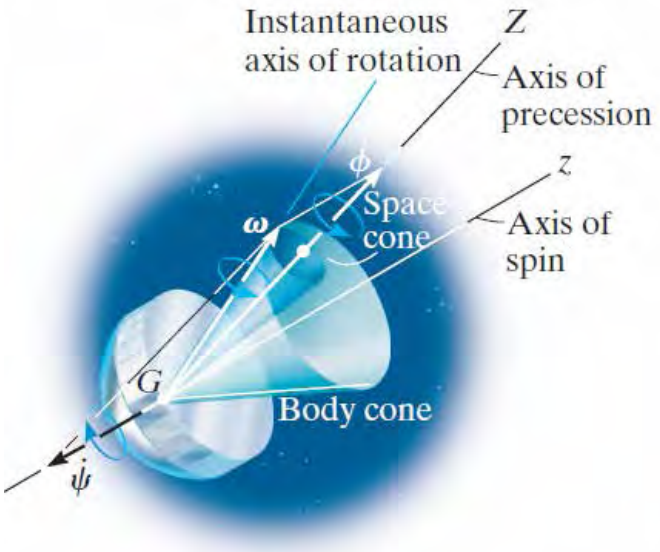
نو، د یو محوري متناظر جسم بیله تورکه حرکت لپاره، د زاویوي مومنټم ویکتور او د جسم د څرخیدو ترمنځ جوړه شوې زاویه q تل ثابته پاتې کیږي. سربیره پر دې، د جسم زاویوي مومنټم $\mathbf{H}_G$، مختګ $\dot{\psi}$ او څرخیدل $\dot{\phi}$ د حرکت په ټول وختو کې ثابت پاتې کیږي.

د معادلې 21-36 له دوهم او دریم کربنی څخه د $\mathbf{H}_G$ حذف کول، لاندې اړیکه د څرخیدل او مختګ ترمنځ وړاندې کوي:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta \qquad (21\text{–}37)$$



د زاویوي حرکت دا دوی اجزاوی د جسم او فضایي مخروط موډلونو په کارولو سره څیړل کیدای شي چې په 20.1 برخه کې معرفي شوي دي. فضایي مخروط، چې د مختګ محور په اوږدو کې موقعیت لري، د څرخیدو څخه ثابت دی، ځکه چې مختګ یوه ثابت لوری لري، په داسې حال کې چې د جسم مخروط سطحه د فضایي مخروط په سطحه رغړي. هڅه وکړئ چې د ستلایټ دا حرکت په انځور 21-23a کې تصور کړئ. د هر مخروط داخلي زاویه داسې غوره شوې ده چې د ستلایټ زاویوي سرعت **w** د دوو مخروطونو د تماس کرښې په اوږدو کې وي. دا کرښه د جسم مخروط لپاره د آني تاویدلومحور استازیتوب کوي، نو له دې امله د جسم مخروط او جسم دواړو زاویوي سرعت باید د دې کرښې په اوږدو کې وي. څرنګه چې څرخیدل د جسم د انرشیایی مومنټونو I او I_z تابع دې، معادله 21-36، په انځور 21-33a کې د مخروط موډل د حرکت تشریح کولو لپاره مناسب دی، په دې شرط چې $I > I_z$ وي. بیله تورکه حرکت چې دا شرایط پوره کوي، ***عادي مختګ*** (regular precession) بلل کیږي. که $I < I_z$ وي، څرخیدل منفي اومختګ مثبت دی. دا حرکت د ستلایټ حرکت په واسطه ښودل شوی دی لکه چې په انځور-21 23b کې ښودل شوی دی ($I < I_z$) . د مخروط موډل بیا هم د حرکت استازیتوب لپاره کارول کیدای شي؛ خو بیا هم، ددی لپاره چې صحیح د ویکتور جمعه د تاویدو لپاره او مختګ چې زاویوی سرعت **w** ترلاسه شي، د داخلی سطحه د بدن د مخروط ښایی چې د فضا د مخروط په خارجی سطحه ورغړی. دې حرکت ته ***معکوس مختګ*** (retrograde precession) ویل کیږي.



$I < I_z$

(b)

انځور 21-23

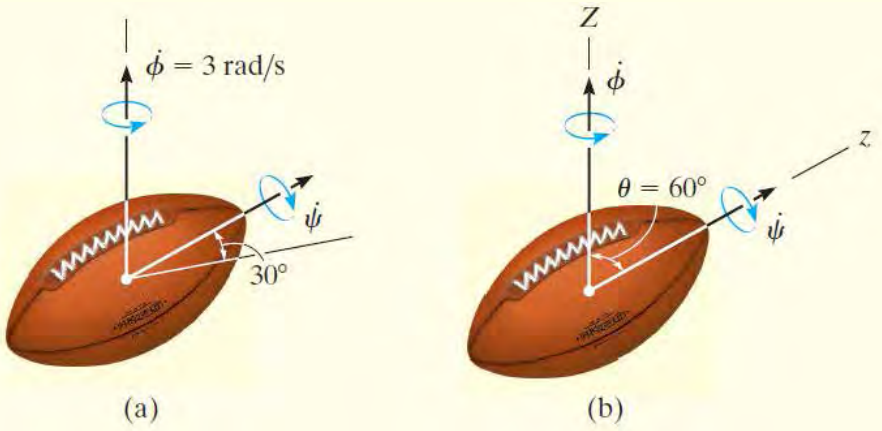
ستلایټونه اکثراً د توغولو څخه مخکې څرخول کیږي. که د هغوی زاویوي مومنټم د څرخیدو له محور سره هم لیکي (collinear) نه وي، نو هغوی به مختګ بشکاره کړي. د کینې اړخ ستلایټ لپاره، عادي مختګ به رامنځته شي ځکه چې $I > I_z$، او د بنې اړخ لپاره، معکوس مختګ به رامنځته شي ځکه چې $I < I_z$.





مثال 21.9

د فوټبال حرکت د ورو- حرکت پروجیکټور په کارولو سره لیدل شوی. د فلم څخه، د فوټبال څرخیدل د افقي سطحې څخه 30° په لور لیدل کیږي، لکه څنګه چې په انځور 21-24a کې ښودل شوی دی. همدارنګه، فوټبال د عمودي محور په شاوخوا کې په کچه د $\dot{\phi} = 3$ rad/s مختګ کوي. که د فوټبال د محوري او عرضاني انرشیایی مومنټونو نسبت ⅓ وي، چې د کتلې مرکزپه نسبت اندازه شوی، د فوټبال د څرخیدو مقدار او د هغه زاویوي سرعت معلوم کړئ. دهوا مقاومت اغیزه په پام کې مه نیسئ.



انځور 21-24

حل

څرنګه چې د فوټبال تول یوازینۍ قوه ده چې عمل کوي، بیله تورکه حرکت دی. په عنعنوي مفهوم، که د z محور د څرخیدو په محور او Z محور د مختګ په محور باندې تثبیت شي، لکه څنګه چې په انځور 21-24b کې ښودل شوی دی، نو زاویه $q = 60°$ ده. د معادلې 21-37 په تطبیقولو، څرخیدل دی

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60°$$

$$= 3 \text{ rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

معادله 21-34 کاره وو چیرې چې $H_G = \dot{\phi} I$ (معادله 21-36)، مونږ لرو

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \frac{H_G \sin\theta}{I} = \frac{3I \sin 60°}{I} = 2.60 \text{ rad/s}$$

$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I \cos 60°}{\frac{1}{3}I} = 4.50 \text{ rad/s}$$

نو بیا

$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2}$$
$$= \sqrt{(0)^2 + (2.60)^2 + (4.50)^2}$$
$$= 5.20 \text{ rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

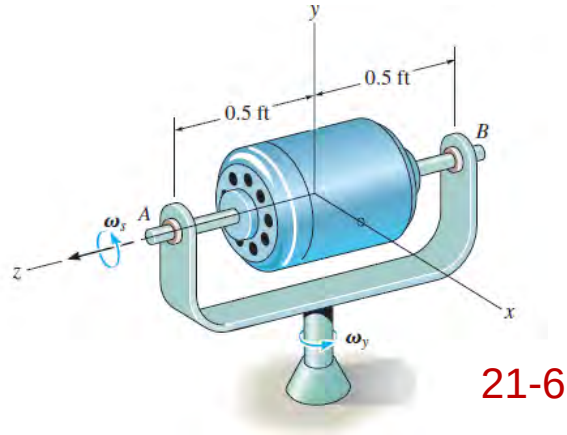
پوښتنې

PROBLEMS

***21–60 .** ښکاره کړئ چې د یو جسم زاویوي سرعت، د یولر زاویو ϕ ، θ، او ψ په اساس، داسې څرګندیدلای شي $\boldsymbol{\omega} = (\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\mathbf{i} + (\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k}$ چیرې چې i ، **j**، او **k** د x ، y، z محورونو په امتداد لاربښوونه کوي لکه څنګه چې په انځور 21-15d کې ښودل شوي دي.

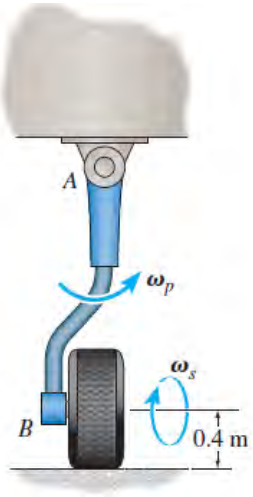
21–61 . یوه نرۍ میله په پیل کې د Z محور سره یوځای ده کله چې دري څرخیدنې ورکول کیږي چې د یولر زاویو $\phi = 30°$ ، $\theta = 45°$، او $\psi = 60°$ په واسطه تعریف شوي دي. که دا څرخیدنې په ورکړل شوي ترتیب کې ورکړل شي، د میلې د محور د کوارډنیټ لوري زاویې α ، β، γ د X ، Y، او Z محورونو په نسبت معلومې کړئ. آیا دا لوري د څرخیدنو د هر ترتیب لپاره یو شان دي؟ ولې؟

21–62 . موټور 50 lb تول لري او د z محور په شاوخوا د جایریشن شعاع یې 0.2 ft ده. د موټور شافټ په A او B کې د بیرینګونو په واسطه ملاتړ کیږي، او په ثابت کچه $\boldsymbol{\omega}_s$ = {100**k**} rad/s کې څرخي، په داسې حال کې چې فریم $\boldsymbol{\omega}_y$ = {2**j**} rad/s زاویوي سرعت لري. د A او B کې د بیرینګ قوو لخوا په شافټ باندې پلی شوی مومنټ د دې حرکت له امله محاسبه کړئ.



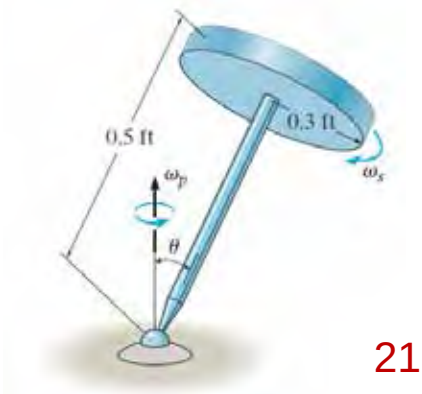
پ 21-62

21–63 . د الوتنې په شیبه کې، د الوتکې د کیناستلو ګیر په ثابت زاویوي سرعت $w_p = 2$ rad>s سره راټولیږي، په داسې حال کې چې د ټایر څرخیدل دوام مومي. که الوتکه په سرعت $v = 320$ km/h سره الوځي، د جایروسکوپي اغیزې له امله په A کې تورک معلوم کړئ. څرخ 50 kg کتله لري، او د څرخیدو محور په شاوخوا د جایروشن شعاع یې $k = 300$mm ده.



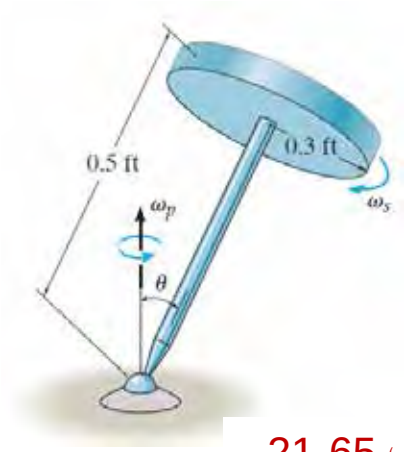
پ 21-63

***21–64 .** دا لوبغالی (ټاپ) د یوې نرۍ ډیسک څخه جوړه شوې دی چې 8 lb پونډه تول او 0.3 ft شعاع لري. میله د پام وړ کتله نلري او اوږدوالی یې 0.5 ft دی. که لوبغالی د زاویوي سرعت $\omega_s = 300$ rad/s سره څرخیږي، د میلې د تعادلي حالت مختګ زاویوي سرعت w_p معلوم کړئ کله چې $\theta = 40^o$ وي.



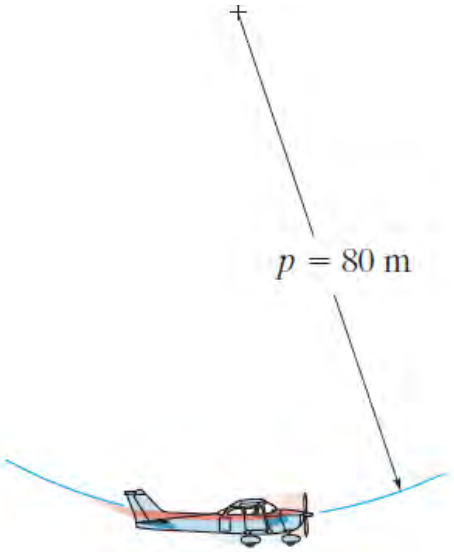
پ 21-64

21–65 . دا لوبغالی (ټاپ) د یوې نرۍ ډیسک څخه جوړه شوې ده چې 8 lb پونډه تول او 0.3 ft شعاع لري. میله د پام وړ کتله نلري او اوږدوالی یې 0.5 ft دی. که لوبغالی د زاویوي سرعت ω_s = 300 rad/s سره څرخیږي، د میلې د تعادلي حالت مختګ زاویوي سرعت w_p معلوم کړئ کله چې $\theta = 90^o$ وي.



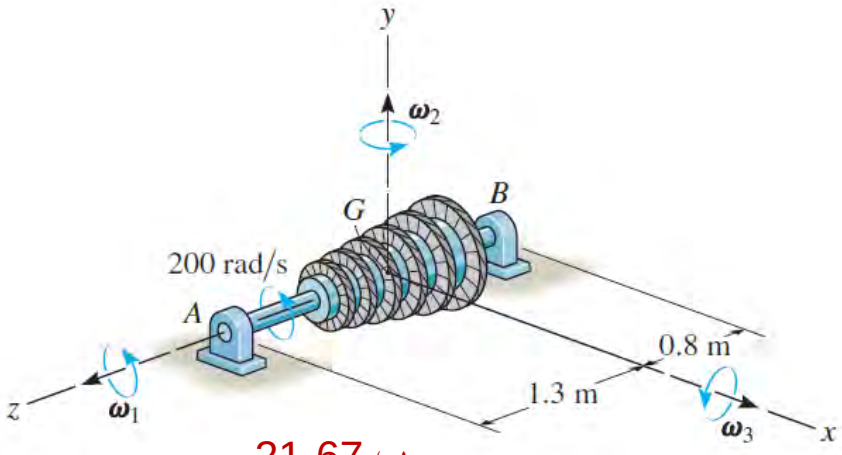
پ 21-65

21–66 . د یوه ماشینه الوتکې پروانه 15 kg کتله او د 0.3 m متره مرکزی جایریشن شعاع لري چې د څرخیدو په محور محاسبه شوې دی. کله چې د الوتکه د مخې لورې څخه کتل کیږي، پروانه د ساعت د ستنې په لور په 350 rad/s د څرخیدو محور په شاوخوا څرخیږي. که الوتکه یوه عمودي منحني ته داخله شي کوم چې 80 m متره شعاع لري او په 200 km/h سره حرکت کوي، هغه جایروسکوپي کړیدو مومنټ معلوم کړئ چې پروانه یې د انجن په بیرینګونو باندې پلی کوی کله چې الوتکه په خپل ټیټ موقعیت کې وي.



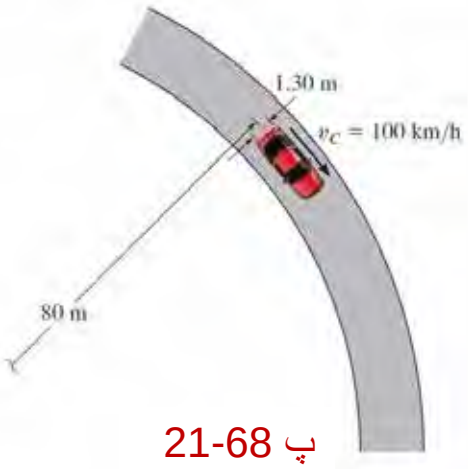
پ 21-66

21–67 . د بیړۍ توربین 400 kg کتله لري او لکه څنګه چې ښودل شوی، په A او B بیرینګونو باندې نصب شوی دی. د دې د کتلې مرکز په G کې دی، د جایریشن شعاع یې k_z = 0.3 m، او $k_x = k_y = 0.5$ m دي. که دا په 200 rad/s کې څرخیږي، د بیرینګونو کې عمودي غبرګونونه معلوم کړئ کله چې بیړۍ د لاندې حرکتونو څخه هر یو تر سره کوي (a) : رغړی (rolling) ، $w_1 = 0.2$ rad/s، (b)تاویږی (turning) ، $w_2 = 0.8$ rad/s، (c) خوځیږی (pitching) $w_3 = 1.4$ rad/s.



پ 21-67

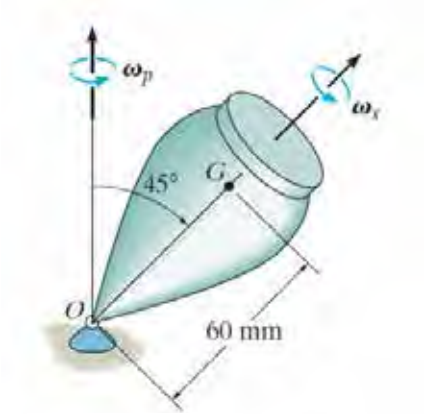
***21–68 .** موټر په ثابت سرعت v_c = 100 km/h سره په 80 m شعاع لرونکي افقي منحنی حرکت کوي. که هر ټیر 16 kgکتله ولري، د جایریشن شعاع یې k_G = 300 mm دتاویدو محورته، او شعاع یې 400 mm ده، د شا ټیرونو د عمودی قواو توپیر د gyroscopic اثر له امله محاسبه کړئ. د ټیرونوترمنځ واټن 1.3 mدی.



پ 21-68

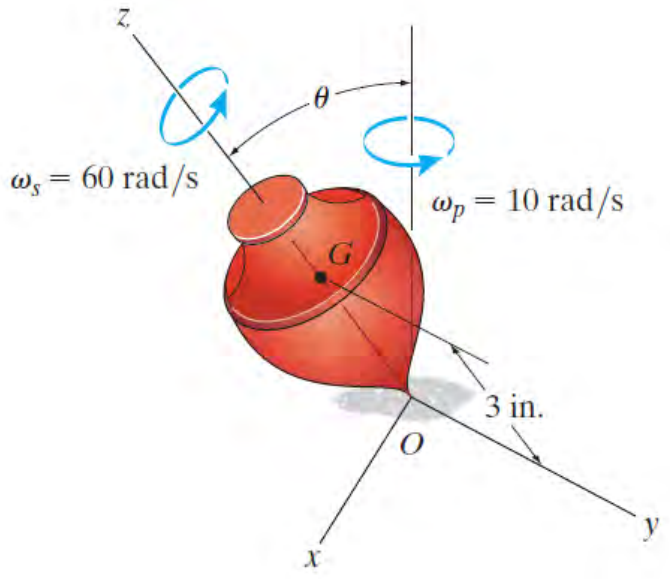
21–69 . ټاپ د 90g کتله لري، د کتلې مرکز یې په G کې دی، او د هغې د gyration شعاع k = 18 mm ده، د متناظرمحور په شاوخوا کې. د هرعرضي محور په اوږدو کې چې د

O تکی څخه تیریږي د gyration شعاع $k_t = 35$ mm ده. که ټاپ په O ټکی کې د بال او ساکت په ډول ټرل شوی وي او مختګ $w_p = 0.5$ rad/s لري، د څرخ ω_s محاسبه کړئ.



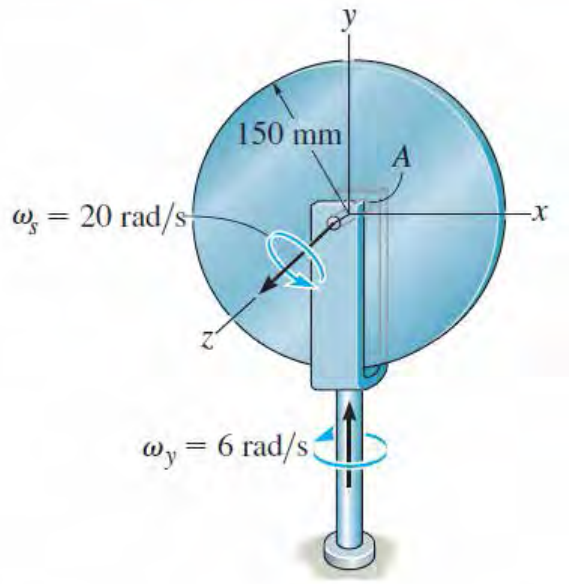
پ 21-69

21–70 . د 1-lb ټاپ د ثقل مرکز په G ټکی کې دی. که دا د هغې د متناظر محور په شاوخوا کې w = 60 rad/s څرخي او د عمودي محور په شاوخوا کې په ثابته کچه w=10rad/s مختګ لري ، د steady state زاویه q محاسبه کړئ. د ټاپ د z محور په شاوخوا کې د جایریشن شعاع $k_z = 1$ in ده، او د x او y محورونو په شاوخوا کې $k_x = k_y = 4$ in دي.



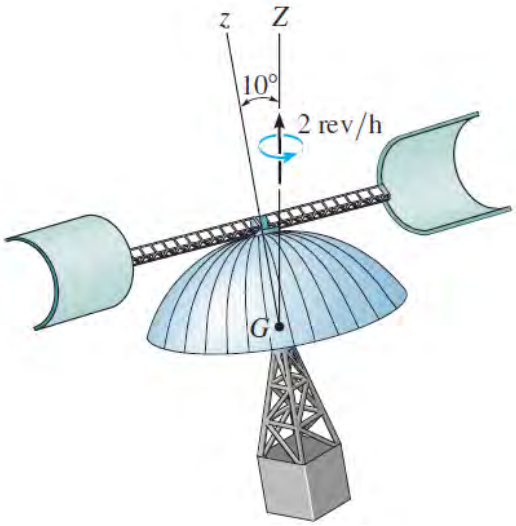
پ 21-70

21–71 . د 20 kg ډیسک خپل مرکز ته په د $w_s = 20$ ra/s سره څرخي، په داسې حال کې چې د ملاتړ شفټ یې په $w_y = 6$ rad/s سره څرخي. د gyroscopic مومنټ محاسبه کړئ چې دعکسالعمل قوه چې د پین A لخوا په ډیسک باندې د حرکت له امله اعمال کیږي.



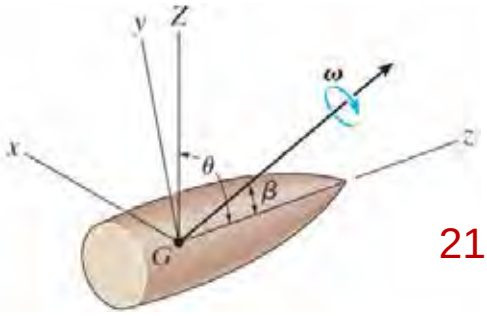
پ 21-71

21–72* د 2.5 mg سپوږمکۍ د جایریشن شعاع هغه محورته چې د متناظر محورڅخه تیریږی $k_z = 2.3$ m ده، او د هر عرضي محور ته چې د کتلې له مرکز G څخه تیریږی $k_T = 3.4$ m دي. که سپوږمکۍ د Z محور په شاوخوا کې د steady-state مختګ دوی دوری په ساعت کې ولري، په z محور د څرخش کچه محاسبه کړئ.



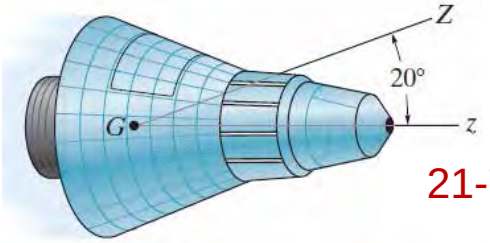
پ 21-72

21–73 . بنودل شوی پروجکټایل (توغندی) بیله ټورکه په حرکت کې دی. عرضي او محوري د انرشیا مومنټونه په ترتیب سره I او I_z دي. که چېرې q د مختګ محور Z او د تناظر محور z ترمنځ زاویه وښیي، او b د زاویوي سرعت $\boldsymbol{\omega}$ او z محور ترمنځ زاویه وي، وښیی چې b او q د دې معادلې په واسطه تړلي دي. $\tan q = (I/I_z) \tan b$.



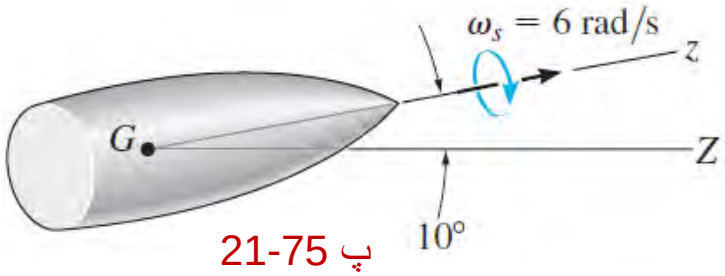
پ 21-73

21–74 . د 1.6 Mg فضایی کیپسول هغه محورته چې د متناظر محور څخه تیریږی د جایریشن شعاع k_z =1.2 m ده، او د هر عرضي محور ته چې د کتلې له مرکز G څخه تیریږي k_t =1.8 mده. که کیپسول د Z محور په شاوخوا کې د steady-state مختګ دوی دوری په یوه ساعت کې ولري، په z محور د څرخش کچه محاسبه کړئ.



پ 21-74

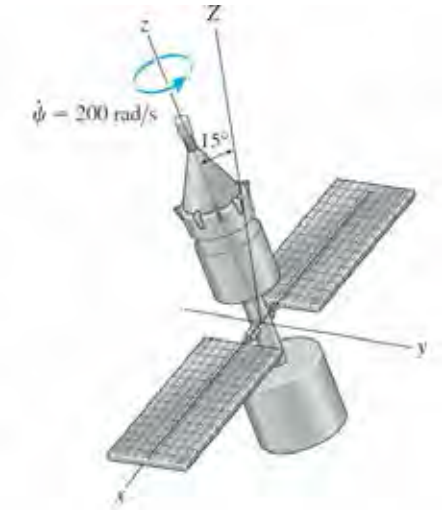
21–75 . پروجکټایل (توغندی) 0.9 kg کتله لري او د محوري او عرضي د جایرشن شعاوی یې په ترتیب سره k_z = 20 mm او k_t = 25 mm دي. که چېرې کله چې د ټوپک له نلکې څخه وځي، په w_s = 6 rad/s څرخیږي، د هغې زاویوي مومنټم معلوم کړئ. مختګ د Z محور په اړه رامنځته کیږي.



پ 21-75

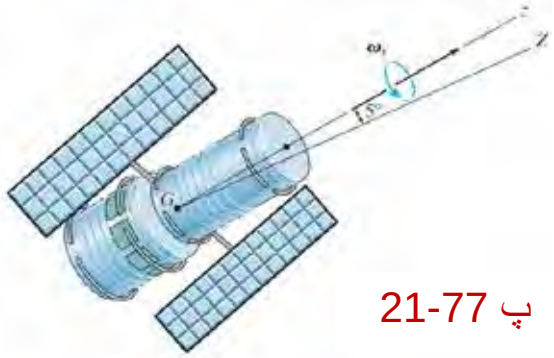
***21–76.** سپورمکی 100 kg کتله لري او د جایریشن شعاوی یې د خپل متناظرمحور(z) اود خپلوعرضي محورونو (x یا y محور) ته په ترتیب سره k_z = 300 mm او

$k_x = k_y = 900$ mm دي. که چېرې سپوږمکۍ په z محور په ثابته کچه $\dot{\psi} = 200$rad/s خرخېږي، او د Z محور په اړه مختګ کوي، د مختګ $\dot{\psi}$ او د زاویوي مومنټم $\mathbf{H}_G$ اندازه معلومه کړئ



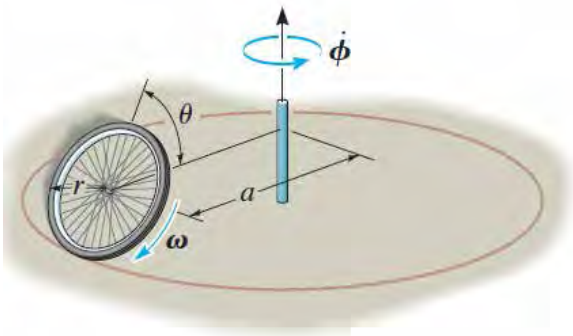
پ 21-76

21–77 . سپوږمکۍ 1.8 Mg کتله لري، او د کتلې مرکز G له لارې د تیریدو محورونو په اوږدو کې د محوري او عرضي جایریشن شعاعوی په ترتیب سره عبارت دي په $k_z = 0.8$ m او $k_t = 1.2$ m . که د توغولو (launch) په وخت کې خرخش $w_s = 6$ rad/s ولري ، د هغې زاویوي مؤمنټم محاسبه کړئ. پرمختګ د Z محور په شاوخوا کې پیښیږي.



پ 21-77

21–78 . یو خرخ چې کتله m او شعاع r لري، د ثابت خرخش $\boldsymbol{\omega}$ سره په دایروي مسیر په اوږدو چې شعاع یې a ده حرکت کوي. که د میلان زاویه یې q وي، د پریسیشن کچه محاسبه کړئ. خرخ د نري حلقې په توګه محاسبه کړئ. هیڅ ښویدل نه پیښیږي.



پ 21-78

د فصل بیا کتنه

د فصل بیا کتنه	CHAPTER REVIEW
مؤمنتونه اودانرشیا ضرب Moments and Products of) Inertia) *یوجسم د هر تاکل شوي x ، y، z* محورونو لپاره شپږ اجزاوی د انرشیا لري. دري يې انرشیا یی مؤمنتونه د هر محور په اړه، I_{xx}، I_{yy}، I_{zz}، او دري يې انرشیا یی ضرب مؤمنتونه دي، چې هر یو د دوو عمودي سطحو له مخی تعریف شوی دی، I_{xy}، I_{yz}، I_{xz} . که چیرې یوه یا دواړی د تناظر سطحې وي، نو د دې په اړه د انرشیایی ضرب صفر کیدی شي. مومنتونه او دانرشیا ضرب کیدی شی د مستقیم انتیګریشن یا د جدول شوې ارزښتونو په کارولو سره محاسبه شي. که دا مقدارونه باید د محورونو یا سطحو په اړه چې د کتلې له مرکزنه نه تیریږي، محاسبه شي، نو د موازي محورونو او موازي سطحو قضیې باید د دوی ارزښتونه محاسبه کولو لپاره وکارول شي. که د انرشیا شپږ اجزاوې معلومې وي، نو د هر محور په اړه انرشایی مؤمنت د انرشیا بدلون معادلو په کارولو سره محاسبه کیدی شي	$I_{xx} = \int_m r_x^2\,dm = \int_m (y^2 + z^2)\,dm$ $I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\,dm$ $I_{yy} = \int_m r_y^2\,dm = \int_m (x^2 + z^2)\,dm$ $I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\,dm$ $I_{zz} = \int_m r_z^2\,dm = \int_m (x^2 + y^2)\,dm$ $I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz\,dm$ $I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x$

د انرشیا اصلي مؤمنت (Principle (Moment of Inertia د جسم په هر نقطه کې، که هغه د جسم په داخل کې وي یا بهر، *x*، *y*، *z* محورونه داسې ترتیب کیدی شي چې د انرشیایی ضرب صفر شي. په دی ډول حاصل شوي انرشیایی مؤمنت د انرشیا اصلي مؤمنت بلل کیږي. په عمومي ډول، یو یې اعظمي او بل یې اصغری وی.	$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$
د امپلس او مؤمنتم اصول Principle of Impulse and) Momentum) د یو جسم زاویوي مومنتم د هرتصادفي ټکی *A* په اړه ټاکل کیدی شي. کله چې د جسم لپاره خطی او زاویوي مؤمنتم وښودل شی، نو د امپلس او مؤمنتم اصول کولی شي د هغو پوښتنو دحل کولو لپاره وکارول شي چې هلته قوه، سرعت او وخت شامل وي.	$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$ $$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$ where $$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$ $$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$ $$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$ $$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm$$ Fixed Point O $$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm$$ Center of Mass $$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$ Arbitrary Point
د کار او انرژۍ اصول (Principle of Work and Energy) د یو جسم کینیټیک انرژي معمولا یوه ثابت ټکی یا د جسم د کتلې مرکز ته	$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$ Fixed Point

ټاکل کيږي.
دغه فورمولونه کولی شي د کار او انرژۍ اصول سره وکارول شي ترڅو هغه پوښتنی حل کړي چې قوه، سرعت او بيځايه کيدنه پکې شامل وي.

د حرکت معادلې (Equations of Motion)

د يو سخت جسم لپاره دري سکيلر معادلې د خوځيدلو (translational) حرکت لپاره شتون لري چې په دريو خواووحرکت کوي.
د دوراني حرکت لپاره دري سکيلر معادلې د x ، y، z مرجع په حرکت پورې تړاو لري. ډېروخت، دا حورونه داسې تنظيم کيږي چې دوی د انرشيا اصلي محورونه وي. که چېرې محورونه ثابت وي او د جسم سره حرکت وکړي نو د $\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega}$ په حالت کې، دا معادلې د يولر حرکت معادلې بلل کيږي.
د حرکت معادلو په کارولو کې بايد تل د آزاد بدن ډياګرام هم شتون ولري.

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Center of Mass

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

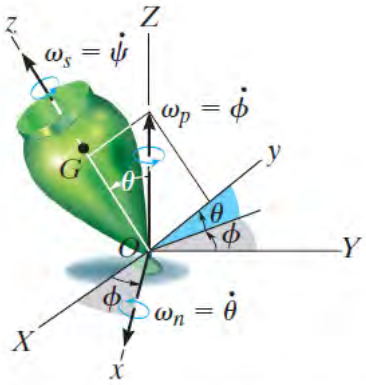
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma F_z = m(a_G)_z$$
$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$
$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$$
$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$
$$\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$$

جايروسکوپي حرکت (Gyroscopic Motion)

د جاييروسکوپ زاويوي حرکت په غوره توګه د دري يولر زاويو ϕ ، q، او ψ په کارولو سره تشريح کيږي. د زاويوی سرعت اجزاوي د مختګ f ، نوتيشن q ، او څرخيدل ψ بلل کيږي. که چيرې $q = 0$ او f او ψ ثابت وي، نو دا حرکت د ثابت مختګ په توګه يادېږي.

د جيرو روټر څرخيدل هغه څه دي چې د روټر د لويدلو مخه نيسي، او پرځای يې د عمودي محور په اوږدو کې مختګ کوي.

دا پديده د جايروسکوپي اغيزه بلل کيږي.



$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$\Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$$

بيله تورکه حرکت (Torque-Free Motion)

يو جسم چې يوازې د جاذبې قوه وربانډی عمل کړي ، په خپل کتلې مرکز کې هېڅ مؤمنت نه لري، نو دا حرکت د بيله ټورکه حرکت بلل کيږي. د جسم زاويوي مؤمنتم د دې کتلې مرکز په اړه ثابت پاتې کيږي اوجسم کولی شي هم څرخيدل او هم مختګ ولري. د يو متناظر جسم لپاره، حرکت د څرخيدلو محور په اړه د انرشيای مؤمنت I_z په اندازه پورې تړاو لري، نسبت عمودي محور په اړه، I.

$$\theta = \text{constant}$$

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I\,I_z} H_G \cos\theta$$

دوه ویشتم فصل

(CHAPTER 22)



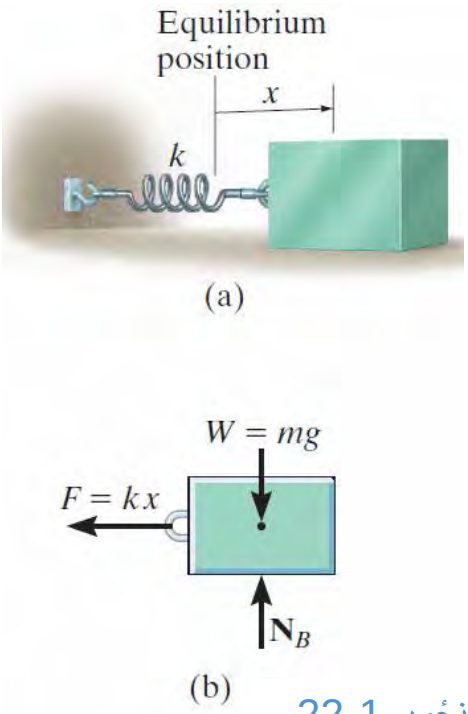
د دې ریل موټر ټرک او څرخونو ته ملاتړ کوونکي پنرونه د پټلۍ د امپکت بارونه او د موټر منځته راغلي رپېدنه جذبوي. د ډیزاین په وخت کې دواړه اغیزې باید په پام کې ونیول شي .

لړزيداوی (يا اهتزازونه)
(VIBRATIONS)

د فصل موخې
CHAPTER OBJECTIVES

- § د حرکت معادلې او د انرژۍ طريقو په کارولو سره د يوه کلک جسم چې په لړزيدا يی بنديز نشته (undamped) او يوه درجه-آزادۍ د لړزيدا لری، بحث کيږی.
- § د نه ډمپ شوي اجباري ريښدنې او وسکز (viscous) ډمپ شوي جبري ريښدنې د تحليل څېړل.

22.1 نه کمزوری شوي آزاد لړزیدل (UNDAMPED FREE VIBRATION)



انځور 22-1

لړزیدل د یو جسم یا د ټرلشویو جسمونو د سیستم یو نوسانی حرکت دی چې د توازن له حالت څخه بې ځایه شوی وي. په عمومي توګه، دوه ډوله لړزیدا شته، آزاده او جبري. **آزاده لړزیدنه** هغه وخت رامنځته کیږي کله چې حرکت د جاذبې یا د ارتجاعي بېرته راستنېدونکو قواوو په واسطه ساتل کیږي، لکه د پاندولم ټال وهونکی حرکت یا د یوې ارتجاعي میلې لړزیدل. **جبري لړزیدل د** یوی بهرني دوراني یا وقفې وړ قوی له امله رامنځته کیږي چې په سیستم باندې پلی کیږی. د دې دواړو ډولونو لړزیدنی کېدی شي ډمپد یا نه ډمپد وي. نه کمزوری (Undamped) لړزیدا په تحلیل کې د اصطکاک اغېزې نه شاملوي، که څه هم په حقیقت کې دواړه داخلي او بهرني اصطکاکي قواوې شتون لري، د ټولو لړزیدونکیو جسمونو حرکت په اصل کې ډمپد دی.

د لړزښت ساده ډول غیر ډمپد آزاده لړزیدا ده، کوم چې کولای شو د بلاک او پنر په ماډل سره وښیو لکه څنګه چې په انځور 22-1a کې ښودل شوی دی. که چېرې د ملاتړ سطحه ښویه وي، کله چې بلاک له یوه بې ځایه شوي موقعیت x څخه خوشې شي، لړزیدونکی حرکت رامنځته کیږي. سپرنګ بیا بلاک کش کوی، چې د سرعت ترلاسه کولو لامل کیږي، او بیا کله چې $x = 0$ وي، له توازن څخه وزي. د پنر غونجیدل به حرکت په $-x$ کې ودروي، او وروسته او مخته نوسانی حرکت تکرارېږي.

د بلاک په وخت پورې ټرلی د حرکت مسیر د حرکت د معادلې په پلي کولو سره معلومېدی شي کله چې بلاک په بې ځایه شوي موقعیت x کې وي. د آزاد جسم ډیاګرام په انځور 22-1b کې ښودل شوی دی. د ایلستیک بیرته راګرځېدو قوه $F = kx$ تل د توازن د موقعیت په لور جهت لري، په داسې حال کې چې تعجیل $\boldsymbol{a}$ فرض کیږي چې د مثبت بې ځایه کېدو په لوري عمل کوي. څرنګه چې $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ ، مور لرو:

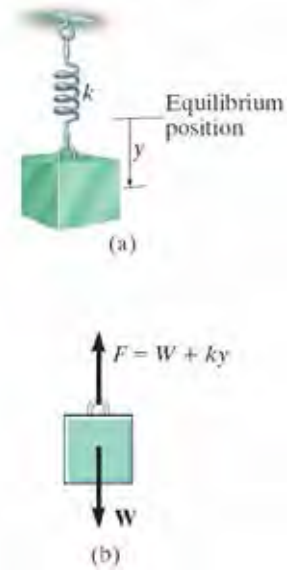
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx = m\ddot{x}$$

څرنګه چې تعجیل د بلاک د بې ځایه کېدو سره متناسب دی، حرکت ته ***ساده هارمونیک حرکت*** ویل کیږي. د حصو(terms) بیا تنظیمول په "معیاري بڼه" دا لاندی راکوي:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (22–1)$$

ثابتω_n ، عموماً په rad/s کې راپور ورکول کیږي، چې د ***طبیعي فریکونسي*** (*natural frequency*) په نوم یادیږي، او په دې حالت کې:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (22–2)$$



انځور 22-2

د 22-1 معادله همدارنګه کېدای شي د دې په پام کې نیولو سره لاسته راشي چې بلاک ځوړند دی، په داسې ډول چې بې ځایه کېدل y د بلاک د توازن له موقعیت څخه اندازه کیږي، انځور 22-2a . کله چې بلاک په توازن کې وي، پنرپورته خوا ته $F = W = mg$ قوه په بلاک باندې پلیی کوی. نو ځکه، کله چې بلاک له دې موقعیت څخه y واټن کښته خوا ته بې ځایه کیږي، د پنر د قوې اندازه $F = W + ky$ ده، انځور22-2b . د حرکت د معادلې په پلي کولو سره په لاس راځی:

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y: \qquad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

یا

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

چې دا د معادلې 22-1 سره ورته بڼه لري او w_n د معادلې 22-2 له خوا تعریف شوی دی.

معادله 22-1 یوه متجانسه، دوهم-درجه، خطي تفاضلي معادله ده چې ثابت ضربونه لري. دا ښودل کېدای شي چې عمومي حل یې دا دی:

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \qquad (22–3)$$

چېرې چې A او B د انټیګریشن دوه ثابته ښیي. د بلاک سرعت او تعجیل د وخت نسبت په پرله پسې مشتقاتونیولوسره معلومیږي، چې دا ورکوي:

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t \qquad (22–4)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \sin \omega_n t - B\omega_n^2 \cos \omega_n t \qquad (22–5)$$

کله چې معادلې 22-3 او 22-5 په معادله 22-1 کې ځای پر ځای شي، تفاضلي معادله به پوره شي، دا ښيي چې معادله 22-3 په حقيقت کې د معادلې 22-1 حل دی.

د انټيګريشن ثابتونه په معادله 22-3 کې عموماً د پوښتنې د لومړنيو شرايطو څخه معلوميږي. د مثال په توګه، فرض کړئ چې په انځور 22-1a کې بلاک د خپل توازن موقعيت څخه ښي خوا ته په x_1 واټن سره بې ځايه شوی دی او لومړنی (مثبت) سرعت $\mathbf{v}_1$ ورکړل شوی دی چې ښي خوا ته جهت لري. که چيرې په معادله 22-3 کې $x = x_1$ سره بدل کړو کله چې $t = 0$ وي، نو $B = x_1$ لاسته راځي. او څرنګه چې $v = v_1$ کله چې $t = 0$ وي، د معادلې 22-4 په کارولو سره مونږ $A = v_1/\omega_n$ ترلاسه کوو. که چېرې دا قيمتونه په معادله 22-3 کې ځای پر ځای شي، د حرکت ښودونکيی معادله دا کيږي:

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \qquad (22–6)$$

معادله 22-3 کښودای شي د ساده سينوسيډل (sinusoidal) حرکت په توګه هم بيان شي. د دې ښودلو لپاره، اجازه راکړئ:

$$A = C \cos \phi \qquad (22–7)$$

او

$$B = C \sin \phi \qquad (22–8)$$

چېرې چې C او f نوي ثابتونه دي چې د A او B پر ځای معلوميږي. په معادله 22-3 کې ځای پر ځای کول دا ورکوي:

$$x = C \cos f \sin \omega_n t + C \sin f \cos \omega_n t$$

او څرنګه چې $\sin(q + f) = \sin q \cos f + \cos q \sin f$ ، نو:

$$x = C \sin(\omega_n t + \phi) \qquad (22–9)$$

که چېرې دا معادله د x په مقابل د $\omega_n t$ محور باندې رسم شي، په انځور 22-3 کې ښودل شوی ګراف ترلاسه کيږي. د بلاک اعظمي بې ځايه کښدل د خپل د توازن موقعيت د لړزيدا **امپليتود** (amplitude)دی. د انځور يا معادلې 22-9 له مخې، امپليتود C دی. زاويه f د **فاز زاويه** (phase angle) بلل کيږي ځکه چې دا هغه اندازه ښيي چې کربنه د مبدی څخه بې ځايه شوې ده کله چې $t = 0$ وي. مونږ کولی شو دغه دوو ثابتو A او B ته د معادلو 22-7 او 22-8 په کارولو سره اړيکه ورکړو. د دغو معادلو مربع کولو او يوځای کولو سره، امپليتود داسې کيږي:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (22–10)$$

که معادله 22-8 په معادله 22-7 باندې ووېشل شي، نو د فاز زاويه بيا دا کېږي:

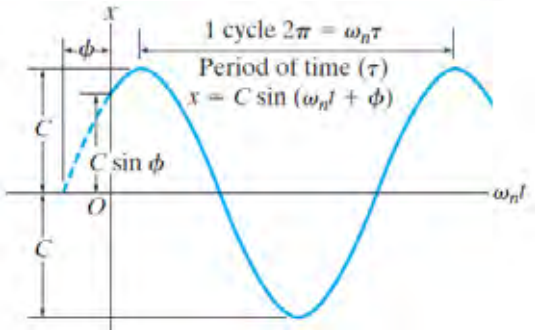
$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A} \qquad (22–11)$$

په ياد ولرئ چې د ساين کربنه، معادله 22-9، په وخت $t = t$ (tau) کې يو دوره بشپړوي کله چې $\omega_n t = 2\pi$ ، يا:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad (22–12)$$

دا د وخت واټن، د **دوران موده** (period) بلل کېږي، انځور 22-3. د معادلې 22-2 په کارولو سره، د دوران موده کېداى شي داسې وښودل شي:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (22–13)$$



انځور 22-3

په پاى کې، **فريکونسى** (f (frequency د هغو دورانونو شمېر په توګه تعريف کېږي چې د وخت په واحد کې بشپړ شوي دي، چې د دوران دمودې معکوس دى؛ يعني:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad (22–14)$$

يا

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (22–15)$$

د فريکونسۍ لپاره واحد **هرټز** (Hz) دى، چېرې چې 1 Hz = cycle/s=2p rad/s .

کله چې يو جسم يا د ټرلو جسمونو سيستم له خپل توازن موقعيت څخه لومړنى بې ځايه کېدل ترلاسه کړي او خوشې شي، نو دا به د **طبيعي فريکونسى** ω_n سره ولړزيږى. که چېرې سيستم يوازې يو درجه آزادي ولري، يعني دا يوازې يو کوارډينيټ ته اړتيا لري چې په هر وخت کې د سيستم موقعيت په بشپړ ډول مشخص کړي، نو د لړزيدا حرکت به د بلاک او پنر ماډل د ساده

هارمونیک حرکت په څېر ځانګړتیاوې ولري. په پایله کې، حرکت د همغه "معیاري بڼې" تفاضلي معادلې په واسطه تشریح کېږي لکه معادله 22-1، یعنې:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (22–16)$$

نو ځکه، که طبیعي فریکونسي ω_n معلومه وي، د لړزیدا موده t ، فریکونسي f ، او د لړزیدا نورې ځانګړتیاوې د 22-3 څخه تر 22-15 معادلو پورې په کارولو سره ټاکل کېدای شي.

مهم ټکی

IMPORTANT POINTS

آزاد ارتعاش په اړه مهم ټکي:

- آزاد لړزیدل هغه وخت پېښېږي کله چې حرکت د جاذبې یا ایلستیکي بیرته راګرځېدو قوو په واسطه ساتل کېږي.
- امپلیتود د جسم اعظمی بې ځایه کېدل دی.
- موده (period) هغه وخت دی چې د یوه دوران بشپړولو لپاره اړتیا وي.
- فریکونسي د وخت په واحد کې د بشپړ شویو دورانونو شمېر دی، چېرې چې 1 Hz= 1 cycle/s .
- یوازې د یوه موقعیت کوارډینیټ ته اړتیا ده چې د یوې درجې آزاد سیستم موقعیت تشریح کړي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د بلاک او پنر په حالت کې، د یوې درجې آزادۍ لرونکي جسم یا د ټرلیو جسمونو سیستم لپاره، طبیعي فریکونسي ω_n د لاندې طریقې په کارولو سره معلومولی شو.

د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram).

- د جسم آزاد جسم ډیاګرام رسم کړئ کله چې جسم د خپل توازن موقعیت څخه*لږ څه* بې ځایه شوی وي.

. د جسم موقعیت د خپل توازن موقعیت په پرتله د مناسب موقعیت کوارډینیټ q په کارولو سره وټاکئ. د جسم د کتلې مرکز تعجیل $\mathbf{a}_G$ یا د جسم زاویه یي تعجیل $\boldsymbol{\alpha}$ باید داسې فرض شي چې لوری یې د موقعیت کوارډینیټ په مثبت لوري کې وي.

. که چېرې د تاویدو د حرکت معادله $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ وکارول شي، نو د کنټیک ډیاګرام رسمول په پام کې ونیسئ ځکه چې دا په ګرافیکي توګه د $m(\mathbf{a}_G)_x$ ، $m(\mathbf{a}_G)_y$، او $I_G\boldsymbol{\alpha}$ اجزاوې توضیح کوي، او په دې توګه اسانه لیدلی شو چې کوم ترمونه د مومنټ مجموعې $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$کې د اړتیا وړ شرایطو پوره کوی.

د حرکت معادله (Equation of Motion).

. د حرکت معادله وکاروئ چې د ایلستیکي یا جاذبوي بیرته راګرځېدو قواوې او کپل مومنټونه چې په جسم باندې عمل کوي د جسم د تعجیلي حرکت سره اړیکه ورکړي.

کینمتیک (Kinematics).

. د حرکت پېژندنې په کارولو سره، د جسم تعجیلي حرکت د موقعیت کوارډینیټ د دویم مشتق د وخت په ټرلو په $\ddot{q}$ بڼه وښیی.

. پایله د حرکت په معادله کې ځای پر ځای کړئ او w_n معلوم کړئ د ټرمو په داسې بیا ترتیبولو سره چې پایله یې معادله په "معیاري بڼه" کې وي، $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

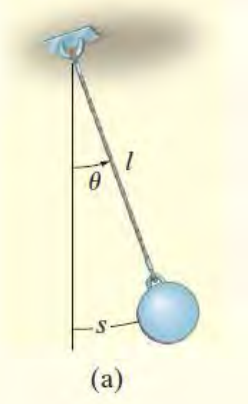
مثالونه

مثال 22.1

د ساده پندولم د خوځښت موده معلومه کړئ چې په انځور 22-4a کې ښودل شوی دی. باب (توپ) د m کتله لري او د l اوږدوالي په تار پورې تړل شوی دی. د توپ اندازه په پام کې مه نیسئ.

حل

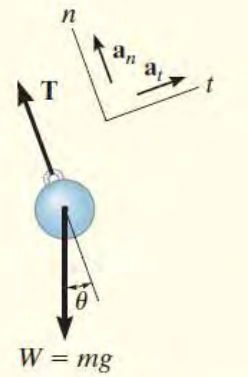
د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram). د سیستم حرکت د موقعیت په کوردینات q ($q = q$)کې ښودل شوی، انځور 22-4b . کله چې پندولم په کوچني زاویه q بې ځایه شي، بیرته راګرځیدونکی قوه چې پر پندولم باندې عمل کوي د تول د مماسي جز له املې رامنځته کیږي، $mg \sin q$. موږ فرض کوو چې $\mathbf{a}_t$ دا د s یا (q) په *زیاتیدونکي* لوري عمل کوي.



(a)

د حرکت معادله (Equation of Motion). د حرکت معادله په *مماسي لوري* کې تطبیقوو، ځکه چې دا د بیرته راګرځیدونکی قوې سره تړاو لري، داسې حاصلیږي:

$$+\nearrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad -mg \sin \theta = ma_t \qquad (1)$$



(b)

انځور 22-4

کینمتیک (Kinematics). $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$. همدارنګه، s د q سره د معادلې $s = l\,q$ په واسطه تړاو لرلی شي، نو $a_t = l\ddot{q}$. له دې امله، معادله 1 داسې کیږي،

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

د دې معادلې حل یو بیضوي انټیګرال پورې اړه لري; له هغه ځایه چې د کوچنیو بې ځایه کیدو لپاره، $\sin q \approx q$، نو

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (3)$$

د ا معادله د معادله 22-16 ($\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$) سره پرتله کول، لیدل کیږي چې $\omega_n = \sqrt{(g/l)}$. د معادله 12-22 څخه، هغه موده چې د پندولم د بشپړ یو ځل ټال لپاره اړتیا ده

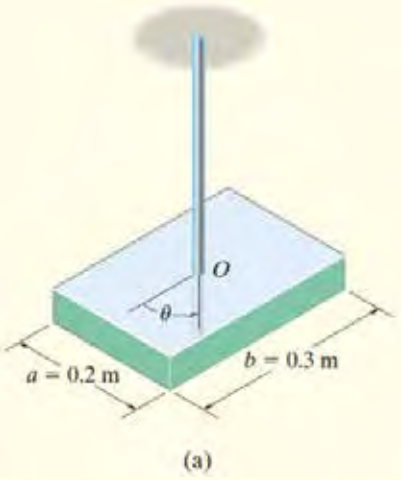
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \textit{Ans.}$$

دا په زړه پوري پايله، چې اصلاً د ګالیلیو ګالیلي لخوا د تجربې له لارې کشف شوې، ښيي چې موده يوازې د رسۍ په اوږدوالي پورې اړه لري او د پندولم د باب (توپ) په کتله يا د q په زاويه پورې اړه نلري.

يادونه: د معادله 3 حل د معادله 22-3 لخوا ورکړل شوی، چیرې چې $\omega_n = \sqrt{(g/l)}$ او q د x پر ځای، پرځای شوی. د بلاک او پنر په ځیر، په دې مسئله کې ثابتونه A او B کیدای شي تعیین شي که، د مثال په توګه، یو په یوه ټاکلي شیبه کې د باب بې ځایه کیدل او سرعت وپیژني.

مثال 22.2

د 10 کیلوګرامه مستطیلي تخته چې په انځور 22-5a کې ښودل شوې، د خپل مرکز څخه په یوه میله ځوړنده ده چې د تورژن کلکوالی یې $k = 1.5\ \text{N·m/rad}$ دی. د تختې د طبیعي خوځښت موده معلومه کړئ کله چې دا په خپله سطحه کې یو کوچنی زاویوي بې ځایه کیدنه q ته ورکړل شي.

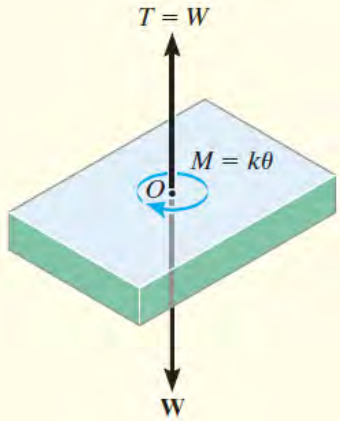


(a)

حل

د جسم ازاد ډیاګرام (Free-Body Diagram). انځور 22-5b څرنګه چې تخته په خپله سطحه کې بې ځایه شوې، د میلې لخوا رامنځته شوی د تورژن بیرته راګرځیدونکی مؤمنت $M = k\theta$ دی. دا مؤمنت د زاویوي بې ځایه کیدنې θ مخالف لوري کې عمل کوي. زاویوي تعجیل $\ddot{\theta}$ د مثبت θ په لوري کې عمل کوي.

د حرکت معادله (Equation of Motion).



(b)

انځور 22-5

$$\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -k\theta = I_O\ddot{\theta}$$

يا

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_O}\theta = 0$$

څرنګه چې دا معادله په "معیاري بڼه" کې ده، طبیعي فریکونسي دا ده :

$$\omega_n = \sqrt{k/I_O}$$

د شاته پوښ د داخل جدول څخه، د تختې د انرشیایی مؤمنت د میلې سره یوځای محور په اړه $I_O = (\frac{1}{12})m(a^2 + b^2)$ دی. نو

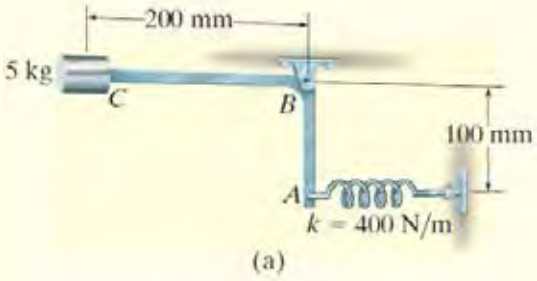
$$I_O = \frac{1}{12}(10\text{ kg})\left[(0.2\text{ m})^2 + (0.3\text{ m})^2\right] = 0.1083\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

او نو د خوځښت طبيعي موده دا ده :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1083}{1.5}} = 1.69\text{ s} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 22.3

په انځور 22-6a کې ښودل شوې کړه ميله د پام وړ کتله نلري او په خپل پای کې يو 5 کيلوګرامه کالر ساتي. که ميله په ښودل شوي د توازن حالت کې وي، د سيستم د خوځښت طبيعي موده معلومه کړئ .

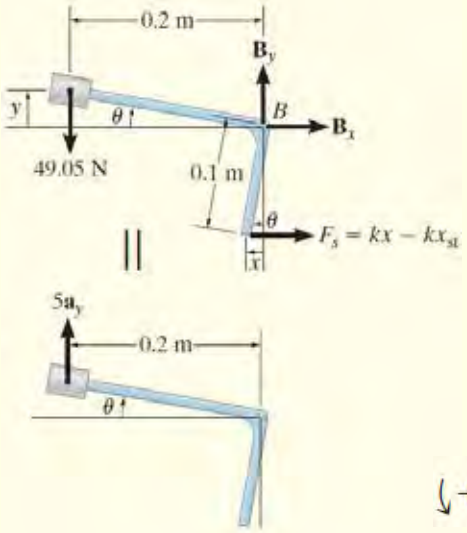


(a)

حل

د جسم ازاد او کينيتيک ډياګرامونه Free-Body and (Kinetic Diagrams)

انځور 22-6b. دلته ميله د توازن له حالت څخه په يوه کوچني زاويه θ بې ځايه شوې ده .څرنګه چې پنر د توازن لپاره د x_{st} لومړني غونجيدولاندې دی، نو کله چې بې ځايه کيدنه $x > x_{st}$ وي، پنرپه ميله باندې د $F_s = kx - kx_{st}$ قوه پلیی کوی. د "معياري بڼې"، معادله 22-16 د ترلاسه کولو لپاره، 5 $\mathbf{a}_y$ بايد پورته خوا ته عمل وکړي، چې د مثبت θ بې ځايه کيدنې سره سمون لري .



(b)

د حرکت معادله (Equation of Motion).

مؤمنتونه به د Bنقطې ته ونيولشی ترڅو د $\mathbf{B}_x$ او $\mathbf{B}_y$ غبرګونونه له منځه يوسي. څرنګه چې θ کوچنی ده،

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$$

$$kx(0.1\text{ m}) - kx_{st}(0.1\text{ m}) + 49.05\text{ N}(0.2\text{ m}) = -(5\text{ kg})a_y(0.2\text{ m})$$

انځور 22-6

په کين اړخ کې دويم غړی، $-kx_{st}(0.1\text{ m})$-، د سپرنګ قوې په واسطه جوړ شوی مؤمنت ښيي چې د کالر د توازن ساتلو لپاره اړين دی، يعنې په $x = 0$ کې. څرنګه چې دا مؤمنت د کالر د وزن په واسطه جوړ شوي چې د مؤمنت$49.05\text{ N}(0.2\text{ m})$ سره برابر او مخالف دی، نو دا دوه ترمونه يو بل حذف کوي، او نو

$$kx(0.1) = -5a_y(0.2) \qquad (1)$$

کینمتیکس (Kinematics). د پنر تغییر شکل او د کالر موقعیت د زاویې θ سره تړاو لرلی شي، انځور 22-6c . څرنګه چې θ کوچنی ده، $x = (0.1\text{ m})\theta$ او $y = (0.2\text{ m})\theta$. نو، $a_y = \ddot{y} = 0.2\ddot{\theta}$. په معادله 1 کې ځای پر ځای کوو:او په لاس راځي

$$400(0.1\theta)0.1 = -5(0.2\ddot{q})0.2$$

د دې معادلې په "معیاري بڼه" بیا لیکل راکوي

$$\ddot{q} + 20\theta = 0$$

د $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (معادله 22-16) سره پرتله کوو مونږ لرو:

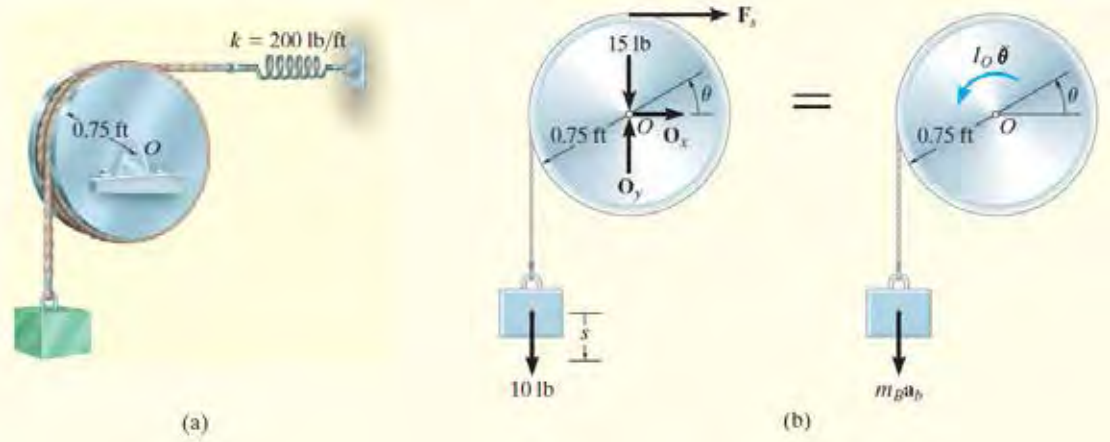
$$\omega_n^2 = 20 \quad \omega_n = 4.47\text{ rad/s}$$

نو د لړزښت طبیعي موده دا ده :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4.47} = 1.40\text{ s} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 22.4

یو 10 پونډه بلاک د یوې رسۍ په واسطه ځوړند دی چې د یو lb15 ډیسک له پاسه تیریږي، لکه څنګه چې په 22-7a کې ښودل شوی دی. پنر د $k = 200\text{ lb/ft}$ کلکوالی لري. د سیستم د لړزښت طبیعي موده معلومه کړئ.



د جسم ازاد او کینیټیک ډیاګرامونه(Free-Body and Kinetic Diagrams) انځور22-7b . سیستم د ډیسک څخه جوړ شوی، چې تاویږی او د زاویې θ او بلاک په واسطه تعریف شوی،

چې د s په اندازه حرکت کوي. وکټور $I_O\,\ddot{q}$ د مثبت θ په لوري عمل کوي، او په پایله کې $m_B a_b$ د مثبت s په لوري بښکته خوا ته عمل کوي.

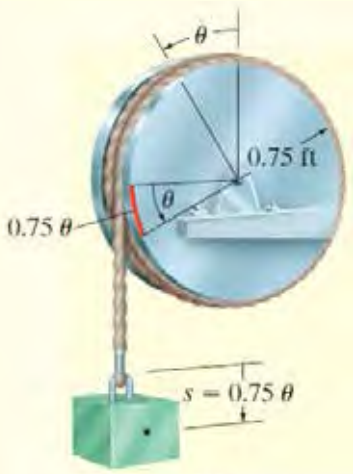
د حرکت معادله (Equation of Motion). د O نقطې په اړه مؤمنت نیسو تر څو چې د O_x او O_y غبرګونونو له منځه ولاړ شی، په پام کې ولرئ چې $I_O = \frac{1}{2}mr^2$ ، لاسته راوړو

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma (\mathcal{M}_k)_O;$$

$$10\ \text{lb}(0.75\ \text{ft}) - F_s(0.75\ \text{ft}) = \frac{1}{2}\left(\frac{15\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(0.75\ \text{ft})^2\,\ddot{\theta} + \left(\frac{10\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)a_b(0.75\ \text{ft}) \qquad (1)$$

کینمتیکس (Kinematics). لکه څنګه چې په انځور 22-7c کې په کینماتیک ډایاګرام کې بښودل شوي، د ډیسک یو کوچنی مثبت بې ځایه کیدنه θ د بلاک د $s = 0.75\theta$ په اندازه بښکته کیدو لامل کیږي؛ نو، $a_B = \ddot{s} = 0.75\,\ddot{q}$.

کله چې $\theta = 0°$ ، د ډیسک د توازن لپاره اړینه ده چې د پنر قوه 10 lb وی، چې بښي خوا ته عمل کوي .د θ موقعیت لپاره، د پنر قوه $F_s = (200\ \text{lb/ft})(0.75\theta\ \text{ft}) + 10\ \text{lb}$ ده.



(c)

انځور 22-7

دا پایلې په معادله 1 کې ځای پر ځای کول او ساده کول، راکوی :

$$\ddot{\theta} + 368\theta = 0$$

نو،

$$\omega_n^2 = 368 \qquad \omega_n = 19.18\ \text{rad/s}$$

نو، د لړزیدا طبیعي موده ده :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.18} = 0.328\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

PROBLEMS

22-1 . یو فنر د 8-kg بلاک په واسطه 175 mmکش شوی دی. که بلاک د خپل توازن له موقعیت څخه 100 mmښکته خواته بې ځایه شي او په ښکته لور 1.5 m/s سرعت ورکړل شي، د حرکت بیانوونکي تفاضلي معادله معلومه کړئ. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه ښکته خوا ته ده. همدارنګه، د بلاک موقعیت هغه وخت معلوم کړئ کله چې $t = 0.22$ s وي.

22-2 . یو فنر 800N/m کلکوالي لري. که یو 2-kg بلاک د فنر سره وټرل شي، د خپل توازن له موقعیت څخه 50 mm پورته خوا ته ټیله شوی، او له دریدلی حالت څخه خوشې شوی، د بلاک د حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه ښکته خوا ته ده.

22-3 .یو فنر د 15-kgبلاک په واسطه 200 mm غزیدلی دی. که بلاک د خپل توازن له موقعیت څخه 100 mmښکته خواته بې ځایه شي او 0.75 m/s سرعت ښکته خواته ورکړل شوي، د حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ. د فاز زاویه څه ده؟ فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه ښکته خوا ته ده.

***22-4 .**کله چې یو 20-lb تول د فنر څخه ځوړند وي، فنر 4 in غزیدلی دی. د همدې فنر سره ټرل شوي 10-lbتول لپاره د لړزیدا طبیعي فریکونسي اوموده معلومه کړئ.

22-5 .کله چې یو 3-kgبلاک د فنر څخه ځوړند وي، فنر 60 mm غزیدلی دی. که د همدې فنر سره د 3-kg بلاک پر ځای د 0.2-kg بلاک ټرل شوی وی د لړزیدا طبیعي فریکونسي او موده یې معلومه کړئ.

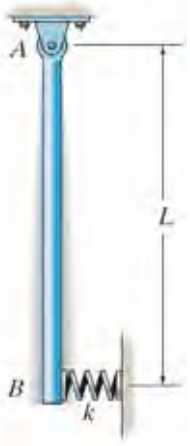
22-6 .یو 8-kg بلاک د $k = 80$ N/m کلکوالي لرونکي فنر څخه ځوړند دی. که بلاک ته کله چې دتوازن له موقعیت څخه 90 mm پورته حالت کې وی 0.4 m/s پورته خوا ته سرعت ورکړل شي، د حرکت بیانوونکي معادله او د توازن له موقعیت څخه د بلاک اعظمی پورته خوا ته بې ځایه کیدنه معلومه کړئ. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه ښکته خوا ته ده.

22-7 .یو 2-lb تول د k = 2 lb/in کلکوالي لرونکي فنر څخه ځوړند دی. که تول د خپل توازن له موقعیت څخه 1 in پورته خوا ته ټیله شي او بیا له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ. د لړزیدا امپلیټیوډ او طبیعي فریکونسي څه ده؟ فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه ښکته خوا ته ده.

22-8* .یو پیندولم د 0.4-m اوږد تناب لري او له $\theta = 0.3$ rad موقعیت څخه د عمودي لوري په طرف 0.2 m/s مماسي سرعت ورکړل شوی دی. د زاویوي حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ.

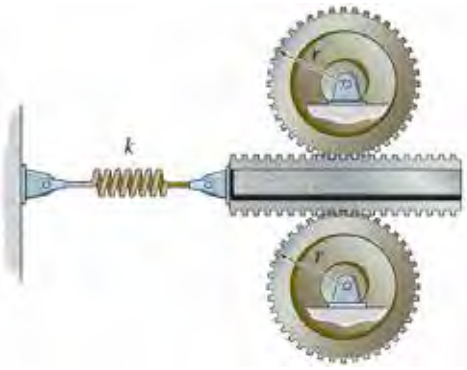
22-9 . یو 3-kg بلاک د $k = 200$ N/m کلکوالي لرونکي فنر څخه ځوړند دی. که بلاک د خپل توازن له موقعیت څخه 50 mm پورته خوا ته ټیله شي او بیا له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ. د لړزیدا امپلیټیوډ او طبیعي فریکونسي څه ده؟ فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدنه بنکته خوا ته ده.

22-10 . یو شان میله چې کتله یې m ده د A په ټکی کې د پین په واسطه او د B په ټکي کې د فنر په واسطه ملاتړ شوې ده. که B ته یو کوچنی اړخیزه بې ځایه کیدنه ورکړل شي او خوشې شي، د لړزیدا طبیعي موده معلومه کړئ.



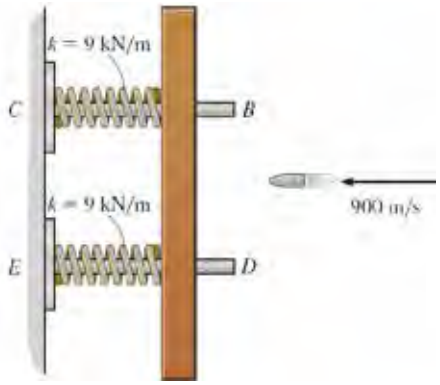
پ 22-10

22-11 .دوه یو شان ګیرونه چې دهر یوه کتله m او د خپلو کتلو مرکزو ته یې د gyration شعاع k_0 ده. دوی د ګیر رک سره چې کتله یې M او د فنر سره چې کلکوالی یې k دی، ټرل شوی دی. که ګیر رک په لږه اندازه په افقي توګه بې ځایه شي، د نوسان طبیعي موده معلومه کړئ.



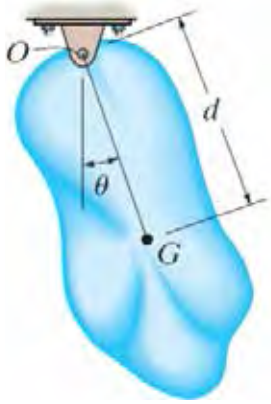
پ 22-11

22-12* . د 3-kg هدف په بنويو افقي لاربنوونکو *BC* او *DE* باندې په آزادۍ سره بنويږي، چې دا په فنرونو کې "ځای پر ځای" دي چې هر يو يې $k = 9$ kN/m کلکوالی لري. که يوه 60-g ګولی مرمۍ 900 m/s سرعت سره ويشتل شي او په هدف کې ځای پر ځای شي، د هدف د نوسان امپليټيوډ او فريکونسي معلومه کړئ.



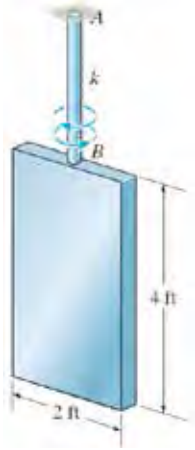
پ 22-12

22-13 . د يوه ناڅاکلي شکل جسم کتله m ، د کتلې مرکز په G کې، او G ته د gyration شعاع k_G لري. که دا د خپل توازن له موقعيت څخه په کوچنۍ اندازه θ بې ځايه شي او خوشې شي، د لړزيدا طبيعي موده معلومه کړئ.



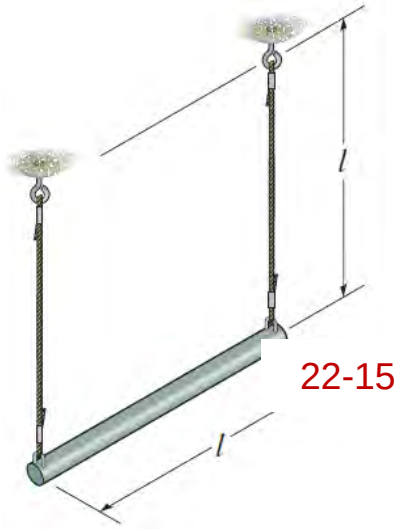
پ 22-13

22-14 . د 20-lb مستطيل تخته د ميلې AB په محور شاوخوا څرخيدو سره د لړزيدا طبيعي موده لري. د ميلې د تاويدو کلکوالی *k* ، چې په lb·ft/rad کې اندازه کيږي، معلوم کړئ. د ميلې کتله له پامه وغورځوئ.



پ 22-14

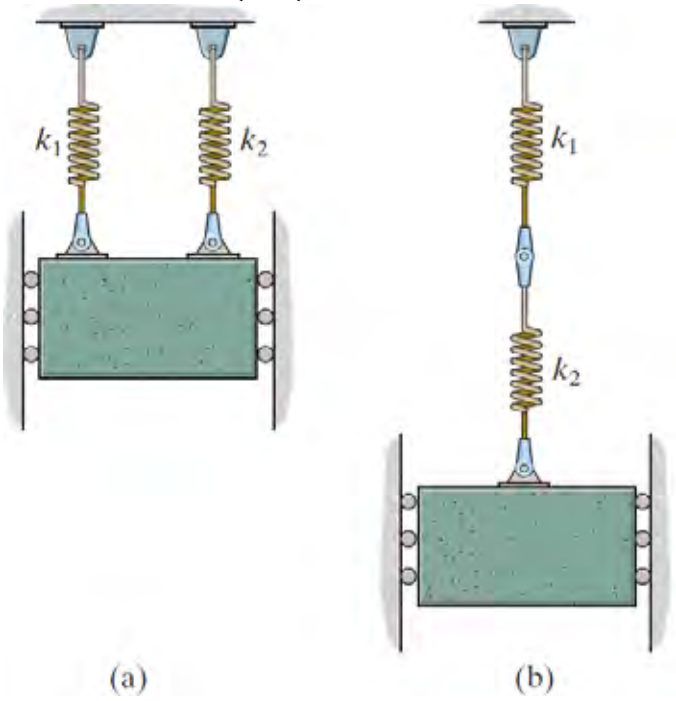
22-15 . د کتلې m لرونکې میله د دوو تناونو په واسطه ملاتړ شوې ده، چې هر یو یې l اوږدوالی لري. که میلې ته د خپل عمودي محور په شاوخوا کې چې له مرکز څخه یې تیریږي، کوچنۍ څرخیدنه ورکړل شي او خوشې شي، د نوسان موده معلومه کړئ.



پ 22-15

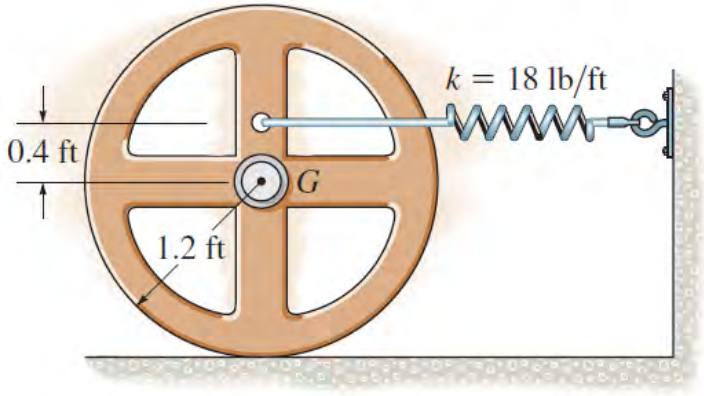
22-16* . د کتلې m لرونکې بلاک د کلکوالي k_1 او k_2 لرونکو دوو فنرونو څخه ځوړند دی، چې (a) یو بل سره موازي، او (b) په لړۍ ډول(یو په بل پسې) تنظیم شوي دي. د یو واحد فنر معادل کلکوالی چې د ورته نوسان ځانګړتیاوې لري او د هر حالت لپاره د نوسان موده معلومه کړئ.

22-17 . د 15-kgبلاک د مختلف کلکوالي لرونکو دوو فنرونه څخه ځوړند دی چې (a) دیو بل سره موازي، او (b) په لړۍ ډول تنظیم شوي دي. که د موازي سیستم او لړۍ سیستم د نوسان طبیعي موده په ترتیب سره 0.5 s او 1.5 sکتل شوي وي، د فنرونو کلکوالي k_1 او k_2 معلوم کړئ.



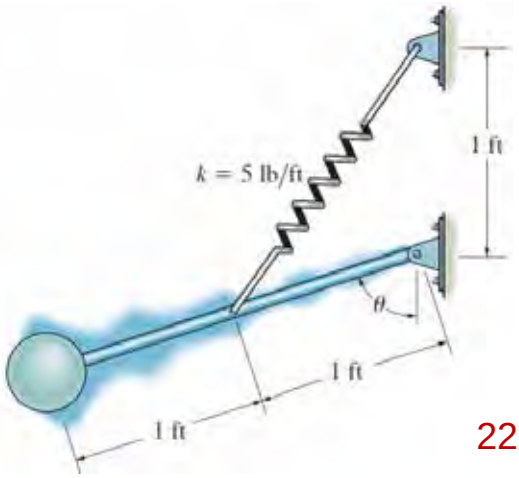
پ 22-16/17

22-18. د 50-lb څرخ د خپل کتلې مرکز G ته د جايريشن شعاع $k_G = 0.7$ ft لري. که دا د توازن له موقعيت څخه په لږه اندازه بې ځايه شي او خوشې شي، د لړزيدا فريکونسي معلومه کړئ. فرض کړئ چې ښويیدنه نشته.



پ 22-18

22-19. د 10-lb کرۍ لپاره د کوچنيو نوسانونو طبيعي فريکونسي معلوم کړئ کله چې ميله په لږه اندازه بې ځايه شي او خوشې شي. د کرۍ اندازه او د ميلې کتله له پامه وغورځوئ. فنرله کشکيدو پرته 1ft نا اوږدوالی لري.



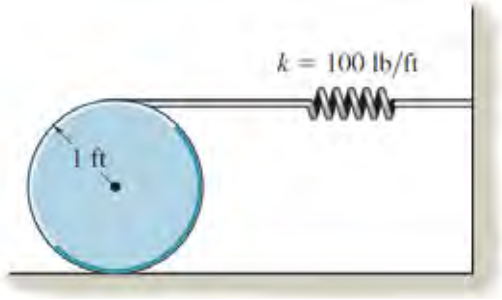
پ 22-19

22-20*. يوه يو شان تخته په دوو ټيرو تکيه شوې ده چې په مخالفو لوريو کې په ثابته زاويوي تيزوالی څرخيږي. که د څرخونو او تختې ترمنځ د حرکتي اصطکاک ضريب μ وي، د تختې د لړزيدا فريکونسي معلوم کړئ که دا په لږه اندازه، د x واټن د ټيرونوترمنځ له منځني ټکي څخه بې ځايه شي، او خوشې شي*.



پ 22-20

22-21 . ډیسک 10 lb وزن لري او په افقي سطحه باندې بیله ښویدو رغړی کله چې د خپل توازن موقعیت په شاوخوا کې نوسان کوی. که ډیسک د خپل د ساعت عقربې په مخالف لوري 0.4 rad رغړیدا سره بې ځایه شي، د هغې د نوساني حرکت بیانوونکي معادله معلومه کړئ کله چې دا خوشې شي. په پیل کې، ډیسک په دریدلی حالت کې دی.



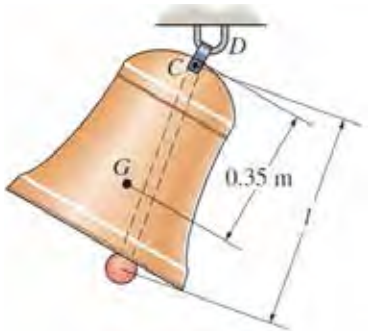
پ 22-21

22-22 . یوه پلیټ فارم، چې ناټاکلې کتله لري، د څلورو فنرونو په واسطه ملاتړ کیږي، چې هر یو یې ورته کلکوالی *k* لري. کله چې په پلیټ فارم باندې هیڅ نه وي، د عمودي لړزیدا موده 2.35 s اندازه شوی ده؛ په داسې حال کې چې که یو 3-kg بلاک په پلیټ فارم باندې کیښودل شی، د عمودي لړزیدا موده 5.23 s ده. د هغه بلاک کتله معلومه کړئ چې په (تش) پلیټ فارم باندې ایښودل کیږي او د پلیټ فارم د 5.62 s موده سره عمودي لړزیدا لامل کیږي. د هر فنر کلکوالی k څومره دی؟



پ 22-22

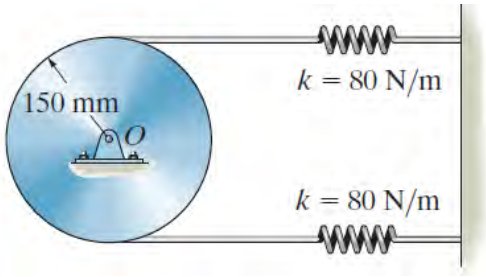
22-23 . زنګ 375 kg کتله، د کتلې مرکز په *G* کې، او د *D* ټکي ته دجایریشن شعاع k_D = 0.4 m لري. ژبه د یوې نرۍ میلې څخه جوړه شوې ده چې د زنګ په داخل کې په *C* کې نښلول شوې ده. که د میلې په پای کې یوه 8-kg کتله وتړل شي، د میلې اوږدوالی *l* چې د زنګ "د غږ دریدلو" لامل کیږي، یعنې د ژبې د لړزیدا طبیعي موده د زنګ د لړزیدا سره یو شان وي، معلوم کړئ. د محاسبې لپاره، د *C* او *D* ترمنځ کوچنی واټن او د میلې کتله له پامه وغورځوئ.



پ 22-23

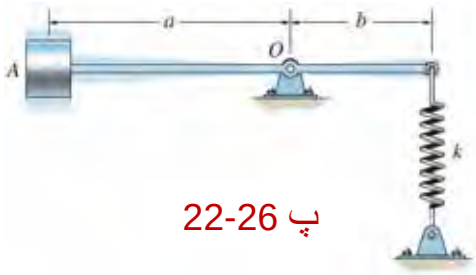
22-24*. د 10-kg ډیسک کتلې په مرکز کې د پین په واسطه نښلول شوی دی. د ډیسک د لړزیدا طبیعي موده معلومه کړئ که فنرونو کې د نوسان په وخت کې کافی کشش ولری چی تناب به ډیسک باندې ونه ښویږی. لارښوونه: فرض کړئ چې په هر فنر کې لومړنی کشش d_0 دی .

22-25. که په 22-24 پوښتنه کې فنرونه په اصل کې نا کش شوي وي، د لړزیدا فریکونسي معلومه کړئ.



پ 22-24/25

22-26 . بلاک کتله m لري او د ناځیزې کتلې لرونکې کلکې میلې په واسطه ملاتړ کیږي. که فنز k کلکوالي ولري، د بلاک لپاره د لړزیدا طبیعي موده معلومه کړئ.



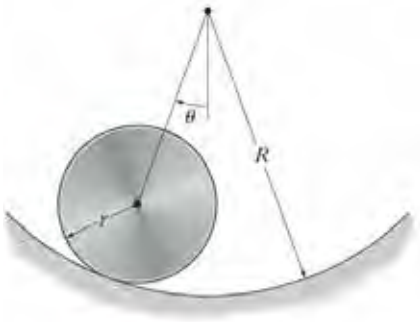
پ 22-26

22-27. د بلاک لپاره د لړزیدا فریکونسي معلومه کړئ. فنرونه په اصل کې Δ اندازه غونج شوي دي.



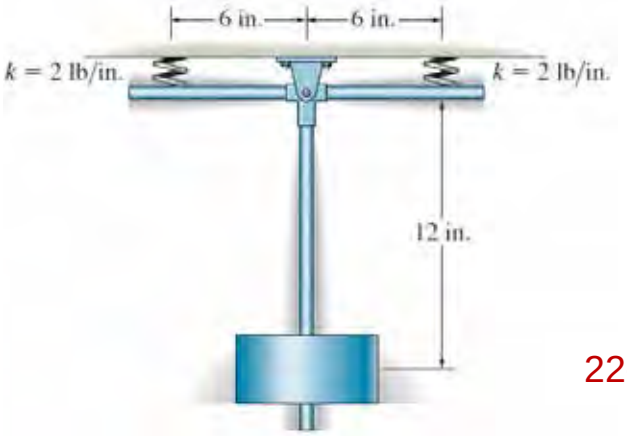
پ 22-27

22-28*. د شعاع r او کتلې m لرونکی سلنډر په منحني سطحه کې په کوچنۍ اندازه بې ځایه شوی دی. که دا پرته له ښویدو ورغړی، کله چې خوشې شي، د نوسان فریکونسي معلومه کړئ*.



پ 22-28

22-29 . یو 25-lb تول د میلې د ترکیب په پای کې نښلول شوی دی. که دواړه فنرونه په ښودل شوي موقعیت کې نا کش شوي وي، د تول لپاره د لړزیدا طبیعي موده معلومه کړئ کله چې دا په لږه اندازه بې ځایه شي او خوشې شي. د بلاک اندازه او د میلو کتله له پامه وغورځوئ.



پ 22-29

*22.2 د انرژۍ طریقې (ENDERGY METHODS)

د یو جسم ساده هارمونیکي حرکت، چې په تیرو برخوکې بحث شو، یوازې د جاذبې او ارتجاعي بیرته راګرځیدونکو قواوو له امله چې په جسم باندې عمل کوي، دی . څرنګه چې دا قواوې محافظوی دی، د جسم د طبیعي فریکونسۍ یا د لړزیدا مودی ترلاسه کولو لپاره د انرژۍ د ساتنې معادله هم کارول کیدای شي. د دې ښودلو لپاره چې دا څنګه کیږي، بیا هم په انځور 22-8 کې د بلاک او فنر موډل په پام کې ونیسئ. کله چې بلاک د توازن له موقعیت څخه په عمومي توګه په x موقعیت کې بې ځایه شوی وي، د کنټیک انرژي $T = (\frac{1}{2})mv^2 = ((\frac{1}{2}))m\dot{x}^2$ ده او د پوتینسیل انرژي $V = (\frac{1}{2})\,kx^2$ ده. څرنګه چې انرژي ساتل کیږي، نو اړینه ده چې:

$$T + V = \text{constant}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constant} \qquad (22\text{–}17)$$

د بلاک د متعجیل (accelerated) حرکت بیانکونکی معادله د دې معادلې د مشتق اخیستلو په واسطه وخت ته، ترلاسه کیدای شي؛ یعنې:

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

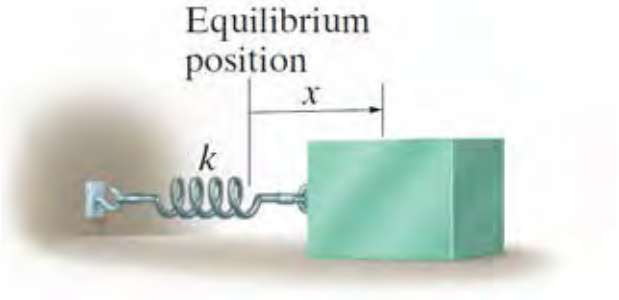
$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

څرنګه چې سرعت $\dot{x}$ په یو لړزیدونکي سیستم کې تل صفر نه وي، نو:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

چې دا د 22-1 معادلې په څير ده.

که د انرژۍ د ساتنې معادله د ټرلشويو جسمونو د سيستم لپاره وليکل شي، طبيعي فريکونسي يا د حرکت معادله هم د وخت په لحاظ د مشتق اخيستلو په واسطه معلوميدای شي. د جسمونو تر منځ عمل کوونکو داخلي قواووې د حساب کولو لپاره د سيستم جلا کولو لپاره اړين نه دي، ځکه چې دوی هيڅ کار نه ترسره کوي.



انځور 22-8



د اورګاډي د واګون څوړند سيستم د يو لړ فنرنو څخه جوړ شوی دی چې د واګون د فريم او د ګاډيو د ټرک ترمنځ نصب شوي دي. دا واګون ته د لړزيدو يوه طبيعي فريکونسي ورکوي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د یو جسم یا د ټرلشویو اجسامو د سیستم طبیعي فریکونسي (ω_n) د انرژۍ د ساتنې د معادلې په کارولو سره د لاندې کړنلارې په تطبیق سره معلومېدلای شي .

د انرژي معادله (Energy Equation).

- جسم هغه وخت رسم کړئ کله چې د خپل توازن له موقعیت څخه په یوه کوچني مقدار سره بې ځایه شوی وي او د جسم موقعیت د توازن له موقعیت څخه د یو مناسب موقعیت کوارډینیټ q په واسطه تعریف کړئ.

. د جسم لپاره د انرژۍ د ساتلو معادله، ثابت $= T + V$ ، د موقعیت کوارډینیټ له مخې جوړه کړی.

. په عمومي توګه، د کنټیک انرژي باید د جسم انتقالي او دوراني حرکتونه، دواړه په پام کې ونیسي، $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$، معادله 18-2 .

. پوتنشیل انرژي د جسم د جاذبوي او ارتجاعي پوتنشیل انرژیو مجموعه ده، $V = V_g + V_e$، معادله 18-17. په ځانګړې توګه، V_g باید د یو داسې مرجع څخه اندازه شي چې هلته $q = 0$ (د توازن موقعیت) وي .

د وخت مشتق (Time Derivative).

. د ځنځیرۍ قاعدې په کارولو سره د انرژۍ د معادلې د وخت مشتق واخلئ او ګډ عبارتونه فکتور کړئ. په لاس راغلیی دیفرنشل معادله د سیستم لپاره د حرکت معادلی استازیتوب کوي. طبیعي فریکونسي ω_n د عبارتونو د بیا ترتیبولو په "معیاري بڼه" کې لاسته راځي،

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0 \quad .$$

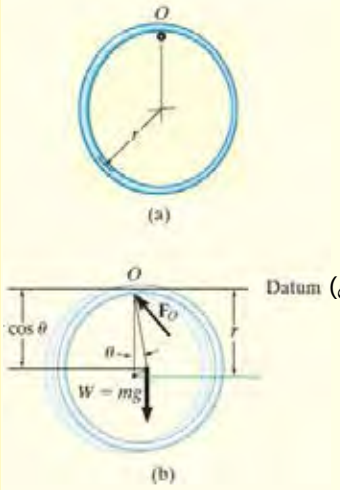
مثال 22.5

په شکل 22-9a کې ښودل شوی نری حلقه د O په ټکي کې د میخ په واسطه ځوړند شوی ده. د لرامپلیتود له کبله د نوسان طبیعي موده معلومه کړئ. حلقه m کتله لري.

حل

د انرژي معادله (Energy Equation).

کله چې حلقه د توازن له موقعیت څخه په یوه کوچني مقدار θ $(q =)$ بې ځایه شوی وي د حلقی یو ډیاګرام په انځور 22-9b کې ښودل شوی دی. د کتاب د شا پوښ په داخلي خوا له جدوله او د موازي محور قضیه په کارولو سره د I_O د معلومولو لپاره، کنټیک انرژي ده



انځور 22-9

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 = \tfrac{1}{2}[mr^2 + mr^2]\dot{\theta}^2 = mr^2\,\dot{\theta}^2$$

که د O ټکي یوه افقي مرجع وبلل شي، نو په بې ځایه شوي موقعیت کې، د پوتنشیل انرژي عبارت ده په:

$$V = -mg(r\cos\theta)$$

ټوله انرژي عبارت ده په $T + V = mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta$

د وخت مشتق (Time Derivative).

$$mr^2(2\dot{\theta})\ddot{\theta} + mgr(\sin\theta)\dot{\theta} = 0$$

$$mr\dot{\theta}(2r\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$$

څرنګه چې $\dot{\theta}$ تل د صفر سره مساوي نه ده، نو په قوسونو کې عبارتونه ورکوي:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\sin\theta = 0$$

د کوچني زاويې θ لپاره، $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\theta = 0$$

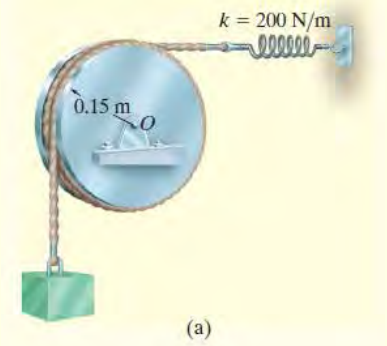
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

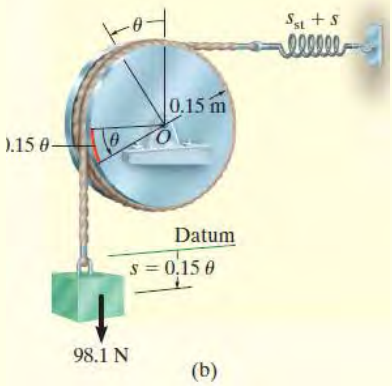
نو بيا

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 22.6

يوه 10 kg بلاک د يوه رسۍ څخه ځوړند شوی چې د 5 kg ډيسک نه تاو شوې ده، لکه چې په انځور 22-10a کې ښودل شوی. که چيرې فنر د $k = 200$ N/m سختوالي ولري، د سيستم طبيعي موده (natural period) معلومه کړئ.





انځور 22-10

حل

د انرژي معادله (Energy Equation).

يو ډياګرام چې بلاک او ډيسک د توازن له حالت څخه د s او q په اندازه بې ځايه شوي وي، په انځور 22-10b کې ښودل شوی دی. څرنګه چې

$$s = (0.15\text{ m})\theta, \text{then } v_b \approx \dot{s} = (0.15\text{ m})\dot{\theta}$$

نو د سيستم کينټيک انرژی دا ډول ده:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_b v_b^2 + \tfrac{1}{2}I_O\omega_d^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})[(0.15\text{ m})\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(5\text{ kg})(0.15\text{ m})^2\right](\dot{\theta})^2 \\ &= 0.1406(\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

دبلاکد توازن ځای د مرجع په توګه غوره کولو او پو هیږو چی فنر دتوازن لپاره د s_{st} په اندازه غوڑیدلی دی، نو پوتنشیلي انرژي(V) عبارت ده په

$$V = \tfrac{1}{2}k(s_{st} + s)^2 - Ws$$
$$= \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})[s_{st} + (0.15\ \text{m})\theta]^2 - 98.1\ \text{N}[(0.15\ \text{m})\theta]$$

نو د سیستم ټوله انرژي ده:

$$T + V = 0.1406(\dot{\theta})^2 + 100(s_{st} + 0.15\theta)^2 - 14.715\theta$$

د وخت مشتق (Time Derivative).

$$0.28125(\dot{\theta})\ddot{\theta} + 200(s_{st} + 0.15\theta)0.15\dot{\theta} - 14.72\dot{\theta} = 0$$

خرنګه چې $s_{st} = 98.1/200 = 0.4905$ m ، نو پورته معادله د "معیاري شکل" ته راځي

$$\ddot{\theta} + 16\theta = 0$$

نو بیا

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4\ \text{rad/s}$$

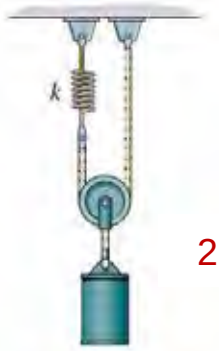
پدی توګه:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4} = 1.57\ \text{s} \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنې

PROBLEMS

22-30 . د m کتلې سلنډر د لړزيدا فريکونسي يې معلومه کړئ، کله چې هغه لږ څه کښته کش شي او خوشې شي. د کوچني څرخګی کتله له پامه وغورځوئ.



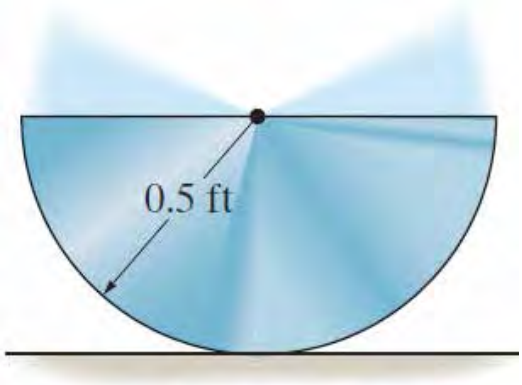
پ 22-30

22-31 . د m کتلې بلاک د حرکت ډيفرينشل معادله معلومه کړئ، کله چې هغه لږ بې ځايه شي او بيرته خوشې شي. حرکت په عمودي سطحه کې رامنځته کيږي. فنرونه د بلاک سره نښلول شوي دي.



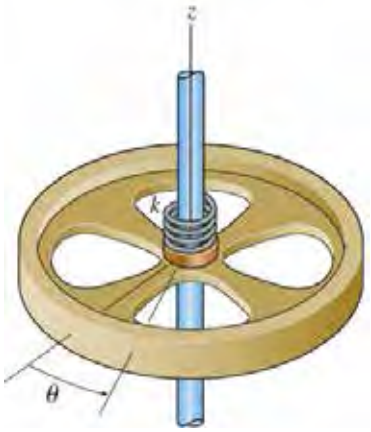
پ 22-31

***22-32 .** د 10 lb نيم دايروي ډيسک د طبيعي موده د لړزيدا معلومه کړئ.



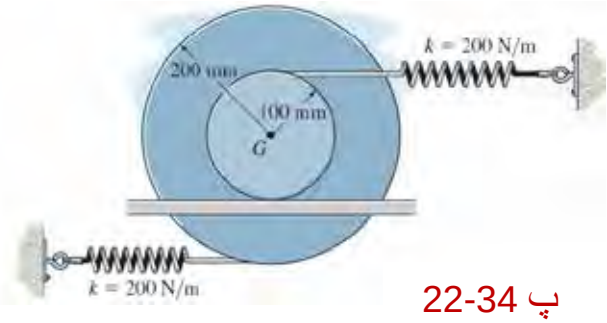
پ 22-32

22-33 . د k کلکوالي یو تاویدونکی فنر د یو څرخ سره نښلول شوی دی چې د M کتله لري. که څرخ ته د z محور په اړه د q کوچنی زاویوی بې ځایه کېدل ورکړل شي، د نوسان طبیعي موده معلومه کړئ. څرخ د z محور په اړه د k_z جایریشن شعاع لري.



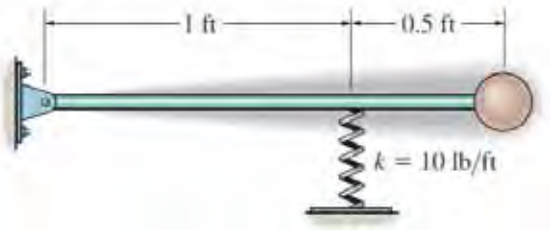
پ 22-33

22-34 . د 15 کیلوګرامه ګوټک د حرکت ډیفرینشل معادله معلومه کړئ. فرض کړئ چې هغه د تماس په سطح کې نه ښویږي، کله چې نوسان کوي. د ګوټک د کتلې مرکز ته یې د جایریشن شعاع يې $k_G = 125$ mm ده. فنرونه په لمړی حالت کی غونج دی.



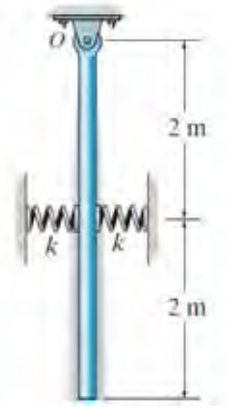
پ 22-34

22-35 . د 5 lb پونډه کره د یوی میلی سره نښلول شوې ده چې په افقی حالت کی ده او کتله يې له پامه غورځول شوې ده. د لړزیدا طبیعي فریکونسي معلومه کړئ. د کرې اندازه له پامه وغورځوئ.



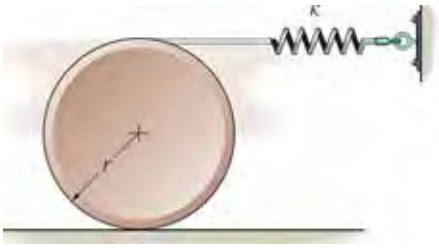
پ 22-35

22-36* . که د 6 kg نري سيخ ښکته پای په لږمقداربې ځایه شي اود دریدلی حالت څخه خوشې شي، د لړزیدا طبیعي فریکونسي یی معلومه کړئ. هر فنر د $k = 200\ N/m$ کلکوالی لري اوکله چې سیخ عمودي ځوړند وي، غونج وی.



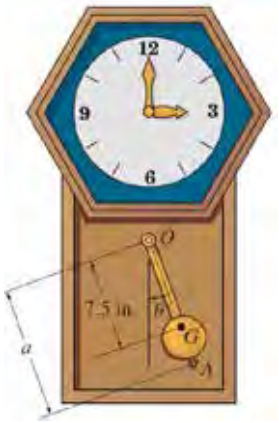
پ 22-36

22-37 . د m کتلې او r شعاع لرونکي ډیسک د لړزیدا طبیعي موده یی معلومه کړئ. فرض کړئ چې ډیسک د نوسان په وخت کې د تماس په سطح نه ښوییږي.



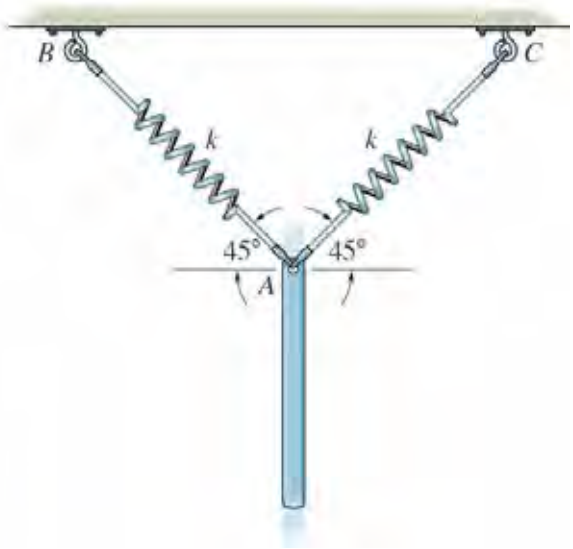
پ 22-37

22-38 . د A تنظیم وړ پېچ پرته، د 1.5 lb پیندولم د ثقل مرکز په G کې دی. که اړتیا وي چې هغه د 1 s په موده کی نوسان وکړي، د پن O څخه تر پېچه پورې فاصله a معلومه کړئ. د پیندولم O ته د جایریشن شعاع $k_O = 8.5in$ ده او پېچ د 0.05 lb تول لري.



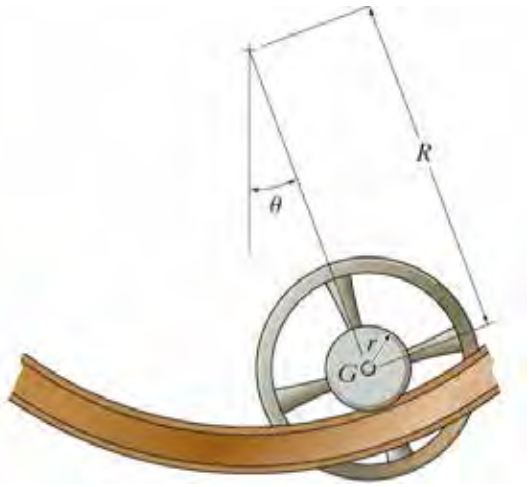
پ 22-38

22-39 . میله د 8 kg کیلوګرامه کتله لري او له دوو فنرونو څخه ځوړنده ده، داسې چې کله په تعادل کې وي، فنرونه د افق سره 45^o زاویه جوړوي، لکه څنګه چې ښودل شوي دي. د طبیعي لړزیدا موده معلومه کړئ که میله یو لنډ واټن ښکته کش شی او بیا خوشې شي. هرفنر $k = 40$ N/m کلکوالی لري.



پ 22-39

22-40 . که څرخ ته د q کوچنۍ زاویه بې ځایه کېدل ورکړل شي او د دریدلی حالت څخه خوشې شي، لیدل کېږي چې دا د t طبیعي مودی سره نوسان کوي. د څرخ د کتلې مرکز G په اړه د جایریشن شعاع معلومه کړئ. څرخ د m کتله لري او پر ریلونو بې له ښوېدلو څرخي.



پ 22-40

22.3* د قووې له امله هغه لړزيدا چې نه کمزورى کيږى.
(UNDAMPED FORCED VIBRATION)

بې ډمپه (نه کمزوره شوي) د قووى له امله لړزيدا په انجينرۍ کې د لړزيدا دحرکت د ډيرو مهمو ډولونو څخه يو ګڼل کيږي. د دې اصول کيداى شي د ډيرو ماشينواوجوړښتونو دحرکت د تشريح لپاره وکارول شي.

موده يى قوه (Periodic Force) . په انځور 22-11a کې ښودل شوى بلاک او فنر يو مناسب ماډل برابروي چې د مود يى قوې $F = F_0 \sin w_0 t$ لاندې د يوه سيستم د لړزيدا ځانګړتياوو استازيتوب کوي. دغه قوه د F_0 امپليتود او د **قووى له امله فريکونسي** (forcing frequency) w_0 لري. کله چې بلاک د x واټن بې ځايه کيږي، د هغه لپاره د آزاد جسم ډياګرام په انځور 22-11b کې ښودل شوى. د حرکت معادله په کارولو سره، مورږ لرو

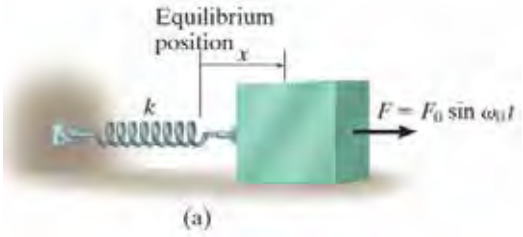
$$\pm \Sigma F_x = ma_x; \qquad F_0 \sin \omega_0 t - kx = m\ddot{x}$$

يا

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega_0 t \qquad (22–18)$$

دا معادله يوه غير متجانسه د دويمې درجې ډيفرينشل معادله ده .عمومي حل د يوه متممي حل x_c ، او يو ځانګړي حل x_p څخه جوړ شوى دى.

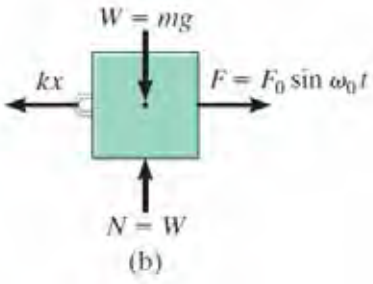
متممي حل د معادلې 22-18 په ښې خوا کې د شته اصطلاح د صفر سره مساوي کولو او د حاصل شوې متجانسې معادلې د حل کولو له لارې ټاکل کيږي. حل د معادلې 22-9 له خوا تعريف شوى، يعنې،



(a)

$$x_c = C \sin(\omega_n t + \phi) \qquad (22–19)$$

چېرې چې w_n طبيعي فريکونسي ده، $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، معادله 22-2.



(b)

انځور 22-11

څرنګه چې حرکت موده يى دى ، د معادلې 22-18 **ځانګړى حل** (particular solution) د لاندې بڼې په فرض کولو سره ټاکل کېدى شي

$$x_p = X \sin \omega_0 t \qquad (22–20)$$

چېرې چې X ثابت دی. د وخت په اړه دویم مشتق اخیستل او په معادله 18-22 کې ځای پر ځای کول حاصلوي

$$-X\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \frac{k}{m}(X \sin \omega_0 t) = \frac{F_0}{m}\sin \omega_0 t$$

د $\sin \omega_0 t$ فکتور کول او د X لپاره حل کول راکوي

$$X = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega_0^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (22\text{–}21)$$

په معادله 22-20 کې ځای پر ځای کول، مور لاسته راوړو

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\sin \omega_0 t \qquad (22\text{–}22)$$



بنورونکي میزونه د قووي له امله لړزیدا وړاندې کوي او د دانه لرونکیو موادو د بېلولو لپاره کارول کېږي.

عمومي حل د دوه ساینونو فنکشنونو مجموعه ده چې مختلفې فریکونسي ګانې لري

$$x = x_c + x_p = C \sin(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\sin \omega_0 t \qquad (22\text{–}23)$$

تکمیلي حل x_c د آزادی لړزیدا څرګندونه کوي، کوم چې په طبیعي فریکونسي $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، او ثابت C او f پورې اړه لري. ***خانګړی حل*** x_p د بلاک اجباري لړزیدا تشریح کوي چې د تطبیق شوي قوې $F = F_0 \sin w_0 t$ له امله رامینځته کیږي. څرنګه چې ټول لړزیدونکی سیسټمونه د اصطکاک سره مخ کیږي، د وخت په تیریدو سره به آزاد لړزیدا، x_c، کمزوری شي. په دې وجه آزاد لړزیدا ته ***موقتي*** (transient) ویل کیږي، او اجباري لړزیدا ته ***دایمي حالت*** (steady-state) ویل کیږي، ځکه چې دا یوازینی احتزاز دی چې پاتې کیږي.

د معادلې 22-21 څخه لیدل کیږي چې د اجباري یا دایمي حالت احتزاز پراخوالی د فریکونسي نسبت w_0/w_n (frequency ratio) پورې اړه لري. که د ***زیاتوالي فکتور***(magnification factor) MF د امپلیتود دایمي حالت لړزیدا ، X، نسبت د ثابت بیځایه کیدنی، F_0/k، چې د امپلیتود د موده یی قوې F_0 له خوا رامینځته کیدی شي، نو د معادلې 22-21 څخه:

$$\mathrm{MF} = \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (22\text{–}24)$$



د خاوري تخته کونکی د داخلي موټور په واسطه رامینځته شوي چې د اجباري لړزیدا له لارې کارکوي. دامهمه ده چې داجباري فریکونسي د تخته کونکی د طبیعي فریکونسی د لړزیدا سره نیږدې نه وي، کوم چې کله موټور بند شي معلومیدلی شي؛ په بل صورت کې به ریزونینس رامینځته شي او ماشین به له کنټرول څخه ووځي.

دا معادله په انځور 22-12 کې ګراف شوې ده. په یاد ولرئ چې که چیرې قوه یا ځای بدلون د فریکونسي سره تطبیق شي چې د سیسټم د طبیعي فریکونسي سره نږدې وي، یعنې $w_0/w_n \approx 1$ ، د بلاک د لړزیدا امپلیتود خورا لوی کیږي. دا ځکه پیښیږي چې قوه F په بلاک باندې داسې تطبیق کیږي چې تل د بلاک د حرکت تعقیبوي. دې حالت ته ریزونینس (resonance) یا تشدید ویل کیږي، او په عملي توګه، تشدیدي لړزیدا کولی شي په حصو باندې خورا زیات فشار او چټک خرابیدل رامینځته کړي*.

د تکیه ګاه ځای دوره ای بیځایه کیدنه (Periodic Support Displacement).

اجباري لړزیدا کیداي شي د یو سیسټم د تکیه ګاه موده یی پاره وښي (excitation) له امله هم رامینځته شي. د مثال په توګه، په انځور 22-13a کې ښودل شوی ماډل د بلاک موده یی لړزیدا ښیي چې د تکیه ګاه هارمونیک حرکت $d = d_0 \sin w_0 t$ له امله رامینځته کیږي.

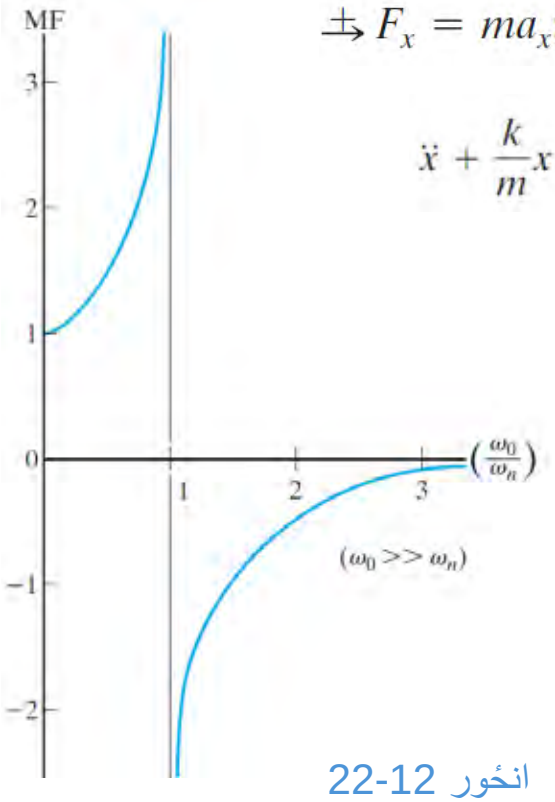
په دې حالت کې د بلاک لپاره د آزاد-جسم دیاګرام په انځور 22-13b کې ښودل شوی دی. که د تکیه ګاه ځای بدلون d د صفر ځای بدلون له ټکي څخه اندازه شي، یعنې کله چې شعاعي کربنه OA د OB سره یوځای شي، نو د فنر عمومي بیځایه کیدنه $(x - d_0 \sin w_0 t)$ ده. د حرکت معادلی تطبیقول

$$\pm \Sigma F_x = ma_x; \qquad -k(x - \delta_0 \sin \omega_0 t) = m\ddot{x}$$

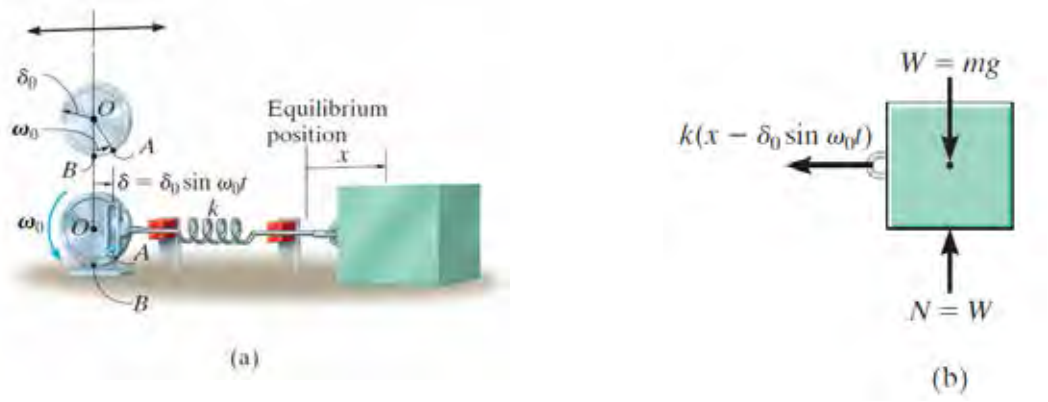
یا

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\delta_0}{m}\sin \omega_0 t \qquad (22\text{–}25)$$

د پرتله کولوله مخې، دا معادله د معادلې 22-18 د بڼې سره یوشان ده، په دې شرط چې F_0 د kd_0 سره تبدیل شي. که دا تبدیلي په معادلو 22-21 څخه تر 22-23 پورې هم وکارول شي، پایلې د بلاک دحرکت د تشریح لپاره مناسبې دي کله چې دتکیه ګاه د ځای بدلون $d = d_0 \sin w_0 t$ سره مخ کیږي.



انځور 22-12



انځور 22-13

یو زانګو د لړزیدا یو طبیعي موده لري، لکه څنګه چې په مثال 22.1 کې مشخص شوی دی. که څوک یوازې هغه وخت په زانګو فشار راوړي کله چې دا خپلې لوړې نقطې ته ورسیږي، د درګ یا د باد مقاومت په پام کې نه نیولو سره، تشدید (ریزونینس) به رامینځته شي ځکه چې طبیعي او اجباري فریکونسۍ یو شان دي.

مثال

مثال 22.7

په انځور 22-14 کې ښودل شوی آله په یوه پلټفارم P باندی کلکه نښلول شوی ده، کومه چې په خپل وار سره د څلورو فنرونو په واسطه تکیه کیږی، چې هر یویی $k = 800$ N/m سختوالي لري. که چیرې فرش د عمودي ځای بدلون $d = 10 \sin(8t)$ mm سره مخ شي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د دایمي حالت امپلیتود لړزیدا معلومه کړئ. د فرش د لړزیدا هغه فریکونسي چې د تشدید (ریزونینس) د رامینځته کیدو لپاره اړینه ده څومره ده؟ آله او پلټفارم یوځای 20 kg کتله لري.



انځور 22-14

حل

طبيعي فريکونسي عبارت ده په

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(800\ \text{N/m})}{20\ \text{kg}}} = 12.65\ \text{rad/s}$$

د دايمي حالت امپليتود لړزيدا د معادلې 21-22 په کارولو سره موندل کيږي، کله چې kd_0 د F_0 پر ځای په نظر کې ونيول شی.

$$X = \frac{\delta_0}{1-(\omega_0/\omega_n)^2} = \frac{10}{1-[(8\ \text{rad/s})/(12.65\ \text{rad/s})]^2} = 16.7\ \text{mm} \qquad \textit{Ans.}$$

تشديد (ريزونينس) به هغه وخت رامينځته شي کله چې امپليتود د لړزيدا X د فرش د ځای بدلون له امله بی نهايته لوی عدد ته نيږدې شي. دا غواړي چې

$$\omega_0 = \omega_n = 12.6\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

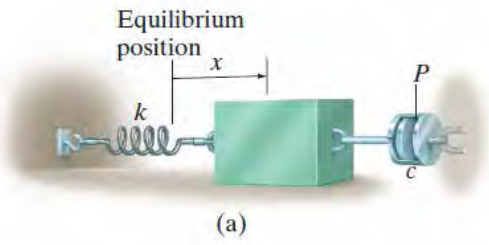
22.4* د ويسکز په واسطه کمزوری شوی آزاد احتزاز (VISCOUS DAMPED FREE VIBRATION)

د لړزيدا تحليل چې تر اوسه پوري په پام کې نيول شوی، په سيستم کې د اصطکاک يا کمزوري کولو اغيزې شاملې نه دي، او لدی کبله ، ترلاسه شوي حلونه د اصلي حرکت سره په نږدې ورته والی کې دي. څرنګه چې ټولې لړزيداوی د وخت په تيريدو سره له منځه ځي، د کمزوري کولو قوو شتون بايد په تحليل کې شامل شي.

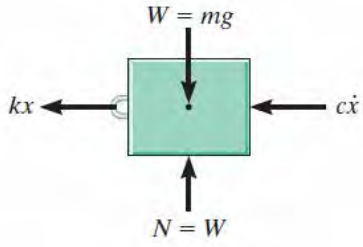
په ډيرو حالاتو کې کمزوري کول د هغه مايع لکه اوبه، تيل، يا هوا په واسطه رامينځته شوي مقاومت ته منسوب کيږي، په کوم کې چې سيستم لړزيدا کوي. په شرط چې جسم په دې مايع کې په ورو حرکت وکړي، نو د حرکت پر وړاندې مقاومت د جسم د تيزوالی سره مستقيم متناسب دی. د دې شرايطو لاندې رامينځته شوي قوې ته د ويسکوز کمزوري کوونکې قوه (viscous damping force) ويل کيږي. د دې قوې اندازه د يوې معادلې په بڼه بيانيږي

$$F = c\dot{x} \qquad (22\text{–}26)$$

چيرې چې ثابت c د ويسکوز کمزوري کولو ضريب بلل کيږي او N . s/m يا lb . s/ft واحدونه لري.



(a)



(b)

انځور 22-15

د يو جسم يا سيستم لړزيدا حرکت چې ويسکوز کمزوري کول لري، د بلاک او فنر په واسطه چې په انځور 22-15a کې ښودل شوی تشريح کيدی شي. د کمزوري کولو اغيزه د ډشپاټ (dashpot) په واسطه چې د بلاک سره په ښي خوا کې نښلول شوی چمتو کيږي. کمزوري کول هغه وخت رامينځته کيږي کله چې پيستن P په بند شوي سلنډر کې ښي يا کيڼې خوا ته حرکت وکړي. سلنډر مايع لري، او د پيستن حرکت ځنډول کيږي ځکه چې مايع بايد د پيستن په يوه واړه سوري شاوخوا يا له لارې يې بهير وکړي. فرض کيږي چې ډيشپاټ د ويسکوز کمزوري کولو ضريب c لري.

که بلاک د خپل توازن له موقعيت څخه په x واټن ځای بدل کړی، پايلوي د آزاد-جسم ديا‌ګرام په انځور 22-15b کې ښودل شوی دی. فنر او کمزوري کوونکې قوه دواړه د بلاک د مخ په وړاندې حرکت مخالفت کوي، نو د حرکت معادله دا ډول کيږي

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

يا

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (22\text{–}27)$$

دا خطي، دويم-درجه، همجنسه، تفاضلي معادله د لاندې بڼې يو حل لري

$$x = e^{\lambda t}$$

چيرې چې e د طبيعي لوګاريتم اساس ده او λ (لمبدا) يو ثابت دی. د λ ارزښت کولی شي د دې حل او د هغې د وخت مشتق په معادله 22-27 کې د ځای په ځای کولو سره ترلاسه شي، کوم چې

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

یا

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

څرنګه چې $e^{\lambda t}$ هیڅکله صفر نه شي کیدای، یو حل ممکن دی په دې شرط چې

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

نو، د درجه دوهم معادلې د فارمول په کارولو سره، د λ دوه قیمتونه دي

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (22\text{–}28)$$

نو د معادلې 22-27 عمومي حل د دغو طاقتونویو ځایکول دی چې دواړه جذرونو پکښې شاملیږی. د λ_1 او λ_2 دري ممکنه ترکیبونه باید په پام کې ونیول شي. خو د دغو ترکیبونو په اړه بحث کولو مخکې، مونږ به لومړی د بحراني ډمپنګ ضریب c_c (critical damping) تعریف کړو د c دهغه قیمت په توګه چې په معادله 22-28 کې ریډیکل صفر کوي؛ یعنې،

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

یا

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (22\text{–}29)$$

زیات ډمپډ شوی سیستم (Overdamped System). کله چې $c > c_c$ وي، جذرونه λ_1 او λ_2 دواړه حقیقي وي. د معادلې 22-27 عمومي حل بیا داسې لیکل کیدای شي

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (22\text{–}30)$$

د دې حل سره مطابق حرکت نه لړزیدونکی دی. د ډمپنګ اغیزه دومره قوي ده چې کله بلاک بې ځایه او خوشې شي، هغه یوازې بیرته خپل اصلي موقعیت ته په خزیدو راځي پرته له نوسان کولو. دې سیستم ته **زیات کمزوری یا زیات ډمپډ** (overdamped) شوی ویل کیږي.

بحراني ډمپډ يا کمزوره شوی سيستم (Critically Damped System). که چيری $c = c_c$ ، نو $l_1 = l_2 = -c_c/2m = -w_n$. دا حالت د بحراني ډمپډ په نوم پيژندل کيږي، ځکه چې دا داسې حالت بنيي چيرې چې c تر ټولو کوچنی قيمت لري چې سيستم نا لړزيدونکی شی. د تفاضلي معادلو طريقو په کارولو سره، ښودل کيدای شي چې د بحراني ډمپينګ لپاره د معادلې 22-27 حل دا دی

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \qquad (22–31)$$

کمزوره شوی ډمپډ سيستم (Underdamped System). اکثراً کله چې $c < c_c$ وی، په هغه صورت کې سيستم د نا ډمپډ په نوم يادیږي. په دې صورت کې ريښې 1 او 2 مغلق (complex) شميرې دي، او ښودل کيدی شي چې د معادلې 22-27 عمومي حل داسې ليکل کيدی شي

$$x = D[e^{-(c/2m)t}\sin(\omega_d t + \phi)] \qquad (22–32)$$

چيرې چې D او f ثابتونه دي چې عموماً د پوښتنې د لومړني شرايطو څخه ټاکل کيږي. ثابت w_d د سيستم **ډمپډ طبيعي فريکونسي** (***damped natural frequency***) بلل کيږي. چې دا لاندې ارزښت لري

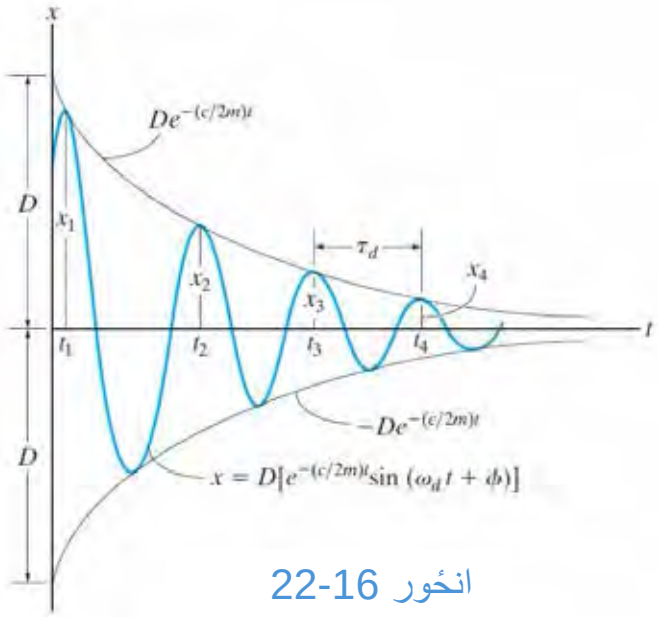
$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \qquad (22–33)$$

چيرې چې نسبت c/c_c د ډمپينګ **فکتور** (***damping factor***) بلل کيږي.

د معادلې 22-32 ګراف په انځور 22-16 کې ښودل شوی دی. د حرکت لومړنی حد، D، د لړزيدا په هره دوره کی کميږي، ځرنګه چې حرکت د تاقتی منحني په حدودو کې محدود دی. د ډمپډ طبيعي فريکونسي w_d په کارولو سره، د ډمپډ لړزيدا موده داسې ليکل کيدی شي

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad (22–34)$$

څرنګه چې $w_d < w_n$ ، معادله 22-33 ، د ډمپډ لړزيدو موده ، t_d، به د آزاد لړزيدا په پرتله لويه وي، $t = 2\pi/w_n$.



انځور 22-16

22.5* د قووی تراثر لاندې کمزوره شوی ویسکس لړزيدا (Viscous Damped Forced Vibration)

په يوه درجهٔ آزادی سيستم (Single-degree-of-freedom) کې د لړزيدا تر ټولو عمومي حالت هغه وخت پيښيږي کله چې سيستم ته د قووې لاندی حرکت ولری او د ډمپينګ اغيزه وربانډی اضافه شي. د دې ځانګړي ډول لړزيدا تحليل هغه وخت عملي ارزښت لري کله چې په هغو سيستمونو تطبيق شي چې د پام وړ ډمپينګ ځانګړتياوې ولري.

که يو ډشپاټ (dashpot) کوم چې په انځور د 22-11a کې ښودل شوي د بلاک او فنرسره وصل شي، نوتفاضلي معادله چې حرکت تشريح کوي، داسې کيږي

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega_0 t \qquad (22–35)$$

يوه ورته معادله د بلاک او فنر لپاره ليکل کيدی شي چې موده يې اتکا ځايه کيدل لري، انځور 22-13aکې، چې د کمزوره کيدو اغيزې شاملوي.

په دې صورت کې، F_0 د kd_0 سره بدلیږي. څرنګه چې معادله 22-35 غیر متجانس ده، عمومي حل د متممې حل، x_c، او ځانګړي حل، x_p، جمعه ده. متممه حل د معادلې 22-35 بڼې اړخ د صفر سره مساوي کولو په واسطه ټاکل کیږي او د متجانس معادلې حل کولو سره، چې د معادلې 22-27 سره معادل ده. نو حل د معادلې 22-30، 22-31، یا 22-32 په واسطه ورکول کیږي، د I_1 او I_2 ارزښتونو پورې اړه لري. څرنګه چې ټول سیستمونه د اصطکاک سره مخ کیږي، دا حل به د وخت په تیریدو سره کمزوره شي. یوازې ځانګړی حل، چې د سیستم د دایمي حالت لړزیدا تشریح کوي، به پاتې شي. څرنګه چې تطبیق شوی قوی فنکشن هارمونیک دی، د دایمي حالت حرکت به هم هارمونیک وي. په پایله کې به ځانګړی حل به په لاندې بڼه وي

$$X_P = X' \sin(\omega_0 t - \phi') \qquad (22–36)$$

ثابتونه X' او f' د لومړي او دوهم مشتق اخیستلو وخت ته او بیا یې په معادله 22-35 کې په ځای کولو سره ټاکل کیږي، چې د ساده کولونه وروسته لاندې شکل غوره کوي

$$-X'm\omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \phi') + X'c\omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi') + X'k \sin(\omega_0 t - \phi') = F_0 \sin \omega_0 t$$

څرنګه چې دا معادله د ټول وخت لپاره صدق کوي، ثابت ضریبونه د $w_0t - f' = 0$ او $w_0t - f' = p/2$ په ټاکلو سره ترلاسه کیدی شي، چې پورتنۍ معادله داسې کیږي

$$X'c\omega_0 = F_0 \sin \phi'$$

او

$$-X'm\omega_0^2 + X'k = F_0 \cos \phi'$$

امپلیتود د دې معادلو د مربع کولو، د پایلو د جمع کولو، او د $\sin^2 f' + \cos^2 f' = 1$ ایډنټیټي په کارولو سره ترلاسه کیږي، چې ورکوي

$$X' = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2}} \qquad (22–37)$$

لومړۍ معادله په دوهمه معادله ویشل راکوي

$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2}\right] \qquad (22–38)$$

څرنګه چې $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ او $c_c = 2mv_n$ ، نو پورتنۍ معادلې په لاندې ډول هم لیکل کیدی شي:

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

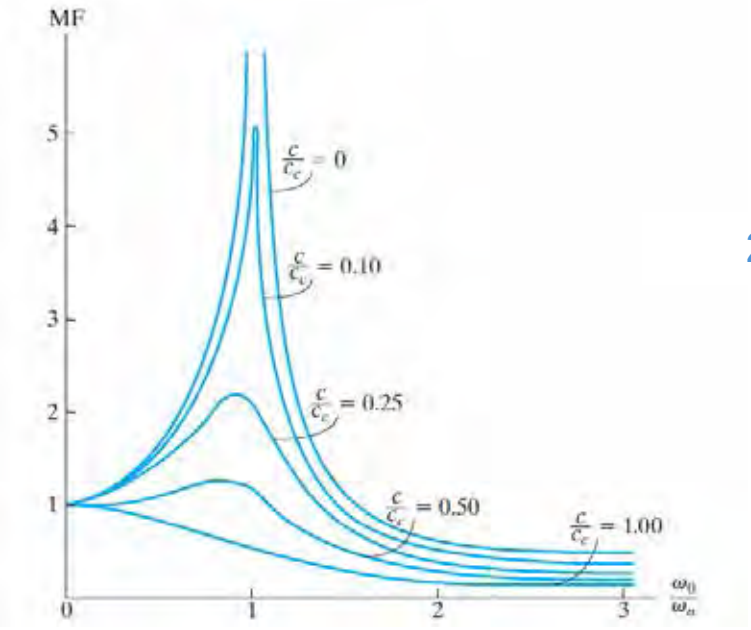
$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)}{1-(\omega_0/\omega_n)^2}\right] \qquad (22\text{–}39)$$

زاویه f' د تطبیق شوي قوې او ډمپډ سیستم د ترلاسه شوي دایمي حالت لړزیدا ترمنځ د فاز توپیر استازیتوب کوي.

د ***لویوالي فکتور*** (magnification factor) **MF** په برخه 22.3 کې د قووې تر اثر لاندې لړزیدا په واسطه د رامنځته شوي بیځایه کیدنه امپلیتود او د ساکن قوې F_0 په واسطه رامنځته شوي انحراف د نسبت په توګه تعریف شوی دی. نو،

$$\text{MF} = \frac{X'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}} \qquad (22\text{–}40)$$

د لویوالي فکتور MF په انځور 22-17 کې د فریکونسي نسبت w_0/w_n په وړاندې د کمزورې کولو فکتور c/c_c د بیلابیلو ارزښتونو لپاره ښودل شوی دی. له دې ګراف څخه لیدل کیدی شي چې دامپلیتود لویوالی د کمزورې کولو فکتور په کمیدو سره زیاتیږي. په ځرګنده توګه ریزوننس یوازې هغه وخت پیښیږي کله چې د کمزورې کولو فکتور صفر وي او د فریکونسي نسبت له 1 سره مساوي وي.



انځور 22-17

مثال

مثال 22.8

په انځور 22-18 کې ښودل شوی 30-kg بریښنایي موټور په عمودي جهت د خوځیدو لپاره محدود دی، او د څلورو فنرونو په واسطه ملاتړ کیږي، چې هر فنر 200 N/m کلکوالی لري. که چیرې روټر نامتوازن وي داسې چې د هغه اغیزه د محور څخه 60 mm لرې او د 4 -kg کیلوګرامه کتلې سره معادل وي، د لړزیدا املیتود مشخص کړئ کله چې روټر په $w_0 = 10$ rad/s کې څرخیږي. د کمزوره کولو فکتور $c/c_c = 0.15$ دی.



انځور 22-18

حل

هغه موده یی (periodic) قوه چې د موټور د لړزیدا لامل کیږي د نامتوازن روټر له امله مرکز څخه تیښتې قوه(centrifugal) ده. دا قوه ثابت مقدار لري

$$F_0 = ma_n = mrv_0^2 = 4\text{ kg}(0.06\text{ m})(10\text{ rad/s})^2 = 24\text{ N}$$ د

د څلورو فنرونو د ټول سیستم کلکوالی $k = 4(200\text{ N/m}) = 800\text{ N/m}$ دی. نو، د لړزیدا طبیعي فریکونسي ده

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\text{ N/m}}{30\text{ kg}}} = 5.164\text{ rad/s}$$

څرنګه چې د کمزوره کولو فکتور معلوم دی، د دایمي حالت امپلیتود د لمړی معادلو 22-39 څخه ټاکل کیدی شي، یعنې،

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

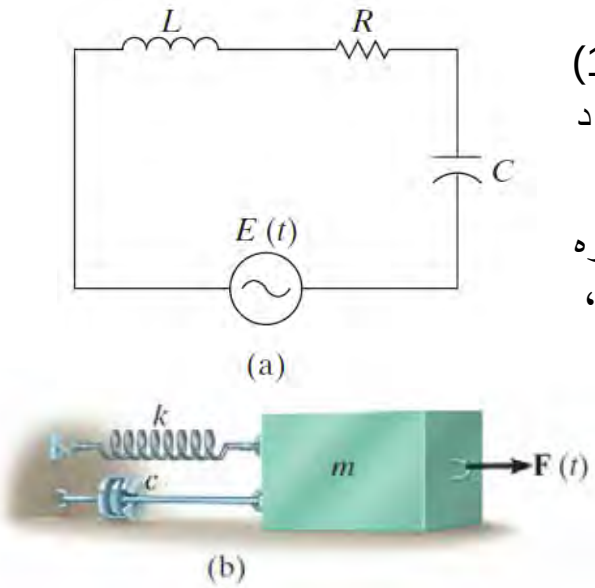
$$= \frac{24/800}{\sqrt{[1-(10/5.164)^2]^2 + [2(0.15)(10/5.164)]^2}}$$

$$= 0.0107\text{ m} = 10.7\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

22.6* بریښنایی سرکټ انه لاګ (ELECTRICAL CIRCUIT ANALOGS)

د لړزیدا میخانیکي سیستم ځانګړتیاوې د بریښنایي سرکټ په واسطه تمثیل اواستازیتوب کیدی شي.

د انځور 22-19a کې ښودل شوی سرکټ په پام کې ونیسئ، چې د یوالقاحی(inductor) L، یو مقاومت R، او یو کپسیتور C څخه جوړ شوی دی. کله چې ولټیج $E(t)$ تطبیق کیږي، دا د سرکټ له لارې د مقدار i جریان د بهیدو لامل کیږي. کله چې جریان د القاحي څخه تیریږي د ولټیج کموالی $L(di/dt)$ دی، کله چې د مقاومت څخه تیریږي کموالی Ri دی، او کله چې کپسیتور ته رسیږي کموالی $(1/C)\int i\,dt$دی. ځکه چې جریان د کپسیتور څخه نشي تیریدلی، یوازې د کپسیتور باندې عمل کوونکی چارج q اندازه کول ممکن دی.



انځور 22-19

چارج، هرځومره، د معادلې $i = dq/dt$ په واسطه د جریان سره تړل کیدی شي. نو، هغه د ولټیج کموالي چې د القاحي، مقاومت، او کپسیتور په کې پیښیږي په ترتیب سره $L\,d^2q/dt^2$, $R\,dq/dt$، او q/C کیږي. د کرچاف د ولټیج قانون له مخې، تطبیق شوی ولټیج د سرکټ په اوږدوکی دولټیج د کموالي مجموعې سره توازن کوي. نو،

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (22–41)$$

اوس د یوې-درجې-آزادۍ میخانیکي سیستم موډل په پام کې ونیسئ، شکل 22-19b ، چې د عمومي قووی $F(t)$ او کمزوره کیدو دواړو سره مخ دی. د دې سیستم لپاره د حرکت معادله په تیره برخه کې رامنځته شوې وه او داسې لیکل کیدی شي

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (22–42)$$

په مقایسه کولو سره، لیدل کیږي چې معادلې 22-41 او 22-42 یو شان بڼه لري، او نو په ریاضیکي توګه د بریښنایي سرکټ د تحلیل کړنلاره د لړزیدا میخانیکي سیستم د تحلیل کړنلارې سره یو شان دی. د دواړو معادلو ترمنځ تمثیلونه په جدول 22-1 کې ورکړل شوي دي.

دا ورته والی د تجربوي کار لپاره مهم کارونه لري، ځکه چې د یو پیچلي میخانیکي سیستم د لړزیدا تمثیل کول د بریښنایي سرکټ په کارولو سره، چې په انه لاګ کمپیوټر کې جوړیدی شي، چې ډیر اسانه دی نسبت د معادل میخانیکي فنر-او- ډیشپاټ موډل جوړولو ته

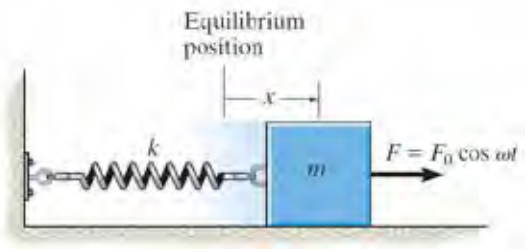
TABLE 22–1
Electrical–Mechanical Analogs

Electrical		Mechanical	
Electric charge	q	Displacement	x
Electric current	i	Velocity	dx/dt
Voltage	$E(t)$	Applied force	$F(t)$
Inductance	L	Mass	m
Resistance	R	Viscous damping coefficient	c
Reciprocal of capacitance	$1/C$	Spring stiffness	k

پوښتنې

PROBLEMS

22-41 . که چیرې بلاک-او-فنز موډل د موده یی قوې $F = F_0 \cos \omega t$ سره مخ وي، وښیئ چې د حرکت تفاضلي معادله $\ddot{x} + (k/m)x = (F_0/m) \cos \omega t$ ده، چیرې چې x د بلاک د توازن موقعیت څخه اندازه کیږي. د دې معادلې عمومي حل څه دی؟



پ 22-41

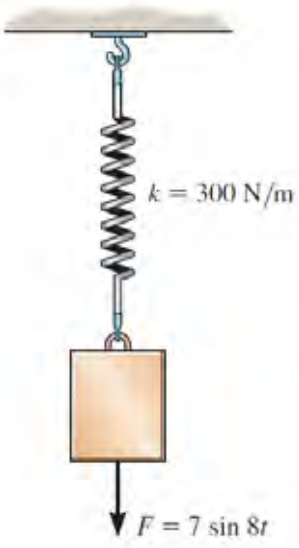
22-42 . یو بلاک چې کتله m لري د k کلکوالی یوه فنر څخه ځوړند دی. که چیرې یوه کښته عمودي قوه $F = F_0$ په تول باندې عمل وکړي، هغه معادله معلومه کړئ چې د وخت د تابع په توګه د بلاک موقعیت تشریح کوي.

22-43 . یو 4-lb پونډه تول د $k = 10$ lb/ft کلکوالی یوه فنرسره نښلول شوی دی. تول 4 in کښته کش کیږي او له دریدلی حالت نه خوشې کیږي. که چیرې ملاتړ د عمودي بې ځایه کیدو $d = (0.5 \sin 4t)$ in. سره خوځیږي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، هغه معادله معلومه کړئ چې د وخت د تابع په توګه د تول موقعیت تشریح کوي.

*22-44 . یو 4-kg بلاک د $k = 600$ N/m کلکوالی یوه فنر څخه ځوړند دی. بلاک د توازن موقعیت څخه 50 mm ملي مترہ ښکته کش کیږي او په $t = 0$ کې له دریدلی حالت څخه خوشې کیږي. که چیرې ملاتړ د بې ځایه کیدو $d = (10 \sin 4t)$ mm سره خوځیږي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، هغه معادله معلومه کړئ چې د بلاک عمودي حرکت تشریح کوي. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدل ښکته دي.

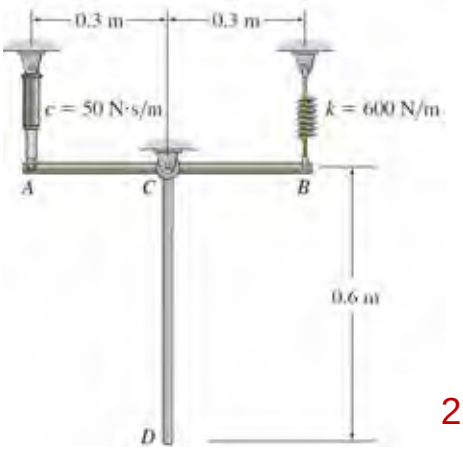
22-45 . د یوه توپ بیرل 700 kg کتله لري، او د ویشتلو وروسته 0.64 m واټن شاته ټکان خوري. که چیرې دا د 2 kN·s/m کمزوره کیدو نکی بیرته راوړونکي په واسطه خپل اصلي موقعیت ته راګرځي، د هر یو له هغو دوو فنرونو څخه اړین کلکوالی معلوم کړئ چې په قاعده کې ټینګ شوي او بیرل ته نښلول شوي دي، داسې چې بیرل پرته له لړزیدا څخه بیرته راځي.

22-46 . یو 5-kg بلاک د 300 N/m کلکوالی یوه فنر څخه ځوړند دی. که چیرې بلاک د عمودي قوې $F = (7 \sin 8t)$ N په واسطه اغیزمن کیږي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، هغه معادله معلومه کړئ چې د بلاک حرکت تشریح کوي کله چې دا د توازن موقعیت څخه 100 mm ښکته کش کیږي او په $t = 0$ کې له دریدلی حالت نه خوشې کیږي. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدل ښکته دي.



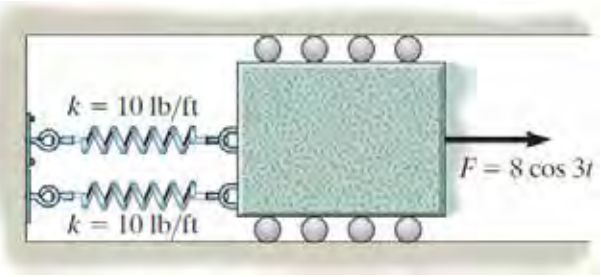
پ 22-46

22-47 . که چیرې ډیشپاټ د $c = 50$ N·s/m ډمپنګ ضریب ولري، او فنر د $k = 600$ N/m کلکوالی لري، وښیئ چې سیستم د کمزورۍ نه ټیت دی، او بیا د پندولم د نوسان موده وموموئ. میلې یو شان د 10 kg/m کتله په واحد اوږدوالي لري.



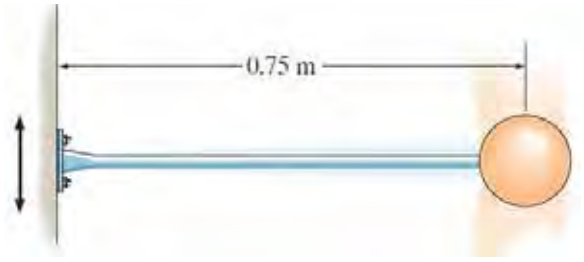
پ 22-47

*22-48. 30-lb بلاک د 10 lb/ft کلکوالی دوو فنرونوسره نښلول شوی دی. یوه موده یې قوه $F = (8 \cos 3t)$ lb ، چیرې چې t په ثانیو کې ده، په بلاک باندې تطبیق کیږي. د بلاک اعظمي سرعت معلوم کړئ وروسته له دې چې د اصطکاک قوې د آزاد لړزیدا د کمزورې کیدو لامل شي.



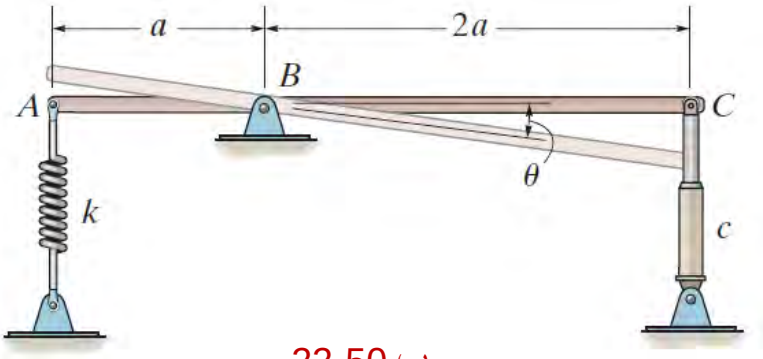
پ 22-48

22-49 . سپکه ارتجاعي میله یوه 4-kg کره ملاتړ کوي. کله چې په کره باندې 18 N عمودي قوه تطبیق کیږي، میله 14 mm کږیږي. که چیرې دیوال د 2 Hz هارمونیک فریکونسي سره نوسان کوي او 15 mm امپلیتود لري، د کرې لپاره د لړزیدا امپلیتود معلوم کړئ.



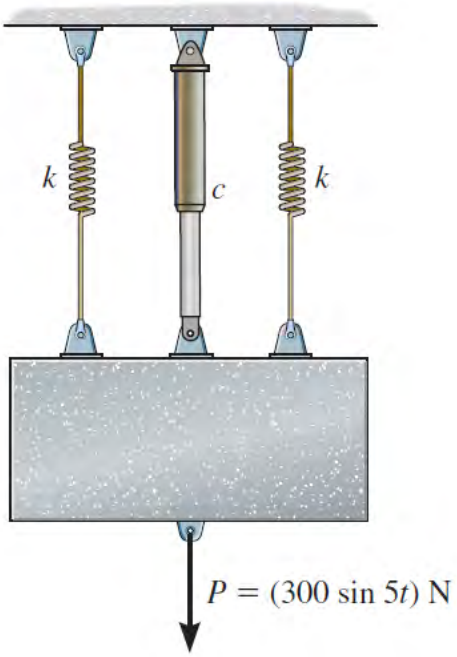
پ 22-49

22-50 . د یو شان میلې لپاره چې کتله m لري د θ په حساب د کوچنیو نوسانولپاره تفاضلي معادله ومومئ. همدارنګه وښیئ چې که $c < \sqrt{(mk/2)}$ وی، نو سیستم د ډمپد نه لاندی پاتی کیږي. میله په افقي موقعیت کې ده کله چې په توازن کې وي.



پ 22-50

22-51 . که چيرې 30-کيلوګرامه بلاک د P = (300 sin 5t) N موده يې قوې سره مخ وي، k = 1500 N/m، او c = 300 N·s/m ، هغه معادله معلومه کړئ چې د وخت د تابع په توګه د دايمي حالت لړزيدا تشريح کوي.



پ 22-51

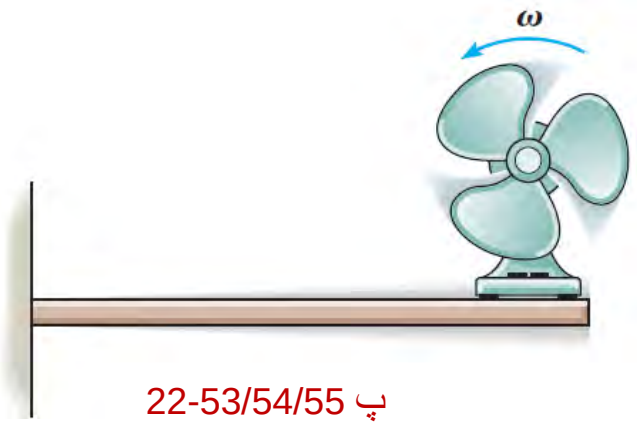
22-52 . د بلاک-او-فنر موډل په کارولو سره، لکه چې په انځور 22-13a کې ښودل شوی، مګر د عمودي موقعيت څخه ځوړند او د $d = d_0 \cos \omega_0 t$ موده يې ملاتړ بې ځايه کيدو سره مخ دی، د سيستم لپاره د حرکت معادله معلومه کړئ، او د هغې عمومي حل تر لاسه کړئ. د بې ځايه کيدو y تعريف کړئ چې د بلاک د ساکن توازن موقعيت څخه اندازه کيږي کله چې $t = 0$ وي.

22-53 . پکه 25 kg کتله لري او د يوې افقي تير په پای کې ټينګه ده چې د پام وړ کتله نه لري. د پکې پره په غير مرکزي توګه په محور باندې نصب شوې ده په داسې صورت چې د محورڅخه 100 mm لرې او د 3.5 kg نامتوازنې کتلې سره معادل ده. که چيرې د پکې د تول په پايله کې

د تير ساکن کړيدل 50 mm وي، د پکې پرې هغه زاويوي سرعت معلوم کړئ چې په هغې کې به ريزوننس پيښ شي. مرسته: د مثال 22.8 لومړۍ برخه وګورئ.

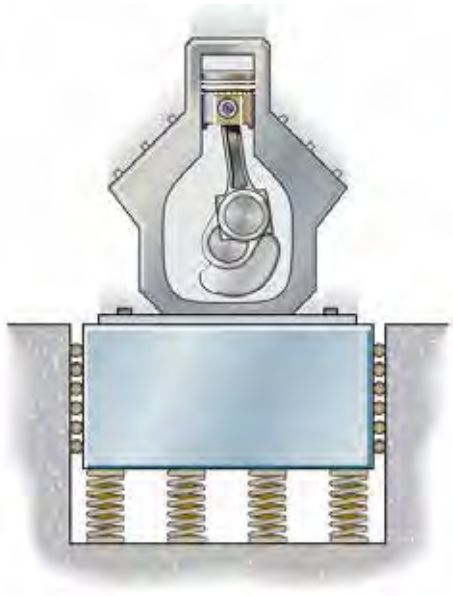
22-54 . په پوښتنه 22-53 کې، دپکې د دايمي حالت لړزيدا امپليتود معلومه کړئ که چيرې د هغې زاويوي سرعت 10 rad/s وي.

22-55 . په پوښتنه 22-53 کې به د پکې د دايمي حالت لړزيدا امپليتود به څه وي که چيرې د پکې پرې زاويوي سرعت 18 rad/s وي؟ مرسته: د مثال 22.8 لومړۍ برخه وګورئ.



پ 22-53/54/55

22-56 . انجن په يوه بنسټيز بلاک باندې نصب دی چې د سپرنګ په واسطه ملاتړ شوی دی. دايمي حالت لړزيدا تشريح کړئ که چيرې بلاک او انجن په مجموعي توګه 1500 پونډه تول لري، او انجن، د چلولو په وخت کې، د F = (50 sin 2t) lb قوه رامنځته کوي، چيرې چې t په ثانيو کې ده. فرض کړئ چې سيستم يوازې په عمودي لوري کې لړزيدا کوي، د مثبت بې ځايه کيدو سره چې بنکته خوا اندازه کيږي، او دا چې د سپرنګونو مجموعي کلکوالی k = 2000 lb/ft دی.

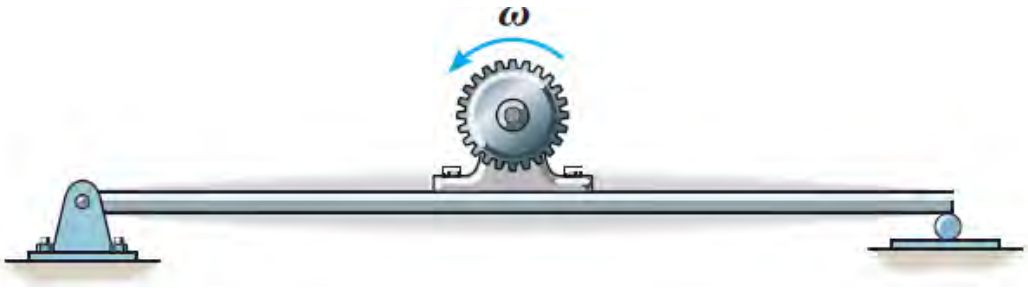


پ 22-56

22-57 . بریښنایي موټور یو غیرمرکزي فلای ویل څرخوي چې د محور څخه 10 in لرې د 0.25 lb نامتوازن تول سره معادل دی. که چیرې د موټور د تول له امله دبیم ساکن کږیدل 1 in وي، د فلای ویل هغه زاویوي سرعت معلوم کړئ چې په هغې کې به ریزوننس پیښ شي. موټور 150 lb تول لري. د بیم کتله په پام کې مه نیسئ.

22-58 . په ستونزه 22-57 کې به د موټور د دایمي حالت (steady state) لړزیدا امپلیتود څه وي که چیرې د فلای ویل زاویوي سرعت 20 rad/s وي؟

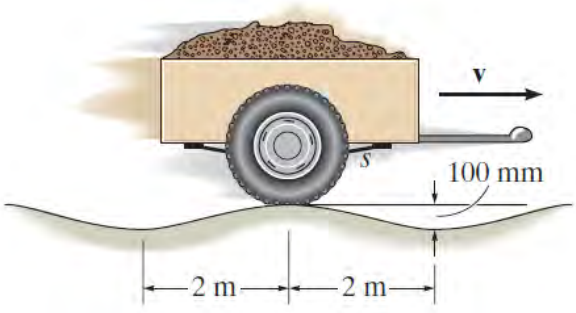
22-59 . په ستونزه 22-57 کې د فلای ویل هغه زاویوي سرعت معلوم کړئ چې د 0.25 in د لړزیدا امپیتود رامنځته کړي.



پ 22-57/58/59

22-60* . 450-kg ټرېلر د ګړبیدونکی سړک په سطحه باندې په ثابت تیزوالي سره کش کیږي، چې 50 mm امپلیتود او 4 m د څپې اوږدوالي سره د کوساین منحني په واسطه نیږدی ښودل کیدی شي. که چیرې هغه دوه فنرونه s چې د ټرېلریی ملاتړ کوي هر یو 800 N/m کلکوالی لري، هغه تیزوالي v معلوم کړئ چې د ټرېلر تر ټولو لوی لړزیدل (ریزوننس) به رامنځته کړي. د ټایرونو تول په پام کې مه نیسئ.

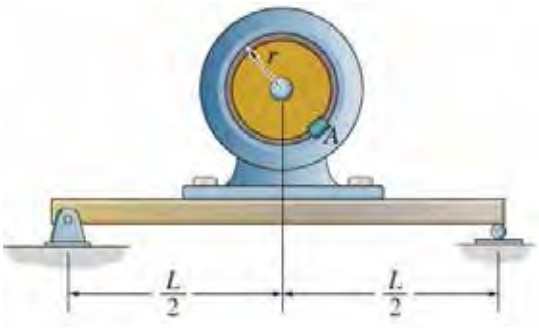
22-61 . .په ستونزه 22-60 کې د ټرېلر د لړزیدا امپلیتود معلومه کړئ که چیرې تیزوالی یی v = 15 km/h وي.



پ 22-60/61

22-62 . د کتلې M موټور په یوه ساده ملاتړ شوي بیم سره چې کتله یی د پام وړ نه ده اینښودل شوي دي. که چیرې د کتلې m بلاک A په روټر باندې نښلول شوی وي، چې په ثابت زاویوي

سرعت w سره څرخيږي، د دايمي حالت (steady-state) لړزيدا امپليتود (amplitude) معلوم کړئ. مرسته: کله چې بيم په خپل منځني واټن کې د P متركزی قوې سره مخ وي، دا په دې ټکي کې $d = PL^3/48EI$ کږيږي. دلته E د موادو ځانګړتيا، د ينګ د ايلستيسيتي ماجولس دی، او I د بيم د مقطع د ساحې انرشيايی مومنټ دی.



پ 22-62

22-63 . يو بلاک چې 0.8 kg کيلوګرامه کتله لري د 120 N/m کلکوالی يوه فنرځخه ځوړند دی. که چيرې يو ډيشپاټ د 2.5 N کمزوره کولو قوه چمتو کوي کله چې د بلاک سرعت 0.2 m/s وي، د آزاد لړزيدا موده معلومه کړئ.

*22-64 . بلاک، چې 15 lb پونډه تول لري، په يوه مايع کې غوټه دی، داسې چې په بلاک باندې عمل کوونکې کمزوره کولو قوه د $F = (0.8|v|)$ lb مقدار لري، چيرې چې v په ft/s کې د بلاک سرعت دی. که چيرې بلاک 0.8 ft ښکته کش شي او له دريدلی حالت نه خوشې شي، د وخت د تابع په توګه د بلاک موقعيت معلوم کړئ. فنر د $k = 40$ lb/ft کلکوالی لري. مثبت بې ځايه کيدل په ښکته لور وګڼئ.



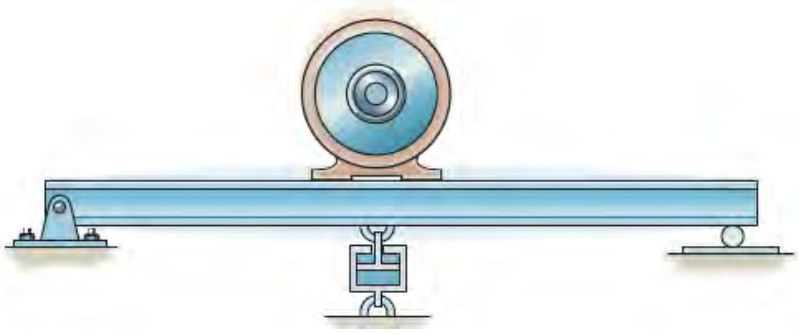
پ 22-63/64

22-65 . يو 7 lb بلاک د $k = 75$ lb/ft کلکوالی يوه فنر څخه ځوړند دی. هغه ملاتړ چې فنر ورسره نښلول شوی دی ساده هارمونيک حرکت ورکول شوی چې د $d = (0.15 \sin 2t)$ ft په توګه څرګنديدی شي، چيرې چې t په ثانيو کې ده. که چيرې د کمزوره کولو فکتور $c/c_c = 0.8$ وي، د دايمي حالت لړزيدا د فاز زاويه f معلومه کړئ.

22-66 . په پوښتنه 22-65 کې د بلاک، فنر، او ډیشپاټ ترکیب لپاره د لویوالي (magnification) فکتور معلوم کړئ.

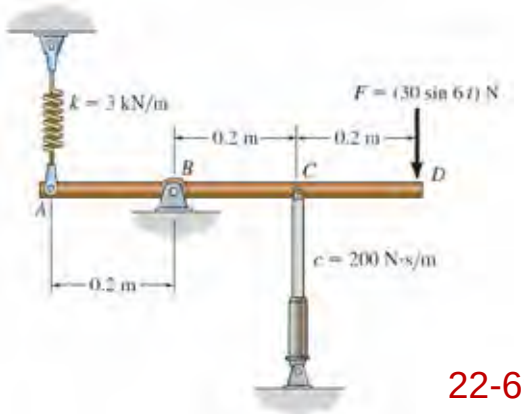
22-67 . یو بلاک چې 7 kg کیلوګرامه کتله لري د $k = 600$ N/m کلکوالی یوه فنر څخه ځوړند دی. که چیرې بلاک ته په $t = 0$ کې د خپل توازن موقعیت څخه د 0.6 m/s پورته سرعت ورکړل شي، د وخت د تابع په توګه د هغه موقعیت معلوم کړئ. فرض کړئ چې د بلاک مثبت بې ځایه کیدل ښکته ده او دا چې حرکت په یو محیط کې ترسره کیږي چې د کمزورې کولو قوه $F = (50 \cdot |v|)$ N چمتو کوي، چیرې چې v په m/s کې دی.

22-68* . 200-lb بریښنایي موټور د ساده ملاتړ شوي بیم په منځني برخه کې ټینګ شوی دی. معلومه شوې چې بیم 2 in کږیږي کله چې موټور نه چلیږي. موټور یو غیرمرکزي فلای ویل څرخوي چې د محور څخه 5 in لرې د 1 lb نامتوازن تول سره معادل دی. که چیرې موټور په 100 rpmکې څرخیږي، د دایمي حالت لړزیدا امپلیتود معلوم کړئ. د کمزورې کولو فکتور $c/c_c = 0.20$دی. د بیم کتله په پام کې مه نیسئ.



پ 22-68

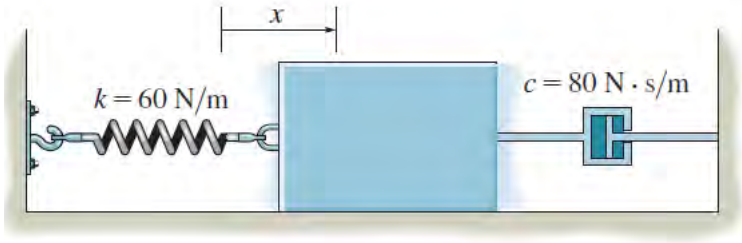
22-69 . که چیرې 12-kg-کیلوګرامه میله د $F = (30 \sin 6t)$ N موده یې قوې سره مخ وي، چیرې چې t په ثانیو کې ده، د پن B په شاوخوا د میلې د دایمي حالت لړزیدا امپلیتود q_{max}معلوم کړئ. فرض کړئ چې q کوچنی دی.



پ 22-69

22-70 . د کمزوره کولو فکتور، c/c_c، د یوه سیستم د لړزیدا حرکت پرله پسې امپلیتود اندازه کولو په واسطه په تجربي توګه ټاکل کیدی شي. که چیرې د دې اعظمي بې ځایه کیدو دوه یې د x_1او x_2 په واسطه تقریب کیدی شي، لکه څنګه چې په انځور 22-16 کې ښودل شوي، وښیئ چې $\ln(x_1/x_2) = 2\pi(c/c_c)/\sqrt{1-(c/cc)^2}$. مقدار $\ln(x_1/x_2)$ د لوګاریتمي کمښت په نوم یادیږي.

22-71 . د 10-kg بلاک-فنر- دمپر سیستم کمزوره شوی دی. که چیرې بلاک $x = 50$ mm ته بې ځایه شي او له دریدلی حالت څخه خوشې شي، د $x = 2$ mm موقعیت ته د بیرته راتګ لپاره اړین وخت معلوم کړئ.



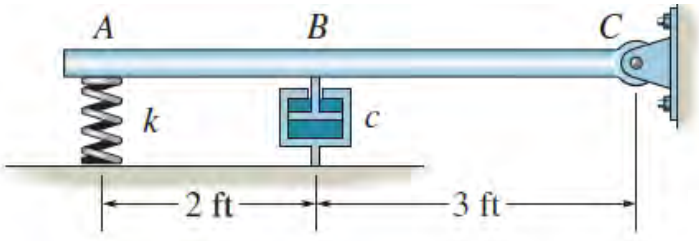
پ 22-71

*22-72 . بلاک، چې 12 lb وزن لري، په یوه مایع کې غوټه دی داسې چې په بلاک باندې عمل کوونکي کمزوره کولو قوه د $F = (0.7|v|)$ lb مقدار لري، چیرې چې v په ft/s کې دی. که چیرې بلاک 0.62 ft ښکته کش شي او له دریدلی حالت نه خوشې شي، د وخت د تابع په توګه د بلاک موقعیت معلوم کړئ. فنر د $k = 53$ lb/ft کلکوالی لري. فرض کړئ چې مثبت بې ځایه کیدل ښکته لور ته دي.



پ 22-72

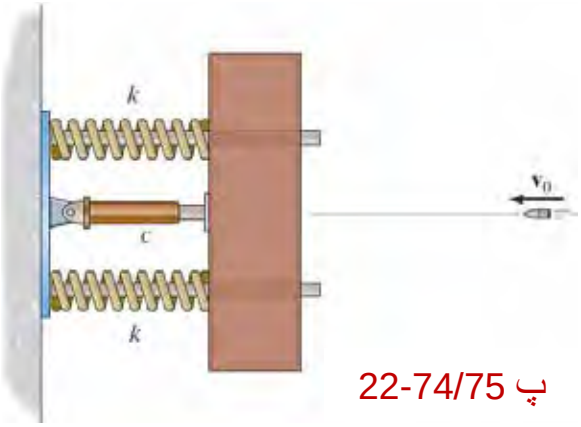
22-73 . میله 6 lb تول لري. که چیرې د فنر کلکوالی $k = 8$ lb/ft وي او ډیشپاټ د $c = 60$ lb·s/ft کمزوره کولو ضریب لري، هغه تفاضلي معادله معلومه کړئ چې د میلې د څرخیدو د زاویې θ له جنسه حرکت تشریح کوي. همدارنګه، د ډیشپاټ کمزوره کولو ضریب باید څه وي که چیرې میله باید په بحراني توګه کمزوره شي؟



پ 22-73

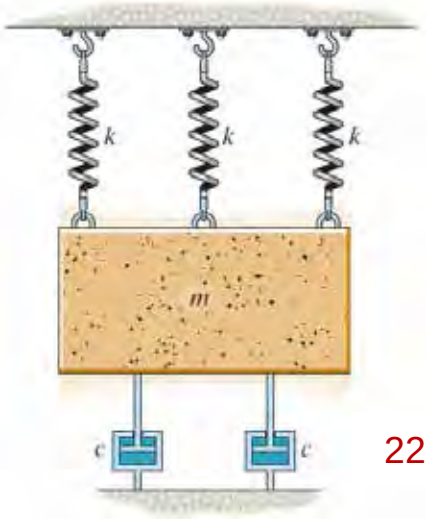
22-74 . د کتلې m یوه مرمۍ د کتلې M هدف ته د رسیدو څخه مخکې $\mathbf{v}_0$ سرعت لري. که چیرې مرمۍ په هدف کې ننوځي، او لړزیدا په بحرانی توګه کمزوریی شي، د ډیشپاټ کمزوره کولو ضریب، او د فنرونو اعظمي غونجیدل معلوم کړئ. هدف آزاد دی چې د هغو دوو افقي لارښودونو په اوږدو کې حرکت وکړي چې په فنرونو کې "ځای پر ځای" شوي دي.

22-75 . د کتلې m یوه مرمۍ د کتلې M هدف ته د رسیدو څخه مخکې $\mathbf{v}_0$ سرعت لري. که چیرې مرمۍ په هدف کې ننوځي، او د ډیشپاټ کمزوره کولو ضریب $0 < c << c_c$ وي، د فنرونو اعظمي غونجیدل معلوم کړئ. هدف آزاد دی چې د هغو دوو افقي لارښودونو په اوږدو کې حرکت وکړي چې په فنرونو کې "ځای پر ځای" شوي دي.



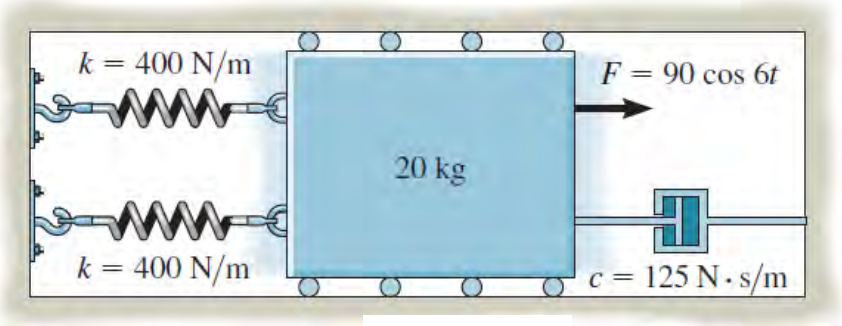
پ 22-74/75

*22-76 . د ښودل شوي کمزوره شوي لړزیدلی سیستم لپاره د حرکت تفاضلي معادله معلومه کړئ. څه ډول حرکت پیښیږي؟ $k = 100$ N/m ، $c = 200$ N·s/m، $m = 25$ kg ونیسئ.



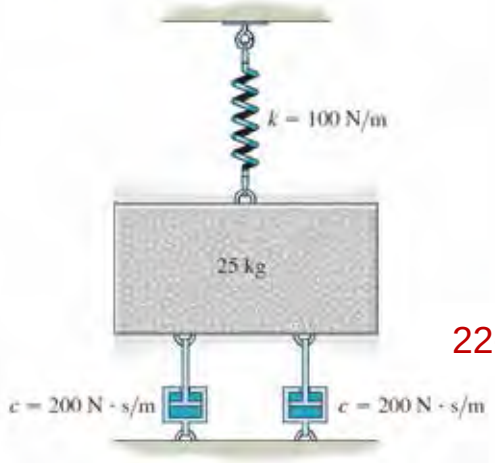
پ 22-76

22-77. 20-kg بلاک د هارمونیک قوې $F = (90 \cos 6t)$ N عمل سره مخ دی، چیرې چې t په ثانیو کې ده. هغه معادله ولیکئ چې د دایمي حالت حرکت تشریح کوي.



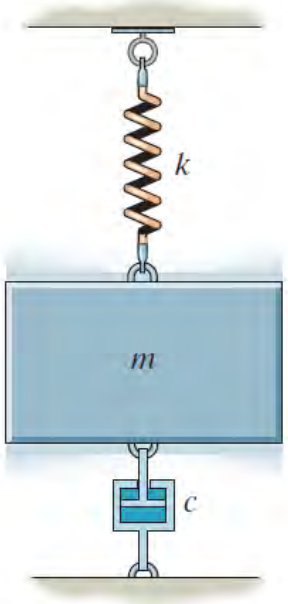
پ 22-77

22-78 . د بنودل شوي کمزوره شوي لړزيدلی سيستم لپاره د حرکت تفاضلي معادله معلومه کړئ. څه ډول حرکت پيښيږي؟



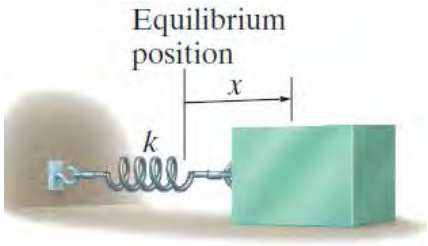
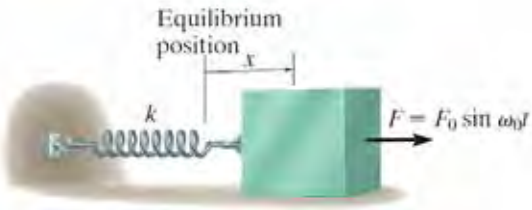
پ 22-78

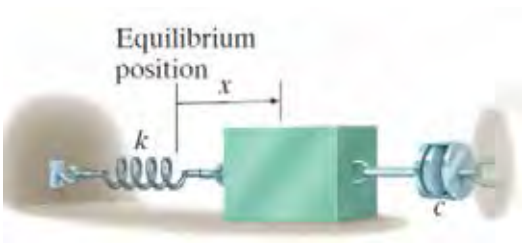
22-79 . .د بنودل شوي ميخانيکي سيستم سره معادل بريښنايي سرکټ رسم کړئ. هغه تفاضلي معادله څه ده چې په سرکټ کې چارج q تشريح کوي؟



پ 22-79

د فصل بيا کتنه

CHAPTER REVIEW	د فصل بيا کتنه
 $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ $\quad \tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$ $\quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}$	**نه کمزوري شوي آزاد لړزيدا**(Undamped Free Vibration) د يو جسم آزاد لړزيدا هغه وخت پيښيږي کله چې د جاذبې يا د ايلستيکي بيرته راګرځېدونکي قوې د حرکت سبب کيږي. دا حرکت کمزوره شوي نه دي کله چې د اصطکاک قوې په پام کې ونه نيول شي. د يو کمزوره، آزادانه لړزيدونکی جسم موده يې حرکت د هغه د توازن له موقعيت څخه په بې ځايه کولو او بيا د حرکت معادله په مسير باندې پلي کولو سره مطالعه کېدای شي. د يوه-درجې-آزادۍ سيستم لپاره، د حاصل شوې ډيفرينشل معادلې ليکل د هغې د طبيعي فريکونسۍ Wn په اساس کېدای شي.
 $x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \sin \omega_0 t$	**نه کمزوره شوي اجباري لړزيدا** (Undamped Forced Vibration) کله چې د حرکت معادله په داسې يو جسم باندې تطبيق شي چې د موده يې قووې لاندې وي، يا د تکيه ځای يې د W_0 فريکونسۍ سره بې ځايه کېدنه ولري، نو د ډيفرينشل معادلې حل له يوه متممې حل او يو ځانګړي حل څخه جوړ شوی وي. متممه حل د آزاد لړزيدا له امله رامنځته کيږي او کېدای شي له پامه وغورځول شي. ځانګړی حل د اجباري لړزيدا له امله رامنځته کيږي. رېزوننس هغه وخت پيښيږي کله چې د لړزيدا طبيعي فريکونسي W_n د اجباري فريکونسۍ W_0 سره مساوي وي. له دې څخه بايد ډډه وشي، ځکه چې حرکت به غير محدود کېدو ته ميلان پيدا کړي.

وسکس کمزوره شوي آزاد لړزيدا (Viscous Damped Free Vibration) يوه وسکس کمزوزه کوونکي قوه د مايع يا ګاز د ډرګ له امله پيدا کيږي کله چې سيستم لړزيدا کوي. که حرکت ورو وي، دا ډرګ قوه به د سرعت سره متناسب وي، يعنې $F = c\dot{x}$ چېرته چې c د وسکس کمزوره کوونکی ضريب دی. د دې قيمت د بحراني کمزوره کوونکي ضريب $c_c = 2mw_n$ سره په پرتله کولو،مور کولای شود لړزيدا ډول چې پېښيږي، مشخص کړو.که $c > c_c$ وي، دا يو ډېر کمزوره شوی سيستم دی؛ که $c = c_c$ وي، دا يو بحراني کمزوره شوی سيستم دی؛ او که $c < c_c$ وي، دا يو لږ کمزوره شوی سيستم دی.	
وسکس کمزوره شوي د قووه تر اثر لاندی لړزيدا (Viscous Damped Free Vibration) د يو-درجې-آزادۍ سيستم لپاره د لړزيدا ترټولو عمومي ډول هغه وخت پېښيږي کله چې سيستم کمزوره شوی وي او تر موده يی اجباري حرکت لاندې وي. حل پوهولی شی چې څنګه د کمزوره کوونکی فکټور، c/c_c، او د فريکونسۍ تناسب، w_0/w_n، په لړزيدا باندې اغيزه کوي. رېزوننس (resonance) مخنيوی کيدی شی په دې شرط چې $c/c_c > 0$ او $w_0/w_n \neq 1$ وي.	
برېښنايي سرکټ انه لاګ (Electrical Circuit Analogs) د يو پېچلي ميخانيکي سيستم لړزيدا حرکت د هغه د يو برېښنايي سرکټ په توګه ماډل کولو سره مطالعه کېدای شي. دا ځکه شوني ده چې هغه ډيفرينشل معادلې چې د هر سيستم چلند اداره کوي، يو شان دي.	

ضمیمه

A

اصطلاحات ریاضی

(MATHEMATICAL EXPRESSIONS)

MATHEMATICAL EXPRESSIONS

Quadratic Formula

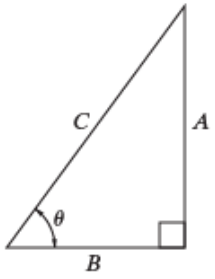
If $ax^2 + bx + c = 0$, then $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Hyperbolic Functions

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Trigonometric Identities



$$\sin\theta = \frac{A}{C}, \csc\theta = \frac{C}{A}$$

$$\cos\theta = \frac{B}{C}, \sec\theta = \frac{C}{B}$$

$$\tan\theta = \frac{A}{B}, \cot\theta = \frac{B}{A}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Power-Series Expansions

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Derivatives

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

Integrals

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,$$
$$a > 0$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, c < 0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax) + C \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin(ax) + C \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

ضمیمه

B

ویکتوری تحلیل

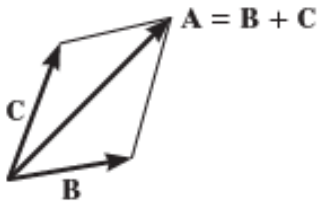
(VECTOR ANALYSIS)

لاندې بحث د ویکټور تحلیل یوه لنډه بیاکتنه وړاندې کوي .د دې موضوعاتو په اړه نور تفصیلي معلومات په انجینري میخانیک: سټاټیکس کې ورکړل شوي دي.

ویکټور (Vector). یو ویکټور، **A**، هغه کمیت دی چې اندازه او لوری لري، او د متوازي الاضلاع د قانون سره سم جمع کیږي. لکه څنګه چې په انځور B-1 کې ښودل شوي، **A** + **B** = C، چیرې چې **A** د پایلې یا محصله ویکټور دی او **B** او **C** جز ویکټورونه دي.

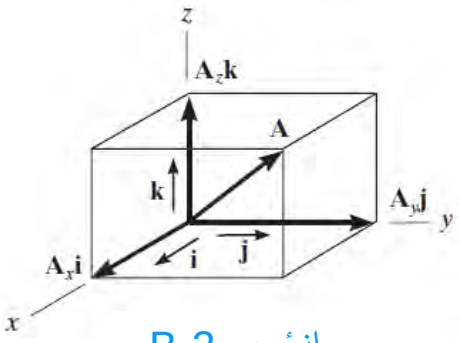
واحد ویکټور (Unit Vector). د واحد ویکټور، u_A، د یو "بې بعده" واحد اندازه لري او د A په همغه لوري کې عمل کوي. دا د A په خپل مقدار A باندې د تقسیم په واسطه ټاکل کیږي، یعنې

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \qquad \text{(B–1)}$$



انځور B-1

د کارټیزین ویکټور نوټیشن (Cartesian Vector Notation). د مثبت *x* ، *y*، *z* محورونو لوری د کارټیزین واحد ویکټورونو **i** ، **j**، **k** په واسطه تعریف شوی دی .لکه څنګه چې په انځور B-2 کې ښودل شوي، ویکټور **A** د هغې د x ، y، z اجزاوو په اضافه کولو سره جوړیږي :



انځور B-2

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \qquad \text{(B–2)}$$

د A اندازه د لاندې معادلې څخه معلومیږي :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \text{(B–3)}$$

د **A** لوری د هغې د کوردیناتو لوري زاویو (*coordinate direction angles*) په شرایطو کې تعریف شوی، *a*، *b*، *g*، چې د **A** له لکۍ څخه مثبت *x* ، y، *z* محورونو ته اندازه کیږي، انځور B-3 . دا زاویې د لوري کوساینونو (*direction cosines*) په واسطه ټاکل کیږي چې د واحد ویکټور $\mathbf{u}_A$ د **i** ، **j**، **k** اجزاوو استازیتوب کوي؛ یعنې، د معادلو B-1 او B-2 څخه

$$\mathbf{u}_A = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \qquad \text{(B–4)}$$

نو د کوساینونو لوري عبارت دي په

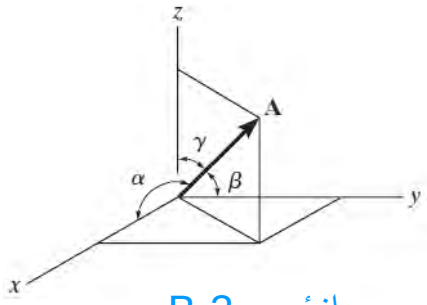
$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \qquad \text{(B–5)}$$

نو

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

او په کارولو د معادلی3-B دا کيږي

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \text{(B–6)}$$



انځور B-3

د کراس ضربي عمليات (The Cross Product).

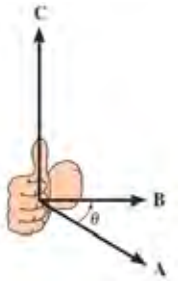
د دوو ويکټورونو **A** او **B** ضربي حاصل ، چې **C** ويکټور حاصليږي، داسې ليکل کيږي

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad \text{(B–7)}$$

او داسې لوستل کيږي چې **C** مساوي دی په" **A** کراس **B** " . د **C** اندازه داسې ده

$$C = AB\sin\theta \qquad \text{(B–8)}$$

چيرې چې q د **A** او **B** د لکۍ ترمنځ زاويه ده $(0^o \le q \le 180^o)$. د **C** لوری د ښي لاس د قاعدې په واسطه تاکل کيږي، چې پکې د ښي لاس ګوتې له **A** څخه **B** ته کږې کيږي او غټه ګوته د **C** په لور اشاره کوي، انځور B–4 . دا ويکټور د **A** او **B** ويکټورونو لرونکي سطحې ته عمود دی.



انځور B-4

د ویکټور ضرب حاصل کمیوټیټیف (*commutative*) نه دی، یعني $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
بلکې،

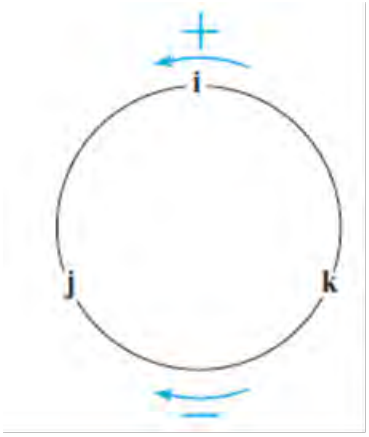
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad \text{(B–9)}$$

د ویشلو قانون (*distributive*) اعتبار لري؛ یعني،

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \qquad \text{(B–10)}$$

او د ضرب حاصل کیدای شي چې د سکلر m سره په هر ډول ضرب شي؛ یعني،

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m \qquad \text{(B–11)}$$



انځور B-5

معادله B–7 کولای شي د کارتیزین واحد ویکټورونو د هر جوړه ضرب موندلو لپاره وکارول شي. د مثال په توګه، د **i** X **j** موندلو لپاره، اندازه یې $(i)(j)\sin 90° = (1)(1)(1) = 1$ ده، او لوری یې **k** + دی چې د ښي لاس د قاعدې څخه، د **i** X **j** لپاره ټاکل کیږي،انځور B–2 . یو ساده طرحه چې په انځور B–5 کې ښودل شوې ښایي د دې او نورو پایلو، کله چې اړتیا رامنځته کیږي، په ترلاسه کولو کې مرسته وکړي. که چیرې دایره هغسې جوړه شي لکه څنګه چې ښودل شوې، نو د دوو واحد ویکټورونو "ضرب کول" په خلاف د ساعت لوري کې د دایرې په اوږدو کې د دریم مثبت واحد ویکټور لامل ګرځي، د مثال په توګه، **k** X **i** = **j** . د ساعت په لور حرکت کولو سره، منفي واحد ویکټور ترلاسه کیږي، د مثال په توګه، **i** X **k** = - **j** .

که چیرې **A** او **B** په کارتیزین جزء بڼه څرګند شوي وي، نو د ضرب حاصل، معادله B–7 ، کیدای شي د ډیټرمیننټ په پراخولو سره وارزول شي

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(B–12)}$$

دا ورکوي

$$\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

په یاد ولرئ چې د ضرب حاصل په ستاټیکس (ساکنه میخانیک) کې د قوې **F** مومنټ د *O* ټکي په اړه تعریفولو لپاره کارول کیږي، چې په دې صورت کې

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \text{(B–13)}$$

چیرې چې **r** یو موقعیتي ویکټور دی چې د *O* ټکي څخه د **F** د عمل په کرښه باندې هر ټکي ته لارښوونه کوي.

د ډات ضربي حاصل (The Dot Product). د دوو ویکټورونو **A** او **B** ډات ضربي حاصل ، چې یو سکلر حاصلوي، داسې تعریف کیږي(B–14) A · B = AB cos u :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad \text{(B–14)}$$

او لوستل کیږي " **A** ډات **B** "په توګه.

زاویه q د **A** او **B** د لکۍ ترمنځ جوړیږي ($0^o \le q \le 180^o$) .

ډات پروډکټ کمیوټېټیف دی؛ یعنې،

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{(B–15)}$$

د ویشلو قانون (distributive) اعتبار لري؛ یعنې،

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \qquad \text{(B–16)}$$

اود سکلر ضرب کول په هر ډول ترسره کیدای شي، یعنې،

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m \qquad \text{(B–17)}$$

د معادلې B–14 په کارولو سره، د هر دوو کارتیزین ویکټورونو ترمنځ ډات حاصل ټاکل کیدای شي. د مثال په توګه، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$ او $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$.

که چیرې **A** او **B** په کارتیزین جزء بڼه څرګند شوي وي، نو ډات حاصل، معادله C–14 ، کولای شي له لاندې فورمول څخه وټاکل شي

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad \text{(B–18)}$$

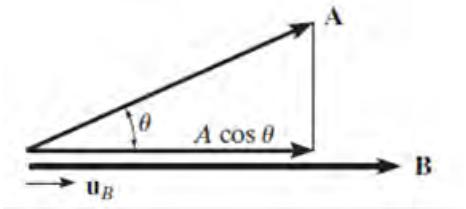
ډات حاصل کیدای شي د هغې زاویې q د ټاکلو لپاره وکارول شي چې د دوو ویکټورونو ترمنځ جوړه شوې وي. د معادلې B–14 څخه

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \qquad \text{(B–19)}$$

دا هم شوني ده چې د ډات حاصل په کارولو سره په یوه ټاکلي لوري کې د یوه ویکټور جزء وموموـ .د مثال په توګه، د ویکټور **A** د جزء (یا پروجیکشن) اندازه د B په لوري، انځور B–6، د $A \cos q$ په توګه تعریف کیږي. د معادلې B–14 څخه، دا اندازه ده

$$A\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B \qquad \text{(B–20)}$$

چیرې چې $\mathbf{u}_B$ یو واحد ویکټور دی چې د **B** په لوري عمل کوي، انځورB–6 .



انځور B-5

د ویکټور توابعو مشتق اخیستل او انټیګرال کول (Differentiation and Integration of Vector Functions)

. د سکلر توابعو د مجموعو او حاصل ضربونو د مشتق اخیستلو او انټیګرال کولو قواعد د ویکټور توابعو لپاره هم د تطبیق وړ دي. د مثال په توګه، د دوو ویکټور توابع **A**(*s*) او **B**(*s*) په اړه فکر وکړئ. په دې شرط چې دا توابع د ټولو *s* لپاره هموار او پیوسته وي، نو

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \qquad \text{(B–21)}$$

$$\int (\mathbf{A} + \mathbf{B})\, ds = \int \mathbf{A}\, ds + \int \mathbf{B}\, ds \qquad \text{(B–22)}$$

د کراس ضرب حاصل کيږي

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\left(\frac{d\mathbf{A}}{ds}\times\mathbf{B}\right)+\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right) \qquad \text{(B–23)}$$

په ورته ډول د ډات حاصل لپاره

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} \qquad \text{(B–24)}$$

ضميمه

C

زنجيري قانون

(THE CHAIN RULE)

د کلکيولس د ځنځير قاعده د يو مرکب تابع د وخت مشتق معلومولو لپاره کارول کيږي. د مثال په توګه، که y د x تابع وي او x د t تابع وي، نو مور کولی شو د y مشتق د t په نسبت په لاندې ډول پيدا کړو

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}\dot{x}$$

په بل عبارت، د $\dot{y}$ موندلو لپاره، مور د y تغير د x په نسبت پيدا کوو، او بيا د x تغير د وخت په نسبت. نو،

$$\dot{y}=\frac{dy}{dx}\dot{x} \qquad \text{(C–1)}$$

که چیرې د دې معادلې دوهم وخت مشتق معلوم شي، نو د حاصل ضرب قاعده d(uv) = du v + u dv باید د ځنځیر قاعدې سره وکارول شي کله چې د وخت مشتقات اخلو ځکه چې dy/dx او ẋ دواړه د وخت توابع دي. نو اجازه راکړئ چې u = dy/dx او v = ẋ وي، مونږ لرو :

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\dot{x} + \frac{dy}{dx}\frac{d}{dt}(\dot{x})$$

د بنې لوڼۍ اصطلاح ته د ځنځیر قاعده پلي کولو سره، مونږ لومړی د (dy/dx) تغیر د x په نسبت پیدا کوو، او بیا د x تغیر د وخت په نسبت .

$$\ddot{y} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\right)\dot{x} + \left(\frac{dy}{dx}\right)\ddot{x}$$

یا

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x} \qquad \text{(C–2)}$$

مثالونه

مثال C-1 که $y = x^3$ او $x = t^4$ وي، $\ddot{y}$ ، د y دوهم مشتق د وخت په نسبت پیدا کړئ.

حل

د ځنځیر قاعدې په کارولو سره، معادله C-1 کیږي

$$\dot{y} = 3x^2\,\dot{x}$$

د دوهم وخت مشتق ترلاسه کولو لپاره مونږ باید د حاصل ضرب قاعده وکاروو ځکه چې $3x^2$ او $\dot{x}$ دواړه د وخت توابع دي،او همدارنګه، د $3x^2$ لپاره د ځنځیرقاعده باید پلي شي. نو $u = 3x^2$ او $v = \dot{x}$ سره، مونږ لرو:

$$d(uv) = du\,v + u\,dv$$
$$\ddot{y} = [6x\dot{x}]\dot{x} + 3x^2[\ddot{x}]$$
$$= 3x[2\dot{x}^2 + x\ddot{x}]$$

څرنګه چې $x = t^4$ ، نو $\dot{x} = 4t^3$ او $\ddot{x} = 12t^2$ داسې چې

$$\ddot{y} = 3(t^4)[2(4t^3)^2 + t^4(12t^2)]$$

ځواب $= 132t^{10}$

مورِ کولی شو معادله C-2 هم پلي کړو

$$\ddot{y} = (6x)(4t^3)^2 + (3x^2)(12t^2)$$

د $x = t^4$ په ځایګزین کولو سره، مورِ لاندې پایله ترلاسه کوو

$$y = 132t^{10} \qquad Ans.$$

په یاد ولرئ چې دا پایله کیدای شي د توابعو د یوځای کولو او بیا د وخت مشتقاتو اخیستلو په واسطه هم ترلاسه شي، یعنې

$$y = x^3 = (t^4)^3 = t^{12}$$
$$\dot{y} = 12t^{11}$$
$$\ddot{y} = 132t^{10} \qquad Ans.$$

مثال C-2 که چېرې $y = xe^x$ او $x = t^2$, د $\ddot{y}$ ارزښت پیدا کړئ.

حل

ځرنګه چې x او e^x دواړه د وخت توابع دي نو د ضرب او د ځنځیر قوانین باید تطبیق شي. مورِ $u = x$ او $v = e^x$ ټاکو .

$$d(uv) = du\, v + u\, dv$$

$$\dot{y} = [\dot{x}]e^x + x[e^x\dot{x}]$$

د وخت دویم مشتق هم د ضرب او د ځنځیر د قوانینو کارول غواړي. په دې حالت کې د ضرب قانون په وروستۍ برخه کې پر دري متغیرو تطبیقېږي، یعنې x ، e^x، او $\dot{x}$. مورِ لرو

$$\ddot{y} = \{[\ddot{x}]e^x + \dot{x}[e^x\dot{x}]\} + \{[\dot{x}]e^x\dot{x} + x[e^x\dot{x}]\dot{x} + xe^x[\dot{x}]\}$$
$$= e^x[\ddot{x}(1 + x) + \dot{x}^2(2 + x)]$$

ځرنګه چې $x = t^2$ نو $\dot{x} = 2t$ ، $\ddot{x} = 2$، نو د t په اساس لرو

$$\ddot{y} = e^{t^2}[2(1 + t^2) + 4t^2(2 + t^2)]$$

مثال C-3

که چيرې مسير په مرکزي مختصاتو کې د $r = 5q^2$ په توګه ورکړل شوی وي، چېرته چې q د وخت يوه معلومه تابع ده، $\ddot{r}$ پيدا کړئ .

حل

لومړی، د ځنځير قانون کارولو سره او بيا د ځنځير او د ضرب قوانينو کارولو سره چېرته چې $u = 10u$ او $v = q^{\cdot}$ ، مونږ لرو

$$r = 5\theta^2$$

$$\dot{r} = 10\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta};$$

$$d(uv) = du\, v + u\, dv$$

$$\ddot{r} = 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})]$$

$$= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta}$$

د معادلې C-2 کارولو سره وښاياست چې تاسو ته ورته پايله ترلاسه کيږي.

بنسټیز پوښتنو ځوابونه

ضمیمه
(APPENDIX)

د پوښتنو ځوابونه
(Fundamental Problems Solutions and Answers)

په دی برخه کی د پوښتنو اول ټکی د پښتو او انګلیسی په دی لاندی ډول بدل شوي دي . حرف د F بدل کړي په ب

د بیلګی په توګه

ب 1-1 = F1- 1

ب 1-1 = R1- 1

Fundamental Problems Solutions And Answers

Chapter 12

F12–1. $v = v_0 + a_c t$
$10 = 35 + a_c(15)$
$a_c = -1.67\ \text{m/s}^2 = 1.67\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Ans.*

F12–2. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$0 = 0 + 15t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$
$t = 3.06\ \text{s}$ *Ans.*

F12–3. $\int_0^s ds = \int_0^t (4t - 3t^2)\, dt$
$s = (2t^2 - t^3)\ \text{m}$
$s = 2(4^2) - 4^3$
$= -32\ \text{m} = 32\ \text{m} \leftarrow$ *Ans.*

F12–4. $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.5t^3 - 8t)$
$a = (1.5t^2 - 8)\ \text{m/s}^2$
When $t = 2\ \text{s}$,
$a = 1.5(2^2) - 8 = -2\ \text{m/s}^2 = 2\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Ans.*

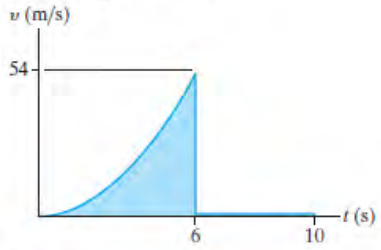
F12–5. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 8t + 6) = (4t - 8)\ \text{m/s}$
$v = 0 = (4t - 8)$
$t = 2\ \text{s}$ *Ans.*
$s|_{t=0} = 2(0^2) - 8(0) + 6 = 6\ \text{m}$
$s|_{t=2} = 2(2^2) - 8(2) + 6 = -2\ \text{m}$
$s|_{t=3} = 2(3^2) - 8(3) + 6 = 0\ \text{m}$
Plot these positions, then
$(\Delta s)_{\text{Tot}} = 8\ \text{m} + 2\ \text{m} = 10\ \text{m}$ *Ans.*

F12–6. $v\, dv = a\, ds$
$\int_{5\ \text{m/s}}^{v} v\, dv = \int_0^s (10 - 0.2s) ds$
$v = \left(\sqrt{20s - 0.2s^2 + 25}\right)\ \text{m/s}$
At $s = 10\ \text{m}$,
$v = \sqrt{20(10) - 0.2(10^2) + 25}$
$= 14.3\ \text{m/s} \rightarrow$ *Ans.*

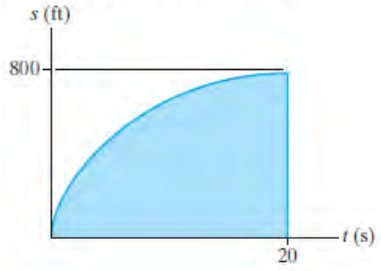
F12–7. $v = \int (4t^2 - 2)\, dt$
$v = \frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1$
$s = \int \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1\right) dt$
$s = \frac{1}{3}t^4 - t^2 + C_1 t + C_2$
$t = 0, s = -2, C_2 = -2$
$t = 2, s = -20, C_1 = -9.67$
$t = 4, s = 28.7\ \text{m}$ *Ans.*

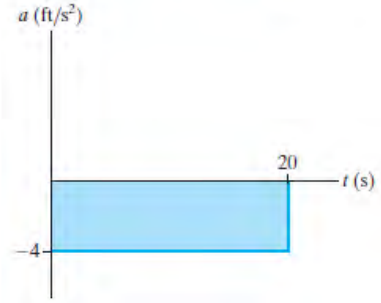
F12–8. $a = v\frac{dv}{ds}$
$= (20 - 0.05s^2)(-0.1s)$
At $s = 15\ \text{m}$,
$a = -13.1\ \text{m/s}^2 = 13.1\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Ans.*

F12–9. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(0.5t^3) = 1.5t^2$
$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(108) = 0$ *Ans.*



F12–10. $ds = v\, dt$
$\int_0^s ds = \int_0^t (-4t + 80)\, dt$
$s = -2t^2 + 80t$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 80) = -4\ \text{ft/s}^2 = 4\ \text{ft/s}^2 \leftarrow$
Also,
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 80\ \text{ft/s}}{20\ \text{s} - 0} = -4\ \text{ft/s}^2$

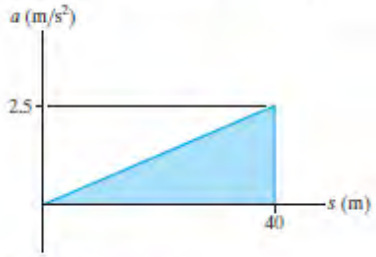




F12–11. $a\,ds = v\,dv$

$a = v\frac{dv}{ds} = 0.25s\frac{d}{ds}(0.25s) = 0.0625s$

$a|_{s=40\text{ m}} = 0.0625(40\text{ m}) = 2.5\text{ m/s}^2 \rightarrow$



F12–12. For $0 \le s \le 10$ m

$a = s$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^s s\,ds$

$v = s$

at $s = 10$ m, $v = 10$ m/s

For $10\text{ m} \le s \le 15$

$a = 10$

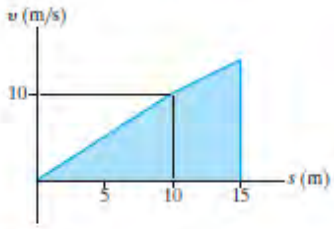
$\int_{10}^v v\,dv = \int_{10}^s 10\,ds$

$\frac{1}{2}v^2 - 50 = 10s - 100$

$v = \sqrt{20s - 100}$

at $s = 15$ m

$v = 14.1$ m/s *Ans.*



F12–13. $0 \le t < 5$ s,

$dv = a\,dt \quad \int_0^v dv = \int_0^t 20\,dt$

$v = (20t)$ m/s

$5\text{ s} < t \le t'$,

$(+\rightarrow)\quad dv = a\,dt \quad \int_{100\text{ m/s}}^v dv = \int_{5\text{ s}}^t -10\,dt$

$v - 100 = (50 - 10t)$ m/s,

$0 = 150 - 10t'$

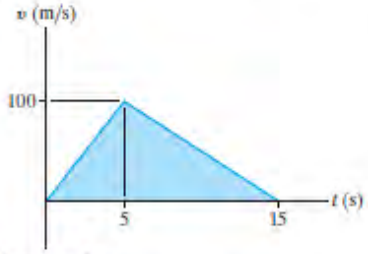
$t' = 15$ s

Also,

$\Delta v = 0 =$ Area under the a–t graph

$0 = (20\text{ m/s}^2)(5\text{ s}) + [-(10\text{ m/s})(t' - 5)\text{ s}]$

$t' = 15$ s



F12–14. $0 \le t \le 5$ s,

$ds = v\,dt \quad \int_0^s ds = \int_0^t 30t\,dt$

$s|_0^s = 15t^2|_0^t$

$s = (15t^2)$ m

$5\text{ s} < t \le 15$ s,

$(+\rightarrow)\ ds = v\,dt; \quad \int_{375\text{ m}}^s ds = \int_{5\text{s}}^t (-15t + 225)dt$

$s = (-7.5t^2 + 225t - 562.5)$ m

$s = (-7.5)(15)^2 + 225(15) - 562.5$ m

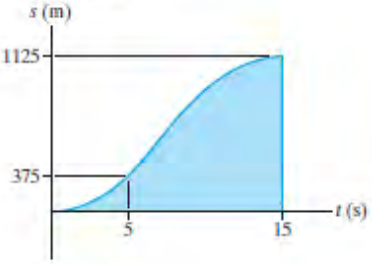
$= 1125$ m *Ans.*

Also,

$\Delta s =$ Area under the v–t graph

$= \frac{1}{2}(150\text{ m/s})(15\text{ s})$

$= 1125$ m *Ans.*



F12–15. $\int_0^x dx = \int_0^t 32t\,dt$

$x = (16t^2)$ m (1)

$\int_0^y dy = \int_0^t 8\,dt$

$t = \frac{y}{8}$ (2)

Substituting Eq. (2) into Eq. (1), get

$y = 2\sqrt{x}$ *Ans.*

F12–16. $y = 0.75(8t) = 6t$

$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8\ \text{m/s} \rightarrow$

$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6\ \text{m/s} \uparrow$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8\ \text{m/s})^2 + (6\ \text{m/s})^2}$

$= 10\ \text{m/s}$ *Ans.*

F12–17. $y = (4t^2)\ \text{m}$

$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(4t^4\right) = \left(16t^3\right)\ \text{m/s} \rightarrow$

$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(4t^2\right) = (8t)\ \text{m/s} \uparrow$

When $t = 0.5$ s,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s})^2 + (4\ \text{m/s})^2}$

$= 4.47\ \text{m/s}$ *Ans.*

$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}\left(16t^3\right) = \left(48t^2\right)\ \text{m/s}^2$

$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(8t) = 8\ \text{m/s}^2$

When $t = 0.5$ s,

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(12\ \text{m/s}^2)^2 + (8\ \text{m/s}^2)^2}$

$= 14.4\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–18. $y = 0.5x$

$\dot{y} = 0.5\dot{x}$

$v_y = t^2$

When $t = 4$ s,

$v_x = 32\ \text{m/s} \qquad v_y = 16\ \text{m/s}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 35.8\ \text{m/s}$ *Ans.*

$a_x = \dot{v}_x = 4t$

$a_y = \dot{v}_y = 2t$

When $t = 4$ s,

$a_x = 16\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = 8\ \text{m/s}^2$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17.9\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–19. $v_y = \dot{y} = 0.5\,x\,\dot{x} = 0.5(8)(8) = 32\ \text{m/s}$

Thus,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 33.0\ \text{m/s}$ *Ans.*

$a_y = \dot{v}_y = 0.5 \quad \dot{x}^2 + 0.5x\ddot{x}$

$= 0.5(8)^2 + 0.5(8)(4)$

$= 48\ \text{m/s}^2$

$a_x = 4\ \text{m/s}^2$

Thus,

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 48^2} = 48.2\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–20. $\dot{y} = 0.1x\dot{x}$

$v_y = 0.1(5)(-3) = -1.5\ \text{m/s} = 1.5\ \text{m/s} \downarrow$ *Ans.*

$\ddot{y} = 0.1[\dot{x}\dot{x} + x\ddot{x}]$

$a_y = 0.1[(-3)^2 + 5(-1.5)] = 0.15\ \text{m/s}^2 \uparrow$ *Ans.*

F12–21. $(v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_y(y_B - y_A)$

$0^2 = (5\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)(h - 0)$

$h = 1.27\ \text{m}$ *Ans.*

F12–22. $y_C = y_A + (v_A)_y t_{AC} + \frac{1}{2}a_y t_{AC}^2$

$0 = 0 + (5\ \text{m/s})t_{AC} + \frac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t_{AC}^2$

$t_{AC} = 1.0194\ \text{s}$

$(v_C)_y = (v_A)_y + a_y t_{AC}$

$(v_C)_y = 5\ \text{m/s} + (-9.81\ \text{m/s}^2)(1.0194\ \text{s})$

$= -5\ \text{m/s} = 5\ \text{m/s} \downarrow$

$v_C = \sqrt{(v_C)_x^2 + (v_C)_y^2}$

$= \sqrt{(8.660\ \text{m/s})^2 + (5\ \text{m/s})^2} = 10\ \text{m/s}$ *Ans.*

$R = x_A + (v_A)_x t_{AC} = 0 + (8.660\ \text{m/s})(1.0194\ \text{s})$

$= 8.83\ \text{m}$ *Ans.*

F12–23. $s = s_0 + v_0 t$

$10 = 0 + v_A \cos 30^\circ t$

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$

$3 = 1.5 + v_A \sin 30^\circ t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$

$t = 0.9334\ \text{s}, \quad v_A = 12.4\ \text{m/s}$ *Ans.*

F12–24. $s = s_0 + v_0 t$

$R\left(\frac{4}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{3}{5}\right)t$

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$

$-R\left(\frac{3}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{4}{5}\right)t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$

$t = 5.10\ \text{s}$

$R = 76.5\ \text{m}$ *Ans.*

F12–25. $x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$

$12\ \text{ft} = 0 + (0.8660\ v_A)t_{AB}$

$v_A t_{AB} = 13.856 \qquad (1)$

$y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2}a_y t_{AB}^2$

$(8 - 3)\,\text{ft} = 0 + 0.5v_A t_{AB} + \frac{1}{2}(-32.2\,\text{ft/s}^2)t_{AB}^2$

Using Eq. (1),

$5 = 0.5(13.856) - 16.1\,t_{AB}^2$

$t_{AB} = 0.3461\,\text{s}$

$v_A = 40.0\,\text{ft/s}$ *Ans.*

F12–26. $y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2}a_y t_{AB}^2$

$-150\,\text{m} = 0 + (90\,\text{m/s})t_{AB} + \frac{1}{2}(-9.81\,\text{m/s}^2)t_{AB}^2$

$t_{AB} = 19.89\,\text{s}$

$x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$

$R = 0 + 120\,\text{m/s}(19.89\,\text{s}) = 2386.37\,\text{m}$

$= 2.39\,\text{km}$ *Ans.*

F12–27. $a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.0625t^2) = (0.125t)\,\text{m/s}^2\big|_{t=10\,\text{s}}$

$= 1.25\,\text{m/s}^2$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.0625t^2)^2}{40\,\text{m}} = \left[97.656(10^{-6})t^4\right]\text{m/s}^2\big|_{t=10\,\text{s}}$

$= 0.9766\,\text{m/s}^2$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1.25\,\text{m/s}^2)^2 + (0.9766\,\text{m/s}^2)^2}$

$= 1.59\,\text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–28. $v = 2s\big|_{s=10} = 20\,\text{m/s}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20\,\text{m/s})^2}{50\,\text{m}} = 8\,\text{m/s}^2$

$a_t = v\frac{dv}{ds} = 4s\big|_{s=10} = 40\,\text{m/s}^2$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(40\,\text{m/s}^2)^2 + (8\,\text{m/s}^2)^2}$

$= 40.8\,\text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–29. $v_C^2 = v_A^2 + 2a_t(s_C - s_A)$

$(15\,\text{m/s})^2 = (25\,\text{m/s})^2 + 2a_t(300\,\text{m} - 0)$

$a_t = -0.6667\,\text{m/s}^2$

$v_B^2 = v_A^2 + 2a_t(s_B - s_A)$

$v_B^2 = (25\,\text{m/s})^2 + 2(-0.6667\,\text{m/s}^2)(250\,\text{m} - 0)$

$v_B = 17.08\,\text{m/s}$

$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(17.08\,\text{m/s})^2}{300\,\text{m}} = 0.9722\,\text{m/s}^2$

$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$

$= \sqrt{(-0.6667\,\text{m/s}^2)^2 + (0.9722\,\text{m/s}^2)^2}$

$= 1.18\,\text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–30. $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{24}x^2\right) = \frac{1}{12}x$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{12}x\right)\Big|_{x=10\,\text{ft}}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{10}{12}\right) = 39.81° = 39.8°$ *Ans.*

$\rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{12}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{12}\right|}\Big|_{x=10\,\text{ft}}$

$= 26.468\,\text{ft}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20\,\text{ft/s})^2}{26.468\,\text{ft}} = 15.11\,\text{ft/s}^2$

$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(6\,\text{ft/s}^2)^2 + (15.11\,\text{ft/s}^2)^2}$

$= 16.3\,\text{ft/s}^2$ *Ans.*

F12–31. $(a_B)_t = -0.001s = (-0.001)(300\,\text{m})\left(\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)\text{m/s}^2$

$= -0.4712\,\text{m/s}^2$

$v\,dv = a_t\,ds$

$\int_{25\,\text{m/s}}^{v_B} v\,dv = \int_0^{150\pi\,\text{m}} -0.001s\,ds$

$v_B = 20.07\,\text{m/s}$

$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(20.07\,\text{m/s})^2}{300\,\text{m}} = 1.343\,\text{m/s}^2$

$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$

$= \sqrt{(-0.4712\,\text{m/s}^2)^2 + (1.343\,\text{m/s}^2)^2}$

$= 1.42\,\text{m/s}^2$ *Ans.*

F12–32. $a_t\,ds = v\,dv$

$a_t = v\frac{dv}{ds} = (0.2s)(0.2) = (0.04s)\,\text{m/s}^2$

$a_t = 0.04(50\,\text{m}) = 2\,\text{m/s}^2$

$v = 0.2(50\,\text{m}) = 10\,\text{m/s}$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(10\text{ m/s})^2}{500\text{ m}} = 0.2\text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\text{ m/s}^2)^2 + (0.2\text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 2.01\text{ m/s}^2 \quad \textit{Ans.}$$

F12–33. $v_r = \dot{r} = 0$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (400\dot{\theta})\text{ ft/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$55\text{ ft/s} = \sqrt{0^2 + [(400\dot{\theta})\text{ ft/s}]^2}$
$\dot{\theta} = 0.1375\text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F12–34. $r = 0.1t^3\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.3375\text{ m}$
$\dot{r} = 0.3t^2\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.675\text{ m/s}$
$\ddot{r} = 0.6t\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.900\text{ m/s}^2$
$\theta = 4t^{3/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348\text{ rad}$
$\dot{\theta} = 6t^{1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348\text{ rad/s}$
$\ddot{\theta} = 3t^{-1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 2.449\text{ rad/s}^2$
$v_r = \dot{r} = 0.675\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (0.3375\text{ m})(7.348\text{ rad/s}) = 2.480\text{ m/s}$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$= (0.900\text{ m/s}^2) - (0.3375\text{ m})(7.348\text{ rad/s})^2$
$= -17.325\text{ m/s}^2$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.3375\text{ m})(2.449\text{ rad/s}^2)$
$+ 2(0.675\text{ m/s})(7.348\text{ rad/s}) = 10.747\text{ m/s}^2$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$= \sqrt{(0.675\text{ m/s})^2 + (2.480\text{ m/s})^2}$
$= 2.57\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$
$= \sqrt{(-17.325\text{ m/s}^2)^2 + (10.747\text{ m/s}^2)^2}$
$= 20.4\text{ m/s}^2 \quad \textit{Ans.}$

F12–35. $r = 2\theta$
$\dot{r} = 2\dot{\theta}$
$\ddot{r} = 2\ddot{\theta}$
At $\theta = \pi/4$ rad,
$r = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\text{ ft}$
$\dot{r} = 2(3\text{ rad/s}) = 6\text{ ft/s}$
$\ddot{r} = 2(1\text{ rad/s}) = 2\text{ ft/s}^2$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2\text{ ft/s}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\text{ ft}\right)(3\text{ rad/s})^2$
$= -12.14\text{ ft/s}^2$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$= \left(\frac{\pi}{2}\text{ ft}\right)(1\text{ rad/s}^2) + 2(6\text{ ft/s})(3\text{ rad/s})$
$= 37.57\text{ ft/s}^2$
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$
$= \sqrt{(-12.14\text{ ft/s}^2)^2 + (37.57\text{ ft/s}^2)^2}$
$= 39.5\text{ ft/s}^2 \quad \textit{Ans.}$

F12–36. $r = e^\theta$
$\dot{r} = e^\theta\dot{\theta}$
$\ddot{r} = e^\theta\ddot{\theta} + e^\theta\dot{\theta}^2$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (e^\theta\ddot{\theta} + e^\theta\dot{\theta}^2) - e^\theta\dot{\theta}^2 = e^{\pi/4}(4)$
$= 8.77\text{ m/s}^2 \quad \textit{Ans.}$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (e^\theta\ddot{\theta}) + (2(e^\theta\dot{\theta})\dot{\theta}) = e^\theta(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2)$
$= e^{\pi/4}(4 + 2(2)^2)$
$= 26.3\text{ m/s}^2 \quad \textit{Ans.}$

F12–37. $r = [0.2(1 + \cos\theta)]\text{ m}\big|_{\theta=30^\circ} = 0.3732\text{ m}$
$\dot{r} = \left[-0.2(\sin\theta)\dot{\theta}\right]\text{ m/s}\big|_{\theta=30^\circ}$
$= -0.2\sin 30^\circ(3\text{ rad/s})$
$= -0.3\text{ m/s}$
$v_r = \dot{r} = -0.3\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (0.3732\text{ m})(3\text{ rad/s}) = 1.120\text{ m/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(-0.3\text{ m/s})^2 + (1.120\text{ m/s})^2}$
$= 1.16\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$

F12–38. $30\text{ m} = r\sin\theta$
$r = \left(\frac{30\text{ m}}{\sin\theta}\right) = (30\csc\theta)\text{ m}$
$r = (30\csc\theta)\big|_{\theta=45^\circ} = 42.426\text{ m}$
$\dot{r} = -30\csc\theta\,\text{ctn}\,\theta\,\dot{\theta}\big|_{\theta=45^\circ} = -\left(42.426\dot{\theta}\right)\text{ m/s}$
$v_r = \dot{r} = -(42.426\dot{\theta})\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (42.426\dot{\theta})\text{ m/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$2 = \sqrt{(-42.426\dot{\theta})^2 + (42.426\dot{\theta})^2}$
$\dot{\theta} = 0.0333\text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F12–39. $l_T = 3s_D + s_A$
$0 = 3v_D + v_A$
$0 = 3v_D + 3\text{ m/s}$
$v_D = -1\text{ m/s} = 1\text{ m/s}\uparrow \quad \textit{Ans.}$

F12–40. $s_B + 2s_A + 2h = l$

$v_B + 2v_A = 0$

$6 + 2v_A = 0 \quad v_A = -3\ \text{m/s} = 3\ \text{m/s} \uparrow$ *Ans.*

F12–41. $3s_A + s_B = l$

$3v_A + v_B = 0$

$3v_A + 1.5 = 0 \quad v_A = -0.5\ \text{m/s} = 0.5\ \text{m/s} \uparrow$ *Ans.*

F12–42. $l_T = 4\,s_A + s_F$

$0 = 4\,v_A + v_F$

$0 = 4\,v_A + 3\ \text{m/s}$

$v_A = -0.75\ \text{m/s} = 0.75\ \text{m/s} \uparrow$ *Ans.*

F12–43. $s_A + 2(s_A - a) + (s_A - s_P) = l$

$4s_A - s_P = l + 2a$

$4v_A - v_P = 0$

$4v_A - (-4) = 0$

$4v_A + 4 = 0 \quad v_A = -1\ \text{m/s} = 1\ \text{m/s} \nearrow$ *Ans.*

F12–44. $s_C + s_B = l_{CED}$ (1)

$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_{ACDF}$

$s_A + 2s_B - 2s_C = l_{ACDF}$ (2)

Thus

$v_C + v_B = 0$

$v_A + 2v_B - 2v_C = 0$

Eliminating v_C,

$v_A + 4v_B = 0$

Thus,

$4\ \text{ft/s} + 4v_B = 0$

$v_B = -1\ \text{ft/s} = 1\ \text{ft/s} \uparrow$ *Ans.*

F12–45. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$100\mathbf{i} = 80\mathbf{j} + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = 100\mathbf{i} - 80\mathbf{j}$

$v_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$

$= \sqrt{(100\ \text{km/h})^2 + (-80\ \text{km/h})^2}$

$= 128\ \text{km/h}$ *Ans.*

$\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\dfrac{80\ \text{km/h}}{100\ \text{km/h}}\right) = 38.7°\ \nwarrow$ *Ans.*

F12–46. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$(-400\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}) = (650\mathbf{i}) + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = \{-1050\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$

$v_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$

$= \sqrt{(1050\ \text{km/h})^2 + (692.82\ \text{km/h})^2}$

$= 1258\ \text{km/h}$ *Ans.*

$\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\dfrac{692.82\ \text{km/h}}{1050\ \text{km/h}}\right) = 33.4°\ \swarrow$

Ans.

F12–47. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$(5\mathbf{i} + 8.660\mathbf{j}) = (12.99\mathbf{i} + 7.5\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$

$\mathbf{v}_{B/A} = \{-7.990\mathbf{i} + 1.160\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$

$v_{B/A} = \sqrt{(-7.990\ \text{m/s})^2 + (1.160\ \text{m/s})^2}$

$= 8.074\ \text{m/s}$

$d_{AB} = v_{B/A}t = (8.074\ \text{m/s})(4\ \text{s}) = 32.3\ \text{m}$ *Ans.*

F12–48. $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$

$-20\cos 45°\mathbf{i} + 20\sin 45°\mathbf{j} = 65\mathbf{i} + \mathbf{v}_{A/B}$

$\mathbf{v}_{A/B} = -79.14\mathbf{i} + 14.14\mathbf{j}$

$v_{A/B} = \sqrt{(-79.14)^2 + (14.14)^2}$

$= 80.4\ \text{km/h}$ *Ans.*

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$

$\dfrac{(20)^2}{0.1}\cos 45°\mathbf{i} + \dfrac{(20)^2}{0.1}\sin 45°\mathbf{j} = 1200\mathbf{i} + \mathbf{a}_{A/B}$

$\mathbf{a}_{A/B} = 1628\mathbf{i} + 2828\mathbf{j}$

$a_{A/B} = \sqrt{(1628)^2 + (2828)^2}$

$= 3.26(10^3)\ \text{km/h}^2$ *Ans.*

Chapter 13

F13–1. $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_ct^2$

$6\ \text{m} = 0 + 0 + \frac{1}{2}a(3\ \text{s})^2$

$a = 1.333\ \text{m/s}^2$

Draw FBD.

$\Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 20(9.81)\ \text{N}\cos 30° = 0$

$N_A = 169.91\ \text{N}$

$\Sigma F_x = ma_x; \quad T - 20(9.81)\ \text{N}\sin 30°$

$- 0.3(169.91\ \text{N}) = (20\ \text{kg})(1.333\ \text{m/s}^2)$

$T = 176\ \text{N}$ *Ans.*

F13–2. $(F_f)_{\max} = \mu_s N_A = 0.3(245.25\ \text{N}) = 73.575\ \text{N}$

Since $F = 100\ \text{N} > (F_f)_{\max}$ when $t = 0$, the crate will start to move immediately after **F** is applied.

Draw FBD.

$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 25(9.81)\ \text{N} = 0$

$N_A = 245.25\ \text{N}$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;$

$10t^2 + 100 - 0.25(245.25\ \text{N}) = (25\ \text{kg})a$

$a = (0.4t^2 + 1.5475)\ \text{m/s}^2$

$dv = a\,dt$

$\int_0^v dv = \int_0^{4\,\text{s}} (0.4t^2 + 1.5475)\,dt$

$v = 14.7\ \text{m/s} \rightarrow$ *Ans.*

F13–3. Draw FBD.

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;$

$\left(\frac{4}{5}\right) 500\,\text{N} - (500s)\,\text{N} = (10\,\text{kg})a$

$a = (40 - 50s)\,\text{m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{0.5\,\text{m}} (40 - 50s)\,ds$$

$\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = \left(40s - 25s^2\right)\Big|_0^{0.5\,\text{m}}$

$v = 5.24\,\text{m/s}$ *Ans.*

F13–4. Draw FBD.

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;\quad 100(s + 1)\,\text{N} = (2000\,\text{kg})a$

$a = (0.05(s + 1))\,\text{m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{10\,\text{m}} 0.05(s + 1)\,ds$$

$v = 2.45\,\text{m/s}$

F13–5. $F_{sp} = k(l - l_0) = (200\,\text{N/m})(0.5\,\text{m} - 0.3\,\text{m})$

$= 40\,\text{N}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.3\,\text{m}}{0.4\,\text{m}}\right) = 36.86°$

Draw FBD.

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;$

$100\,\text{N} - (40\,\text{N})\cos 36.86° = (25\,\text{kg})a$

$a = 2.72\,\text{m/s}^2$

F13–6. Consider

no slipping between A and B.

Draw FBD.

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;\ 6 = \frac{70}{32.2}a;\ a = 2.76\,\text{ft/s}^2$

Check if slipping occurs between A and B.

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;\ 6 - F = \frac{20}{32.2}(2.76)$; No slipping

$F = 4.29\,\text{lb} < 0.4(20) = 8\,\text{lb}$

$a_A = a_B = 2.76\,\text{ft/s}^2$ *Ans.*

F13–7. Draw FBD.

$\Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho};\ (0.3)m(9.81) = m\frac{v^2}{2}$

$v = 2.43\,\text{m/s}$ *Ans.*

F13–8. Draw FBD.

$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n;\ m(32.2) = m\left(\frac{v^2}{250}\right)$

$v = 89.7\,\text{ft/s}$ *Ans.*

F13–9. Draw FBD.

$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n;\ 150 + N_p = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(120)^2}{400}\right)$

$N_p = 17.7\,\text{lb}$ *Ans.*

F13–10. Draw FBD.

$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = ma_n;$

$N_c \sin 30° + 0.2\,N_c \cos 30° = m\frac{v^2}{500}$

$+\uparrow \Sigma F_b = 0;$

$N_c \cos 30° - 0.2N_c \sin 30° - m(32.2) = 0$

$v = 119\,\text{ft/s}$ *Ans.*

F13–11. Draw FBD.

$\Sigma F_t = ma_t;\quad 10(9.81)\,\text{N}\cos 45° = (10\,\text{kg})a_t$

$a_t = 6.94\,\text{m/s}^2$ *Ans.*

$\Sigma F_n = ma_n;$

$T - 10(9.81)\,\text{N}\sin 45° = (10\,\text{kg})\frac{(3\,\text{m/s})^2}{2\,\text{m}}$

$T = 114\,\text{N}$ *Ans.*

F13–12. Draw FBD.

$\Sigma F_n = ma_n;$

$F_n = (500\,\text{kg})\frac{(15\,\text{m/s})^2}{200\,\text{m}} = 562.5\,\text{N}$

$\Sigma F_t = ma_t;$

$F_t = (500\,\text{kg})(1.5\,\text{m/s}^2) = 750\,\text{N}$

$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(562.5\,\text{N})^2 + (750\,\text{N})^2}$

$= 938\,\text{N}$ *Ans.*

F13–13. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (1.5\,\text{m} + (8\,\text{m})\sin 45°)\dot{\theta}^2$

$= (-7.157\,\dot{\theta}^2)\,\text{m/s}^2$

Draw FBD.

$\Sigma F_z = ma_z;$

$T\cos 45° - m(9.81) = m(0)\quad T = 13.87\,m$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$-(13.87m)\sin 45° = m(-7.157\,\dot{\theta}^2)$

$\dot{\theta} = 1.17\,\text{rad/s}$ *Ans.*

F13–14. $\theta = \pi t^2\big|_{t=0.5\,s} = (\pi/4)\ \text{rad}$

$\dot{\theta} = 2\pi t\big|_{t=0.5\,s} = \pi\ \text{rad/s}$

$\ddot{\theta} = 2\pi\ \text{rad/s}^2$

$r = 0.6\sin\theta|_{\theta=\pi/4\,\text{rad}} = 0.4243\ \text{m}$

$\dot{r} = 0.6\,(\cos\theta)\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/4\,\text{rad}} = 1.3329\ \text{m/s}$

$\ddot{r} = 0.6\,[(\cos\theta)\ddot{\theta} - (\sin\theta)\dot{\theta}^2]\big|_{\theta=\pi/4\,\text{rad}} = -1.5216\ \text{m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -1.5216\ \text{m/s}^2 - (0.4243\ \text{m})(\pi\ \text{rad/s})^2$

$= -5.7089\ \text{m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0.4243\ \text{m}(2\pi\ \text{rad/s}^2) + 2(1.3329\ \text{m/s})(\pi\ \text{rad/s})$

$= 11.0404\ \text{m/s}^2$

Draw FBD.

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F\cos 45° - N\cos 45° - 0.2(9.81)\cos 45° = 0.2(-5.7089)$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F\sin 45° + N\sin 45° - 0.2(9.81)\sin 45° = 0.2(11.0404)$

$N = 2.37\ \text{N}$ $F = 2.72\ \text{N}$ *Ans.*

F13–15. $r = 50e^{2\theta}\big|_{\theta=\pi/6\,\text{rad}} = [50e^{2(\pi/6)}]\ \text{m} = 142.48\ \text{m}$

$\dot{r} = 50\left(2e^{2\theta}\,\dot{\theta}\right) = 100e^{2\theta}\,\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/6\,\text{rad}}$

$= [100e^{2(\pi/6)}(0.05)] = 14.248\ \text{m/s}$

$\ddot{r} = 100\left((2e^{2\theta}\dot{\theta})\dot{\theta} + e^{2\theta}(\ddot{\theta})\right)\big|_{\theta=\pi/6\,\text{rad}}$

$= 100\left[2e^{2(\pi/6)}(0.05^2) + e^{2(\pi/6)}(0.01)\right]$

$= 4.274\ \text{m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 4.274\ \text{m/s}^2 - 142.48\ \text{m}(0.05\ \text{rad/s})^2$

$= 3.918\ \text{m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 142.48\ \text{m}(0.01\ \text{rad/s}^2) + 2(14.248\ \text{m/s})(0.05\ \text{rad/s})$

$= 2.850\ \text{m/s}^2$

Draw FBD.

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F_r = (2000\ \text{kg})(3.918\ \text{m/s}^2) = 7836.55\ \text{N}$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F_\theta = (2000\ \text{kg})(2.850\ \text{m/s}^2) = 5699.31\ \text{N}$

$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2}$

$= \sqrt{(7836.55\ \text{N})^2 + (5699.31\ \text{N})^2}$

$= 9689.87\ \text{N} = 9.69\ \text{kN}$

F13–16.

$r = (0.6\cos 2\theta)\ \text{m}\big|_{\theta=0°} = [0.6\cos 2(0°)]\ \text{m} = 0.6\ \text{m}$

$\dot{r} = (-1.2\sin 2\theta\dot{\theta})\ \text{m/s}\big|_{\theta=0°}$

$= [-1.2\sin 2(0°)(-3)]\ \text{m/s} = 0$

$\ddot{r} = -1.2\left(\sin 2\theta\ddot{\theta} + 2\cos 2\theta\dot{\theta}^2\right)\ \text{m/s}^2\big|_{\theta=0°}$

$= -21.6\ \text{m/s}^2$

Thus,

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -21.6\ \text{m/s}^2 - 0.6\ \text{m}(-3\ \text{rad/s})^2$

$= -27\ \text{m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 0.6\ \text{m}(0) + 2(0)(-3\ \text{rad/s}) = 0$

Draw FBD.

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$ $F - 0.2(9.81)\ \text{N} = 0.2\ \text{kg}(0)$

$F = 1.96\ \text{N}\uparrow$ *Ans.*

Chapter 14

F14–1. Draw FBD.

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + \left(\frac{4}{5}\right)(500\ \text{N})(0.5\ \text{m}) - \frac{1}{2}(500\ \text{N/m})(0.5\ \text{m})^2 = \frac{1}{2}(10\ \text{kg})v^2$

$v = 5.24\ \text{m/s}$ *Ans.*

F14–2. Draw FBD.

$\Sigma F_y = ma_y;\ N_A - 20(9.81)\ \text{N}\cos 30° = 0$

$N_A = 169.91\ \text{N}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 300\ \text{N}(10\ \text{m}) - 0.3(169.91\ \text{N})(10\ \text{m}) - 20(9.81)\ \text{N}(10\ \text{m})\sin 30° = \frac{1}{2}(20\ \text{kg})v^2$

$v = 12.3\ \text{m/s}$ *Ans.*

F14–3. Draw FBD.

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 2\left[\int_0^{15\,\text{m}} (600 + 2s^2)\ \text{N}\,ds\right] - 100(9.81)\ \text{N}(15\ \text{m}) = \frac{1}{2}(100\ \text{kg})v^2$

$v = 12.5\ \text{m/s}$ *Ans.*

F14–4. Draw FBD.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$\tfrac{1}{2}(1800\text{ kg})(125\text{ m/s})^2 - \left[\frac{(50\,000\text{ N} + 20\,000\text{ N})}{2}(400\text{ m})\right] = \tfrac{1}{2}(1800\text{ kg})v^2$$
$$v = 8.33\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$

F14–5. Draw FBD.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(5\text{ m/s})^2 + 100\text{ N}s' + [10(9.81)\text{ N}]\,s'\sin 30° - \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(s')^2 = 0$$
$$s' = 2.09\text{ m}$$
$$s = 0.6\text{ m} + 2.09\text{ m} = 2.69\text{ m} \quad \textit{Ans.}$$

F14–6. Draw FBD.

$$T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$$

Consider difference in cord length $AC - BC$, which is distance F moves.

$$0 + 10\text{ lb}(\sqrt{(3\text{ ft})^2 + (4\text{ ft})^2} - 3\text{ ft}) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{32.2}\text{ slug}\right)v_B^2$$
$$v_B = 16.0\text{ ft/s} \quad \textit{Ans.}$$

F14–7. Draw FBD.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$$
$$30\left(\tfrac{4}{5}\right) = 20a \quad a = 1.2\text{ m/s}^2 \rightarrow$$
$$v = v_0 + a_c t$$
$$v = 0 + 1.2(4) = 4.8\text{ m/s}$$
$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F(\cos\theta)v$$
$$= 30\left(\tfrac{4}{5}\right)(4.8)$$
$$= 115\text{ W} \quad \textit{Ans.}$$

F14–8. Draw FBD.

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$$
$$10s = 20a \quad a = 0.5s\text{ m/s}^2 \rightarrow$$
$$v\,dv = a\,ds$$
$$\int_1^v v\,dv = \int_0^{5\text{ m}} 0.5\,s\,ds$$
$$v = 3.674\text{ m/s}$$
$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = [10(5)](3.674) = 184\text{ W} \quad \textit{Ans.}$$

F14–9. Draw FBD.

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$$
$$T_1 - 100\text{ lb} = 0 \qquad T_1 = 100\text{ lb}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0;$$
$$100\text{ lb} + 100\text{ lb} - T_2 = 0 \quad T_2 = 200\text{ lb}$$
$$P_{\text{out}} = \mathbf{T}_B\cdot\mathbf{v}_B = (200\text{ lb})(3\text{ ft/s}) = 1.091\text{ hp}$$
$$P_{\text{in}} = \frac{P_{\text{out}}}{\varepsilon} = \frac{1.091\text{ hp}}{0.8} = 1.36\text{ hp} \quad \textit{Ans.}$$

F14–10. Draw FBD.

$$\Sigma F_{y'} = ma_{y'};\ N - 20(9.81)\cos 30° = 20(0)$$
$$N = 169.91\text{ N}$$
$$\Sigma F_{x'} = ma_{x'};$$
$$F - 20(9.81)\sin 30° - 0.2(169.91) = 0$$
$$F = 132.08\text{ N}$$
$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 132.08(5) = 660\text{ W} \quad \textit{Ans.}$$

F14–11. Draw FBD.

$$+\uparrow\Sigma F_y = ma_y;$$
$$T - 50(9.81) = 50(0) \quad T = 490.5\text{ N}$$
$$P_{\text{out}} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = 490.5(1.5) = 735.75\text{ W}$$

Also, for a point on the other cable

$$P_{\text{out}} = \left(\frac{490.5}{2}\right)(1.5)(2) = 735.75\text{ W}$$
$$P_{\text{in}} = \frac{P_{\text{out}}}{\varepsilon} = \frac{735.75}{0.8} = 920\text{ W} \quad \textit{Ans.}$$

F14–12. $2s_A + s_P = l$

$$2a_A + a_P = 0$$
$$2a_A + 6 = 0$$
$$a_A = -3\text{ m/s}^2 = 3\text{ m/s}^2\uparrow$$

Draw FBD.

$$\Sigma F_y = ma_y;\quad T_A - 490.5\text{ N} = (50\text{ kg})(3\text{ m/s}^2)$$
$$T_A = 640.5\text{ N}$$
$$P_{\text{out}} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (640.5\text{ N}/2)(12) = 3843\text{ W}$$
$$P_{\text{in}} = \frac{P_{\text{out}}}{\varepsilon} = \frac{3843}{0.8} = 4803.75\text{ W} = 4.80\text{ kW} \quad \textit{Ans.}$$

F14–13. Datum at B.

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$0 + 2(9.81)(1.5) = \tfrac{1}{2}(2)(v_B)^2 + 0$$
$$v_B = 5.42\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$
$$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n;\ T - 2(9.81) = 2\left(\frac{(5.42)^2}{1.5}\right)$$
$$T = 58.9\text{ N} \quad \textit{Ans.}$$

F14–14. Datum at B.

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + mgh_A = \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 + mgh_B$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1\text{ m/s})^2\right] + [2\,(9.81)\text{ N}(4\text{ m})]$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_B^2\right] + [0]$$
$$v_B = 8.915\text{ m/s} = 8.92\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$
$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n;\quad N_B - 2(9.81)\text{ N}$$
$$= (2\text{ kg})\left(\frac{(8.915\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}\right)$$
$$N_B = 99.1\text{ N} \quad \textit{Ans.}$$

F14–15. Datum at A.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}(2)(4)^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(30)(2-1)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2)(v)^2 - 2(9.81)(1) + \tfrac{1}{2}(30)(\sqrt{5}-1)^2$$
$$v = 5.26\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$

F14–16. Datum at B.

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$0 + \tfrac{1}{2}(4)(2.5-0.5)^2 + 5(2.5)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{32.2}\right)v_B^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(4)(1-0.5)^2$$
$$v_B = 16.0\text{ ft/s} \quad \textit{Ans.}$$

F14–17. Datum at initial position.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2$$
$$[0] + [0] + [0] = [0] +$$
$$[-75\text{ lb}(5\text{ ft} + s)] + \left[2\left(\tfrac{1}{2}(1000\text{ lb/ft})s^2\right)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}(1500\text{ lb/ft})(s - 0.25\text{ ft})^2\right]$$
$$s = s_A = s_C = 0.580\text{ ft} \quad \textit{Ans.}$$
Also,
$$s_B = 0.5803\text{ ft} - 0.25\text{ ft} = 0.330\text{ ft} \quad \textit{Ans.}$$

F14–18. Datum at A.

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \left(\tfrac{1}{2}ks_A^2 + mgy_A\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_B^2 + \left(\tfrac{1}{2}ks_B^2 + mgy_B\right)$$
$$\tfrac{1}{2}(4\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(400\text{ N/m})(0.1\text{ m} - 0.2\text{ m})^2 + 0$$
$$= \tfrac{1}{2}(4\text{ kg})v_B^2 + \tfrac{1}{2}(400\text{ N/m})(\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (0.3\text{ m})^2}$$
$$- 0.2\text{ m})^2 + [4(9.81)\text{ N}](-(0.1\text{ m} + 0.3\text{ m}))$$
$$v_B = 1.962\text{ m/s} = 1.96\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$

Chapter 15

F15–1. Draw FBD.

$$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$(0.5\text{ kg})(25\text{ m/s})\cos 45° - \int F_x\,dt$$
$$= (0.5\text{ kg})(10\text{ m/s})\cos 30°$$
$$I_x = \int F_x\,dt = 4.509\text{ N}\cdot\text{s}$$
$$(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$$
$$-(0.5\text{ kg})(25\text{ m/s})\sin 45° + \int F_y\,dt$$
$$= (0.5\text{ kg})(10\text{ m/s})\sin 30°$$
$$I_y = \int F_y\,dt = 11.339\text{ N}\cdot\text{s}$$
$$I = \int F\,dt = \sqrt{(4.509\text{ N}\cdot\text{s})^2 + (11.339\text{ N}\cdot\text{s})^2}$$
$$= 12.2\text{ N}\cdot\text{s} \quad \textit{Ans.}$$

F15–2. Draw FBD.

$$(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$$
$$0 + N(4\text{ s}) + (100\text{ lb})(4\text{ s})\sin 30°$$
$$-(150\text{ lb})(4\text{ s}) = 0$$
$$N = 100\text{ lb}$$
$$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$0 + (100\text{ lb})(4\text{ s})\cos 30° - 0.2(100\text{ lb})(4\text{ s})$$
$$= \left(\tfrac{150}{32.2}\text{ slug}\right)v$$
$$v = 57.2\text{ ft/s} \quad \textit{Ans.}$$

F15–3. Draw FBD.

Time to start motion,
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N - 25(9.81)\text{ N} = 0 \quad N = 245.25\text{ N}$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad 20t^2 - 0.3(245.25\text{ N}) = 0 \quad t = 1.918\text{ s}$$
$$(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$0 + \int_{1.918\text{ s}}^{4\text{ s}} 20t^2\,dt - (0.25(245.25\text{ N}))(4\text{ s} - 1.918\text{ s})$$
$$= (25\text{ kg})v$$
$$v = 10.1\text{ m/s} \quad \textit{Ans.}$$

F15–4. Draw FBD.

$$(\pm\rightarrow)\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$(1500\text{ kg})(0) + \left[\tfrac{1}{2}(6000\text{ N})(2\text{ s}) + (6000\text{ N})(6\text{ s} - 2\text{ s})\right] = (1500\text{ kg})\,v$$
$$v = 20\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–5. Draw FBD.

SUV and trailer,

$$m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$0 + (9000\text{ N})(20\text{ s}) = (1500\text{ kg} + 2500\text{ kg})v$$
$$v = 45.0\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

Trailer,

$$m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$$
$$0 + T(20\text{ s}) = (1500\text{ kg})(45.0\text{ m/s})$$
$$T = 3375\text{ N} = 3.375\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–6. Draw FBD.

Block *B*:

$$(+\downarrow)\,mv_1 + \int F\,dt = mv_2$$
$$0 + 8(5) - T(5) = \tfrac{8}{32.2}(1)$$
$$T = 7.95\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

Block *A*:

$$(\pm\rightarrow)\,mv_1 + \int F\,dt = mv_2$$
$$0 + 7.95(5) - \mu_k(10)(5) = \tfrac{10}{32.2}(1)$$
$$\mu_k = 0.789 \qquad \textit{Ans.}$$

F15–7. $(\pm\rightarrow)\,m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$$(20(10^3)\text{ kg})(3\text{ m/s}) + (15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s}) = (20(10^3)\text{ kg})(v_A)_2 + (15(10^3)\text{ kg})(2\text{ m/s})$$
$$(v_A)_2 = 0.375\text{ m/s}\rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

$$(\pm\rightarrow)\quad m(v_B)_1 + \Sigma\int_{t1}^{t2} F\,dt = m(v_B)_2$$
$$(15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s}) + F_{avg}(0.5\text{ s}) = (15(10^3)\text{ kg})(2\text{ m/s})$$
$$F_{avg} = 105(10^3)\text{ N} = 105\text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–8. $(\pm\rightarrow)\quad m_p[(v_p)_1]_x + m_c[(v)_1]_x = (m_p + m_c)v_2$

$$5\left[10\left(\tfrac{4}{5}\right)\right] + 0 = (5 + 20)v_2$$
$$v_2 = 1.6\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–9. Datum at *B*.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + (V_g)_1 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + (V_g)_2$$
$$\tfrac{1}{2}(5)(5)^2 + 5(9.81)(1.5) = \tfrac{1}{2}(5)(v_A)_2^2 + 0$$
$$(v_A)_2 = 7.378\text{ m/s}$$
$$(\pm\leftarrow)\quad m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v$$
$$5(7.378) + 0 = (5 + 8)v$$
$$v = 2.84\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–10. $(\pm\rightarrow)\,m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$$0 + 0 = 10(v_A)_2 + 15(v_B)_2 \qquad (1)$$
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + (V_e)_1 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + (V_e)_2$$
$$0 + 0 + \tfrac{1}{2}\left[5\left(10^3\right)\right]\left(0.2^2\right) = \tfrac{1}{2}(10)(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(15)(v_B)_2^2 + 0$$
$$5(v_A)_2^2 + 7.5\,(v_B)_2^2 = 100 \qquad (2)$$

Solving Eqs. (1) and (2),

$$(v_B)_2 = 2.31\text{ m/s}\rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$
$$(v_A)_2 = -3.464\text{ m/s} = 3.46\text{ m/s}\leftarrow \qquad \textit{Ans.}$$

F15–11. $(\pm\leftarrow)\quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$

$$0 + 10(15) = (15 + 10)v_2$$
$$v_2 = 6\text{ m/s}$$
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_2^2 + (V_e)_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 + (V_e)_3$$
$$\tfrac{1}{2}(15 + 10)\left(6^2\right) + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\left[10\left(10^3\right)\right]s_{max}^2$$
$$s_{max} = 0.3\text{ m} = 300\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–12. $(\pm\rightarrow)\quad 0 + 0 = m_p(v_p)_x - m_c v_c$

$$0 = (20\text{ kg})\,(v_p)_x - (250\text{ kg})v_c$$
$$(v_p)_x = 12.5\,v_c \qquad (1)$$
$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{p/c}$$
$$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = -v_c\mathbf{i} + [(400\text{ m/s})\cos 30°\mathbf{i} + (400\text{ m/s})\sin 30°\mathbf{j}]$$
$$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = (346.41 - v_c)\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$$
$$(v_p)_x = 346.41 - v_c$$
$$(v_p)_y = 200\text{ m/s}$$
$$(v_p)_x = 320.75\text{ m/s} \quad v_c = 25.66\text{ m/s}$$
$$v_p = \sqrt{(v_p)_x^2 + (v_p)_y^2} = \sqrt{(320.75\text{ m/s})^2 + (200\text{ m/s})^2} = 378\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–13. $(\pm\rightarrow)\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$$= \frac{(9\text{ m/s}) - (1\text{ m/s})}{(8\text{ m/s}) - (-2\text{ m/s})} = 0.8$$

F15–14. $(\pm\rightarrow)\ m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$$[15(10^3)\text{ kg}](5\text{ m/s}) + [25(10^3)](-7\text{ m/s}) = [15(10^3)\text{ kg}](v_A)_2 + [25(10^3)](v_B)_2$$

$$15(v_A)_2 + 25(v_B)_2 = -100 \qquad (1)$$

Using the coefficient of restitution equation,

$$(\pm\rightarrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

$$0.6 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{5\text{ m/s} - (-7\text{ m/s})}$$

$$(v_B)_2 - (v_A)_2 = 7.2 \qquad (2)$$

Solving,

$(v_B)_2 = 0.2\text{ m/s} \rightarrow$ *Ans.*

$(v_A)_2 = -7\text{ m/s} = 7\text{ m/s} \leftarrow$ *Ans.*

F15–15. Datum at B.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_A)_1^2 + mg(h_A)_1 = \tfrac{1}{2}m(v_A)_2^2 + mg(h_A)_2$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(5\text{ ft/s})^2 + (30\text{ lb})(10\text{ft}) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_2^2 + 0$$

$(v_A)_2 = 25.87\text{ ft/s} \leftarrow$

$$(\pm\leftarrow)\quad m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = m_A(v_A)_3 + m_B(v_B)_3$$

$$\left(\tfrac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(25.87\text{ ft/s}) + 0 = \left(\tfrac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_3 + \left(\tfrac{80}{32.2}\text{ slug}\right)(v_B)_3$$

$$30(v_A)_3 + 80(v_B)_3 = 775.95 \qquad (1)$$

$$(\pm\leftarrow)\qquad e = \frac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{(v_A)_2 - (v_B)_2}$$

$$0.6 = \frac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{25.87\text{ ft/s} - 0}$$

$$(v_B)_3 - (v_A)_3 = 15.52 \qquad (2)$$

Solving Eqs. (1) and (2) yields

$(v_B)_3 = 11.3\text{ ft/s} \leftarrow$

$(v_A)_3 = -4.23\text{ ft/s} = 4.23\text{ ft/s} \rightarrow$ *Ans.*

F15–16. $(+\uparrow)\quad m[(v_b)_1]_y = m[(v_b)_2]_y$

$$[(v_b)_2]_y = [(v_b)_1]_y = (20\text{ m/s})\sin 30° = 10\text{ m/s} \uparrow$$

$$(\pm\rightarrow)\qquad e = \frac{(v_w)_2 - [(v_b)_2]_x}{[(v_b)_1]_x - (v_w)_1}$$

$$0.75 = \frac{0 - [(v_b)_2]_x}{(20\text{ m/s})\cos 30° - 0}$$

$$[(v_b)_2]_x = -12.99\text{ m/s} = 12.99\text{ m/s} \leftarrow$$

$$(v_b)_2 = \sqrt{[(v_b)_2]_x^2 + [(v_b)_2]_y^2} = \sqrt{(12.99\text{ m/s})^2 + (10\text{ m/s})^2}$$

$$= 16.4\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{[(v_b)_2]_y}{[(v_b)_2]_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10\text{ m/s}}{12.99\text{ m/s}}\right)$$

$$= 37.6° \qquad \textit{Ans.}$$

F15–17. $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$

$$0 + 0 = 2(1) + 11(v_{Bx})_2$$

$$(v_{Bx})_2 = -0.1818\text{ m/s}$$

$$\Sigma m(v_y)_1 = \Sigma m(v_y)_2$$

$$2(3) + 0 = 0 + 11(v_{By})_2$$

$$(v_{By})_2 = 0.545\text{ m/s}$$

$$(v_B)_2 = \sqrt{(-0.1818)^2 + (0.545)^2}$$

$$= 0.575\text{ m/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F15–18. $+\nearrow\quad 1(3)\left(\tfrac{3}{5}\right) - 1(4)\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1(v_B)_{2x} + 1(v_A)_{2x}$

$$+\nearrow\quad 0.5 = [(v_A)_{2x} - (v_B)_{2x}]/\left[(3)\left(\tfrac{3}{5}\right) - (-4)\left(\tfrac{4}{5}\right)\right]$$

Solving,

$(v_A)_{2x} = 0.550\text{ m/s}, (v_B)_{2x} = -1.95\text{ m/s}$

Disc A,

$$+\nwarrow\quad -1(4)\left(\tfrac{3}{5}\right) = 1(v_A)_{2y}$$

$$(v_A)_{2y} = -2.40\text{ m/s}$$

Disc B,

$$-1(3)\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1(v_B)_{2y}$$

$$(v_B)_{2y} = -2.40\text{ m/s}$$

$(v_A)_2 = \sqrt{(0.550)^2 + (2.40)^2} = 2.46\text{ m/s}$ *Ans.*

$(v_B)_2 = \sqrt{(1.95)^2 + (2.40)^2} = 3.09\text{ m/s}$ *Ans.*

F15–19. $H_O = \Sigma mvd$;
$H_O = \left[2(10)\left(\frac{4}{5}\right)\right](4) - \left[2(10)\left(\frac{3}{5}\right)\right](3)$
$= 28\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

F15–20. $H_P = \Sigma mvd$;
$H_P = [2(15)\sin 30°](2) - [2(15)\cos 30°](5)$
$= -99.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = 99.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ \circlearrowleft$

F15–21. Draw an FBD of the rod and block.
$(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$
$5(2)(1.5) + 5(1.5)(3) = 5v(1.5)$
$v = 5\ \text{m/s}$ *Ans.*

F15–22. Draw an FBD of the rod and block.
$(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$
$0 + \int_0^{4\,\text{s}} (10t)\left(\frac{4}{5}\right)(1.5)dt = 5v(1.5)$
$v = 12.8\ \text{m/s}$ *Ans.*

F15–23. Draw an FBD of the rod and sphere.
$(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$
$0 + \int_0^{5\,\text{s}} 0.9t^2\, dt = 2v(0.6)$
$v = 31.2\ \text{m/s}$ *Ans.*

F15–24. Draw an FBD of the rod and spheres.
$(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$
$0 + \int_0^{4\,\text{s}} 8t dt + 2(10)(0.5)(4) = 2[10v(0.5)]$
$v = 10.4\ \text{m/s}$ *Ans.*

Chapter 16

F16–1. $\theta = (20\ \text{rev})\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right) = 40\pi\ \text{rad}$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$
$(30\ \text{rad/s})^2 = 0^2 + 2\alpha_c[(40\pi\ \text{rad}) - 0]$
$\alpha_c = 3.581\ \text{rad/s}^2 = 3.58\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*
$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$30\ \text{rad/s} = 0 + (3.581\ \text{rad/s}^2)t$
$t = 8.38\ \text{s}$ *Ans.*

F16–2. $\frac{d\omega}{d\theta} = 2(0.005\theta) = (0.01\theta)$
$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = (0.005\,\theta^2)(0.01\theta) = 50\left(10^{-6}\right)\theta^3\ \text{rad/s}^2$
When $\theta = 20\ \text{rev}(2\pi\ \text{rad}/1\ \text{rev}) = 40\pi\ \text{rad}$,
$\alpha = \left[50\left(10^{-6}\right)(40\pi)^3\right]\ \text{rad/s}^2$
$= 99.22\ \text{rad/s}^2 = 99.2\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

F16–3. $\omega = 4\theta^{1/2}$
$150\ \text{rad/s} = 4\,\theta^{1/2}$
$\theta = 1406.25\ \text{rad}$
$dt = \frac{d\theta}{\omega}$
$\int_0^t dt = \int_{1\ \text{rad}}^{\theta} \frac{d\theta}{4\theta^{1/2}}$
$t\Big|_0^t = \frac{1}{2}\theta^{1/2}\Big|_{1\ \text{rad}}^{\theta}$
$t = \frac{1}{2}\theta^{1/2} - \frac{1}{2}$
$t = \frac{1}{2}(1406.25)^{1/2} - \frac{1}{2} = 18.25\ \text{s}$ *Ans.*

F16–4. $\omega = \frac{d\theta}{dt} = (1.5t^2 + 15)\ \text{rad/s}$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = (3t)\ \text{rad/s}^2$
$\omega = [1.5(3^2) + 15]\ \text{rad/s} = 28.5\ \text{rad/s}$
$\alpha = 3(3)\ \text{rad/s}^2 = 9\ \text{rad/s}^2$
$v = \omega r = (28.5\ \text{rad/s})(0.75\ \text{ft}) = 21.4\ \text{ft/s}$ *Ans.*
$a = \alpha r = (9\ \text{rad/s}^2)(0.75\ \text{ft}) = 6.75\ \text{ft/s}^2$ *Ans.*

F16–5. $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$
$\int_{2\ \text{rad/s}}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} 0.5\theta\, d\theta$
$\frac{\omega^2}{2}\Big|_{2\ \text{rad/s}}^{\omega} = 0.25\theta^2\Big|_0^{\theta}$
$\omega = (0.5\theta^2 + 4)^{1/2}\ \text{rad/s}$
When $\theta = 2\ \text{rev} = 4\pi\ \text{rad}$,
$\omega = [0.5(4\pi)^2 + 4]^{1/2}\ \text{rad/s} = 9.108\ \text{rad/s}$
$v_P = \omega r = (9.108\ \text{rad/s})(0.2\ \text{m}) = 1.82\ \text{m/s}$ *Ans.*
$(a_P)_t = \alpha r = (0.5\theta\ \text{rad/s}^2)(0.2\ \text{m})\Big|_{\theta = 4\pi\ \text{rad}}$
$= 1.257\ \text{m/s}^2$
$(a_P)_n = \omega^2 r = (9.108\ \text{rad/s})^2(0.2\ \text{m}) = 16.59\ \text{m/s}^2$
$a_P = \sqrt{(a_P)_t^2 + (a_P)_n^2}$
$= \sqrt{(1.257\ \text{m/s}^2)^2 + (16.59\ \text{m/s}^2)^2}$
$= 16.6\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

F16–6. The tangential acceleration of P is the same for A and B.

$$\alpha_B = \alpha_A\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$
$$= (4.5\ \text{rad/s}^2)\left(\tfrac{0.075\ \text{m}}{0.225\ \text{m}}\right) = 1.5\ \text{rad/s}^2$$
$$\omega_B = (\omega_B)_0 + \alpha_B t$$
$$\omega_B = 0 + (1.5\ \text{rad/s}^2)(3\ \text{s}) = 4.5\ \text{rad/s}$$
$$\theta_B = (\theta_B)_0 + (\omega_B)_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_B t^2$$
$$\theta_B = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(1.5\ \text{rad/s}^2)(3\ \text{s})^2$$
$$\theta_B = 6.75\ \text{rad}$$
$$v_C = \omega_B r_D = (4.5\ \text{rad/s})(0.125\ \text{m})$$
$$= 0.5625\ \text{m/s} \quad \textit{Ans.}$$
$$s_C = \theta_B r_D = (6.75\ \text{rad})(0.125\ \text{m}) = 0.84375\ \text{m}$$
$$= 844\ \text{mm} \quad \textit{Ans.}$$

F16–7. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$-v_B\,\mathbf{j} = (3\mathbf{i})\ \text{m/s}$$
$$+ (\omega\mathbf{k}) \times (-1.5\cos 30°\mathbf{i} + 1.5\sin 30°\mathbf{j})$$
$$-v_B\,\mathbf{j} = [3 - \omega_{AB}(1.5\sin 30°)]\mathbf{i} - \omega(1.5\cos 30°)\mathbf{j}$$
$$0 = 3 - \omega(1.5\sin 30°) \quad (1)$$
$$-v_B = 0 - \omega(1.5\cos 30°) \quad (2)$$
$$\omega = 4\ \text{rad/s} \qquad v_B = 5.20\ \text{m/s} \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[\downarrow v_B\right] = \left[\overset{3}{\rightarrow}\right] + \left[\omega(1.5)\ \measuredangle e30°\right]$$

This yields Eqs. (1) and (2).

F16–8. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j})$$
$$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$
$$(v_B)_x = 6\ \text{m/s} \text{ and } (v_B)_y = 6\ \text{m/s}$$
$$v_B = \sqrt{(v_B)_x^2 + (v_B)_y^2}$$
$$= \sqrt{(6\ \text{m/s})^2 + (6\ \text{m/s})^2}$$
$$= 8.49\ \text{m/s} \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[\underset{\rightarrow}{(v_B)_x}\right] + \left[(v_B)_y\uparrow\right] = \left[0\right] + \left[\measuredangle 45°\ \ 10\left(\frac{0.6}{\cos 45°}\right)\right]$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\ (v_B)_x = 0 + 10(0.6/\cos 45°)\cos 45° = 6\ \text{m/s}\rightarrow$$
$$+\uparrow (v_B)_y = 0 + 10(0.6/\cos 45°)\sin 45° = 6\ \text{m/s}\uparrow$$

F16–9. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(4\ \text{ft/s})\mathbf{i} = (-2\ \text{ft/s})\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (3\ \text{ft})\mathbf{j}$$
$$4\mathbf{i} = (-2 + 3\omega)\mathbf{i}$$
$$\omega = 2\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[\underset{\rightarrow}{4}\right] = \left[\underset{\leftarrow}{2}\right] + \left[\underset{\rightarrow}{\omega(3)}\right]$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\ 4 = -2 + \omega(3); \qquad \omega = 2\ \text{rad/s}$$

F16–10. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A$$
$$= (12\ \text{rad/s})\mathbf{k} \times (0.3\ \text{m})\mathbf{j}$$
$$= [-3.6\mathbf{i}]\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$v_B\,\mathbf{j} = (-3.6\ \text{m/s})\mathbf{i}$$
$$+ (\omega_{AB}\,\mathbf{k}) \times (0.6\cos 30°\mathbf{i} - 0.6\sin 30°\mathbf{j})\ \text{m}$$
$$v_B\,\mathbf{j} = [\omega_{AB}(0.6\sin 30°) - 3.6]\mathbf{i} + \omega_{AB}(0.6\cos 30°)\mathbf{j}$$
$$0 = \omega_{AB}(0.6\sin 30°) - 3.6 \quad (1)$$
$$v_B = \omega_{AB}(0.6\cos 30°) \quad (2)$$
$$\omega_{AB} = 12\ \text{rad/s} \quad v_B = 6.24\ \text{m/s}\uparrow \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[v_B\uparrow\right] = \left[\underset{12(0.3)}{\leftarrow}\right] + \left[\measuredangle 30°\omega(0.6)\right]$$

This yields Eqs. (1) and (2).

F16–11. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\,\mathbf{j} = (-60\mathbf{i})\ \text{ft/s}$$
$$+ (-\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (-2.5\cos 30°\mathbf{i} + 2.5\sin 30°\mathbf{j})\ \text{ft}$$
$$v_C\mathbf{j} = (-60)\mathbf{i} + 2.165\omega_{BC}\mathbf{j} + 1.25\omega_{BC}\,\mathbf{i}$$
$$0 = -60 + 1.25\omega_{BC} \quad (1)$$
$$v_C = 2.165\,\omega_{BC} \quad (2)$$
$$\omega_{BC} = 48\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$
$$v_C = 104\ \text{ft/s} \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$$

$$\left[v_C \uparrow\right] = \left[\begin{matrix} v_B \\ \leftarrow \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} \nearrow \\ 30^\circ \end{matrix}\ \omega\,(2.5)\right]$$

This yields Eqs. (1) and (2).

F16–12. Vector Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$-v_B \cos 30^\circ\,\mathbf{i} + v_B \sin 30^\circ\,\mathbf{j} = (-3\ \text{m/s})\mathbf{j} + (-\omega\mathbf{k}) \times (-2 \sin 45^\circ \mathbf{i} - 2 \cos 45^\circ \mathbf{j})\ \text{m}$$

$$-0.8660 v_B\,\mathbf{i} + 0.5 v_B\,\mathbf{j} = -1.4142\omega\mathbf{i} + (1.4142\omega - 3)\mathbf{j}$$

$$-0.8660 v_B = -1.4142\omega \quad (1)$$

$$0.5 v_B = 1.4142\omega - 3 \quad (2)$$

$$\omega = 5.02\ \text{rad/s} \quad v_B = 8.20\ \text{m/s} \quad \textit{Ans.}$$

Scalar Analysis

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[\begin{matrix} \nwarrow \\ 30^\circ \end{matrix}\ v_B\right] = \left[\downarrow 3\right] + \left[\begin{matrix} \nwarrow \\ 45^\circ \end{matrix}\ \omega(2)\right]$$

This yields Eqs. (1) and (2).

F16–13. $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{r_{A/IC}} = \dfrac{6}{3} = 2\ \text{rad/s}$ *Ans.*

$$r_{C/IC} = \sqrt{(3)^2 + (2.5)^2 - 2(3)(2.5)\cos 53.13^\circ} = 2.5\ \text{m}$$

$v_C = \omega_{AB} r_{C/IC} = 2(2.5) = 5\ \text{m/s}$ *Ans.*

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1.5}\right) = 53.13^\circ$

$\theta = 90^\circ - \phi = 90^\circ - 53.13^\circ = 36.9^\circ\ \nwarrow$ *Ans.*

F16–14. $v_B = \omega_{AB} r_{B/A} = 12(0.6) = 7.2\ \text{m/s}\ \downarrow$

$v_C = 0$ *Ans.*

$\omega_{BC} = \dfrac{v_B}{r_{B/IC}} = \dfrac{7.2}{1.2} = 6\ \text{rad/s}$ *Ans.*

F16–15. $\omega = \dfrac{v_O}{r_{O/IC}} = \dfrac{6}{0.3} = 20\ \text{rad/s}$ *Ans.*

$r_{A/IC} = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2} = 0.6708\ \text{m}$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0.3}{0.6}\right) = 26.57^\circ$

$v_A = \omega r_{A/IC} = 20(0.6708) = 13.4\ \text{m/s}$ *Ans.*

$\theta = 90^\circ - \phi = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.4^\circ\ \nearrow$ *Ans.*

F16–16. The location of IC can be determined using similar triangles.

$$\frac{0.5 - r_{C/IC}}{3} = \frac{r_{C/IC}}{1.5} \qquad r_{C/IC} = 0.1667\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{v_C}{r_{C/IC}} = \frac{1.5}{0.1667} = 9\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

Also, $r_{O/IC} = 0.3 - r_{C/IC} = 0.3 - 0.1667 = 0.1333\ \text{m}$

$v_O = \omega r_{O/IC} = 9(0.1333) = 1.20\ \text{m/s}$ *Ans.*

F16–17. $v_B = \omega r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2\ \text{m/s}$

$r_{B/IC} = 0.8 \tan 60^\circ = 1.3856\ \text{m}$

$r_{C/IC} = \frac{0.8}{\cos 60^\circ} = 1.6\ \text{m}$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{1.2}{1.3856} = 0.8660\ \text{rad/s} = 0.866\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

Then,

$v_C = \omega_{BC} r_{C/IC} = 0.8660(1.6) = 1.39\ \text{m/s}$ *Ans.*

F16–18. $v_B = \omega_{AB} r_{B/A} = 10(0.2) = 2\ \text{m/s}$

$v_C = \omega_{CD} r_{C/D} = \omega_{CD}(0.2) \rightarrow$

$r_{B/IC} = \frac{0.4}{\cos 30^\circ} = 0.4619\ \text{m}$

$r_{C/IC} = 0.4 \tan 30^\circ = 0.2309\ \text{m}$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{2}{0.4619} = 4.330\ \text{rad/s} = 4.33\ \text{rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

$v_C = \omega_{BC} r_{C/IC}$

$\omega_{CD}(0.2) = 4.330(0.2309)$

$\omega_{CD} = 5\ \text{rad/s}$ *Ans.*

F16–19. $\omega = \dfrac{v_A}{r_{A/IC}} = \dfrac{6}{3} = 2\ \text{rad/s}$

Vector Analysis

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B\mathbf{i} = -5\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) - 2^2(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$$

$$a_B\mathbf{i} = (4\alpha - 12)\mathbf{i} + (3\alpha + 11)\mathbf{j}$$

$$a_B = 4\alpha - 12 \quad (1)$$

$$0 = 3\alpha + 11 \quad (2)$$

$\alpha = -3.67\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$a_B = -26.7\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

The negative signs indicate decelerations.

Scalar Analysis

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \downarrow 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\,(5) \\ \nearrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}(2)^2(5)$$

This yields Eqs. (1) and (2).

F16–20. Vector Analysis

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/O} \\ &= 1.8\mathbf{i} + (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{j}) - 12^2\,(0.3\mathbf{j}) \\ &= \{3.6\mathbf{i} - 43.2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$ *Ans.*

Scalar Analysis

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$

$$\begin{bmatrix} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_y \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6)(0.3) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6)(0.3) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \downarrow (12)^2(0.3) \end{bmatrix}$$

$$\pm\rightarrow \quad (a_A)_x = 1.8 + 1.8 = 3.6\ \text{m/s}^2 \rightarrow$$

$$+\uparrow \quad (a_A)_y = -43.2\ \text{m/s}^2$$

F16–21. Using

$$v_O = \omega r; \quad 6 = \omega(0.3)$$

$$\omega = 20\ \text{rad/s}$$

$$a_O = \alpha r; \quad 3 = \alpha(0.3)$$

$$\alpha = 10\ \text{rad/s}^2$$ *Ans.*

Vector Analysis

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/O} \\ &= 3\mathbf{i} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i}) - 20^2(-0.6\mathbf{i}) \\ &= \{243\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$ *Ans.*

Scalar Analysis

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$

$$\begin{bmatrix} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10(0.6) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (20)^2(0.6) \\ \rightarrow \end{bmatrix}$$

$$\pm\rightarrow \quad (a_A)_x = 3 + 240 = 243\ \text{m/s}^2$$

$$+\uparrow \quad (a_A)_y = 10(0.6) = 6\ \text{m/s}^2 \uparrow$$

F16–22. $\dfrac{r_{A/IC}}{3} = \dfrac{0.5 - r_{A/IC}}{1.5}; \quad r_{A/IC} = 0.3333\ \text{m}$

$$\omega = \frac{v_A}{r_{A/IC}} = \frac{3}{0.3333} = 9\ \text{rad/s}$$

Vector Analysis

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/C} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/C}$$

$$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\,\mathbf{j} = -0.75\mathbf{i} + (a_C)_n\,\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times 0.5\mathbf{j} - 9^2\,(0.5\mathbf{j})$$

$$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\,\mathbf{j} = (0.5\alpha - 0.75)\mathbf{i} + \left[(a_C)_n - 40.5\right]\mathbf{j}$$

$$1.5 = 0.5\alpha - 0.75$$

$$\alpha = 4.5\ \text{rad/s}^2$$ *Ans.*

Scalar Analysis

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A/C}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_n \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_C)_n \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(0.5) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (9)^2(0.5) \\ \downarrow \end{bmatrix}$$

$$\pm\rightarrow \quad 1.5 = -0.75 + \alpha(0.5)$$

$$\alpha = 4.5\ \text{rad/s}^2$$

F16–23. $v_B = \omega r_{B/A} = 12(0.3) = 3.6\ \text{m/s}$

The IC is at C.

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{3.6}{1.2} = 3\ \text{rad/s}, \quad \omega_{CD} = 0$$

Vector Analysis

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \\ &= (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - 12^2(0.3\mathbf{i}) \\ &= \{-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B}$$

$$a_C\,\mathbf{i} = (-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j}) + (\alpha_{BC}\,\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) - 3^2(1.2\mathbf{i})$$

$$a_C\,\mathbf{i} = -54\mathbf{i} + (1.2\alpha_{BC} - 1.8)\mathbf{j}$$

$$a_C = -54\ \text{m/s}^2 = 54\ \text{m/s}^2 \leftarrow$$ *Ans.*

$$0 = 1.2\alpha_{BC} - 1.8 \quad \alpha_{BC} = 1.5\ \text{rad/s}^2$$ *Ans.*

Scalar Analysis

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$$

$$\begin{bmatrix} a_C \\ \leftarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(0.3) \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (12)^2(0.3) \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{BC}(1.2) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3)^2(1.2) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

$$\pm\leftarrow \quad a_C = 43.2 + 10.8 = 54\ \text{m/s}^2 \leftarrow$$

$$+\uparrow \quad 0 = -6(0.3) + 1.2\alpha_{BC}$$

$$\alpha_{BC} = 1.5\ \text{rad/s}^2$$

F16–24. $v_B = \omega r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2\ \text{m/s} \rightarrow$

$r_{B/IC} = 0.8 \tan 60° = 1.3856\ \text{m}$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/IC}} = \frac{1.2}{1.3856} = 0.8660\ \text{rad/s}$$

Vector Analysis

$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$

$= (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j}) - 6^2(0.2\mathbf{j})$

$= (0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j})\ \text{m/s}$

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{C/B}$

$a_C \cos 30°\mathbf{i} + a_C \sin 30°\mathbf{j}$

$= (0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j}) + (\alpha_{BC}\mathbf{k} \times 0.8\mathbf{i}) - 0.8660^2(0.8\mathbf{i})$

$0.8660 a_C\,\mathbf{i} + 0.5 a_C\,\mathbf{j} = (0.8\alpha_{BC} - 7.2)\mathbf{j}$

$0.8660 a_C = 0 \quad (1)$

$0.5 a_C = 0.8\alpha_{BC} - 7.2 \quad (2)$

$a_C = 0 \qquad \alpha_{BC} = 9\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

Scalar Analysis

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$

$$\begin{bmatrix} a_C \\ \measuredangle 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(0.2) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6)^2(0.2) \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{BC}(0.8) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.8660)^2(0.8) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

This yields Eqs. (1) and (2).

Chapter 17

F17–1. $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\ 100\left(\frac{4}{5}\right) = 100a$

$a = 0.8\ \text{m/s}^2 \rightarrow$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100\left(\frac{3}{5}\right) - 100(9.81) = 0 \quad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.6) + 100\left(\frac{3}{5}\right)(0.7) - N_B(0.4) - 100\left(\frac{4}{5}\right)(0.7) = 0 \quad (2)$

$N_A = 430.4\ \text{N} = 430\ \text{N}$ *Ans.*

$N_B = 610.6\ \text{N} = 611\ \text{N}$ *Ans.*

F17–2. $+\swarrow \Sigma F_{x'} = m(a_G)_{x'};\ \ 80(9.81)\sin 15° = 80a$

$a = 2.54\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = m(a_G)_{y'};$

$N_A + N_B - 80(9.81)\cos 15° = 0 \quad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.5) - N_B(0.5) = 0 \quad (2)$

$N_A = N_B = 379\ \text{N}$ *Ans.*

F17–3. $\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A;\ \ 10\left(\frac{3}{5}\right)(7) = \frac{20}{32.2}a(3.5)$

$a = 19.3\ \text{ft/s}^2$ *Ans.*

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\ \ A_x + 10\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{20}{32.2}(19.32)$

$A_x = 6\ \text{lb}$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;\ \ A_y - 20 + 10\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$A_y = 12\ \text{lb}$ *Ans.*

F17–4. $F_A = \mu_s N_A = 0.2N_A \quad F_B = \mu_s N_B = 0.2N_B$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$0.2N_A + 0.2N_B = 100a \quad (1)$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100(9.81) = 0 \quad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$0.2N_A(0.75) + N_A(0.9) + 0.2N_B(0.75) - N_B(0.6) = 0 \quad (3)$

Solving Eqs. (1), (2), and (3),

$N_A = 294.3\ \text{N} = 294\ \text{N}$ *Ans.*

$N_B = 686.7\ \text{N} = 687\ \text{N}$ *Ans.*

$a = 1.96\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

Since N_A is positive, the table will indeed slide before it tips.

F17–5. $(a_G)_t = \alpha r = \alpha(1.5\ \text{m})$

$(a_G)_n = \omega^2 r = (5\ \text{rad/s})^2(1.5\ \text{m}) = 37.5\ \text{m/s}^2$

$\Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad 100\ \text{N} = 50\ \text{kg}[\alpha(1.5\ \text{m})]$

$\alpha = 1.33\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$\Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad T_{AB} + T_{CD} - 50(9.81)\ \text{N} = 50\ \text{kg}(37.5\ \text{m/s}^2)$

$T_{AB} + T_{CD} = 2365.5$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad T_{CD}(1\ \text{m}) - T_{AB}(1\ \text{m}) = 0$

$T_{AB} = T_{CD} = 1182.75\ \text{N} = 1.18\ \text{kN}$ *Ans.*

F17–6. Member CD,

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$

$D_y(0.6) - 450 = 0 \quad D_y = 750\ \text{N}$ *Ans.*

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B$

$(a_G)_n = \omega^2 r = 6^2(0.6) = 21.6\ \text{m/s}^2$

$(a_G)_t = \alpha r = \alpha(0.6)$

Member DB

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$750 - 50(9.81) = 50[\alpha(0.6)]$

$\alpha = 8.65\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$\pm \rightarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$F_{AB} + D_x = 50(21.6)$ (1)

$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0;$

$D_x(0.4) + 750(0.1) - F_{AB}(0.4) = 0$ (2)

$D_x = 446.25\ \text{N} = 446\ \text{N}$ *Ans.*

$F_{AB} = 633.75\ \text{N} = 634\ \text{N}$ *Ans.*

F17–7. $I_O = mk_O^2 = 100(0.5^2) = 25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad -100(0.6) = -25\alpha$

$\alpha = 2.4\ \text{rad/s}^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$\omega = 0 + 2.4(3) = 7.2\ \text{rad/s}$ *Ans.*

F17–8. $I_O = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(50)\,(0.3^2) = 2.25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;$

$-9t = -2.25\alpha \qquad \alpha = (4t)\ \text{rad/s}^2$

$d\omega = \alpha\, dt$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t 4t\, dt$$

$\omega = (2t^2)\ \text{rad/s}$

$\omega = 2(4^2) = 32\ \text{rad/s}$ *Ans.*

F17–9. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.15)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.15) = 5.4\ \text{m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}(30)(0.9^2) + 30(0.15^2)$

$= 2.7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60 - 30(9.81)(0.15) = 2.7\alpha$

$\alpha = 5.872\ \text{rad/s}^2 = 5.87\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$\pm \leftarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 30(5.4) = 162\ \text{N}$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t - 30(9.81) = 30[5.872(0.15)]$

$O_t = 320.725\ \text{N} = 321\ \text{N}$ *Ans.*

F17–10. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.3)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 10^2(0.3) = 30\ \text{m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{2}(30)(0.3^2) + 30(0.3^2)$

$= 4.05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;$

$50\left(\frac{3}{5}\right)(0.3) + 50\left(\frac{4}{5}\right)(0.3) = 4.05\alpha$

$\alpha = 5.185\ \text{rad/s}^2 = 5.19\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$O_n + 50\left(\frac{3}{5}\right) - 30(9.81) = 30(30)$

$O_n = 1164.3\ \text{N} = 1.16\ \text{kN}$ *Ans.*

$\pm \rightarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t + 50\left(\frac{4}{5}\right) = 30[5.185(0.3)]$

$O_t = 6.67\ \text{N}$ *Ans.*

F17–11. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(15\ \text{kg})(0.9\ \text{m})^2 = 1.0125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 0$

$(a_G)_t = \alpha(0.15\ \text{m})$

$I_O = I_G + md_{OG}^2$

$= 1.0125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 15\ \text{kg}(0.15\ \text{m})^2$

$= 1.35\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;$

$[15(9.81)\ \text{N}](0.15\ \text{m}) = (1.35\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$

$\alpha = 16.35\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$+\downarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad -O_t + 15(9.81)\ \text{N}$

$= (15\ \text{kg})[16.35\ \text{rad/s}^2(0.15\ \text{m})]$

$O_t = 110.36\ \text{N} = 110\ \text{N}$ *Ans.*

$\pm \rightarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 0$ *Ans.*

F17–12. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.45)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.45) = 16.2\ \text{m/s}^2$

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(30)(0.9^2) = 8.1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;$

$300\left(\frac{4}{5}\right)(0.6) - 30(9.81)(0.45) = 8.1\alpha$

$\alpha = 1.428\ \text{rad/s}^2 = 1.43\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$\pm \leftarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n + 300\left(\frac{3}{5}\right) = 30(16.2)$

$O_n = 306\ \text{N}$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad O_t + 300\left(\frac{4}{5}\right) - 30(9.81)$

$= 30[1.428(0.45)]$

$O_t = 73.58\ \text{N} = 73.6\ \text{N}$ *Ans.*

F17–13. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(60)(3^2) = 45\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad 80 - 20 = 60a_G$

$a_G = 1\ \text{m/s}^2\uparrow$

$\circlearrowleft +\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 80(1) + 20(0.75) = 45\alpha$

$\alpha = 2.11\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

F17–14. $\circlearrowleft +\Sigma M_{IC} = (\mathcal{M}_k)_{IC}$;

$-200(0.3) = -100a_G(0.3) - \frac{1}{2}(100)(0.3)^2\alpha$

$30a_G + 4.5\alpha = 60 \quad (1)$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.3) \quad (2)$

$\alpha = 4.44\ \text{rad/s}^2 \quad a_G = 1.33\ \text{m/s}^2 \rightarrow$ *Ans.*

$I_G = 20(0.3)^2 = 1.8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

F17–15. $I_G = 20(0.3)^2 = 1.8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 20(9.81) = 0 \quad N = 196.2\ \text{N}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0.5(196.2) = 20a_O$

$a_O = 4.905\ \text{m/s}^2 \rightarrow$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;$

$0.5(196.2)(0.4) - 100 = -1.8\alpha$

$\alpha = 33.8\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

F17–16. Sphere $I_G = \frac{2}{5}(20)(0.15)^2 = 0.18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft +\Sigma M_{IC} = (\mathcal{M}_k)_{IC};$

$20(9.81)\sin 30°(0.15) = 0.18\alpha + (20a_G)(0.15)$

$0.18\alpha + 3a_G = 14.715$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.15)$

$\alpha = 23.36\ \text{rad/s}^2 = 23.4\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

$a_G = 3.504\ \text{m/s}^2 = 3.50\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

F17–17. $I_G = 200(0.3)^2 = 18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 200(9.81) = 0 \quad N = 1962\ \text{N}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$T - 0.2(1962) = 200a_G \quad (1)$

The *IC* is at *A*.

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A; \quad 450 - 0.2(1962)(1)$

$= 18\alpha + 200a_G(0.4) \quad (2)$

$(a_A)_t = 0 \quad a_A = (a_A)_n$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$a_G\mathbf{i} = -a_A\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (-0.4\mathbf{j}) - \omega^2(-0.4\mathbf{j})$

$a_G\mathbf{i} = 0.4\alpha\mathbf{i} + (0.4\omega^2 - a_A)\mathbf{j}$

$a_G = 0.4\alpha \quad (3)$

Solving Eqs. (1), (2), and (3),

$\alpha = 1.15\ \text{rad/s}^2 \quad a_G = 0.461\ \text{m/s}^2$

$T = 485\ \text{N}$ *Ans.*

F17–18. $\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0 = 12(a_G)_x \quad (a_G)_x = 0$

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A;$

$-12(9.81)(0.3) = 12(a_G)_y(0.3) - \frac{1}{12}(12)(0.6)^2\alpha$

$0.36\alpha - 3.6(a_G)_y = 35.316 \quad (1)$

$\omega = 0$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$(a_G)_y\mathbf{j} = a_A\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - \mathbf{0}$

$(a_G)_y\mathbf{j} = (a_A)\mathbf{i} - 0.3\alpha\mathbf{j}$

$a_A = 0$ *Ans.*

$(a_G)_y = -0.3\alpha \quad (2)$

Solving Eqs. (1) and (2)

$\alpha = 24.5\ \text{rad/s}^2$

$(a_G)_y = -7.36\ \text{m/s}^2 = 7.36\ \text{m/s}^2\downarrow$ *Ans.*

Chapter 18

F18–1. $I_O = mk_O^2 = 80\left(0.4^2\right) = 12.8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(12.8)\omega^2 = 6.4\omega^2$

$s = \theta r = 20(2\pi)(0.6) = 24\pi\ \text{m}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 50(24\pi) = 6.4\omega^2$

$\omega = 24.3\ \text{rad/s}$ *Ans.*

F18–2. $T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(2.5\omega_2)^2$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(5\ \text{ft})^2\right]\omega_2^2$

$T_2 = 6.4700\omega_2^2$

Or,

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(5\ \text{ft})^2$

$= 12.9400\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$

So that

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}(12.9400 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\omega_2^2$$
$$= 6.4700\omega_2^2$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$T_1 + [-Wy_G + M\theta] = T_2$$
$$0 + [-(50 \text{ lb})(2.5 \text{ ft}) + (100 \text{ lb} \cdot \text{ft})(\tfrac{\pi}{2})]$$
$$= 6.4700\omega_2^2$$
$$\omega_2 = 2.23 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–3. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/IC} = \omega_2(2.5)$

$$I_G = \tfrac{1}{12} ml^2 = \tfrac{1}{12}(50)\left(5^2\right) = 104.17 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(50)\left[\omega_2(2.5)\right]^2 + \tfrac{1}{2}(104.17)\omega_2^2 = 208.33\omega_2^2$$
$$U_P = Ps_P = 600(3) = 1800 \text{ J}$$
$$U_W = -Wh = -50(9.81)(2.5 - 2) = -245.25 \text{ J}$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 1800 + (-245.25) = 208.33\omega_2^2$$
$$\omega_2 = 2.732 \text{ rad/s} = 2.73 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–4. $T = \tfrac{1}{2} mv_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$
$$= \tfrac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.4\omega)^2 + \tfrac{1}{2}[50 \text{ kg}(0.3 \text{ m})^2]\omega^2$$
$$= 6.25\omega^2 \text{ J}$$
Or,
$$T = \tfrac{1}{2} I_{IC} \omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}[50 \text{ kg}(0.3 \text{ m})^2 + 50 \text{ kg}(0.4 \text{ m})^2]\omega^2$$
$$= 6.25\omega^2 \text{ J}$$
$$s_G = \theta r = 10(2\pi \text{ rad})(0.4 \text{ m}) = 8\pi \text{ m}$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$T_1 + P\cos 30^\circ s_G = T_2$$
$$0 + (50 \text{ N})\cos 30^\circ(8\pi \text{ m}) = 6.25\omega^2 \text{ J}$$
$$\omega = 13.2 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–5. $I_G = \tfrac{1}{12} ml^2 = \tfrac{1}{12}(30)\left(3^2\right) = 22.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} mv_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(30)[\omega(0.5)]^2 + \tfrac{1}{2}(22.5)\omega^2 = 15\omega^2$$
Or,
$$I_O = I_G + md^2 = \tfrac{1}{12}(30)\left(3^2\right) + 30\left(0.5^2\right)$$
$$= 30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 = \tfrac{1}{2}(30)\omega^2 = 15\omega^2$$
$$s_1 = \theta r_1 = 8\pi(0.5) = 4\pi \text{ m}$$
$$s_2 = \theta r_2 = 8\pi(1.5) = 12\pi \text{ m}$$
$$U_{P_1} = P_1 s_1 = 30(4\pi) = 120\pi \text{ J}$$
$$U_{P_2} = P_2 s_2 = 20(12\pi) = 240\pi \text{ J}$$
$$U_M = M\theta = 20[4(2\pi)] = 160\pi \text{ J}$$
$$U_W = 0 \text{ since bar returns to the same position}$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 120\pi + 240\pi + 160\pi = 15\omega^2$$
$$\omega = 10.44 \text{ rad/s} = 10.4 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–6. $v_G = \omega r = \omega(0.4)$
$$I_G = mk_G^2 = 20\left(0.3^2\right) = 1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} mv_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(20)\left[\omega(0.4)\right]^2 + \tfrac{1}{2}(1.8)\omega^2$$
$$= 2.5\omega^2$$
$$U_M = M\theta = M\left(\tfrac{s_O}{r}\right) = 50\left(\tfrac{20}{0.4}\right) = 2500 \text{ J}$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 2500 = 2.5\omega^2$$
$$\omega = 31.62 \text{ rad/s} = 31.6 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–7. $v_G = \omega r = \omega(0.3)$
$$I_G = \tfrac{1}{2} mr^2 = \tfrac{1}{2}(30)\left(0.3^2\right) = 1.35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(30)[\omega_2(0.3)]^2 + \tfrac{1}{2}(1.35)\omega_2^2 = 2.025\omega_2^2$$
Datum at O.
$$\left(V_g\right)_1 = Wy_1 = 0$$
$$\left(V_g\right)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.3) = -88.29 \text{ J}$$
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 0 = 2.025\omega_2^2 + (-88.29)$$
$$\omega_2 = 6.603 \text{ rad/s} = 6.60 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–8. $v_O = \omega r_{O/IC} = \omega(0.2)$
$$I_O = mk_O^2 = 50\left(0.3^2\right) = 4.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} m(v_O)_2^2 + \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(50)\left[\omega_2(0.2)\right]^2 + \tfrac{1}{2}(4.5)\omega_2^2$$
$$= 3.25\omega_2^2$$
Datum at initial position.
$$\left(V_g\right)_1 = Wy_1 = 0$$
$$\left(V_g\right)_2 = -Wy_2 = -50(9.81)(6 \sin 30^\circ)$$
$$= -1471.5 \text{ J}$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 0 = 3.25\omega_2^2 + (-1471.5)$$
$$\omega_2 = 21.28 \text{ rad/s} = 21.3 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$$

F18–9. $v_G = \omega r_G = \omega(1.5)$
$I_G = \frac{1}{12}(60)\left(3^2\right) = 45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(60)[\omega_2(1.5)]^2 + \frac{1}{2}(45)\omega_2^2$
$= 90\omega_2^2$
Or,
$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[45 + 60\left(1.5^2\right)\right]\omega_2^2 = 90\omega_2^2$
$\left(V_g\right)_1 = Wy_1 = 0$
$\left(V_g\right)_2 = -Wy_2 = -60(9.81)(1.5 \sin 45°)$
$= -624.30 \text{ J}$
$\left(V_e\right)_1 = \frac{1}{2} ks_1^2 = 0$
$\left(V_e\right)_2 = \frac{1}{2} ks_2^2 = \frac{1}{2}(150)(3 \sin 45°)^2 = 337.5 \text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 90\omega_2^2 + [-624.30 + 337.5]$
$\omega_2 = 1.785 \text{ rad/s} = 1.79 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F18–10. $v_G = \omega r_G = \omega(0.75)$
$I_G = \frac{1}{12}(30)\left(1.5^2\right) = 5.625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$
Or,
$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[5.625 + 30\left(0.75^2\right)\right]\omega_2^2$
$= 11.25\omega_2^2$
Datum at O.
$\left(V_g\right)_1 = Wy_1 = 0$
$\left(V_g\right)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.75)$
$= -220.725 \text{ J}$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2} ks_1^2 = 0$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2} ks_2^2 = \frac{1}{2}(80)\left(\sqrt{2^2 + 1.5^2} - 0.5\right)^2 = 160 \text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 11.25\omega_2^2 + (-220.725 + 160)$
$\omega_2 = 2.323 \text{ rad/s} = 2.32 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F18–11. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/IC} = \omega_2(0.75)$
$I_G = \frac{1}{12}(30)\left(1.5^2\right) = 5.625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2} m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega_2(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$
Datum at B.
$\left(V_g\right)_1 = Wy_1 = 30(9.81)(0.75 \sin 45°) = 156.08 \text{ J}$
$\left(V_g\right)_2 = -Wy_2 = 0$
$\left(V_e\right)_1 = \frac{1}{2} ks_1^2 = 0$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2} ks_2^2 = \frac{1}{2}(300)(1.5 - 1.5 \cos 45°)^2$
$= 28.95 \text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + (156.08 + 0) = 11.25\omega_2^2 + (0 + 28.95)$
$\omega_2 = 3.362 \text{ rad/s} = 3.36 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F18–12. $T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(20 \text{ kg})(2 \text{ m})^2\right]\omega^2$
$= 13.3333\omega^2$
Datum at A.
$(V_g)_1 = -Wy_1 = -[20(9.81) \text{ N}](1 \text{ m}) = -196.2 \text{ J}$
$(V_g)_2 = 0$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2} ks_1^2$
$= \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})\left(\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} - 0.5 \text{ m}\right)^2$
$= 482.22 \text{ J}$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2} ks_2^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})(1 \text{ m} - 0.5 \text{ m})^2$
$= 12.5 \text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + [-196.2 \text{ J} + 482.22 \text{ J}]$
$= 13.3333\omega_2^2 + [0 + 12.5 \text{ J}]$
$\omega_2 = 4.53 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

Chapter 19

F19–1. $\circlearrowleft + I_O\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O \, dt = I_O\omega_2$
$0 + \int_0^{4 \text{ s}} 3t^2 \, dt = \left[60\left(0.3^2\right)\right]\omega_2$
$\omega_2 = 11.85 \text{ rad/s} = 11.9 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

F19–2. $\circlearrowleft + (H_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_A dt = (H_A)_2$
$0 + 300(6) = 300\left(0.4^2\right)\omega_2 + 300[\omega(0.6)](0.6)$
$\omega_2 = 11.54 \text{ rad/s} = 11.5 \text{ rad/s} \quad \textit{Ans.}$

$\overset{+}{\rightarrow} \quad m(v_1)_x + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_2)_x$

$$0 + F_f(6) = 300[11.54(0.6)]$$
$$F_f = 346\ \text{N} \qquad \textit{Ans.}$$

F19–3. $v_A = \omega_A r_{A/IC} = \omega_A(0.15)$

$$\zeta + \Sigma M_O = 0;\quad 9 - A_t(0.45) = 0 \quad A_t = 20\ \text{N}$$

$$\zeta + (H_C)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_C\, dt = (H_C)_2$$
$$0 + [20(5)](0.15) = 10[\omega_A(0.15)](0.15) + \left[10\left(0.1^2\right)\right]\omega_A$$
$$\omega_A = 46.2\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F19–4. $I_A = mk_A^2 = 10\left(0.08^2\right) = 0.064\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_B = mk_B^2 = 50\left(0.15^2\right) = 1.125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$\omega_A r_A = \omega_B r_B$

$$\omega_A = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)\omega_B = \left(\frac{0.2}{0.1}\right)\omega_B = 2\omega_B$$

F is the force between the gears.

$$\circlearrowleft + I_A(\omega_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_A\, dt = I_A(\omega_A)_2$$
$$0 + 10(5) - \int_0^{5\,\text{s}} F(0.1)dt = 0.064[2(\omega_B)_2]$$
$$\int_0^{5\,\text{s}} F dt = 500 - 1.28(\omega_B)_2 \qquad (1)$$

$$\zeta + I_B(\omega_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_B\, dt = I_B(\omega_B)_2$$
$$0 + \int_0^{5\,\text{s}} F(0.2)dt = 1.125(\omega_B)_2$$
$$\int_0^{5\,\text{s}} F dt = 5.625(\omega_B)_2 \qquad (2)$$

Equating Eqs. (1) and (2),
$500 - 1.28(\omega_B)_2 = 5.625(\omega_B)_2$
$(\omega_B)_2 = 72.41\ \text{rad/s} = 72.4\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$

F19–5. $(\pm)\quad m\left[(v_O)_x\right]_1 + \Sigma \int F_x dt = m\left[(v_O)_x\right]_2$

$$0 + (150\ \text{N})(3\ \text{s}) + F_A(3\ \text{s}) = (50\ \text{kg})(0.3\omega_2)$$

$$\circlearrowleft + I_G\omega_1 + \Sigma \int M_G\, dt = I_G\omega_2$$
$$0 + (150\ \text{N})(0.2\ \text{m})(3\ \text{s}) - F_A(0.3\ \text{m})(3\ \text{s}) = [(50\ \text{kg})(0.175\ \text{m})^2]\,\omega_2$$
$$\omega_2 = 37.3\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$
$$F_A = 36.53\ \text{N}$$

Also,

$$I_{IC}\omega_1 + \Sigma \int M_{IC}\, dt = I_{IC}\omega_2$$
$$0 + [(150\ \text{N})(0.2 + 0.3)\ \text{m}](3\ \text{s}) = [(50\ \text{kg})(0.175\ \text{m})^2 + (50\ \text{kg})(0.3\ \text{m})^2]\omega_2$$
$$\omega_2 = 37.3\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

F19–6. $(+\uparrow)\quad m\left[(v_G)_1\right]_y + \Sigma \int F_y dt = m\left[(v_G)_2\right]_y$

$$0 + N_A(3\ \text{s}) - (150\ \text{lb})(3\ \text{s}) = 0$$
$$N_A = 150\ \text{lb}$$

$$\circlearrowleft + (H_{IC})_1 + \Sigma \int M_{IC}\, dt = (H_{IC})_2$$
$$0 + (25\ \text{lb}\cdot\text{ft})(3\ \text{s}) - [0.15(150\ \text{lb})(3\ \text{s})](0.5\ \text{ft}) + \left[\tfrac{150}{32.2}\text{slug}\left(1.25\ \text{ft}\right)^2\right]\omega_2 + \left(\tfrac{150}{32.2}\text{slug}\right)\left[\omega_2(1\ \text{ft})\right](1\ \text{ft})$$
$$\omega_2 = 3.46\ \text{rad/s} \qquad \textit{Ans.}$$

د بيا کتنې سوالونو ځوابونه

Review Problem Answers

Chapter 12

R12–1. $a_{max} = 42 \text{ ft/s}^2$ *Ans.*
$v_{max} = 135 \text{ ft/s}$ *Ans.*

R12–2. $s = 20.0 \text{ ft}$ *Ans.*

R12–3. $s = 1.84 \text{ m}$ *Ans.*

R12–4. $0 \le t \le 5 \quad a = 4 \text{ m/s}^2$ *Ans.*
$5 \le t \le 20 \quad a = 0 \text{ m/s}^2$ *Ans.*
$20 \le t \le 30 \quad a = -2 \text{ m/s}^2$ *Ans.*
$s_1 = 50 \text{ m}$ *Ans.*
$s_2 = 350 \text{ m}$ *Ans.*
$s_3 = 450 \text{ m}$ *Ans.*

R12–5. $\mathbf{a}_{AB} = \{0.404\mathbf{i} + 7.07\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$ *Ans.*
$\mathbf{a}_{AC} = \{2.50\mathbf{i}\} \text{ m/s}^2$ *Ans.*

R12–6. $v_0 = 67.7 \text{ ft/s}$ *Ans.*
$\theta = 58.9°$ *Ans.*

R12–7. $v = 4.58 \text{ m/s}$ *Ans.*
$a = 0.653 \text{ m/s}^2$ *Ans.*

R12–8. $v = 3.19 \text{ m/s}$ *Ans.*
$a = 4.22 \text{ m/s}^2$ *Ans.*

R12–9. $a = 29.0 \text{ m/s}^2$ *Ans.*

R12–10. $t = 160 \text{ s}$ *Ans.*

R12–11. $v_{B/A} = 875 \text{ km/h}$ *Ans.*
$\theta = 41.5°$ ⬊ *Ans.*

Chapter 13

R13–1. $F = 85.7 \text{ N}$ *Ans.*

R13–2. $T = 158 \text{ N}$ *Ans.*

R13–3. $a_A = 9.66 \text{ ft/s}^2$ *Ans.*
$a_B = 3.86 \text{ ft/s}^2$ *Ans.*

R13–4. $T = 46.7 \text{ N}$ *Ans.*

R13–5. $a_t = 3.36 \text{ m/s}^2$ ↙ *Ans.*
$T = 361 \text{ N}$ *Ans.*

R13–6. $v = 5.38 \text{ ft/s}$ *Ans.*

R13–7. $N = 5.88 \text{ lb}$ *Ans.*
$a_t = 23.0 \text{ ft/s}^2$ *Ans.*

R13–8. $F_r = 68 \text{ N}$ *Ans.*
$N = 153 \text{ N}$ *Ans.*

Chapter 14

R14–1. $v_2 = 21.5 \text{ ft/s}$ *Ans.*

R14–2. $v_B = 47.8 \text{ ft/s}$ *Ans.*

R14–3. $v_B = 25.4 \text{ ft/s}$ *Ans.*

R14–4. $F = 38.5 \text{ N}$ *Ans.*

R14–5. $P_i = 1.80 \text{ hp}$ *Ans.*

R14–6. $P_i = 1.63 \text{ hp}$ *Ans.*

R14–7. $v_B = 10.4 \text{ m/s}$ *Ans.*

R14–8. $v_2 = 13.8 \text{ ft/s}$ *Ans.*

Chapter 15

R15–1. $t = 1.02 \text{ s}$ *Ans.*

R15–2. $v_2 = 1.92 \text{ m/s}$ *Ans.*

R15–3. $v_2 = 31.7 \text{ m/s}$ *Ans.*

R15–4. $v_{ABC} = 2.18 \text{ m/s} \leftarrow$ *Ans.*

R15–5. $(v_B)_2 = 8 \text{ m/s} \rightarrow$
$t = 4.077 \text{ s} = 4.08 \text{ s}$ *Ans.*

R15–6. $(v_A)_2 = 0.400 \text{ m/s} \rightarrow$ *Ans.*
$(v_B)_2 = 2.40 \text{ m/s} \rightarrow$ *Ans.*
$d = 0.951 \text{ m}$ *Ans.*

R15–7. $(v_B)_2 = 1.34 \text{ m/s} \quad \leftarrow$ *Ans.*
$(v_A)_2 = 1.30 \text{ m/s}$ *Ans.*
$(\theta_A)_2 = 8.47°$ ∠ *Ans.*

R15–8. $v = 13.4 \text{ m/s}$ *Ans.*

Chapter 16

R16–1. $v_W = 14.2\ \text{ft/s}$ *Ans.*
$a_W = 0.25\ \text{ft/s}^2$ *Ans.*

R16–2. $v_B = 0.394\ \text{m/s}$ *Ans.*

R16–3. $v_B = 0.860\ \text{m/s}$ *Ans.*

R16–4. $v_C = 1.34\ \text{m/s}$ *Ans.*

R16–5. $a_C = 50.6\ \text{m/s}^2$ *Ans.*
$\theta = 9.09°\ \measuredangle\ \theta$ *Ans.*
The cylinder moves up with an acceleration
$a_B = 8.00\ \text{m/s}^2\uparrow$ *Ans.*

R16–6. $\alpha_{CB} = 7.52\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*
$a_C = 4.22\ \text{m/s}^2$ *Ans.*
$\theta = 60.8°\ \measuredangle$ *Ans.*

R16–7. $a_B = 2.25\ \text{m/s}^2$ *Ans.*
$\theta = 32.6°\ \measuredangle$ *Ans.*

R16–8. $v_C = 9.38\ \text{in./s}$ *Ans.*
$a_C = 54.7\ \text{in./s}^2$ *Ans.*
$\alpha = 3.00\ \text{rad/s}^2$

Chapter 17

R17–1. At each wheel
$N'_A = 383\ \text{N}$ *Ans.*
$N'_B = 620\ \text{N}$ *Ans.*

R17–2. $E_x = 9.87\ \text{lb}$ *Ans.*
$E_y = 4.86\ \text{lb}$ *Ans.*
$M_E = 7.29\ \text{lb}\cdot\text{ft}$ *Ans.*

R17–3. $a_G = 1.38\ \text{m/s}^2$ *Ans.*

R17–4. $T = 218\ \text{N}$ *Ans.*
$\alpha = 21.0\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

R17–5. $\alpha = 12.1\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*
$F = 30.0\ \text{lb}$ *Ans.*

R17–6. $F_o = 6.14\ \text{lb}\rightarrow$ *Ans.*

R17–7. $\alpha = 8.89\ \text{rad/s}^2$ *Ans.*

R17–8. $\omega = 100\ \text{rad/s}$ *Ans.*

Chapter 18

R18–1. $\omega_2 = 2.83\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R18–2. $\omega = 33.0\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R18–3. $v_B = 2.58\ \text{m/s}$ *Ans.*
$P = 141\ \text{N}$ *Ans.*

R18–4. $s_G = 0.859\ \text{m}$ *Ans.*

R18–5. $v_2 = 3.46\ \text{m/s}$ *Ans.*

R18–6. $\omega = 2.30\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R18–7. $v_C = 13.3\ \text{ft/s}$ *Ans.*

R18–8. $d = 3.38\ \text{m}$ *Ans.*

Chapter 19

R19–1. $\omega_2 = 12.4\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R19–3. $(v_G)_2 = 9.42\ \text{m/s}$ *Ans.*

R19–4. $(v_O)_2 = 6\ \text{m/s}$ *Ans.*
$\omega_2 = 26.7\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R19–5. $\omega = 215\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R19–6. $\omega_A = 1.70\ \text{rad/s}$ *Ans.*
$\omega_B = 5.10\ \text{rad/s}$ *Ans.*

R19–7. $\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1$ *Ans.*

R19–8. $\omega = 3.56\ \text{rad/s}$ *Ans.*

د انتخاب شویو سوالونو ځوابونه

Answers to Selected Problems

Chapter 12

12-1 $v = 0, s = 80.7\text{ m}$

12-2 $s = 20\text{ ft}$

12-3 $a = -24\text{ m/s}^2, \Delta s = -880\text{ m}, s_T = 912\text{ m}$

12-5 $a = -12\text{ m/s}^2, s = 0, s_T = 8\text{ m},$
$(v_{sp})_{avg} = 2.67\text{ m/s}$

12-6 $s = 11.9\text{ m}, v = 0.250\text{ m/s}$

12-7 $v_{avg} = 15\text{ m/s}, (v_{sp})_{avg} = 19.7\text{ m/s}$

12-9 $v = 2.63\text{ m/s}$

12-10 $v = 1.29\text{ m/s}$

12-11 $v_{avg} = 0.222\text{ m/s}, (v_{sp})_{avg} = 2.22\text{ m/s}$

12-13 Normal: $d = 517\text{ ft}$, Drunk: $d = 616\text{ ft}$

12-14 $t = 2.45s, t = 6.67s$

12-15 $h = 127\text{ ft}, v = 90.6\text{ ft/s}\downarrow$

12-17 $d = 16.9\text{ ft}$

12-18 $s_A = 3200\text{ ft}$

12-19 $k = -4.80\text{ ft/s}^3$

12-21 $s = 123\text{ ft}, a = 2.99\text{ ft/s}^2$

12-22 $v = 22.4\text{ m/s}$

12-23 $v = (20e^{-2t})\text{m/s}, a = (-40e^{-2t})\text{ m/s}^2,$
$s = 10(1 - e^{-2t})\text{ m}$

12-25 (a) $v = 45.5\text{ m/s}$, (b) $v_{max} = 100\text{ m/s}$

12-26 $h = 4.54\text{ m}$

12-27 $t = 0.549\left(\frac{v_f}{g}\right)$

12-29 $s_{AB} = 35.7\text{ m}$

12-30 $s = 54.0\text{ m}$

12-31 $s_{tot} = 13.0\text{ ft}, v_{avg} = -1.00\text{ ft/s},$
$(v_{sp})_{avg} = 2.60\text{ ft/s}$

12-33 $v = 11.2\text{ km/s}$

12-34 $v = -R\sqrt{\frac{2g_0(y_0 - y)}{(R + y)(R + y_0)}}, v_{imp} = 3.02\text{ km/s}$

12-35 $t' = 27.3\text{ s}$. When $t = 27.3\text{ s}, v = 13.7\text{ ft/s}$.

12-37 $\Delta s = 1.11\text{ km}$

12-38 $a|_{t=0} = -4\text{ m/s}^2, a|_{t=2\text{ s}} = 0, a|_{t=4\text{ s}} = 4\text{ m/s}^2,$
$v|_{t=0} = 3\text{ m/s}, v|_{t=2\text{ s}} = -1\text{ m/s}, v|_{t=4\text{ s}} = 3\text{ m/s}$

12-39 $s = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4, v = \frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right),$
$a = -\frac{2\pi^2}{25}\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$

12-41 $t = 7.48\text{ s}$. When $t = 2.14\text{ s},$
$v = v_{max} = 10.7\text{ ft/s}, h = 11.4\text{ ft}$

12-42 $t = 11.25\text{ s}$

12-43 $t' = 35\text{ s}$ For $0 \le t < 10\text{ s}, s = \{300t\}\text{ ft},$
$v = 300\text{ ft/s}$
For $10\text{ s} < t < 20\text{ s},$
$s = \left\{\frac{1}{6}t^3 - 15t^2 + 550t - 1167\right\}\text{ ft}$
$v = \left\{\frac{1}{2}t^2 - 30t + 550\right\}\text{ ft/s}$
For $20\text{ s} < t \le 35\text{ s}, s = \{-5t^2 + 350t + 167\}\text{ ft}$
$v = (-10t + 350)\text{ ft/s}$

12-45 When $t = 0.1\text{ s}, s = 0.5\text{ m}$ and a changes from 100 m/s^2 to -100 m/s^2. When $t = 0.2\text{ s}, s = 1\text{ m}$.

12-46 $v\Big|_{s=75\text{ ft}} = 27.4\text{ ft/s}, v\Big|_{s=125\text{ ft}} = 37.4\text{ ft/s}$

12-47 For $0 \le t < 9\text{ s}$
$v = (4t^{3/2})\text{ m/s} \qquad v|_{t=9\text{ s}} = 108\text{ m/s}$
$s = \left(\frac{8}{5}t^{5/2}\right)\text{m} \qquad s|_{t=9\text{ s}} = 389\text{ m}$
For $9\text{ s} < t \le 14\text{ s}$
$v = (2t^2 - 18t + 108)\text{ m/s} \qquad v|_{t=14\text{ s}} = 248\text{ m/s}$
$s = \left(\frac{2}{3}t^3 - 9t^2 + 108t - 340\right)\text{m}$
$s|_{t=14\text{ s}} = 1237\text{ m}$

12-49 $v_{max} = 100\text{ m/s}, t' = 40\text{ s}$

12-50 For $0 \le t < 10\text{ s}$
$a = 8\text{ m/s}^2$
$s = (4t^2)\text{ m} \qquad s|_{t=10\text{ s}} = 400\text{ m}$
For $10\text{ s} < t \le 40\text{ s}$
$a = 0$
$s = (80t - 400)\text{ m}$
$s|_{t=40\text{ s}} = 2800\text{ m}$

12-51 For $0 \le t < 60\text{ s}, s = \left\{\frac{1}{20}t^2\right\}\text{ m}, a = 0.1\text{ m/s}^2.$
For $60\text{ s} < t < 120\text{ s}, s = \{6t - 180\}\text{ m}, a = 0.$
For $120\text{ s} < t \le 180\text{ s}, s = \left\{\frac{1}{30}t^2 - 2t + 300\right\}\text{ m},$
$a = 0.0667\text{ m/s}^2.$

12-53 At $t = 8\text{ s}, a = 0$ and $s = 30\text{ m}$. At $t = 12\text{ s},$
$a = -1\text{ m/s}^2$ and $s = 48\text{ m}$.

12-54 For $0 \le t < 5\text{ s}, s = \{0.2t^3\}\text{ m}, a = \{1.2t\}\text{ m/s}^2$
For $5\text{ s} < t \le 15\text{ s}, s = \left\{\frac{1}{4}(90t - 3t^2 - 275)\right\}\text{ m}$

$a = -1.5\ \text{m/s}^2$,
At $t = 15\ \text{s}$, $s = 100\ \text{m}$, $v_{\text{avg}} = 6.67\ \text{m/s}$

12-55 $t' = 33.3\ \text{s}, s|_{t=5\ \text{s}} = 550\ \text{ft}, s|_{t=15\ \text{s}} = 1500\ \text{ft}$,
$s|_{t=20\ \text{s}} = 1800\ \text{ft}, s|_{t=33.3\ \text{s}} = 2067\ \text{ft}$

12-57 For $0 \le s < 100\ \text{ft}$, $v = \left\{\sqrt{\frac{1}{50}(800s - s^2)}\right\}\ \text{ft/s}$,
For $100\ \text{ft} < s \le 150\ \text{ft}$,
$v = \left\{\frac{1}{5}\sqrt{-3s^2 + 900s - 25\,000}\right\}\ \text{ft/s}$

12-58 For $0 \le t < 6\ \text{s}$
$v = \left(\frac{1}{18}t^3\right)\ \text{m/s}$
$s = \left(\frac{1}{72}t^4\right)\ \text{m}$
For $6\ \text{s} < t \le 10\ \text{s}$
$v = (6t - 24)\ \text{m/s}$
$s = (3t^2 - 24t + 54)\ \text{m}$
$s = 114\ \text{m}$

12-59 $s_T = 980\ \text{m}$

12-61 When $t = 5\ \text{s}, s_B = 62.5\ \text{m}$.
When $t = 10\ \text{s}, v_A = (v_A)_{\max} = 40\ \text{m/s}$ and $s_A = 200\ \text{m}$.
When $t = 15\ \text{s}, s_A = 400\ \text{m}$ and $s_B = 312.5\ \text{m}$.
$\Delta s = s_A - s_B = 87.5\ \text{m}$

12-62 $s|_{t=0.8335} = 2.08\ \text{ft}$
$s|_{t=1.675} = 0$
$s|_{t=2.5\ \text{s}} = -6.25\ \text{ft}$.
$v = \{5 - 6t\}\ \text{ft/s}$
$v|_{t=0} = 5\ \text{ft/s}$,
$v = 0$ at $t = 0.833\ \text{s}$,
$v|_{t=2.5\ \text{s}} = -10\ \text{m/s}$.
$a = -6\ \text{ft/s}^2$ for all t.

12-63 For $0 \le s < 225\ \text{m}$
$a = 12.5\ \text{m/s}^2$
For $225\ \text{m} < s \le 525\ \text{m}$
$a = \{0.04\,s - 24\}\ \text{m/s}^2$
$a|_{s=225\ \text{m}} = -15\ \text{m/s}^2$ $a|_{s=525\ \text{m}} = -3\ \text{m/s}^2$

12-65 $v = 354\ \text{ft/s}, t = 5.32\ \text{s}$

12-66 For $0 \le s < 100\ \text{m}$
$v = \{0.1415\}\ \text{m/s}$ $v|_{s=100\ \text{m}} = 14.1\ \text{m/s}$,
For $100\ \text{m} < s \le 200\ \text{m}$
$v = \left\{\sqrt{4s - 200}\right\}\ \text{m/s}$ $v|_{s=200\ \text{m}} = 24.5\ \text{m/s}$

12-67 For $0 \le s < 100\ \text{ft}$
$a = \{0.015 + 0.53\}\ \text{ft/s}$ $a|_{s=0} = 0.5\ \text{ft/s}^2$
$a|_{s=100\ \text{ft}} = 1.5\ \text{ft/s}^2$
For $100\ \text{ft} < s < 350\ \text{ft}$
$a = \{0.00165 - 0.76\}\ \text{ft/s}^2$
$a|_{s=100\ \text{ft}} = -0.6\ \text{ft/s}^2$
$a|_{s=350\ \text{ft}} = -0.2\ \text{ft/s}^2$

12-69 $a = 5.31\ \text{m/s}^2, \alpha = 53.0°\ \beta = 37.0°, \gamma = 90.0°$

12-70 $v_x = 0.398\ \text{ft/s}, v_y = 3.98\ \text{ft/s}$

12-71 $a_x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{c}{3b}}\frac{1}{\sqrt{t}}, a_y = 2ct$

12-73 (5.15 ft, 1.33 ft)

12-74 $v = 2.69\ \text{ft/s}, a = 0.0200\ \text{ft/s}^2$

12-75 $(v_{\text{sp}})_{\text{avg}} = 4.28\ \text{m/s}$

12-77 $\theta = 45°$

12-78 $v = 1003\ \text{m/s}, a = 103\ \text{m/s}^2$

12-79 $d = 4.00\ \text{ft}, a = 37.8\ \text{ft/s}^2$

12-81 $(\mathbf{a}_{AB})_{\text{avg}} = \{1.2\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$,
$(\mathbf{a}_{AC})_{\text{avg}} = \{-1.2\mathbf{i}\}\ \text{m/s}^2$

12-82 $v = \sqrt{c^2k^2 + b^2}, a = ck^2$

12-83 $v = 10.4\ \text{m/s}, a = 38.5\ \text{m/s}^2$

12-85 $d = 204\ \text{m}, v = 41.8\ \text{m/s}\ a = 4.66\ \text{m/s}^2$

12-86 $\theta = 58.3°, (v_0)_{\min} = 9.76\ \text{m/s}$

12-87 $\theta = 76.0°, v_A = 49.8\ \text{ft/s}, h = 39.7\ \text{ft}$

12-89 $R_{\max} = 10.2\ \text{m}, \theta = 45°$

12-90 $R = 8.83\ \text{m}$

12-91 $x = 13.2\ \text{ft}, y = -6.95\ \text{ft}$

12-93 $d = 166\ \text{ft}$

12-94 $t = 3.57\ \text{s}, v_B = 67.4\ \text{ft/s}$

12-95 $v_A = 36.7\ \text{ft/s}, h = 11.5\ \text{ft}$

12-97 $R = 8.83\ \text{m}$

12-98 $v_A = 6.49\ \text{m/s}, t = 0.890\ \text{s}$

12-99 $v_A = 28.0\ \text{m/s}$

12-101 $v_{\min} = 0.838\ \text{m/s}, v_{\max} = 1.76\ \text{m/s}$

12-102 $s = 8.68\ \text{ft}, s = 34.4\ \text{ft}$

12-103 $\theta = 23.8°$ and $77.5°$

12-105 $t_A = 0.553\ \text{s}, x = 3.46\ \text{m}$

12-106 $R = 19.0\ \text{m}, t = 2.48\ \text{s}$

12-107 $\theta_1 = 24.9°\ \nwarrow, \theta_2 = 85.2°\ \nearrow$

12-109 $\theta = 76.0°, v_A = 49.8\ \text{ft/s}, h = 39.7\ \text{ft}$

12-110 $a = 0.0719\ \text{ft/s}^2$

12-111 $a_n = 8.00\ \text{ft/s}^2, a_t = 24\ \text{ft/s}^2$

12-113 $v = 4.40\ \text{m/s}, a_t = 5.04\ \text{m/s}^2, a_n = 1.39\ \text{m/s}^2$

12-114 $a_t = 8.66\ \text{ft/s}^2, \rho = 1280\ \text{ft}$

12-115 $a = 1.30\ \text{m/s}^2$

12-117 $v = 5.66\ \text{m/s}, a = 1.02\ \text{m/s}^2$

12-118 $v = 1.80\ \text{m/s}, a = 1.20\ \text{m/s}^2$

12-119 $h = 5.99\ \text{Mm}$

12-121 $a = 2.75\ \text{m/s}^2$

12-122 $a = 1.68\ \text{m/s}^2$

12-123 $a = \frac{9}{20\left[1 + 4(10^{-6})x^2\right]^{3/2}}$

12-125 $a_A = 4.44\ \text{m/s}^2$

12-126 $a_B = 0.556\ \text{m/s}^2$

12-127 $a_t = 3.62\ \text{m/s}^2, \rho = 29.6\ \text{m}$

12-129 $t = 7.00\ \text{s}, s = 98.0\ \text{m}$

12-130 $a = 7.42\ \text{ft/s}^2$

12-131 $a = 2.36\ \text{m/s}^2$

12-134 $a = 0.763\ \text{m/s}^2$
12-135 $a = 0.952\ \text{m/s}^2$
12-137 $y = -0.0766x^2, v = 8.37\ \text{m/s}, \theta_v = 17.0°$ ↘
$a_n = 9.38\ \text{m/s}^2, a_t = 2.88\ \text{m/s}^2$
12-138 $d = 106\ \text{ft}, a_A = 9.88\ \text{ft/s}^2, a_B = 1.28\ \text{ft/s}^2$
12-139 $a = 0.824\ \text{m/s}^2$
12-141 $a = 1.81\ \text{ft/s}^2$
12-142 $t = 1.21\ \text{s}$
12-143 $a = 7.85\ \text{ft/s}^2$
12-145 $d = 11.0\ \text{m}, a_A = 19.0\ \text{m/s}^2, a_B = 12.8\ \text{m/s}^2$
12-146 $t = 2.51\ \text{s}, a_A = 22.2\ \text{m/s}^2, a_B = 65.1\ \text{m/s}^2$
12-147 $v = 51.1\ \text{ft/s}, a = 10.3\ \text{ft/s}^2$
12-149 $a = 0.511\ \text{m/s}^2$
12-150 $a = 0.309\ \text{m/s}^2$
12-151 $a = 322\ \text{mm/s}^2, \theta = 26.6°$ ↗
12-153 $v = 43.0\ \text{m/s}, a = 6.52\ \text{m/s}^2$
12-154 $a = 7.48\ \text{ft/s}^2$
12-155 $v_r = -1.66\ \text{m/s}, v_\theta = -2.07\ \text{m/s}, a_r = -4.20\ \text{m/s}^2,$
$a_\theta = 2.97\ \text{m/s}^2$
12-157 $v_r = a \sin\theta\dot{\theta}, v_\theta = (b - a\cos\theta)\dot{\theta},$
$a_r = (2a\cos\theta - b)\dot{\theta}^2 + a\sin\theta\ddot{\theta},$
$a_\theta = (b - a\cos\theta)\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta}^2\sin\theta$
12-158 $v = 464\ \text{ft/s}, a = 43.2(10^3)\ \text{ft/s}^2$
12-159 $\mathbf{v} = \{-14.4\mathbf{u}_r - 24.0\mathbf{u}_z\}\ \text{m/s}$
$\mathbf{a} = \{-3.61\mathbf{u}_r - 6.00\mathbf{u}_z\}\ \text{m/s}^2$
12-161 $v_r = -2\sin t, v_\theta = \cos t, a_r = -\frac{5}{2}\cos t,$
$a_\theta = -2\sin t$
12-162 $v_r = -2.33\ \text{m/s}, v_\theta = 7.91\ \text{m/s}, a_r = -158\ \text{m/s}^2,$
$a_\theta = -18.6\ \text{m/s}^2$
12-163 $\dot{\theta} = 0.302\ \text{rad/s}$
12-165 $\dot{\mathbf{a}} = (\dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\mathbf{u}_r$
$+ (3\dot{r}\ddot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta} + 3\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^3)\mathbf{u}_\theta + (\dddot{z})\mathbf{u}_z$
12-166 $v = 146\ \text{mm/s}, a = 90.0\ \text{mm/s}^2$
12-167 $v = 16.8\ \text{ft/s}, a = 199\ \text{ft/s}^2$
12-169 $v_r = -\frac{20}{\sqrt{1+\theta^2}}, v_\theta = \frac{20\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}, v_r = -14.1\ \text{ft/s}$
$v_\theta = 14.1\ \text{ft/s}$
12-170 $v_r = 16.0\ \text{ft/s}, v_\theta = 1.94\ \text{ft/s}, a_r = 7.76\ \text{ft/s}^2,$
$a_\theta = 1.94\ \text{ft/s}^2$
12-171 $v = 0.242\ \text{m/s}, a = 0.169\ \text{m/s}^2,$
$(v_A)_x = 0.162\ \text{m/s} \leftarrow, (v_A)_y = 0.180\ \text{m/s} \uparrow$
12-173 $a = 27.8\ \text{m/s}^2$
12-174 $v = lc\sec^2 ct, a = 2lc^2\sec^2 ct\tan ct$
12-175 $v = 242\ \text{mm/s}, a = 169\ \text{mm/s}^2,$
$(v_A)_x = 162\ \text{mm/s} \leftarrow,$
$(v_A)_y = 180\ \text{mm/s} \uparrow$
12-177 $v = 4.16\ \text{m/s}, a = 33.1\ \text{m/s}^2$
12-178 $v = 447\ \text{mm/s}, a = 3.66\ \text{m/s}^2$
12-179 $v_{AB} = 25.9\ \text{mm/s}, a_{AB} = -9.28\ \text{mm/s}^2$
12-181 $v = 8.49\ \text{m/s}, a = 88.2\ \text{m/s}^2$
12-183 $v_r = -24.2\ \text{ft/s}, v_\theta = 25.3\ \text{ft/s}$
12-185 $v = 1.32\ \text{m/s}$
12-186 $a = 8.66\ \text{m/s}^2$
12-187 $v_{AB} = -250\ \text{mm/s}, a_{AB} = -2.17\ \text{m/s}^2$
12-189 $v_r = 32.0\ \text{ft/s}, v_\theta = 50.3\ \text{ft/s}, a_r = -201\ \text{ft/s}^2,$
$a_\theta = 256\ \text{ft/s}^2$
12-190 $v_r = 32.0\ \text{ft/s}, v_\theta = 50.3\ \text{ft/s}, a_r = -161\ \text{ft/s}^2,$
$a_\theta = 319\ \text{ft/s}^2$
12-191 $v = 5.95\ \text{ft/s}, a = 3.44\ \text{ft/s}^2$
12-193 $v = 2a\dot{\theta}, a = 4a\dot{\theta}^2$
12-194 $v = 2a\dot{\theta}, a = 2a\sqrt{4\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$
12-195 $v_B = 0.5\ \text{m/s}$
12-197 $\Delta s_B = 2\ \text{ft} \uparrow$
12-198 $v_{A/B} = 2.90\ \text{m/s} \uparrow$
12-199 $\Delta s_B = 1.33\ \text{ft} \rightarrow$
12-201 $t = 3.83\ \text{s}$
12-202 $v_B = 0.75\ \text{m/s} \leftarrow$
12-203 $t = 5.00\ \text{s}$
12-205 $v_B = 1\ \text{m/s} \uparrow$
12-206 $v_B = 1.50\ \text{m/s} \leftarrow$
12-207 $v_A = 12\ \text{ft/s} \rightarrow$
12-209 $v_C = 0.667\ \text{m/s} \uparrow$
12-210 $v_A = 14.7\ \text{m/s}$
12-211 $v_B = 2.40\ \text{m/s} \uparrow, a_B = 3.25\ \text{m/s}^2 \uparrow$
12-213 $v_A = 4\ \text{ft/s} \leftarrow$
12-215 $v_A = 10.0\ \text{m/s} \leftarrow, a_A = 46.0\ \text{m/s}^2 \leftarrow$
12-217 $v_C = 0.175\ \text{m/s} \uparrow$
12-218 $v_{B/A} = 1044\ \text{km/h}, \theta = 54.5°$ ↗
12-219 $v_{B/A} = 28.5\ \text{mi/h}, \theta_v = 44.5°$ ↗,
$a_{B/A} = 3418\ \text{mi/h}^2, \theta_a = 80.6°$ ↗
12-221 $v_{A/B} = 13.5\ \text{ft/s}, t = 1.85\ \text{min}$
12-222 $v_{A/C} = 21.5\ \text{m/s}, \theta_v = 34.9°$ ↖,
$a_{A/C} = 4.20\ \text{m/s}^2, \theta_a = 75.4°$ ↙
12-223 $v_{B/C} = 18.6\ \text{m/s}, \theta_v = 66.2°$ ↗, $a_{B/C} = 0.959\ \text{m/s}^2,$
$\theta_a = 8.57°$ ↘
12-225 $v_{A/B} = 98.4\ \text{ft/s}, \theta_v = 67.6°$ ↙, $a_{A/B} = 19.8\ \text{ft/s}^2,$
$\theta_a = 57.4°$ ↗
12-226 $v_{A/B} = 6.69\ \text{m/s}, \theta = 53.3°$ ↙, $a_{A/B} = 1.52\ \text{m/s}^2,$
$\theta = 41.9°$ ↙
12-227 $v_{B/A} = 20.5\ \text{m/s}, \theta_v = 43.1°$ ↙, $a_{B/A} = 4.92\ \text{m/s}^2,$
$\theta_a = 6.04°$ ↙
12-229 $v_b = 6.21\ \text{m/s}, t = 11.4\ \text{s}$
12-230 $v_m = 4.87\ \text{ft/s}, t = 10.3\ \text{s}$
12-231 $v_{B/A} = 26.0\ \text{m/s}, \theta = 30°$ ↖, $a_{B/A} = 1.98\ \text{m/s}^2,$
$\phi = 35.2°$ ↙

Chapter 13

13-1 $s = 97.4\ \text{ft}$
13-2 $v = 3.36\ \text{m/s}, s = 5.04\ \text{m}$
13-3 $P = 224\ \text{N}$
13-5 $F = 6.37\ \text{N}$
13-6 $v = 3.29\ \text{m/s}$

13-10 $v = 60.7\ \text{ft/s}$

13-11 $t = 0.249\ \text{s}$

13-13 $a_A = 9.66\ \text{ft/s}^2 \leftarrow,\ a_B = 15.0\ \text{ft/s}^2 \rightarrow$

13-14 $T = 11.25\ \text{kN}, F = 33.75\ \text{kN}$

13-15 $A_x = 685\ \text{N}, A_y = 1.19\ \text{kN}, M_A = 4.74\ \text{kN}\cdot\text{m}$

13-17 $P = 574\ \text{N}$

13-18 $R = 5.30\ \text{ft}, t = 1.82\ \text{s}$

13-19 $R = 5.08\ \text{ft}$, Total time $= 1.48\ \text{s}$

13-21 $s = 5.43\ \text{m}$

13-22 $v_B = 5.70\ \text{m/s} \uparrow$

13-23 $a_A = -\frac{5}{11}g = \frac{5}{11}g \uparrow, a_B = \frac{3}{11}g \downarrow, a_C = \frac{7}{11}g \downarrow$

13-25 $\theta = 22.6°$

13-26 $v_A = 17.4\ \text{ft/s} \downarrow$

13-27 $t = 0.815\ \text{s}$

13-29 $v = 2.01\ \text{ft/s}$

13-30 $F = 23.5\ \text{N}$

13-31 $T = 1.63\ \text{kN}$

13-33 $a_B = 4.89\ \text{ft/s}^2, N_B = 35.60\ \text{lb}, a_A = 1.31\ \text{ft/s}^2$

13-34 $P = 31.9\ \text{N}, t = 3.07\ \text{s}$

13-35 $t = 5.66\ \text{s}$

13-37 $a_B = 2.30\ \text{ft/s}^2 \uparrow$

13-38 $a = 6.92\ \text{m/s}^2$ (The initial velocity of block B will not affect its acceleration)

13-39 $v = \frac{1}{m}\sqrt{1.09F_0^2t^2 + 2F_0tmv_0 + m^2v_0^2},$
$x = \frac{y}{0.3} + v_0\left(\sqrt{\frac{2m}{0.3F_0}}\right)y^{1/2}$

13-41 a) $a_C = 6.94\ \text{m/s}^2 \swarrow$ b) $a_C = 6.94\ \text{m/s}^2 \swarrow$
c) $a_{C/A} = 5.225\ \text{m/s}^2$ ⍋
$a_C = 7.08\ \text{m/s}^2, \theta = 56.5°\ \theta$ ⍁

13-42 $a_C = 7.49\ \text{m/s}^2\ \theta = 22.8°$ ⍁

13-43 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left[\frac{e^{2t\sqrt{mg/k}} - 1}{e^{2t\sqrt{mg/k}} + 1}\right], v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

13-45 $x = \frac{m\,v_0}{k}\cos\theta_0(1 - e^{-(k/m)t}),\ y = -\frac{mgt}{k} + \frac{m}{k}\left(v_0\sin\theta_0 + \frac{mg}{k}\right)(1 - e^{-(k/m)t}),$
$x_{\max} = \frac{m\,v_0\cos\theta_0}{k}$

13-46 $P = 2mg\tan\theta$

13-47 $P = 2mg\left(\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\right)$

13-49 $A_x = 35.6\ \text{lb}, A_y = 236\ \text{lb}, M_A = 678\ \text{lb}\cdot\text{ft}$

13-50 $v = \frac{mg}{c}[1 - e^{-(c/m)t}],$
$s = \frac{mg}{c}\left\{t + \frac{m}{c}[e^{-(c/m)t} - 1]\right\}$

13-53 $r = 1.36\ \text{m}$

13-54 $v = 10.5\ \text{m/s}$

13-55 $v_{\max} = 251\ \text{m/s}, N = 6.18\ \text{kN}$

13-57 $v = 9.37\ \text{m/s}, N_z = 589\ \text{N}, N_n = 340\ \text{N}, N_t = 0$

13-58 $v = 0.969\ \text{m/s}$

13-59 $v = 1.48\ \text{m/s}$

13-61 $v = 9.29\ \text{ft/s}, T = 38.0\ \text{lb}$

13-62 $v = 2.10\ \text{m/s}$

13-63 $F_n = 323\ \text{lb}, F_t = 0$

13-65 $\theta = 15.0°, \phi = 12.6°$

13-66 $v = 22.1\ \text{m/s}$

13-67 $N = 279\ \text{lb}, N = 0$

13-69 $d = 383\ \text{mm}$

13-70 $N_A = -11.8\ \text{lb}, N_B = -29.5\ \text{lb}$

13-71 $N = 277\ \text{lb}, F = 13.4\ \text{lb}$

13-73 $N = 466\ \text{N}, a_t = 0.986\ \text{m/s}^2$

13-74 $a_t = 29.4\ \text{ft/s}^2, N = 69.0\ \text{lb}$

13-75 $l_0 = 1.5\ \text{ft}$

13-77 $v_G = 2.83\ \text{m/s}$

13-78 $a = 7.32\ \text{m/s}^2, N = 59.2\ \text{N}$

13-79 $N_P = 711\ \text{N}, \rho = 951\ \text{m}$

13-81 $\theta = 37.7°$

13-82 $N = 4.16\ \text{kN}, a_t = 1.92\ \text{m/s}^2$

13-83 $N = 20.216, v = 10.4\ \text{ft/s}$

13-85 $(F_z)_{\min} = 15.6\ \text{N}, (F_z)_{\max} = 23.6\ \text{N}$

13-86 $F = 210\ \text{N}$

13-87 $F = 1.60\ \text{lb}$

13-89 $F_r = -29.4\ \text{N}, F_\theta = 0, F_z = 392\ \text{N}$

13-90 $F_r = 102\ \text{N}, N_z = 375\ \text{N}, N_\theta = 79.7\ \text{N}$

13-91 $N = 4.90\ \text{N}, F = 4.17\ \text{N}$

13-93 $N = 4.22\ \text{lb}, P = -126\ \text{lb}$

13-94 $N = 12.1\ \text{N}, F = 7.67\ \text{N}$

13-95 $\psi = 84.3°, a_t = 12\ \text{m/s}^2$

13-97 $\dot{\theta} = 7.00\ \text{rad/s}$

13-98 $N = 4.77\ \text{lb}, P = 1.68\ \text{lb}$

13-99 $\dot{\theta} = 5.70\ \text{rad/s}$

13-101 $F_r = -100\ \text{N}, F_\theta = 0, F_z = 2.45\ \text{kN}$

13-102 $a_t = 12\ \text{m/s}^2; \theta = 5.71°$ ⍁

13-103 $F_r = -131\ \text{N}, F_\theta = -38.4\ \text{N}, F_z = 215\ \text{N}$

13-105 $N = 5.76\ \text{N}, F = 6.48\ \text{N}$

13-106 $N = 0.328\ \text{N}, F = 10.5\ \text{N}$

13-107 $F = 0.163\ \text{lb}$

13-109 $F_r = 25.6\ \text{N}, F_{OA} = 0$

13-110 $F_r = 20.7\ \text{N}, F_{OA} = 0$

13-111 $r = 0.198\ \text{m}$

13-113 $v_o = 30.4\ \text{km/s},$
$\frac{1}{r} = 0.348\,(10^{-12})\cos\theta + 6.74\,(10^{-12})$

13-114 $h = 35.9\ \text{Mm}, v_s = 3.07\ \text{km/s}$

13-115 $v_0 = 7.45\ \text{km/s}$

13-117 $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right)a^3$
13-118 $v_p = 7.76\ \text{km/s}, v_A = 4.52\ \text{km/s}, T = 3.35\ \text{hr}$
13-119 $v_A = 6.67(10^3)\ \text{m/s}, v_B = 2.77(10^3)\ \text{m/s}$
13-121 $v = 7.31\ \text{km/s}$
13-122 $v_A = 6.33\ \text{km/s}, t = 2.9\ \text{hr}, \Delta v = 578\ \text{m/s}$
13-123 $(v_A)_C = 5.27(10^3)\ \text{m/s}, \Delta v = 684\ \text{m/s}$
13-125 $v_0 = 23.9(10^3)\ \text{ft/s}$
13-126 $v_{A'} = 7.30(10^3)\ \text{ft/s}, t = 1.69\ \text{h}$
13-127 $\Delta v = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1+e}\right)$ occur at perigee
13-129 $v_A = 2.01(10^3)\ \text{m/s}$
13-130 $v_{A'} = 521\ \text{m/s}, t = 21.8\ \text{h}$
13-131 $v_A = 7.01(10^3)\ \text{m/s}$

Chapter 14

14-1 $s = 59.7\ \text{m}$
14-2 $x_{\max} = 3.24\ \text{ft}$
14-3 $v = 6.89\ \text{m/s}$
14-5 $h = 39.3\ \text{m}, \rho = 26.2\ \text{m}$
14-6 $d = 120\ \text{m}$
14-7 Observer A: $v_2 = 6.08\ \text{m/s}$, Observer B: $v_2 = 4.08\ \text{m/s}$
14-9 $P = 207\ \text{N}$
14-10 $s = 20.5\ \text{m}$
14-11 $v = 2.67\ \text{ft/s}$
14-13 $v_B = 31.5\ \text{ft/s}, d = 22.6\ \text{ft}, v_C = 54.1\ \text{ft/s}$
14-14 $x = 5.44\ \text{ft}$
14-15 $v_A = 3.52\ \text{ft/s}$
14-17 $X_{\max} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{m}{k}(v_0^2 + 2gh)}$
14-18 $y = 3.81\ \text{ft}$
14-19 $v_B = 3.34\ \text{m/s}$
14-21 $s_A = 0.255\ \text{m}, s_B = 0.205\ \text{m}$
14-22 $s_{\text{Tot}} = 3.88\ \text{ft}$
14-23 $v = 3.77\ \text{m/s}$
14-25 $s = 0.0735\ \text{ft}$
14-26 $v_A = 28.3\ \text{m/s}$
14-27 $v_B = 18.0\ \text{m/s}, N_B = 12.5\ \text{kN}$
14-29 $v_B = 18.5\ \text{ft/s}, a_B = 123\ \text{ft/s}^2, y_{\max} = 5.55\ \text{ft}$
14-30 $v_2 = 15.4\ \text{m/s}$
14-31 $R = 2.83\ \text{m}, v_C = 7.67\ \text{m/s}$
14-33 $v_A = 3.82\ \text{m/s}$
14-34 $v_B = 24.0\ \text{ft/s}, N_B = 7.18\ \text{lb}, v_C = 16.0\ \text{ft/s}, N_C = 1.18\ \text{lb}$
14-35 $v_B = 42.2\ \text{ft/s}, N = 50.6\ \text{lb}, a_t = 26.2\ \text{ft/s}^2$
14-37 $v = 1.07\ \text{m/s}$
14-38 $v_B = 26.1\ \text{ft/s}, N_B = 135\ \text{lb}$
14-39 $v_B = 5.42\ \text{m/s}$
14-41 $d = 36.2\ \text{ft}$
14-42 $\theta = 47.2°$
14-43 $P_i = 4.20\ \text{hp}$
14-45 $P = 8.32\ (10^3)\ \text{hp}$
14-46 $t = 46.2\ \text{min}$
14-47 $P = 9.24\ \text{hp}$
14-49 $v = 4.86\ \text{m/s}$
14-50 $P = 8.31t\ \text{MW}$
14-51 $P = 92.2\ \text{hp}$
14-53 $P_i = 483\ \text{kW}$
14-54 $P_i = 622\ \text{kW}$
14-55 $P_i = 22.2\ \text{kW}$
14-57 $P_{\text{out}} = 35.4\ \text{kW}$
14-58 $P = 0.231\ \text{hp}$
14-59 $P_{\text{in}} = 19.5\ \text{kW}$
14-61 $P_{\text{in}} = 0.645\ \text{hp}$
14-62 $P = 0.229\ \text{hp}$
14-63 $P = 0.0364\ \text{hp}$
14-65 $P = 3.64\ \text{hp}$
14-66 $F = 227\ \text{N}$
14-67 $h = 113\ \text{in.}$
14-69 $v_B = 5.33\ \text{m/s}, N = 694\ \text{N}$
14-70 $v = 3.84\ \text{m/s}; T = -5.89\ \text{N}$
14-71 $v_C = 177\ \text{ft/s}$
14-73 $N_B = 0, h = 18.75\ \text{m}, N_C = 17.2\ \text{kN}$
14-74 $x - 1.10\ \text{in.}$
14-75 $N = 3.04\ \text{lb}$
14-77 $h = 23.75\ \text{m}, v_C = 21.6\ \text{m/s}$
14-78 $v_B = 15.5\ \text{m/s}$
14-79 $l = 2.77\ \text{ft}$
14-81 $\theta = 118°$
14-83 $U_{1-2} = GM_e m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
14-85 $v_B = 34.8\ \text{Mm/h}$
14-86 $v_2 = 2.15\ \text{m/s}$
14-87 $s_B = 0.638\ \text{m}, s_A = 1.02\ \text{m}$
14-89 $x = 453\ \text{mm}$
14-90 $N = 78.6\ \text{N}$
14-91 $v_B = 10.6\ \text{m/s}, T_B = 142\ \text{N}, v_C = 9.47\ \text{m/s}, T_C = 48.7\ \text{N}$
14-93 $v_B = 27.2\ \text{ft/s}$
14-94 $v = 4.49\ \text{ft/s}$
14-95 $x_A = 0.516\ \text{ft}, x_B = 0.387\ \text{ft}$
14-97 $k = 773\ \text{N/m}$

Chapter 15

15-1 $I = 0.373\ \text{lb}\cdot\text{s}$
15-2 $v = 29.4\ \text{ft/s}$
15-3 $T = 3643\ \text{lb}$
15-5 $T = 20.1\ \text{lb}$

15-6 $v = 104\ \text{m/s}$

15-7 $F_{AB} = 16.7\ \text{lb}, v = 13.4\ \text{ft/s}$

15-9 $v = 6.62\ \text{m/s}$

15-10 $v_2 = \dfrac{2Ct'}{\pi m}, s = \dfrac{Ct'^2}{\pi m}$

15-11 $v = 60.0\ \text{m/s}\uparrow$

15-13 $\mu_k = 0.340$

15-15 $v = 23.5\ \text{ft/s}$

15-17 $v = 8.81\ \text{m/s}, s = 24.8\ \text{m}$

15-18 $v|_{t=3\,\text{s}} = 5.68\ \text{m/s}\downarrow, v|_{t=6\,\text{s}} = 21.1\ \text{m/s}\uparrow$

15-21 $T = 14.9\ \text{kN}, F = 24.8\ \text{kN}$

15-22 $v = 0.849\ \text{m/s}$

15-23 $v = 10.1\ \text{ft/s}$

15-25 $v = 7.21\ \text{m/s}\uparrow$

15-26 Observer A: $v = 7.40\ \text{m/s}$,
Observer B: $v = 5.40\ \text{m/s}$

15-27 $v_2 = 21.8\ \text{m/s}$

15-29 $v_B = 21.5\ \text{ft/s}\downarrow, v_A = 21.5\ \text{ft/s}\uparrow$

15-30 $v = 16.1\ \text{m/s}$

15-31 $T = 520.5\ \text{N}$

15-33 $v = 8.80\ \text{ft/s}$

15-34 $t = 0.486\ \text{s}$

15-35 $v = 18.6\ \text{m/s}\rightarrow$

15-37 $v = 5.21\ \text{m/s}\leftarrow, \Delta T = 32.6\ \text{kJ}$

15-38 $v = 21.2\ \text{ft/s}, T_1 = 423\ \text{ft}\cdot\text{kip}, T_2 = 280\ \text{ft}\cdot\text{kip}$

15-39 $v = 733\ \text{m/s}$

15-41 $d = 3.18\ \text{m}$

15-42 $d = 1.40\ \text{m}$

15-43 $s = 4.00\ \text{m}$

15-45 $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}, \theta_2 = \sin^{-1}\left(\dfrac{v_1 \sin\theta}{\sqrt{v_1^2 + 2gh}}\right)$

15-46 $v_A = 1.86\ \text{m/s}\leftarrow, v_C = 0.781\ \text{m/s}\rightarrow$

15-47 $s_{\max} = 481\ \text{mm}$

15-49 $v = \dfrac{Mv_0}{m + M}, t = \dfrac{v_0}{\mu g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}$

15-50 $x_{c/b} = \left|\dfrac{v_0^2}{2\mu g\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}\right|$

15-51 $v_2 = 20.7\ \text{ft/s}, I = 38.6\ \text{lb}\cdot\text{s}$

15-53 $s_B = 71.4\ \text{mm}\rightarrow$

15-54 $s_B = 71.4\ \text{mm}\rightarrow$

15-55 $v = 1.32\ \text{m/s}, s = 2.39\ \text{m}$

15-57 $v_B = 5.08\ \text{ft/s}, v_A = 7.61\ \text{ft/s}$

15-58 $(v_A)_2 = 0.353\ \text{m/s}, (v_B)_2 = 2.35\ \text{m/s}$

15-59 $e = 0.75, \Delta T = -9.65\ \text{kJ}$

15-61 $x_{\max} = 0.839\ \text{m}$

15-63 $v_C = 0.1875v\rightarrow, v_D = 0.5625v\rightarrow,$
$v_B = 0.8125v\rightarrow, v_A = 0.4375v\rightarrow$

15-65 $t = 0.226\ \text{s}$

15-66 $d = 0.329\ \text{ft}$

15-67 $x_{\max} = 1.31\ \text{ft}$

15-69 $v'_B = 22.2\ \text{m/s}, \theta = 13.0°$

15-70 $(v_A)_3 = \left(\dfrac{1 - e}{2}\right)\sqrt{gL}, (v_B)_3 = \left(\dfrac{1 + e}{2}\right)\sqrt{gL},$
$\theta = \cos^{-1}\left[1 - \dfrac{(1 + e)^2}{8}\right]$

15-71 $v_{p2} = 27.0\ \text{ft/s}, v_{m2} = 13.4\ \text{ft/s}, x = 2.61\ \text{ft}$

15-73 $v_A = 1.35\ \text{m/s}\rightarrow, v_B = 5.89\ \text{m/s}, \theta = 32.9°$ ◺

15-75 $h = 1.57\ \text{m}$

15-77 $(v_B)_3 = 3.24\ \text{m/s}, \theta = 43.9°$

15-78 $v'_B = 31.8\ \text{ft/s}$

15-79 $(v_A)_2 = 3.80\ \text{m/s}\leftarrow, (v_B)_2 = 6.51\ \text{m/s},$
$(\theta_B)_2 = 68.6°$ ◹

15-81 (a) $(v_B)_1 = 8.81\ \text{m/s}, \theta = 10.5°$ ◿,
(b) $(v_B)_2 = 4.62\ \text{m/s}, \phi = 20.3°$ ◹,
(c) $s = 3.96\ \text{m}$

15-82 $s = 0.456\ \text{ft}$

15-83 $(v_A)_2 = 6.90\ \text{m/s}, (v_B)_2 = 75.7\ \text{m/s}$

15-85 $\mu_k = 0.25$

15-86 $(v_A)_2 = 2.46\ \text{ft/s}, (v_B)_2 = 3.09\ \text{ft/s}$

15-87 $e = 0.577$

15-89 $(v_B)_2 = 6.59\ \text{ft/s}$

15-90 $d = 1.15\ \text{ft}, h = 0.770\ \text{ft}$

15-91 $h = 1.57\ \text{m}$

15-93 $(v_A)_2 = 8.19\ \text{m/s}, (v_B)_2 = 9.38\ \text{m/s}$

15-94 $(H_A)_O = 72.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↻, $(H_B)_O = 59.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↻

15-95 $(H_A)_P = 66.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↻,
$(H_B)_P = 73.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ↻

15-97 $(\mathbf{H}_A)_P = \{-52.8\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s},$
$(\mathbf{H}_B)_P = \{-118\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

15-98 $\mathbf{H}_O = \{-16.8\mathbf{i} + 14.9\,\mathbf{j} - 23.6\mathbf{k}\}\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}$

15-99 $\mathbf{H}_P = \{-14.3\mathbf{i} - 9.32\mathbf{j} - 34.8\mathbf{k}\}\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}$

15-101 $t = 5.85\ \text{s}$

15-102 $v_\theta = 10.9\ \text{ft/s}, v = 22.7\ \text{ft/s}$

15-103 $v = 4.67\ \text{m/s}$

15-105 $v = 19.3\ \text{ft/s}$

15-106 $v = 9.50\ \text{m/s}$

15-107 $v = 3.33\ \text{m/s}$

15-109 $H_O = 70.9\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}$ ↺

15-110 $v_2 = 4.03\ \text{m/s}, \Sigma U_{1-2} = 725\ \text{J}$

15-111 $h = 196\ \text{mm}, \theta = 75.0°$

15-113 $v_B = 10.2\ \text{km/s}, r_B = 13.8\ \text{Mm}$

15-114 $F_x = 11.0\ \text{N}$

15-115 $C_x = 4.97\ \text{kN}, D_x = 2.23\ \text{kN}, D_y = 7.20\ \text{kN}$

15-117 $F = 302\ \text{lb}$

15-118 $F = v^2\rho A$ for all cases

15-119 $F_x = 9.87\ \text{lb}, F_y = 4.93\ \text{lb}$

15-121 $F_x = 19.5\ \text{lb}, F_y = 1.96\ \text{lb}$

15-122 $F = 20.0\ \text{lb}$

15-123 $F = 22.4\text{ lb}$
15-125 $T = 82.8\text{ N}, N = 396\text{ N}$
15-126 $T = 0.680\text{ lb}$
15-127 $d = 2.56\text{ ft}$
15-129 $Q = 0.217(10^{-3})\text{ m}^3/\text{s}$
15-130 $v = \left\{\dfrac{8000}{2000 + 50t}\right\}\text{ m/s}$
15-131 $F = 482\text{ lb}$
15-133 $a = 0.125\text{ m/s}^2, v = 4.05\text{ m/s}$
15-134 $v_{max} = 2.07\ (10^3)\text{ft/s}$
15-135 452 Pa
15-137 $\Delta T = 3.88\text{ lb}$
15-138 $a_i = 133\text{ ft/s}^2, a_f = 200\text{ ft/s}^2$
15-139 $v = 580\text{ ft/s}$
15-141 $v = 3.12\text{ m/s}$
15-142 $h = \dfrac{8Q^2}{\pi^2 d^4 g} - \dfrac{m^2 g}{8\rho_w^2 Q^2}$

Chapter 16

16-1 $v_A = 2.60\text{ m/s}, a_A = 9.35\text{ m/s}^2$
16-5 $\theta = 5443\text{ rev}, \omega = 740\text{ rad/s}, \alpha = 8\text{ rad/s}^2$
16-6 $\theta = 314\text{ rev}, t = 20.9\text{ s}$
16-7 $\omega_B = 528\text{ rad/s}, \theta_B = 288\text{ rad}$
16-9 $\alpha_A = 60.8\text{ rad/s}^2$
16-10 $\omega_A = 225\text{ rad/s}$
16-11 $v = 52.0\text{ ft/s}, a_t = 12.0\text{ ft/s}^2, a_n = 1.35(10^3)\text{ ft/s}^2$
16-13 $\omega = 3.80\text{ rad/s}, a_p = 217\text{ ft/s}^2$
16-14 $\omega = 42.7\text{ rad/s}, \theta = 42.7\text{ rad}$
16-15 $a_t = 2.83\text{ m/s}^2, a_n = 35.6\text{ m/s}^2$
16-19 $\omega_B = 156\text{ rad/s}$
16-21 $v = 1\text{ m/s}$
16-22 $\omega_D = 4.00\text{ rad/s}, \alpha_D = 0.400\text{ rad/s}^2$
16-23 $\omega_D = 12.0\text{ rad/s}, \alpha_D = 0.600\text{ rad/s}^2$
16-25 $\theta_{max} = 18.1°$
16-26 $\omega_C = 1.68\text{ rad/s}, \theta_C = 1.68\text{ rad}$
16-29 $\omega_E = 0.160\text{ rad/s}$
16-30 $\omega_B = 22.3\text{ rad/s}$
16-33 $d = 1.44\text{ in.}$
16-34 $v_E = 3\text{ m/s}, (a_E)_t = 2.70\text{ m/s}^2, (a_E)_n = 600\text{ m/s}^2$
16-35 $\mathbf{v_C} = \{-4.8\mathbf{i} - 3.6\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}\}\text{ m/s}$,
$\mathbf{a}_C = \{38.4\mathbf{i} - 64.8\mathbf{j} + 40.8\mathbf{k}\}\text{ m/s}^2$
16-37 $v_C = 2.50\text{ m/s}, a_C = 13.1\text{ m/s}^2$
16-38 $v_C = 21.2\text{ ft/s}, a_C = 106\text{ ft/s}^2$
16-39 $v_{AB} = \omega l\cos\theta, a = -\omega^2 l\sin\theta$
16-41 $v = (-10\csc^2\theta)\text{ ft/s}$
16-42 $v = 0.416\text{ m/s}, a = -0.752\text{ m/s}^2$
16-43 $v = \omega r\cos\theta, a = -\omega^2 r\sin\theta$
16-45 $\dot{y} = 1.5\cot\theta$
16-46 $\dot{\theta} = 0.0841\text{ rad/s}\,\circlearrowright$
16-47 $\omega = 14.4\text{ rad/s}\,\circlearrowright$
16-49 $\omega_A = 13.3\text{ rad/s}, \theta = 2\text{ rev}$
16-50 $\omega = -\left(\dfrac{r}{x\sqrt{x^2 - r^2}}\right)v_A, \alpha = \left[\dfrac{r(2x^2 - r^2)}{x^2(x^2 - r^2)^{3/2}}\right]v_A^2$
16-51 $\omega = \dfrac{h}{h^2 + x^2}v_B, \alpha = \dfrac{-2xh}{(h^2 + x^2)^2}v_B^2$
16-53 $\omega = \dfrac{v\sin\phi}{l\cos(\phi - \theta)}, \alpha = \dfrac{-v^2\sin^2\phi\sin(\phi - \theta)}{l^2\cos^3(\phi - \theta)}$
16-54 $\omega = \dfrac{v}{2r}\,\circlearrowright$
16-55 $\omega_{CD} = 4.17\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-57 $v_B = 12.6\text{ in./s}, 65.7°\ \nwarrow$
16-58 $v_C = 3.54\text{ ft/s}$
16-59 $v_A = 9.20\text{ m/s}\rightarrow$
16-61 $\omega_{BC} = 2.31\text{ rad/s}\,\circlearrowleft, \omega_{AB} = 3.46\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-62 $v_C = 4\text{ ft/s}\rightarrow, v_B = 3.46\text{ ft/s}, \theta = 30°\ \measuredangle\theta$
16-63 $v_C = 1.04\text{ m/s}\rightarrow$
16-65 $\omega = 20\text{ rad/s}\,\circlearrowleft, v_A = 2\text{ ft/s}\rightarrow$
16-66 $v_C = 2.45\text{ m/s}\ \swarrow, \omega_{BC} = 7.81\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-67 $\omega = 5.33\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-69 $\omega_{BC} = 1.5\text{ rad/s}\,\circlearrowleft, \omega_{CD} = 1.70\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-70 $v_B = 7.33\text{ ft/s}\rightarrow, v_A = 2.83\text{ ft/s}, \theta = 45°\ \measuredangle\theta$
16-71 $v_A = 8\text{ ft/s}\rightarrow$
16-73 $v_E = 4.00\text{ m/s}, \theta = 52.7°\ \measuredangle$
16-74 $v_A = 1.36\text{ m/s}\rightarrow$
16-75 $\omega_{AB} = 330\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-77 $\omega_P = 5\text{ rad/s}\,\circlearrowright, \omega_A = 1.67\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-78 $v_E = 4\text{ ft/s}\leftarrow$
16-79 $v_C = 2.40\text{ ft/s}\uparrow$
16-85 $v_A = 2\text{ ft/s}\rightarrow, v_B = 10\text{ ft/s}\leftarrow$.
The cylinder slips.
16-86 $\omega = 1.5\dfrac{v}{r}\,\circlearrowleft$
16-87 $v_D = 10.6\text{ m/s}\downarrow$
16-89 $\omega_{AB} = 7.17\text{ rad/s}\,\circlearrowright$
16-90 $v_A = 45\text{ ft/s}\rightarrow$
16-91 $\omega_t = 26.7\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-93 $\omega_{BPD} = 3.00\text{ rad/s}\,\circlearrowright, v_P = 1.79\text{ m/s}\leftarrow$
16-94 $v_B = 29.7\text{ m/s}\ \nearrow$
16-95 $v_A = 60.0\text{ ft/s}\rightarrow, v_C = 220\text{ ft/s}\leftarrow$,
$v_B = 161\text{ ft/s}, \theta = 60.3°\ \nwarrow$
16-97 $v_C = 8.69\text{ m/s}, \theta = 22.9°\ \nearrow$
16-98 $v_D = 5.72\text{ m/s}, \theta = 36.2°\ \nwarrow$
16-99 $\omega_{CD} = 57.7\text{ rad/s}\,\circlearrowleft$
16-101 $v_C = 0.897\text{ m/s}\ \nearrow$
16-102 $v_D = 0.518\text{ m/s}\ \searrow$
16-103 $a_A = 56.2\text{ ft/s}^2\downarrow, a_B = 40.2\text{ ft/s}^2, \theta = 53.3°\ \swarrow$
16-105 $a_C = 1.80\text{ ft/s}^2, 33.7°\ \measuredangle\theta$
16-106 $\omega = 0.25\text{ rad/s}\,\circlearrowright, v_B = 5.00\text{ ft/s}\downarrow$,
$\alpha = 0.875\text{ rad/s}^2\,\circlearrowleft, a_B = 1.51\text{ ft/s}^2, \theta = 85.2°\ \measuredangle$
16-107 $\omega = 6.67\text{ rad/s}\,\circlearrowleft, v_B = 4.00\text{ m/s}\ \searrow$
$\alpha = 15.7\text{ rad/s}^2\,\circlearrowright, a_B = 24.8\text{ m/s}^2\ \nwarrow$

17-79 $t = 6.40\ \text{s}$

17-81 $A_x = 0, A_y = 289\ \text{N}, \alpha = 23.1\ \text{rad/s}^2$

17-82 $N_A = 177\ \text{kN}, V_A = 5.86\ \text{kN}, M_A = 50.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$

17-83 $F_A = 21.9\ \text{lb}$

17-85 $N = \frac{wx}{2g}(2\omega^2 L - \omega^2 x + 2g\cos\theta), V = wx\sin\theta,$
$M = \frac{1}{2}wx^2\sin\theta$

17-86 $N = 0, V_t = \frac{3M_0}{2L^3}(2Lx - x^2), V_z = \frac{mg}{L}x,$
$T = 0, M_t = \frac{mg}{2L}x^2, M_z = \frac{M_0}{2L^3}(3Lx^2 - x^3)$

17-87 $\alpha = 14.7\ \text{rad/s}^2, a_G = 4.90\ \text{m/s}^2$

17-89 $\omega = 800\ \text{rad/s}$

17-91 $a_G = 2\ \text{m/s}^2, \alpha = 22.22\ \text{rad/s}^2$

17-93 $a = 0, \alpha = 0.309(10^{-3})\ \text{rad/s}^2$

17-94 $\alpha = 3.89\ \text{rad/s}^2$

17-95 $\alpha = 9.51\ \text{rad/s}^2$

17-97 $\alpha = 12.3\ \text{rad/s}^2, (\mu_s)_{\min} = 0.0585$

17-98 $\alpha = 15.6\ \text{rad/s}^2$

17-99 $A_y = 15.0\ \text{lb}, A_x = 0.466\ \text{lb}, a_G = 1.00\ \text{ft/s}^2 \rightarrow$

17-101 $F = 42.3\ \text{N}$

17-102 $a_G = 0.15\ \text{m/s}^2 \rightarrow, T_{AB} = 1.96\ \text{kN}\uparrow,$
$\alpha = 0.225\ \text{rad/s}^2\ \text{⟲}, a_A = 0.3\ \text{m/s}^2 \leftarrow$

17-103 $\alpha = 4.65\ \text{rad/s}^2, T = 359\ \text{N}$

17-105 $\alpha = 18.9\ \text{rad/s}^2, P = 76.4\ \text{lb}$

17-106 $\alpha = 0.692\ \text{rad/s}^2$

17-107 $\alpha = 1.15\ \text{rad/s}^2$

17-109 $s = 1.40\ \text{in.}$

17-110 $a = 6.21\ \text{rad/s}^2$

17-111 $\alpha = \frac{6P}{mL}\ \text{⟲}, a_B = \frac{2P}{m}\rightarrow$

17-113 $a_G = \mu_k g \leftarrow, \alpha = \frac{2\mu_k g}{r}\ \text{⟲}$

17-114 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0, t = \frac{\omega_0 r}{3\mu_k g}$

17-115 $a_A = 282\ \text{ft/s}^2 \rightarrow$

17-117 $T_A = \frac{4}{7}W$

17-118 $\alpha = 23.4\ \text{rad/s}^2\ \text{↻}, B_y = 9.62\ \text{lb}$

Chapter 18

18-2 $s = 0.661\ \text{m}$

18-3 $s = 0.859\ \text{m}$

18-5 $\omega = 2.02\ \text{rad/s}$

18-6 $\omega = 1.88\ \text{rad/s}$

18-7 $T = 283\ \text{ft}\cdot\text{lb}$

18-9 $\omega = 21.5\ \text{rad/s}$

18-10 $v_C = 10.4\ \text{ft/s}$

18-11 $\omega = 2.45\ \text{rad/s}$

18-13 $\omega = 6.11\ \text{rad/s}$

18-14 $\omega = 8.64\ \text{rad/s}$

18-15 $\omega = 3.16\ \text{rad/s}$

18-17 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{g}{r^2}s\sin\theta}$

18-18 $v_C = 7.49\ \text{m/s}$

18-19 $\omega = 6.92\ \text{rad/s}$

18-21 $\omega_2 = 2.06\ \text{rad/s}$

18-22 $v_C = 19.6\ \text{ft/s}$

18-23 $\theta = 0.445\ \text{rev}$

18-25 $\theta = 5.18\ \text{rev}$

18-26 $\theta = 70.5°$

18-27 $\omega = 44.6\ \text{rad/s}$

18-29 $\omega_{DE} = 132\ \text{rad/s}$

18-30 $\omega = 2.50\ \text{rad/s}$

18-31 $\omega_2 = \frac{\sqrt{7}}{7r}\sqrt{7v_G^2 - 10gR}$

18-33 $\theta = 0.891\ \text{rev}$, regardless of orientation

18-34 $\omega = 10.5\ \text{rad/s}$

18-35 $\omega = 7.81\ \text{rad/s}$

18-37 $s_C = 78.0\ \text{mm}$

18-38 $\omega = 41.8\ \text{rad/s}$

18-39 $\omega = 39.3\ \text{rad/s}$

18-41 $\omega = 1.18\ \text{rad/s}$

18-42 $\omega = 2.82\ \text{rad/s}$

18-43 $\omega = 6.81\ \text{m/s}$

18-45 $\omega_{AB} = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$

18-46 $\omega_{AB} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

18-47 $\omega = 3.28\ \text{rad/s}$

18-49 $\omega_{AB} = 2.21\ \text{rad/s}$

18-50 $\omega_B = 11.1\ \text{rad/s}$

18-51 $\theta_0 = 8.94\ \text{rev}$

18-53 $\theta = 52.0°$

18-54 $v_B = 15.5\ \text{ft/s}$

18-55 $v_A = 4.00\ \text{m/s}$

18-57 $\omega_{AB} = 5.48\ \text{rad/s}$

18-58 $k = 232\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$

18-59 $v = 20.7\ \text{m/s}$

18-61 $v_C = 11.3\ \text{ft/s}$

18-62 $\omega = 1.80\ \text{rad/s}$

18-63 $v_A = 21.0\ \text{ft/s}$

18-65 $v = 8.55\ \text{rad/s}$

Chapter 19

19-5 $\omega_s = \left(\frac{5g\sin\theta}{7r}\right)t, \omega_C = \left(\frac{2g\sin\theta}{3r}\right)t$

19-6 $h = 0.375\ \text{ft}$

19-7 $\omega = 119\ \text{rad/s}, \theta = 22.5°\ \text{⦟}$

19-9 $F_{AB} = 49.0\ \text{N}, a_G = 64.5\ \text{ft/s}, t = 1.53\ \text{s}$

19-10 $v_G = 0.557\ \text{m/s}$
19-11 $\omega_2 = 245\ \text{rad/s}$
19-13 $v_G = 1.39\ \text{m/s}, \omega = 9.49\ \text{rad/s}$
19-14 $\int F\,dt = 15.2\ \text{kN}\cdot\text{s}$
19-15 $\omega = 0.328\ \text{rad/s}, d = 0.0625\ \text{m}$
19-17 $\omega = 11.4\ \text{rad/s}$
19-18 $\boldsymbol{\omega}_2 = \{-31.8\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$
19-19 $\omega = 70.8\ \text{rad/s}$
19-21 $\omega = 12.7\ \text{rad/s}\ \circlearrowright$
19-22 $\omega_A = 47.3\ \text{rad/s}\ \circlearrowleft$
19-23 $t = 5.08\ \text{s}$
19-25 $v = 19.4\ \text{ft/s}$
19-26 $M = 103\ \text{lb}\cdot\text{ft}$
19-27 $v_B = 1.59\ \text{m/s}$
19-29 $\omega = 1.91\ \text{rad/s}$
19-30 $\omega_2 = 0.658\ \text{rad/s}, \theta = 18.8°$
19-31 $\omega_2 = 0.578\ \text{rad/s}, \theta = 15.8°$
19-33 $\omega = 0.190\ \text{rad/s}$
19-34 $\omega_1 = 2.41\ \text{rad/s}, \omega_2 = 1.86\ \text{rad/s}$
19-35 $\omega_T = 1.19(10^{-3})\ \text{rad/s}$
19-37 $\omega = 22.7\ \text{rad/s}$
19-38 $\omega' = \frac{19}{28}\omega, v'' = 0.985\omega L$
19-39 $\omega_2 = 1.01\ \text{rad/s}$
19-41 $\theta = 66.9°$
19-42 $\omega_2 = 57\ \text{rad/s}, U_F = 367\ \text{J}$
19-43 $h = 4.99\ \text{ft}$
19-45 $v = 5.96\ \text{ft/s}$
19-46 $h = \frac{7}{5}r$
19-47 $\theta = 50.2°$
19-49 $(v_D)_3 = 1.54\ \text{m/s}, \omega_3 = 0.934\ \text{rad/s}$
19-50 $\omega_1 = 7.17\ \text{rad/s}$
19-51 $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{5}e}\right)$
19-53 $\omega = 2.25\ \text{rad/s}\ \circlearrowright, (v_G)_x = 0.149\ \text{m/s}\uparrow, \theta = 38.4°\ \measuredangle$
19-54 $\omega = \sqrt{7.5\frac{g}{L}}$
19-55 $h_B = 0.980\ \text{ft}$
19-57 $v_G = 1.00\ \text{m/s}, \theta = 60°\ \measuredangle, \omega = 5.00\ \text{rad/s}\ \circlearrowright$
19-58 $\theta_1 = 39.8°$

Chapter 20

20-1 (a) $\boldsymbol{\alpha} = \omega_x\omega_t\,\mathbf{j}$, (b) $\boldsymbol{\alpha} = -\omega_x\omega_t\,\mathbf{k}$
20-2 $\mathbf{v}_A = \{-0.225\mathbf{i}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-0.1125\mathbf{j} - 0.130\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-3 $\mathbf{v}_A = \{-5.20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 20.8\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-24.1\mathbf{i} - 13.3\mathbf{j} - 7.20\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-5 $\boldsymbol{\omega} = \{-8.00\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}, \boldsymbol{\alpha} = \{64.0\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$, $\mathbf{v}_A = \{-0.905\mathbf{i}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-7.24\mathbf{j} - 7.24\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-6 $\mathbf{v}_A = \{0.0828\mathbf{i} - 0.464\mathbf{j} + 0.124\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-0.371\mathbf{i} - 0.108\mathbf{j} - 0.278\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-7 $\mathbf{v}_A = \{-7.79\mathbf{i} - 2.25\mathbf{j} + 3.90\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$, $\mathbf{a}_A = \{8.30\mathbf{i} - 35.2\mathbf{j} + 7.02\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-9 $\mathbf{v}_B = \{-0.4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_B = \{-8.20\mathbf{i} + 40.6\mathbf{j} - \mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$
20-10 $\boldsymbol{\omega} = \{42.4\mathbf{j} + 43.4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}, \boldsymbol{\alpha} = \{-42.4\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$
20-11 $\boldsymbol{\omega} = \{2\mathbf{i} + 42.4\mathbf{j} + 42.4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{-42.4\mathbf{i} - 82.9\mathbf{j} + 84.9\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$
20-13 $\boldsymbol{\omega} = \{-3.46\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}, \dot{\boldsymbol{\omega}} = \{6.93\mathbf{i} - 6.93\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$
20-14 $\boldsymbol{\omega} = \{26.0\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}, \boldsymbol{\alpha} = [260\mathbf{i}]\ \text{rad/s}^2$
20-15 $\mathbf{v}_c = [2.60\mathbf{i} + 4.00\mathbf{j}]\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_c = [1.73\mathbf{i} + 5.39\mathbf{j} - 2.275\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-17 $\mathbf{v}_A = \{-1.80\mathbf{i}\}\ \text{ft/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-0.750\mathbf{i} - 0.720\mathbf{j} - 0.831\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-18 $\boldsymbol{\omega}_B = \{5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$
20-19 $\boldsymbol{\omega} = \{4.35\mathbf{i} + 12.7\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{-26.1\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$
20-21 $\boldsymbol{\omega} = \{30\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}, \boldsymbol{\alpha} = \{150\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$
20-22 $\mathbf{v}_A = \{10\mathbf{i} + 14.7\mathbf{j} - 19.6\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-6.12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-23 $\omega_A = 47.8\ \text{rad/s}, \omega_B = 7.78\ \text{rad/s}$
20-25 $\mathbf{a}_B = \{110\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-26 $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{-1.00\mathbf{i} - 0.500\mathbf{j} + 2.50\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$, $\mathbf{v}_B = \{-2.50\mathbf{j} - 2.50\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$
20-27 $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = \{-7.90\mathbf{i} - 3.95\mathbf{j} + 4.75\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$, $\mathbf{a}_B = \{-19.75\mathbf{j} - 19.75\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-29 $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \{-2.00\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}$, $\boldsymbol{\alpha}_{BD} = \{34.5\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$
20-30 $\mathbf{v}_B = 3.20\ \text{m/s}$
20-31 $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \{-1.20\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}$
20-33 $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{-0.663\mathbf{i} + 0.612\mathbf{j} - 0.918\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$, $\mathbf{v}_B = \{-7.50\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}$
20-34 $\boldsymbol{\alpha}_B = \{-37.6\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$
20-35 $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \{0.204\mathbf{i} - 0.612\mathbf{j} + 1.36\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$, $\mathbf{v}_B = [-0.333\mathbf{j}]\ \text{m/s}$
20-37 $\mathbf{v}_C = \{-1.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} + 0.800\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_C = \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-38 $\mathbf{v}_C = \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_C = \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-39 $\mathbf{v}_B = \{-2.75\mathbf{i} - 2.50\mathbf{j} + 3.17\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_B = \{2.50\mathbf{i} - 2.24\mathbf{j} - 0.00389\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-41 $\mathbf{v}_A = \{13.9\mathbf{i} + 40.0\mathbf{j} - 8.00\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_A = \{-62.4\mathbf{i} + 115\mathbf{j} - 17.5\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-42 $\mathbf{v}_B = \{-17.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5.20\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_B = \{9\mathbf{i} - 29.4\mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-43 $\mathbf{v}_B = \{-17.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5.20\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$, $\mathbf{a}_B = \{3.05\mathbf{i} - 30.9\mathbf{j} + 1.10\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-45 $\mathbf{v}_A = [4.24\mathbf{i} + 8.49\mathbf{j} + 8.49\mathbf{k}]\ \text{ft/s}$, $\mathbf{a}_A = [-23.3\mathbf{i} - 29.7\mathbf{j} + 46.7\mathbf{k}]\ \text{ft/s}^2$

20-46 $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 2.26\mathbf{j} + 2.26\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_A = \{-22.6\mathbf{i} - 47.8\mathbf{j} + 45.3\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-47 $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 2.26\mathbf{j} + 2.26\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_A = \{-26.1\mathbf{i} - 44.4\mathbf{j} + 7.92\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-49 $\mathbf{v}_T = \{-9.50\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.20\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_T = \{-14.4\mathbf{i} + 3.77\mathbf{j} + 4.20\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-50 $\mathbf{v}_P = \{-25.5\mathbf{i} - 13.4\mathbf{j} + 20.5\mathbf{k}\}$ ft/s,
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 249\mathbf{j} - 39.6\mathbf{k}\}$ ft/s^2

20-51 $\mathbf{v}_P = \{-25.5\mathbf{i} - 13.4\mathbf{j} + 20.5\mathbf{k}\}$ ft/s,
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 243\mathbf{j} - 33.9\mathbf{k}\}$ ft/s^2

20-53 $\mathbf{v}_B = \{5\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j} + 6.4\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_B = \{2.95\mathbf{i} - 7.52\mathbf{j} + 7.20\mathbf{k}\}$ m/s^2

20-54 $\mathbf{v}_P = \{8.00\mathbf{i} + 32.0\mathbf{j} - 4.00\mathbf{k}\}$ ft/s,
$\mathbf{a}_P = \{-270\mathbf{i} + 72.0\mathbf{j}\}$ ft/s^2

Chapter 21

21-2 $I_{\bar{y}} = \frac{3m}{80}(h^2 + 4a^2), I_{y'} = \frac{m}{20}(2h^2 + 3a^2)$

21-3 $I_{xy} = \frac{ma^2}{20}$

21-5 $I_{yz} = \frac{m}{6}ah$

21-6 $I_{xy} = \frac{m}{12}a^2$

21-7 $I_{xy} = 0.330\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

21-9 $I_{z'z'} = 0.0961\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$

21-10 $k_y = 2.35$ ft, $k_x = 1.80$ ft

21-11 $I_z = 0.0915\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

21-13 $I_{yz} = 0$

21-14 $I_{xy} = 0.32\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_{yz} = 0.08\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_{xz} = 0$

21-15 $I_{z'} = 0.0595\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

21-17 $\bar{y} = 0.5$ ft, $\bar{x} = -0.667$ ft, $I_{x'} = 0.0272\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$,
$I_{y'} = 0.0155\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2, I_{z'} = 0.0427\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$

21-18 $I_{xy} = 0.32\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_{yz} = 0.257\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$,
$I_{xz} = 0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

21-19 $I_z = 0.429\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

21-21 $I_{xy} = 0.0966\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2\ I_{yz} = 0.0483\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
$I_{xz} = 0.0372\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$

21-25 $\mathbf{H} = \{-477(10^{-6})\mathbf{i} + 198(10^{-6})\mathbf{j} + 0.169\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

21-26 $\mathbf{H}_O = \{21.9\mathbf{i} + 1.69\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}, T = 78.5\text{J}$

21-27 $\mathbf{H}_O = \{21.9\mathbf{i} + 0.5625\mathbf{j} + 1.69\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$,
$T = 81.3$ J

21-29 $\omega_{BC} = 10.8$ rad/s

21-30 $h = 2.24$ in.

21-31 $\boldsymbol{\omega} = \{-0.444\mathbf{j} + 0.444\mathbf{k}\}$ rad/s

21-33 $\omega_p = 4.82$ rad/s

21-34 $\boldsymbol{\omega} = \{-2.16\mathbf{i} + 5.40\mathbf{j} + 7.20\mathbf{k}\}$ rad/s,
$\mathbf{u}_o = -0.233\mathbf{i} + 0.583\mathbf{j} + 0.778\mathbf{k}$

21-35 $\boldsymbol{\omega} = \{-0.954\mathbf{i} + 2.38\mathbf{j} + 3.18\mathbf{k}\}$ rad/s,
$\mathbf{u}_A = -0.233\mathbf{i} + 0.583\mathbf{j} + 0.778\mathbf{k}$

21-37 $\boldsymbol{\omega} = \{-0.750\mathbf{j} + 1.00\mathbf{k}\}$ rad/s

21-38 $T = 6.46\ \text{ft}\cdot\text{lb}$

21-39 $T_2 = 15.5\ \text{ft}\cdot\text{lb}$

21-41 $\Sigma M_x = (I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z)$,
$-\Omega_z(I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x)$,
$+\Omega_y(I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y)$ Similarly for ΣM_y and ΣM_z.

21-42 $\Sigma M_x = I_x\,\dot{\omega}_x - I_y\,\Omega_z\,\omega_y + I_z\,\Omega_y\omega_z$

21-43 $E_X = 0, F_Y = \frac{mL^2\omega_1\,\omega_2}{12a}, E_Y = \frac{mL^2\omega_1\,\omega_2}{12a}$,
$E_Z = F_Z = \frac{mg}{2}$

21-45 $F_A = 277$ N, $F_B = 166$ N

21-46 $A_x = -2.12$ lb, $A_y = 1.06$ lb, $B_x = 2.12$ lb,
$B_y = -1.06$ lb $B_z = 4.25$ lb

21-47 $A_x = -2.00$ lb, $A_y = 0.627$ lb, $B_x = 2.00$ lb,
$B_y = -1.37$ lb $B_z = 4$ lb

21-49 $\dot{\omega}_y = 58.9\ \text{rad/s}^2, A_y = 0, A_x = B_x = 72.0$ N,
$A_z = B_z = 12.9$ N

21-50 $F_A = 8.83$ lb, $F_B = 11.2$ lb

21-51 $\dot{\omega}_y = -102\ \text{rad/s}^2, A_x = B_x = 0, A_y = 0$,
$A_z = 297$ N, $B_z = -143$ N

21-53 $M_z = 0, A_x = 0, M_y = 0, \theta = 64.1°$,
$A_y = 1.30$ lb, $A_z = 20.2$ lb

21-54 $N = 148$ N, $F_f = 0$

21-55 $\Sigma M_x = \frac{I_{yz}}{\rho^2}v_G^2$

$\Sigma M_y = -\frac{I_{zx}}{\rho^2}v_G^2$

$\Sigma M_z = 0$

21-57 $\omega = \sqrt{\frac{3g\tan\theta}{L(2\sin\theta + 1)}}$

21-58 $M_Y = -218\ \text{lb}\cdot\text{ft}, M_Z = 0, M_X = 100\ \text{lb}\cdot\text{ft}$

21-59 $\theta_D = 139°, m_D = 0.661$ kg, $\theta_F = 40.9°$,
$m_F = 1.32$ kg

21-61 $\alpha = 69.3°, \beta = 128°, \gamma = 45°$. No, the orientation will not be the same for any order. Finite rotations are not vectors.

21-62 $M_x = 12.4\ \text{lb}\cdot\text{ft}, M_y = 0, M_z = 0$

21-63 $M_x = 2\ \text{kN}\cdot\text{m}$

21-65 $\omega_P = 1.19$ rad/s

21-66 $M_x = 328\ \text{N}\cdot\text{m}$

21-67 a) $A_y = 1.49$ kN, $B_y = 2.43$ kN,
b) $A_y = -1.24$ kN, $B_y = 5.17$ kN,
c) $A_y = 1.49$ kN, $B_y = 2.43$ kN

21-69 $\omega_s = 3.63(10^3)$ rad/s

21-70 $\theta = 68.1°$

21-71 $M_x = 27.0\ \text{N}\cdot\text{m}$

21-74 $\dot{\psi} = 2.35$ rev/h

21-75 $H_G = 6.09(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

21-77 $H_G = 12.5\ \text{Mg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

21-78 $\dot{\phi} = \left(\dfrac{2g \cot\theta}{a + r\cos\theta}\right)^{1/2}$

Chapter 22

22-1 $\ddot{y} + 56.1\, y = 0, y|_{t=0.22\,\text{s}} = 0.192\ \text{m}$

22-2 $y = -0.05 \cos(20t)$

22-3 $y = 0.107 \sin(7.00t) + 0.100 \cos(7.00t), \phi = 43.0°$

22-5 $\omega_n = 49.5\ \text{rad/s}, \tau = 0.127\ \text{s}$

22-6 $y = \{-0.126 \sin(3.16t) - 0.09 \cos(3.16t)\}\ \text{m}$
$C = 0.155\ \text{m}$

22-7 $\omega_n = 19.7\ \text{rad/s}, C = 1\ \text{in.}$
$y = (-0.0833 \cos 19.7t)\ \text{ft}$

22-9 $f = 1.30\ \text{Hz}, y = -0.05 \cos(8.16t), C = 50\ \text{mm}$

22-10 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mL}{3mg + 6kL}}$

22-11 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{Mr^2 + 2mk_O{}^2}{kr^2}}$

22-13 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_G^2 + d^2}{gd}}$

22-14 $k = 90.8\ \text{lb} \cdot \text{ft/rad}$

22-15 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$

22-17 $k_1 = 2067\ \text{N/m}, k_2 = 302\ \text{N/m}, \text{or vice versa}$

22-18 $f = 0.624\ \text{Hz}$

22-19 $f = 0.597\ \text{Hz}$

22-21 $\theta = 0.4 \cos(20.7t)$

22-22 $k = 1.36\ \text{N/m}, m_B = 3.58\ \text{kg}$

22-23 $l = 0.457\ \text{m}$

22-25 $f = 0.900\ \text{Hz}$

22-26 $\tau = 2\pi\left(\dfrac{a}{b}\right)\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

22-27 $f = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

22-29 $\tau = 0.910\ \text{s}$

22-30 $f = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

22-31 $\ddot{y} + \dfrac{(k_1 + k_2)}{m} y = 0$

22-33 $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{Mk_z^2}{k}}$

22-34 $\ddot{\theta} + 26.0\theta = 0$

22-35 $f = 0.851\ \text{Hz}$

22-37 $\tau = 3.85\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

22-38 $a = 1.05\ \text{ft}$

22-39 $\tau = 2.81\ \text{s}$

22-41 $x = A \sin\omega_n t + B \cos\omega_n t + \dfrac{F_0/k}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos\omega t$

22-42 $y = A \sin\omega_n t + B \cos\omega_n t + \dfrac{F_0}{k}$

22-43 $y = \{-0.0232 \sin 8.97\, t + 0.333 \cos 8.97 t$
$+ 0.0520 \sin 4t\}\ \text{ft}$

22-45 $k \le 714\ \text{N/m}$

22-46 $y = \left(361 \sin 7.75t + 100 \cos 7.75t,\right.$
$\left. - 350 \sin 8t\right)\ \text{mm}$

22-47 $\tau_d = 0.734\ \text{s}$

22-49 $(x_p)_{\max} = 29.5\ \text{mm}$

22-50 $\ddot{\theta} + \dfrac{4c}{m}\dot{\theta} + \dfrac{k}{m}\dot{\theta} = 0$

22-51 $y_P = 0.111 \sin(5t - 0.588)\ \text{m}$

22-53 $\omega = 14.0\ \text{rad/s}$

22-54 $(x_p)_{\max} = 14.6\ \text{mm}$

22-55 $(x_p)_{\max} = 35.5\ \text{mm}$

22-57 $\omega = 19.7\ \text{rad/s}$

22-58 $C = 0.490\ \text{in.}$

22-59 $\omega = 19.0\ \text{rad/s}$

22-61 $(x_p)_{\max} = 4.53\ \text{mm}$

22-62 $Y = \dfrac{mr\omega^2 L^3}{48EI - M\omega^2 L^3}$

22-63 $\tau_d = 0.666\ \text{s}$

22-65 $\phi = 9.89°$

22-66 $\text{MF} = 0.997$

22-67 $y = [-0.0702\, e^{-3.57t} \sin(8.54t)]\ \text{m}$

22-69 $\theta_{\max} = 0.106\ \text{rad}$

22-71 $t = 3.99\ \text{s}$

22-73 $1.55\ddot{\theta} + 540\dot{\theta} + 200\theta = 0,$
$(c_{dp})_c = 3.92\ \text{lb} \cdot \text{s/ft}$

22-74 $c = \sqrt{8(m + M)k}, x_{\max} = \left[\dfrac{m}{e}\sqrt{\dfrac{1}{2k(m + M)}}\right] v_0$

22-75 $x_{\max} = \dfrac{2mv_0}{\sqrt{8k(m + M) - c^2}}\, e^{-\pi c/(2\sqrt{8k(m+M)-c^2})}$

22-77 $x = 0.119 \cos(6t - 1.46°)\ \text{m}$

22-78 $\ddot{y} + 16\dot{y} + 4y = 0;$ System is overdamped.

22-79 $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = 0$



د ژبالوړنکی (حفیظ الله وردګ) لنډه پیژندنه

نوم اوکورنۍ:

نوم مي حفیظ الله وردک د حاجي بسم الله خان زوی او د وکیل محمد زرین خان (د امیر امان الله خان د سلطنت په وخت کي د وردګو وکیل) لمسی، د جغتو د محمد قولي په کلي کې زیږدلی یم. الحمدالله دوی لوراني ، دوه زامن او لس لمسیان خداي راکړي.

علمی زدکړې:

لمړنۍ زد کړې: لمړنۍ زد کړې مې د غازي محمد جانخان د وردګو په جغتوکي اود قاري عبدالله خان نوآباد ده افغانان کابل کې تر سره کړې.

لیسه : د لیسې دوره مې د حبیبیې په عالي لیسه کې په کابل کې تر سره کړې. د حبیبیې لیسې له لسم ټولګي نه امریکا ته د (American Field Service) سکالرشپ په اخیستلو سره د یوه کال زده کړو لپاره ولاړم، او هلته مې یو کال لپاره په من هایم ټاون شپ لیسه (Manheim Township High School) کې چې په لنکستر پنسلوانیا (Lancaster Pennsylvania) کې دی، زده کړې درلودې. یو کال وروسته بیرته کابل ته راستون شوم او یولسم او دولسم ټولګي مې د حبیبیې په عالي لیسه کې پای ته ورسوه. د لیسې دورې په وخت کې زه د کابل ټایمز (Kabul Times)، د انیس ورځپاڼې او کابل راډیو سره د راپورټر په توګه همکاري وکړه. له کابل ټایمز نه مې د لیکلو یوه جایزه هم ترلاسه کړې.

لوړې زدکړې: د پوهنتون د کانکور له لارې د کابل پوهنتون (Kabul University) د انجینرۍ پوهنځي ته شامل شوم. په دویم صنف کې د ایسټ ویسټ سنټر (East West Center) سکالرشپ په اخیستلو سره د امریکا د هاوایي پوهنتون (University of Hawaii) ته ولاړم او لیسانس مې په سیول انجینرۍ کې هلته واخیست. بیا د کیس وسټرن ریزرو یونیورسټي (Case Western Reserve University) چې په کلیولند اوهایو (Cleveland, Ohio) د امریکا په ایالت کې دی، د ماسټرۍ شهادتنامه مې په سټرکچرل انجینرۍ کې ترلاسه کړه. د ډاکټرۍ (PhD) ټول درسي مضامین مې د الاباما د یونیورسټي هنټسویل (University of Alabama, Huntsville) کې بشپړ کړلي دي.

کاری مصروفیتونه او علمي تجربې:

کله چی وروسته له ماستری اخیستلو له امریکا بیرته کابل ته ستون شو م کاري تجربه می پدی

لاندی ډول شروع شوه:

افغاني ساختماني دستګاه : د فواید عامی وزارت په چوکاټ کی دا لویه او مهمه ساختمانی دستګاه وه. کله چی کابل ته ستون شوم هلته می د انجینر په توګه کار شروع کړ او پدی کارکې د څو میاشتو د پاره پاتې شوم.

د کابل پوهنتون د انجینري پو هنځي: وروسته له څو میاشتو په افغاني ساختمانی دستګاه کی د کابل پوهنتون د انجینري پوهنځي د سیول انجینري دیپارتمنت کی د استاد په حیث ومنل شوم. شپږ کاله هلته په تدریس او ریسرچ مصروف وم تر څو اتحاد جاهیر شوروي په افغانستان یرغل وکړ. پدی وخت کی زما علمی رتبه پوهنمل وه.

د شوروي له یرغل وروسته هندوستان ته لاړم ، دری میاشتی په نوی ډیلی کی پاتی شوم، او له هغه ځایه په جنوري د ۱۹۸۱ کی امریکا ته راغلم.

پایل ډینامیک او ډیلونو انجنری کمپني: څو میاشتو لپاره مې له یوې کمپنۍ سره چې په اوهایو کې د پلونو او پایل ډینامیکس (Pile Dynamics) په نامه یادیږي، د انجینر په توګه کار وکړ.

د سارجنټ لندي د اتومي انرژۍ انجینري کمپني : په شیکاګو د ایلینویز ایالت کې له سارجنټ لندي سره چې د اتومي انرژۍ د انجینرۍ یوه مشهوره کمپني ده، د سټرکچر متخصص (Structural Specialist) په توګه شپږ کاله د دغې کمپنۍ سره کار وکړ.

د یونایټید ټکنالوجي کمپني : وروسته له ۶ کلونو په شیکاګو کې د دوو کلونو لپاره د یونایټید ټکنالوجي سره په هنټسویل الاباما کې چې د هوایي راکټونو، د جیټ الوتکو د انجنونو جوړولو او د فضایي راکټونو یوه لویه کمپني ده، د سټرکچر انجینر په توګه کار وکړ.

د بوینګ کمپني : د یونایټید ټکنالوجي د کمپنۍ د کار وروسته د بوینګ له کمپنۍ سره کار پیل کړ. بوینګ د الوتکو د جوړولو او د هوایي کښتیو د نړۍ لویه او مشهوره کمپني ده. زه تر دېرشو (۳۰) کلونو د سټرکچر انجینرۍ په برخه کې د یوه عالي مقام (ټکنیکل فیلو) انجینر په توګه کار وکړ او تصمیم مې ونیو چې په ۲۰۱۹ کال کې رسمي کار بس کړم. په بوینګ کې لومړي لس کاله د فضایي هډوکي (International Space Station) د ناسا (NASA) اړوند (په فضا کې د ژوند کولو او علمي څېړنو کښتۍ چې نړیوال فضایي سټیشن نومیږي) د لوی سټرکچر انجینر په توګه بوخت کار وم. شل کاله نور مې په بوینګ کې د ډول ډول ماډلونو د نویو الوتکو په انجینري کارونو د عالي رتبې انجینر (ټکنیکل فیلو) په توګه په بوینګ کې کار وکړ. د بوینګ سره یو اختراع هم لرم او دا اختراع د امریکا د پیټنټ په اداره کې رسمي ثبت شوی. د انجینرۍ د مسؤلیت

او کار سربیره مې په بوینګ کمپني کې نورو انجینرانو ته د سټرکچر په رشته کې وروسته له رسمي کار څخه تدریس هم وکړ.

په هغه وخت کې چې په الاباما ایالت کې د بوینګ سره کار کاوه، د الاباما یونیورسټي (University of Alabama, Huntsville)په هنټسویل کې وروسته له رسمي کار څخه د ډاکټورۍ (PhD) ټول درسي مضامین بشپړ کړل. پدغه وخت کې له هغه ځایه بوینګ بل ایالت کنساس کې کاري دنده راکړه.

پدغو ۴۰ کلنو کاري دندو په امریکا کې، زیات شمیر ټکنیکي لیکنې مې درلودې او هم زیات شمیر کاري جوایز، ستاینې، او پیژندنې له یونایټید ټکنالوجي، ناسا(NASA) ، او له بوینګ راته ورکړل شوي. په ۲۰۲۲ کال کې د انجینرۍ په مسلک کې د مشرتابه او لاسته راوړنو پر بنسټ د نړۍ د انجینرانو په لیست کې (Who's Who Worldwide) د انجینر په توګه پیژندل شوی یم.

له کومه وخته چې رسمي کار مې بس کړی، دا لاندې درسي کتابونه په پښتو ژبه په کابل افغانستان کې چاپ ، د زده کوونکو اود راتلونکو افغانو انجینرانو د ګټې اخیستلو لپاره په پوهنتونونو ویشل شوی دی. پدې کتابونو کې محترم ډاکټر بها د انجینرۍ پوهنځي پخوانی ریس هم ماسره مرسته کوي .

د چاپ شویو کتابونو عنوانونه:

1. **د جوړښتونو تحلیل :**دا کتاب په دریو جلدونو کې په پښتو ژبه لیکل شوی او په کابل کې په ۱۳۹۹ کال کې چاپ شوی. هغه اوس د افغانستان په پوهنتونونو کې تدریسي کتاب دی.
2. **د موادو میخانیک :**دا کتاب په دوو جلدونو کې په پښتو ژبه د زده کوونکو او راتلونکو افغانو انجینرانو د ګټې اخیستلو لپاره په ۱۴۰۲ کال کې په کابل کې چاپ شوی، او هغه اوس د افغانستان په پوهنتونونو کې تدریسي کتاب دی.
3. **د انجینرۍ میخانیک ډینامیک تحلیل :(Engineering Mechanics Dynamics)** دا کتاب هم د زده کوونکو او راتلونکو افغانو انجینرانو د ګټې اخیستلو لپاره په پښتو ژبه په څو میاشتو کې انشاءالله په کابل کې چاپ او پوهنتونونو ته به و ویشل شي.



د ژباړونکی (زرجان بها) لنډه پیژندنه

(دا معلومات د اکتوبر په ۲۹ کال ۲۰۲۳تیارشوی)

نوم اوکورنی :

زما نوم **زرجان** دی او کله می چی پوهنتون شروع کا وا (۱۹۵۸) د تعلیم او تربیی مودیر راته وویل چی ښایی چی د کورنی نوم هم ولرم نو د پلارد نامه لمړنی برخه می په همغه سا عت کی د کورنی د نامه د پاره وټاکله او د هِغو راهیسی مي نوم **زرجان بها** دی. د پلار نوم می **بهاول** خان او د مور نوم می **کجله** دی. د یوسفخیلو په کلی کی چی دوردگو د سید اباد په ولسوالی کی دی زیږیدلی یم. زمور په کلی کی چی کابو سل کوره وا یوازی زما پلار وا چی لوستل او لیکل یی کولی شوی. زما تره اغاجان خان د ولس ملک وا او د لیکل شویو اړین سندونو برابرول یی زما د پلار په غاړه وو. دواړه ورونه د یوی کورنی په توګه یو ځای اوسیدل.

زما د اوو یشپیتو کالو د ژوند شریکه **فاطمه** اودری اولاده لرم چی دوه یی د طب ډاکتران او یو یی انجینر دی. دری سره د ژوند د شریکانو او اولادو سره په خپلو کورو کښی د امریکا په مختلیفو ښه رو کی ژوند کوی. همدارنګه لس لمسیان لرم چی اوو یی پوهنتونونه خلاص کړی، کار کوی او یا لوړی تخصوصی زده کړی کوی، دوه یي په بوهنتون کی او یو یی په متوسطه ښونځی کی دی.

زه به د خپل ځان په هکله به لاندی کرښوکی په لنډیزه توګه شننه وکړم.

رسمی زده کړی:

لمړني ښونځی دوره (د ۱ نه تر ۶ ټولکي): لمړني زد کړي مي د وردگو د تکیی به ښونخی کی بشپړی کړی او لدی کبله چی د شپږم ټولګینه د اول نمره په توګه فارغ شوم د پوهنی د وزارت د تعامول له مخی ددی مستحق شوم چی کابل ته د نورو زده کړو د پاره په کوم لیله ښونځی کی شامل شم.

د لیسی دوره (۷ نه تر۱۲ ټولګی) : د لیسی دوره مي د کابل په دارالمعلمین کی تر سره کړه. د کابل دارالمعلمین دوی برخی درلودی چی یویی مسلکی برخه وه چی د نهم ټولګی فارغان دښونکیو په توګه دافغانستان په شپږکلنه ښونځیو کی د ښونکیو په توګه وظیفه قبلوله چی زمور په وخت کی مسلکی برخه یولسم ټولګی ته لوړه شوه، بله برخه یی متوسطه وه چی شپږ کاله وه او فارغانو یی کړی شوی د کابل په لیسو کی دښونکی په توګه کار وکا او یا به د پوهنتون د ادبیاتو او ساینس پوهنځیوته تلل چی د کابل په لیسو کی د ساینس او یا اجتماعیاتو ښونکی شی. زه اول مسلکی برخی ته معرفی شوی وم او بیا می دمکتب د مود یر نه وغوښتل چی متوسطی ته بدل شم چی زما غوښتنه یی قبوله کړه. د یادولو وړده چی په هغه وخت کی تر کابل پرته په ټول افغانستان کی یوازی تر

شپږم ټولګی پوری زده کړی وی. زمونږ ټولګی ته د افغانستان د ټولو ولایتو نه اول نمره ګان راغلی وو.

کله چی زه په یولسم ټولګی کی وم د زراعت معین د یو شمیر نورو غړیو سره زمونږ مکتب ته راغی او غوښتل یی چی ځنی زدکونکی د زراعت د تحصیل د پارترکیی ته انتخاب کړی. عبدالصمد خان چی زمونږ د کمیا معلم او هم د لیسی معاون وا زه یی اول ورته معرفی کړم چی زه د ټولګی اول نمره او کپتان هم وم. دری نور زمونږ د ټولګی نه پدی ډ له کی ګډ شول. زه دی سکالرشیپ ته ډیر نه وم خوشحاله او د دی اند یښنه را سره وه چی که پدی سکالرشیب کی کومه ستونځه پیداشی زما تحصیل به نیمګړی پاتی شی. ښه داشوه چی زمونږد ډ لی نه د یوه ملګیری پچه ختلی وه. پدی توګه نوموړی به اول دعسکری دوره تیره وله او بیا به یی د دی سګالر شیپ نه ګټه اخلسنله او پدی توکه د دی سکالر شیپ نه پښیمانه شو . ماته هم لاره جوړه شوه چی زه هم تر دی سکا لر شیپ نه تیر شم. زمونږ دټولګی نه ځنی نورکاند یدان دنوموړی سکالرشیپ دپاره پیداشول چی ربښتیا یی تحصیل نیمګړی شو.

د لوړو زدکړو دوره:

په افغانستان کی:

زمونږ په وخت کی د پوهنتون د پاره کانکور نه وا او زمونږ نه یی یو امتحان واخیست چی دا امتحان د کانکور د جوړولو د پاره آ زما یښتی امتحان وا. ماته وویل شول چی د کابل په ټولو لیسو کی زما نمری دریمه درجه وی. اول او دوهم نمره ګان د استقلال او نجات له ښونځیو نه وو. دی ازموینی زمونږ د پوهنځیو په خوښید و کی هیڅ اغیزه نه درلودله. لکه چی پخوامی وویل چی زمونږ د مکتب نه یوازی د ادبیاتو او ساینس پو هنځیو ته فارغان تلی شوی او زمادپاره یو طلایی چانس پیدا شو چی دانجینری پوهنځی ته شامل شم. د پوهنځی نه دوهم نمره فارغ شوم او پوهنځی مونږ دواړه، اول نمره او دوهم نمره، د استادانوپه توکه ومنلوچی په هغه وخت کی د یوه فارغ دپاره تر نورو ټولو ځایونه ښه انتخاب وا. په پوهنځی کی می د ۱۹۶۲ کال د جنوری نه د ۱۹۶۳ کال تر سپټمبره پوری د استاد په توګه ډنده درلوده او په سپټمبر کی د نورو لوړو زدکړو له پاره امریکاته ولاړم.

د پو هنځی په دوره کی ما د ملګریو میلتو د (Food and Agriculture Organization, FAO) په د دفتر کی د ډرافتمین په توګه کار کا. دا کار ماته د عبدالمحبوب خان په مرسته پیدا شوی وا. نوموړی د امریکا د وایومینګ پوهنتون نه لیسانس او د ډیوس پوهنتون نه یی ما ستری اخستی وه. ډیر وخت یی د هلمند په پورژه کی کار وکا او په آخرو وختو کی د پروان د ابیاری د پروژی د أمر او بیا د کود او برق د فابریکی چی په شبرغان ن کی وه درییس په توګه ډنده درلوده. د FAO د دفتر مشر د کرهنی د وزارت په موافقه د ما دپاره یو بورس جوړ کا چی په امریکا کی د ابیا ری په انجینری کی ما ستری واخلم.

کله چی زه د پوهنځی نه فارغ شوم له یوا خوا د FAO سکالرشیپ وا او له بلی خوا د پوهنځی له خوا د استاد په توګه کار راته پیدا شو. ربښتیا هم چی دا یوه سخته فیصله وه چی زه کوم انتخاب کړم. په پای کی می د خپل ژوند د پرنسیپ په آساس بی د چا د مشوری نه د پوهنتون کار انتخاب کا او پدی فیصله تر اوسه پوری خوشحاله یم.

په امریکا کی:

د ماسټری د پاره: زه چی امریکاته راغلم اول د واشنګټن پوهنتون چی په سنټلویس کی دی ولاړم تر څو زما د یوه همکار، Walter Pilkey ، چی زمونږ په پوهنځی کی یی درس ورکاوا ، په سپارښتنه د ده دیوه ملګری پرو فیسر تر لاس لاندی خپله ماسټری هلته واخلم. پدی پوهنتون کی یو لړ داخلی ستونځی پیدا شوی وی چی ډیر پروفیسران، د ما د انتخاب شوی پروفیسر په ګډون ، نورو پوهنتونو ته ولاړل او ما هم پس له دوو سمسترو چی زیاتره می د لیسانس دوری مضمونونه نیولی وو د پورډو پوهنتون ته چی زمونږ د پوهنځی سره یی د نورو لسو امریکا پوهنتونو تر څنګ مرسته کوله انتخاب او د (۱۹۶۴) کال په پسرلی کی ځان بدل کا. د ۱۹۶۶ په جنوری کی می دسیول انجینریه ساحه کی ماسټری واخستله. د فراغت نه ورسته افغانستان ته ولاړم او په پوهنځی کی می خپل کار ته دوام ورکا.

کله چی د پورډو په پوهنتون کی وم د (۱۹۶۵)کال په اوړی کی شیکاګو ته دعملی کار زده کولو د پاره ولاړم او هلته می دشپی له خوا د پریسټرس کانکریټ یوکورس په ایلونیای انسټیټوټ اف تکنالوجی (IIT) کی واخیست چی ډیر په زړه پوری یوه پروفیسر درس راکاوا.

ډ ډاکټری د پاره: د ۱۹۶۹کال په جنوری کی د نارت کرلینا سټیټ پوهنتون ته چی په رالی کی دی د ډاکټری د تحصیل د پاره ولاړم او د ۱۹۷۳ کال په اوړی کی می په سیول انجینری کښی ډاکټری شهادت نامه وا خسته او پیرته افغانستان ته ولاړم اود کابل د پوهنتون د انجینری په پوهنځی کی می کار ته دوام ورکا. زما د تیسس موضوع پریسټرس پریکسټ کانکریټ وا او ما دا هیله درلوده چی ددی موادو کمپنی به په افغانستان کی جوړه وو تر څو دا مواد د فولادو ځای د ودانیو په جوړولو کی ونیسی.

ګله چی هلته په پوهنتون کی وم یو څه وخت می د Nuclear Engineering به ډیپارتمنت کی د Coastal Erosion د اندازکولو په بروژه کی کار وکا.

زما د کارشننه:

د ۱۹۶۲کال د جنوری نه د ۱۹۸۲کال تر حنوری پوری (شل کاله) می د کابل پوهنتون د انجینری په پوهنځی کی کار درلود. په ۱۹۷۴ کال کی په پوهنځی کی د زراعت او سیول انجینری ډیپارتمنټ

د مشر په توګه د استادانو له خوا انتخاب شوم. په ۱۹۷۵ کال کی د پوهنتون په پیشنهاد، د کابینی په مجلس کی د پوهنځی د رییس په توګه وټاکل شوم او تر څو چی په افغانستان کی کمونستانو قدرت ونیو (۱۹۷۸) د رییس په توګه پاتی شوم او بیا د۱۹۸۲کال تر جنوری پوری په بوهنځی کی استاد وم او زما علمی رتبه پو هنوالی وه . زمونږ په پوهنځی کی تر دی لوړه علمی رتبه یوازی دفزیک یو پوهاند درلوده.

د پوهنځی د کار په اولو کلو کی می د کرهنی په وزارت کی د احصایی او وترنری کورسو کی درس ورکړی. همدارنګه د پوهنځی په

Center for Engineering Consulting Services and Applied Research (CECSAR)

کی می د مشاور په توګه د کار به ټوله دوره کی (بی دریاست د وخت نه) په آتلسو پروژو کی کار کړی.

کله چی د ۱۹۸۲کال په جنوری کی د سیستم انجینری ورکشاپ د پاره د یونسکو له خوا

IIT Bombay, India ته ولاړم تصمیم می ونیو چی امریکا ته راشم. د ځینی امریکایی ملګریو سره می تماس ونیوچی امریکا ته به را ځم او د کار په پیداکولو کی به ددوی مرسته غواړم. په پورډو پوهنتون کی د تکنالوجی د کالج رییس Dr. George McNelly له خوا می لیک تر لاسه کا چی د

Building Construction and Contracting

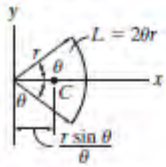
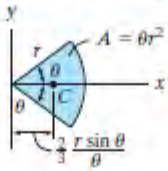
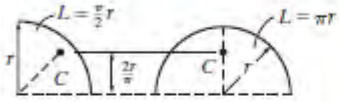
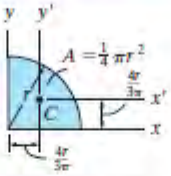
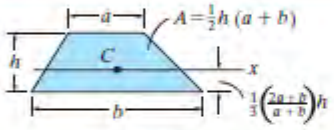
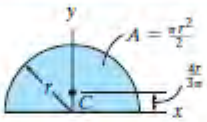
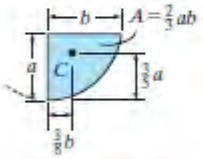
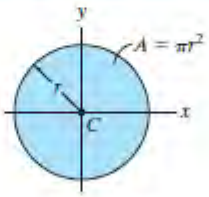
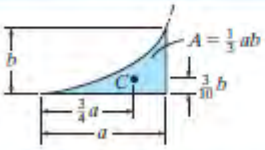
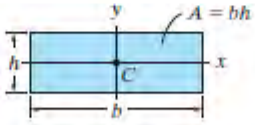
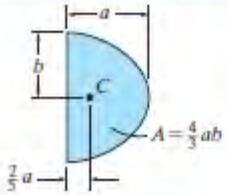
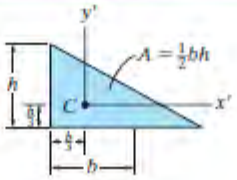
په ډیپارټمنټ کی دی میلمه پروفیسر په توګه د یوه کال د پاره وظیفه درلودی شم. کله چی زه په جون د ۱۹۸۲ کال کی ا مریکا ته راغلم نو زما د پخوانی ملګری Walter Pilkey په کور کی چی په شارلټزویل ورجینیا کی اوسیدا د میلمه په توګه ووسید م او د لنډ وخت د پاره می په University of Virginia کی کار وکا. په همدی دوبی کی د انټرویو د پاره پورډو ته راغلم او دا کار می قبول کا. په ۱۹۸۴ کال کی د ټینیرټرک اسوسیشت پوروفیسرپه توګه ومنل شوم او په ۱۹۹۰ کال کی می د پوروفیسری (پوهاندی)علمی رتبه تر لاسه کړه او د ۲۰۲۲ کال د می تر میاشتی چی څلوښت کاله کیږی په پرډو کی کار وکا. د ۲۰۱۹ کال په منی کی می تصمیم ونیو چی د کار مسولیت می نیمایی کړم او په دریو کالو کی خپله ډنډه په پوهنتون کی پای ته ورسوم. زما د ورستیو کلو کی د کالج د مشاور(College Mentor) په توګه کار کاوا او کوم معین مضمون درس می نه ورکاوا.

په ۱۹۹۵ کال کی د پورډو انټرنشنل پروګرام د جهانی بانک یوه شل ملیونه دالره پروژه واخسته او زمانه یی وغوښتل که ددی پروژی د پر مخ وړلو دپاره د Resident Program Coordinator په توګه چی په مالیزیا کی وه ولاړ شم چی ما دا کار قبول کا او د پنځوکالو پروژه می د ۱۹۹۹ کال په پای کی تکمیل کړه. پدی پروژه کی کابو یو سل استادانو چی د امریکا، انګلستان، کانادا او استرلیا

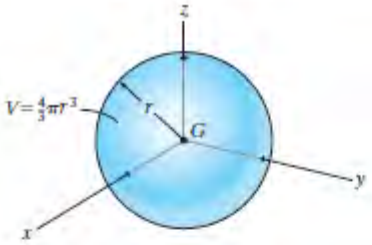
وو د لنډی او یا څه ووړدی مودی د پاره کار وکا. پدی پروژه کی موږکابو ۹۰۰ استادان د مالیزیا د پولیتخنیکو د پاره وروزل. زما په دفتر کی څلورو مالیزیایانوچی ما خوښ کړی وو، کار کاوا، چی د موټرچلولو، سکرتریت، اداری او ما لی چارو مسولیت ورپه غاړه وا.

د ۲۰۰۲ کال راهیسی پنځه واری (د ۲۰۰۲ نه تر ۲۰۱۶) افغانستان ته د نورو پوړډو استادانو سره تللي یم تر څو د افغانستان د لوړو زده کړو، په ځا نګړی توګه د نویي تکنالوجی، په برخه کی مرسته وکړو. یو شمیر د پوهنتونو استادان مو امریکا ته د لنډ و خت د پاره راوستل او هلته مو څو ورکشاپونه جوړ کړل تر څو د پوهنتون یو شمیر استادان او نورانجینران د نویو تکنالوجیو سره بلد شی. همدارنګه مو یو سپین سرخلاصی را پور ولیکا چی په افغانستان کی د تکنالوجی زده کړو پنځه مر کزونه جوړشی چی یو په کابل، بل په کندار، بل په هرات ، بل په مزار، او بل په ننګرار کی وی. په هر مر کز کی کوشش وشی چی د خیلی منطیقی د ضرورت وړ تکنالوجستان وروزی. دا مرکزونه ښایی چی مالی استقلال ولری تر څو د ضرورت وړشیان په بیړه د خپلو مرکزو د پاره تیار کړی شی.

Geometric Properties of Line and Area Elements

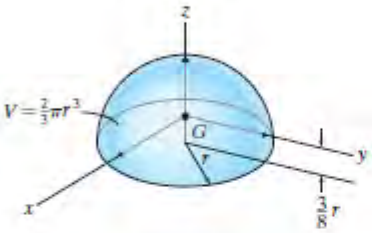
Centroid Location	Centroid Location	Area Moment of Inertia
 Circular arc segment	 Circular sector area	$I_x = \frac{1}{4}r^4\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$ $I_y = \frac{1}{4}r^4\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$
 Quarter and semicircle arcs	 Quarter circle area	$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $I_{x'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_{y'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$
 Trapezoidal area	 Semicircular area	$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
 Semiparabolic area	 Circular area	$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
 Exparabolic area	 Rectangular area	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}hb^3$
 Parabolic area	 Triangular area	$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{36}hb^3$

Center of Gravity and Mass Moment of Inertia of Homogeneous Solids



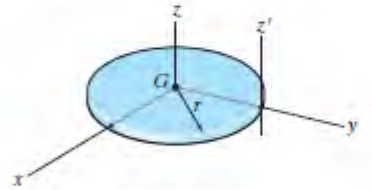
Sphere

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$$



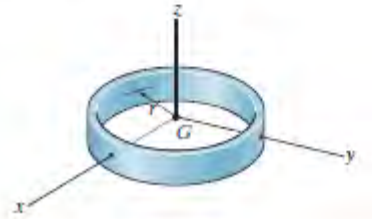
Hemisphere

$$I_{xx}=I_{yy}=0.259\,mr^2 \quad I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$$



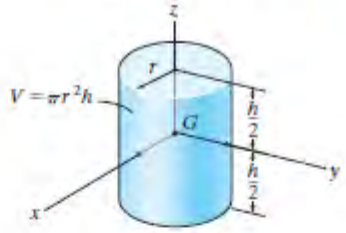
Thin circular disk

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'}=\frac{3}{2}mr^2$$



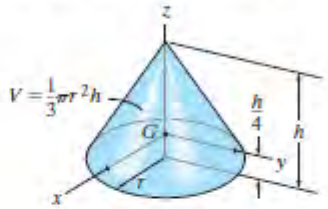
Thin ring

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz}=mr^2$$



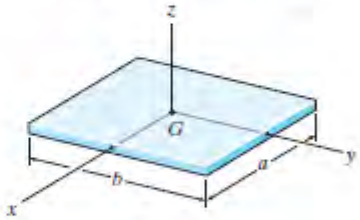
Cylinder

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{12}m(3r^2+h^2) \quad I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$$



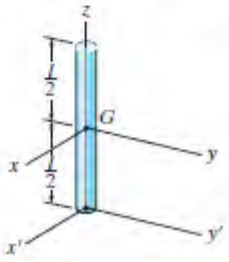
Cone

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{3}{80}m(4r^2+h^2) \quad I_{zz}=\frac{3}{10}mr^2$$



Thin plate

$$I_{xx}=\frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy}=\frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$



Slender rod

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{12}ml^2 \quad I_{x'x'}=I_{y'y'}=\frac{1}{3}ml^2 \quad I_{z'z'}=0$$

Book Name	Engineering Mechanics: Dynamics
Translators	Ustad Hafizullah Wardak & Prof Dr Zarjon Baha
Website	www.ecampus-afghanistan.org
Published	2025, First Edition
Copies	1000
Serial No	400
Download	www.ecampus-afghanistan.org



If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Kabul, Afghanistan
Office 0780232310, 0706320844
Email info@ecampus-afghanistan.org

All rights reserved with the author.
Printed in Afghanistan 2025