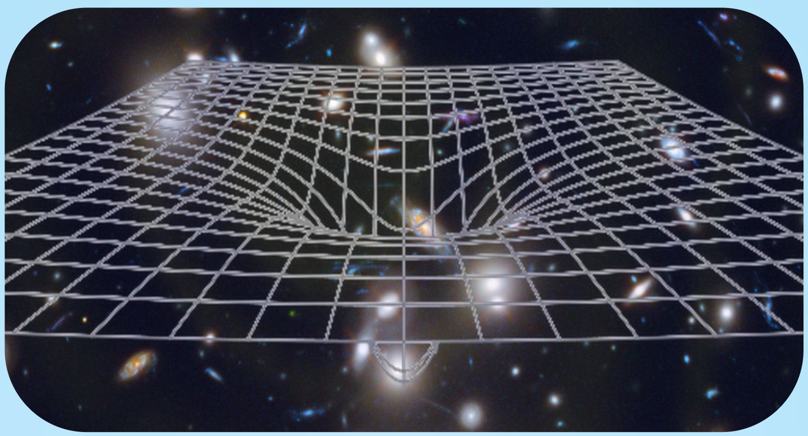
طب پوهنځی

میخانیک، اهتزازات
او نسبیت



سي ډي سره

پوهندوی علي جان عادل

۱۴۰۲

پلورل منع دی

میخانیک، اهتزازات او نسبیت

پوهندوی علي جان عادل

Afghanic

Faculty of Medical

Assist Prof Ali Jan Adil

Mechanics, Oscillations & Relativity

دغه کتاب د میخانیک، اهتزازات او نسبیت مهم تخنیکي موضوعات ترڅېړنې لاندې نیولي او پنځه اساسي برخې لري، چې د افغانستان په پوهنتونونو کې د فزیک څانګې محصلینو، استادانو او څېړونکو له پاره زیات ارزښت لري.

د دې کتاب په منځپانګه کې په دغو موضوعاتو بحث شوی دی: میخانیک، د مختصاتو سیستم، د ذرو سیستم او د هغوی ټکرونه، د مرکزي قوې ساحې لاندې حرکت، هارمونیکي اهتزازات، چلیدونکي او جوړه يي اهتزازورکوونکي، د نسبیت خاصه نظریه او داسې نور.

پوهندوی علی جان عادل د محمد هاشـــم زوی په ۱۳۵۹ کال په ننګرهار ولایت کې زیږېدلی دی. په ۱۳۸٦ کال د ننګرهار پوهنتون د ښـــوونې او روزنې پوهنځي څخه فارغ او په ۱۳۸۷ کال په خوســت شــیخ زاید پوهنتون کې په علمي کادر کې شامل شوی دی. ښاغلي عادل په ۱۳۹۳ کال د هند له جامعه ملیه اسلامیه پوهنتون څخه د ماستري سـند ترلاسـه او بېرته شـیخ زاید پوهنتون ته ستون شو. په یاد پوهنتون کې په تدریس سربېره د ریاضـي او فزیک څانګې د آمر په توګه وګمارل شـو. نوموړی په ۱۳۹٦ کال د پکتیکا پوهنتون د رئیس په توګه مقرر شـوی او په ۱۴۰۰ کال د لوړوزده کړو وزارت د علمي برنامو انکشاف ریاست رئیس شو. ښاغلي عادل د ۱۴۰۰ کال په لیندۍ میاشت کې د ننګرهار پوهنتون په طب پوهنځي کې د اسـتاد په توګه دنده پیل کړه او د یاد پوهنتون فعال استاد دی.

ISBN 978-9936-622-59-3

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

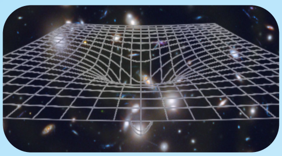
2023

Not for Sale

میخانیک، اهتزازات او نسبیت

پوهندوی علي جان عادل

Nangarhar Medical Faculty
ننګرهار طب پوهنځی



Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Pashto PDF
2023

افغانیک
Afghanic

Mechanics, Oscillations & Relativity

Assist Prof Ali Jan Adil

Download:
www.ecampus-afghanistan.org

اقرأ باسم ربك الذي خلق

میخانیک، اهتزازات او نسبیت

پوهندوی علي جان عادل

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ایف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:

د کتاب نوم	میخانیک، اهتزازات او نسبیت
ژباړن	پوهندوی علي جان عادل
خپرندوی	ننگرهار پوهنتون، طب پوهنځی
وېب پاڼه	www.nu.edu.af
د چاپ کال	۱۴۰۲، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۳۷۸
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې د افغانیک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسوولیت د کتاب په ژباړن او اړوند پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسوولیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کارته ۴، کابل
موبایل ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴، ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰
ایمېل info@ecampus-afghanistan.org

ای اس بي ان ۹۷۸-۹۹۳۶-۶۲۲-۵۹-۳

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمېر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاسرسی نه لري، په زاړه مېتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې پخواني دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

موږ د ۲۰۱۰ څخه تر ۲۰۲۳ کال پورې د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل پوهنتون، د کابل طبي پوهنتون او د کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۳۸۹ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالېزم او کرهنې پوهنځیو لپاره چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې دغه چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړوندو پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او موسساتو ته په وړیا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.ecampus-afghanistan.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کولی شئ.

دا چارې په داسې حال کې ترسره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰-۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده، چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي، د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دغو امکاناتو پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاسرسی نه شي پیدا کولای."

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هېواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچرنوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره اړینه ده چې د افغانستان د پوهنتونونو لپاره هر کال لږ تر لږه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو درنو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، ویې ژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچرنوټونه او چپټرونه ایډیټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زموږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو ته په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو ټکو په اړه خپل وړاندیزونه او نظریات له موږ سره شریک کړي، چې په ګډه په دې برخه کې اغېزمن ګامونه پورته کړو.

د لیکوالانو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی، چې د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو پر اساس برابر شي، خو بیا هم کېدای شي د کتاب په محتوا کې ځینې تېروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله لرو چې خپل نظریات او نیوکې لیکوال او یا موږ ته په لیکلې بڼه راولېږي، چې په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی. دوی تر دې مهاله د ننګرهار پوهنتون د ۲۵۰ عنوانه طبي او غیر طبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه اخیستی دی.

د پوهنتونونو رئیسانو، د پوهنځیو رئیسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له لیکوال څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې د کلونو - کلونو زیار محصول یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د خپل دفتر له همکارانو هر یو ښاغلي حکمت الله عزیز، ښاغلي فهیم حبیبي، ښاغلي ګل آغا احمدي او ښاغلي هېواد صافی څخه هم مننه کوم، چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک

د لوړو زده کړو وزارت، کابل، جون، ۲۰۲۳

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ایمیل: info@ecampus-afghanistan.org

ډالۍ

زما په پوهه مین، بې کبره او مهربان پلار ملک محمد هاشم خان ته یې په ټوله علمي مینه ډالۍ کوم.

(عادل)

فهرست

سریزه

الحمدلله و کفی و الصلاة و السلام علی عباده الذین الصطفی اما بعد: ګرانو او درنو لوستونکو:

څرګنده ده چې د هیواد په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی یوه لویه تشه ده، ددې تشې د ډکولو په موخه اړینه ده چې له انګلیسي او نورو معتبرو ژبو څخه پښتو او دري ژبو ته د کتابونو او موادو د ژباړلو په برخه کې اغېزمن ګامونه پورته شي.

لکه چې جوته ده د شیخ زاید پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي د فزیک څانګې د فزیک په میخانیک، اهتزازات او نسبیت برخه کې چې د کریکولم سره مطابقت ولري په ملي ژبه هیڅ درسي کتاب نه درلود، له همدې امله ماته د فزیک څانګې له خوا د اشوک شرما او ر.ک. سینګلا د میخانیک، اهتزازات او نسبیت په نوم کتاب چې د درسي پروګرام سره کاملاً مطابقت لري د ژباړلو دنده د شیخ زاید پوهنتون ښوونې او روزنې پوهنځي استاد پوهاند ګل محمد جنت زي د لارښوونې لاندې راسپارل شوې وه. ما خپله دنده سرته ورسوله او د یاد کتاب ژباړه مې د لارښود استاد له نظر لاندې تر وروستي برېده په سمه توګه سرته ورسوله چې اوس چاپ ته اماده ده.

نوموړی کتاب چې د هند د جمو پوهنتون لپاره لیکل شوی او اوس په پښتو ژبه ژباړل شوی، زده کوونکو ته د ښې زده کړې په موخه ګڼ شمیر مثالونه، حل شوي مسائل او د تمرین په توګه زیاتې پوښتنې لري. دا کتاب د ښوونې او روزنې پوهنځي سربېره د ساینس پوهنځي او همدارنګه د انجنیري پوهنځي د ممد درسي کتاب په توګه په نظر کې نیول شوی دی.

په لومړۍ برخه میخانیک-۱ کې واحد وکتورونه، ځای بدلون، د مساحت عنصر، د حجم عنصر، په کارتیزیني، کروي قطبي او استوانه یي مختصاتو سیستم کې سرعت او تعجیل. عطالتي او غیر عطالتي مأخذي دستګاوې، په یونواخته توګه دوران کوونکي دستګا; پیچې قوه او له مرکز څخه د فرار قوه، د ځمکې د دوران له امله د مرکز څخه د فرار قوې اغیز او په ازاد سقوط کوونکي جسم باندې عامله پیچې قوه، د پیچې قوې (اندازه یي) جغرافیه یي اغیزې توضېح شوي دي.

په دوهمه برخه میخانیک-۲ کې د دوو جسمونو سیستم; لابراتوري او د کتلې د مرکزسیستم، په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې د ځای بدلونونو، سرعتونو، حرکي انرژیو او زاویو ترمنځ اړیکه. د قوې معکوس مربع قانون: د مرکزي او غیر مرکزي قواو مفهوم، د معادل یو جسم مسئله، په مرکزي قوې ساحه کې د زاویویي مومنټم تحفظ، د کمې شوې کتلې انرژي او او د هغې تحفظ، په مرکزي قوې ساحه کې د مدار تفاضلي معادله، د حرکت د بیرته ګرځیدو نقطې، د عین المرکزیت او انرژي ترمنځ اړیکه، د مرکزي قواو لاندې د حرکت د طبیعت ګرافیکي توضیح، د کپلر قوانین او د سیټلایټ حرکت وړاندې شوي دي.

په درېیمه برخه اهتزازات-۱ کې تفاضلي معادله او د هغې حل، د ساده هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي، مثالونه: مرکب شاقول، ټارسیونال شاقول، بیفیلار اهتزازات، هیلم هولتز ریزونېټر، LC سرکټ، د مقناطیس اهتزازات، د فنر په واسطه نښلول شویو دوو کتلو اهتزازات.

د استهلاکي قوې طبيعت، استهلاکي ساده هارمونيکي اهتزاز ورکوونکی، تفاضلي معادله او د هغې حل، انرژي، د طاقت خپريدل، لوګاريتمي کميدنه، د ارامتيا وخت، د څرنګوالي ضريب، مقاومت او الکترومقناطيسي استهلاک، په فزيکي سيستمونو کې د استهلاک مثال، مقاومتي استهلاک، د هغه سرکټ په واسطه چې مقاومت او انډکټنس لري د خازن اهتزازي بې چارجه کيدل، د متحرک بوبين په ګلوانومتر کې الکترومقناطيسي استهلاک تشريح شوي دي.

په څلورمه برخه اهتزازات-۲ کې چليدونکی هارمونيکی اهتزازورکوونکی، مؤقتي او دايمي حالت کړه وړه، د تفاضلي معادلي حل، په دايمي حالت کې د ميخانيکي اجباري اهتزاز ورکوونکي سرعت، د چلونې قوې له فريکونسي سره د ځای بدلون کړه وړه، د چلونې قوې فريکونسي په مقابل کې د سرعت کړه وړه، د طاقت جذب او د طاقت خپريدنه، د ريزونانس تيره والی، د څرنګوالي ضريب، برقي ريزونانس.

په پنځمه برخه د نسبيت نظريه کې ګاليلا يي انتقالات او د تحفظ قوانين: د مومنټم او انرژي تحفظ. د اترو پلټنه او د مچلسن-مورلي تجربه. د نسبيت د خاصې نظريې پاسټوليټونه، د لارنټز انتقالات، د لارنټز د انتقالاتو نتيجې، د اوږدوالي کميدنه، د وخت دوروسته والي د غبرګونو معما د ملاتړ تجربوي دليل، د پيښو يو وخت توب، د سرعت قضيه، له سرعت سره د کتلې تغير، د کتلې انرژي تعادل، انرژي-مومنټم اړيکه، د کتلې انرژي تعادل د ملاتړ تجربوي دليل، د مومنټم او انرژي ترمنځ د انتقال اړيکې، صفر سکون کتله لرونکې ذره، د ډاپلر اثر وړاندې شوي دي.

څرګنده ده، چې دا کتاب به له نيمګړتياوو څخه خالي نه وي. هيله من يم چې ګران لوستونکي به په ما باندې د نيمګړتياوو په يادولو سره د احسان پيرزوينه وکړي.

ددې کتاب په ژباړه کې زما لارښود استاد پوهاند ګل محمد جنت زي له ما سره هر اړخيزه مرسته کړې ده چې د زړه له تله ورڅخه مننه کوم.

په درنښت

پوهندوی علي جان عادل

ننګرهار پوهنتون طب پوهنځي استاد

لومړۍ برخه

میخانیک ــ ۱

واحد وکتور، ځای بدلون، د مساحت عنصر، د حجم عنصر، په کارتیزیني، کروي قطبي او استوانه يي مختصاتو سیستم کې سرعت او تعجیل.

عطالتي او غیر عطالتي مأخذي دستګاوې، په یونواخته توګه دوران کوونکي دستګاه; پیچي قوه او له مرکز څخه د فرار قوه، د ځمکې د دوران له امله د مرکز څخه د فرار قوې اغیز او په ازاد سقوط کوونکي جسم باندې عامله پیچي قوه، د پیچي قوې (اندازه يي) جغرافیه يي اغیزې.

لومړی څپرکی

د مختصاتو سیستم

۱.۱ مقدمه

پوهیږو چې میخانیک د ذراتو یا د ذراتو له سیستم سره هغه وخت سراوکارلري چې د خارجي او یا داخلي قوې د اغیزې لاندې د حرکت یا سکون په حال کې وي.

دهغو ذراتو د حرکت مطالعه چې چټکتیا (speed) يې د نور له چټکتیا څخه ډیره کمه وي کلاسیک غیر نسبیتي (classical non-relativistic) یا د نیوټن میخانیک بلل کیږي او که د ذراتو چټکتیا د نور چټکتیا ته ډیره نږدې وي کلاسیک نسبیتي یا په ساده توګه نسبیتي میخانیک بلل کیږي د لته مونږ یوازې کلاسیک غیرنسبیتي میخانیک مطالعه کوو .

میخانیک بیا په دوو نورو څانګو کینماتیک (د حرکت مطالعه، د حرکت د علت په پام کې نه نیولو سره) او ډینامیک (د حرکت د علت یعنې قوې په پام کې نیولو سره) ویشل کیږي.

دا څپرکی د شیانو ډینامیک او د مختصاتو د سیستمونو مختلفو ډولونو ته، چې په عامه توګه په فضا کې د یوې نقطې د موقعیت د ټاکلو لپاره استعمالیږي، ځانګړی شوی دی.

۲.۱ د حرکت قوانین

د انسان په پخواني تاریخ کې، دا یوه عامه مفکوره وه چې درانده اجسام د هغوی د وزن په تناسب ژر لویږي او یوه جسم ته په یونواخت سرعت سره د حرکت د ورکولو لپاره همیشه یوې قوې ته اړتیا ده. مګر ګالیلا (۱۵۶۴-۱۶۴۲) له دغې جملې سره موافق نه وو او دا يې پیشنهاد کړ چې یوه جسم ته په یونواخت سرعت سره د حرکت د ورکولو لپاره هیڅ قوې ته اړتیا نشته او ویل يې چې (کله چې په یو شي باندې هیڅ قوه اغېزه ونه کړي دا د سکون یا په یوه نواخت سرعت سره د حرکت په حال کې پاتې کیږي). د ګالیلا له مرګ څخه وروسته، نیوټن د ګالیلا مطالعې ته یو ځانګړی شکل ورکړ او د حرکت لپاره يې درې قوانین وضع کړل.

د نیوټن د حرکت لومړی قانون

دا بیانوي چې هر جسم خپل د سکون حالت او یا په مستقیمه کرښه د یونواخت حرکت حالت ته تر هغې ادامه ورکوي تر څو چې د حالت د تغیر لپاره يې کومه خارجي قوه پرې اغیزه ونه کړي.

له دې ځایه د نیوټن د حرکت له لومړي قانون څخه مونږ لاس ته راوړو چې په مستقیمه کرښه د یوه جسم د یونواخت حرکت حالت یا د سکون حالت ته د تغیر ورکولو لپاره باید په نوموړي جسم یوه خارجي قوه عمل وکړي. دا مونږ د قوې تعریف ته رهنمایي کوي.

"قوه (ټیل وهل یا کش کول) له هغه څه څخه عبارت ده چې په مستقیمه کرښه د یونواخت حرکت حالت یا د سکون حالت تغیر یاېي د تغیر میل ولري یا د حرکت جهت ته تغیر ورکړي."

د نیوټن د حرکت لومړی قانون دا ښیي چې یو جسم په خپله خپل د سکون یا حرکت حالت یا د حرکت جهت ته تغیر نه شي ورکولی. د مادي جسم دغه ناتواني عطالت بلل کېږي. له دې ځایه د نیوټن د حرکت لومړی قانون د عطالت قانون هم بلل کېږي.

دنیوټن د حرکت دویم قانون

ددې قانون مطابق، " د یوه جسم د مومنټم تغیر مستقیماً متناسب دی دهغې قوې سره چې په نوموړي جسم عمل کوي او دغه تغیر د عاملې قوې په جهت رامنځ ته کېږي."

د یوه جسم مومنټم د حرکت له هغې اندازې څخه عبارت دی چې نوموړی جسم یې لري او د جسم د کتلې او سرعت د ضرب حاصل دی.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \dots (۱.۲.۱)$$

که د $\vec{F}$ قوه په یوه جسم باندې چې د $\vec{p}$ مومنټم لري عمل وکړي، نو د حرکت له دویم قانون څخه لرو چې

$$\vec{F} \approx \frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = k\,\frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

د (۱.۲.۱) معادلې په استعمال سره، لرو چې

$$\vec{F} = k\frac{d}{dt}\,(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt}$$

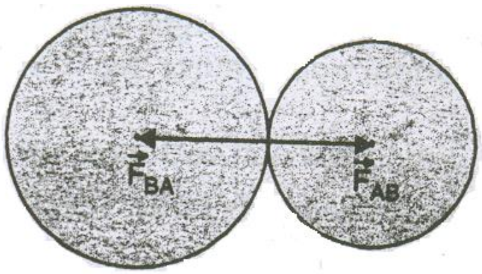
$$\vec{F} = km\vec{a}$$

معیاري واحدات داسې انتخابیږي چې $k = 1$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

له دې ځايه دويم قانون مونږ سره د قوې په اندازه کولو کې مرسته کوي.

د نيوټن د حرکت دريم قانون



۱.۲.۱ شکل

دا بيانوي چې " د هرعمل لپاره هميشه يو مساوي او مخالف الجهت عکس العمل وجود لري."

کله چې دوه جسمونه يو پربل باندي اغيزه کوي، يو له دوو قواوو څخه عمل او بله يې عکس العمل بلل کيږي ځکه دا دواړه په يو وخت کې واقع کيږي. له دې ځايه هره يوه له دوو قواوو څخه عمل يا عکس العمل بلل کيدای شي.

عمل او عکس العمل په عين جسم باندي عمل نه کوي، که په عين جسم باندي عمل وکړي، نومحصله قوه به صفر او هيڅ تعجيلي حرکت به وجود ونه لري. دا ناممکنه ده چې يوه ځانګړې Isolated قوه ولرو.

که مونږ د A او B دوه جسمونه په پام کې ونيسو د A جسم په B جسم باندې د $\vec{F}_{AB}$ يوه قوه واردوي او په عين وخت کې د B جسم په A جسم باندې د $\vec{F}_{BA}$ يوه قوه واردوي (۱.۲.۱) شکل. نو د نيوټن د حرکت د دريم قانون مطابق لرو، چې

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

قدم وهل، لامبو وهل، د ټوپک ډز او داسې نور ټول د نيوټن د حرکت دريم قانون ښيي.

<u>۳.۱ د مختصاتو سيستمونه</u>

ددې لپاره چې د يوې فزيکي پيښې ځانګړنې د فضا په يوه معلومه نقطه کې، نظر د هغې شا او خوا نقطو ته وڅيرو، مونږ يو مأخذي سيستم (reference system) استعمالوو. يو مأخذي سيستم د هغو مادي اجسامو په کومک چې په ساحه کې شتون لري پيژندل کيږي او ددې مادي اجسامو په کومک مونږ يوه نقطه جدا کوو چې د مأخذي سيستم مبدا بلل کيږي. ددې لپاره چې ديوې ذرې دقيق موقعيت وټاکل شي، مأخذي سيستم بايد نظر انتخاب شوې مبدا ته جهتونه او زاويې ولري، دغسې مأخذي سيستم چې نظر انتخاب شوې مبدا ته جهتونه او زاويې لري، د مختصاتو سيستم بلل کيږي.

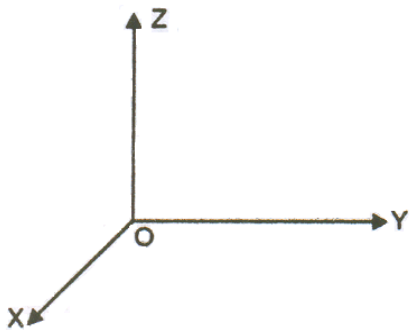
د مختصاتو سيستم مختلف ډولونه لرلی شي چې په فضا کې د يوې نقطې د موقعيت د ټاکلو لپاره استعماليږي، خو په عمومي توګه د مختصاتو لاندې درې سيستمونه استعماليږي.

۱ – مستطيلي کارتيزيني مختصاتو سيستم

۲ – کروي قطبي مختصاتو سيستم

۳ – استوانه يي مختصاتو سيستم

۴.۱ کارتيزيني مختصاتو سيستم



شکل ۱.۴.۱

دمختصاتو سيستم تر ټولو ساده ډول د کارتيزيني يا د مستطيلي مختصاتو له سيستم څخه عبارت دی. په دې سيستم کې، مونږ درې يو پر بل باندې عمود محورونه يعني xy , او z لرو، چې د O له نقطی څخه چې مبدا بلل کيږي رسميږي لکه چې په (۱.۴.۱) شکل کې ښودل کيږي.

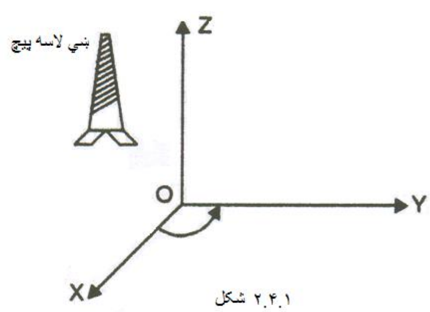
په فضا کې د دريو محورونو اړوند زاويو ته په کتني سره د کارتيزيني مختصاتو سيستم په دوه ډوله دی.

۱ – د کارتيزيني مختصاتو ښي لاسه سيستم.

۲ – د کارتيزيني مختصاتو چپ لاسه سيستم.

۱ – د کارتيزيني مختصاتو ښی لاسه سيستم

د کارتيزيني مختصاتو په ښي لاسه سيستم کې، د xy , او z محورونه داسې ځای په ځای شوي، چې که مونږ د x محور ته د ساعت د عقربې په مخالف جهت $90°$ دوران ورکړو تر څو د y محور ځای ونيسی، نو د z محور به د هغه جهت په امتداد وي چې په هغه کې د ښي لاس پيچ له دغسی دوران سره حرکت کوي (۲.۴.۱) شکل.

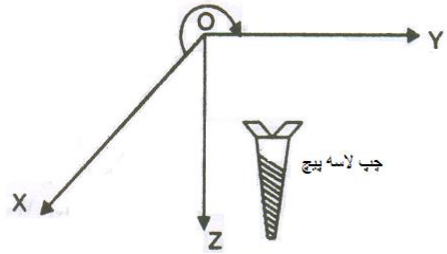


شکل ۲.۴.۱

که $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ په ترتيب سره د xy , او z محورونو په امتداد واحد وکتورونه وي، نو د ښي لاسه سيستم لپاره

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \quad , \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

۲ – د کارتیزیني مختصاتو چپ لاسه سیستم



۳.۴.۱ شکل

په چپ لاسه کارتیزیني مختصاتو سیستم کې د xy , او z محورونه داسې ځای پرځای شوي دي، چې که مونږ د x محور ته د ساعت د عقربې په موافق جهت $90°$ دوران ورکړو تر څو د y محور ځای ونیسي، نو د zمحور به د هغه جهت په امتداد وي چې په هغه کې د چپ لاس پیچ له دغسې دوران سره حرکت کوي (۳.۴.۱ شکل). مونږ د ښي لاسه سیستم څخه په ساده ډول د هغه د یو محور د جهت په بدلولو سره چپ لاسه سیستم لاس ته راوړلی شو. د بیلګې په توګه که مونږ (۲.۴.۱ شکل) د ښي لاسه سیستم دz محور جهت بدل کړو، مونږ (۳.۴.۱ شکل) چپ لاسه سیستم لاس ته راوړو.

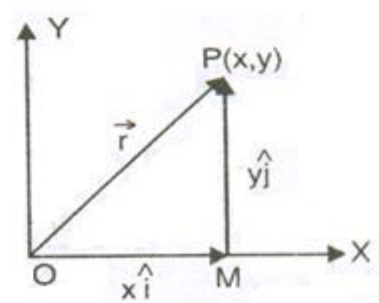
که $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ په ترتیب سره د xy , اوz محورونو په امتداد واحد وکتورونه وي، نو د چپ لاسه سیستم لپاره

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k} \quad , \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{\imath} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\jmath}$$

۵.۱ په دوه بعده کارتیزیني مختصاتو سیستم کې موقعیت وکتور (position vector)، سرعت او تعجیل

په دوه بعده مختصاتو سیستم کې د یوې ذرې حرکت د xy په مستوي کې په پام کې نیسو. فرض کړئ چې د t په وخت کې په P(x, y) نقطه کې ده.(۱.۵.۱ شکل).

(الف) موقعیت وکتور



۱.۵.۱ شکل

که $\hat{\imath}$ او $\hat{\jmath}$ په ترتیب سره د x او y محورونو په امتداد واحد وکتورونه وي او PM په Ox باندې له P څخه عمود وي، نو

$$MP = y\,\hat{\jmath} \quad \text{او} \quad OM = x\,\hat{\imath}$$

په دې وخت کې د ذرې موقعیت وکتور $\overrightarrow{OP}$ ، د وکتورونو د جمع کولو د مثلثي قانون په استعمالولو سره عبارت دی له

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

یا

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad \dots (۱.۵.۱)$$

د موقعیت وکتور اندازه عبارت ده له

$$OP = r = |\vec{r}| = |\vec{r}.\vec{r}|^{1/2} = [(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})]^{1/2}$$

یا $r = [x^2 + y^2]^{1/2}$ ... (۲.۵.۱)

(ب) سرعت : د شعاعي وکتور تغیر نظر وخت ته، د ذرې له سرعت څخه عبارت دی.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}$$

یا $\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$ ... (۳.۵.۱)

داسې چې $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ او $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ په ترتیب سره د x په محور او د y په محور د ذرې د لحظوي سرعت د مرکبو له اندازو څخه عبارت دي.

د سرعت اندازه عبارت ده له

$v = |\vec{v}| = [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2}$ ... (۴.۵.۱)

(ج) تعجیل : د سرعت تغیر نظر وخت ته، د ذرې له تعجیل څخه عبارت دی .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath})}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\dot{y}}{dt}\hat{\jmath}$$

یا $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$ ... (۵.۵.۱)

داسی چې $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ او $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$ په ترتیب سره د x په محور او د y په محور د ذرې د لحظوي تعجیل د مرکبو له اندازو څخه عبارت دي.

د تعجیل اندازه عبارت ده له

$a = |\vec{a}| = [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2]^{1/2}$ ... (۶.۵.۱)

۱.۱ مثال. د یوې نقطې د موقعیت وکتور له $\vec{r} = (3t^3 - 3\mathrm{t})\,\hat{\imath} + 2\mathrm{t}^2\hat{\jmath}$ څخه عبارت دی په $t = 3sec$ کې د نوموړې نقطې سرعت او تعجیل پیدا کړئ.

حل. $\vec{r} = (3t^3 - 3\mathrm{t})\,\hat{\imath} + 2\mathrm{t}^2\hat{\jmath}$ راکړل شوی دی.

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}[(3t^3 - 3\mathrm{t})\,\hat{\imath} + 2\mathrm{t}^2\hat{\jmath}]}{\mathrm{dt}}$$

یا

$$\vec{\mathrm{v}} = (9t^2 - 3)\,\hat{\imath} + 4\mathrm{t}\hat{\jmath}$$

$$[\vec{\mathrm{v}}]_{t=\ 3\mathrm{sec}} = (9 \cdot 3^2 - 3)\,\hat{\imath} + 4 \cdot 3\hat{\jmath} = 78\vec{\mathrm{\imath}} + 12\vec{\mathrm{\jmath}}$$

$$|\vec{\mathrm{v}}|_{3\mathrm{sec}} = [6084 + 144]^{1/2} = (6228)^{1/2} = 26{,}8\ \mathrm{ms}^{-1}$$

او

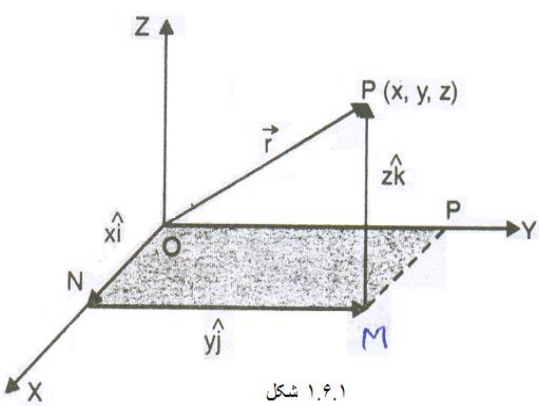
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}[(9t^2 - 3)\,\hat{\imath} + 4\mathrm{t}\hat{\jmath}]}{\mathrm{dt}} = 18\mathrm{t}\,\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

$$[\vec{a}]_{\mathrm{t=3sec}} = 18 \cdot 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} = 54\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

$$|\vec{a}|_{3\mathrm{sec}} = [54^2 + 16^2]^{1/2} = [2916 + 256]^{1/2} = [3172]^{1/2} = 56.3\mathrm{ms}^{-2}$$

۶.۱ په درې بعده کارتیزینې مختصاتو سیستم کې موقعیت وکتور، سرعت او تعجیل

داسې یوه ذره په پام کې نیسو چې په فضا کې په درې بعده مختصاتو سیستم کې د حرکت په حال کې وي. فرض کړئ چې د t په وخت کې، د $\mathrm{P}(x,y,\mathrm{z})$ په نقطه کې ده (۱.۶.۱ شکل)



۱.۶.۱ شکل

(الف) **موقعیت وکتور:** که $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ او $\hat{\mathrm{k}}$ په ترتیب سره د x محور، y محور او z محور په امتداد واحد وکتورونه وي نو له P څخه په xy مستوي باندې د MP عمود رسم کړئ. د N له نقطې څخه د NM کرښه د y له محور سره موازي رسم کړئ. د ON، NM او MP فاصلې د P نقطې کارتیزیني مختصات بلل کیږي.

که $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ او $\hat{\mathrm{k}}$ په ترتیب سره د x ، y او z محور په امتداد واحد وکتورونه وي، نو $\overline{\mathrm{ON}} = x\hat{\imath}$ ، $\overline{\mathrm{NM}} = y\hat{\jmath}$, او $\overline{\mathrm{MP}} = \mathrm{z}\hat{\mathrm{k}}$. د t په هر وخت کې، دوکتورونو د کثیرالاضلاع د جمع د قانون په استعمالولو سره ، د ذرې موقعیت وکتور $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ عبارت دی له

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{NM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}}$$

یا $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ... (۱.۶.۱)

د موقعیت وکتور اندازه عبارت ده له

$$OP = r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad ...(۲.۶.۱)$$

(ب) **سرعت:** د موقعیت وکتور تغیر نظر وخت ته، د ذرې له سرعت څخه عبارت دی .

یعنې

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k})}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

یا $\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$ ... (۳.۶.۱)

داسې چې $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ، $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ او $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ په ترتیب سره د x محور، y محور او z محور په امتداد د ذرې د لحظوي سرعت د مرکبو اندازې دي.

د سرعت اندازه عبارت ده له

$$v = |\vec{v}| = [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]^{1/2} \quad ...(۴.۶.۱)$$

(ج) **تعجیل:** د سرعت تغیر نظر وخت ته، د ذرې له تعجیل څخه عبارت دی.

یعنې

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{x}\hat{\imath}+\dot{y}\hat{\jmath}+\dot{z}\hat{k})}{dt}$$

یا $\vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\dot{y}}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d\dot{z}}{dd}\hat{k}$

یا $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$ ... (۵.۶.۱)

داسې چې $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ ، $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$ او $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$ په ترتیب سره د x محور، y محور او z محور په امتداد د ذرې د لحظوي تعجیل د مرکبو اندازې دي. د تعجیل اندازه عبارت ده له

$$a = |\vec{a}| = [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2]^{1/2} \qquad \text{... (۶.۶.۱)}$$

مثال: د ذرې حرکت د $x = 4\sin2t$ ، $y = 4\cos2t$ او $z = 6t$ معادلې پواسطه توضیح کیږي، د ذرې سرعت او تعجیل پیدا کړئ.

حل: $x = 4\sin2t$ ، $y = 4\cos2t$ او $z = 6t$ راکړل شوی دی

$$\vec{r} = (4\sin2t)\hat{\imath} + (4\cos2t)\hat{\jmath} + (6t)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[(4\sin2t)\hat{\imath} + (4\cos2t)\hat{\jmath} + (6t)\hat{k}\right]}{dt}$$

$$\vec{v} = (8\cos2t)\hat{\imath} + (-8\sin2t)\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

$$v = \sqrt{(8\cos2t)^2 + (-8\sin2t)^2 + 6^2}$$

$$v = \sqrt{64\cos^2 2t + 64\sin^2 2t + 36}$$

$$v = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ واحده}$$

او

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -16\sin2t\hat{\imath} - 16\cos2t\hat{\jmath}$$

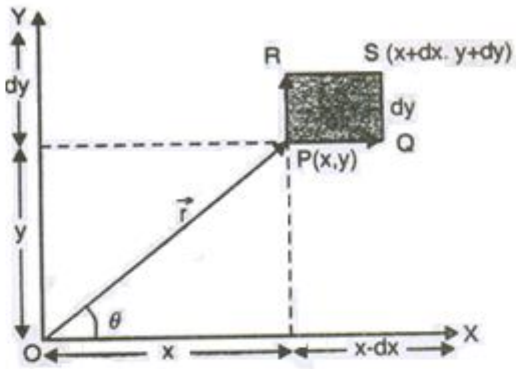
$$a = \sqrt{(-16\sin2t\hat{\imath})^2 + (-16\cos2t\hat{\jmath})^2}$$

$$a = \sqrt{256\sin^2 2t + 256\cos^2 2t}$$

$$a = \sqrt{(256)} = 16 \text{ واحده}$$

۷.۱ په کارتیزینی مختصاتو سیستم کې د مساحت او حجم عنصر

(i) د مساحت عنصر



۱.۷.۱ شکل

د P یوه نقطه لکه چې په (۱.۷.۱) شکل کې ښودل شوې ده د (x,y) مختصاتو سره په xy مستوي کې په پام کې ونیسئ. له p نقطې څخه x ته د $\mathrm{d}x$ په اندازه او y ته د $\mathrm{d}y$ په اندازه کوچنی تزاید ورکړئ ترڅو په ترتیب سره Q او R نقطې لاس ته راوړو. د PQRS مستطیل مکمل کړئ. د PQRS مستطیل مساحت په کارتیزیني مختصاتو سیستم کې د مساحت عنصر بلل کېږي او د ds پواسطه ښودل کېږي. یعني

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{ds}}\right| = |\mathrm{d}x\hat{\imath} \times \mathrm{d}y\hat{\jmath}| = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left|\hat{\mathrm{k}}\right| = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

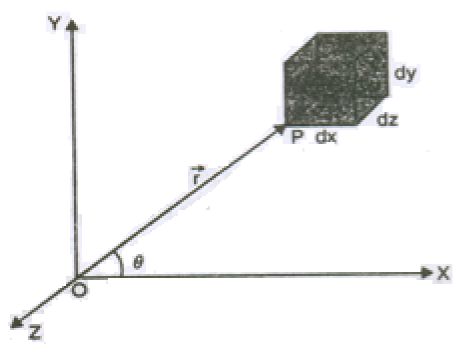
یا

$$\mathrm{ds} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

($\hat{\imath}$ او $\hat{\jmath}$ په ترتیب سره د x محور او y محور په امتداد واحد وکتورونه دي)

(ii) د حجم عنصر

د p یوه نقطه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې د (x,y,z) کارتیزیني مختصات ولري.



۲.۷.۱ شکل

د P نقطې موقعیت وکتور $\vec{r}$ عبارت دی له

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + \mathrm{z}\hat{\mathrm{k}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{\imath} + \mathrm{d}y\hat{\jmath} + \mathrm{dz}\hat{\mathrm{k}}$$

$\mathrm{d}y,\mathrm{d}x$ او dz په ترتیب سره د P په نقطه کې د x محور ، y محور او z محور په امتداد تزاید په پام کې ونیسئ. د متوازي السطوح حجم عبارت دی له

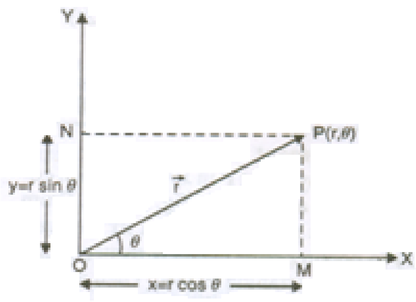
$$\mathrm{dV} = \left|\mathrm{d}x\hat{\imath}\left(\mathrm{d}y\hat{\jmath} \times \mathrm{dz}\hat{\mathrm{k}}\right)\right|$$

$$= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{dz}\left|\hat{\imath}.\hat{\jmath} \times \hat{\mathrm{k}}\right|$$

$$= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{dz}|\hat{\imath}.\hat{\imath}| \qquad \because \left(\hat{\jmath} \times \hat{\mathrm{k}} = \hat{\imath}\right)$$

$$\mathrm{dV} = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{dz} \qquad \text{یا} \qquad \because (\hat{\imath}.\hat{\imath} = 1)$$

۸.۱ مستوي قطبي مختصاتوسيستم



۱.۸.۱ شکل

يوه ذره چې د xy په مستوي کې حرکت کوي په پام کې نيسو. فرض کړئ چې د t په وخت کې د P په نقطه کې ده. په مستوي قطبي مختصاتو کې د ذرې موقعيت د (r ، θ) پواسطه ټاکل کيږي ، چې r له مبدا O څخه په P کې د ذرې فاصله ده او θ د $\vec{r}$ او x محور ترمنځ زاويه ده لکه چې په (۱.۸.۱ شکل) کې ښودل شوي دي. r او θ مختصات د P ذرې مستوي قطبي مختصات بلل کيږي.

د کارتيزيني اوقطبي مستوي مختصاتو ترمنځ اړيکې

که x او y دP نقطې کارتيزيني مختصات وي، نو له $\angle\Delta OMP$ قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \frac{x}{r}$$

يا

$$x = r\cos\theta \qquad \dots (۱.۸.۱)$$

او

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{y}{r}$$

يا

$$y = r\sin\theta \qquad \dots (۲.۸.۱)$$

همدارنگه

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

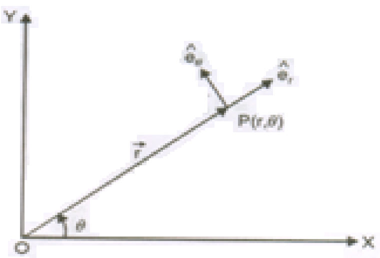
$$\vec{r} = (r\cos\theta)\hat{\imath} + (r\sin\theta)\hat{\jmath}$$

يا

$$\vec{r} = r[\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}] \qquad \dots (۳.۸.۱)$$

(۱.۸.۱) او (۲.۸.۱) معادلې هغه معادلې دي چې دوه بعده کارتيزيني او قطبي مختصات سره وصلوي.

۹.۱ په مستوی قطبي مختصاتو کي واحد وکتورونه ($\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$)



۱.۹.۱ شکل

په مستوي قطبي مختصاتو سیستم کي د P یوه نقطه په پام کي نیسو چي د $\vec{r}$ موقعیت وکتوراو θ زاویي پواسطه چي د x له محور سره جوړیږي، ښودل کیږي لکه چي په (۱.۹.۱ شکل) کي ښودل کیږي.

که مونږ د r او θ د تزاید په جهت په ترتیب سره دوه واحد وکتورونه یعني $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ رسم کړو، نو دغه وکتورونه مستوي قطبي واحد وکتورونه بلل کیږي.

د $\hat{\mathbf{i}}$ او $\hat{\mathbf{j}}$ له مخي د $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ پیداکول:

له (۱.۹.۱ شکل) څخه لرو چي

$$\hat{e}_r = \frac{\overrightarrow{op}}{|\overrightarrow{op}|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

د (۳.۸.۱) معادلي په استعمالولو سره لرو چي

$$\hat{e}_r = \frac{r\,[\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}]}{r}$$

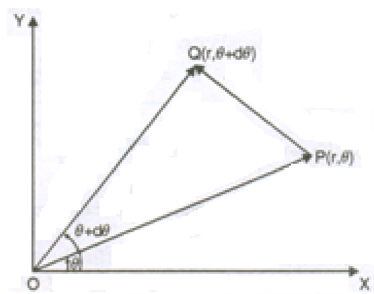
یا

$$\hat{e}_r = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{e}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \qquad ...(۱.۹.۱)$$

$\hat{e}_r$ شعاعي واحد وکتور بلل کیږی.

د $\hat{\mathbf{i}}$ او $\hat{\mathbf{j}}$ له مخي د $\hat{e}_\theta$ پیداکول:



۲.۹.۱ شکل

$(r\,,\theta)$ او $(r\,,\theta + d\theta)$ په ترتیب سره د P او Q نقطو مستوي قطبي مختصات په پام کي ونیسئ لکه چي په (۲.۹.۱ شکل) کي ښودل شوي دي، نو د وکتورنو د جمع مثلثي قانون څخه لرو چي

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

یا

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

څرنګه چي

$$\overrightarrow{OP} = r\hat{e}_r$$

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\theta.\hat{\imath} + r\sin\theta.\hat{\jmath}$$

او

$$\overrightarrow{OQ} = r\cos(\theta + d\theta)\hat{\imath} + r\sin(\theta + d\theta)\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{PQ} = r[\{\cos(\theta + d\theta) - \cos\theta\}\hat{\imath} + \{\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta\}\hat{\jmath}] \quad \ldots (۲.۹.۱)$$

څرنګه چې $d\theta \ll \theta$، نو $\sin d\theta \cong d\theta$ او $\cos d\theta = 1$

خو

$$\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta = \sin\theta \cos d\theta + \cos\theta \sin d\theta - \sin\theta$$

$$= \sin\theta + \cos\theta d\theta - \sin\theta$$

$$= \cos\theta.d\theta \quad \ldots (۳.۹.۱)$$

په عین ډول

$$\cos(\theta + d\theta) - \cos\theta = -\sin\theta \ d\theta \quad \ldots (۴.۹.۱)$$

(۲.۹.۱) معادله په $\overrightarrow{PQ} = r[-\sin\theta d\theta.\hat{\imath} + \cos\theta d\theta.\hat{\jmath}]$ باندې بدلیږي.

او

$$|\overrightarrow{PQ}| = r\sqrt{\sin^2\theta.d\theta^2 + \cos^2\theta.d\theta^2} = r\sqrt{d\theta^2} = r\,d\theta$$

څرنګه چې $\hat{e}_\theta$ یو واحد وکتور دی چې د θ د تزاید په جهت رسم شوی دی

$$\hat{e}_\theta = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{r[-\sin\theta\hat{\imath}+\cos\theta\hat{\jmath}]d\theta}{r d\theta}$$

یا

$$\hat{e}_\theta = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta \quad \ldots (۵.۹.۱)$$

<u>۱۰.۱ په مستوی قطبی مختصاتو کې سرعت اوتعجیل</u>

یوه ذره چې د xy په مستوي کې د حرکت په حال کې ده په پام کې نیسو. فرض کړئ چې د t په وخت کې د $P(r,\theta)$ په نقطه کې ده لکه چې په (۱.۹.۱ شکل) کې ښودل شوي دي. $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ په ترتیب سره د r او θ د تزاید په جهت واحد وکتورونه په پام کې ونیسئ، نو د t په وخت کې د ذرې موقعیت وکتور عبارت دی له

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\hat{e}_r \quad \ldots (۱.۱۰.۱)$$

(الف) سرعت: د موقعیت وکتور تغیر نظر وخت ته، د ذرې له سرعت څخه عبارت دی.

یعني

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(r\hat{\mathrm{e}}_r)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{dt}}\hat{\mathrm{e}}_r + r\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{e}}_r}{\mathrm{dt}}$$

$$[\ \mathrm{e}_r = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta \quad \because]\ \vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta)$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\left[\hat{\imath}(-\sin\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} + \hat{\jmath}\cos\theta.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right]$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\left[-\hat{\imath}\sin\theta.\dot{\theta} + \hat{\jmath}\cos\theta.\dot{\theta}\right]$$

يا

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r[-\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta]\ \dot{\theta}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\hat{e}_\theta\dot{\theta} \qquad \ldots(۲.۱۰.۱) \qquad [\because\ (-\dot{\hat{\imath}}\sin\theta + \dot{\hat{\jmath}}\cos\dot{\theta}) = \dot{\hat{\mathrm{e}}}_\theta\ ]$$

يا

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_r + \vec{\mathrm{v}}_\theta$$

داسي چې $\mathrm{v}_r = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r$ د ذرې د سرعت شعاعي مرکبه او $\vec{\mathrm{v}}_\theta = r\hat{e}_\theta\dot{\theta}$ د ذرې د سرعت عرضي (transverse) مرکبه بلل کيږي. د ذرې د سرعت اندازه عبارت ده له

$$\mathrm{v} = |\vec{\mathrm{v}}| = \sqrt{(\mathrm{v}_r)^2 + (\mathrm{v}_\theta)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \qquad \ldots(۳.۱۰.۱)$$

(ب) تعجيل: د سرعت تغير نظر وخت ته، د ذرې له تعجيل څخه عبارت دی.

يعنې

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\hat{e}_\theta\dot{\theta}\right) \qquad [\ \text{د (۲.۱۰.۱) معادلې په استعمالولو}\ ]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{dt}(\dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(r\hat{e}_\theta\dot{\theta})$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + \dot{r}\dot{\hat{\mathrm{e}}}_r + \dot{r}\hat{e}_\theta\dot{\theta} + r\dot{\hat{\mathrm{e}}}_\theta\dot{\theta} + r\hat{e}_\theta\ddot{\theta} \qquad \ldots(۴.۱۰.۱)$$

څرنګه چې

$$\hat{\mathrm{e}}_r = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta$$

$\because$

$$\dot{\hat{\mathrm{e}}}_r = -\hat{\imath}\sin\theta\dot{\theta} + \hat{\jmath}\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{\hat{\mathrm{e}}}_r = \dot{\theta}(-\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta)$$

يا

$$\dot{\hat{\mathrm{e}}}_r = \dot{\theta}\mathrm{e}_\theta$$

او $\hat{e}_\theta = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta$

∵ $\dot{\hat{e}}_\theta = -\hat{\imath}\cos\theta\dot{\theta} - \hat{\jmath}\sin\theta\dot{\theta}$

$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta)$

یا $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}e_r$

په (۴.۱۰.۱) معادله کې د $\dot{\hat{e}}_r$ او $\dot{\hat{e}}_\theta$ د قیمتونو په وضع کولو سره لرو چې

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{r}\hat{e}_\theta\dot{\theta} - r\hat{e}_r\dot{\theta}^2 + r\hat{e}_\theta\ddot{\theta}$$

$$\vec{a} = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \hat{e}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right) \qquad \text{...(۵.۱۰.۱)}$$

یا $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$

داسې چې $\vec{a}_r = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$ د تعجیل شعاعي مرکبه او$\vec{a}_\theta = \hat{e}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})$ تعجیل عرضي مرکبه بلل کیږی.

د ذرې د تعجیل اندازه عبارت ده له

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_r|^2 + |\vec{a}_\theta|^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})^2} \qquad \text{...(۶.۱۰.۱)}$$

۱۱.۱ د $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ عمودیت

په مستوي قطبي مختصاتو کې، $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ یو پر بل باندې عمود دي. دا په لاندې توګه ښودل کیږي:

څرنګه چې $\hat{e}_r = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta$ او $\hat{e}_\theta = -\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta$

∵ $\hat{e}_r \,.\, \hat{e}_\theta = (\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\theta)(-\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta)$

$$= -\cos\theta.\sin\theta + \cos\theta.\sin\theta$$

یا $\hat{e}_r \,.\, \hat{e}_\theta = 0$

څرنګه چې ددې دوو واحدو وکتورونو د ضرب حاصل صفر دی، نو دوی یو پر بل باندې عمود دي.

۳.۱ مثال: - د ريندې د حرکت (planer motion) لپاره $x = r\cos\theta$ او $y = r\sin\theta$ دی. ثبوت کړئ چې

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r} \quad \text{او} \quad r\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r}$$

حل : - $x = r\cos\theta$ او $y = r\sin\theta$ راکړل شوي دي.

$$\because \quad (x^2+y^2)^{1/2} = [r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)]^{1/2} = r$$

يا

$$(x^2+y^2)^{1/2} = r$$

$\therefore$ نظر t ته د دواړو خواو د مشتق په اخستلو سره، لرو چې

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2x\dot{x}+2y\dot{y})$$

يا

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}$$

همدارنګه

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

يا

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

نظر t ته د دواړو خواو د مشتق په اخستلو سره، لرو چې

$$\sec^2\theta.\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}$$

يا

$$(1+\tan^2\theta)\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}$$

يا

$$(1+\frac{y^2}{x^2})\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}$$

يا

$$(\frac{x^2+y^2}{x^2})\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}$$

يا

$$(x^2+y^2)\dot{\theta} = x\dot{y}-y\dot{x}$$

يا

$$r^2\dot{\theta} = x\dot{y}-y\dot{x}$$

يا

$$r\dot{\theta} = \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r}$$

۴.۱ مثال: - یوه ذره په ω زاویې سرعت سره د xy په مستوي کې د مبدا په شاوخوا دوران کوي. دا یواځې عرضي تعجیل لري. وښایاست چې

$$r = a\mathrm{e}^{\omega \mathrm{t}} + \mathrm{be}^{-\omega \mathrm{t}}$$

داسې چې a او b ثوابت وي.

حل: - په مستوي قطبي مختصاتو سیستم کې، دیوې ذرې تعجیل عبارت دی له

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = \hat{\mathrm{e}}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\mathrm{e}}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})$$

چې $\vec{a}_r = 0$ راکړل شوی دی

یعنې $\hat{\mathrm{e}}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0$

یا $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$

یا $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{dt}^2} - r\omega^2 = 0$ $\quad \left[\therefore\ \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{dt}^2} \quad ,\dot{\theta} = \omega\right]$

دا دویم ترتیب تفاضلی معادله ده چې حل یې له $r = a\mathrm{e}^{\omega \mathrm{t}} + \mathrm{be}^{-\omega \mathrm{t}}$ څخه عبارت دی.

۵.۱ مثال: - که په t وخت کې $r = 6\mathrm{t}^2$ او $\theta = 3\mathrm{t}$ د یوې نقطې مستوي قطبي مختصات وي، په $\mathrm{t} = 0$ کې یې د تعجیل شعاعي مرکبه محاسبه کړئ.

حل:- په مستوي قطبي مختصاتو کې د تعجیل شعاعي مرکبه عبارت ده له

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$r = 6\mathrm{t}^2$ او $\theta = 3\mathrm{t}$ راکړل شوي دي.

$\because$ $\dot{\theta} = 3$ او $\dot{r} = 12\mathrm{t}$

او $\ddot{r} = 12$

$\because$ $a_r = 12 - 6\mathrm{t}^2.3^2$

یا $a_r = 12 - 54\mathrm{t}^2$

په $\mathrm{t} = 0$ کې $a_r = 12$

۶.۱ مثال:- د مبدا په شاوخوا دیوې ذرې دایروي حرکت د $r = \mathrm{b}$ په واسطه توضیح کیدای شي، داسې چې b د نوموړې دایرې شعاع وي. د دغه حالت لپاره وښایاست چې $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{b}\omega\ \hat{\mathrm{e}}_\theta$ او

$\vec{a} = -\omega^2 \mathrm{b}\hat{\mathrm{e}}_r + \mathrm{b}\alpha\hat{\mathrm{e}}_\theta$ ، داسي چې $\omega = \dot{\theta}$ او $\alpha = \ddot{\theta}$ دي.

حل : - په مستوي قطبي مختصاتو کې، دیوې ذرې سرعت عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_r + r\,\hat{\mathrm{e}}_\theta\dot{\theta}$$

چې (ثابت)$r = \mathrm{b}$ او $\dot{\theta} = \omega$

همدارنګه

$$\vec{\mathrm{v}} = 0\hat{\mathrm{e}}_r + \mathrm{b}\hat{\mathrm{e}}_\theta\omega$$

یا

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{b}\hat{\mathrm{e}}_\theta\omega = \vec{\mathrm{v}}_\theta$$

له دې ځایه د ذرې سرعت یواځې عرضي مرکبه لري.

په مستوي قطبي مختصاتو کې د ذرې تعجیل عبارت دی له

$$\vec{a} = \hat{\mathrm{e}}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \hat{\mathrm{e}}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})$$

$$\vec{a} = \hat{\mathrm{e}}_r(0 - \mathrm{b}\omega^2) + \hat{\mathrm{e}}_\theta(0 + \mathrm{b}\alpha)$$

$$\vec{a} = -\hat{\mathrm{e}}_r\,\mathrm{b}\omega^2 + \hat{\mathrm{e}}_\theta\mathrm{b}\alpha$$

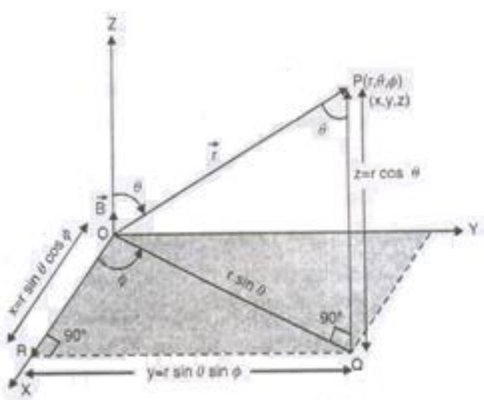
یا

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

له دی ځایه د ذرې تعجیل دواړه شعاعي مرکبه او عرضي مرکبه لري.

۱۲.۱ د کروي قطبي مختصاتو سیستم

په فضا کې د P یوه نقطه په پام کې نیسو. په کروي قطبي مختصاتو کې د نوموړې نقطې مختصات د $\mathrm{P}(r,\theta,\phi)$ پواسطه ښودل کېږي لکه په (۱.۱۲.۱) شکل کې چې ښودل شوي دي، داسي چې $\vec{r}$ د موقعیت وکتور θ د r او z محور ترمنځ زاویه چې پورته لورته زاویه (zeneith angle) بلل کېږي او Φ د x محور او په xy مستوي کې د $\vec{r}$ مرتسم ترمنځ زاویه ده چې د افقي قوس مربوطه زاویه (azimuthal angle) بلل کېږي.



۱.۱۲.۱ شکل

د کارتيزيني او کروي قطبي مختصاتو ترمنځ اړيکه

په ۱.۱۲.۱ شکل کې د P نقطه دواړه کارتيزيني مختصات (x, y, z) او کروي قطبي مختصات (r, θ, ϕ) ښيي . د P له نقطې څخه، د xy په مستوي باندې د PQ عمود رسم کړئ. د RQ خط د y له محور سره موازي رسم کړئ چې د x محور سره د R په نقطه کې یوځای شي. OP داسې په پام کې ونيسئ چې د z محور سره د θ زاويه جوړه کړي او OQ د x محور سره د ϕ زاويه جوړه کړي.

د OQP له قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې

$$\frac{PQ}{OP} = \cos\theta$$

يا

$$PQ = OP\cos\theta$$

يا

$$Z = r\cos\theta$$

او

$$\frac{OQ}{OP} = \sin\theta \qquad \dots (۱.۱۲.۱)$$

يا

$$OQ = OP\sin\theta = r\sin\theta \qquad \dots (۲.۱۲.۱)$$

له ORQ قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې Φ

$$\frac{OR}{OQ} = \cos\phi$$

يا

$$OR = OQ\cos\phi$$

يا

$$x = r\sin\theta\cos\Phi \qquad \dots (۳.۱۲.۱)$$

او

$$\frac{RQ}{OQ} = \sin\Phi$$

يا

$$RQ = OQ\sin\Phi$$

يا

$$y = r\sin\theta\sin\Phi \qquad \dots (۴.۱۲.۱)$$

له دې ځايه لرو چې

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \dots (۵.۱۲.۱)$$

(۵.۱۲.۱) معادلې د کارتیزیني اوکروي قطبي مختصاتو ترمنځ غوښتل شوې رابطې دي.

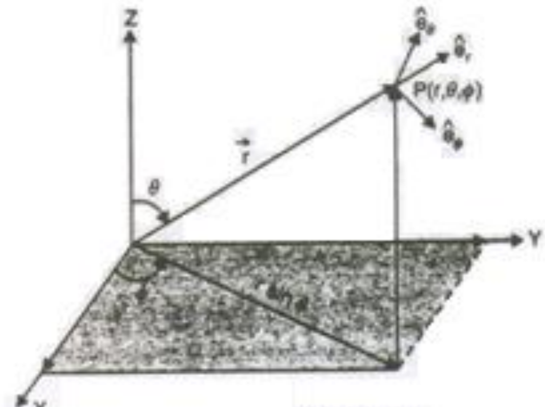
که $\vec{r}$ د P نقطې موقعیت وکتور وي نو $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

نود (۵.۱۲.۱) معادلو په استعمالولو سره لرو چې

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{\imath} + r\sin\theta\sin\phi\hat{\jmath} + r\cos\theta\hat{k}$$

$$\vec{r} = r(\hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}r\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta) \qquad \dots (۶.۱۲.۱)$$

۱۳.۱ په کروي قطبي مختصاتو کې واحد وکتورونه ($\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\phi$)



۱.۱۳.۱ شکل

د P نقطه په کروي قطبي مختصاتو سیستم کې په پام کې ونیسئ، چې د موقعیت وکتور $\vec{r}$ پواسطه ښودل کیږي. θ د $\vec{r}$ او z محور ترمنځ زاویه او Φ د x محور او د xy په مستوي باندې د $\vec{r}$ د مرتسم ترمنځ زاویه ده لکه چې په ۱.۱۳.۱ شکل کې ښودل شوي دي.

که مونږ په ترتیب سره درې واحد وکتورونه ($\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$) د r ، θ او Φ د تزاید په جهت رسم کړو، نو دغه وکتورونه کروي قطبي واحد وکتورونه بلل کیږي.

د $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ له مخې د $\hat{e}_r$ پیداکول:

څرنګه چې په ۱.۱۳.۱ شکل کې، $\hat{e}_r$ د $\vec{r}$ د تزاید د جهت په امتداد یو وکتور دی، نو

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

یا

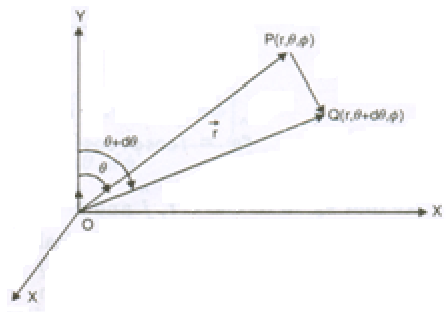
$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

د ۶.۱۲.۱ معادلې په استعمالولو سره لرو چې

$$\hat{e}_r = \frac{r(\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta)}{r}$$

$$\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta \qquad \dots (۱.۱۳.۱)$$

د $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ او $\hat{k}$ له مخې $\hat{e}_\theta$ پیداکول:



۲.۱۳.۱ شکل

(r, θ, Φ) او $(r, \theta + d\theta, \Phi)$ په ترتیب سره د P او Q نقطو کروي قطبي مختصات په پام کې ونیسئ لکه په (۲.۱۳.۱) شکل کې چې ښودل شوي دي، نو د وکتورونو د جمع د مثلثي قانون څخه لرو چې

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

یا

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \qquad \dots (۲.۱۳.۱)$$

څرنګه چې

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\hat{e}_r$$

$\because$

$$\overrightarrow{OP} = r\left[\hat{i}\sin\theta\cos\Phi + \hat{j}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta\right]$$

او

$$\overrightarrow{OQ} = r\left[\hat{i}\sin(\theta + d\theta)\cos\Phi + \hat{j}\sin(\theta + d\theta)\sin\Phi + \hat{k}\cos(\theta + d\theta)\right]$$

$$\overrightarrow{PQ} = r\left[\hat{i}\cos\Phi\{\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta\} + \hat{j}\sin\Phi\{\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta\} + \hat{k}\{\cos(\theta + d\theta) - \cos\theta\}\right] \qquad \dots (۳.۱۳.۱)$$

څرنګه چې $d\theta \ll \theta$ نو $\sin d\theta \cong d\theta$ او $\cos d\theta = 1$

$\because$

$$\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta = \sin\theta\cos d\theta + \cos\theta\sin d\theta - \sin\theta$$

$$= \sin\theta + \cos\theta d\theta - \sin\theta$$

$$= \cos\theta . d\theta \qquad \dots (۴.۱۳.۱)$$

په عین ډول

$$\cos(\theta + d\theta) - \cos\theta = -\sin\theta\, d\theta \qquad \dots (۵.۱۳.۱)$$

نو (۳.۱۳.۱) معادله په لاندې معادله بدلیږي

$$\overrightarrow{PQ} = r\{\hat{i}\cos\Phi.\cos\theta.d\theta + \hat{j}\sin\Phi.\cos\theta\, d\theta - \hat{k}\sin\theta\, d\theta\}$$

یا

$$\overrightarrow{PQ} = rd\theta\left[\hat{i}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{j}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta\right]$$

او

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = rd\theta[\cos^2\Phi.\cos^2\theta + \sin^2\Phi.\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/2}$$

$$= r\mathrm{d}\theta[\cos^2\theta(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi) + \sin^2\theta]^{1/2}$$

$$= r\mathrm{d}\theta[\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/2}$$

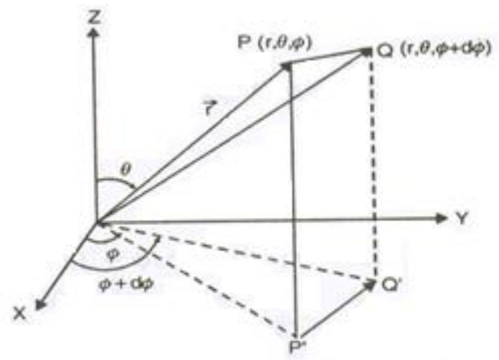
$$= r\mathrm{d}\theta$$

∵ $$\hat{e}_\theta = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{r\mathrm{d}\theta[\hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta]}{r\mathrm{d}\theta}$$

یا $$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta \qquad ...(۶.۱۳.۱)$$

د $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ له مخې د $\hat{e}_\Phi$ پیداکول:

(r,θ,Φ) او (r,θ,Φ+dΦ) په ترتیب سره د P او Q نقطو کروي قطبي مختصات په پام کې ونیسئ لکه چې په (۳.۱۳.۱) شکل کې ښودل شوي دي، نو د وکتورونو د جمع له مثلثي قانون څخه لرو چې



شکل ۳.۱۳.۱

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

یا $$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \qquad ...(۷.۱۳.۱)$$

څرنګه چې $$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\hat{e}_r$$

∵ $$\overrightarrow{OP} = r[\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta]$$

او $$\overrightarrow{OQ} = r[\hat{\imath}\sin\theta.\cos(\Phi + \mathrm{d}\Phi) + \hat{\jmath}\sin\theta\sin(\Phi + \mathrm{d}\Phi) + \hat{k}\cos\theta]$$

له دې ځایه

$$\overrightarrow{PQ} = r[\hat{\imath}\sin\theta\{\cos(\Phi + \mathrm{d}\Phi) - \cos\Phi\} + \hat{\jmath}\sin\theta\{\sin(\Phi + \mathrm{d}\Phi) - \sin\Phi\}]$$

څرنګه چې $$\cos(\Phi + \mathrm{d}\Phi) - \cos\Phi = -\sin\Phi\,\mathrm{d}\Phi$$

او $$\sin(\Phi + \mathrm{d}\Phi) - \sin\Phi = \cos\Phi\,\mathrm{d}\Phi$$

∵ $$\overrightarrow{PQ} = r[-\hat{\imath}\sin\theta\sin\Phi\mathrm{d}\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\cos\Phi\mathrm{d}\Phi]$$

یا $\overrightarrow{PQ} = r\,\sin\theta d\Phi[-\hat{i}\sin\Phi + \hat{j}\cos\Phi]$

او $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = r\,\sin\theta d\Phi[(-i\sin\Phi)^2 + (j\cos\Phi)^2]^{1/2}$

$$= r\,\sin\theta d\Phi[\sin^2\Phi + \cos^2\Phi]^{1/2}$$

یا $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = r\,\sin\theta d\Phi$

$\therefore$ $\hat{e}_\Phi = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \dfrac{r\,\sin\theta d\Phi(-\hat{i}\sin\Phi + \hat{j}\cos\Phi)}{r\,\sin\theta d\Phi}$

یا $\hat{e}_\Phi = -\hat{i}\sin\Phi + \hat{j}\cos\Phi$ ... (۸.۱۳.۱)

<u>۱۴.۱ په کروي قطبي مختصاتو کې سرعت او تعجیل</u>

په فضا کې یوه ذره چې د حرکت په حال کې وي په پام کې نیسو. فرض کړئ چې په t وخت کې د $P(r, \theta, \Phi)$ په نقطه کې وجود لري لکه چې په ۱.۱۳.۱ شکل کې ښودل شوي دي. $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ واحد وکتورونه په پام کې ونیسئ چې په ترتیب سره د r ، θ او Φ د تزاید په جهت رسم شوي دي. نو په t وخت کې د موقعیت وکتور عبارت دی له

$\vec{r} = \overrightarrow{op} = r\hat{e}_r$ ... (۱.۱۴.۱)

(الف) سرعت: د موقعیت وکتور تغیر نظر وخت ته د ذرې له سرعت څخه عبارت دی.

یعنې $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d(r\hat{e}_r)}{dt}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$ ... (۲.۱۴.۱)

څرنګه چې د $\hat{e}_r$ قیمت په کروي قطبي مختصاتو کې عبارت دی له

$$\hat{e}_r = \hat{i}\sin\theta\,\cos\Phi + \hat{j}\sin\theta\,\sin\Phi + \hat{k}\,\cos\theta$$

$\because$ $\dot{\hat{e}}_r = \hat{i}\left[\cos\theta\dot{\theta}\cos\Phi - \sin\theta\sin\Phi\dot{\Phi}\right] + \hat{j}\left[\cos\theta\dot{\theta}\,\sin\Phi + \sin\theta\cos\Phi\dot{\Phi}\right] - \hat{k}\sin\theta\dot{\theta}$

یا $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}[i\cos\theta\cos\Phi + j\cos\theta\,\sin\Phi - k\,\sin\theta] + \dot{\Phi}\sin\theta[-i\sin\Phi + j\cos\Phi]$

د (۶.۱۳.۱) او (۸.۱۳.۱) معادلو په استعمالولو سره لرو چې

$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi$ ... (۳.۱۴.۱)

په (۲.۱۴.۱) معادله کې د (۳.۱۴.۱) معادلې په وضع کولو سره لرو چې

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi$$

یا

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\Phi$$

داسي چي

د سرعت شعاعي مرکبه بلل کیږي $\vec{v}_r = \dot{r}\hat{e}_r$

د سرعت پورته خواته مرکبه بلل کیږي $\vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

دسرعت د افقي قوس مربوطه مرکبه بلل کیږي $\vec{v}_\Phi = r\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\theta$

د ذرې د سرعت اندازه عبارت ده له

$$V = |\vec{v}| = \sqrt{|v_r|^2 + |v_\theta|^2 + |v_\Phi|^2}$$

$$= |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\Phi}^2\sin^2\theta} \qquad \dots (۴.۱۴.۱)$$

(ب) تعجیل: د سرعت تغیر نظر وخت ته د ذرې له تعجیل څخه عبارت دی.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\dot{r}\hat{e}_r + r\hat{e}_\theta\dot{\theta}\right) + r\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi\right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{e}_r) + \frac{d}{dt}\left(r\hat{e}_\theta\dot{\theta}\right) + \frac{d}{dt}(r\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi + r\ddot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\theta +$$

$$r\dot{\Phi}\cos\theta\dot{\theta}\hat{e}_\Phi + r\dot{\Phi}\sin\theta\dot{\hat{e}}_\Phi \qquad \dots (۵.۱۴.۱)$$

څرنګه چې د $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ قیمتونه په لاندې ډول راکړل شوي دي

$$\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta \qquad \dots (۶.۱۴.۱)$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta \qquad \dots (۷.۱۴.۱)$$

$$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi \qquad \dots (۸.۱۴.۱)$$

$$\therefore \dot{\hat{e}}_r = i\left[-\hat{\imath}\sin\theta\dot{\theta}\cos\Phi - \cos\theta\sin\Phi\dot{\Phi}\right] + \hat{\jmath}\left[-i\sin\theta\dot{\theta}\sin\Phi + \cos\theta\cos\Phi\dot{\Phi}\right] - \hat{k}\cos\theta\dot{\theta} \qquad \dots (۹.۱۴.۱)$$

$$= -\dot{\theta}\left[\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta\right] + \dot{\Phi}\cos\theta[-i\sin\Phi + j\cos\Phi]$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{\Phi}\cos\theta\hat{e}_\Phi \qquad ...(۹.۱۴.۱)$$ یا

او $$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\hat{\imath}\cos\Phi\dot{\Phi} - \hat{\jmath}\sin\Phi\dot{\Phi}$$

$$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\dot{\Phi}[\hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi] \qquad ...(۱۰.۱۴.۱)$$

(۶.۱۴.۱) رابطه په $\sin\theta$ او (۷.۱۴.۱) رابطه په $\cos\theta$ کې ضربوو اوبیایې سره جمع کوو، تر لاسه کوو چې

$$\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \hat{\jmath}\sin\Phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi \qquad ...(۱۱.۱۴.۱)$$

په (۱۰.۱۴.۱) معادله کې د (۱۱.۱۴.۱) معادلې په وضع کولو سره لاس ته راوړو چې

$$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\dot{\Phi}[\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta]$$

$$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_r - \dot{\Phi}\cos\theta\hat{e}_\theta \qquad ...(۱۲.۱۴.۱)$$

په (۵.۱۴.۱) معاله کې له (۹.۱۴.۱)، (۳.۱۴.۱) او (۱۲.۱۴.۱) معادلو څخه د $\dot{\hat{e}}_r$ ، $\dot{\hat{e}}_\theta$ او $\dot{\hat{e}}_\Phi$ قیمت په وضع کولو سره لرو چې

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi\right) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{\Phi}\cos\theta\hat{e}_\Phi\right) +$$
$$\dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\Phi + r\ddot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_\theta + r\dot{\Phi}\cos\theta\dot{\theta}\hat{e}_\Phi + r\dot{\Phi}\sin\theta\left[-\dot{\Phi}\sin\theta\hat{e}_r - \dot{\Phi}\cos\theta\hat{e}_\theta\right]$$

یا

$$\vec{a} = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\Phi}^2\sin^2\theta\right) + \hat{e}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\Phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) +$$
$$\hat{e}_\Phi(2\dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\Phi}\cos\theta + r\ddot{\Phi}\sin\theta)$$

یا $$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\Phi$$

داسې چې $\vec{a}_r = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\Phi}^2 + \sin^2\theta\right)$ د تعجیل شعاعي مرکبه بلل کیږي.

$\vec{a}_\theta = \hat{e}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\Phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)$ د تعجیل پورته خواته مرکبه بلل کیږي.

$\vec{a}_\Phi = \left(2\dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\Phi}\cos\theta + r\ddot{\Phi}\sin\theta\right)\hat{e}_\Phi$ د تجیعل دافقي قوس مربوطه مرکبه بلل کیږي.

د تعجیل اندازه عبارت ده له

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{|a_r|^2 + |a_\theta|^2 + |a_\Phi|^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\Phi}^2\sin^2\theta\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\Phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)^2} \quad + \sqrt{\left(2\dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\Phi}\cos\theta + r\ddot{\Phi}\sin\theta\right)^2}$$

<u>۱. ۱۵ د θ او Φ له مخې د $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ تغیر</u>

د r د جهت په بدلولو، درې واړه واحد وکتورونه $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ تغیر کوي. څرنګه چې جهت په دواړو θ او Φ پورې مربوط دی، نوموږ باید د درې واړو وکتورونو تغیر نظر θ او Φ ته مطالعه کړو.

په کروي قطبي مختصاتو کې

$$\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta \qquad \ldots (۱.۱۵.۱)$$

نظر θ ته د دواړو خواو د مشتق په اخستلو سره، لرو چې

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\Phi - \hat{k}\sin\theta$$

یا [۶.۱۳.۱ معادله ووینئ]

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = \hat{e}_\theta \qquad \ldots (۲.۱۵.۱)$$

نظر Φ ته د (۱.۱۵.۱) رابطې د دواړو خواو د مشتق په اخستلو سره، لرو چې

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\Phi} = -\hat{\imath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\cos\Phi$$

$$= \sin\theta[-\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi]$$

یا [۸.۱۳.۱ معادله ووینئ]

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = \sin\theta\hat{e}_\Phi \qquad \ldots (۳.۱۵.۱)$$

څرنګه چې

$$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$

$\therefore$

$$\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi - \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi - \hat{k}\cos\theta$$

$$= -\left[\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta\right]$$

$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$ ... (۴.۱۵.۱) یا

او $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \Phi} = -\hat{\imath}\cos\theta\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\theta\cos\Phi$

$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \Phi} = \cos[-\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi]$

$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \Phi} = \cos\hat{e}_\Phi$ ... (۵.۱۵.۱) یا

ځرنګه چې $\hat{e}_\Phi = \hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi$

$\therefore$ $\frac{\partial \hat{e}_\Phi}{\partial \theta} = 0$ ... (۶.۱۵.۱)

له دې ځایه، $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$ ، $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \Phi} = \sin\theta\hat{e}_\Phi$ ، $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$ ، $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \Phi} = \cos\theta\hat{e}_\theta$ او $\frac{\partial \hat{e}_\Phi}{\partial \theta} = 0$

۱۶.۱. د $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ عمودیت

ځرنګه چې $\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta$

$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$

$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi$

$\therefore$ $\hat{e}_r.\hat{e}_\theta = \sin\theta\cos\theta\cos^2\Phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\Phi - \sin\theta\cos\theta$

$\hat{e}_r.\hat{e}_\theta = \sin\theta\cos\theta(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi) - \sin\theta\cos\theta$

$\hat{e}_r.\hat{e}_\theta = \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos = 0$

یا $\hat{e}_r.\hat{e}_\theta = 0$

او $\hat{e}_\theta.\hat{e}_\Phi = -\sin\theta\cos\Phi\sin\Phi + \sin\theta\cos\Phi\sin\Phi$

یا $\hat{e}_\theta.\hat{e}_\Phi = 0$

او $\hat{e}_\Phi.\hat{e}_r = -\sin\theta\cos\Phi\sin\Phi + \sin\theta\cos\Phi\sin\Phi$

یا $\hat{e}_\Phi.\hat{e}_r = 0$

ځرنګه چې $\hat{e}_\Phi = \hat{e}_\theta.\hat{e}_\Phi = \hat{e}_r.\hat{e}_\theta = 0\ \hat{e}_r.\hat{e}_r$. نو د $\hat{e}_r$ ، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\Phi$ واحد وکتورونه عمود وکتورونه دي.

۷.۱ مثال. په t وخت کې د يوې ذرې موقعيت د $r = R$ ، $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ او $\Phi = 2\omega t$.
سرعت او تعجيل يې پيدا کړئ.

حل. $r = R \qquad \theta = \theta_0 \sin \omega t \qquad \Phi = 2\omega t$

$\therefore \quad \dot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = +\omega\theta_0 \cos \omega t \qquad \dot{\Phi} = 2\omega$

او $\quad \ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \sin \omega t \qquad \ddot{\Phi} = 0$

ځرنګه چې

$$\vec{v} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\Phi}\sin\theta\,\hat{e}_\Phi$$

$$\therefore \quad \vec{v} = 0 + R\omega\theta_0 \cos \omega t\,\hat{e}_\theta + R2\omega \sin\theta\,\hat{e}_\Phi$$

يا

$$\vec{v} = R\omega\theta_0 \cos \omega t\,\hat{e}_\theta + R2\omega \sin(\theta_0 \sin \omega t)\,.\,\hat{e}_\Phi$$

ځرنګه چې

$$\vec{a} = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\Phi}^2\sin^2\theta\right) + \hat{e}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\Phi}^2 \sin\theta\cos\theta\right) + \hat{e}_\Phi\left(2\dot{r}\dot{\Phi}\sin\theta \quad + 2r\dot{\theta}\dot{\Phi}\cos\theta + r\ddot{\Phi}\sin\theta\right)$$

يا

$$\vec{a} = \hat{e}_r\left[0 - R\omega^2{\theta_0}^2\omega^2\cos^2\omega t - R4\omega^2\sin^2\theta\right] + \hat{e}_\theta[0 - R\omega^2\theta_0 \sin \omega t - R4\omega^2 \sin\theta\cos\theta] + \hat{e}_\Phi[0 + 4R\omega^2\theta_0 \cos \omega t + 0]$$

يا

$$\vec{a} = -R\omega^2[\,\hat{e}_r\{{\theta_0}^2\cos^2\omega t + 4\sin^2(\theta_0 \sin \omega t)\} + \hat{e}_\theta\{\theta_0 \sin \omega t + 2\sin(2\theta_0 \sin \omega t) - \hat{e}_\Phi\{4\theta_0 \cos \omega t.\cos(\theta_0 \sin \omega t)]$$

$$[\,2\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta = 2\sin(2\theta_0 \sin \omega t) \qquad \because]$$

۸.۱ مثال. وښاياست چې $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\Phi$ ، $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi = \hat{e}_r$ او $\hat{e}_\Phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$

حل. ځرنګه چې

$$\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\Phi.\cos\theta + \hat{\jmath}\sin\Phi.\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi$$

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \sin\theta\cos\Phi & \sin\theta\sin\Phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\Phi & \cos\theta\sin\Phi & -\sin\theta \end{vmatrix} \qquad \therefore$$

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{\imath}(-\sin^2\theta\sin\Phi - \cos^2\theta\sin\Phi) + \hat{\jmath}(\cos^2\theta\cos\Phi + \sin^2\theta\cos\Phi) +$$

$$\hat{k}(\sin\theta\cos\theta\sin\Phi\mathrm{cso}\Phi - \sin\theta\cos\theta\sin\Phi\mathrm{ccos}\Phi)$$

$$= -\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi$$

$$= \hat{e}_\Phi$$

په عین ډول $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi = \hat{e}_r$ او $\hat{e}_\Phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta$ ثبوت کولای شو.

۹.۱ مثال. د یوې نقطې قطبي مختصات عبارت دي له

$$(r, \theta, \Phi) = (8, 30°, 45°)$$

تاسي د نوموړې نقطې کاتیزیني مختصات پیداکړئ.

حل. د کارتیزیني او کروي قطبي مختصاتو ترمنځ اړیکه عبارت ده له

$$x = r\,sin\theta\,cos\Phi$$

$$y = r\,sin\theta\,sin\Phi$$

$$z = r\,cos\theta$$

$r = 8$، $\theta = 30°$ او $\Phi = 45°$ راکړل شوي دي.

$$x = 8\sin30°\cos45° = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\,.\sqrt{2}$$

$$y = 8\,sin30°cos45° = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\,.\sqrt{2}$$

$$z = 8\,cos30° = 8 \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

۱۰.۱ مثال. وښایاست چې د $\theta \to (\pi - \theta)$ او $\Phi \to (\pi + \Phi)$ انتقال لاندې $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\Phi$ طاقه پاریټي (odd parity) او $\hat{e}_\theta$ جفته پاریټي (even parity) لري.

حل. د هر فزیکي کمیت پاریټي ته طاقه یا جفته ویل کېږي چې د مختصاتو له بدلیدو یعنې انتقال سره یې د علامې په بدلیدو یا نه بدلیدو پورې اړه لري.

$z \rightarrow -z$ او $y \rightarrow -y\,,\ x \rightarrow -x$

څرنګه چې $\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi + \hat{k}\cos\theta$

د $\theta \rightarrow \pi - \theta$ او $\Phi \rightarrow \pi + \Phi$ په عملي کولو سره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\hat{e}_r = \hat{\imath}\sin(\pi - \theta)\cos(\pi + \Phi) + \hat{\jmath}\sin(\pi - \theta)\sin(\pi + \Phi) + \hat{k}\cos(\pi - \theta)$$

$$\hat{e}_r = -\hat{\imath}\sin\theta\cos\Phi - \hat{\jmath}\sin\theta\sin\Phi - \hat{k}\cos\theta$$

یا $\hat{e}_r = -\hat{e}_r$

له دې ځایه، $\hat{e}_r$ طاق پاریټي لري.

څرنګه چې $\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\Phi - \hat{k}\sin\theta$

د $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ او $\Phi \rightarrow (\pi + \Phi)$ په عملي کولو سره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\hat{e}_\theta = \hat{\imath}\cos(\pi - \theta)\cos(\pi + \Phi) + \hat{\jmath}\cos(\pi - \theta)\sin(\pi + \Phi) - \hat{k}\sin(\pi - \theta)$$

$$= \hat{\imath}\cos\theta\cos\Phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\Phi - \hat{k}\sin\theta$$

یا $\hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta$

له دې ځایه، $\hat{e}_\theta$ جفته پاریټي لري.

څرنګه چې $\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}\sin\Phi + \hat{\jmath}\cos\Phi$

د $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ او $\Phi \rightarrow (\pi + \Phi)$ په عملي کولو سره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}\sin(\pi + \Phi) + \hat{\jmath}\cos(\pi + \Phi)$$

$$= \hat{\imath}\sin\Phi - \hat{\jmath}\cos\Phi$$

یا $\hat{e}_\Phi = -(-\hat{\imath}\sin\Phi - \hat{\jmath}\cos\Phi)$

یا $\hat{e}_\Phi = -\hat{e}_\Phi$

له دې ځایه، $\hat{e}_\Phi$ طاقه پاریتي لري.

۱۱.۱ مثال. د یوې نقطې کارتیزیني مختصات له (1 , 0 ,0) څخه عبارت دي. د نوموړې نقطې کروي قطبي مختصات پیداکړئ.

حل. کارتیزیني او کروي قطبي مختصات د لاندې رابطې په واسطه تړاو مومي.

$$x = r\, sin\theta\, cos\Phi \qquad \dots (i)$$

$$y = r\, sin\theta\, sin\Phi \qquad \dots (ii)$$

$$z = r\, cos\theta \qquad \dots (iii)$$

$x = 1$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ راکړل شوي دي.

$$\therefore \quad r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = [1 + 0 + 0]^{1/2} = 1$$

له (iii) معادلې څخه لرو چې

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = 0$$

یا

$$\theta = 90°$$

له (i) معادلې څخه لرو چې

همدارنګه

$$\cos\Phi = \frac{x}{r\sin\theta} = \frac{1}{1.\sin 90} = 1$$

یا

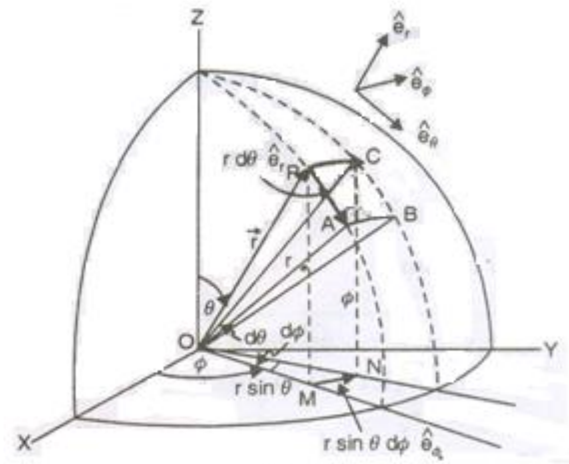
$$\Phi = 0°$$

$\therefore$ د نوموړې نقطې کروي مختصات یې عبارت دي له

$$\therefore \quad (r, \theta, \Phi) = (1, 90°, 0°)$$

۱۷.۱ په کروي قطبي مختصاتو کې د مساحت عنصر

په فضا کې د P یوه نقطه په پام کې ونیسئ چې کروي قطبي مختصات یې له (r, θ, Φ) څخه عبارت دي. د P نقطې د موقعیت وکتور $\vec{r}$ عبارت دی له (۱.۱۷.۱ شکل)



۱.۱۷.۱ شکل

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

∴ $$d\vec{r} = dr\ \hat{e}_r + rd\hat{e}_r \qquad \dots (۱.۱۷.۱)$$

څرنګه چې $$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + sin\theta\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi$$

یا $$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta + sin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi \qquad \dots (۲.۱۷.۱)$$

په (۱.۱۷.۱) معادله کې د (۲.۱۷.۱) په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$d\vec{r} = dr\ \hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi \qquad \dots (۳.۱۷.۱)$$

څرنګه چې د کرې په سطحه شعاع r ثابته ده،

∴ $$d\vec{r} = 0$$

(III) معادله لاندې شکل غوره کوي.

$$d\vec{r} = rd\theta\hat{e}_\theta + rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi \qquad \dots (۴.۱۷.۱)$$

څرنګه چې د $\hat{e}_\theta$ په امتداد د تزاید وکتور عبارت دی له $rd\theta\hat{e}_\theta$

د $\hat{e}_\Phi$ په امتداد د تزاید وکتور عبارت دی له $rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi$

نو د کرې په سطحه د مساحت وکتور $d\vec{s}$ د تزاید د دوو وکتورنو د وکتوري ضرب څخه عبارت دی.

$$d\vec{s} = rd\theta\hat{e}_\theta \times rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi$$

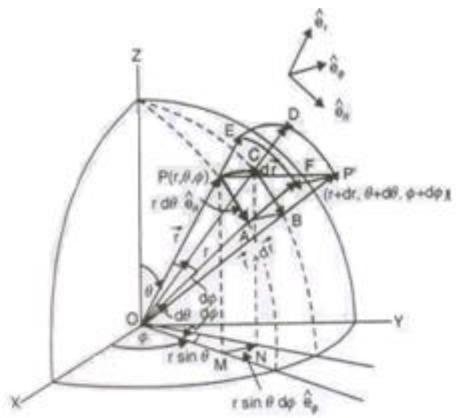
$$= r^2 sin\theta d\theta d\Phi(\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi)$$

$$d\vec{s} = r^2 sin\theta d\theta d\Phi\ \hat{e}_r \qquad [\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi = \hat{e}_r \quad \therefore]$$

د کرې په سطحه کې د مساحت د عنصر $d\vec{s}$ اندازه عبارت ده له

$$ds = |d\vec{s}| = r^2 sin\theta d\theta d\Phi$$

۱۸.۱ په کروي قطبي مختصاتو کې د حجم عنصر



۱.۱۸.۱ شکل

په فضا کې د P یوه نقطه په پام کې ونیسئ چې کروي قطبي مختصات یې له (r, θ, Φ) څخه عبارت دي. د P نقطې د موقعیت وکتور عبارت دی له $\vec{r} = r\hat{e}_r$

که یوه متحرکه ذره چې مختصات یې $(r + dr, \theta + d\theta, \Phi + d\Phi)$ دي له $(t + dt)$ وخت څخه وروسته P' نقطې ته ورسیږي (۱.۱۸.۱ شکل) نو $\overrightarrow{OP} = \vec{r} +$ $d\vec{r}$ او د dt په کوچني وخت کې د ذرې د ځای بدلون وکتور لاندې شکل غوره کوي

$$\overrightarrow{PP'} = d\vec{r}$$

د (۱۷.۱) عنوان له (۳.۱۷.۱) معادلې څخه، لرو چې

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

ځرنګه چې د $\hat{e}_r$ په امتداد د تزاید وکتور= $dr\hat{e}_r$

د $\hat{e}_\theta$ په امتداد د تزاید وکتور= $rd\theta\hat{e}_\theta$

د $\hat{e}_\Phi$ په امتداد د تزاید وکتور = $rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi$

$\therefore$ په کروي قطبي مختصاتو سیستم کې د حجم عنصر عبارت دی له

$$dV = |(dr\hat{e}_r).(rd\theta\hat{e}_\theta) \times (rsin\theta d\Phi\hat{e}_\Phi)|$$

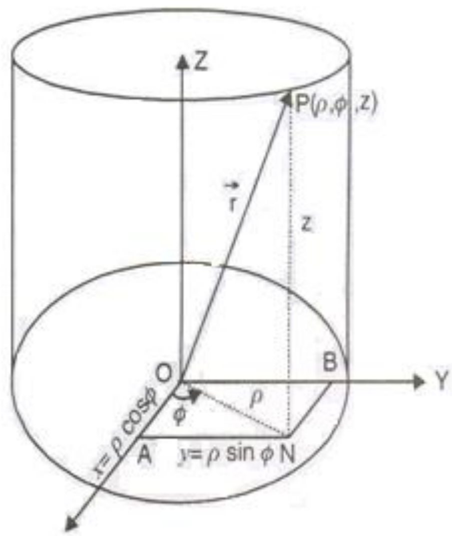
$$= r^2 dr sin\theta d\theta d\Phi|\hat{e}_r.(\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi)|$$

$$= r^2 dr sin\theta d\theta d\Phi |\hat{e}_r . \hat{e}_r | \qquad [\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\Phi = \hat{e}_r \quad \therefore]$$

یا

$$dV = r^2 dr sin\theta d\theta d\Phi$$

۱۹.۱ استوانه يي مختصاتو سيستم



شکل ۱.۱۹.۱

د P يوه نقطه په فضا کې په پام کې نيسو. په استوانه يي مختصاتو کې د نوموړې نقطې مختصات د $P(\rho, \Phi, z)$ په واسطه ښودل کيږي. استوانه يي مختصاتو ته ځکه دا نوم ورکړل شوی چې دوی د P يوې نقطې چې داستوانې په سطحه پرته ده، مختصات ښيي لکه چې په (۱.۱۹.۱) شکل کې ښودل شوي دي. OX ، OY او OZ يوپربل باندی عمود محورونه او Z د ρ په شعاع داستوانې دتناظرمحور دی. دلته ρ د XY په مستوي کې د Z له محور څخه د P د نقطې د مرتسم فاصله ښيي، Φ هغه زاويه ښيي چې د $\overrightarrow{OP}$ شعاعي وکتور مرتسم ON يې د X له محور سره جوړوي او د افقي قوس مربوطه زاويه بلل کيږي. او z د P نقطې فاصله د XY له مستوي څخه ښيي.

د کارتيزيني او استوانه يي مختصاتو ترمنځ رابطه

په (۱.۱۹.۱) شکل کې د P نقطه دواړه کارتيزيني مختصات (x, y, z) او استوانه يي مختصات (ρ, Φ, z) ښيي د P له نقطې څخه د xy په مستوي د PN عمود رسم کړئ. د AN کرښه د y له محور سره موازي داسې رسم کړئ چې د x محور سره د A په نقطه کې يوځای شي. ON وصل کړئ ، ON داسې په پام کې ونيسئ چې د xمحور سره د Φ زاويه جوړه کړي او $ON = \rho$.

په $\angle\Delta OAN$ کې

$$\cos\Phi = \frac{OA}{ON}$$

$$OA = ON\cos\Phi$$

$$x = \rho\cos\Phi \qquad \dots(۱.۱۹.۱)$$

$$\sin\Phi = \frac{AN}{ON}$$

یا $\mathrm{AN} = \mathrm{ON}\sin\Phi$

$$y = \rho\sin\Phi \quad \dots (۲.۱۹.۱)$$

له دې ځایه

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\Phi \\ y = \rho\sin\Phi \\ z = z \end{array}\right] \quad \dots (۳.۱۹.۱)$$

(۳.۱۹.۱) رابطه د کارتیزیني او استوانه یي مختصاتو ترمنځ رابطه ښيي. همدارنګه لروچې

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\rho = (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)^{1/2} \quad \dots (۴.۱۹.۱)$$

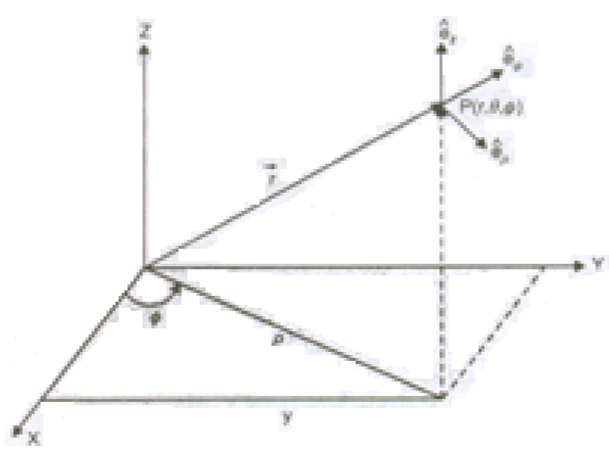
او

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho\sin\Phi}{\rho\cos\Phi}$$

یا

$$\tan\Phi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \quad \dots (۵.۱۹.۱)$$

۲۰.۱ په استوانه یي مختصاتو کې واحد وکتورونه ($\hat{e}_\rho, \hat{e}_\Phi, \hat{e}_z$)



۱.۲۰.۱ شکل

په استوانه یي مختصاتوکې د P یوه نقطه چې د (ρ,Φ,z) پواسطه ښودل شوې په پام کې ونیسئ. درې واحد وکتورونه یعنې $\hat{e}_\rho$ ، $\hat{e}_\Phi$ او $\hat{e}_z$ په ترتیب سره د ρ ، Φ او z د تزاید په جهت رسم کړئ. دغه درې وکتورونه استوانه یي واحد وکتورونه بلل کیږي. $\hat{e}_\rho$ د x د محور سره د Φ زاویه ، د y محور سره $(90° - \Phi)$ زاویه او د z محور سره $90°$ زاویه جوړوي لکه چې په (۱.۲۰.۱) شکل کې ښودل شوي دي.

د $\hat{\mathbf{i}}$ او $\hat{\mathbf{j}}$ له مخې د $\hat{e}_\rho$ پیداکول

په (۱.۲۰.۱) شکل کې، څرنګه چې $\hat{e}_\rho$ د ρ د تزاید د جهت په امتداد وکتور دی، نو

$$\vec{\rho} = \rho\hat{e}_\rho$$

یا $$\hat{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho}$$

څرنګه چې $$\vec{\rho} = \hat{\imath}x + y\hat{\jmath}$$

مګر $x = \rho\cos\Phi$ او $y = \rho\sin\Phi$

$$\vec{\rho} = \hat{\imath}\rho\cos\Phi + \hat{\jmath}\rho\sin\Phi$$

د $\hat{e}_\rho$ او $\hat{e}_\Phi$ له مخې د $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ پیداکول

له دې ځایه $$\hat{e}_\rho = \frac{\hat{\imath}\rho\cos\Phi + \hat{\jmath}\rho\sin\Phi}{\rho}$$

$$\hat{e}_\rho = \hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi \qquad (۱.۲۰.۱)$$

د $\hat{\imath}$ او $\hat{\jmath}$ له مخې د $\hat{e}_\Phi$ پیداکول

څرنګه چې $\hat{e}_\Phi$ د x محور سره $(90° + \Phi)$ زاویه جوړوي

$$\hat{e}_\Phi = \hat{\imath}\cos(90° + \Phi) + \hat{\jmath}\sin(90° + \Phi)$$

$$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}sin\Phi + \hat{\jmath}cos\Phi \qquad (۲.۲۰.۱)$$

د $\hat{k}$ له مخې د $\hat{e}_z$ پیداکول

څرنګه چې $\hat{e}_z$ واحد وکتور د z محور د تزاید په جهت رسمیږي نود z دمحور سره موازي دی.

$$\therefore \qquad ...(۳.۲۰.۱) \qquad \hat{e}_z = \hat{k}$$

د Φ له مخې $\hat{\imath}$

د (۱.۲۰.۱) معادلې په $\cos\Phi$ او د (۲.۲۰.۱) معادلې په $(-\sin\Phi)$ کې ضربولو او بیا د دواړو له جمع کولو څخه لاس ته راوړو چې

$$cos\Phi.\hat{e}_\rho - \sin\Phi.\hat{e}_\Phi = \hat{\imath}(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi) + \hat{\jmath}(\sin\Phi\cos\Phi - \sin\Phi\cos\Phi)$$

$$\hat{\imath} = \cos\Phi.\hat{e}_\rho - \sin\Phi.\hat{e}_\Phi \qquad ...(۴.۲۰.۱)$$

د Φ له مخې $\hat{\jmath}$

د (۱.۲۰.۱) معادلې په $(\sin\Phi)$ او د (۲.۲۰.۱) معادلې په $(\cos\Phi)$کې ضربولو او بیا د دواړو له جمع کولو څخه لاس ته راوړو چې

$$\sin\Phi.\,\hat{e}_\rho + \cos\Phi\hat{e}_\Phi = i[\sin\Phi\cos\Phi - \sin\Phi\cos\Phi] + j\,[\sin^2\Phi + \cos^2\Phi]$$

$$\hat{j} = \hat{e}_\rho + \cos\Phi\hat{e}_\Phi\sin\Phi \qquad \ldots(۵.۲۰.۱)$$

څرنګه چې $\hat{e}_z$ واحد وکتور د z محور د تزاید په جهت رسمیږي یعني د z محور سره موازي دی.

$$\hat{k} = \hat{e}_z \qquad \ldots(۶.۲۰.۱)$$

۲۱.۱ په استوانه یي مختصاتو کې سرعت او تعجیل

فرضوو چې یوه ذره په فضا کې د حرکت په حال کې ده. فرض کړئ چې د t په وخت کې په $P(\rho,\Phi,z)$ نقطه کې ده لکه چې په (۱.۱۹.۱) شکل کې ښودل شوي دي. $\hat{e}_\rho$ ، $\hat{e}_\Phi$ او $\hat{e}_z$ واحد وکتورونه په پام کې ونیسئ چې په ترتیب سره د ρ ، Φ او z د تزاید په جهت رسم شوي دي. $\vec{r}$ شعاعي وکتور د کارتیزیني مختصاتو له مخې عبارت دی له

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

او په استوانه یي مختصاتو کې $x = \rho\cos\Phi$ ، $y = \rho\sin\Phi$ او $z = z$.

$$\therefore \qquad \vec{r} = \hat{\imath}\rho\cos\Phi + \hat{\jmath}\rho\sin\Phi + \hat{k}z \qquad \ldots(۱.۲۱.۱)$$

څرنګه چې

$$\hat{\imath} = \cos\Phi.\,\hat{e}_\rho - \sin\Phi\hat{e}_\Phi$$

$$\hat{\jmath} = \sin\Phi.\,\hat{e}_\rho + \cos\Phi\hat{e}_\Phi$$

$$\hat{k} = \hat{e}_z$$

له دې ځایه (۱.۲۱.۱) معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\vec{r} = \left(\cos\Phi.\,\hat{e}_\rho - \sin\Phi\hat{e}_\Phi\right)\rho\cos\Phi + \left(\sin\Phi.\,\hat{e}_\rho + \cos\Phi\hat{e}_\Phi\right)\rho\sin\Phi +$$
$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi) + z\hat{e}_z\, z\hat{e}_z$$

یا

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z \qquad \ldots(۲.۲۱.۱)$$

(الف) سرعت: د موقعیت وکتور تغیر نظر وخت ته د ذرې له سرعت څخه عبارت دی.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\hat{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}(z\hat{e}_z)$$

ځرنګه چې په استوانه يي مختصاتو کې $\hat{e}_\rho = \hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi$ او $\hat{e}_z = \hat{k}$ نو

$$\therefore \quad \vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\hat{\imath}\cos\Phi + \rho\hat{\jmath}\sin\Phi) + \frac{d}{dt}(\hat{k}z)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\hat{\imath}\rho\cos\Phi) + \frac{d}{dt}(\hat{\jmath}\rho\sin\Phi) + \frac{d}{dt}(\hat{k}z)$$

ځرنګه چې ρ او Φ دواړه متحولين دي، نو لرو چې

$$\vec{v} = \hat{\imath}(\dot{\rho}\cos\Phi - \rho\sin\Phi\dot{\Phi}) + \hat{\jmath}(\dot{\rho}\sin\Phi + \rho\cos\Phi\dot{\Phi}) + \hat{k}\dot{z}$$

يا

$$\vec{v} = \dot{\rho}(\hat{\imath}\,cos\Phi + \hat{\jmath}\,sin\Phi) + \rho\dot{\Phi}(-i\,sin\Phi + \hat{\jmath}cos\Phi) + \hat{k}\dot{z}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \dot{z}\hat{e}_z \qquad \ldots (۴.۲۱.۱)$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi = \hat{e}_\rho \\ -\hat{\imath}\,sin\Phi + \hat{\jmath}cos\Phi = \hat{e}_\Phi \\ \hat{k} = \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

يا

$$\vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\Phi + \vec{v}_z$$

داسې چې $\vec{v}_\rho = \dot{\rho}\hat{e}_\rho$ ، $\vec{v}_\Phi = \rho\dot{\Phi}\hat{e}_\rho$ او $\vec{v}_z = \dot{z}\hat{e}_z$ په ترتيب سره د ρ ، Φ او z د جهت په امتداد د سرعت مرکبې دي. د ذرې د سرعت اندازه عبارت ده له

$$V = \sqrt{(\vec{v}_\rho)^2 + (\vec{v}_\Phi)^2 + (\vec{v}_z\ \ )^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2} \qquad \ldots (۵.۲۱.۱)$$

(ب) تعجيل: د سرعت تغير نظر وخت ته د ذرې له تعجيل څخه عبارت دی.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \dot{z}\hat{e}_z\right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{e}_\rho) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi) + \frac{d}{dt}(\dot{z}\hat{e}_z)$$

يا

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\Phi}\hat{e}_\rho + \rho\ddot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \rho\dot{\Phi}\dot{\hat{e}}_\Phi + \ddot{z}\hat{e}_z + \dot{z}\hat{e}_z \qquad \ldots (۶.۲۱.۱)$$

د $\hat{e}_\rho$ ، $\hat{e}_\Phi$ او $\hat{e}_z$ قيمتونه عبارت دی له

$$\hat{e}_\rho = \hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi$$

$$\hat{e}_\Phi = -\hat{\imath}sin\Phi + \hat{\jmath}cos\Phi$$

$$\hat{e}_z = k$$

$$\dot{\hat{e}}_\rho = -\hat{\imath} sin\Phi\dot{\Phi} + \hat{\jmath} cos\Phi\dot{\Phi}$$ ∴

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\Phi}(-\hat{\imath} sin\Phi + \hat{\jmath} cos\Phi) = \dot{\Phi}\hat{e}_\Phi \qquad ...(۷.۲۱.۱)$$

او

$$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\hat{\imath}\cos\Phi\dot{\Phi} - \hat{\jmath}\sin\Phi\dot{\Phi}$$

یا

$$\dot{\hat{e}}_\Phi = -\dot{\Phi}(\hat{\imath}\cos\Phi + \hat{\jmath}\sin\Phi) = -\dot{\Phi}\hat{e}_\rho$$

$$\dot{\hat{e}}_z = 0 \qquad ...(۸.۲۱.۱)$$

په (۶.۲۱.۱) معادله کې د (۷.۲۱.۱) ، (۸.۲۱.۱) او (۹.۲۱.۱) معادلو په وضع کولو سره لرو چې

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + +\dot{\rho}\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \dot{\rho}\dot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \rho\ddot{\Phi}\hat{e}_\Phi + \rho\dot{\Phi}\dot{\hat{e}}_\Phi - \rho\dot{\Phi}^2\hat{e}_\rho + \ddot{z}\hat{e}_z + \ddot{z}\hat{e}_z + 0$$

$$\vec{a} = \hat{e}_\rho\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\Phi}^2\right) + \hat{e}_\Phi\left(2\dot{\rho}\dot{\Phi} + \rho\ddot{\Phi}\right) + \hat{e}_z\ddot{z} \qquad ...(۹.۲۱.۱)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\Phi + a_z \qquad ...(۱۰.۲۱.۱)$$

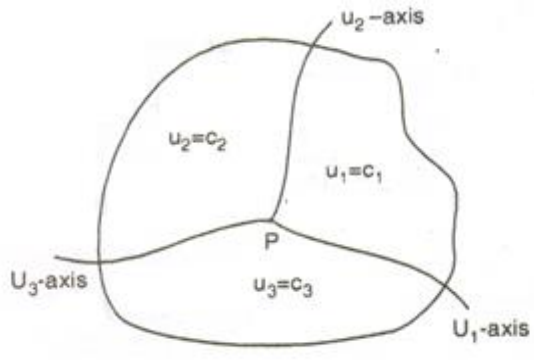
داسې چې $\vec{a}_\rho$ ، $\vec{a}_\Phi$ او $\vec{a}_z$ په ترتیب سره د ρ ، Φ او z د جهت په امتداد د تعجیل مرکبې دي.

د ذرې د تعجیل اندازه عبارت ده له

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left|\vec{a}_\rho\right|^2 + |\vec{a}_\Phi|^2 + |\vec{a}_z|^2}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\Phi}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\dot{\Phi} + \rho\ddot{\Phi}\right)^2 + \ddot{z}^2} \qquad ...(۱۱.۲۱.۱)$$

۲۲.۱ منحنی الخط مختصات



شکل ۱.۲۲.۱

په تیره برخه کې، مونږ کارتیزیني، کروي او استوانه یي مختصات وڅیړل چې د $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ ثابت واحد وکتورونو درلودونکي درې یو پر بل باندې عمود محورونه یي لرل. لیکن د مسئلې د حل کولو لپاره بله (اسانه) طریقه د هغو مختصاتو څخه کار اخیستنه ده چې دوه په دوه یو پر بل د عمود جهتونو په امتداد تغیر کوي. چې منحني الخط مختصات بلل کیږی.

له دې ځایه، منحني الخط مختصات هغه دي چې په هغه کې محورونه دوه په دوه یو پر بل باندی عمود او دوه په دوه یو پر بل د عمود جهتونو په امتداد تغیر کوي.

په عمومي توګه عمودي مختصات په (u_1, u_2, u_3)سره ښودل کیږي. چی د کرښو په اوږدو د منحني ګانو په شکل تغیر کوي لکه په (۱.۲۲.۱) شکل کې چی ښودل شوي دي.او د همدې علت له امله منحنی الخط مختصات بلل کیږي. دوی ته په ترتیب سره U_1 محور، U_2 محور او U_3 محور ویل کیږي. په نوموړي سیستم کې د مختصاتو سطحې په لاندی توګه معرفي شوي دي.

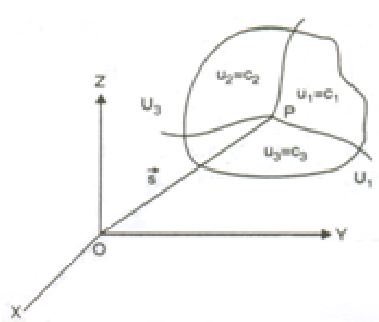
(i) $\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2$ سطحه: $u_3 = \mathrm{c}_3$

$\mathrm{U}_1\mathrm{U}_3$ سطحه: $u_2 = \mathrm{c}_2$

$\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3$ سطحه: $u_1 = \mathrm{c}_1$

داسې چې $\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2$, او c_3 ثوابت دي. د مختصاتو د سطحو تقاطع د مختصاتو محورونه ورکوي.

د منحني الخط مختصاتو سیستم واحد وکتورونه



شکل ۲.۲۲.۱

فرض کړئ چې د P نقطې د موقعیت وکتور په منحنی الخط مختصاتو سیستم کې په $\vec{\mathrm{s}}$ سره ښودل شوی (د P نقطه د مختصاتو د درې سطحو د تقاطع نقطه ده) له دې ځایه د P نقطه په کارتیزیني مختصاتو کې د (x, y, z)او په منخني الخط مختصاتو کې د (u_1, u_2, u_3) پواسطه مشخص کیږي. (۲.۲۲.۱) شکل

$$\vec{\mathrm{s}} = \vec{\mathrm{s}}\ (u_1, u_2, u_3)$$

یا د U_1 په محور مماس، چې په هغه کې u_2 او u_3 ثوابت دي. عبارت دی له

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1}$$

∴ د U_1 محور په اوږدو واحد مماسي وکتور عبارت دی له

$$\hat{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1}}{\left|\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1}\right|}$$

یا
$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1} = \left|\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1}\right| \hat{e}_1$$

یا
$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1} = h_1 \hat{e}_1$$

داسې چې
$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1}\right|$$

په عین ډول، لیکلی شو چې:

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_2} = h_2 \hat{e}_2$$

او
$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u_3} = h_3 \hat{e}_3$$

داسې چې $\hat{e}_1$ ، $\hat{e}_2$ ، $\hat{e}_3$ واحد وکتورونه او h_1،h_2،h_3 د منحني الخط مختصاتو سیستم پیمانه يي فکتورونه بلل کیږي.

عمودي منحني الخط مختصاتو سیستم

که $\hat{e}_1 \hat{e}_2$, او $\hat{e}_3$ واحد وکتورونه دوه په دوه یو پر بل عمود وي، نو د منحني الخط مختصاتو سیستم عمودي منحنی الخط مختصاتو سیستم بلل کیږي او د دغسې یو سیستم لپاره، لرو چې

$$\hat{e}_1 . \hat{e}_1 = \hat{e}_2 . \hat{e}_2 = \hat{e}_3 . \hat{e}_3 = 1$$

او
$$\hat{e}_1 . \hat{e}_2 = \hat{e}_2 . \hat{e}_3 = \hat{e}_3 . \hat{e}_1 = 0$$

د قوس اوږدوالی او د هغه مرکبې

څرنګه چې
$$\vec{S} = \vec{S}\,(u_1, u_2, u_3)$$

∴
$$d\vec{s} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{s}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{s}}{\partial u_3} du_3$$

خو $\frac{\partial\vec{s}}{\partial u_1} = h_1\hat{e}_1$ ، $\frac{\partial\vec{s}}{\partial u_2} = h_2\hat{e}_2$ ، $\frac{\partial\vec{s}}{\partial u_3} = h_3\hat{e}_3$

∴ $d\vec{s} = h_1 du_1\hat{e}_1 + h_2 du_2\hat{e}_2 + h_3 du_3\hat{e}_3$

د $d\vec{s}$ اندازه د قوس اوږدوالی بلل کېږي او په ds سره ښودل کېږي.

∴ $ds = \left|d\vec{s}\right| = [d\vec{s}.d\vec{s}]^{\frac{1}{2}}$

یا(۱.۲۲.۱) ... $ds = ({h_1}^2 d{u_1}^2 + {h_2}^2 d{u_2}^2 + {h_3}^2 d{u_3}^2)^{\frac{1}{2}}$

∴] $[\hat{e}_1.\hat{e}_2 = \hat{e}_2.\hat{e}_3 = \hat{e}_3.\hat{e}_1 = 0$

دا د قوس د اوږدوالي غوښتل شوې افاده ده.

د کارتیزیني مختصاتو د اندازې فکتورونه

په کارتیزیني مختصاتو کې د یوې نقطې د موقعیت وکتور $\vec{s}$ عبارت دی له

$$\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

∴ $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

یا $ds = \left|d\vec{s}^2\right|^{\frac{1}{2}} = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}$

یا (I) ... $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

همدارنګه په منحني الخط مختصاتو کې د قوس اوږدوالی عبارت دی له

$$ds^2 = \left({h_1}^2 d{u_1}^2 + {h_2}^2 d{u_2}^2 + {h_3}^2 d{u_3}^2\right) \quad \text{... (II)}$$

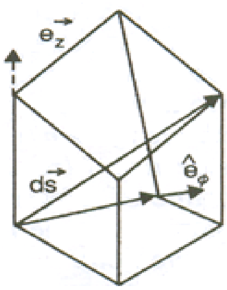
د (I)او(II)معادلو په پرتله کولو، لاس ته راوړو چې

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = 1$$

$$du_1 = dx \qquad du_2 = dy \qquad du_3 = dz$$

$$\hat{e}_1 = \hat{i} \qquad \hat{e}_2 = \hat{j} \qquad \hat{e}_3 = \hat{k}$$

د استوانه يي مختصاتو د اندازې فکتور



شکل ۳.۲۲.۱

په **استوانه** يي مختصاتوسيستم کې، لرو چې

$$x = \rho \cos \Phi$$

$$y = \rho \sin \Phi$$

$$z = z$$

$\therefore$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho \cos \Phi - \rho \sin \Phi \, \mathrm{d}\Phi$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\rho \sin \Phi + \rho \cos \Phi \, \mathrm{d}\Phi$$

$$dz = dz$$

ځرنګه چې

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \qquad \ldots (۲.۲۲.۱)$$

داسې چې $(\mathrm{d}s)^2$ د هغې متوازي السطوح د قطر مربع ده چې د دريو ضلعو اوږدوالی يې $\mathrm{d}y, \mathrm{d}x$ او $\mathrm{d}z$ دی.

په (۲.۲۲.۱) معادله کې د $\mathrm{d}y, \mathrm{d}x$ او $\mathrm{d}z$ قيمت په وضع کولو سره لرو چې

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi) + \rho^2\mathrm{d}\Phi^2(\sin^2\Phi + \cos^2\Phi) +$$
$$2\rho\mathrm{d}\rho\cos\Phi\sin\Phi + \rho\mathrm{d}\rho\sin\Phi\cos\Phi + \mathrm{d}z^2$$

يا

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\Phi^2 + \mathrm{d}z^2 \qquad \ldots (III)$$

په منحني الخط مختصاتو کې اړوند افاده عبارت ده له

$$\mathrm{d}s^2 = {h_1}^2\mathrm{d}{u_1}^2 + {h_2}^2\mathrm{d}{u_2}^2 + {h_3}^2\mathrm{d}{u_3}^2 \qquad \ldots (IV)$$

د(III) او(IV)معادلو له پرتله کولو څخه لرو چې

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = 1$$

$$\mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}\rho \qquad \mathrm{d}u_2 = \mathrm{d}\Phi \qquad \mathrm{d}u_3 = \mathrm{d}z$$

او

$$\mathrm{e}_1 = \hat{e}_\rho \qquad \mathrm{e}_2 = \hat{e}_\theta \qquad \mathrm{e}_3 = \hat{e}_z$$

د کروي مختصاتو سیستم د اندازې فکتورونه

په کروي مختصاتو سیستم کې لرو چې

$$x = r\sin\theta\cos\Phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\Phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\therefore \quad dx = dr\sin\theta\cos\Phi + r\cos\theta d\theta\cos\Phi - r\sin\theta\sin\Phi d\Phi$$

$$dy = dr\sin\theta\sin\Phi + r\cos\theta d\theta\sin\Phi + r\sin\theta\cos\Phi d\Phi$$

$$dz = dr\cos\theta - r\sin\theta d\Phi$$

څرنګه چې $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

د dx، dy او dz د قیمتونو په وضع کولو سره لروچې

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\Phi^2 \qquad \ldots (V)$$

په منحني الخط مختصاتو کې اړوند افاده عبارت ده له

$$ds^2 = {h_1}^2 d{u_1}^2 + {h_2}^2 d{u_2}^2 + {h_3}^2 d{u_3}^2 \qquad \ldots (VI)$$

د (V) او (VI) معادلو له پرتله کولو څخه لرو چې

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = r\sin\theta$$

$$du_1 = dr \qquad du_2 = d\theta \qquad du_3 = d\Phi$$

او $$e_1 = \hat{e}_r \qquad e_2 = \hat{e}_\theta \qquad e_3 = \hat{e}_\Phi$$

۲۳.۱ مأخذي دستګاه (Frame of Reference)

ددې لپاره چې ټولې فزیکي پروسې وڅېړو مونږ د هغوی د موقعیت، سرعت، په هغوی باندی د عاملو قواوو او همدارنګه د هغه ځای چې هلته مشاهده کېږي او دا چې مشاهده کوونکی څه کوي، سمې مشاهدې ته اړتیا لرو.

څرنګه چې ټول حرکتونه نسبتي دي نو ددې لپاره چې د یو جسم موقعیت توضیح کړو مونږ باید د بل جسم دستګاه چې ثابته فرض کړل شوې په پام کې ونیسو.

د مختصاتو سیستم چې نظر هغه ته مونږ د یوې ذرې موقعیت یا حرکت اندازه کوو مأخذي دستګاه بلل کېږي. مستطیلي کارتیزیني مختصاتو سیستم د دغسې مأخذي دستګاه د یوې خیالي بیلګې په

توګه وړاندې کیدای شي. په عمومي توګه د حرکت د څیړلو په موخه د یو مأخذي سیستم په انتخابولو کې، ځیني جسمونه د یوه مناسب مأخذي سیستم په توګه عمل کوی خو نور بیا ډیر ګټور نه دي.

د مأخذي د ستګاوو دوه ډوله، عطالتي اوغیرعطالتی دستګاوې، په کایناتو کې د حرکت مختلف ډولونه توضیح کوي.

۲۴.۱ عطالتی مأخذي دستګاه

یوه مطلقه عطالتي مأخذي دستګاه هغه مأخذي دستګاه ده چې نظر مطلقې فضا ته په مطلقه توګه د سکون په حالت کې وي. خو مونږ پوهیږو چې په کائناتو کې هیڅ جسم د سکون په حالت کې شتون نه لري. آن تردې چې زمونږ کهکشان هم مطلقه فضا نه ده ځکه چې زمونږ د ستورو کهکشان د یو محور په شاوخوا دوران کوي او ټول کهکشانونه یوله بل څخه په تیښته کې دي. له دې ځایه د یوې مطلقې مأخذي عطالتي دستګاه تعریف سم نه دی.

په عملي توګه، عطالتي مأخذي دستګاه هغه ده چې په هغې کې د عطالت قانون صدق وکړي. له دې ځایه، د مختصاتو هغه سیستم چې په هغه کې د نیوټن د حرکت قوانین ومنل شي عطالتي مأخذي د ستګاه بلل کیږي او هره مأخذي دستګاه چې نسبت یوې عطالتي دستګاه ته په یو نواخت سرعت سره د حرکت په حالت کې یا د سکون په حالت کې وي په خپله عطالتي ده.

د نیوټن د حرکت له دویم قانون څخه $\vec{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d}{dt}(\vec{v}) = m\vec{a}$

که $v = 0$ یا ثابت $= v$ $\qquad \vec{\mathrm{F}} = 0$

$\vec{a} = 0$ یا $m\vec{a} = 0$

له دې ځایه، عطالتي مأخذي دستګاه غیر تعجیلي عطالتي مأخذي دستګاه هم بلل کیږي.

۲۵.۱ غیر عطالتی مأخذي دستګاه

تعجیلي مأخذي دستګاه غیر عطالتي مأخذي دستګاه بلل کیږي. په بله مانا، مأخذي دستګاه چې په هغې کې د عطالت قانون صدق نه کوي غیر عطالتي مأخذي دستګاه بلل کیږي. له دې ځایه په غیر عطالتي مأخذي دستګاه کې د نیوټن د حرکت قوانین نه منل کیږي. ټولې مأخذي تعجیلي دستګاوې او دوران کوونکې دستګاوې غیر عطالتي دستګاوې دي. اوس پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا ځمکه (یا د مختصاتو هغه سیستم چې په ځمکې باندې ثابت وي) یوه عطالتي دستګاه ده یا نه ده. ځواب په صحیح معنا داسې ده، ځمکه غیر عطالتي دستګاه ده ځکه ځمکه د خپل محور په شاوخوا او همدارنګه د لمر په شاوخوا دوران کوي نو تعجیل اخلي او غیر عطالتي مأخذي دستګا ده. خو د ځمکې د خپل دوران له امله تعجیل (د ځمکې په سطحه د یوې ذرې مرکز ته د جذب تعجیل $3.4\mathrm{x}10^{-2}\mathrm{ms}^{-2}$ او د کشش له امله د لمر په لوري د ځمکې مرکز ته د جذب تعجیل

$6x10^{-4}ms^{-2}$) د کشش له امله د $9.8ms^{-2}$ په پرتله ډیر کوچنی دی.نو د ټولو عملي هدفونو لپاره مونږ ځمکه غیر عطالتي مأخذي دستگاه په پام کې نیسو.

۱۲.۱ مثال

د ځمکې د خپل دوراني حرکت له امله مرکز ته د جذب تعجیل پیداکړئ.

حل. پوهیږو چې ځمکه په $1.49x10^{11}m$شعاع لرونکي مدار کې د لمر په شاوخوا دوران کوی او د وخت پریود یې $T =$ یوکال $= 365x24x60x60$ s.

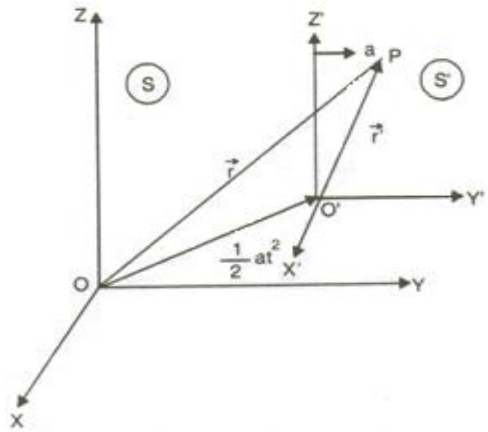
$$\therefore \quad V = \frac{2\pi r}{T} = 2\,x\frac{22}{7}x\frac{1,49x10^{11}}{365x24x60x60} = 3x10^{4}ms^{-1}$$ د ځمکې مداري سرعت

$$\therefore \quad a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{9x10^{8}}{1.49\;x10^{11}} = 6x10^{-3}ms^{-2}$$ د ځمکې مرکزته د جذب تعجیل

۲۶.۱ غیر عطالتي دستگاوی او خیالي قواوی (Fictitious Forces)

څرنګه چې عطالتي دستگاوې غیر تعجیلی او غیر عطالتي دستگاوې تعجیلي دي نو په عطالتي دستگاه کې په یوې ځانګړې ذرې هیڅ قوه اغیزه نه کوي او په غیر عطالتی دستګاه کې په یوې ځانګړې ذرې یوه قوه اغیزه کوي چې خیالي قوه یا کاذبه قوه(Pseudo Force) بلل کیږي. **هغه قوه چې په غیر عطالتي دستګاه کې څرګندیږي مګر په عطالتی دستګاه کې صفر ده خیالي قوه بلل کیږي.** خیالی قوه په دواړو انتقالي او همدارنګه په دوراني غیر عطالتي دستگاوو کې څرګندیږي. د خیالی قوې جهت همیشه د واقعي قوې مخالف وي. اوس به مونږ (i) د انتقالي حرکت غیر عطالتي دستګاه (ii) د دوراني حرکت غیر عطالتي دستګاه په تفصیل سره توضیح کړو.

۲۷.۱ خیالي قوه په تعجیلي حرکت لرونکي غیر عطالتي دستګاه کې



۱.۲۷.۱ شکل

د S یوه عطالتي دستګاه د O په مبدا لرونکي فضا کې ثابته په پام کې نیسو لکه چې په ۱.۲۷.۱ شکل کې ښودل شوي دي.′S غیر عطالتي دستګاه چې a تعجیل او′O مبدا لري په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې په $t = 0$ کې د S او′S مبداوې منطبق کېږي.

په فضا کې یوه نقطه په پام کې ونیسئ چې په P نقطه کې موقعیت لری نظر O مبدا ته یې د موقعیت وکتور$\vec{r}$ او′O مبدا ته یې د موقعیت وکتور $\overrightarrow{r`}$ دی.

څرنګه چې ′S په a تعجیل سره حرکت کوي نو ځای بدلون $\overline{OO`} = \frac{1}{2}at^2$

په ΔO O`P کې لروچې

$$\overline{OP} = \overline{OO`} + \overrightarrow{O`P}$$

یا $$\vec{r} = \overrightarrow{r`} + \frac{1}{2}at^2 \qquad \ldots (۱.۲۷.۱) \ldots$$

د۱.۲۷.۱ معادلې د دواړوخواو نظر t ته له مشتق اخیستلو څخه، لرو چې

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r`}}{dt} + \frac{1}{2}\vec{a}2t$$

یا $$\vec{v}_s = \overrightarrow{v'}_s + \vec{a}t \qquad \ldots (۲.۲۷.۱) \ldots$$

بیا د ۲.۲۷.۱ معادلې د دواړو خواو نظر t ته له مشتق اخیستلو څخه، لرو چې

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v\prime}_s}{dt} + \vec{a}$$

یا $$\vec{a}_s = \overrightarrow{a'}_s + \vec{a}$$

که m د ذرې کتله وي، نو لرو چې.

$$m\vec{a}_s = m\overrightarrow{a'}_s + m\vec{a}$$

$$\vec{F}_S = \overrightarrow{F'}_S + F$$

$$\overrightarrow{F'}_S = \vec{F}_S - F \qquad ... (۳.۲۷.۱)$$

داسې چې $\vec{F} = m\vec{a}$ هغه قوه ده چې په S عطالتي دستګاه کې په ذره عمل کوي او $\overrightarrow{F'} = m\overrightarrow{a'}$ په ذره باندې هغه قوه ده چې د S' دستګاه، چې نظرS دستګاه ته د a په یونواخت تعجیل حرکت کوي، لیدونکي په واسطه لیدل کیږي. له دې ځایه، لاس ته راوړو چې په ذره باندې عامله قوه د S او S' دستګاوو د لیدونکي په واسطه په مختلف شکل اندازه کیږي.

څرنګه چې S دستګاه عطالتي ده نو که مونږ د P ذره ځانګړې (Isolated) فرض کړو، نو هیڅ واقعي قوه پرې اغیزه نه کوي.

$$\therefore \qquad \overrightarrow{F_s} = 0$$

نو (۳.۲۷.۱) معادله به

$$\overrightarrow{F'}_S = -\vec{F}$$

دغه قوه خیالي قوه بلل کیږی (چې له بهر څخه یې عمل نه دی کړی مګر یواځې دS' دستګاه له امله ، چې نظر S دستګاه ته تعجیلي شوې ده رامنځ ته کیږی) په S' دستګاه کې په P ذره باندی د $-\vec{F}$ قوه اغیزه کوي په داسې حال کې چې په S دستګاه کې په ذره باندی هیڅ قوه اغیزه نه کوي.

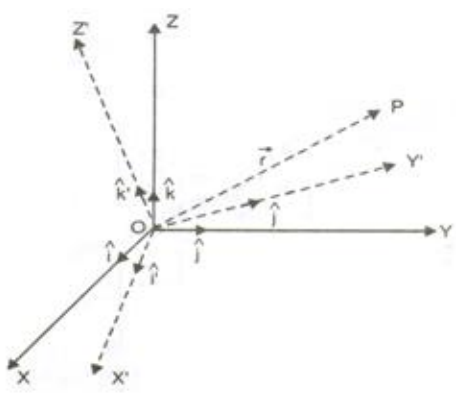
له دې ځایه لاس ته راوړو چې خیالي قوه یوازې په تعجیلي دستګاه کې عمل کوي او په غیر تعجیلي دستګاوو کې نه څرګندیږي.

۲۸.۱ په دوراني حرکت لرونکي غیر عطالتي دستګاه کې خیالي قوه

پیچي قوه (Coriolis force) اومرکز ته د جذب قوه

S او S' دوه دستګاوې په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې S دستګاه ثابته او S' دستګاه په ω زاویوي سرعت سره دوران کوي.

د دواړو دستګاوو مبدا 0 یو پر بل منطبقه په پام کې ونیسئ لکه چې په (۱.۲۸.۱) شکل کې ښودل شوي دي.



۱.۲۸.۱ شکل

فرض کړئ چې په S دستګاه کې $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ د XY ، او Z محور په امتداد واحد وکتورونه دي او په S' دستګاه کې $\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$ او $\hat{k}'$ د X'Y' ، او Z' محور په امتداد واحد وکتورونه دي.

که په هره لحظه کې د P ذرې د موقعیت وکتور $\vec{r}$ وي نو

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'$$

څرنګه چې S' دستګاه دوران کوي نو $\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$ او $\hat{k}$ ثوابت نه دی.

$$\therefore \quad \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'\right)$$

یا

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \left(\frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'\right) + \left(x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)$$

که د P ذره د دوران کوونکي دستګاه S' له پاسه حرکت وکړي، نو $\left(\frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'\right)$ حد نظر S' متحرکې د ستګاه ته دP ذرې سرعت ښيي او په $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$ سره ښودل کیږي.

$$\therefore \quad \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_R + \left(x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right) \quad \ldots (۱.۲۸.۱)$$

څرنګه چې د ذرې خطي سرعت $\vec{v}$ د ذرې د زاویوي سرعت ω سره لاندې اړیکه لري

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

یا

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \left[\because \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d\hat{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}' \quad , \quad \frac{d\hat{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\jmath}' \quad , \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

نو د (۱.۲۸.۱) معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_R + x'(\vec{\omega} \times \hat{\imath}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}')$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_R + \vec{\omega} \times (x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}')$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_F = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \ldots (۲.۲۸.۱)$$

دا رابطه د ټولو وکتورونو لپاره اعتبار لري.

یا

$$\vec{v}_F = \vec{v}_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \ldots (۳.۲۸.۱)$$

داسې چې $\vec{v}_{\mathrm{F}} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}\right]$ نظر S ثابتې دستګاه ته د ذرې سرعت او $\vec{v}_{\mathrm{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}\right]$ نظر S' دوران کوونکې دستګاه ته د ذرې سرعت دی.

په اېرېټرې شکل کې، (۲.۲۸.۱) معا دله په لاندی ډول لیکل کیدای شی.

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{F}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{F}} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{F}})$$

څرنګه چې پورتنی نتیجه د ټولو وکتورونو لپا ره سمه ده نو د سرعت وکتور لپاره هم سمه ده.

له دې ځایه مونږ پورتنی رابطه په لاندې شکل لیکلی شو.

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{F}}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{F}} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{F}}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{R}} + (\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{F}}) \qquad \text{... (۴.۲۸.۱)}$$

دپورتنی معا دلې په ښی طرف کې د (۳.۲۸.۱) معادلې په استعمالولو سره لرو چې

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{F}}}{\mathrm{dt}}\right]_{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\vec{v}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}] + \vec{\omega} \times [\vec{v}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}]$$

یا
$$\vec{a}_{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

یا
$$\vec{a}_{\mathrm{F}} = \vec{a}_{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

څرنګه چې ω ثابت دی نو $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} = 0$ او $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}}$

$\therefore$
$$\vec{a}_{\mathrm{F}} = \vec{a}_{\mathrm{R}} + 0 + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

یا
$$\vec{a}_{\mathrm{F}} = \vec{a}_{\mathrm{R}} + 0 + 2(\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

یا
$$\vec{a}_{\mathrm{R}} = \vec{a}_{\mathrm{F}} - 2(\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

که m د ذرې کتله وي نو

$$m\vec{a}_{\mathrm{R}} = m\vec{a}_{\mathrm{F}} + [-2m(\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{R}})] + m[-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \quad \text{... (۵.۲۸.۱)}$$

داسې چې

$\mathrm{m}\vec{a}_{R} =$ په دوران کوونکې دستګاه کې په ذرې باندې قوه

$\mathrm{m}\vec{a}_{\mathrm{F}} =$ عطالتي یا په ذرې باندې واقعي قوه

د $\vec{\omega}$ او $\vec{v}_R$ له امله پیچي قوه = $[-2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)]$

او یوازې هغه وخت څرګندیږي چې کله ذره په دوران کوونکې دستګاه کې د حرکت کولو په حالت کې وي.

د $\vec{\omega}$ له امله له مرکز څخه د فرار قوه = $m[-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]$ =

او یوازې هغه وخت څرګندیږي چې سیستم دوران کوي.

۱۳.۱ مثال. په $5ms^{-2}$ تعجیل لرونکې مأخذي دستګاه کې چې په ځمکه باندې عموداً ښکته د حرکت په حال کې ده په 5kg کتله لرونکې جسم باندې عامله خیالي قوه او مجموعي قوه محاسبه کړئ.

حل. $m = 5\text{kg}$ ، $\vec{a} = 5ms^{-2}$ (ښکته خوا ته)

په جسم باندې عامله خیالي قوه عبارت ده له

$$\mathrm{F} = -ma = -5 \times 5 = -25\mathrm{N}$$ (ښکته خوا ته)

$$\mathrm{F} = 25\mathrm{N}$$ (پورته خوا ته)

د جسم وزن ښکته خوا ته عمل کوي

$$\mathrm{F} = mg = 5 \times 9.8 = 49\mathrm{N}$$ (ښکته خوا ته)

∴ په جسم باندې عامله مجموعي قوه عبارت ده له

$$\mathrm{F} = m\vec{g} + (-m\vec{a}) = 49 - 25 = 24$$ (ښکته خوا ته)

۱۴.۱ مثال. یو سړی په یوه راکټ کې چې په $4g$ تعجیل سره پورته خوا ته روان دی خپل وزن $300g$ ثبت کوي. په ځمکه باندې د هغه اصلي وزن پیدا کړئ.

حل. S' له راکټ سره نښتي دستګاه په پام کې ونیسئ.

∴ په S' دستګاه کې قوه عبارت ده له $\mathrm{F}'_s = \mathrm{F}_s - \mathrm{F}$

داسې چې F هغه قوه ده چې د ځمکې عطالتي دستګاه کې ثبت شوې ده.

یا $\mathrm{F}_s = \mathrm{F}'_s + \mathrm{F}$

∴ $mg = 300g + m(-4g) = 300g - 4mg$

یا $5mg = 300g$

یا $m = 60kg$

او په ځمکه باندې یې اصلي وزن $= 60kgf$

۱۵.۱ مثال. $80kg$ سړی په لفټ $(elevator)$ کې ولاړ دی. د سړي اغیزمن وزن محاسبه کړئ کله چې لفټ حرکت کوي.

(i) پورته خوا ته په $4ms^{-2}$ تعجیل سره

(ii) ښکته خوا ته په $4ms^{-2}$ تعجیل سره

حل. S' له لفټ سره نښتې دستګاه په پام کې ونیسئ.

(i) (ښکته خوا ته) $= -ma = -80 \times (-4) = 320\text{N}$ په سړي باندې عامله خیالي قوه

د سړي وزن $= mg = 80 \times 9.8 = 76\text{N}$

$\therefore$ د سړي اغېزمن وزن $= 320 + 76 = 396\text{N}$

(ii) په سړي باندې عامله خیالي قوه

$\text{F} = -ma = -80 \times (4) = -320\text{N}$ (ښکته خوا ته)

یا $\text{F} = 320\text{N}$ (پورته خوا ته)

د سړي وزن $= mg = 80 \times 9.8 = 76\text{N}$ (ښکته خوا ته)

$\therefore$ د سړي اغېزمن وزن $= 320 - 76 = 244\text{N}$

۱۶.۱ مثال. که د دستګاه زاویوي سرعت $10\ rads^{-1}$ وي په $0.1kg$ کتله باندې چې د دوراني سیستم له محور څخه په $0.1m$ فاصله کې واقع ده پیچچي قوه پیدا کړئ.

حل. $m = 0.1kg$ ، $\omega = 10\ rads^{-1}$ ، $r = 0.1m$ راکړل شوي دي.

$\therefore$ پیچچي قوه $= |-2m(\vec{\omega} \times \vec{v})|$

$$= 2m\omega v \sin 90^\circ = 2m\omega r\omega \qquad [\because\ v = r\omega, \sin 90^\circ = 1]$$

$$= 2m\omega^2 r$$

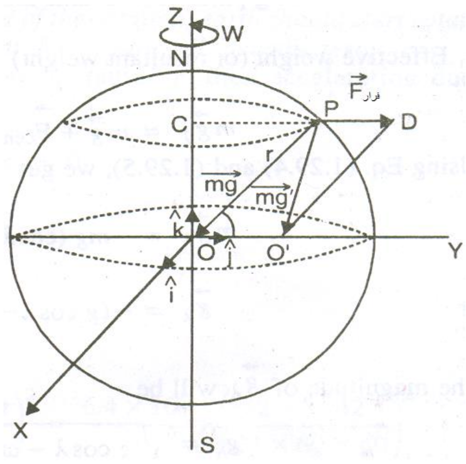
$$= 2 \times 0.1 \times 100 \times 0.1$$

$$= 2\text{N}$$

۲۹.۱ د ځمکې د دوران له امله د مرکز څخه د فرار د قوې اغېز

د عرض البلد له امله د g تغير

د ځمکې په سطحه په يوه موقعيت کې عرض البلد د هغې زاويې په توګه تعريف کېږي چې د نوموړې نقطې او د ځمکې د مرکز نښلونکی خط يې د استوا له سطحې سره جوړوي.



۱.۲۹.۱ شکل

ځمکه د خپل محور په شاوخوا له لويديځ څخه ختيځ ته په $\vec{\omega}$ زاويوي سرعت سره دوران کوي.

د P په نقطه کې يوه ذره د m په کتله چې د عرض البلد زاويه يې λ ده په پام کې ونيسئ لکه په (۱.۲۹.۱) شکل کې چې ښودل شوې ده. په P کې پرته ذره د $\vec{\omega}$ په زاويوي سرعت د PC شعاع په دايره باندې دوران هم کوي.

د ځمکې زاويوي سرعت عبارت دی له

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} \qquad \dots (۱.۲۹.۱)$$

له O مبدا څخه د ذرې د موقعيت وکتور عبارت دی له

$$\vec{r} = (r\cos\lambda)\hat{\jmath} + (r\sin\lambda)\hat{k} \qquad \dots (۲.۲۹.۱)$$

د $\vec{r}$ په امتداد $\hat{e}_r$ واحد وکتور عبارت دی له

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{r(\cos\lambda\hat{\jmath}+\sin\lambda\hat{k})}{r} = \cos\lambda\,\hat{\jmath} + \sin\lambda\,\hat{k} \qquad \dots (۳.۲۹.۱)$$

اوس هغه قوې چې P کې د m کتله باندې عمل کوي عبارت دي له

(i) د PO په امتداد د جاذبې $(m\vec{g})$ قوه.

(ii) د PD په امتداد د ځمکې د دوران له امله له مرکز څخه د فرار قوه.

په P کې د عرض البلد په λ زاويه کې د جاذبې قوه عبارت ده له

$$m\vec{g} = mg(-\vec{e}_r) = -mg\vec{e}_r$$

يا

$$m\vec{g} = -mg\left(\cos\lambda\,\hat{\jmath} + \sin\lambda\,\hat{k}\right) \qquad \dots (۴.۲۹.۱)$$

او له مرکز ښخه د فرار قوه عبارت ده له

$$F_{\text{له مرکز ښخه د فرار}} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -m\omega\hat{k} \times \left[\omega\hat{k} \times (\cos\lambda\,\hat{\jmath} + \sin\lambda\,\hat{k})\right]$$

$$= -m\omega^2 r\hat{k} \times \left[\cos\lambda\left(\hat{k} \times \hat{\jmath}\right) + \sin\lambda\,(\hat{k} \times \hat{k})\right]$$

$$= -m\omega^2 r\hat{k} \times [\cos\lambda\,(-\hat{\imath}) + 0]$$

یا

$$[\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \because]$$

$$F_{\text{له مرکز ښخه د فرار}} = m\omega^2 r\cos\lambda\,\hat{\jmath} \qquad \ldots (۵.۲۹.۱)$$

دا قوه د PD په امتداد د Y –محور سره موازي عمل کوي.

∴ په P کې د $\overrightarrow{PO'}$ په امتداد د m کتله باندې عامل اغیزمن وزن (یا محصله وزن) عبارت دی له

$$m\vec{g}_\lambda = mg + F_{\text{له مرکز ښخه د فرار}}$$

د (۴.۲۹.۱) او (۵.۲۹.۱) معادلو په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$m\vec{g}_\lambda = -mg\left(\cos\lambda\,\hat{\jmath} + \sin\lambda\,\hat{k}\right) + m\omega^2 r\cos\lambda\,\hat{\jmath}$$

یا

$$\vec{g}_\lambda = -(g\cos\lambda - \omega^2 r\cos\lambda)\hat{\jmath} - g\sin\lambda\,\hat{k}$$

د $\vec{g}_\lambda$ اندازه عبارت ده له

$$g_\lambda = \sqrt{(g\cos\lambda - \omega^2 r\cos\lambda)^2 + (g\sin\lambda)^2}$$

$$= g\left[\cos^2\lambda + \frac{\omega^4 r^2}{g^2}\cos^2\lambda - \frac{2\omega^2 r}{g}\cos^2\lambda + \sin^2\lambda\right]^{1/2}$$

$$= g\left[1 - \frac{2\omega^2 r}{g}\cos^2\lambda + \frac{\omega^4 r^2}{g}\cos^2\lambda\right]^{1/2} \qquad [\cos^2\lambda + \sin^2\lambda = 1 \quad \because]$$

دا چې $1 \gg \frac{\omega^2 r}{g}$ ، نو له هغه حد ښخه چې ω^4 لري صرف نظر کېږي.

$$\left[\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{1}{291} \ll 1 \quad \because\right]$$

$$\therefore \qquad g_\lambda = g\left[1 - \frac{2\omega^2 r}{g}\cos^2\lambda\right]^{1/2}$$

د باینومیل قضــیې په اســتعمال او له هغو حدونو څخه چې د ω^2 څخه لوړ توان لري په صــرف نظر، لاس ته راوړو چې

$$g_\lambda = g\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2\omega^2 r}{g}\cos^2\lambda\right)$$

یا

$$g_\lambda = g - r\omega^2\cos^2\lambda \qquad \dots (۶.۲۹.۱)$$

ځانګړي حالتونه

(i) په استوا کې، $\lambda = 0$

$$\therefore \qquad g_e = g - r\omega^2 \qquad \dots (۷.۲۹.۱)$$

(ii) په قطب کې، $\lambda = 90^\circ$

$$\therefore \qquad g_p = g \qquad \dots (۸.۲۹.۱)$$

په (۷.۲۹.۱) معادله کې د (۸.۲۹.۱) معادلې له وضع کولو څخه لاس ته راوړو چې

$$g_e = g_p - r\omega^2 \qquad \dots (i)$$

یعنې

$$g_e < g_p$$

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې د جاذبې له امله تعجیل په استوا کې اعظمي او په قطب کې اصغري دی او د g قیمت د عرض البلد په کمیدو سره کمیږي.

۱۷.۱ مثال. ځمکه باید د اوسني دوران له چټکتیا څخه څومره تیز دوران شروع کړي تر څو په استوا کې یې د جاذبې له امله اغیزمن تعجیل صفر شي.

ځواب. که د ځمکې چې شعاع یې r ده د دوران چټکتیا ω وي نو په استوا کې د جاذبې له امله تعجیل عبارت دی له

$$g_e = g - r\omega^2 \qquad \dots (i)$$

ω_1 هغه وخت چې $g = 0$ وي د ځمکې د دوران چټکتیا په پام کې ونیسئ. نو (i) معادله به

$$0 = g - r{\omega_1}^2$$

یا $$r{\omega_1}^2 = g$$

یا $$\frac{r{\omega_1}^2}{g} = 1 \qquad \dots(ii)$$

ځرنګه چې $$\frac{r\omega^2}{g} = \frac{6.4\times10^6}{9.8}\times\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2 = \frac{6.4\times10^6}{9.8}\times\left(\frac{2\times3.142}{24\times60\times60}\right)^2$$

یا $$\frac{r\omega^2}{g} = \frac{1}{291} \qquad \dots(iii)$$

په (iii) باندې د (ii) له ویشلو څخه لاس ته راوړو چې

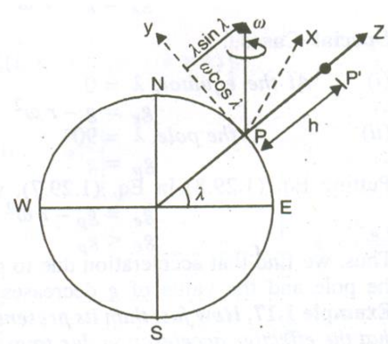
$$\frac{r{\omega_1}^2/g}{r\omega^2/g} = 291$$

یا $$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = 291$$

یا $$\frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{291} = 17$$

یا $$\omega_1 = 17\omega$$

له دې ځایه، ځمکه باید په داسې زاویوي چټکتیا سره دوران وکړي چې د اوسني قیمت 17 ځلې وي تر څو په استوا کې د جاذبې له امله تعجیل صفر شي.



۱.۳۰.۱ شکل

۱.۳۰ په ازاد سقوط کې په جسم باندې د پیچې قوې اغیز

د ځمکې په سطحه د P یوه نقطه په پام کې نیسو. فرض کړئ چې m کتله لرونکی جسم په عمودي توګه ښکته لور ته له P′ نقطې څخه چې h ارتفاع لري غورځیږي.فرض کړئ چې X–محور ختیځ لور ته او بهر طرف ته، Y–محور شمال لور ته او Z –محور د عمود په امتداد لکه په (۱.۳۰.۱) شکل کې چې ښودل شوي دي. د h ارتفاع کوچنۍ فرض کړئ، نو د g له تغیر څخه صرف نظر کیږي. د ذرې محصله تعجیل عبارت دی له

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\mathrm{R}} \qquad \dots(۱.۳۰.۱)$$

داسې چې $\vec{a}$ او $\vec{v}_{\mathrm{R}}$ نظر دوران کوونکې دستګاه یعنې ځمکې ته اندازه کیږي.

زاويوي سرعت $\vec{\omega}$ په YZ– سطحه کې واقع او د Y– محور سره λ زاويه جوړوي.

$$\vec{\omega} = (\omega cos\lambda)\hat{\jmath} + (\omega\ sin\lambda)\hat{k} \qquad \dots (۲.۳۰.۱)$$

جسم عموداً ښکته لورته يعنې د k– په جهت غورځيږي او په ازاد سقوط کې د غورځيدونکي جسم مختصات عبارت دي له :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{او} \quad y = 0 \ ، \ x = 0 \qquad \dots (۳.۳۰.۱)$$

$$\therefore \quad \dot{z} = -gt \quad \text{او} \quad \dot{y} = 0 \ ، \ \dot{x} = 0$$

څرنګه چې

$$\vec{v}_{\mathrm{R}} = \dot{\vec{r}} = \left(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}\right) = 0 + 0 - gt\hat{k} = -gt\hat{k} \qquad \dots (۴.۳۰.۱)$$

$$\therefore \quad \vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{R}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & \omega cos\lambda & \omega\ sin\lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\,(-\omega gtcos\lambda - 0) + \hat{\jmath}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0)$$

يا

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{R}} = -\omega gtcos\lambda\hat{\imath} \qquad \dots (۵.۳۰.۱)$$

په (۱.۳۰.۱) معادله کې د (۵.۳۰.۱) په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\omega gt\ cos\lambda \cdot \hat{\imath}$$

يا

$$\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} = -g\hat{k} + 2\omega gt\ cos\lambda \cdot \hat{\imath}$$

په دواړو خواو کې د $\hat{\imath}$ د ضريبونو د پرتله کولو څخه، لاس ته راوړو چې

$$\ddot{x} = 2\omega gt\ cos\lambda$$

د دواړو خواو د انتګرال په اخيستلو، لاس ته راوړو چې

$$\dot{x} = \omega gt^2\ cos\lambda + k_1$$

داسې چې k_1 د انتګرال ثابت دی.

کله چې $t = 0$ ، $\dot{x} = 0$ نو $k_1 = 0$

$$\therefore \quad \dot{x} = \omega gt^2\ cos\lambda$$

بیا د دواړو خواو د انتګرال په اخیستلو، لاسته راوړو چې

$$x = \frac{\omega g t^3}{3} Cos\lambda + k_2$$

داسې چې k_2 د انتګرال ثابت دی.

خرنګه چې $t = 0$ ، $\dot{x} = 0$ نو $k_2 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{\omega g t^3}{3} cos\lambda \qquad \dots (۶.۳۰.۱)$$

کوم وخت چې ذره د ځمکې سطحې ته رسیږي $\mathrm{Z} = 0$

نو (۴.۳۰.۱) معادله به $0 = h - \frac{1}{2} g t^2$

یا $\frac{1}{2} g t^2 = h$

یا $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

په (۶.۳۰.۱) معادله کې د t قیمت په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$x = \frac{1}{3} \omega g (\frac{2h}{g})^{\frac{3}{2}} cos\lambda$$

$$x = \frac{1}{3} \omega (\frac{g h^3}{g})^{\frac{1}{2}} cos\lambda \qquad \dots (۷.۳۰.۱)$$

دا د h له ارتفاع څخه په ازاد سقوط کې د غورځیدونکي جسم د ختیځ په لوري معادله راکوي

۱۸.۱ مثال. یوه ذره له 0,1 km ارتفاع څخه د عرض البلد په $45°$ کې غورځیږي. په ځمکه باندې په کوم ځای کې لګیږي؟

حل. له هغې نقطې څخه انحراف چې له غورځیدو څخه وروسته ورسره لګیږي عبارت دی له

$$x = \frac{1}{3} \omega (\frac{g h^3}{g})^{\frac{1}{2}} cos\lambda$$

$g = 980 cms^{-2}$, $h = 0.1 km = 10^4 cm$ راکړل شوي دي.

دلته $\lambda = 45°$ او $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2X22}{7X24X60X60} = 7{,}2710^{-5} rads^{-1}$

∴ $$\omega = \frac{1}{3} 7.27x10^{-5}x(\frac{8x10^{12}}{980})^{\frac{1}{2}}cos45^{\circ}$$

یا $$x = 1.55\ cm$$

۳۱.۱ د پیچي قوی جغرافیایي او نوری اغیزی

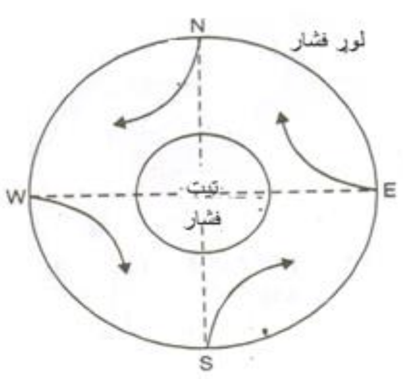
پیچي قوه د سیالونو لکه د اوبو او بادونو په کړونه او حرکت کې مهم رول لوبوي.

ځینې له دغو پدیدو څخه په لنډه توګه په لاندې ډول توضیح کېږي.

(i) **د سیندونو کږیدنه (Deflection of rivers).** پوهیږو چې د پیچي قوې له امله د تعجیل افقي مرکبه همیشه هغه ذره چې په شمالي نیمه کره کې حرکت کوي ښي طرف ته کږوي، نو هغه سیندونه چې په شمالي نیمه کره کې له شمال څخه جنوب ته یا له جنوب څخه شمال ته بهیږي ښي لوري ته کږیدنه زغمي. ددې په نتیجه کی، د سیند ښی څنډې د چپو څنډو په پرتله ډیرې تیرې وي.

(ii) **د معتدل خلیج ویالې (Warm Gulf Streams).** پیچي قوه هغه ویالې چې په بحر کې بهیږي کږوي. له دې ځایه په بحر کې بهیدونکې د معتدل خلیج ویالې د پیچي قوې په واسطه ختیځ لوري ته کږیږي چې د اروپا موسم ګرموي.

(iii) **د موسمي بادونو جوړونه (Formation of cyclones)**



۱.۳۱.۱ شکل

پیچي قوه په موسمي بادونو او ګردابي بادونو باندې اغیزه کوي. کله چې په شمالي نیمه کره کې د اتموسفیر په هره نقطه کې د ټیټ فشار ساحه رامنځ ته شي، بادونه له هر طرف څخه میل لري چې دې ساحې ته حرکت وکړي. لوړې چټکتیا لرونکی باد په هر ځای کې ښي طرف ته کږیږي او په نتیجه کې موسمي باد رامنځ ته کیږي چې د ساعت په مخالف جهت دوران کوی لکه په (۱.۳۱.۱) شکل کې چې ښودل شوي دي.

په جنوبی نیمه کره کې، پیچی قوه د باد حرکت چپ طرف ته کږوي او له دې ځایه موسمي باد رامنځ ته کیږي چې د ساعت په جهت دوران کوي. څرنګه چې په استوا کی پیچي قوه افقي مرکبه نه لري، هیڅ موسمي باد په استوا کې نه رامنځ ته کیږي.

(iv) **د حاره بادونو جهت (Direction of trade winds).** د قطبونو په پرتله د استوا په کرښه کې د تودوخي درجه ډیره لوړه ده او د استوا کرښې ته نږدې توده هوا راپورته کیږي او سړه هوا د استوا د کرښې لوري ته په حرکت کولو پیل کوي تر څو د تودې هوا ځای ونیسي. له دې ځایه، په شمالي نیمه کره کې له شمال څخه جنوب ته بادونه الوتل پیل کوي چې حاره بادونه

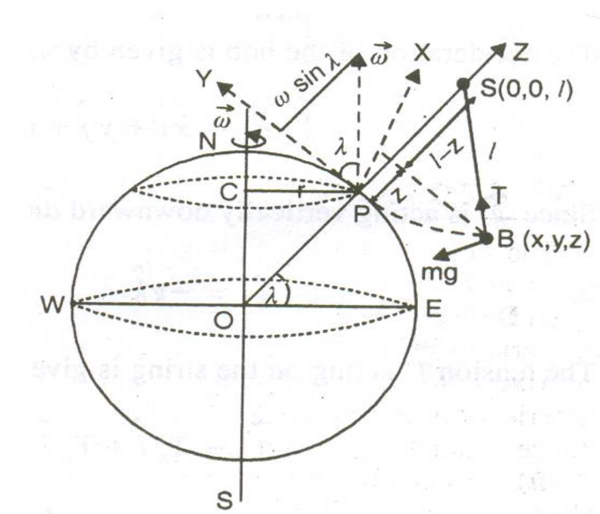
بلل کیږی. دغه حاره بادونه د پیچي قوې له امله لویدیځ لوري ته کږیږی. له دی ځایه مونږ په شمالي نیمه کره کې شمال-لویدیځ حاره بادونه لاس ته راوړو او په جنوبي نیمه کره کې شمال-ختیځ بادونه لاس ته راوړو.

(v) **د اوږدې ساحې مزایل (Long Range missiles).** د اوږدې ساحې مزایل ډیره لوړه چټکتیا لري او ډیر اوږد پرواز کوي، نو پیچي قوه د هغه په لاره کی مهمه کږیدنه رامنځ ته کوي له دې ځایه د هدف د جهت په محاسبه کولو کې د پیچي قوې اغیز په پام کی نیول کیږي.

۳۲.۱ د فوکالت شاقول (FOCAULT'S PENDULUM)

د فوکالت شاقول له یوې درندې کتلې څخه عبارت دی چې له یوې کلکې پایې څخه د اوږده ځړونکي پواسطه ځوړند شوی دی، داسې چې په ازاده توګه په هر لوري څرخیږي.

د فوکالت شاقول د خپل محور په شاوخوا د ځمکې د دوران د ښودلو لپاره استعمالیږي. دا یوه درنده ګلوله ($\approx 28\ kg$) لري چې د یوه ډیر اوږد ($\approx 70\ m$) محکم تار په واسطه ځوړند دی، داسې چې یو ځلې اهتزاز ورکړلی شي، خپل اهتزاز ته په یوه معلومه سطحه کې د اوږده وخت لپاره ادامه ورکوي خو څرنګه چې ځمکه دوران کوي، د شاقول د اهتزاز سطحه هم دوران کوي او د یوه دوران د پوره کولو لپاره څو ساعتونه نیسي.



۱.۳۲.۱ شکل

د P نقطه په λ عرض البلد کې د ځمکې په سطحه په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې په P نقطه کی د فوکالت شاقول تجربه ترسره کیږي. l د شاقول اوږدوالی فرض کړئ چې د P نقطې د پاسه د S له کلکې پایې څخه ځوړند دی لکه په (۱.۳۲.۱) شکل کې چې ښودل شوي دي. د تعادل په حالت کې، د شاقول ګلوله په P نقطه کې ده. په شکل کې، ګلوله د تعادل له حالت څخه بې ځایه شوې ده او په یوه لحظه کې په $B(x, y, z)$ نقطه کې ده.
په B نقطه کې په ګلوله باندې لاندې قوې عمل کوي.

(i) د ګلولې وزن mg د ځمکې د مرکز لور ته ښکته خوا عمل کوي.

(ii) $\vec{T}$ کښښ له B څخه د S په جهت په تار باندې عمل کوي.

(iii) پیچي قوه له $[-2m(\vec{\omega}\times\ \vec{v}_R]$ څخه عبارت ده.

(iv) له مرکز څخه د فرار قوه له $[-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]$ څخه عبارت ده.

داسې چې m د ګلولی کتله او $\vec{\omega}$ د ځمکې د دوران زاویوي سرعت دی چې د y له محور سره λ زاویه جوړوي.

$\therefore$ په ګلوله باندې مجموعي قوه عبارت ده له

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

څرنګه چې ω کوچنی $(7.28 \times 10^{-5} sec^{-1})$ دی او $[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]$ په ځان کې ω^2 لري نو له هغه حد څخه صرف نظر کېږي چې $[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]$ لري.

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) \qquad \dots (۱.۳۲.۱)$$

که $\vec{a}$ د ګلولې تعجیل وي لکه چې له S څخه لیدل کېږي، نو لرو چې

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) \qquad \dots (۲.۳۲.۱)$$

د ګلولې تعجیل عبارت دی له

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \qquad \dots (i)$$

څرنګه چې $\vec{g}$ په عمودي توګه ښکته خوا ته عمل کوي

$$\vec{g} = -g\hat{k} \qquad \dots (ii) \qquad \therefore$$

په تار باندې عامل کښښ $\vec{T}$ عبارت دی له

$$\vec{T} = T_x\hat{\imath} + T_y\hat{\jmath} + T_z\hat{k} \qquad \dots (iii)$$

او

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) = (\omega\cos\lambda\hat{\jmath} + \omega\sin\lambda\hat{k}) \times (\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & \omega cos\lambda & \omega\, sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(\dot{z}\omega\cos\lambda - \dot{y}\omega\sin\lambda) - \hat{\jmath}(0 - \dot{x}\omega\sin\lambda) + \hat{k}(0 - \dot{x}\omega\cos\lambda)$$

یا

$$(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) = \hat{\imath}(\dot{z}\omega\cos\lambda - \dot{y}\omega\sin\lambda) + \hat{\jmath}(\dot{x}\omega\sin\lambda) - \hat{k}(\dot{x}\omega\cos\lambda) \qquad \dots (iv)$$

په (۲.۳۲.۱) معادله کې د (i)، (ii) ، (iii) ، (iv) معادلو په وضع کولوسره لاس ته راوړو چې

$$m\left(\ddot{x}\hat{\imath}+\ddot{y}\hat{\jmath}+\ddot{z}\hat{k}\right)=-mg\hat{k}+\left(\mathrm{T}_x\hat{\imath}+\mathrm{T}_y\hat{\jmath}\ +\mathrm{T}_z\hat{k}\right)-$$

$$2m\left[\hat{\imath}(\dot{z}\omega\cos\lambda-\dot{y}\omega\sin\lambda)+\hat{\jmath}(\dot{x}\omega\sin\lambda)-\hat{k}(\dot{x}\omega\cos\lambda)\right]$$

یا

$$m\ddot{x}\hat{\imath}+m\ddot{y}\hat{\jmath}+m\ddot{z}\hat{k}=\hat{\imath}[T_x-2m(\dot{z}\omega\cos\lambda-\dot{y}\omega\sin\lambda)]+$$

$$\hat{\jmath}\left[T_y-2m\dot{x}\omega\sin\lambda\right]+\hat{k}[T_z-mg+2m\dot{x}\omega\cos\lambda] \qquad \ldots(۳.۳۲.۱)$$

د(۳.۳۲.۱) معادلې په دواړه خواو کې د $\hat{\imath}$ ، $\hat{\jmath}$ او $\hat{k}$ د ضریبونوپه پرتله کولوسره، لرو چې

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{x}=T_x-2m(\dot{z}\omega\cos\lambda-\dot{y}\omega\sin\lambda)\\ m\ddot{y}=T_y-2m\dot{x}\omega\sin\lambda\\ m\ddot{z}=T_z-mg+2m\dot{x}\omega\cos\lambda \end{array}\right] \qquad \ldots(۴.۳۲.۱)$$

د T د جهت کوساین له $\left(-\frac{x}{l},\ -\frac{y}{l},\ \frac{l-z}{l}\right)$ څخه عبارت دي.

$\therefore$

$$T_x=-\frac{x}{l}T$$

$$T_y=-\frac{y}{l}T$$

$$T_z=\frac{l-z}{l}T$$

نو (۴.۳۲.۱) معادله لاندې شکل غوره کوي

$$m\ddot{x}=-\frac{xT}{l}-2m(\dot{z}\omega cos\lambda-\dot{y}\omega sin\lambda) \qquad \ldots(۵.۳۲.۱)$$

$$\ddot{y}=-\frac{yT}{l}-2m\dot{x}\omega sin\lambda \qquad \ldots(۶.۳۲.۱)$$

$$m\ddot{z}=\frac{(l-z)T}{l}-mg+2mx\omega sin\lambda \qquad \ldots(۷.۳۲.۱)$$

که د شاقول امپلیتود ډیر لوی نه وي، نو حرکت یی تقریباً افقي په پام کې نیول کیږي.

نو

$$z=\dot{z}=\ddot{z}=0$$

له دې ځایه (۷.۳۲.۱) معادله به

$$0=\frac{(l-0)T}{l}-mg+2mx\omega cos\lambda$$

یا $$T=mg-2mx\omega cos\lambda \qquad ...(۸.۳۲.۱)$$

له (۸.۳۲.۱) معادلې څخه د T د قیمت په (۵.۳۲.۱) او (۶.۳۲.۱) معادلو کی په وضع کولو سره لاس ته راوړو چې

$$m\ddot{X}=-\frac{x}{l}[mg-2mx\omega cos\lambda]-2m[\dot{z}\,\omega cos\lambda-\dot{y}\omega sin\lambda] \quad ...(۹.۳۲.۱)$$

$$m\ddot{Y}=-\frac{y}{l}[mg-2mx\omega cos\lambda]-2m\omega\dot{x}sin\lambda \qquad ...(۱۰.۳۲.۱)$$

څرنګه چې $\dot{z}=0$ او له mg سره په پرتله کولو له هغه حد څخه صرف نظر کېږي چې $2m\omega\dot{x}$ لري.

$(\because \quad 2m\omega\dot{x}\ll mg)$

نو (۹.۳۲.۱) او(۱۰.۳۲.۱) معادلې به

$$m\ddot{x}=-\frac{x}{l}mg+2m\dot{y}\omega sin\lambda$$

او $$m\ddot{y}=-\frac{y}{l}mg-2m\dot{x}\omega sin\lambda$$

$\therefore$ $$\ddot{x}=-x\left(\frac{g}{l}\right)+2\dot{y}\,\omega sin\lambda \qquad ...(۱۱.۳۲.۱)$$

او $$\ddot{y}=-y\left(\frac{g}{l}\right)-2\dot{x}\omega sin\lambda \qquad ...(۱۲.۳۲.۱)$$

$\frac{g}{l}=\omega_0^2$ په پام کی ونیسئ، نو پورتنی معادلې به

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=2\omega\dot{y}sin\lambda \qquad ...(۱۳.۳۲.۱)$$

او $$\ddot{y}+\omega_0^2y=-2\omega\dot{x}sin\lambda \qquad ...(۱۴.۳۲.۱)$$

ددې لپاره چې نوموړې معادلی حل کړو، $x+y=u$ په پام کی ونیسئ.

$\therefore$ $$\dot{x}+i\dot{y}=\dot{u}$$

داسې چې $i=\sqrt{-1}$

$$\ddot{x}+i\ddot{y}=\ddot{u}$$

د (۱۴.۳۲.۱) معادلې په i کې په ضرب او له (۱۳.۳۲.۱) معادلې سره په جمع کولو سره لاس ته راځي چې
$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \omega_0^2(x + iy) = 2\omega sin\lambda(\dot{y} - i\dot{x})$$

یا
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2\omega sin\lambda(-i^2\dot{y} - i\dot{x})$$

یا
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2i\omega sin\lambda(\dot{x} - i\dot{y})$$

یا
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -(2i\omega sin\lambda)\dot{u}$$

یا
$$\ddot{u} + (2i\omega sin\lambda)\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

$\omega sin\lambda = \omega_1$ په پام کی ونیسئ

$\therefore$ ... (۱۵.۳۲.۱)
$$\ddot{u} + (2i\omega_1)\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

په اپریټري شکل سره، پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\mathrm{D}^2 u + (2i\omega_1)\mathrm{D}u + \omega_0^2 u = 0$$

یا
$$(\mathrm{D}^2 + 2i\omega_1\mathrm{D} + \omega_0^2)u = 0$$

څرنګه چې $u \neq 0$

$\therefore$
$$\mathrm{D}^2 + 2i\omega_1\mathrm{D} + \omega_0^2 = 0$$

$$\mathrm{D} = \frac{-2i\omega_1 \pm \sqrt{-4\omega_1^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-2i\omega_1 \pm 2\sqrt{i^2\omega_1^2 + i^2\omega_0^2}}{2}$$

یا
$$\mathrm{D} = -i\omega_1 \pm i\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}$$

یا ... (۱۶.۳۲.۱)
$$\mathrm{D} = -i\omega_1 \pm i\omega_2$$

داسې چې $\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}$

د (۱۵.۳۲.۱) معادلې عمومي حل عبارت دی له
$$u = \mathrm{A}e^{(-i\omega_1 + i\omega_2)t} + \mathrm{B}e^{(-i\omega_1 + i\omega_2)t}$$

یا
$$u = (\mathrm{A}e^{i\omega_2 t} + \mathrm{B}e^{-i\omega_2 t})e^{-i\omega_1 t}$$

اجازه راکړئ چې ولیکو
$$\mathrm{A}e^{i\omega_2 t} + \mathrm{B}e^{-i\omega_2 t} = a + ib$$

$\therefore$
$$\mathrm{A}[cos\omega_2 t + isin\omega_2 t] + \mathrm{B}[cos\omega_2 t - isin\omega_2 t] = a + ib$$

یا
$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})(cos\omega_2 t) + (\mathrm{A} - \mathrm{B})(isin\omega_2 t) = a + ib$$

د پورتنی معادلې د دواړو خواو د حقیقي او موهومي برخو له پرتله کولو څخه لرو چې

$$(\mathrm{A+B})cos\omega_2 t = a \;\Rightarrow\; cos\omega_2 t = \frac{a}{\mathrm{A+B}} \qquad \text{...(١٧.٣٢.١)}$$

او

$$(\mathrm{A-B})sin\omega_2 t = b \;\Rightarrow\; sin\omega_2 t = \frac{b}{\mathrm{A-B}} \qquad \text{...(١٨.٣٢.١)}$$

د (١٧.٣٢.١) او (١٨.٣٢.١) معادلو له مربع کولو او جمع کولو څخه لرو چې

$$\frac{a^2}{(\mathrm{A+B})^2} + \frac{b^2}{(\mathrm{A-B})^2} = 1 \qquad \text{...(١٩.٣٢.١)}$$

دا د یوې بیضوي معادله ده چې مرکز یې په مبدا کې دی. له دې ځایه د ګلولې په زاویوي سرعت لرې.$\omega_1 = \omega sin\lambda$واسطه تعقیب شوې لار بیضوي ده چې

∴ د اهتزاز وخت

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda} \qquad \text{...(٢٠.٣٢.١)}$$

په قطب کې، $\lambda = 90^\circ$

$$\therefore \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega sin90^\circ} = \frac{2\pi}{\omega} = 24hr$$

د استوا په کرښه، $\lambda = 0^\circ$

$$\therefore \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega sin0^\circ} = \infty$$

له دې ځایه شاقول د استوا په کرښه مخکې نه شي تللی.

١٩.١ مثال. هغه وخت محاسبه کړئ، چې په هغه کې د فوکالت شاقول د اهتزازسطحه په یوه نقطه کې 90° په اندازه راوګرځي داسې چې عرض البلد30° وي.

حل. λ 30°=راکړل شوې ده.

څرنګه چې د فوکالت شاقول د اهتزاز د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda}$$

$$\therefore \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\frac{1}{sin\lambda} = 24hr\,\frac{1}{sin30^\circ} = (24h).\,2$$

$T = 48h$

په $48h$ کې د شاقول د اهتزازسطحه په 360° راګرځي .

$\therefore$ د اهتزاز سطحه په $\frac{48}{360^{\circ}} \times 90^{\circ} = 12h$ وخت کې په 90° راګرځي.

۱.۲۰ مثال. د فوکالت شاقول په یوه ځاي کې چې عرض البلد یې $6' - 21^{\circ}$ دی د شمال-جنوب جهت په امتداد اهتزازکوي .څومره وخت باید تېرکړي مخکې له دې چې د هغه شاقول شمال ختیځ - جنوب لویدیځ جهت په امتداد اهتزاز پیل کړي.

حل. $\lambda = 21^{\circ} - 6'$ راکړل شوی دی

څرنګه چې د فوکالت شاقول د اهتزاز د وخت پریود عبارت دی له

$$T = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\frac{1}{sin\lambda} = 24hr\frac{1}{sin\,21^{\circ} - 6'} = \frac{24h}{0.3600} = \frac{200}{3}h$$

د شاقول د اهتزاز سطحه په $\frac{200}{3}h$ وخت کې په 360° راګرځي

$\therefore$ په 45° د اهتزاز د سطحې د راګرځیدو وخت عبارت دی له

$$\frac{200}{3} \times \frac{45}{360} = \frac{200}{3} \times \frac{1}{8} = 8.33h$$

۱.۲۱ مثال. هغه قیمت محاسبه کړئ چی په هغه کې د فوکالت شاقول د $Z-$ محور شاوخوا په هر یو ساعت کې دوران وکړي.

حل. د فوکالت شاقول د اهتزاز وخت عبارت دی له

$$T = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right).\frac{1}{sin\lambda}$$

یا $$T = \frac{24}{sin\lambda} \quad \dots(i)$$

هغه قیمت چې په هغه کې د شاقول د اهتزاز سطحه دوران کوي

$$= \frac{2\pi}{T} = \frac{2x180^{\circ}}{24/sin\lambda}$$

$$= \frac{360^{\circ}}{24}sin\lambda = 15^{\circ}sin\lambda$$ [$\therefore$ (i) معادلې په استعمالولو]

څو ځوابه پوښتنې

۱- د چپ لاس مختصاتو سیستم د کوم یو په معکوس کولو سره لاس ته راتلی شي.

(الف) يواځې x– محور (ب) يواځې y- محور

(ج) يواځې z- محور (د) يو له محوررونو څخه

۲- په فضا کې ديوې نقطې مختصات عبارت دي له :

(الف) زاويې او واټنونه (ب) د کتلې او مومنټم مرکبې

(ج) نظر د مختصاتو يوه ځانګړې غوره شوي سيستم ته د مومنټم مرکبې

۳- په مستوي کې د $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ ترمنځ زاويه عبارت ده له :

(الف) 0 (ب) $\frac{\pi}{2}$

(ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) π

۴- په کروي مختصاتو کې (r, θ, ϕ) يو له لاندينيو څخه ښيي.

(الف) شعاعي واټن، د افقي قوس اړوند زاويه، پورته لور ته زاويه

(ب) مثبت وکتور،پورته لور ته زاويه، د افقي قوس اړوند زاويه

(ج) شعاعي واټن ، پورته لورته زاويه ، د افقي قوس اړوند زاويه

(د) واټن ، مستوي زاويه، جامده زاويه

۵- په کروي مختصاتو سيستم کې د θ اعظمي قيمت يو له لاندينيو څخه کيداى شي

(الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π

(ج) 2π (د)هيڅ يو

۶- په کروي قطبي مختصاتو سيستم کې د r د تغير ساحه له صفر څخه تر يو له لاندينيو پورې ده

(الف) π (ب) 2π

(ج) ∞ (د) 4π

۷- په کروي قطبي مختصاتو سيستم کې د ϕ دتغير ساحه له صفر څخه تر يو لاندينيو پورې ده

(الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π

(ج) 2π (د) 4π

۸- يوه ذره د y- محور په امتداد په يوه مستوي کې د حرکت په حالت کې ده. $\hat{e}_\theta$ واحد وکتور به يې عبارت وي له:

(الف) $\hat{\imath}$ (ب) $\hat{\jmath}$

(ج) $-\hat{\imath}$ (د) $-\hat{\jmath}$

۹- $\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi)$ مساوي دی له:

(الف) 0 (ب) π

(ج) ∞ (د) 1

۱۰- په مستوي کې د يوې متحرکي ذرې لار (path) x – محور ته 45° مايله يوه مستقيمه کرښه ده، د $\hat{e}_r$ واحد يې عبارت دی له:

(الف) $\hat{\imath}+\hat{\jmath}$ (ب) $\hat{\jmath}-\hat{\imath}$

(ج) $\sqrt{2}(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$ (د) $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$

۱۱- د $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}$ قيمت عبارت دی له:

(الف) $\hat{e}_r$ (ب) $-\hat{e}_\theta$

(ج) $\hat{e}_\phi$ (د) هيڅ يو

۱۲- د $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}$ قيمت عبارت دی له:

(الف) $\hat{e}_r$ (ب) $-\hat{e}_\theta$

(ج) $\hat{e}_\phi$ (د) $-\hat{e}_\phi$

۱۳- $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ قيمت عبارت دی له:

(الف) $\hat{e}_r$ (ب) $\hat{e}_\theta$

(ج) $\hat{e}_\phi$ (د) 0

۱۴- که r ، θ او ϕ کروي قطبي مختصات وي، يوله لاندينيوڅخه صفردی:

(الف) $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}$ (ب) $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi}$

(ج) $\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \phi}$ (د) $\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \theta}$

۱۵- د$\hat{e}_r$، $\hat{e}_\theta$ او $\hat{e}_\phi$ واحد وکتورونه دوه په دوه:

(الف) موازي (ب) عمود

(ج) هيڅ يو

۱۶- عطالتي مأخذي دستگاه هغه ده چې بايد:

(الف) مطلقه ساکنه پاتې (ب) په ثابت سرعت سره د حرکت په حال کې پاتې

(ج) تعجيلي نه ده (د)تعجيلی ده

۱۷- هغه مأخذي دستگاه چې$\vec{a}_0$ انتقالي (Translational) تعجيل لري، محصله تعجيل يی:

(الف) $\vec{a}+\vec{a}_0$ (ب) $\vec{a}-\vec{a}_0$

(ج) $\vec{a}_0-\vec{a}$ (د) هيڅ يو

۱۸- کومه قوه خیالي ده؟

(الف) جاذبوي قوه (ب) مرکز ته د جذب قوه

(ج) له مرکز څخه د فرار قوه (د) برقي قوه

۱۹- په غیر عطالتي مأخذي دستګاه کې، یو جسم عرضي (Transverse)قوه زغمي یواځې که یو له لاندینیو مأخذي دستګاوو څخه ولري.

(الف) انتقالی تعجیل حرکت (ب) نا یونواخت دوراني

(ج) یو نواخت دوراني حرکت (د) هیڅ یو

۲۰- په ځمکې پورې وصل مأخذي دستګاه:

(الف) د تعریف له مخې یوه عطالتي دستګاه ده.

(ب) عطالتي دستګاه نشي کیدای ځکه ځمکه د لمر شاوخوا دوران کوي.

(ج) عطالتي دستګاه ده ځکه چې د نیوټن قوانین په نومورې دستګاه کې د تطبیق وړ دي.

(د) عطالتي دستګاه ده ځکه چې ځمکه د خپل محور شاوخوا دوران کوي.

۲۱- کوم یو له لاندینیو څخه د یو لیدونکي سره مرسته کولای شي تر څو هغه وپوهیږي چې د هغه خپله مأخذي دستګاه په یو نواخت حرکت کې ده او که د سکون په حالت کې؟

(الف) د نور د چټکتیا ټاکل (ب) د کتلې اندازه کوونه

(ج) د وخت اندازه کوونه (د) هیڅ یو

۲۲- په یوه تعجیلي دستګاه کې یو جسم یواځې هغه وخت پیچي قوه زغمي چې:

(الف) دستګاه دوراني حرکت ولري او جسم خطي حرکت ولري.

(ب) دستګاه دوراني حرکت ولري او جسم دسکون په حالت کې وي.

(ج) دستګاه دوراني حرکت ولري او جسم هم دوران وکړي.

(د) له پورتنیو څخه هیڅ یو

۲۳- د ماشومانو په ګرد تاوونکي (merry – go – round) کې یوه ذره یو له لاندینیو څخه زغمي:

(الف) هیڅ خیالي قوه (ب) هیڅ خارجي قوه

(ج) خیالي قوه (د) خارجي قوه

۲۴- موسمي بادونه په یو له لاندینیو ځایونو کي نه لیدل کېږي:

(الف) د استوا په کرښه (ب) په قطبونو کي

(ج) په شمالي نیمه کره کې (د) په جنوبي نیمه کره کي

۲۵- د فوکالت شاقول د اهتزاز د سطحې د دوران پریود هغه وخت کمیږي، کله چې مونږ:

(الف) د شمالي قطب طرف ته حرکت وکړو.

(ب) د استوا د کرښې په طرف حرکت وکړو.

(ج) پورته طرف ته حرکت وکړو.

(د) ختیځ طرف ته حرکت وکړو.

ځوابونه

۱. (د) ۲. (الف) ۳. (ب) ۴. (الف) ۵. (ب) ۶. (ج) ۷. (ج)

۸. (ج) ۹. (د) ۱۰. (د) ۱۱. (د) ۱۲. (ب) ۱۳. (الف)

۱۴. (د) ۱۵. (ب) ۱۶. (ج) ۱۷. (ج) ۱۸. (ج) ۱۹. (ب)

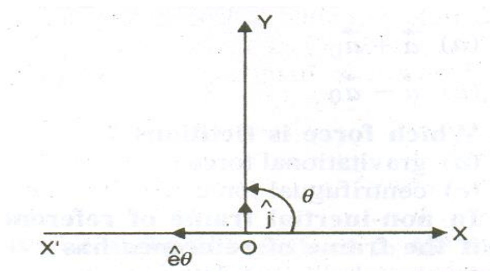
۲۰. (الف) ۲۱. (د) ۲۲. (الف) ۲۳. (ج) ۲۴. (الف) ۲۵. (الف)

لنډ ځوابه پوښتنې

۱. پوښتنه. په فضا کې د يوې نقطې د مختصاتو د اصطلاح اړوند څه پوهيږئ؟

ځواب. په فضا کې د يوې نقطې مختصات د هغو نقطو موقعيت ټاکي چې له واټنونو څخه عبارت دي داسې چې نظر له يوې کيفي غوره شوې مبدا څخه د مختصاتو د نيول شويو محورونو سره ته اندازه کيږي.

۲. پوښتنه. يوه ذره د XY په مستوي کې د Y– محور په امتداد د حرکت په حال کی ده. د مستوي قطبي واحد وکتورونو جهتونه په کوم طرف دي؟



ځواب. يوه ذره لکه په لاندې شکل کې چې ښودل کيږي د XY په مستوي کې د Y– محور په امتداد د حرکت په حال کی ده. څرنګه چې د $\hat{e}_r$ واحد وکتور د Y– محور په امتداد او $\hat{e}_r$ په $\hat{e}_\theta$ باندې عمود او د θ د تزايد په امتداد دی، نو جهت يې د OX´ په امتداد دی.

۳. پوښتنه. د کارتيزيني او کروي قطبي مختصاتو ترمنځ اړيکې څه دي؟

ځواب. د (x, y, z) کارتيزيني مختصاتو او کروي قطبي مختصاتو ترمنځ اړيکې عبارت دي له:

$$x = rsin\theta cos\phi$$

$$y = rsin\theta sin\phi$$

$$z = rcos\phi$$

۴. پوښتنه. يوه ذره په مستوي کې داسې حرکت کوي چې له مبدا څخه يې فاصله ثابته پاتې کيږي. د سرعت شعاعي مرکبه يې څومره ده؟

ځواب. په مستوي کې د متحرکې ذرې سرعت عبارت دی له:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

نو د ذرې د سرعت شعاعي مرکبه

$$\vec{v}_r = \dot{r}\hat{e}_r$$

څرنګه چې

$$r = \text{ثابت}$$

$$\dot{r} = 0 \qquad \therefore$$

$$\vec{v}_r = 0$$

۵. پوښتنه. یوه ذره په XY– مستوي کې د حرکت په حال کې ده. په کروي قطبي مختصاتوکې يې د تعجیل کومه مرکبه صفر ده؟

ځواب. په کروي قطبي مختصاتو کې، د ذرې تعجیل عبارت دی له:

$$\vec{a} = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \hat{e}_\theta\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) +$$

$$\hat{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)$$

څرنګه چې ذره په XY– مستوي کې حرکت کوي، نو $\phi = \frac{\pi}{2}$ ثابت دی

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{a} = \hat{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) + \hat{e}_\phi\left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)$$

د ذرې د تعجیل a_θ مرکبه صفر ده.

۶. پوښتنه. مأخذي دستګاه څه شی ده؟

ځواب. د مختصاتو سیستم چې نظر هغه ته مونږ د یوې ذرې موقعیت یا حرکت اندازه کوو مأخذي دستګاه بلل کېږي. مستطیلي کارتیزیني مختصاتو سیستم د دغسې مأخذي دستګاه یوه خیالي (Ideal) نمونه وړاندې کیدای شي.

۷. پوښتنه. عطالتي مأخذي دستګاه څه شی ده؟

ځواب. د مختصاتو سیستم چې په هغه کې د نیوټن د حرکت قوانین صدق کوي عطالتي مأخذي دستګاه بلل کېږي او هره مأخذي دستګاه چې ساکنه یا نسبت بلې عطالتي دستګاه ته په یو نواخت سرعت سره د حرکت په حال کې وي په خپله عطالتي ده.

۸. پوښتنه. غیرعطالتي مأخذي دستګاه څه شی ده؟

ځواب. مأخذي دستګاه چې تعجیل ورکړل شوی وي غیرعطالتي مأخذي دستګاه بلل کېږي. په غیر عطالتي مأخذي دستګاه کې د عطالت قانون صدق نه کوي د غیر عطالتي دستګاه د تعجیلي حرکت په نتیجه کې په ذره باندې خیالي قوه عمل کوي.

۹. پوښتنه. یوه ذره د بهرنی قوې د عمل څخه پرته تعجیلي کېږي د هغې مأخذي دستګاه په هکله چې نوموړی په کې لیدل کېږي څه نتیجه ګیري کوئ؟

ځواب. ځرنګه چی ذره د بهرنی قوې له عمل څخه پرته تعجیلي کېږي، د دې معنا داده چې د عطالت قانون په کې صدق نه کوي او تعجیل د خیالي قوې له امله دی، له دې ځایه دستګاه باید غیرعطالتي دستګاه وي.

۱۰. پوښتنه. ایا یوه ذره په غیرعطالتي دستګاه کې د تعادل په حالت راوړل کیدای شي؟

ځواب. هو. دا کیدای شی، هغه وخت چې په غیرعطالتي دستګاه کې ذره د داسې قوې په واسطه تعجیلي شي چې په ذره باندی د مجموعي خالصې خیالي قوې سره مساوي او مخالفه وي.

۱۱. پوښتنه. د هغو خیالي قواوو نومونه واخلئ چې د ځمکې د دوران له امله څرګندیږي؟

ځواب. (الف) پیچي قوه (ب) له مرکز څخه د فرار قوه

۱۲. پوښتنه. پیچي قوه څه شی ده او څه وخت رامنځ ته کېږي؟

ځواب. پیچي قوه یوه خیالي قوه ده چې یوه ذره یې په دوراني دستګاه کې زغمي. دا قوه یوازې هغه وخت رامنځ ته کېږي چې یوه ذره په دوراني دستګاه کې خطي سرعت ولري.

۱۳. پوښتنه. په شمالي او جنوبي نیمه کره کې د پیچي قوې جهت په کوم طرف وي؟

ځواب. په شمالي نیمه کره کې، د پیچي قوې جهت همیشه د ذرې د حرکت ښي طرف ته وي، په داسې حال کې چې په جنوبي نیمه کره کې، د ذرې د حرکت جهت چپ طرف ته وي.

۱۴. پوښتنه. هغه شرط څه دی چې د هغې له مخې ذره په دوراني دستګاه کې پیچي قوه زغمي؟

ځواب. ذره باید په دوراني دستګاه کې د حرکت په حال کې وي.

۱۵. پوښتنه. د استوا په کرښه کې هیڅ موسمي بادونه نه رامنځ ته کېږي. ولې؟

ځواب. موسمي بادونه د پیچي قوې له امله رامنځ ته کېږي. د استوا په کرښه کې، $\lambda = 0°$

$\therefore$ د پیچي قوې افقي مرکبه، $F = 2m\omega sin0° = 0$

له دې ځایه، داستوا په کرښه کې، پیچي قوې له منځه ځي او هیڅ موسمي بادونه د استوا په کرښه کې نه رامنځ ته کېږي.

۱۶. پوښتنه. د کاذبې قوې مطلب څه دی؟ یو مثال یې ورکړئ.

ځواب. هغه قوه چې یوازې په تعجیلي دستګاه کې رامنځ ته کېږي کاذبه قوه بلل کېږي. د مثال په توګه له مرکز څخه د فرار قوه.

۱۷. پوښتنه. د سټلایټ په حرکت کې کوم ډول خیالي قوه عمل کوي؟

ځواب. له مرکز څخه د فرار قوه، چې له $mr\omega^2$ څخه عبارت دی.

۱۸. پوښتنه. د ځمکې د سطحې په کومه نقطه کې د فوکالت شاقول د اهتزاز سطحه په یوه ورځ کې یوځل دوران کوي؟

ځواب. په λعرض البلد کې د فوکالت شاقول د دوران د وخت پریود عبارت دی له:

$$T = \frac{2\pi}{\omega sin\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\frac{1}{sin\lambda} = \frac{24h}{sin\lambda} \qquad \left[\because \frac{2\pi}{\omega} = 24h\right]$$

که $\lambda = 90$

$$T = \frac{2\pi}{sin90} = 24h$$

له دې ځایه، په قطب کې، د فوکالت د شاقول د اهتزاز سطحه په یوه ورځ کې یو ځلي دوران کوي.

۱۹. پوښتنه. په کوم ځای کې د فوکالت د شاقول د ګلولې مدار هیڅ کله دوران نه کوي؟

ځواب. څرنګه چې $T = \frac{24h}{sin\lambda}$ ، که $\lambda = 0$، $T = \frac{2\pi}{0} = \infty$

له دې ځایه، غوښتل شوی ځای داستوا کرښه ده.

۲۰. پوښتنه. د ساده شاقول او فوکالت شاقول ترمنځ توپیر څه دی؟

ځواب. یو ساده شاقول یوه درنده نقطوي کتله ده چې د یوه په بشپړه توګه د کږېدنې وړ او نه کش کیدونکي تار په واسطه له یوې کلکې پایې څخه ځوړند دی.

د فوکالت شاقول له یوې درندې کتلې څخه جوړدی چې دیوه مناسب اوږد محکم ځړونکي په واسطه ځوړند شوی دی. داسې چې په هرطرف په آزاده توګه څرخېږي.

تمرين

(اوږد ځوابه پوښتنې)

۱. د يوې ذرې د يو، دوه اودرې بعده حرکت ترمنځ توپير څه شی دی؟

۲. د يوې نقطې مختصات تعريف کړئ. ديوې نقطې د مختصاتو د اندازه کولومختلف سيستمونه توضيح کړئ؟

۳. ښي لاسه اوچپ لاسه مختصات څه شی دي؟

۴. وښاياست چې په کارتيزيني مختصاتو سيستم کې د موقعيت وکتور $\vec{r}$ له $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ څخه عبارت دی.

۵. واحد وکتورونه تعريف او په کارتيزيني مختصاتو کې سرعت او تعجيل توضيح کړئ.

۶. په مستوي کې د ذرې د حرکت لپاره ثبوت کړئ چې د ذرې سرعت $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ دی.

۷. په مستوي قطبي مختصاتو کې د متحرکې ذرې د سرعت افاده لاسته راوړئ.

۸. وښاياست چې په فضا کې د يوې متحرکې ذرې سرعت په لاندې ډول توضيح کيږي.

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi$$

۹. د استوانه يي قطبي مختصاتو په حالت کې ثبوت کړئ چې

$$\frac{\partial\hat{e}}{\partial\phi} = -\hat{r} \qquad \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta} \; : \; \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\hat{\phi} \; : \quad \text{او} \quad \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta} = 0$$

نوټ:- د پورتنی رابطې د لاسته راوړلو لپاره $\hat{e}_\theta = \hat{\theta}$ ، $\hat{e}_r = \hat{r}$ او $\hat{e}_\phi = \hat{\phi}$ استعمالوو.

۱۰. د يوه مرتب دياګرام په رسمولو، په فضا کې د يوې ذرې د حرکت رابطه لاسته راوړئ؟

$$\vec{a} = \hat{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{e}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})$$

۱۱. کارتيزيني او کروي قطبي مختصاتو سيستمونه څه شی دي؟ د دواړو ترمنځ رابطه لاسته راوړئ؟

۱۲. دهغې ذرې لپاره چې په فضا کې د حرکت په حال کې ده، ثبوت کړئ چې تعجيل يې عبارت دی له:

$$\vec{a} = \hat{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \hat{e}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\phi^2\sin\theta\cos\theta) +$$

$$\hat{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)$$

۱۳. د کروي قطبي مختصاتو او کارتيزيني مختصاتو ترمنځ د رابطې څخه په پيل کولو د $\hat{\boldsymbol{v}}_r$ ، $\hat{\boldsymbol{v}}_\theta$ او $\hat{\boldsymbol{v}}_\phi$ قيمتونه دz y,x ,او$\dot{y},\dot{x}$ او $\dot{z}$ له مخې پيداکړئ؟

۱۴. کروي قطبي مختصات څه شی دي؟ په کروي مختصاتو کې د ذرې د سرعت اوتعجيل افاده لاس ته راوړئ؟

۱۵. استوانه يي مختصات څه شی دي؟ د ذرې د سرعت اوتعجيل رابطې د استوانه يي مختصاتو له مخې لاس ته راوړئ؟

۱۶. په استوانه يي مختصاتوکې د واحدوکتورونو $(\hat{e}_z, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\rho)$ افادې لاسته راوړي؟

۱۷. د استوانه يي مختصاتو سيستم څه شی دی؟ د کارتيزيني او استوانه يي مختصاتو ترمنځ رابطه لاس ته راوړئ؟

۱۸. د عطالتي د ستګاه اوغيرعطالتي مأخذي دستګاه ترمنځ توپير په ګوته کړئ د کومو شرايطو لاندې يوه تعجيلي مأخذي دستګاه د يوې عطالتي دستګاه په حيث کار کوي؟

۱۹. د عطالتي او غيرعطالتي مأخذي دستګاه اصطلاحات تشريح کړئ؟

۲۰. وښاياست چې په غيرعطالتي دستګاه کې خيالي قوه حتمي ده. څه رامنځ ته کېږي که دستګاه په ثابت سرعت سره حرکت وکړي؟

۲۱. ثبوت کړئ چې هغه مأخذي دستګاه چې نظر يوې عطالتي دستګاه ته په مشابه انتقالي تعجيل سره حرکت کوي غيرعطالتي دستګاه ده.

۲۲. دهغې قوې افاده لاس ته راوړئ چې په متشابه توګه دوران کوونکې دستګاه کې په متحرکې ذرې باندې عمل کوي.

۲۳. د هغې مجموعي قوې افاده لاس ته راوړئ چې په دوران کوونکې دستګاه کې په متحرکې ذرې باندې عمل کوي. پيچي قوه څه شی ده؟ يو له تطبيقاتو څخه يې بيان کړئ.

۲۴. پيچي قوه څه شی ده؟ ثبوت کړئ چې نظر دوران کوونکې مأخذي دستګاه ته د يوې ذرې په حرکت کې شتون لري.

۲۵. پيچي قوه څه شی ده؟ ثبوت کړئ چې نظرپه $\vec{\omega}$ زاويوي سرعت سره دوران کوونکې دستګاه ته په $\vec{v}$ لحظوي سرعت سره د يوې متحرکې ذرې پيچي تعجيل له $2\vec{\omega} \times \vec{v}$ څخه عبارت دی.

۲۶. نظر د هغې ذرې عطالتي دستګاه ته چې په $\vec{\omega}$ زاویوي سرعت سره دوران کوونکې دستګاه ته په $\vec{v}$ لحظوي سرعت سره حرکت کوي، ثبوت کړئ چې پیچي تعجیل له $2\vec{\omega} \times \vec{v}$ څخه عبارت دی.

۲۷. د $\vec{R}$ مأخذي دستګاه نسبت $\vec{\omega}$ متشابه زاویوي سرعت لرونکوعطالتي دستګاوو ته دوران کوي. که په R دستګاه کې د موقعیت وکتور، سرعت او په ذره باندې قوه $\vec{r}$ ، $\vec{v}_{R}$ او $\vec{F}_{R}$ وي، وښایاست چې په S دستګاه کې په ذره باندې قوه عبارت ده له

$$\vec{F}_{s} = \vec{F}_{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

۲۸. په ازاده توګه د ځمکې په سطحه د یوه جسم د سقوط په حالت کې د پیچي قوې اغېزه وڅیړئ.

۲۹. په ازاده توګه سقوط کوونکي جسم باندې د عاملې پیچي قوې لپاره افاده لاس ته راوړئ.

۳۰. د ځمکې له سطحې څخه پورته د h له ارتفاع څخه د جسم په ازاده عمودي توګه سقوط باندی د پیچي قوې اغیزه وڅیړئ.

۳۱. پیچي قوه څه شی ده؟ افاده یې لاس ته راوړئ. دپیچي قوې اغیز وڅیړئ.

۳۲. وښایاست چې د جاذبې g له امله په تعجیل کې کوچنی (fractional) تغیر کله چې مونږ له قطب څخه د استوا کرښې ته ځو له $\frac{r\omega^{2}}{g}$ څخه عبارت دی، داسې چې ω د r په شعاع لرلو سره د ځمکې زاویوي سرعت دی.

۳۳. د پیچي قوې ځینې جغرافیایي او نورې نتیجې وڅیړئ.

۳۴. عطالتي اوغیرعطالتي مأخذي دستګاوې څه شی دي؟

۳۵. تشریح کړئ چې د ځمکې د دوران د ښودلو لپاره د فوکالت شاقول د یوې الې په توګه څرنګه استعمالیږي اوڅرنګه ښیي چې ځمکه یوه عطالتي مأخذي دستګاه نه ده؟

۳۶. د فوکالت شاقول څه شی دی؟ ثبوت کړئ چې د فوکالت د شاقول د ګلولې مسیر بیضوي دی.

۳۷. د فوکالت شاقول څه شی دی؟ وښایاست چې د پیچي قوې افقي مرکبه چې د ګلولې په اهتزاز عمل کوي د اهتزاز د سطحې د دوران مسئوله ده. په λ عرض البلد کې یې پریود محاسبه کړئ.

۳۸. د فوکالت شاقول څه شی دی؟ نوموړی مونږ څرنګه ددې وړ ګرځوي چې د ځمکې دوران د خپل محور په شاوخوا وښیو.

عددي مسئلې

۱. یوه نقطه چې په فضا کې د حرکت په حال کې ده د موقعیت وکتور یې د t په وخت کې نظر یوې اختیاري غوره شوې مبدا $O(0،0،0)$ ته له $\vec{r} = 4\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - z\hat{k}$ څخه عبارت دی. کارتیزیني مختصات یې وټاکئ.

[ځواب. $4 ، 7، - 2$]

۲. دیوې نقطې کارتیزیني مختصات $(1،0،0)$ دي. په کروي قطبي مختصاتو سیستم کې به د نوموړې نقطې مختصات څه وي.

[ځواب. $1 ، 90^\circ ، 0^\circ$]

۳. دیوې نقطې قطبي مختصات $(r ، \theta ، \phi)$ له $(8، 30^\circ ، 45^\circ)$ څخه عبارت دي. د نوموړې نقطې کارتیزیني مختصات لاس ته راوړئ.

[ځواب. $2\sqrt{2} ، 2\sqrt{2} ، 4\sqrt{3}$]

۴. د یوې نقطې قطبي مختصات له $(16 ، 60^\circ ، 30^\circ)$ څخه عبارت دي. د نوموړې نقطې کارتیزیني مختصات لاس ته راوړئ.

[ځواب. $12 ، 4\sqrt{3} ، 8$]

۵. د یوې نقطې کارتیزیني مختصات $\left(1 ، 0 ، \sqrt{3}\right)$ دي. کروي قطبي مختصات یې لاس ته راوړئ؟

[ځواب. $2 ، 30^\circ ، 0^\circ$]

۶. د مبدا ګردچاپیر د یوې ذرې دایروي حرکت د $\vec{r} = b\vec{e}_r$ په واسطه توضیح کېږي داسې چې b د دایرې شعاع ده. وښایاست چې:

$$\vec{a} = -\omega^2 b\vec{e}_r + b\alpha\vec{e}_\theta \quad \text{او} \quad \vec{v} = b\omega\vec{e}_\theta$$

داسې چې $\omega = \dot{\theta}$ او $\alpha = \ddot{\theta}$

۷. د یوې ذرې حرکت د لاندې پارامتریکي معادلو پواسطه توضیح کېږي:

$$x = 8t \quad ، \quad y = 2cos3t - a \quad ، \quad z = 2sin3t + a$$

د ذرې د سرعت او تعجیل اندازه لاس ته راوړئ.

[ځواب. 11.66 واحده ، 18 واحده]

۸. د t په وخت کې د ذرې سرعت عبارت دی له

$$\vec{v} = 2\hat{\imath} + 5t\hat{\jmath} + \frac{1}{t}\hat{k}$$

په همدې لحظه کې د ذرې د موقعیت وکتور پیداکړئ.

[ځواب. $\vec{r} = \vec{r}_0 + 2t\hat{\imath} + 2.5t^2\hat{\jmath} + ln t\hat{k}$]

۹. د یوې ذرې حرکت د لاندې معادلو په واسطه توضیح کېږي.

$$x = 4sin2t \quad ، \quad y = 4cos2t \quad ، \quad z = 6t$$

د ذرې تعجیل پیدا کړئ.

[ځواب. 16 واحده]

۱۰. د یوې ذرې لار د لاندې معادلو پواسطه تعریف کېږي.

$$r = 3t - \frac{t^2}{30} \quad \text{او} \quad \theta^2 = 1600 - t^2$$

له $30s$ څخه وروسته یې خطي او زاویوي سرعت پیدا کړئ.

[ځواب. $-13.3\ rads^{-1}$ ، 67.8 واحده]

۱۱. د یوې ذرې د سرعت $(r ، \theta ، \phi)$ مرکبې هغه وخت چې $\theta = 40^\circ$ او $\phi = 45^\circ$ وي په ترتیب سره له $6m\ s^{-1}$، $4\ m\ s^{-1}$ او $3\sqrt{2}\ m\ s^{-1}$ څخه عبارت دي. په نوموړې لحظه کې د ذرې سرعت په کارتیزیني مختصاتو سیستم کې پیدا کړئ.

[ځواب. $(2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 2\hat{k})m\ s^{-1}$]

۱۲. یوسړی په ځمکه 60kg وزن لري. اغیزمن وزن به یې څومره وي کله چې په یوه راکټ کې سفر کوي

(i) په عمودي توګه پورته په 2g تعجیل.

(ii) په عمودي توګه ښکته په $4.9\ m\ s^{-2}$ تعجیل.

[ځواب. 180kg ، 30kg]

۱۳. یو سړی چې 80kg وزن لري په یوه لفټ کې ولاړ دی. که لفټ پورته طرف ته په $2m\ s^{-2}$ تعجیل سره حرکت وکړي د سړي اغیزمن وزن محاسبه کړئ.

[944N . ځواب]

۱۴. په استوا کرښه کې د سکون په حالت کې پرتې 50kg کتلې باندې خیالي قوه محاسبه کړئ، د ځمکې شعاع 6400 km راکړل شوې ده.

[0,1665N (په شعاعي توګه بهر خواته) . ځواب]

۱۵ـ نسبت د ځمکې په سطحه باندې ثابتې مأخذي دستګاه ته د لمر خیالي تعجیل محاسبه کړئ.

د ځمکې او لمر تر منځ واټن $= 1.5 \times 10^{10}$m راکړل شوی دی.

[$7.8 \times 10^{2}\ m\ s^{-2}$ (جهت یې د ځمکې طرف ته دی) . ځواب]

۱۶ـ نظر $2\ m\ s^{-2}$ ښکته تعجیل لرونکي متحرکې دستګاه ته په ازاده توګه سقوط کوونکي 5kg کتله لرونکي جسم باندې عامله خیالي قوه اومجموعي قوه محاسبه کړئ.

[39N ، 10N . ځواب]

۱۷ـ په 2×10^{-2}kg کتله باندې، چې د دوران کوونکي مأخذي دستګاه له محور څخه په 0.1m واټن کې ځای پر ځای شوې له مرکز څخه د فرار او خیالي قوې قیمتونه محاسبه کړئ. که د دستګاه د دوران زاویوي چټکتیا$10rads^{-1}$ وي.

[0.4N ، 0.2N . ځواب]

۱۸ـ د خیالي تعجیل له امله د عرض البلد په 60° له $100\ m$څخه په ازاده توګه د سقوط کوونکي جسم انحراف محاسبه کړئ.

[1.5cm . ځواب]

۱۹ـ د فوکالت د شاقول د اهتزاز د سطحې په واسطه نیول شوی وخت پیداکړئ چې په هغه کې په یوه نقطه کې 30° راګرځي، داسې چې عرض البلد 60° وي.

[2.31h . ځواب]

۲۰ـ د عرض البلد په 30° کې د شاقول د اهتزاز د سطحې د دوران قیمت محاسبه کړئ اوهمدارنګه هغه وخت لاس ته راوړئ چې په هغه کې پوره په قایمه زاویه راوګرځي.

[12h ، 0,065rad h^{-1} . ځواب]

دوهمه برخه

میخانیک -۲

د دوو جسمونو سیستم; لابراتوري او د کتلې د مرکزسیستم، په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې د ځای بدلون سرعتونو، حرکي انرژیو او د زاویو ترمنځ اړیکه.

د کتلې مرکز او د هغه حرکت، د یو جسم مسئلې ته د دوو جسمونو د مسئلې اړونه. د کتلې د مرکز د حرکت معادله، د نسبي موقعیت وکتور، په کمه شوې کتلې د قوې د حرکت معادله. په مرکزي قوه کې د زاویوي مومنټم د تحفظ قانون. د کمې شوې کتلې انرژي او د هغې تحفظ . د مدار تفاضلي معادله. د مدارونو شکلونه. د کپلر قوانین او د هغوی لاس ته راوړل. د ذراتو سیستم، د خطي او زاویوي مومنټم تحفظ او د ذراتو د سیستم انرژي.

دویم څپرکی

د ذراتو سیستم او د هغوی ټکرونه

۱.۲ مقدمه

د ذراتو د سیستم په څیړنه کې، مونږ باید په ذراتو باندې د سیستم څخه د باندنیو منابعو له امله د خارجي عاملو قواوو او د داخلي قواوو ترمنځ توپیر وکړو، د بیلګې په توګه په i ذره باندې په سیستم کې د ټولو ذراتو له امله. مونږ د iمې ذرې د حرکت معادلې د تعینولو لپاره د نیوټن د حرکت دویم قانون استعمالوو. د ذراتو په یوه سیستم کې، د ذراتو ترمنځ ټکرونه د ځینو خارجي قواوو او یا هم د داخلي قواوو له امله رامنځ ته کیدای شي. د یوه ټکر معنا د ذراتو ترمنځ د لنډ وخت متقابل عمل دی او فزیکي تماس لازمي نه دی.

۲.۲ ارتجاعي او غیر ارتجاعي ټکرونه

ټکر

ویل کېږي چې ټکر رامنځ ته شوی دی، که دوه ذرې په فزیکي توګه یوله بل سره ټکر وکړي یا هم که د یوې ذرې د حرکت لار د بلې په واسطه اغېزمنه شي. یا د ټکر معنا د دوو ذرو ترمنځ متقابل عمل دی چې له امله یې د ټکر کونکو ذرو د سرعت اندازه او لوری تغیر وکړي.

د ټکر ډولونه

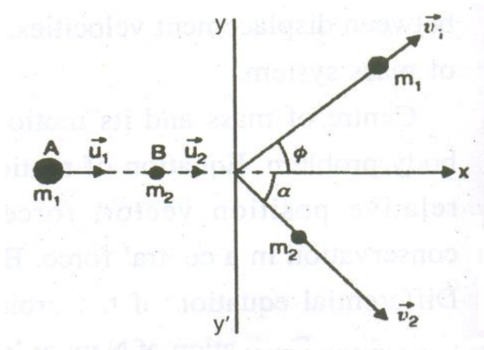
ټکرونه په دوه ډوله دي:

(i) ارتجاعي ټکر

(ii) غیر ارتجاعي ټکر

(i) ارتجاعي ټکر

هغه ټکر چې په هغه کې حرکي انرژي او مومنټم دواړه محفوظ پاتې کېږي ارتجاعي ټکر ورته ويل کېږي. د بيلګې په توګه (i) د اتومي او د اتوم څخه کوچنيو ذراتو ترمنځ ټکر. (ii) د هډوکينو پنډوسکو ترمنځ ټکر تقريباً ارتجاعي دی.



۱.۲.۲ شکل

د m_1 او m_2 کتلو لرونکي A او B دوه ذرې په پام کې ونيسئ چې په ترتيب سره په u_1 او u_2 سرعتونو د عين مستقيمې کربښې په امتداد حرکت کوي. v_1 او v_2 په ترتيب سره له ټکر څخه وروسته د دوی سرعتونه په پام کې ونيسئ. ۱.۲.۲ شکل.

د حرکي انرژي د تحفظ له قانون څخه، لرو چې

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2+\frac{1}{2}m_2{u_2}^2=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

د خطي مومنټم د تحفظ له قانون څخه

د x-محور په امتداد

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1\cos\Phi+m_2v_2\cos\alpha$$

د y-محور په امتداد

$$0+0=m_1v_1\sin\Phi-m_2v_2\sin\alpha$$

(ii) غير ارتجاعي ټکر

هغه ټکر چې په هغه کې خطي مومنټم محفوظ پاتې کېږي او حرکي انرژي محفوظه نه پاتې کېږي غير ارتجاعي بلل کېږي.

د بيلګې په توګه (i) د ډنډې او پنډوسکې ترمنځ ټکر. (ii) د هرو دوو فلزي پنډوسکو ترمنځ ټکر

د غير ارتجاعي ټکر په اوږدو کې، د سيستم حرکي انرژي کمېږي يعني

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 > \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

د ذرو په حرکي انرژي کې کمښت د انرژي په ځينو نورو شکلونو کې څرګنديږي، لکه تودوخه، غږ او داسې نور.

يو، دوه او درې بعده ټکرونه

يو بعده ټکر

هغه ټکر چې په هغه کې ټول حرکت په بشپړه توګه د يوې ځانګړې مستقيمې کرښې په امتداد رامنځ ته کيږي يو بعده ټکر بلل کيږي.

دوه بعده ټکر

هغه ټکر چې په هغه کې ټول حرکت په يوې ځانګړې سطحې کې رامنځ ته کيږي دوه بعده ټکر بلل کيږي.

درې بعده حرکت

هغه ټکر چې په هغه کې ټول حرکت په فضا کې رامنځ ته کيږي درې بعده ټکر بلل کيږي.

۳.۲ لابراتواري او د کتلې د مرکز د مختصاتو سيستم

لابراتواري سيستم. په ځمکه (يا لابراتوار) کې ځای په ځای شوی د مختصاتو هغه سيستم چې د يوې عطالتي دستګاه په توګه استعماليږي لابراتواري دستګاه بلل کيږي.

په لابراتواري سيستم کې، مشاهده کوونکی نظر لابراتوار ته ساکن په پام کې نيول کيږي له دې ځايه په لابراتواري دستګاه کې د تجربې په جريان کې د m_2 کتله لرونکې هدف ذره ساکنه نيول کيږي. يعنې $u_2 = 0$ (۱.۴.۲ شکل وګورئ). نو هدف ذره په لابراتواري سيستم کې د مختصاتو د دستګاه د مبدا په توګه په پام کې نيول کيږي. د ټکر څخه مخکې د کتلې مرکز$(c.m)$ داسې په پام کې نيول کيږي چې د V په ثابت سرعت سره د حرکت په حال کې وي او له ټکر څخه وروسته په عين سرعت سره خپل حرکت ته ادامه ورکوي، او د (m_1) واردېدونکې ذره د v_1 په سرعت

د Φ په امتداد تیتیږي او د m_2 هدف ذره د x-محور (یعنې لومړني لوري) سره د α زاویه جوړوي.

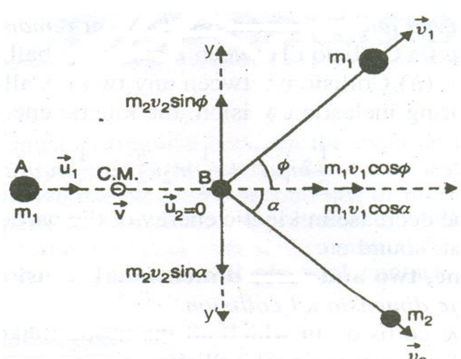
د کتلې د مرکز سیستم

یوه ساکنه مأخذي دستګاه نظر د سیستم د کتلې مرکز ته ، د کتلې د مرکز د مختصاتو سیستم یا په ساده توګه د کتلوي سیستم مرکز بلل کیږي.

د کتلوي سیستم په مرکز کې، له ټکر څخه مخکې او وروسته د سیستم د کتلې مرکز ساکن په پام کې نیول کیږي، له دې ځایه دواړه (واردېدونکي او هدف) ذرې د ټکر څخه مخکې او وروسته یو بل ته مخالف د حرکت په حال کې دي (۱.۶.۲ شکل وګورئ). دلته د مختصاتو دستګاه نظر مشاهده کونکي ته په خپله په ثابت سرعت سره د حرکت په حال کې ده، له دې ځایه دا له خپل ځان سره تړلې یو څه حرکي انرژي لري. نو د ذرو حرکي انرژي او مجموعي انرژي په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې توپیر لري.

۴.۲ په لابراتواري سیستم کې ارتجاعي ټکر

m_1 کتله لرونکي A یوه ذره په پام کې ونیسئ چې په u_1 سرعت سره m_2 کتله لرونکي B ذرې لوري ته چې لومړی په لابراتواري سیستم کې ساکنه ده $u_1 = 0$ حرکت کوي لکه په (۱.۴.۲) شکل کې چې ښودل شوي دي.



۱.۴.۲ شکل

له ټکر څخه وروسته، v_1 او v_2 په ترتیب سره د A او B ذرو سرعتونه په پام کې ونیسئ. Φ د A واردیدونکي ذرې د تیتیدنې زاویه او α د B هدف ذرې د بیرته ګرځیدو زاویه فرض کړئ.

څرنګه چې ټکر ارتجاعي دي، نو د سیستم خطي مومنټم او حرکي انرژي دواړه محفوظ پاتې کیږي.

د حرکي انرژي د تحفظ له قانون څخه،

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \qquad \text{... (۱.۴.۲)}$$

د x-محور په امتداد د خطي مومنتم د تحفظ له قانون څخه،

$$m_1u_1 + 0 = m_1v_1 \cos\Phi + m_2v_2 \cos\alpha \qquad \text{... (۲.۴.۲)}$$

د y-محور په امتداد

$$0 + 0 = m_1v_1 \sin\Phi - m_2v_2 \sin\alpha \qquad \text{... (۳.۴.۲)}$$

اوس څلور نامعلوم کمیتونه v_1 ، v_2 ، Φ او α او (۱.۴.۲) ، (۲.۴.۲) او (۳.۴.۲) درې معادلې شتون لري. نو ټول څلور کمیتونه د دغو درې معادلو په واسطه تعینیدای نه شي او لږ تر لږه باید یو له دغو څلورو کمیتونو څخه په تجربوي توګه تعین شي.

ځانګړی حالت

که $m_1 = m_2 = m$

نو (۱.۴.۲) ، (۲.۴.۲) او (۳.۴.۲) معادلې لاندې معادلو ته اختصارېږي.

$${u_1}^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 \qquad \text{... (۴.۴.۲)}$$

$$u_1 = v_1 \cos\Phi + v_2 \cos\alpha \qquad \text{... (۵.۴.۲)}$$

$$v_1 \sin\Phi = v_2 \sin\alpha \qquad \text{... (۶.۴.۲)}$$

(۵.۴.۲) معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$u_1 - v_1 \cos\phi = v_2 \cos\alpha \qquad \text{... (۷.۴.۲)}$$

(۶.۴.۲)او (۷.۴.۲) معادلو په مربع کولو او جمع کولو، لاس ته راځو چې

$${v_1}^2 \sin^2\phi + {u_1}^2 + {v_1}^2 \cos^2\phi - 2u_1v_1 \cos\phi = {v_2}^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

یا

$${v_1}^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + {u_1}^2 - 2u_1v_1 \cos\phi = {v_2}^2$$

$u_1{}^2 + v_1{}^2 - 2u_1v_1 \cos \phi = v_2{}^2$ ... (۸.۴.۲)

په (۸.۴.۲) معادله کې له (۴.۴.۲) معادلې څخه د $u_1{}^2$ د قیمت په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_1{}^2 - 2u_1v_1 \cos \Phi = v_2{}^2$

یا $2v_1{}^2 - 2u_1v_1 \cos \Phi = 0$

یا $2v_1{}^2 = 2u_1v_1 \cos \Phi$

یا $v_1 = u_1 \cos \Phi$ ... (۹.۴.۲)

په (۴.۴.۲) معادله کې له (۹.۴.۲) معادلې څخه د v_1 د قیمت په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$u_1{}^2 = u_1{}^2 \cos^2 \Phi + v_2{}^2$

یا $v_2{}^2 = u_1{}^2(1 - \cos^2 \Phi) = u_1{}^2 \sin^2 \Phi$

یا $v_2 = u_1 \sin \Phi$ ... (۱۰.۴.۲)

په (۶.۴.۲) کې له (۹.۴.۲) او (۱۰.۴.۲) معادلو څخه د v_1 او v_2 د قیمتونو په وضع کولو ، لاس ته راوړو چې

$u_1 \cos \Phi . \sin \Phi = u_1 \sin \Phi . \sin \alpha$

یا $\cos \Phi = \sin \alpha$

$\cos \Phi = \sin (90^\circ - \alpha)$

یا $\Phi = 90^\circ - \alpha$

یا $\alpha + \Phi = 90^\circ$ ... (۱۱.۴.۲)

له دې ځایه لاس ته راوړو چې، دوه عین کتله لرونکې ذرې له ټکر څخه وروسته یو له بل څخه په قایمه زاویه حرکت کوي که له ټکر څخه مخکې یوه له هغو څخه د سکون په حالت کې وي.

۱.۲ مثال. د m_1 کتله لرونکې ذره چې د u_1 په سرعت سره د حرکت په حال کې ده له m_2 کتله لرونکې ذرې څخه چې د سکون په حال ده په ارتجاعي توګه تیتیږي (scattered). له ټکر څخه وروسته، دواړه ذرې په مخالف لوري په عین چټکتیاو سره حرکت کوي. د وراديدونکې ذرې د کتلې له مخې د هدف ذرې کتله لاس ته راوړئ.

حل. فرض کړئ چې له ټکر څخه وروسته، واردیدونکې ذره په $-v$ سرعت سره حرکت کوي (په شا لوري) او هدف ذره د v په سرعت سره حرکت کوي (په مخ لوري).

د خطي مومنتم د تحفظ د قانون مطابق، لرو چې

$$m_1u_1 + m_2(0) = m_1(-v) + m_2v$$

یا $\qquad m_1u_1 = (m_2 - m_1)v \qquad \dots(i)$

د انرژي د تحفظ د قانون له مخې، لرو چې

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2(0)^2 = \frac{1}{2}m_1(-v)^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$

یا $\qquad m_1{u_1}^2 = (m_1 + m_2)v^2 \qquad \dots(ii)$

د (i) معادلې د دواړو خواو په مربع کولو او بیا یې په(ii)معادله باندې له ویشلو څخه، لرو چې

$$\frac{(m_1u_1)^2}{m_1{u_1}^2} = \frac{(m_2-m_1)^2v^2}{(m_1+m_2)v^2} \qquad \text{یا} \qquad m_1 = \frac{(m_2-m_1)^2}{m_1+m_2}$$

یا $\quad (m_2 - m_1)^2 = m_1(m_1 + m_2)\quad$ یا $\quad {m_1}^2 + {m_2}^2 - 2m_1m_2 = {m_1}^2 + m_1m_2$

یا $\qquad {m_2}^2 = 3m_1m_2 \qquad$ یا $\qquad m_2 = 3m_1$

یا $\qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

یا $\qquad m_2 = 3m_1$

۲.۲ مثال. یوه په $200ms^{-1}$ سرعت سره متحرکه $100g$ کتله لرونکې ګلوله یو لرګین $5kg$ کتله لرونکی بلوک وهي او په هغه کې ځای په ځای کېږي. د بلوک په واسطه ټوله اخیستل شوې چټکتیا او د ټکر په اوږدو کې په تودوخه باندې بدله شوې انرژي پیداکړئ، بلوک د حرکت کولو لپاره ازاد دی.

حل**.** څرنګه چې ګلوله په لرګین بلوک کې ځای په ځای کېږي، نو ټکر په طبیعت کې غیر ارتجاعي دی.

څرنګه چې د خطي مومنتم د تحفظ قوانین د غیرارتجاعي ټکر لپاره صدق کوي نو

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v \qquad \dots(\text{i})$$

داسې چې v هغه چټکتیا ده چې د ګلولې او لرګین بلوک په واسطه یوځای اخیستل شوې ده.

دلته، $m_1 = 100g = 0.1kg$ ، $u_1 = 200ms^{-1}$ ، $m_2 = 5kg$ او $u_2 = 0$

نو، (i) معادله به

$0.1 \times 200 + 5 \times 0 = (0.1 + 5) \times v$ یا $5.1v = 20$

یا $v = \frac{20}{5.1} = 3.92ms^{-1}$

د سیستم ابتدایي حرکي انرژي،

$$\mathrm{T}_i = \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u_2}^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (200)^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times (0)^2$$

$$\mathrm{T}_i = 2000\boldsymbol{J}$$

د سیستم نهایي حرکي انرژي،

$$\mathrm{T}_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2} \times (0.1 + 5) \times (3.92)^2 = 39.13\boldsymbol{J}$$

له دې ځایه، د ټکر په اوږدو کې په تودوخه بدله شوې انرژي،

$$\mathrm{E} = \mathrm{T}_i - \mathrm{T}_f = 2000 - 39.18 = 1960.82\boldsymbol{J}$$

۵.۲ په لابراتواري دستګاه کې د کتلې د مرکز سرعت

m_1 کتله لرونکې یوه ذره چې په لابراتواري دستګاه کې په u سرعت سره د حرکت په حال کې ده په پام کې ونیسئ چې د m_2 کتله لرونکې بلې ذرې سره چې د سکون په حال کې ده ټکر کوي او فرض کړئ چې له ټکر څخه وروسته د m_1 او m_2 کتلو سرعتونه په ترتیب سره $\vec{v}_1$ او $\vec{v}_2$ ته بدلیږي. لکه چې په (۱.۴.۲) شکل کې ښودل کیږي.

څرنګه چې ټکر ارتجاعي دی، نو خطي مومنټم محفوظ پاتې کیږي. یعني

$$m_1\vec{u}_1 + 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad \text{... (۱.۵.۲)}$$

له ټکر څخه مخکې د کتلې د مرکز سرعت $\vec{\mathrm{V}}$ عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{m_1\vec{u}_1 + 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{... (۲.۵.۲)}$$

له ټکر څخه وروسته د کتلې د مرکز سرعت $\vec{\mathrm{V}'}$ عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{V}'} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

(۱.۵.۲)معادلې په استعمالولو، لرو چې

$$\overrightarrow{\mathrm{V}'} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2} \quad \ldots (۳.۵.۲)$$

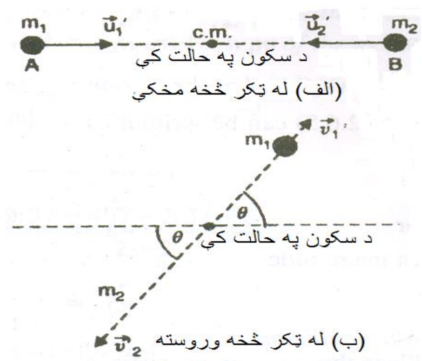
(۲.۵.۲) معادلې په استعمالولو، لرو چې

$$\overrightarrow{\mathrm{V}'} = \vec{\mathrm{V}} \quad \ldots (۴.۵.۲)$$

له دې ځایه لاس ته راوړو چې د کتلې د مرکز سرعت په لابراتواري دستګاه کې له ټکر څخه مخکې او وروسته یو شان پاتې کېږي.

۶.۲ د کتلې د مرکز په سیستم کې ارتجاعي ټکر

له ټکر څخه مخکې $\overrightarrow{u'}_1$ او $\overrightarrow{u'}_2$ د A او B دوه ذرو چې کتلې یې په ترتیب سره m_1 او m_2 (۱.۶.۲(الف)شکل) او له ټکر څخه وروسته $\overrightarrow{v'}_1$ او $\overrightarrow{v'}_2$ په ترتیب سره د A او B ذرو (۱.۶.۲(ب)شکل) د کتلې د مرکز په سیستم کې سرعتونه په پام کې ونیسئ. θ له ټکر څخه وروسته د تیتدنې زاویه فرض کړئ.



۱.۶.۲ شکل

څرنګه چې دواړه لابراتواري او د کتلې د مرکز دستګاوې عطالتي دستګاوې دي، نو سرعتونه یې د ګالیلایي انتقالاتو په واسطه وصل دي.

که $\vec{u}_1$، $\vec{u}_2(\vec{u}_2 = 0)$ او $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ په لابراتواري دستګاه کې په ترتیب سره له ټکر څخه مخکې او وروسته د A او B کتلو سرعتونه وي، نو د ګالیلایي انتقالاتو په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\overrightarrow{u'}_1 = \vec{u}_1 - \vec{\mathrm{V}}$$

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{u'}_2 = \vec{u}_2 - \vec{\mathrm{V}} = -\vec{\mathrm{V}}(\because \vec{u}_2 = 0) \\ \overrightarrow{v'}_1 = \vec{v}_1 - \vec{\mathrm{V}} \\ \overrightarrow{v'}_2 = \vec{v}_2 - \vec{\mathrm{V}} \end{array}\right] \quad \ldots (۱.۶.۲)$$

له ټکر څخه مخکې

په لابراتواري دستګاه کې د کتلې د مرکز سرعت عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2} \quad \ldots (۲.۶.۲)$$

د (۱.۶.۲) معادلې په لومړیو دوو معادلو کې د (۲.۶.۲) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\overrightarrow{u'}_1 = \vec{u}_1 - \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

یا

$$\overrightarrow{u'}_1 = \frac{m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_1-m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

یا (۳.۶.۲) ...

$$\overrightarrow{u'}_1 = \frac{m_2\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

او (۴.۶.۲) ...

$$\overrightarrow{u'}_2 = -\vec{V} = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

له (۳.۶.۲) او (۴.۶.۲) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې $\overrightarrow{u'}_1$ او $\overrightarrow{u'}_2$ په دقیقه توګه یو د بل په مخالف لوري د حرکت په حال کې دي.

∴ له ټکر څخه مخکې د سیستم مجموعي مومنټم،

$$m_1\overrightarrow{u'}_1 + m_2\overrightarrow{u'}_2 = \frac{m_1m_2\vec{u}_1}{m_1+m_2} - \frac{m_1m_2\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

یا (۵.۶.۲) ...

$$m_1\overrightarrow{u'}_1 + m_2\overrightarrow{u'}_2 = 0$$

له دې ځایه لاس ته راوړو چې سیستم د کتلې د مرکز په دستګاه کې له ټکر څخه مخکې صفر مومنټم لري. (۵.۶.۲) معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي.

$$m_2\overrightarrow{u'}_2 = -m_1\overrightarrow{u'}_1$$

یا

$$\overrightarrow{u'}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{u'}_1$$

د اندازې له مخې

(۶.۶.۲) ...

$$\overrightarrow{u'}_2 = \frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{u'}_1$$

له ټکر څخه وروسته

څرنګه چې ټکر ارتجاعي دی، نو د خطي مومنټم د تحفظ قانون باید د کتلې د مرکز په دستګاه کې ښه صدق وکړي یعنې د سیستم مومنټم به له ټکر څخه وروسته حتماً صفر وي.

∴

$$m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2 = 0$$

یا $\overrightarrow{v'}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{v'}_1$

د اندازې له مخې،

$$\overrightarrow{v'}_2 = \frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{v'}_1 \qquad \text{...(۷.۶.۲)}$$

په ارتجاعي ټکر کې، حرکي انرژي باید محفوظه پاتې شي، نو

$$\frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u'_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$$

یا

$$m_1{u'_1}^2 + m_1{u'_2}^2 = m_1{v'_1}^2 + m_2{v'_2}^2$$

له (۶.۶.۲) معادلې او (۷.۶.۲) معادلې څخه د u'_2 او v'_2 د قیمتونو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$m_1{u'_1}^2 + m_2\frac{{m_1}^2}{{m_2}^2}{u'_1}^2 = m_1{v'_1}^2 + m_2\frac{{m_1}^2}{{m_2}^2}{v'_1}^2$$

یا

$$m_1{u'_1}^2\left[1+\frac{m_1}{m_2}\right] = m_1{v'_1}^2\left[1+\frac{m_1}{m_2}\right]$$

یا

$${u'_1}^2 = {v'_1}^2$$

یا

$$u'_1 = v'_1$$

یا

$$v'_1 = u'_1 \qquad \text{...(۸.۶.۲)}$$

په عین توګه، ثبوتولی شو چې

$$v'_2 = u'_2 \qquad \text{...(۹.۶.۲)}$$

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې د کتلې د مرکز په دستګاه کې په ارتجاعي ټکر کې د ذرو د سرعتونو اندازې تغیر نه کوي.

۳.۲ مثال. په لابراتواري سیستم کې، $2kg$ کتله لرونکي دوه ذرې چې په ترتیب سره په $3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}ms^{-1}$ او $5\hat{\imath}+6\hat{\jmath}ms^{-1}$ سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي. د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ذرو د سیستم مجموعي حرکي انرژي پیدا کړئ.

حل. دلته، $m_1 = m_2 = 2kg$ ، $\vec{u}_1 = 3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}ms^{-1}$ او $\vec{u}_2 = 5\hat{\imath}+6\hat{\jmath}ms^{-1}$

د کتلې د مرکز سرعت عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2}{m_1+m_2} = \frac{2(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})+2(5\hat{\imath}+6\hat{\jmath})}{2+2}$$

یا $\vec{\mathrm{V}} = 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}ms^{-1}$

که $\mathrm{u'}_1$ او $\mathrm{u'}_2$ د کتلې د مرکز په سیستم کې د ذرو اړوند سرعتونه وي، نو

$$\overrightarrow{u'}_1 = \vec{u}_1 - \vec{\mathrm{V}} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) - (4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) = -(\hat{\imath} + \hat{\jmath})ms^{-1}$$

او $\overrightarrow{u'}_2 = \vec{u}_2 - \vec{\mathrm{V}} = (5\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}) - (4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})ms^{-1}$

یعنې $\overrightarrow{u'}_1 = \left|\overrightarrow{u'}_1\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}ms^{-1}$

او $\overrightarrow{u'}_2 = \left|\overrightarrow{u'}_2\right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}ms^{-1}$

نو، د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ذرو د سیستم حرکي انرژي،

$$\mathrm{T'}_i = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u'_2}^2$$

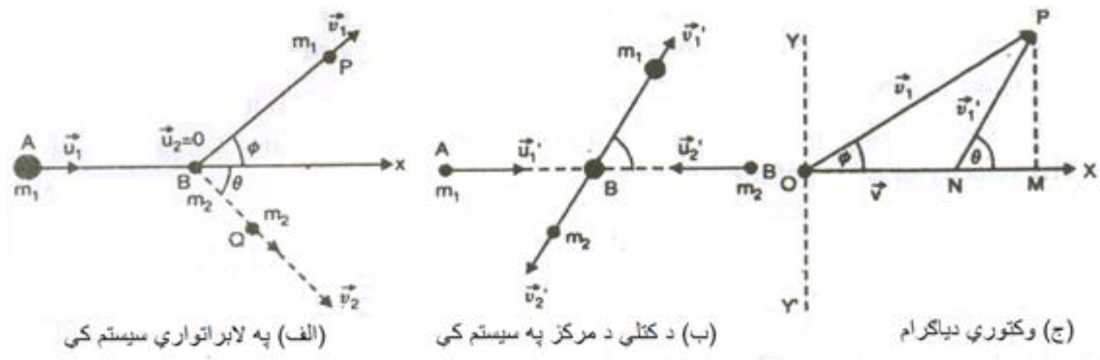
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{2})^2$$

$$= 2 + 2 = 4\boldsymbol{J}$$

۷.۲ په لابراتواري سیستم او د کتلې د مرکز په سیستم کې د تیتیدنې د زاویو ترمنځ اړیکه (یعنې د $\boldsymbol{\Phi}$ او $\boldsymbol{\theta}$ ترمنځ اړیکه)

په لابراتواري سیستم کې. په لابراتواري سیستم کې m_1 کتله لرونکې یوه ذره A په پام کې ونیسئ چې د m_2 کتله لرونکې ذرې B لور ته چې B د سکون په حال کې ده $(\vec{u}_2 = 0)$ په $\vec{u}_1$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده او له ټکر څخه وروسته A ذره د $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ په امتداد د Φ لارې په جوړولو سره تیتیږي لکه چې په ۱.۷.۲(الف) شکل کې ښودل شوي دي.

د کتلې د مرکز په سیستم کې. د m_1 او m_2 کتلو لرونکي دوه ذرې A او B چې په $\vec{u}_1$ او $\vec{u}_2$ سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي او له ټکر څخه وروسته د A ذرې سرعت v'_1 کیږي او د $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ په امتداد د کتلې د مرکز په سیستم کې د θ تیتیدنې زاویې په جوړولو تیتیږي لکه چې په ۱.۷.۲(ب) شکل کې ښودل کیږي.



۱.۷.۲ شکل

۱.۷.۲(ج) شکل د m_1 او m_2 کتلو وکتوري دیاګرام، چي له ټکر څخه وروسته په لابراتواري سیستم کي د تیتیدني زاویه Φ او د کتلي د مرکز په سیستم کي θ لري، ښيي.

له P څخه $PM \perp OM$ رسم کړئ.

په $\angle\Delta$ OMP قایم الزاویه مثلث کي،

$$\frac{PM}{NP} = \sin\theta$$

یا

$$PM = NP\sin\theta$$

یا

$$PM = v'_1\sin\theta \qquad \dots (۱.۷.۲)$$

او

$$NM = NP\cos\theta$$

او

$$NM = v'_1\cos\theta \qquad \dots (۲.۷.۲)$$

په$\angle\Delta$ OMP قایم الزاویه مثلث کي، لرو چي

$$\tan\Phi = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{ON+NM}$$

د (۱.۷.۲) معادلي او (۲.۷.۲) معادلي په استعمالولو، لاس ته راوړو چي

$$\tan\Phi = \frac{v'_1\sin\theta}{V+v'_1\cos\theta} = \frac{v'_1\sin\theta}{v'_1\cos\theta+V}$$ (Vد کتلي د مرکز سرعت دی)

$$\tan\Phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\frac{V}{v'_1}}$$

څرنګه چي د کتلي د مرکز په سیستم کي د ارتجاعي ټکر لپاره

$$v'_1 = u'_1$$

∴ $$\tan \Phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{V}{u'_1}} \qquad \ldots (۳.۷.۲)$$

پوهیږو چې

$$V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$ (۲.۵.۲ معادله وګورئ)

او $$u'_1 = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2}$$ (۳.۶.۲ معادله وګورئ)

له دې ځایه (۳.۷.۲) معادله به

$$\tan \Phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1 u_1}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{m_2 u_1}}$$

یا $$\tan \Phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1}{m_2}} \qquad \ldots (۴.۷.۲)$$

دا په لابراتواري دستګاه کې د تیتیدني د زاویې او د کتلې د مرکز په دستګاه کې د تیتیدني د زاویې ترمنځ غوښتل شوې اړیکه ده.

ځانګړي حالتونه.

1حالت**.** که $m_2 \ll m_1$ ، نو $\frac{m_1}{m_2} \gg 1$

نو (۲.۷.۴) معادله به

$$\tan \Phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (\gg 1)} \qquad \ldots (۵.۷.۲)$$

اوس θ د 0 او π ترمنځ پرته ده او -1 او $+1$ قیمتونه لري مګر $(1 \gg) + \cos \theta$ کمیت همیشه مثبت او له (۵.۷.۲) معادلې څخه، مونږ لاس ته راوړو چې Φ همیشه مثبت او Φ همیشه د 0 او $\frac{\pi}{2}$ ترمنځ پرته ده. پورتنی معادله د Φ د هر ورکړل شوي قیمت لپاره د θ دوه قیمتونه لري.

2 حالت**.** که $m_1 = m_2$ ، نو

$$\tan \Phi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \frac{2 \sin \theta/_2 \cos \theta/_2}{2 \cos^2 \theta/_2}$$

یا $$\tan \Phi = \tan \theta/_2$$

یا $\qquad$ (۶.۷.۲) ... $\qquad \Phi = {}^{\theta}/_{2}$

له دې ځایه، کله چې ټکر کوونکي ذرې عین کتلې ولري، په لابراتواري سیستم کې د تیتیدنې زاویه یوائې د کتلې د مرکز په سیستم کې د تیتیدنې د زاویې د قیمت له نیمایي سره مساوي ده.

څرنګه چې د θ اعظمي قیمت 180° دی، دا هغه وخت لاس ته راځي چې $m_1 = m_2$ ، په لابراتواري سیستم کې له 90° څخه په پورته زاویه کې تیتیدنه نه رامنځ ته کېږي.

3 حالت.که $m_2 \gg m_1$ ، نو $\frac{m_1}{m_2} \simeq 0$

$$\therefore \qquad \tan\Phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

یا $\qquad$ (۷.۷.۲) ... $\qquad \Phi = \theta$

له دې ځایه کله چې یو ډېر سپک جسم له یوه ډېر درروند جسم سره ټکر کوي، نو په لابراتواري سیستم کې د تیتیدنې زاویه د کتلې د مرکز د تیتیدنې له زاویې سره مساوي ده.

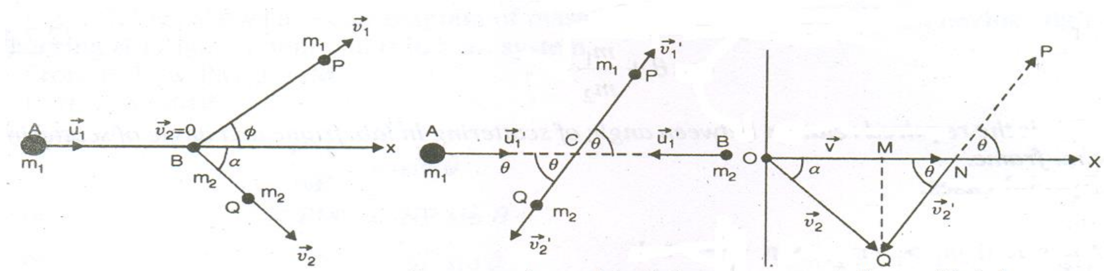
<u>۸.۲ په لابراتواري سیستم کې د بیرته راګرځیدو زاویې او د کتلې د مرکز د سیستم د تیتیدنې زاویې ترمنځ اړیکه(د α او θ ترمنځ اړیکه)</u>

په لابراتواري سیستم کې.

په لابراتواري سیستم کې m_1 کتله لرونکې ذره A په پام کې ونیسئ چې په $\vec{u}_1$ سرعت سره د m_2 کتلې لرونکې ذرې B لور ته چې د سکون په حال کې ده $(\vec{u}_1 = 0)$ د حرکت په حال کې ده او له ټکر څخه وروسته د B ذره د α زاویې په جوړولو د BQ په امتداد بیرته ګرځي لکه چې په ۱.۸.۲(الف) شکل کې ښودل کېږي.

د کتلې د مرکز په سیستم کې.

m_1 او m_2 کتله لرونکي A او B دوه ذرې چې په $\overrightarrow{u'}_1$ او $\overrightarrow{u'}_2$ سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي په پام کې ونیسئ او له ټکر څخه وروسته د B ذرې سرعت $\overrightarrow{v'}_2$ کېږي او د BQ په امتداد د کتلې د مرکز د سیستم د تیتیدنې زاویې په جوړولو تیتیږي لکه چې په ۱.۸.۲(ب) شکل کې ښودل کېږي.



(الف) په لابراتواري سیستم کې (ب) د کتلې د مرکز په سیستم کې (ج) وکتوري دیاګرام

۱.۸.۲ شکل

۱.۸.۲(ج) شکل د m_1 او m_2 کتلو وکتوري دیاګرام ښيي چې له ټکر څخه وروسته په لابراتواري سیستم کې د بیرته ګرځیدو زاویه α او د کتلې د مرکز په سیستم کې د تیتیدنې زاویه θ لري چې په ترتیب سره د OQ او NQ په واسطه ښودل کېږي.

له Q څخه $QM \perp ON$ رسم کړئ.

په $\angle\Delta QMN$ قایم الزاویه مثلث کې

$$\frac{MQ}{NQ} = \sin\theta$$

یا
$$MQ = NQ\sin\theta$$

یا (۱.۸.۲) ...
$$MQ = v'_2\sin\theta$$

او
$$MN = NQ\cos\theta$$

یا (۲.۸.۲) ...
$$MN = v'_2\cos\theta$$

په $\angle\Delta OMQ$ قایم الزاویه مثلث کې

$$\tan\alpha = \frac{MQ}{OM} = \frac{MQ}{ON-MN}$$

د (۱.۸.۲) معادلې او (۲.۸.۲) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\tan\alpha = \frac{v'_2\sin\theta}{V-v'_2\cos\theta}$$ (V د کتلې د مرکز سرعت دی)

یا
$$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\frac{V}{v'_2}-\cos\theta}$$

څرنګه چې د کتلې د مرکز په سیستم کې د ارتجاعي ټکر لپاره

$$v'_2 = u'_2$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\frac{\mathrm{V}}{u'_2} - \cos\theta}$$ ... (۳.۸.۲) ∴

ځرنګه چې

$$u'_2 = |\overrightarrow{u'}_2| = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$ [(۴.۶.۲) معادله وګورئ]

او $$\mathrm{V} = |\vec{\mathrm{V}}| = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$ [(۲.۵.۲) معادله وګورئ]

نو $$\frac{\mathrm{V}}{u'_2} = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \times \frac{m_1 + m_2}{m_1 u_1} = 1$$

له دې ځایه (۳.۸.۲) معادله به

$$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\sin{}^{\theta}/_{2}\cos{}^{\theta}/_{2}}{2\sin^2{}^{\theta}/_{2}}$$

یا $$\tan\alpha = \frac{\cos{}^{\theta}/_{2}}{\sin{}^{\theta}/_{2}} = \cot{}^{\theta}/_{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

یا $$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$ ... (۴.۸.۲)

دا په لابراتواري سیستم کې د بیرته ګرځیدو زاویې او د کتلې د مرکز په سیستم کې د تیتیدنې زاویې ترمنځ اړیکه ده.

(۴.۸.۲)معادله په لاندې توګه هم لیکل کیدای شي

$$\pi - \theta = 2\alpha$$

$$180^\circ - \theta = 2\alpha$$

د کتلې د مرکز په سیستم کې $(180^\circ - \theta)$ د بیرته ګرځیدو زاویه بلل کیږي.

یعنې د کتلې د مرکز په سیستم کې د بیرته ګرځیدو زاویه $= 2 \times$ په لابراتواري سیستم کې د بیرته ګرځیدو زاویه.

له دې ځایه، د ارتجاعي ټکر په اوړدو کې، د کتلې د مرکز په سیستم کې د بیرته ګرځیدو زاویه یوازې په لابراتواري سیستم کې د بیرته ګرځیدو د زاویې له دوه برابره سره مساوي ده.

سربیره پردې، دا لاس ته راځي چې د لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې د تیتیدنې د زاویو ترمنځ د اړیکې خلاف، په دواړو سیستمونو کې د بیرته ګرځیدو د زاویو ترمنځ اړیکه د ټکر کوونکو ذرو د کتلو او همدارنګه د هغوی د سرعتونو څخه مستقله ده.

ځانګړی حالت

که $m_1 = m_2$، نو

$$\Phi = {}^{\theta}/_{2}$$

(داسې چې Φ په لابراتواري دستګاه کې د تیتیدنې زاویه ده)

نو (۴.۸.۲) معادله به

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Phi$$

یا

$$\alpha + \Phi = \frac{\pi}{2}$$

یعنې د دوو مساوي کتلو ترمنځ په ارتجاعي ټکر کې، په لابراتواري سیستم کې تیته شوې او بیرته ګرځیدلې ذره له یو بل څخه په قایمه زاویه سره حرکت کوي.

<u>۹.۲ په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې د ارتجاعي ټکر حرکي انرژي</u>

(i) **په لابراتواري سیستم کې.** په لابراتواري سیستم کې له ټکر څخه مخکې د m_1 او m_2 کتله لرونکې دوه ذرې چې په u_1 او u_2 $(u_2 = 0)$ سرعتونو سره چې په ترتیب سره د T_1 او T_2 حرکي انرژي لري د حرکت په حال کې په پام کې ونیسئ.

په لابراتواري سیستم کې له ټکر څخه مخکې د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي T_i عبارت ده له

$$T_i = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 {u_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {u_2}^2$$

یا

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 {u_1}^2 \qquad \ldots (۱.۹.۲)$$

که t_1 او t_2 په لابراتواري سیستم کې له ټکر څخه وروسته د دوو ذرو حرکي انرژي وښيي، نو

په لابراتواري سیستم کې د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي T_f عبارت ده له

$$T_f = t_1 + t_2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 \qquad \ldots (۲.۹.۲)$$

په لابراتواري سیستم کې، د ارتجاعي ټکر د انرژي د تحفظ له قانون څخه

$$T_i = T_f$$

یعنې

$$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \qquad \text{... (۳.۹.۲)}$$

(ii) د کتلې د مرکز په سیستم کې

فرض کړئ چې د کتلې د مرکز په سیستم کې له ټکر څخه مخکې د m_1 او m_2 کتلو سرعتونه u'_1 او u'_2 او په ترتیب سره له ټکر څخه وروسته v'_1 او v'_2 ته بدلیږي.

د کتلې د مرکز په سیستم کې له ټکر څخه مخکې د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي T'_i

$$T'_i = T'_1 + T'_2 = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u'_2}^2 \qquad \text{... (۴.۹.۲)}$$

د کتلې د مرکز په سیستم کې له ټکر څخه وروسته د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي T'_f

$$T'_f = t'_1 + t'_2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_1{v'_2}^2 \qquad \text{... (۵.۹.۲)}$$

د کتلې د مرکز په سیستم کې، د ارتجاعي ټکر د انرژي د تحفظ له قانون څخه

$$T'_i = T'_f$$

یعنې

$$\frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_1{u'_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_1{v'_2}^2 \qquad \text{... (۶.۹.۲)}$$

په لابراتواري سیستم او د کتلې د مرکز په سیستم کې د ابتدایي انرژیو ترمنځ اړیکه

له ټکر څخه مخکې، په لابراتواري دستګاه کې د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي (T_i) او د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ذرو مجموعي حرکي انرژي (T'_i) عبارت دي له

$$T_i = \frac{1}{2}m_1{u_1}^2$$

$$T'_i = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{u'_2}^2$$

$$\frac{\mathrm{T}_i}{\mathrm{T'}_i} = \frac{\frac{1}{2}m_1{u_1}^2}{\frac{1}{2}m_1{u'_1}^2+\frac{1}{2}m_2{u'_2}^2} = \frac{m_1{u_1}^2}{m_1{u'_1}^2+m_2{u'_2}^2}$$

ځرنګه چې $$u'_1 = \left|\overrightarrow{u'}_1\right| = \frac{m_2u_1}{m_1+m_2}$$

او $$u'_2 = \left|\overrightarrow{u'}_2\right| = \frac{m_1u_1}{m_1+m_2}$$

$\therefore$ $$\frac{\mathrm{T}_i}{\mathrm{T'}_i} = \frac{m_1{u_1}^2}{\frac{m_1{m_2}^2{u_1}^2}{(m_1+m_2)^2}+\frac{m_2{m_1}^2{u_1}^2}{(m_1+m_2)^2}} = \frac{m_1{u_1}^2(m_1+m_2)^2}{{u_1}^2m_1m_2(m_1+m_2)} = \frac{m_1+m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}+1$$

ځرنګه چې $$\frac{m_1}{m_2}+1>1$$

$\therefore$ $$\frac{\mathrm{T}_i}{\mathrm{T'}_i}>1$$

یا $$\mathrm{T'}_i < \mathrm{T}_i \quad \ldots (۷.۹.۲)$$

یعني د کتلې د مرکز په سیستم کې د ټکر کوونکو ذرو مجموعي حرکي انرژي همیشه له هغه څخه کمه ده چې په لابراتواري سیستم کې د ارتجاعي ټکر په اوږدو کې د دوو ذرو ترمنځ وي.

په دواړو سیستمونو کې د حرکي انرژیو توپیر یعني $\mathrm{T}_i - \mathrm{T'}_i$ د کتلې مرکز ته ځي داسې چې حرکي انرژي یې یعني T_{cm} دی.

د کتلې د مرکز په سیستم کې د ابتدایي حرکي انرژیو ترمنځ اړیکه

د کتلې د مرکز په سیستم کې، له ټکر څخه مخکې د m_1 ذره د u'_1 سرعت لري او د m_2 ذره د u'_2 سرعت لري.

$\therefore$ د واردېدونکې ذرې m_1 حرکي انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{T'}_1 = \frac{1}{2}m_1{u'_1}^2$$

ځرنګه چې

$$u'_1 = \frac{m_2u_1}{m_1+m_2}$$

$\therefore$ $$\mathrm{T'}_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1{m_2}^2{u_1}^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2}m_1{u_1}^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

$$T'_1 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 T'_i$$ ... (۸.۹.۲) یا

په عین توګه، د m_2 کتله لرونکې هدف ذرې حرکي انرژي عبارت ده له

$$T'_2 = \frac{1}{2} m_1 {u'_2}^2$$

ځرنګه چې $u'_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1+m_2}$

$$\therefore \quad T'_2 = \frac{1}{2}\frac{m_2 {m_1}^2 {u_1}^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2} m_1 {u_1}^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$T'_2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} T_i$$ ... (۹.۹.۲) یا

$$\therefore \quad \frac{T'_1}{T'_2} = \frac{{m_2}^2 T_i}{(m_1+m_2)^2} \times \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2 T_i}$$

$$\therefore \quad \frac{T'_1}{T'_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

له دې ځایه د ټکر کوونکو ذرو ابتدایي حرکي انرژي د هغوی له کتلو سره معکوساً متناسبه ده.

ځو ځوابه پوښتنې

۱. په فزیک کې د ټکر مانا

(الف) یو بل وهل (ب) په ټولو ځنډو کې فزیکي تماس کې کیدل

(ج) د لنډې مودې دوه طرفه متقابل عمل (د)هیڅ یو له پورتنیو ځخه

۲. په ارتجاعي ټکر کې کوم یو له لاندې کمیتونو ځخه محفوظ دی.

(الف) زاویوي مومنټم (ب) خطي مومنټم

(ج) حرکي انرژي (د) زاویوي سرعت

۳. که په ټکر کې د شته ذرو طبیعت محفوظ پاتې شي، نو نوموړی ټکر بلل کېږي

(الف) ارتجاعي (ب) غیر ارتجاعي

(ج) تیتیدنه (د) عکس العمل

۴. خټه دیوال ته ویشتل کېږي، چې په هغه پورې نښلي. نوموړی ټکرعبارت دی له

(الف) ارتجاعي (ب) نږدې ارتجاعي

(ج) غیر ارتجاعي (د) د ټکر په اړه هیڅ نه شي ویل کیدای

۵. د مومنټم د تحفظ قانون صدق کوي

(الف) کله چې ټکر لحظوي وي (ب) یوازې د ذرو لپاره

(ج) یوازې د کلکو جسمونو لپاره (د) په ټولو حالاتو کې

۶. په لابراتواري سیستم کې، m_1 کتله لرونکې واردیدونکې ذره له m_2 کتله لرونکې بیرته ګرځوونکې هدف ذرې ځخه په قایمه زاویه حرکت کوي

(الف) $m_1 = m_2$ (ب) $m_2 < m_1$

(ج) $m_2 > m_1$ (د) $m_1 = 2m_2$

۷. د کتلې د مرکز په سیستم کې، د ټکر کوونکو ذرو حرکي انرژي عبارت ده له

(الف) له کتلو سره مستقیماً متناسب (ب) له کتلو څخه مستقل

(ج) د هغوی له کتلو سره معکوساً متناسب (د) هیڅ یو له دوی څخه

۸. د کتلې د مرکز په سیستم کې، د تیتیدنې زاویې اعظمي قیمت عبارت دی له

(الف) $\pi/_2$ (ب) π

(ج) $3\pi/_2$ (د) 2π

ځوابونه

۱ (ج) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (الف) ۷ (ج) ۸ (ب)

لنډ ځوابه پوښتنې

۱. پوښتنه. د ټکرونو د مطالعه کولو ارزښت څه شی دی؟

ځواب. د اتومي هستې کشف، د هستې تجزیه، په طبیعت کې اساسي قوې او نورې ابتدایي ذرې د ټکرونو د مطالعه کولو په واسطه کشف شوي دي.

۲. پوښتنه. ایا د دوو توپونو ترمنځ ټکر د α ذرې او هستې ترمنځ له ټکر سره توپیر لري؟

ځواب. هو، د دوو توپونو ترمنځ د ټکرونو په حالت کې، دوی د لنډې مودې لپاره یو پر بل باندې قوه واردوي او د α ذرې او هستې ترمنځ د ټکر په حالت کې، قوه په نظري توګه د وخت د نامحدودې مودې لپاره عمل کوي. په مخکیني حالت کې د متقابل عمل قوه د ارتجاعیت له امله ده او په وروستي حالت کې د متقابل عمل قوه الکتروستاتیکي ده.

۳. پوښتنه. د تیتیدنې او عکس العمل ترمنځ توپیر څه شی دی، کله چې دوه ذرې ټکر کوي؟

ځواب. د تیتیدنې پروسه او عکس العمل په لاندې ټکو کې سره توپیر لري:

۱. د تیتیدنې په پروسه کې، د ټکر کوونکو ذرو کتلې له ټکر څخه وروسته په همهغه اندازه پاتې کېږي لکه له ټکر څخه مخکې چې وې؛ دا په داسې حال کې چې په عکس العمل کې، د ذرو کتلې په بشپړه توګه له ټکر کوونکو ذرو څخه مختلفې دي.

۲. په ارتجاعي تیتیدنې پروسه کې، حرکي انرژي محفوظه ده؛ دا په داسې حال کې چې په عکس العمل کې، حرکي انرژی محفوظه نه ده. په حرکي انرژي کې کمښت د ورسته پاتې ذرې د هیجان

د انرژي په توګه ښکاره کېږي، چې وروسته بیا د نور، x- وړانګو، γ- وړانګو او نورو په شکل وي.

۴. پوښتنه. څرنګه مختلفو کمیتونو ته په لابراتواري او د کتلې د مرکز په دستګاوو کې ارتباط ورکړل شوی دی؟

ځواب. لابراتواري او د کتلې د مرکز سیستمونه دواړه عطالتي ماخذي دستګاوې دي. که د نور د سرعت په پرتله د کتلې د مرکز د سیستم سرعت کم وي، نو په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې مختلف کمیتونه یو له بل سره د ګالیلا د انتقالاتو په واسطه سره په ارتباط کې کېږي.

۵. پوښتنه. د کتلې د مرکز په سیستم کې د ټکر د پروسې د مطالعه کولو ګټې څه دي؟

ځواب. د خطي مومنټم او انرژي د تحفظ د قانون په تطبیق کولو، دا ممکنه نه ده چې په لابراتواري سیستم کې د v_1 ، v_2 ، αاو β نامعلوم کمیتونه وټاکو. سره ددې، څرنګه چې نظر لابراتواري سیستم ته د کتلې مرکز په ثابت سرعت سره حرکت کوي، د کتلې د مرکز په سیستم کې له ټکر څخه وروسته د دوو ذرو سرعتونه v'_1او v'_2 د کتلې د مرکز په سیستم کې له هغو سره چې له ټکر څخه مخکې وو عین شی راځي. د ټیټیدنې زاویه د تحفظ د قوانینو په تطبیق کولو ټاکل کیدای شي.

۶. پوښتنه. د کتلې د مرکزپه سیستم کې د نسبي حرکت د شاملیدو اصلي کیفیت څه شی دی؟

ځواب. د کتلې د مرکز په سیستم کې، ذرې له ټکر څخه مخکې معلومیږي چې یو بل ته نږدې کېږي او له ټکر څخه وروسته معلومیږي چې یو له بل څخه مختلفو لوریو ته حرکت کوي.

۷. پوښتنه. یوه لابراتواري دستګاه او د کتلې د مرکز یوه دستګاه څرنګه یو له بل سره وصل کیدای شي؟

ځواب. څرنګه چې لابراتواري دستګاه او د کتلې د مرکز دستګاه دواړه عطالتي دستګاوې دي، نو د ګالیلا د انتقالاتو په واسطه یو له بل سره وصل کیدای شي، داسې چې د کتلې د مرکز د دستګاه سرعت به د نور د سرعت په پرتله ډیر کم وي.

۸. پوښتنه. په لابراتواري سیستم کې د کتلې د مرکز د سرعت لوری کوم دی؟

ځواب. په لابراتواري سیستم کې، د کتلې د مرکز سرعت $(\vec{V})$ د واردیدونکې ذرې له سرعت $(\vec{u}_1)$ سره د لاندې رابطې په واسطه ارتباط مومي

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2}$$

له دې ځايه، مونږ د کتلې د مرکز د سرعت لوری پیدا کوو او لابراتواري سیستم د واردیدونکي ذرې د لوري په امتداد دی.

۹. پوښتنه. وښایاست چې که چیرې د هدف ذرې په پرتله چې د سکون په حال کې ده د واردیدونکي ذرې کتله ډیره کوچنۍ وي، په لابراتواري سیستم کې د تیتیدنې زاویه د کتلې د مرکز د تیتیدنې له زاویې سره مساوي ده؟

ځواب. په لابراتواري سیستم کې د تیتیدنې زاویه (Φ) او د کتلې د مرکز د سیستم د تیتیدنې زاویه د لاندې رابطې په واسطه ارتباط مومي

$$\tan\Phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

څرنګه چې $m_1 \ll m_2$ ، نو $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ له دې ځایه $\cos\theta + \frac{m_1}{m_2} = \cos\theta$

∴ $$\tan\Phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

یا $$\Phi = \theta$$

۱۰. پوښتنه. په یوه ارتجاعي ټکر کې، د سیستم حرکي انرژي محفوظه ده. ایا د ځانګړو ذرو حرکي انرژي محفوظه ده په (الف) لابراتواري سیستم کې (ب) د کتلې د مرکز په سیستم کې؟

ځواب. په لابراتواري سیستم کې د ځانګړو ذرو حرکي انرژي محفوظه نه ده، ځکه چې د ذرو سرعتونه له ټکر څخه وروسته هغه شی نه پاتې کیږي لکه له ټکر څخه مخکې چې وو.

د کتلې د مرکز په سیستم کې د ذرو سرعتونه له ټکر څخه وروسته هغه شی پاتې کیږي لکه له ټکر څخه مخکې چې وو. له دې ځایه، د کتلې د مرکز په سیستم کې د ځانګړو ذرو حرکي انرژي محفوظه ده.

تمرین

اوږد ځوابه پوښتنې

۱. ټکر تعریف کړئ. ارتجاعي او غیر ارتجاعي ټکرونه څه شی دي؟ په طبیعت کې د قواو د پیژندلو لپاره د ټکرونو مطالعه کول څه ګټه لري؟

۲. لابراتواري او د کتلې د مرکز سیستمونه تشریح کړئ. په لابراتواري سیستم کې د دوو ذرو ترمنځ ارتجاعي ټکر توضیح کړئ.

۳. وښایاست چې په لابراتواري سیستم کې، عین کتله لرونکې ذرې له ټکر څخه وروسته یو بل ته په قایمه زاویه حرکت ورکوي، که له ټکر څخه مخکې یو له هغوی څخه د سکون په حال کې وي.

۴. وښایاست چې د کتلې د مرکز په سیستم کې، په ارتجاعي ټکر کې د سرعتونو اندازې تغیر نه کوي.

۵. د لابراتواري دستګاه او د کتلې د مرکز د دستګاه ترمنځ توپیر په ګوته کړئ.

۶. لابراتواري او د کتلې د مرکز د مختصاتو سیستمونه څه شی دي؟ په دواړو سیستمونو کې د ارتجاعي ټکر لپاره د سرعتونو ترمنځ رابطه پیدا کړئ.

۷. د دوو جسمونو په ارتجاعي ټکر کې د لابراتواري او د کتلې د مرکز د سیستمونو د تیتیدنې د زاویو ترمنځ رابطه پیدا کړئ.

۸. که د کتلې د مرکز په سیستم کې د واردیدونکې ذرې د تیتیدنې زاویه θ وي، نو وښایاست چې Φ زاویه، چې د هغې په واسطه په لابراتواري سیستم کې تیتیږي عبارت ده له

$$\tan\Phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

همدارنګه دا حالتونه توضیح کړئ. کله چې (i) $m_1 < m_2$ (ii) $m_1 > m_2$ (iii) $m_1 = m_2$.

۹. که د کتلې د مرکز په سیستم کې د واردیدونکې ذرې د تیتیدنې زاویه θ وي، نو وښایاست چې ساکنه هدف ذره په لابراتواري سیستم کې د لاندې زاویې په واسطه تیتیږي.

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

۱۰. په لابراتواري او د کتلې د مرکز په سیستم کې د حرکي انرژیو ترمنځ رابطه لاس ته راوړئ.

۱۱. ثبوت کړئ چې د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ذرو د سیستم ابتدايي حرکي انرژي همیشه د هغه له هغه قیمت څخه چې په لابراتواري سیستم کې یې دی کمه ده، کله چې دوه ذرې په ارتجاعي توګه ټکر وکړي.

۱۲. ثبوت کړئ چې د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ټکر کوونکو ذرو ترمنځ حرکي انرژي د هغوی له کتلو سره معکوساً متناسبه ده.

۱۳. لابراتواري او د کتلې د مرکز د مختصاتو سیستمونه تشریح کړئ. ثبوت کړئ چې د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ټکر کوونکو ذرو ترمنځ حرکي انرژي د هغوی له کتلو سره معکوساً متناسبه ده.

۱۴. ثبوت کړئ چې د کتلې د مرکز په دستګاه کې د یوه سیستم حرکي انرژي همیشه له هغې حرکي انرژي څخه کمه ده چې په لابراتواري دستګاه کې ده.

۱۵. وښایاست چې د کتلې د مرکز په سیستم کې د دوو ذرو د سیستم حرکي انرژي همیشه د هغه له هغه قیمت څخه چې په لابراتواري سیستم کې یې دی کمه ده، کله چې دوه ذرې په ارتجاعي توګه ټکر وکړي.

عددي مسائل

۱. یوه m کتله لرونکې ذره چې په u سرعت سره د حرکت په حال کې ده له بلې M کتله لرونکې ذرې څخه په ارتجاعي توګه تیتیږي. له ټکر څخه وروسته دواړه ذرې په عین چټکتیا سره په مخالف لوریو حرکت کوي. ثبوت کړئ چې د هدف ذرې کتله د واردیدونکې ذرې د کتلې درې برابره ده.

۲. دوه غیرمساوي کتله لرونکي توپونه په مساوي سرعتونو سره د ټکر په مخالف لوریو د حرکت په حال کې دي. له ټکر څخه وروسته یو توپ ساکن کیږي. که ټکر ارتجاعي وي، د کتلو نسبت یې څومره دی.

[ځواب. $\frac{3}{1}$]

۳. یو $4kg$ کتله لرونکی جسم په ارتجاعي توګه له یو بل جسم (m کتله لرونکی) سره چې د سکون په حال کې دی ټکر کوي او بیا په خپل اصلي لوري خپل حرکت ته د اصلي چټکتیا په یو پر څلورمې ادامه ورکوي. m پیدا کړئ.

[ځواب. $2.4kg$]

۴. یوه m_1 کتله لرونکي ذره چې په u_1 سرعت سره د حرکت په حال کې ده مخامخ له m_2 کتله لرونکي ذرې سره چې د سکون په حال کې ده ټکر کوي، داسې چې له ټکر څخه وروسته په ترتیب سره د v_1 او v_2 په سرعتونو حرکت کوي. که ټکر په بشپړه توګه ارتجاعي وي، وښایاست چې

$v_2 = \frac{2m_1u_1}{m_1+m_2}$

۵. یوه m کتله لرونکي ذره چې په u سرعت سره د حرکت په حال کې ده او د M کتله لرونکي ذرې سره، چې لومړی د سکون په حال کې ده ټکر کوي. د دواړو ذرو شریک سرعت او له ټکر څخه وروسته په حرکي انرژي کې کمښت پیدا کړئ.

[ځواب. $\frac{mu}{\mathrm{M}+m}$, $\frac{1}{2}\frac{m\mathrm{M}}{\mathrm{M}+m}u^2$]

۶. یوه $200g$ چټکتیا سره د حرکت په حال کې ده یوه $10kg$ د شګې بوری وهي او په کې پاتې کېږي. هغه چټکتیا چې د شګې بوری ترلاسه کړې ده، که بوری د حرکت لپاره ازاده وي او انرژي چې د ټکر په اوږدو کې په تودوخې بدله شوې ده پیدا کړئ.

[ځواب. $39.2J$]

۷. یوه m کتله لرونکي ذره چې په u سرعت سره د حرکت په حال کې ده له یوې نامعلومې کتلې لرونکي هدف ذرې سره چې لومړی د سکون په حال کې ده ټکر کوي. که له ټکر څخه وروسته، هدف ذره مخې ته په $\frac{u}{3}$ سرعت سره حرکت وکړي، په داسې حال کې چې واردیدونکی ذره شا لور ته په $\frac{2u}{3}$ سرعت سره حرکت وکړي، د هدف ذرې کتله پیدا کړئ.

[ځواب. $5m$]

۸. دوه ذرې چې هره یوه یې $2kg$ کتله لرونکي ده په ترتیب سره په $(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})ms^{-1}$ او $(5\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})ms^{-1}$ سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي. د کتلې د مرکز په نسبت د سیستم مجموعي انرژي پیدا کړئ.

[ځواب. $\mathrm{E} = 4J$]

۹. وښایاست چې په لابراتواري دستګا کې د دوو ذرو د سیستم حرکي انرژي د کتلې د مرکز د حرکي انرژي او د کتلې د مرکز په نسبت د دوو ذرو د حرکي انرژي له مجموعې سره مساوي ده.

۱۰. یوه m کتله لرونکې ذره چې په $\vec{u}$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده په ارتجاعي توګه له یوې مساوي کتله لرونکې ساکنې ذرې سره ټکر کوي. ثبوت کړئ چې په لابراتواري دستګاه کې له ټکر څخه وروسته د هدف ذرې حرکي انرژي عبارت ده له

$$T = \frac{1}{2} m u^2 \sin^2 \theta/_2$$

داسې چې θ د کتلې د مرکز په دستګاه کې د تیتیدنې زاویه ده.

دریيم څپرکی

د مرکزي قوې ساحې لاندې حرکت

۱.۳ مقدمه

د یو جسم د سکون موقعیت یا یونواخت حرکت ته د تغیر ورکولو لپاره، همیشه یوې خارجي قوې ته اړتیا ده. دغه خارجي قوه د مختلفو ډولونو لکه برقي قوه، مقناطیسي قوه، د اصطکاک قوه، د جاذبې قوه، درلودونکې ده. پوهیږو چې په طبیعت کې زمونږ ځمکه او نهه سیارې د لمر شاوخوا څرخیږي. د کلاسیک میخانیک اصلي ستونزه په طبیعت کې د عاملې قوې د تشریح کولو او د طبیعت د مسیر د پیژندنې لپاره د یوې معادلې د لاس ته راوړلو لپاره د یوې مناسبې تیوري پیشنهاد کوونه ده. په اتوم کې، الکترونونه د هستې شاوخوا په یو ډول څرخیږي خو د شته قوې طبیعت مختلف دی. په عین توګه په هسته کې شته قوې له پورته ذکر شویو قواو څخه مختلفې دي. دا ټولې قوې د طبیعت له څلورو اساسي قواو څخه ثابتیږي. دا له (i) جاذبې قوې (دا د متقابل عمل کوونکو ذرو ترمنځ د هغوی د کتلو له امله راپورته کیږي او همیشه جاذبوي دي او د نیوټن د حرکت د قوانینو په واسطه اداره کیږي). (ii) الکترومقناطیسي قوه (دا د متقابل عمل کوونکو ذرو ترمنځ د هغوی د چارجونو له امله راپورته کیږي چې برقي او مقناطیسي دوه ډولونه لري او جاذبوي یا دافعوي دي). (iii) کمزورې قوه (دا د متقابل عمل کوونکو لیپټانونو(leptons) یا لیپټانونو او بریانونو (baryons) ترمنځ راپورته کیږي او د لنډې ساحې قوه ده). (iv) هستوي قوه یا غښتلې قوه (دا د هستې په داخل کې عمل کوي او دا په عامه توګه جاذبوي ده او په طبیعت کې ترټولو غښتلې او د لنډې ساحې قوه ده.)

۲.۳ مرکزي قوه

د دوو ذرو ترمنځ عاملې قوې ته مرکزي قوه ویل کیږي که اندازه یې یواځې د دوو ذرو ترمنځ واټن پورې مربوطه وي او د دواړو ذرو د مرکزونو د نښلوونکي خط په امتداد عمل وکړي.

په ریاضیکي توګه،

$$\vec{\mathrm{F}} = F(r)\hat{e}_r$$

داسې چې $F(r)$ د r ځانګړې تابع او $\hat{e}_r$ د قوې د جهت په امتداد جهت لرونکی واحد وکتور دی.

مرکزي قوه همیشه د متقابل عمل یعنې د دوو ذرو ترمنځ د جذب او دفع د متقابلې قوې له امله منځ ته راځي، د بیلګې په ډول د مرکزي قوې په توګه جاذبوي قوه او الکترومقناطیسي قوه.

۳.۳ د کتلې مرکز

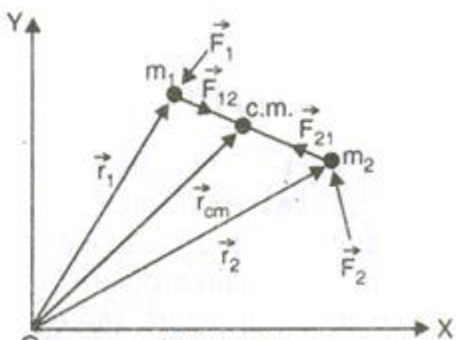
د میخانیک اساسي قوانین یعنې د نیوټن د حرکت قوانین د نقطوي کتلو لپاره تعریف شوي وو او په ربښتیني حالاتو کې مونږ له معلومو اندازو لرونکو ذرو او په یوه سیستم کې د ذرو له مجموعې سره مخامخ کیږو، مونږ د کتلې د مرکز مفهوم تطبیق کوو.

دکتلې مرکز(د کتلې د مرکز مفهوم)

د یوه سیستم د کتلې مرکز د هغې نقطې په توګه تعریف کیږي چې په هغې کې د سیستم د ټولې کتلې د راجمع کیدو ګمان کیږي. که په سیستم باندې عاملې قوې په دغه نقطه کې عمل وکړي حرکت یې عین شی دی.

د کتلې د مرکز ارزښت

د ځانګړو ذرو په نسبت د کتلې د مرکز د مفهوم په استعمالولو د حرکت، مومنټم او انرژي سره سر او کار لرل ډیر اسانه کیږي.



۱.۳.۳ شکل

د دوو ذرو د سیستم د کتلې مرکز

د m_1 او m_2 کتلو لرونکي دوو ذرو سیستم چې په ترتیب سره د $\vec{F}_1$ او $\vec{F}_2$ خارجي قواو په واسطه پرې عمل شوی په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې $\vec{r}_1$ او $\vec{r}_2$ له مبدا O څخه د هغوی د موقعیت وکتورونه دي لکه چې په ۱.۳.۳ شکل کې ښودل شوي دي.

که $\vec{v}_1$ او $\vec{v}_2$ په ترتیب سره د m_1 او m_2 کتلو سرعتونه وي، نو

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \text{ او } \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

فرض کړئ چې $\vec{F}_{12} =$ په m_1 باندې د m_2 په واسطه وارده شوې داخلي قوه ده او

$\vec{F}_{21} =$ په m_2 باندې د m_1 په واسطه وارده شوې داخلي قوه ده.

د نیوټن د حرکت له دریم قانون څخه لرو چې

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

یا $$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21} = 0 \qquad \dots (i)$$

په m_1 کتله باندې مجموعي عامله قوه،

$\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2$

د m_1 ذرې لپاره د نیوټن د حرکت له دویم قانون څخه، لرو چې

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_{12} \qquad \dots (ii)$$

په عین ډول، د m_2 ذرې لپاره

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{\mathrm{F}}_2 + \vec{\mathrm{F}}_{21} \qquad \dots (iii)$$

د (ii) او (iii) معادلو په جمع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) + \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_{12} + \vec{\mathrm{F}}_2 + \vec{\mathrm{F}}_{21}$$

یا

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \left(\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2\right) + \left(\vec{\mathrm{F}}_{12} + \vec{\mathrm{F}}_{21}\right)$$

د (i) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + \frac{d}{dt}m_2\vec{v}_2\right) = \left(\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2\right)$$

یا

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) = \vec{\mathrm{F}}$$

(داسې چې $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2$ په سیستم باندې مجموعي خارجي عامله قوه ده)

یا

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = \vec{\mathrm{F}}$$

یا

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

$$\vec{\mathrm{F}} = (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\mathrm{F}} = (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm}$$

داسې چې $\vec{r}_{cm} = \frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$ د دوو ذرو د سیستم د کتلې د مرکز د موقعیت وکتور دی.

۴.۳ د n-ذرو د کتلې مرکز

د $m_1, m_2, \dots \dots \dots, m_n$ کتلو لرونکي ذرو يو سيستم چې موقعيت يې د مختصاتو په سيستم کې په $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \dots \dots, \vec{r}_n$ سره ورکړل شوی وي په پام کې ونيسئ. فرض کړئ چې $\vec{r}$ د n ذرو د سيستم د کتلې د مرکز د موقعيت وکتور دی.

فرض کړئ چې $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \dots \dots, \vec{f}_n$ د سيستم په n ذرو باندې خارجي عاملې قوې دي. د پاتې (n-1) ذرو له امله په هره يوه باندې داخلي قوې عمل کوي.

د iمې ذرې داخلي قوه عبارت ده له

$$\vec{\mathrm{F}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{\mathrm{F}}_{ij}$$

که $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \dots \dots, \vec{v}_n$ د ذرو لحظوي سرعتونه وي، نو

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{\mathrm{F}}_i + \vec{f}_i$$

په عمومي توګه د n ذرو لپاره، پورتنی معادله لاندې حالت ته بدليږي.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i$$

داخلي قوې په جوړه يي توګه له منځه ځي، ځکه نو

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{f}$$

داسې چې $\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i$.

يعنې د ټولو خارجي قواو وکتوري جمع

يا

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \vec{f}$$

يا

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(m_i \vec{r}_i) = \vec{f}$$

خو

$$\mathrm{M}\frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = \vec{f}$$

$\therefore$ $$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)=\mathrm{M}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{cm}$$

یا $$\vec{r}_{cm}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{r}_i}{\mathrm{M}}$$

یا $$\vec{r}_{cm}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

۵.۳ د کتلي د مرکز حرکت

فرض کړئ چي د سیستم مجموعي کتله M د کتلي په مرکز کي چي د موقعیت وکتور یي $\vec{r}$ دی جمع شوې ده

$$\mathrm{M}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=\vec{\mathrm{F}}$$

یا $$\mathrm{M}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{\mathrm{F}}$$

یا $$\mathrm{M}\frac{d}{dt}(\vec{v}_{cm})=\vec{\mathrm{F}}$$

د یوه جلا (isolated) سیستم لپاره، $\vec{\mathrm{F}}=0$

$\therefore$ $$\mathrm{M}\frac{d}{dt}(\vec{v}_{cm})=0$$

یا $$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{cm})=0$$

$\therefore$ $$(\vec{v}_{cm})=\text{ثابت}$$

له دې ځایه د یوه جلا سیستم د کتلي مرکز په یونواخت سرعت سره د یوې مستقیمي کرښي په لار حرکت کوي.

۱.۳ مثال. د $2g$ او $10g$ کتله لرونکي دوه جسمونه چي په ترتیب سره $3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ او $\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$ موقعیت وکتورونه لري. له مبدا څخه د کتلي د مرکز د موقعیت وکتور او واټن پیداکړئ.

حل. دلته $m_1=2g$ او $m_2=10g$

$$\vec{r}_1=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k} \quad \text{او} \quad \vec{r}_2=\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$$

د کتلي د مرکز د موقعیت وکتور عبارت دی له

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{2(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k})+10(\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k})}{2+10}$$

$$= \frac{16\hat{\imath}-6\hat{\jmath}+28\hat{k}}{12} = \frac{1}{6}\left(8\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+14\hat{k}\right)$$

له مبدا څخه د کتلې د مرکز واټن عبارت دی له

$$R = |\vec{R}| = \left(\left(\frac{8}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{14}{6}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{1}{6}[64+9+196]^{1/2} = 2.73$$ واحده

۲.۳ مثال. کله چې سیستم د 2 ،3 ، 4 او 5kg کتلو لرونکي ذرو لرونکی وي، د کتلې مرکز په P(1,1,1) نقطه کې دی. که د 5kg کتلې په لرې کولو سره د کتلې مرکز Q(1,1,1) نقطې ته تغير وکړي موقعيت يې چيرته دی؟

حل.فرض کړئ چې $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ او $\vec{r}_4$ په ترتیب سره د $m_1 = 2kg$ ، $m_2 = 3kg$ ، $m_3 = 4kg$ او $m_4 = 5kg$ کتله لرونکو ذرو د موقعیت وکتورونه دي.

په ابتدا کې، د کتلې مرکز په P(1,1,1) نقطه کې و. که په ابتدا کې $\vec{r}_{cm}$ د کتلې د مرکز د موقعیت وکتور وي، نو

$$\vec{r}_{cm} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k} \qquad \ldots(i)$$

همدارنګه،

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3+m_4\vec{r}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$= \frac{2\vec{r}_1+3\vec{r}_2+4\vec{r}_3+5\vec{r}_4}{2+3+4+4}$$

يا

$$2\vec{r}_1+3\vec{r}_2+4\vec{r}_3+5\vec{r}_4 = 14\vec{r}_{cm} \qquad \ldots(ii)$$

له (i) او (ii) معادلې څخه لروچې

$$2\vec{r}_1+3\vec{r}_2+4\vec{r}_3+5\vec{r}_4 = 14\hat{\imath}+14\hat{\jmath}+14\hat{k} \qquad \ldots(iii)$$

د $m_4 = 5kg$ کتلې په لرې کولو، د کتلې مرکز Q(2,2,2) نقطې ته تغير کوي. په پای کې $\vec{r}_{cm}$ د کتلې د مرکز د موقعیت وکتور دی، نو

$$\vec{r}_{cm} = 2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+2\hat{k} \qquad \ldots(iv)$$

همدارنګه،

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{2\vec{r}_1+3\vec{r}_2+4\vec{r}_3}{2+3+4}$$

$2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2 + 4\vec{r}_3 = 9\vec{r}_{cm}$ ... (v) یا

له (iv) او (v) معادلو څخه لرو چې

$$2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2 + 4\vec{r}_3 = 18\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} + 18\hat{k} \quad ...(vi)$$

له (iii) څخه د (iv) معادلې په تفریق کولو، لاس ته راوړو چې

$$5\vec{r}_4 = (14\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} + 14\hat{k}) - (18\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} + 18\hat{k}) = -4(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$$

یا $\vec{r}_4 = -\frac{4}{5}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$

۳.۳ مثال. یو $2kg$ جسم او یو $3kg$ جسم د x- محور په امتداد د حرکت په حال کې دي. په یوې ځانګړې لحظې کې، $2kg$ جسم له مبدا څخه $1m$ واټن او $3ms^{-1}$ سرعت لري او $3kg$ جسم له مبدا څخه $2m$ واټن او $-1ms^{-1}$ سرعت لري. د کتلې د مرکز موقعیت او سرعت پیدا کړئ او همدارنګه مجموعي مومنتم پیدا کړئ.

حل. د کتلې د مرکز موقعیت عبارت دی له

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

یا $\vec{r}_{cm} = \frac{2\times1+3\times2}{2+3} = \frac{8}{5} = 1.6m$

د کتلې د مرکز سرعت عبارت دی له

$$v_{cm} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\times3+3\times(-1)}{2+3} = \frac{3}{5} = -0.6ms^{-1}$$

مجموعي مومنتم عبارت دی له

$$\mathrm{p} = (m_1 + m_2)v_{cm} = (2+3)\times0.6 = 3kgms^{-1}$$

۴.۳ مثال. د هغه سیستم د کتلې د مرکز موقعیت وکتور پیدا کړئ چې د m_1 او m_2 دوه ذرې چې د d واټن په واسطه یو له بله جلا دي لري.

حل. د m_1 او m_2 په کتلو دوو ذرو یو سیستم په پام کې نیسو. فرض کړئ چې د m_1 کتله د $(0,0,0)$ مختصاتو په لرلو په مبدا کې پرته ده او د m_2 کتله د $(d,0,0)$مختصات لري.

∴ د m_1 کتلې د موقعیت وکتور،

$$\vec{r}_1 = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \quad ...(i)$$

د m_2 کتلې د موقعیت وکتور،

$$\vec{r}_2 = d\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k} \qquad \ldots (ii)$$

څرنګه چې د دوو ذرو د سیستم د کتلې مرکز موقعیت وکتور عبارت دی له:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

د (i) او (ii) معادلو په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

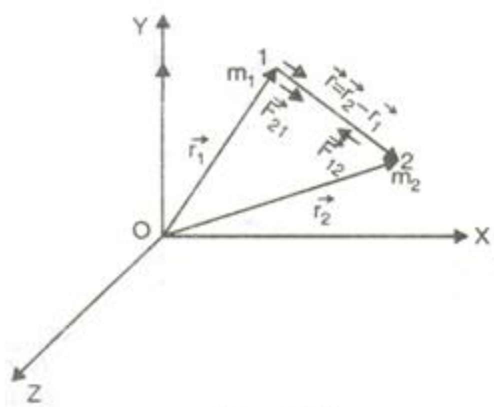
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{0}+m_2\vec{d}}{m_1+m_2}$$

یا

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{d}$$

۶.۳ د معادل یوه جسم مسئلې ته د دوو جسمونو د مسئلې اړونه

د m_1 او m_2 کتلو لرونکي 1او 2 دوو ذرو چې له O مبدا څخه د $\vec{r}_1$ او $\vec{r}_2$ موقعیت وکتورونه لري یو سیستم په پام کې ونیسئ لکه په ۱.۶.۳ شکل کې چې ښودل شوي دي.



۱.۶.۳ شکل

که نظر 1 ته د 2 ذرې د موقعیت وکتور $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ وي، نو د m_1 له امله به په m_2 کتلې باندې د جاذبې قوه عبارت وي له:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad \ldots (۱.۶.۳)$$

که نظر 2 ته د 1 ذرې د موقعیت وکتور $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ وي، نو د m_2 له امله به په m_1 کتلې باندې د جاذبې قوه عبارت وي له:

$$\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

یا

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \qquad \ldots (۲.۶.۳)$$

$$\therefore \left[\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{او} \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3\right]$$

د (۱.۶.۳) او (۲.۶.۳) په جمع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$$

یا $\quad \vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21} \quad$ ... (۳.۶.۳)

د نیوټن د حرکت د دویم قانون مطابق، د 1 ذرې د حرکت معادله عبارت ده له

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\vec{F}_{12} \quad \text{... (۴.۶.۳)}$$

یا $\quad \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \quad$ ... (۵.۶.۳)

او د 2 ذرې د حرکت معادله عبارت ده له

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=\vec{F}_{21} \quad \text{... (۶.۶.۳)}$$

یا $\quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=\frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \quad$ ... (۷.۶.۳)

د دوو جسمونو د سیستم حرکت د (۵.۶.۳) او (۷.۶.۳) معادلې د حلولو په واسطه مطالعه کیدای شي. سره له دې، دا همیشه ممکنه ده چې د دوو جسمونو د حرکت مسئله د کمې شوې کتلې د مفهوم د معرفي کولو په واسطه د هغې معادل د یوه جسم د حرکت مسئلې ته واړو. د دوو جسمونو د مسئلې دغسې اړونې یوه معادل یو جسم مسئلې ته ډیر ګټوره څرګنده شوې ده. که $\vec{r}_{cm}$ د دوو ذرو د کتلې د مرکز د موقعیت وکتور وي، نو

$$\vec{r}_{cm}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad \text{... (۸.۶.۳)}$$

<u>۷.۳ د نسبي موقعیت وکتور د حرکت معادله</u>

له (۷.۶.۳)معادلې څخه د(۵.۶.۳) په تفریق کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}-\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\frac{\vec{F}_{21}}{m_2}-\frac{\vec{F}_{12}}{m_1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\frac{\vec{F}_{21}}{m_2}+\frac{\vec{F}_{21}}{m_1}$$ [د ۳.۶.۳ معادلې په استعمالولو سره]

یا $\quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\vec{F}_{21}$

[داسې چې $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$]

یا ... (۱.۷.۳) $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{21}$

داسې چې $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}$

یا $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ د سیستم کمه شوې کتله بلل کېږي. (۱.۷.۳) معادله په لاندې توګه لیکل کیدای شي

... (۲.۷.۳) $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$

دا د $\vec{F}_{21}$ قوې لاندې د m کتلې لرونکې ذرې معادله ده. دا معادله ۳.۴.۶ معادلې یا (۶.۶.۳ معادلې) ته ورته ده. نو، مونږ د دوو جسمونو مسئله د هغه معادل د یوه جسم مسئلې ته اړولې ده.

له دې ځایه مونږ نتیجه اخلو کله چې د دوو جسمونو مسئله د هغه معادل یوه جسم مسئلې ته اړول کېږي مونږ د ځانګړو کتلو پر ځای د دوو متقابل عمل کوونکو ذرو کمه شوې کتله په پام کې نیسو.

ځانګړي حالتونه

(i) که دوه کتلې سره مساوي وي (د بیلګې په توګه پوزیترونیم)

پوزیترونیم عین کتلې لرونکې یو پروتون او یو الکترون لري.

فرض کړئ چې $m_1 = m_2 = m$

د پوزیترونیم کمه شوې کتله عبارت ده له

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = \frac{m\cdot m}{m_1+m_2} = \frac{m^2}{2m}$$

یا $\mu = \frac{m}{2}$

یعنې که دوه کتلې سره مساوي وي، نو کمه شوې کتله د هر جسم د ځانګړې کتلې نیمایي ده.

(ii)که $m_2 \ll m_1$ (د هایدروجن اتوم حالت)

د هایدروجن اتوم له یوه الکترون او یوه پروتون څخه جوړ دی.

فرض کړئ چې $m_1 = m_p$ او $m_2 = m_e$

د هایدروجن کمه شوې کتله عبارت ده له

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_p m_e}{m_p+m_e} = \frac{(1836 m_e) m_e}{(1836 m_e)+m_e}$$

$$= \frac{1836 {m_e}^2}{(1836+1) m_e} = \frac{1836 m_e}{1837}$$

یا $\mu < m_e$ $\left[\frac{1836}{1837} < 1 \quad \because\right]$

نو د هایدروجن کمه شوې کتله د الکترون له کتلې څخه لږ څه کمه ده.

په عملي توګه، $\mu \cong m_e$

له دې ځایه د دوو ذرو (یوه درنده او بله سپکه) لرونکي سیستم کمه شوې کتله د سپک جسم له کتلې سره عین شی ده.

۸.۳ په کمې شوې کتلې باندې قوه

د $\vec{F}_{21}$ قوې د اغیزې لاندې د μ کمې شوې کتلې لرونکي ذرې د حرکت معادله عبارت ده له

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} \quad \text{... (۱.۸.۳)}$$

په عمومي توګه، د $\vec{F}_{21}$ قوه دوه ډوله لري (i)جاذبوي (ii) دفع کوونکې

(i)جاذبوي قوه

که $\vec{F}_{21}$ جاذبوي قوه وي لکه د جاذبې قوه $(gravitational\ force)$ یا د دوو مختلفو چارجونو ترمنځ الکتروستاتیکي قوه، نو $\vec{F}_{21}$ په لاندې ډول لیکل کیدای شي.

$$\vec{F}_{21} = -F_{21}\hat{r}_{12} \quad \text{... (۲.۸.۳)}$$

داسې چې $\hat{r}_{12}$ د $\vec{r}$ په لوري واحد وکتور دی.

(ii) دفع کوونکې قوه

که $\vec{F}_{21}$ دفع کوونکې قوه وي لکه د دوو یو ډوله چارجونو ترمنځ الکتروستاتیکي قوه، نو $\vec{F}_{21}$ په لاندې ډول لیکل کیدای شي.

$$\vec{F}_{21} = -F'_{21}\hat{r}_{12} \quad \text{... (۳.۸.۳)}$$

ځرنګه چې $\vec{r}_{12} = \hat{r} = \hat{e}_r$

(۲.۸.۳)او (۳.۸.۳) معادلې په يوه معادله کې يوځاى کيداى شي چې عبارت دى له

$$\vec{\mathrm{F}}_{21} = \mathrm{F}(r)\hat{e}_r \qquad \text{... (۴.۸.۳)}$$

داسې چې که $\mathrm{F}(r) = -\mathrm{F}_{21}$ جاذبوي قوه وي

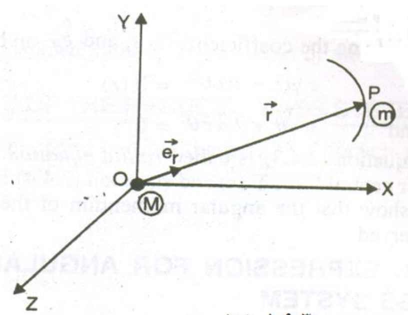
او که $\mathrm{F}(r) = \mathrm{F}_{21}$ دفع کوونکې قوه وي

په (۱.۸.۳) معادله کې د (۴.۸.۳) معادلې په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \mathrm{F}(r)\hat{e}_r = \mathrm{F}\hat{e}_r \qquad \text{... (۵.۸.۳)}$$

د دوه اړخيزه متقابل عمل کوونکو ذرو لپاره ذرې داسې حرکت کوي چې د کتلې مرکز د سکون په حالت کې پاتې کېږي او د قوې د مرکز په توګه عمل کوي. ځرنګه چې د کتلې مرکز هميشه د دواړو ذرو په وصلوونکې کرښه پروت وي، نو د کتلو ترمنځ قوه چې د قوې په جذب يا دفع پورې اړه لري د قوې د مرکز په لوري يا له هغه ځخه په مخالف لوري عمل کوي.

۹.۳ په مرکزي قوه کې د زاويوي مومنټم تحفظ



۱.۹.۳ شکل

M کتله لرونکى جسم چې په O مبدا کې پروت دى (۱.۹.۳ شکل) او m کتله لرونکى بل جسم چې د مرکزي قوې (يعنې د جاذبې قوه) د اغيزې لاندې دى په پام کې ونيسئ. که په هره کومه يوه لحظه کې، د m کتله لرونکى جسم د r په واټن د P په نقطه کې وي نو د M له امله په m باندې د جاذبې قوه

$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r^2}\hat{e}_r$$

داسې چې $\hat{e}_r$ د $\vec{r}$ په امتداد واحد وکتور دى او د منفي علامې معنا داده چې د $\vec{\mathrm{F}}$ جاذبوي قوه د $\hat{e}_r$ په مخالف لوري عمل کوي. ځرنګه چې د جاذبې قوه مرکز ته د جذب قوه ده، نو که په کتله باندې عمل کوونکى تورک $\vec{\tau}$(torque) د $\vec{\mathrm{F}}$ له امله وي، نو

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r^2}(\vec{r}\times\hat{e}_r)$$

يا $\quad [\because \quad \vec{r} \parallel \hat{e}_r]$

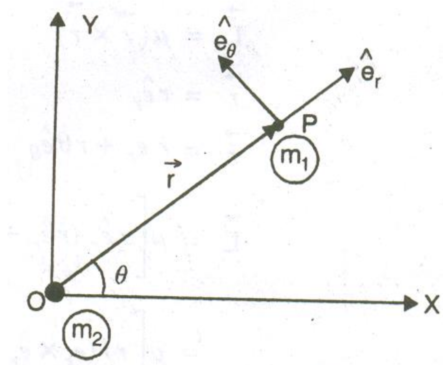
$$\vec{\tau} = 0$$

یا $\left[\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \because\right]$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

یا $\vec{L} =$ یوثابت وکتور دی

له دې ځایه، د مرکزي قوې په حرکت کې، د ذرې زاویوي مومنتم همیشه محفوظ دی.

۱۰.۳ د مرکزي قوی د ساحې لاندی حرکت



شکل ۱.۱۰.۳

څرنګه چې د دوو جسمونو مسئله همیشه یوې معادلې یوه جسم مسئلې ته اړول کیدای شي، نو اجازه راکړئ چې د m_1 او m_2 کتلو لرونکو دوو جسمونو لرونکی یو سیستم چې د یوه او بل د جاذبوي کښښ له امله د حرکت په حال کې دی په پام کې ونیسو.

فرض کړئ چې $m_1 \ll m_2$، له دې ځایه کمه شوې کتله $\mu(\cong m_2)$ د m_1 د جاذبوي کښښ له امله حرکت کوي.

څرنګه چې د جاذبې قوه یوه مرکزي قوه ده له دې ځایه د کمې شوې کتلې حرکت به یوې مستوي پورې لکه د XY-مستوي ترلی وي. فرض کړئ چې په هره لحظه کې د m_1 مختصات د مرکزي قوې لاندې (r, θ) دی لکه په ۱.۱۰.۳ شکل کې چې ښودل شوي دي.

د μ کمې شوې کتلې لرونکی معادل یوه جسم مسئلې د حرکت معادله عبارت ده له

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r$$

یا $\quad$ (۱.۱۰.۳) ... $\quad \mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{e}_r$

داسې چې $F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ او $\ddot{\vec{r}}$ تعجیل دی.

څرنګه چې په مستوي کې د متحرک جسم تعجیل $\ddot{\vec{r}}$ (په مستوي قطبي مختصاتو کې) عبارت دی له

(د توضیح لپاره ۵.۱۰.۱ معادله وګورئ) $\quad \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$

یا $\quad$ (۲.۱۰.۳) ... $\quad \mu\ddot{\vec{r}} = \left(\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\mu r\ddot{\theta} + 2\mu\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$

په (۱.۱۰.۳) معادله کې د (۲.۱۰.۳) معادلې په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\left(\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(\mu r\ddot{\theta} + 2\mu\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta = F(r)\hat{e}_r$$

په دواړو خواو کې د $\hat{e}_r$ او $\hat{e}_\theta$ د ضریبونو په مساوي کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = \mathrm{F}(r) \qquad \text{... (۳.۱۰.۳)}$$

او

$$\mu r\ddot{\theta} + 2\mu\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad \text{... (۴.۱۰.۳)}$$

(۳.۴.۲) معادله د $\mathrm{F}(r)$ مرکزي قوې لاندې سیستم د کمې شوې کتلې د حرکت شعاعي معادله او (۴.۴.۲) معادله د $\theta-$ مختصاتو د حرکت معادله بلل کیږي او ښیي چې د مرکزي قوې لاندې د کمې شوې کتلې د حرکت زاویوي مومنتم محفوظ دی.

<u>۱۱.۳ د کمې شوی کتلې سیستم د زاویوي مومنتم افاده</u>

د دوو ذرو د سیستم چې μ کمه شوې کتله لري زاویوي مومنتم عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} \qquad \left[\because \quad \vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}\right]$$

یا

$$\vec{\mathrm{L}} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

څرنګه چې $\vec{r} = r\hat{e}_r$

او

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

[د توضیح لپاره ۱.۱۰.۲ معادله وګورئ]

$\therefore$

$$\vec{\mathrm{L}} = \mu\left[r\hat{e}_r(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)\right]$$

$$= \mu\left[r\dot{r}(\hat{e}_r \times \hat{e}_r) + r^2\dot{\theta}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta)\right]$$

$$\left[\because \quad (\hat{e}_r \times \hat{e}_r) = 0 \quad \text{او} \quad (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) = 1\right] \qquad \text{یا} \qquad \mathrm{L} = \mu\left[0 + r^2\dot{\theta}\right]$$

یا

$$\mathrm{L} = \mu r^2\dot{\theta} \qquad \text{... (۱.۱۱.۳)}$$

له ۴.۱۰.۳ معادلې څخه، لرو چې

$$2\mu\dot{r}\dot{\theta} + \mu r\ddot{\theta} = 0$$

په r باندې د دواړو خواو له ضربولو څخه، لاس ته راوړو چې

$$2\mu r\dot{r}\dot{\theta} + \mu r^2\ddot{\theta} = 0$$

یا
$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

یا
$$\mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

له ۵.۱۰.۳ معادلې څخه، لرو چې

$$\mu r^2\dot{\theta} = \mathrm{L}$$

$$\therefore \quad \mathrm{L} = \text{ثابت}$$

له دې ځایه مونږ لاس ته راوړو چې د مرکزي قوې د اغیزې لاندې کمې شوې کتلې زاویوي مومنټم محفوظ دی.

۱۲.۳ د کمې شوی کتلې سیستم د مجموعی انرژۍ افاده

د مرکزي قوې لاندې د دوو ذرو سیستم د کمې شوې کتلې مجموعي انرژي د حرکي انرژي او پوتنسیالي انرژي مجموعه ده.

$$\therefore \quad \mathrm{E} = \mathrm{K.E} + \mathrm{P.E} = \mathrm{T} + \mathrm{U}$$

$$= \frac{1}{2}\mu v^2 + \mathrm{U}$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \mathrm{U}$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mu\left(\vec{\dot{r}} \times \vec{\dot{r}}\right) + \mathrm{U} \qquad \text{... (۱.۱۲.۳)}$$

څرنګه چې
$$\vec{\dot{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\therefore \quad \vec{\dot{r}}.\vec{\dot{r}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

نو (۱.۱۲.۳) معادله به په لاندې ډول ولیکل شي

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \mathrm{U}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^4}\right) + \mathrm{U} \qquad \left[\because \quad \mathrm{L} = \mu r^2\dot{\theta}\right]$$

یا
$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\mathrm{L}^2}{2\mu r^2} + \mathrm{U} \qquad \text{... (۲.۱۲.۳)}$$

دا د مرکزي قوې د عمل لاندې د متحرکې کمې شوې کتلې مجموعي انرژي ورکوي. دلته، د $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ حد حرکي انرژي ښيي، $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^2}$ له مرکز څخه د فرار انرژي (د دوراني حرکت له امله انرژي) ښيي، دا په داسې حال کې چې U د سیستم جاذبوي پوتنسیالي انرژي ښيي.

۱۳.۳ د کمې شوې کتلې د مجموعي انرژي تحفظ

د مرکزي قوې لاندې μ کمې شوې کتلې لرونکي سیستم شعاعي معادله عبارت ده له

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = \mathrm{F}(r)$$

څرنګه چې

$$\mathrm{L} = \mu r^2\dot{\theta}$$

∴

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{L}}{\mu r^2}$$

نو پورتنی رابطه به

$$\mu\ddot{r} - \mu r\frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2 r^4} = \mathrm{F}(r)$$

یا

$$\mu\ddot{r} - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^3} = \mathrm{F}(r)$$

څرنګه چې مرکزي قوه همیشه محفوظه ده، نو لیکلای شو چې

$$\mathrm{F}(r) = -\frac{d\mathrm{U}}{dr}$$

∴

$$\mu\ddot{r} - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^3} = -\frac{d\mathrm{U}}{dr}$$

یا

$$\mu\ddot{r} - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^3} + \frac{d\mathrm{U}}{dr} = 0$$

په $\dot{r}$ باندې د دواړو خواو له ضربولو څخه، لاس ته راوړو چې

$$\mu\ddot{r}\dot{r} - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^3}\dot{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathrm{U}}{dr} = 0 \qquad \left[\because \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}\right]$$

یا

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{L}^2}{2\mu r^2}\right) + \frac{d}{dt}\mathrm{U} = 0$$

يا $$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U\right] = 0$$

يا $$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \text{ثابت} \qquad \dots (۱.۱۳.۳)$$

يعني د مرکزي قوې ساحې لاندې سيستم مجموعي انرژي ثابته ده.

۱۴.۳ د r او t ترمنځ اړيکه.

د r او t ترمنځ اړيکه.

د مرکزي قوې په ساحه کې د دوو ذرو د سيستم چې μ کمه شوې کتله لري مجموعي انرژي يې عبارت ده له

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U$$

يا $$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right]$$

يا $$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right]}$$

يا $$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right]}$$

يا $$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right]}}$$

د پورتنۍ معادلې په انتګرال نيولو، لاس ته راوړو چې

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right)}} + K \qquad \dots (۱.۱۴.۳)$$

داسې چې K د انتګرال ثابت دی.

۱۵.۳ د θ او t ترمنځ اړیکه

د مرکزي قوې لاندې د دوو ذرو د سیستم چې μ کمه شوې کتله لري زاویوي مومنتم یې عبارت دی له

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

∴ $$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$$

یا $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

یا $$d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \qquad \ldots (۱.۱۵.۳)$$

د پورتنی معادلې په انتګرال نیولو، لاس ته راوړو چې

$$\theta = \int \frac{L}{\mu r^2} dt + k_1$$

داسې چې k_1 د انتګرال ثابت دی.

د θ او r ترمنځ اړیکه.

د dt قیمت له (۱.۱۴.۳) معادلې څخه په (۱.۱۵.۳) معادله کې په وضع کولو سره

$$d\theta = \frac{\frac{L}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U\right]}} \qquad \ldots (۲.۱۵.۳)$$

۱۶.۳ د مرکزي قوې په ساحه کې د مدار تفاضلي معادله

د μ کمې شوې کتلې لرونکی یو جسم چې د مرکزي قوې ساحې لاندې د حرکت په حال کې دی شعاعي معادله یې عبارت ده له

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 = F(r)$$

یا $$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{\mu}$$

یا $$\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = \frac{1}{\mu} F(r) \qquad \ldots (۱.۱۶.۳) \qquad \left[\begin{array}{l} L = \mu r^2 \dot{\theta} \;\; \because \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \;\; \text{نو} \end{array}\right]$$

فرض کړئ چې $$r=\frac{1}{u}$$

∵ $$\frac{dr}{dt}=\dot{r}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

یا $$\dot{r}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$$

او $$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(-\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta})$$

$$=\frac{d}{d\theta}(-\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta})\frac{d\theta}{dt}$$

یا $$\ddot{r}=\frac{d}{d\theta}(-\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta})\dot{\theta}$$

نو (۱.۱۶.۳) معادله به

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta}-\frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2}u^3=\frac{1}{\mu}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

څرنګه چې $$\dot{\theta}=\frac{\mathrm{L}}{\mu r^2}=\frac{\mathrm{L}}{\mu}u^2$$

نو پورتنی رابطه به

$$\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{L}}{\mu}u^2\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\mathrm{L}}{\mu}u^2-\frac{\mathrm{L}^2}{\mu^2}u^3=\frac{1}{\mu}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا $$-\frac{\mathrm{L}^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{\mathrm{L}^2u^3}{\mu^2}=\frac{1}{\mu}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا $$\frac{\mathrm{L}^2u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{\mathrm{L}^2u^3}{\mu}=-\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا $$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\mu}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$ ... (۲.۱۶.۳)

دا د مرکزي قوې لاندې د یوه متحرک جسم د مدار تفاضلي معادله ده.

۵.۳. مثال. د m کتله لرونکې ذرې چې د مرکزي قوې د عمل له امله د ثابت مرکز شاوخوا د حرکت په حال کې ده د مدار معادله یې له $r=\frac{1}{2\theta}$ څخه عبارت ده. د قوې قانون پیدا کړئ.

حل. د مرکزي قوې لاندې m کتله لرونکې متحرکې ذرې تفاضلي معادله عبارت ده له

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) \quad \dots (i)$$

داسې چې $\frac{1}{u} = r \quad \dots (ii)$

د ذرې د مدار راکړل شوې معادله عبارت ده له

$$r = \frac{1}{2\theta}$$

$\therefore$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2\theta}$$

یا

$$u = 2\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = 2 \quad \text{او} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$$

نو (i) معادله به

$$0 + u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\mathrm{L}^2u^3}{m}$$

د (ii) معادلې په استعمالولو، لرو چې

$$\mathrm{F}(r) = -\frac{\mathrm{L}^2}{mr^3}$$

یا

$$\mathrm{F}(r) \propto \frac{1}{r^3}$$

دا د قوې غوښتل شوی قانون دی یعنې قوه د فاصلې د مکعب سره په معکوسه توګه تغیر کوي.

۶.۳. مثال. یو جسم چې په مرکزي ساحه کې حرکت کوي د $r = a\cos\theta$ په واسطه ورکړل شوی مسیر رسموي. د قوې قانون پیدا کړئ.

حل. د مرکزي قوې ساحې د عمل لاندې د m کتله لرونکي متحرک جسم د مدار تفاضلي معادله عبارت ده له

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) \quad \dots (i)$$

داسې چې $\frac{1}{u} = r \quad \dots (ii)$

دلته، د جسم د مدار معادله له $r = a\cos\theta$ څخه عبارت ده.

د (ii) معادلې په استعمالولو سره، لرو چې

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\cos\theta} = \frac{\sec\theta}{a} \qquad \dots(iii)$$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\sec\theta\tan\theta}{a}$$

او

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\sec\theta\times(\sec^2\theta)+(\sec\theta\tan\theta)\times\tan\theta}{a}$$

$$= \frac{\sec\theta}{a}(\sec^2\theta + \tan^2\theta) \qquad \dots(iv)$$

د (iii) او (iv) معادلو په استعمالولو سره، (i) معادله به

$$\frac{\sec\theta}{a}(\sec^2\theta + \tan^2\theta) + \frac{\sec\theta}{a} = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\frac{\sec\theta}{a}(\sec^2\theta + \tan^2\theta + 1) = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\frac{\sec\theta}{a}(\sec^2\theta + \sec^2\theta) = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\frac{2\sec^3\theta}{a} = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \qquad \dots(v)$$

له (iii) معادلې څخه، لرو چې

$$\sec\theta = au$$

نو، (v) معادله به

$$\frac{2a^3u^3}{a} = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{2a^2L^2u^5}{m}$$

د $r = \frac{1}{u}$ په وضع کولو سره، لرو چې

$$F(r) = -\frac{2a^2L^2}{mr^5}$$

یا

$$F(r) \propto \frac{1}{r^5}$$

دا د قوې غوښتل شوی قانون دی یعني قوه د فاصلې له پنځم طاقت سره معکوساً تغیر کوي.

۷.۳ مثال. د مرکزي قوې ساحې لاندې متحرکه ذره د $r = e^{b\theta}$ مارپیچي لار وهي. د قوې قانون پیدا کړئ.

حل. د مرکزي قوې د عمل لاندې m کتله لرونکي متحرک جسم د مدار تفاضلي معادله په لاندې توګه لیکل کیدای شي:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) \qquad \dots(i)$$

داسې چې

$$\frac{1}{u} = r \qquad \dots(ii)$$

دلته، د جسم د مسیر معادله له $r = e^{b\theta}$ څخه عبارت ده.

د (ii) معادلې په استعمالولو سره، لرو چې

$$u = \frac{1}{r} = e^{-b\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = e^{-b\theta}(-b) = -be^{-b\theta}$$

او

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-be^{-b\theta}\right) = -be^{-b\theta}(-b) = b^2e^{-b\theta} = b^2u$$

په (i) معادله کې، د $\frac{d^2u}{d\theta^2} = b^2u$ په وضع کولو سره، لرو چې

$$b^2u + u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) \qquad \text{یا} \qquad (b^2+1)u = -\frac{m}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{(b^2+1)\mathrm{L}^2u^3}{m}$$

د $\frac{1}{u} = r$ په وضع کولو سره، لرو چې

$$\mathrm{F}(r) = -\frac{(b^2+1)\mathrm{L}^2}{mr^3}$$

یا

$$\mathrm{F}(r) \propto \frac{1}{r^3}$$

دا د قوې غوښتل شوی قانون دی یعني قوه د فاصلې له مکعب سره معکوساً تغیر کوي.

۱۷.۳ په جاذبوي معکوس مربع قوې ساحه کې د مدارونو شکلونه

د یوه جسم چې د معکوس مربع له قانون څخه په پیروي کولو د یوې قوې له اغیزې لاندې د حرکت په حال کې وي د مدار معادله د هغه مدار له تفاضلي معادلې څخه چې په مرکزي قوه کې وي لاس ته راتلای شي.

په مرکزي قوه کې د مدار تفاضلي معادله په لاندې توګه لیکل کیدای شي.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{\mathrm{L}^2u^2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) \quad \dots (۱.۱۷.۳)$$

د m_1 او m_2 دوو کتلو ترمنځ چې د r په فاصله یو له بل څخه جلا شوي دي د جذب جاذبوي قوه عبارت ده له

$$\mathrm{F}(r) = -\frac{\mathrm{G}m_1m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

داسې چې

$$k = \mathrm{G}m_1m_2$$

یا

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right) = -ku^2 \quad \dots (۲.۱۷.۳)$$

په (۱.۱۷.۳) معادله کې د (۲.۱۷.۳) معادلې په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k\mu}{\mathrm{L}^2}$$

یا

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{k\mu}{\mathrm{L}^2} = 0 \quad \dots (۳.۱۷.۳)$$

فرض کړئ چې

$$u - \frac{k\mu}{\mathrm{L}^2} = x \quad \dots (۴.۱۷.۳)$$

$\therefore$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}$$

او

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d^2x}{d\theta^2}$$

نو (۳.۱۷.۳) معادله به

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = 0 \quad \dots (۵.۱۷.۳)$$

دا د ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله ده، او عمومي حل يې

$$x = \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0)$$

داسې چې A او θ_0 ثوابت دي.

نو (۴.۱۷.۳) معادله به په لاندې توګه وليکل شي

$$u = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0) \qquad \text{... (۶.۱۷.۳)}$$

څرنګه چې $u = \frac{1}{r}$ دی، نو لرو چې

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2}\left[1 + \frac{\mathrm{AL}^2}{\mu k}\cos(\theta - \theta_0)\right] \qquad \text{... (۷.۱۷.۳)}$$

دا د هغه جسم د مسير معادله ده چې د معکوس مربع قوې د ساحې د اغيزې لاندې حرکت کوي.

په مستوي قطبي مختصاتو کې د هغه مخروط عمومي معادله چې د $\in$ عين المرکزيت او l د معياري وسعت نيمايي semi latus rectum (د محراقي وتر نيمايي چې د مخروط د هادي سره موازي دی) لري عبارت ده له

$$\frac{1}{r} = l[1 + \in \cos(\theta - \theta_0)] \qquad \text{... (۸.۱۷.۳)}$$

د (۷.۱۷.۳) او (۸.۱۷.۳) معادلو په پرتله کولو، لاس ته راوړو چې

$$\in = \frac{\mu k}{\mathrm{AL}^2} \qquad \text{... (۹.۱۷.۳)}$$

او

$$l = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} \qquad \text{... (۱۰.۱۷.۳)}$$

د مدار دقيق شکل (يعنې مسير) د $\in$ او له دې ځايه د L او A په قيمت پورې اړه لري.

د جسم مسير عبارت دی له

(i) هايپربوليک، که $\in > 1$
(ii) پارابوليک، که $\in = 1$
(iii) بيضوي، که $\in < 1$

(iv) دايروي، که $\in = 0$

۱۸.۳. د حرکت د ګرځيدو نقطي او د انرژی او عين المرکزيت ترمنځ اړيکه

(i) د ګرځيدو نقطي

د يوه جسم په مسير باندې د ګرځيدو نقطه له هغې نقطې څخه عبارت ده چې په هغې کې د جسم شعاعي حرکي انرژي صفر کيږي.

د مرکزي قوې لاندې د يوه جسم مجموعي انرژي عبارت ده له

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U \qquad \dots (۱.۱۸.۳)$$

د جذب قوې مطابق پوتنسيال انرژي U عبارت ده له

$$U = -\frac{k}{r}$$

نو (۱.۱۸.۳) معادله به

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

داسې چې

$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 =$ د سيستم حرکي انرژي

$\frac{L^2}{2\mu r^2} =$ د سيستم مرکز ته د ميل پوتنسيال انرژي

$-\frac{k}{r} =$ پوتنسيال انرژي

$\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = U'$ حد اغيزمنه پوتنسيال انرژي بلل کيږي. $\qquad \dots (۲.۱۸.۳)$

$\therefore$
$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U'$$

د ګرځيدو نقطه هغه نقطه ده چې په هغې کې مجموعي انرژي E د اغيزمنې پوتانسيال انرژي سره مساوي ده. يعنې $E = U'$

نو
$$U' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U'$$

يا
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

یا (۳.۱۸.۳) ... $\dot{r} = 0$

يعنې د ګرځيدو په نقطه کې، د ذرې شعاعي سرعت (يعنې حرکي انرژي) صفر ده.

(ii) د انرژي او عين المرکزيت ترمنځ اړيکه

ځرنګه چې د ګرځيدو په نقطو کې

$$\mathrm{E} = \mathrm{U}'$$

د (۲.۱۸.۳) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

یا

$$\frac{\mathrm{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} - \mathrm{E} = 0$$

یا

$$\frac{\mathrm{L}^2}{2\mu r^2} - k.\frac{1}{r} - \mathrm{E} = 0$$

دا نظر $\frac{1}{r}$ ته دوهمه درجه معادله ده. حل يې عبارت دی له

$$\frac{1}{r} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4 \times \frac{\mathrm{L}^2}{2\mu} \times \mathrm{E}}}{2 \times \frac{\mathrm{L}^2}{2\mu}} = \frac{k \pm k\sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}}}{\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}}$$

یا

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} \pm \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2}\sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}}$$

$\therefore$ د $\frac{1}{r}$ دوه قيمتونه په لاندې توګه ليکل کيدای شي.

$$\frac{1}{r_{\text{اصغري}}} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} + \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2}\sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}} \quad \text{... (۴.۱۸.۳)}$$

او

$$\frac{1}{r_{\text{اعظمي}}} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} - \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2}\sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}} \quad \text{... (۵.۱۸.۳)}$$

ځرنګه چې د مدار قطبي معادله عبارت ده له

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0)$$

د $\theta - \theta_0 = 0$ لپاره $\cos(\theta - \theta_0) = 1$ دی،

$$\frac{1}{r_{\text{اصغري}}} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{A} \qquad \ldots (۶.۱۸.۳)$$

د $\theta - \theta_0 = \pi$ لپاره $\cos(\theta - \theta_0) = -1$ دی،

$$\therefore \qquad \frac{1}{r_{\text{اعظمي}}} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} - \mathrm{A} \qquad \ldots (۸.۱۸.۳)$$

د ۴.۱۸.۳ او ۶.۱۸.۳ معادلو (یا ۵.۱۸.۳ او ۸.۱۸.۳ معادلو) په پرتله کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{A} = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2}\sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}} \qquad \ldots (۹.۱۸.۳)$$

په قطبي مختصاتو کې د مخروط عین المرکزیت عبارت دی له

$$\in = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu k}\mathrm{A} \qquad \ldots (۱۰.۱۸.۳)$$

په (۱۰.۱۸.۳) معادله کې د (۹.۱۸.۳) معادلې په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\in = \sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}} \qquad \ldots (۱۱.۱۸.۳)$$

دا د یوه جسم د مسیر عین المرکزیت د هغه د مجموعي انرژي او زاویوي مومنتم له مخې ورکوي.

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې مدار (یا مسیر) په E او L پورې اړه لري او عبارت دی له

(i) په طبیعت کې هایپربولیک، که $\in > 1$ یعنې $\mathrm{E} > 0$

(ii) په طبیعت کې پارابولیک، که $\in = 1$ یعنې $\mathrm{E} = 0$

(iii) په طبیعت کې بیضوي، که $\in < 1$ یعنې $\mathrm{E} < 0$

(iv) په طبیعت کې دایروي، که $\in = 1$ یعنې $\mathrm{E} = -\frac{\mu k}{2\mathrm{L}^2}$

دا څرګنده شوه چې د معکوس مربع قوې ساحې لاندې د حرکت کوونکي جسم، مجموعي انرژي همیشه منفي وي او له دې ځایه په طبعیت کې همیشه بیضوي وي.

۸.۳. مثال. m کتله لرونکی جسم د یوې ثابتې نقطې په طرف د $-\frac{k}{r^2}$ مرکزي قوې د عمل لاندې حرکت کوي. وښایاست چې د ذرې سرعت د هغې د مدار په هره نقطه کې عبارت دی له

$$v = \left[\frac{k^2}{\mathrm{L}^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{2k}{mr}\right]^{1/2}$$

داسې چې ϵ د مدار عین المرکزیت او L د ذرې زاویوي مومنتم دی.

حل. $F = -\frac{k}{r^2}$ راکړل شوی دی. $\quad ...(i)$

$$F = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \qquad ...(ii)$$

داسې چې U د ذرې د پوتنسیال انرژي ده.

له (i) او (ii) معادلو څخه، لرو چې

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = \frac{k}{r^2}$$

یا

$$d\mathrm{U} = \frac{k}{r^2}\mathrm{d}r$$

د پورتنی معادلې د دواړو خواو د انتګرال په نیولو، لرو چې

$$\mathrm{U} = \int \frac{k}{r^2}\mathrm{d}r = k\left|\frac{r^{-1}}{-1}\right| = -\frac{k}{r}$$

د ذرې مجموعي انرژي چې د مرکزي قوې لاندې حرکت کوي عبارت ده له

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathrm{U} \qquad ...(iii)$$

یا

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (\mathrm{U} = -\frac{k}{r})$$

یا

$$v = (\frac{2\mathrm{E}}{m} + \frac{2k}{mr})^{1/2} \qquad ...(iv)$$

همدارنګه، د E او L له مخې د مدار عین المرکزیت عبارت دی له

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{mk^2} \qquad \text{یا} \qquad \epsilon = (1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{mk^2})^{1/2}$$

یا

$$E = \frac{mk^2}{2L^2}(\epsilon^2 - 1)$$

په (iv) معادله کې د E په وضع کولو سره، لرو چې

$$v = \left(\frac{2}{m} \times \frac{mk^2}{2L^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{2k}{mr}\right)^{1/2}$$

یا

$$v = \left(\frac{k^2}{L^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{2k}{mr}\right)^{1/2}$$

دا د ذرې د سرعت غوښتل شوې افاده ده.

۱۹.۳ د کپلر قوانین

د زیات شمیر سیارو د حرکت د تجربوي معلوماتو په اساس، کپلر څرګنده کړه چې د ټولو سیارو په حرکت کې ځانګړی نظم شتون لري، او د ۲۲ کاله پرله پسې کار څخه وروسته، په دې باندې بریالی شو چې له هغوی څخه درې قوانین راوباسي. هغه ددې قوانینو لپاره هیڅ نظري توضیح نه لرله. سره ددې، چې هغه دا قونین د معکوس مربع قوې لاندې د ذرې د حرکت څخه چې مخکې تشریح شوی ثبوت کولای شو.

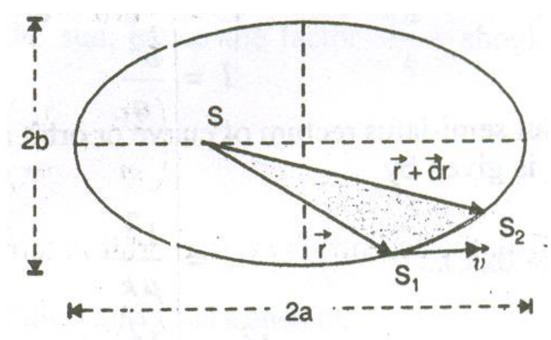
لومړی قانون (د مدار قانون)

دا توضیح کوي چې هره سیاره د لمر په شاوخوا په بیضوي مدار کې څرخیږي چې لمر د نوموړې بیضوي په یوه محراق کې شتون لري.

که د جاذبوي مرکزي قوې لاندې د حرکت کوونکې ذرې مجموعي انرژي منفي وي، د ذرې مدار یوه بیضوي ده. دا چې لمر او سیاري یو تړلی سیستم جوړوي او د تړلي سیستم مجموعي انرژي همیشه منفي وي، نو د لمر شاوخوا د سیارې مدار باید یوه بیضوي وي، چې دا لومړی قانون دی.

دویم قانون (د مساحت قانون)

دا توضیح کوي چې له لمر څخه ځمکې ته رسم شوی شعاعي وکتور د وخت په مساوي انټروال کې مساوي سطحې جاروکوي یعني د لمر په شاوخوا د سیارې سطحي سرعت همیشه ثابت دی.



شکل ۱.۱۹.۳

یوه سیاره په داسې حال کې چې د لمر (S)په شاوخوا څرخیدونکې وي له $\mathrm{S_1}$ څخه $\mathrm{S_2}$ موقعیت ته د وخت په کوچني انټروال dt کې د بیضوي مدار په اوږدو حرکت کوي، په پام کې ونیسئ.
نظر لمر ته د سیارې د موقعیت وکتور $\overrightarrow{\mathrm{SS}_1} = \vec{r}$ په پام کې ونیسئ.

او

$$\overrightarrow{\mathrm{SS}_2} = \vec{r} + d\vec{r}$$

که $d\vec{\mathrm{A}}$ د dt وخت په جریان کې جارو شوې سطحه وي، نو

$$d\vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}dt$$

$\vec{v}$ د سیارې خطي سرعت دی.

$\therefore$ د سیارې خطي سرعت

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{r}\times\mu\vec{v}}{2\mu}$$

یا

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{\vec{r}\times\vec{p}}{2\mu} \qquad [\vec{p} = \mu\vec{v} = \text{د سیارې خطي مومنټم}]$$

یا

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{\vec{\mathrm{L}}}{2\mu} \qquad [\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{د سیارې خطي مومنټم}]$$

څرنګه چې سیاره د یوې مرکزي قوې د اغیزې لاندې حرکت کوي، نو $\vec{\mathrm{L}}$ ثابت دی.

$$\therefore \qquad (۱.۱۹.۳) \ldots \qquad \frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt} = \text{ثابت}$$

یعنې سطحي سرعت ثابت دی. دا د کېپلر دویم قانون ثبوتوي.

دریم قانون (د وخت د پریود قانون)

دا توضیح کوي چې د لمر په شاوخوا د سیارې د وخت د پریود مربع د سیارې د بیضوي مدار د نیمه-لوی محور له مکعب سره مستقیماً متناسب دی.

که T د لمر په شاوخوا د سیارې د وخت پریود او a نیمه-لوی محور وي، نو

$$\mathrm{T}^2 \propto a^3$$

که a او b په ترتیب سره د بیضوي لارې نیمه-لوی او نیمه-کوچنی محورونه وي، نو د بیضوي مساحت= πab

د سیارې د وخت پریود،

$$T = \frac{\text{د بیضوي مساحت}}{\text{سطحي سرعت}} = \frac{\pi ab}{L/_{2\mu}}$$

یا $$T = \frac{2\pi\mu ab}{L}$$ ... (۲.۱۹.۳)

د بیضوي معیاري نیمایي وسعت l عبارت دی له

$$l = \frac{b^2}{a}$$

خو د هغې منحني یا مدار چې د هغې شاوخوا یوه ذره د مرکزي قوې د ساحې لاندې حرکت کوي د معیاري وسعت نیمایي عبارت دی له

$$l = \frac{L^2}{\mu k}$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\mu k}$$

یا $$b = L\sqrt{\frac{a}{\mu k}}$$ ... (۳.۱۹.۳)

په (۲.۱۹.۳) معادله کې د (۳.۱۹.۳) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$T = \frac{2\pi\mu a}{L} L\sqrt{\frac{a}{\mu k}} = 2\pi\mu a\sqrt{\frac{a}{\mu k}}$$

یا $$T^2 = \frac{4\pi^2\mu^2 a^3}{\mu k} = \left(\frac{4\pi^2\mu}{k}\right) a^3$$

یا $$T^2 \propto a^3 \qquad \left[\therefore \quad \frac{4\pi^2\mu}{k} \text{ ثابت دی}\right]$$

دا د کپلر دریم قانون دی.

۲۰.۳ د کپلر له قانون څخه د نیوټن د جاذبې د قانون لاس ته راوړنه

له عطارد او پلوتو څخه پرته نورې ټولې سیارې د لمر په شاوخوا تقریباً په دایروي مدارونو کې څرخیږي. فرض کړئ چې M د لمر کتله او که m د ω په زاویوي سرعت سره د r په شعاع په یوه دایروي مدار کې د څرخیدونکي سیارې کتله وي، نو سیارې ته اړینه مرکز ته د جذب قوه F عبارت ده له

$$F = mr\omega^2$$

$$= mr(\frac{2\pi}{t})^2 \qquad (\omega = \frac{2\pi}{t} \quad \therefore)$$

یا $$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \qquad ...(۱.۲۰.۳)$$

د کپلر له دریم قانون څخه، لرو چې

$$T^2 = kr^3 \qquad ...(۲.۲۰.۳)$$

په (۱.۲۰.۳) معادله کې د (۲.۲۰.۳) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{kr^3}$$

یا $$F = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\frac{m}{r^2}$$

د نوموړې قوې یعنې جاذبوي کښښ منبع لمر دی، له دې ځایه $\frac{4\pi^2}{k}$ فکتور یواځې د لمر په ځینې خواصو پورې اړه لري.

فرض کړئ چې $$\frac{4\pi^2}{k} \propto M$$

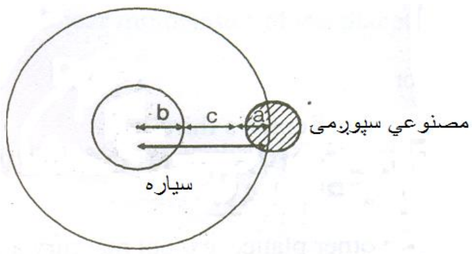
یا $$\frac{4\pi^2}{k} = GM \qquad ...(۳.۲۰.۳)$$

داسې چې G د تناسب ثابت او نړیوال ثابت بلل کیږي.

په (۲.۲۰.۳) معادله کې د (۳.۲۰.۳) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$F = \frac{GmM}{r^2} \qquad ...(۴.۲۰.۳)$$

دا د نیوټن د جاذبې قانون دی. له دې ځایه، د نیوټن د جاذبې قانون د کپلر له قانون څخه لاس ته راتلای شي.



۹.۳. مثال. د وخت په T پریود کې یوه a شعاع لرونکې مصنوعي سپوږمۍ په b شعاع لرونکې دایروي مدار کې د m کتله لرونکې سیارې شاوخوا څرخیږي. که د هغوی د سطحو ترمنځ ترټولو کوچنۍ فاصله c وي، وښایاست چې د سیارې کتله عبارت ده له

$$m = \frac{4\pi^2(a+b+c)^3}{\mathrm{GT}^2}$$

حل. فرض کړئ چې $a + b + c = r$ (د بیلګې په توګه)

د تعادل په حالت کې، لرو چې $\mathrm{F_g} = \mathrm{F}_c$

یا $\frac{GmM}{r^2} = mr\omega^2 = \frac{mr4\pi^2}{\mathrm{T}^2}$

یا $\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{\mathrm{T}^2}$

یا $M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\mathrm{T}^2}$

یا $M = \frac{4\pi^2(a+b+c)^3}{\mathrm{GT}^2}$

۱۰.۳. مثال. ځمکه د لمر شاوخوا د جاذبوي قوې لاندې حرکت کوي او مدار یې $1.495 \times 10^8 km$ نیمه-لوی محور لري. کله چې ځمکه لمر ته ترټولو نږدې تیریږي (یعنې د راس په نقطه $perihelion$ کې)، فاصله یې $1.47 \times 10^8 km$ او سرعت یې $0.303 km\ s^{-1}$ دی. د ځمکې سرعت په لرې نقطه $aphelion$ کې او همدارنګه په دواړو موقعیتونو کې یې زاویوي سرعتونه پیدا کړئ.

حل.

$$a = 1.495 \times 10^8 km$$

$$\therefore \quad 2a = 2.990 \times 10^8 km$$

$$\text{د راس نقطه} = 1.47 \times 10^8 km$$

$$\text{لرې نقطه} = (2.990 \times 10^8 - 1.47 \times 10^8)km = 1.520 \times 10^8 km \qquad \therefore$$

څرنګه چې حرکت د جاذبوي قوې يعنې مرکزي قوې لاندې دی، نو په دې دوو موقعيتونو کې د ځمکې د حرکت او لمر زاويوي مومنټم ثابت دی.

يعنې $\qquad L_{\text{لرې نقطه}} = L_{\text{راس نقطه}}$

يعنې $\qquad mv_a r_a = mv_p r_p$

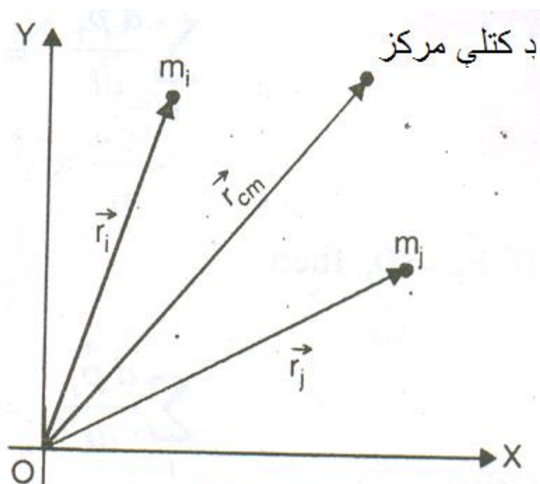
يا $\qquad v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{0.303 \times 1.47 \times 10^8}{1.520 \times 10^8} = 0.293 km\, s^{-1}$

$\therefore \qquad \omega_a = \frac{v_p}{r_a} = \frac{0.293}{1.520 \times 10^8} = 0.19 \times 10^{-8} rad\, s^{-1}$

او $\qquad \omega_a = \frac{v_p}{r_p} = \frac{0.303}{1.47 \times 10^8} = 0.206 \times 10^{-8} rad\, s^{-1}$

۲۱.۳ د خطي مومنټم تحفظ

ټولې هغې نتيجې چې د يوې ځانګړې ذرې لپاره لاس ته راغلې دي يوه سيستم ته چې له يوې څخه زياتې ذرې لرې غزيدلی شي. په ميخانيک کې، ډېر ځلې دا ساده وي چې د يوه جسم حرکت داسې په پام کې ونيول شي چې نوموړی جسم په زيات شمير متمايزو نقطو وويشل شي او بيا د نورو حرکت و ارزول شي. له دې ځايه د ذرو يو سيستم ډېر ګټور مفهوم دی. د n ذرو يو سيستم فرض کړئ. په عمومي توګه، د ذرو په سيستم دوه ډوله قوې عمل کوي.



۱.۲۱.۳ شکل

(i) خارجي قوه

(ii) د ذرو ترمنځ د ټکر له امله داخلي قوې يعنې د چارج لرونکو ذرو ترمنځ د کولمب قوې.

فرض کړئ چې F^e په سيستم باندې عامله خارجي قوه ده. د سيستم i-مه ذره په پام کې ونيسئ. فرض کړئ چې m_i د i-مې ذرې کتله ده. نظر يوې ثابتې مبدا ته يې د موقعيت وکتور $\vec{r}_i$ په پام کې ونيسئ (۱.۲۱.۳ شکل). په سيستم باندې دوه قوې عمل کوي خارجي قوه F_i^e او د i-مې ذرې او پاتې نورو $(n-1)$ ذرو ترمنځ د ټکر له امله F_{ji}^{int} داخلي قوه.

$$\vec{\mathrm{F}}_i = \vec{\mathrm{F}}_i^e + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int} \qquad ... (۱.۲۱.۳)$$

که $\vec{p}_i$ د i-مې ذرې خطي مومنټم وي، نو د نیوټن د حرکت دویم قانون مطابق، د د i-مې ذرې د حرکت معادله عبارت ده له

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\mathrm{F}}_i$$

یا

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\mathrm{F}}_i^e + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int}$$

څرنګه چې

$$\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\vec{\mathrm{F}}_{ij}^{int} + \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\mathrm{F}}_i^e + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\vec{\mathrm{F}}_{ij}^{int} + \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int}\right) \qquad ... (۲.۲۱.۳)$$

د نیوټن د حرکت له دویم قانون څخه، د i-مې او j-مې ذرو ترمنځ د متقابل عمل قوې مساوي او مخالف الجهتې دي.

یعني $\vec{\mathrm{F}}_{ij}^{int} = -\vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int}$ یا $\vec{\mathrm{F}}_{ij}^{int} + \vec{\mathrm{F}}_{ji}^{int} = 0$

نو (۲.۲۱.۳) معادله به

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\mathrm{F}}_i^e$$

له دې ځایه د ذرو د ټول سیستم لپاره معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{\mathrm{F}}_i^e$$

که $\vec{\mathrm{F}}^e = 0$، نو

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

یا

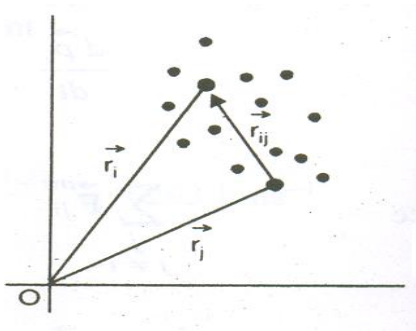
$$\frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i = 0$$

یا

$$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad \left[\therefore \ \sum \vec{p}_i = p\right]$$

یا $\quad$ (۳.۲۱.۳) ... $\quad p =$ ثابت

یعني د خارجي قواو په نه شتون کي، د ذرو د سیستم مجموعي مومنټم ثابت دی. دا د مومنټم (یعني خطي مومنټم) د تحفظ قانون دی.



شکل ۱.۲۲.۳

۲۲.۳ د سیستم د زاویوي مومنټم تحفظ

د هرې نقطې شاوخوا د سیستم مجموعي زاویوي مومنټم د ځانګړو ذرو د زاویوي مومنټمونو له وکتوري جمع سره مساوي دی. فرض کړئ چې $\vec{l}_i$ د کومې نقطې شاوخوا د i-مې ذرې زاویوي مومنټم ښيي نو

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad \text{... (۱.۲۲.۳)}$$

داسې چې $\vec{r}_i$ له ورکړل شوې نقطې څخه د i-مې ذرې د موقعیت وکتور دی (۱.۶.۳ شکل). له دې ځایه د ځانګړو مومنټمونو د وکتوري جمع له نیولو څخه د سیستم مجموعي زاویوي مومنټم لاس ته راځي.

$$\therefore \qquad \vec{\mathrm{L}} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

τ^{ext} په سیستم باندې عامل مجموعي خارجي تورک په پام کې ونیسئ، نو

فرض کړئ چې $\quad \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$

$$= \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \sum_i m_i(\vec{v}_i \times \vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

یا $\quad [\therefore \quad \vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0] \quad \vec{\tau}^{ext} = 0 + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$

یا $\quad$ (۱.۲۲.۳) ... $\quad \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$

ځرنګه چې $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ji}^{int}$

نو (۱.۲۲.۳) په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^e + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ji}^{int}\right)$$

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e\right) + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}^{int}\right)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \sum_i \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}\right)\right]$$

$$\vec{\tau}^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_0 \times (-\vec{F}_{ji})\right)\right]$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i \times \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}\right]$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + 0 \qquad \text{...(۲.۲۲.۳)}$$

∴ د $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ وکتور له i څخه د j ذرې په لوري دی او $\vec{F}_{ji}$ قوه له i څخه د j ذرې په لوري دی، نو $\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$ وکتور او $\vec{F}_{ji}$ قوه سره موازي دي، په دې توګه وکتوري ضرب يې صفر دی يعنې

$$\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0$$

له دې ځايه $\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \sum_i \vec{\tau}_i$ ...(۳.۲۲.۳)

(۳.۲۲.۳) معادله ښيي چې په سيستم باندې خارجي مجموعي تورک په ځانګړو ذرو باندې د عاملو تورکونو له وکتوري جمع څخه عبارت دی.

که $\vec{\tau}^{ext} = 0$

نو $\frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = 0$

یا $\vec{\mathrm{L}} = \text{ثابت}$

له دې ځایه که په سیستم باندې عامل خارجي مجموعي تورک صفر وي، نو د سیستم مجموعي زاویوي مومنټم محفوظ دی. دا د سیستم د زاویوي مومنټم د تحفظ قانون دی.

۲۳.۳ د سیستم د انرژۍ د تحفظ قانون

(د N -ذرو د مجموعي انرژۍ د تحفظ قضیه)

که خارجي قوې له یوې سکالري پوتنسیالي تابع څخه د لاس ته راوړنې وړ او داخلي قوې مرکزي وي، نو د N -ذرو د سیستم مجموعي انرژي ثابته ده.

سیستم ته په حرکت ورکولو کې (له ۱ لومړني موقعیت څخه ۲ وروستني موقعیت ته) د ټولو (داخلي او هم خارجي) قواو په واسطه مجموعي سرته رسیدلی کار، ټولو ذرو ته له ۱ موقعیت څخه ۲ موقعیت ته د حرکت ورکولو لپاره د سرته رسیدلي کار له مجموعي سره مساوي دی. له دې ځایه،

$$\mathrm{W}_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{\mathrm{F}}_i \,.\, d\vec{r}_i \qquad \text{... (۱.۲۳.۳)}$$

که د سیستم داخلي جوړښت تغیر ونکړي، پهi-مې ذرې باندې د $\vec{\mathrm{F}}_i$ مجموعي قوې اغیز به هغې ته $\frac{d\vec{v}_i}{dt}$ تعجیل ورکړي.

یعنې $\vec{\mathrm{F}}_i = m_i . \frac{d\vec{v}_i}{dt}$

په (۱.۲۳.۳) معادله کې د $\vec{\mathrm{F}}_i$ په ځای له وضع کولو څخه، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{W}_{12} = \sum_i \int_1^2 \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) . \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt = \sum_i \int_1^2 m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \vec{v}_i . dt$$

$$= \sum_i \int_1^2 m_i \,(\vec{v}_i . d\vec{v}_i)$$

یا $$\mathrm{W}_{12} = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2\right)$$

$$\left[\sum_i \mathrm{T}_i\right]_1^2 = \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \qquad \text{... (۲.۲۳.۳)}$$

داسې چې T_1 او T_2 په ترتیب سره په ۱ او ۲ موقعیت کې د سیستم مجموعي حرکي انرژي دي.

په i-مې ذرې باندې عامله مجموعي قوه $\vec{F}_i$ په هغه باندې د خارجي قواو $\vec{F}_i^e$ او د سیستم د نورو ذرو له له امله د داخلي قواو $\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ji}^{int}$ له مجموعي څخه عبارت ده یعنې

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ji}$$

له دې ځایه (۱.۲۳.۳) معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \left(\vec{F}_i + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ji}\right). d\vec{r}_i$$

یا

$$W_{12} = \sum_i \left[\int_1^2 \vec{F}_i^e . d\vec{r}_i + \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \int_1^2 (\vec{F}_{ji}. d\vec{r}_i)\right]$$

یا

$$W_{12} = \sum_i \left[\int_1^2 \vec{F}_i^e . d\vec{r}_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \int_1^2 (\vec{F}_{ji}. d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij}. d\vec{r}_j)\right] \quad \text{... (۳.۲۳.۳)}$$

د $\frac{1}{2}$ فکتور استعمال شوی نو هر حد باید دوه ځلې حساب نه شي.

که داخلي او خارجي قوې محفوظې وي، نو د خپلو اړوندو پوتنسیالي انرژیو له مخې توضیح کیدای شي.

له دې ځایه $\vec{F}_i^e = \vec{\nabla}_i V_i^e$

همدارنګه $\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji}^{int}$ او $\vec{F}_{ij} = \vec{\nabla}_j V_{ij}^{int}$

له دې ځایه (۳.۲۳.۳) معادله به

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}. V_i^e . d\vec{r}_i - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \int_1^2 (\vec{\nabla}_i V_{ji}^{int}. d\vec{r}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij}^{int}. d\vec{r}_j)$$

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 dV_i^e . d\vec{r}_i - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \int_1^2 (\vec{\nabla}_i V_{ji}^{int}. d\vec{r}_i - \vec{\nabla}_i V_{ji}^{int}. d\vec{r}_j)$$

$$(\vec{\nabla}_i V_{ij}^{int} = -\vec{\nabla}_j V_{ij}^{int} \qquad \therefore)$$

$$W_{12} = \sum_i [V_i^e]_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_{ji}^{int}\left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right)$$ يا

د $d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij}$ په ليکلو سره، لاس ته راوړو چې

$$\therefore \quad W_{12} = V_1^e - V_2^e - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} \int_1^2 dV_{ji}^{int} \ . d\vec{r}_{ij}$$

$$= (V_1^e - V_2^e) + \left[-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} V_{ji}^{int}\right]_1^2$$

$$= (V_1^e - V_2^e) + \left[-V^{int}\right]_1^2$$

$$= (V_1^e - V_2^e) + \left(V_1^{int} - V_2^{int}\right)$$

$$= \left(V_1^e - V_1^{int}\right) - \left(V_2^e + V_2^{int}\right)$$

$$= V_1 - V_2 \qquad \text{...(۴.۲۳.۳)}$$

داسې چې $V_1 = V_1^e - V_1^{int}$ او $V_2 = V_2^e + V_2^{int}$ په ترتيب سره په ۱ او ۲ موقعيت کې د سيستم مجموعي پوټنسيال انرژي ښيي.

له (۲.۲۳.۳) او (۴.۲۳.۳) معادلو څخه، لرو چې

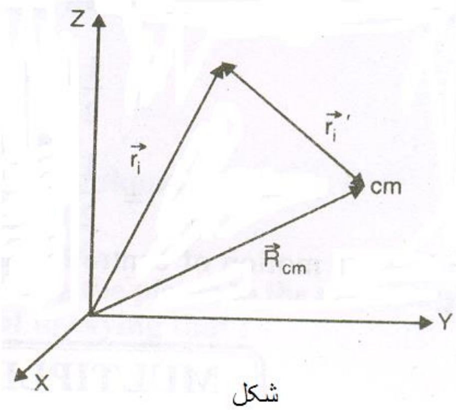
$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

يا $$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

يا $$T + V = \text{ثابت}$$

له دې ځايه که د ذرو په سيستم باندې خارجي او داخلي عاملې قوې محفوظې وي، نو د ذرو د سيستم مجموعي انرژي محفوظه ده. دا د انرژي د تحفظ قانون دی.

۱۰.۳ مثال. وښایاست چې د ذرو د سیستم حرکي انرژي د هغه د کتلې مرکز د حرکت حرکي انرژي او نظر د کتلې مرکز ته یې د ذرو د حرکت حرکي انرژي له مجموعې سره مساوي ده.



شکل

حل. د n-ذرو یو سیستم په ترتیب سره د $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$، ، ، ، $\vec{r}_n$ موقعیت وکتورونو په لرلو سره په پام کې ونیسئ. د m_i یوه کتله فرض کړئ چې د $\vec{r}_i$ موقعیت وکتور او نظر O مبداه ته د $\vec{v}_i$ سرعت لري. که $\vec{R}_{cm}$ د کتلې د مرکز د موقعیت وکتور (۱.۷.۳شکل)، او $\vec{r'}_i$ نظر د سیستم د کتلې مرکز ته د i-مې ذرې د موقعیت وکتور وي نو

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{r'}_i \qquad \dots (i)$$

نظر t ته د دواړو خواو د مشتق په اخستلو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{r'}_i}{dt}$$

یا

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v'}_i \qquad \dots (ii)$$

نظر O مبداه ته د i-مې ذرې حرکي انرژي عبارت ده له

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i \vec{v}_i . \vec{v}_i \qquad \dots (iii)$$

په (ii) کې د (iii) په وضع کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{V} + \vec{v'}_i\right).\left(\vec{V} + \vec{v'}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i . \vec{V}.\vec{V} + \frac{1}{2}\sum_i m_i . \vec{v'}_i . \vec{v'}_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i . \vec{V}.\vec{v'}_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i . \vec{v'}_i . \vec{V}$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . \vec{v'}_i . \vec{V} \qquad \dots (iv)$$

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2 + \frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i . \vec{r'}_i\right].\vec{V} \qquad \dots (v)$$

له (i) معادلې څخه، لاس ته راوړو چې

$$\overrightarrow{r'}_i = \vec{r}_i - \vec{\mathrm{R}}_{cm}$$

نو (v) معادله به
$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{MV}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2 + \frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i\left(\vec{r}_i - \vec{\mathrm{R}}_{cm}\right)\right].\vec{\mathrm{V}}$$

يا
$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{MV}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2 + \frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i . \overrightarrow{r'}_i - \sum_i m_i . \vec{\mathrm{R}}_{cm}\right].\vec{\mathrm{V}}$$

يا
$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{MV}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2 + \frac{d}{dt}\left[\mathrm{M}\vec{\mathrm{R}}_{cm} - \mathrm{M}\vec{\mathrm{R}}_{cm}\right].\vec{\mathrm{V}}$$

يا
$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{MV}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i . {v'_i}^2$$

د کتلي د مرکز د حرکت حرکي انرژي + نظر د کتلي مرکز ته د ذرو د حرکت حرکي انرژي =

ځو ځوابه پوښتنې

۰۱ د یوه الکترون او پروتون د سیستم کمه شوې کتله:

(الف) د پروتون او الکترون د کتلې له مجموعې سره مساوي ده

(ب) د پروتون او الکترون د کتلې له توپیر سره مساوي ده

(ج) د پروتون له کتلې څخه لږ څه کمه ده

(د) د پروتون له کتلې څخه لږ څه زیاته ده

۰۲ کوم یو له لاندې څخه به مرکزي وي:

(الف) هستوي قوه (ب) د دوو متحرکو چارجونو ترمنځ قوه

(ج) په β-تجزیه کې قوه (د) جاذبوي قوه

۰۳ د مرکزي قوې مبدا عبارت ده له:

(الف) متقابل عمل (ب) بیتا تجزیه

(ج) هستوي ذرې (د) نامعلومه منبع

۰۴ د مرکزي قوې لاندې د متحرکې ذرې مدار همیشه:

(الف) مستقیمه کرښه ده (ب) په سطحه کې واقع وي

(ج) په فضا کې واقع وي (د) هیڅ یو

۰۵ د مرکزي قوې لاندې د متحرکې ذرې مجموعي انرژي منفي ده. د ذرې مسیر:

(الف) ممکن هایپربولیک وي (ب) ممکن پارابولیک وي

(ج) ممکن بیضوي وي (د) ممکن بیضوي یا دایره وي

۰۶ که د یوې ذرې مجموعي انرژي منفي وي خو اصغري نه وي، مسیر یې عبارت دی له:

(الف) هایپربولیک (ب) دایروي

(ج) بیضوي (د) پارابولیک

۰۷ د معکوس مربع قوې د عمل لاندې به یو جسم یو بیضوي مسیر ولري، که عین المرکزیت یې:

(الف) $\epsilon = 0$ (ب) $\epsilon = 1$

(ج) $\epsilon > 1$ (د) $\epsilon < 1$

۰۸ که د یوې منحني عین المرکزیت صفر وي، منحني عبارت ده له:

(الف) پاربولا (ب) دایره

(ج) هایپربولا (د) بیضوي

۰۹ د معکوس مربع قوې لاندې به یو جسم په دایروي مسیر حرکت وکړي، که مجموعي انرژي یې:

(الف) صفر وي (ب) مثبته وي

(ج) له اصغري پوتنسیال انرژي سره مساوي وي

(د) منفي وي، خو له اصغري پوتنسیال انرژي څخه زیاته وي

۰۱۰ د معکوس مربع قوې لاندې به یو جسم په پارابولایک مسیر حرکت وکړي، که مجموعي انرژي یې:

(الف) صفر وي (ب) مثبته وي

(ج) له اصغري پوتنسیال انرژي سره مساوي وي

(د) منفي وي، خو له اصغري پوتنسیال انرژي څخه زیاته وي

۰۱۱ که دیوې ذرې د مدار عین المرکزیت صفر وي، د مدار شکل یې عبارت دی له:

(الف) بیضوي (ب) دایره

(ج) هایپربولا (د) پارابولا

۰۱۲ د کپلر دویم قانون بیانوي چې د سیارې او ستوري نښلوونکې کرښه په مساوي وختو کې مساوي سطحې جارو کوي، دا جمله له دې وینا سره مساوي ده:
(الف) د سیارې تعجیل صفر دی (ب) د سیارې عرضي تعجیل صفر دی
(ج) د سیارې مماسي تعجیل صفر دی (د) د سیارې شعاعي تعجیل صفر دی

ځوابونه

۱ (ج) ۲ (د) ۳ (الف) ۴ (ب) ۵ (د) ۶ (ج) ۷(د) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (الف) ۱۱(ب)
۱۲ (ب)

لنډ ځوابه پوښتنې

۰۱ پوښتنه. مرکزي قوه څه شی ده؟ د مرکزي قوې ځینې خواص توضیح کړئ.

ځواب. یوه قوه مرکزي قوه بلل کېږي، که اندازه یې یوازې د قوې له مرکز څخه د جسم په فاصلې پورې اړه ولري او همیشه د قوې د مرکز او جسم د نښلوونکې کرښې په امتداد عمل وکړي.

خواص

(i) محفوظه قوه ده

(ii) د اوږدې ساحې قوه ده

(iii) د مرکزي قوې په ساحه کې، د ذرې زاویوي مومنتم همیشه محفوظ وي.

(iv) د مرکزي قوې د عمل لاندې، د ذرې مدار همیشه تر سطحې پورې محدود وي.

(v) مرکزي قوه همیشه د کوم سکالري پوتنسیال V د منفي ګرادیانت په توګه توضیح کېږي.

یعنې

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

۰۲ پوښتنه. غیر مرکزي قوه څه شی ده؟ د غیر مرکزي قوې ځینې خواص توضیح کړئ.

ځواب. هغه قوه چې لورى یې د هغې کرښې په امتداد نه وي چې د دوو متقابل عمل کوونکو ذرو مرکزونه نښلوي، غیر مرکزي قوه بلل کېږي.

خواص:

(i) غیر محفوظه قوه ده

(ii) د لنډې ساحې قوه ده

(iii) د معکوس مربع له قانون څخه پیروي نه کوي.

۰۳ پوښتنه. ایا غیر مرکزي قوې په طبیعت کې شتون لري؟ که وي، مثال یې وړاندې کړئ.

ځواب. هو، غیر مرکزي قوې په طبیعت کې شتون لري. هستوي قوه او کمزورې قوه د غیر مرکزي قوې مثالونه دي.

۰۴ پوښتنه. وښایاست چې د هایدروجن اتوم کمه شوې کتله تقریباً د الکترون له کتلې سره مساوي ده.

ځواب. د m_1 او m_2 کتلو لرونکي دوو ذرو سیستم کمه شوې کتله عبارت ده له:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

دلته $m_1 = m_e$ ، د الکترون کتله

او $m_2 = m_p = 1836 m_e$ د پروتون کتله (د هایدروجن هسته)

$$\therefore \quad \mu = \frac{m_e \times 1836 m_e}{m_e + 1836 m_e} = \frac{1836 m_e}{1837} = 0.9995 m_e \cong m_e$$

۰۵ پوښتنه. ثبوت کړئ چې مرکزي قوه د سکالري پوتنسیال منفي ګرادیانت ده.

ځواب. اجازه راکړئ چې د جاذبوي قوې حالت په پام کې ونیسو، چې مرکزي قوه ده.

د m_1 او m_2 دوو کتلو چې د r په فاصله یو له بل څخه لیرې دي ترمنځ جاذبوي قوه عبارت ده له:

$$\mathrm{F} = -\frac{\mathrm{G} m_1 m_2}{r^2} \qquad \ldots (i)$$ (د منفي علامې معنا د جاذبې قوه ده)

جاذبوي پوتنسیال انرژي U عبارت ده له:

$$\mathrm{U} = -\frac{\mathrm{G} m_1 m_2}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = -\mathrm{G} m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{\mathrm{G} m_1 m_2}{r^2}$$

یا (د (i) معادلې په استعمالولو)

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = -\mathrm{F}$$

یا

$$\mathrm{F} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}$$

يعنې مرکزي قوه د سکالري پوتنسيال انرژي له منفي ګراديانت سره مساوي ده.

۰۶ پوښتنه. د معادل يوه جسم مسئلې څخه مو هدف څه شی دی؟

ځواب. د معادل يوه جسم مسئلې معنا داده چې د دوو (يا زياتو) ذرو د سيستم حرکت داسې مطالعه کيدای شي چې د سيستم په هکله داسې فکر وشي چې له يوه جسم څخه چې د نوموړي سيستم د کتلې په مرکز کې واقع دی جوړ شوی دی.

۰۷ پوښتنه. د قوې محفوظې او غير محفوظې ساحې څه شی دي؟

ځواب. که په ذرې باندې د قوې په واسطه سرته رسيدلی کار هغې ته داسې ځای بدلون ورکړي چې د ذرې په واسطه د وهل کيدونکې لار څخه مستقل وي، د قوې دا ساحه محفوظه بلل کيږي. که نه نو د قوې ساحه غير محفوظه بلل کيږي.

۰۸ پوښتنه. د مرکزي قوې لاندې د ذرې د حرکت د توضيح کولو لپاره څو مختصاتو ته اړتيا ده؟

ځواب. څرنګه چې د مرکزي قوې لاندې د ذرې حرکت هميشه په مستوي کې رامنځ ته کيږي، نو يواځې دوو مختصاتو ته اړتيا ده.

۰۹ پوښتنه. د $\frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^2}$ کميت بعدونه څه شی دي.

ځواب. د $\frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^2}$ بعدونه

$$\frac{\mathrm{L}^2}{\mu r^2} = \frac{[\mathrm{ML^2T^{-1}}]^2}{[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2} = \frac{[\mathrm{M^2L^4T^{-2}}]}{[\mathrm{ML^2}]}$$

$$= [\mathrm{ML^2T^{-2}}]$$

= د انرژي بعدونه

۰۱۰ پوښتنه. د بيرته ګرځيدو نقطې څه شی دي؟

ځواب. په يوه منحنې باندې، د بيرته ګرځيدو نقطه هغه نقطه ده چې په هغې کې د ذرې سرعت صفر کيږي يعنې $v = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = 0$ يعنې r به اعظمي يا اصغري وي او ذره د حرکت لوري ته تغير ورکوي.

۰۱۱ پوښتنه. يوه مصنوعي سپوږمۍ د ځمکې شاوخوا تقريباً په دايروي مدار کې حرکت کوي. وښاياست چې د هوا اصطکاک به د مصنوعي سپوږمۍ سرعت زيات کړي.

ځواب. که m کتله لرونکې مصنوعي سپوږمۍ د M کتله لرونکې ځمکې شاوخوا د r په شعاع دایروي مدار کې چې مداري سرعت يې v وي حرکت وکړي، نو

$$\mathrm{F}_g = \mathrm{F}_c$$

$$\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M}}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$(mvr)v = \mathrm{G}m\mathrm{M} = \text{ثابت}$$

اصطکاک په مصنوعي سپوږمۍ باندې تاخيري تورک واردوي او په نتيجه کې يې زاويوي مومنتم کميږي، له دې ځايه د مصنوعي سپوږمۍ مداري سرعت v زياتيږي.

۰۱۲ پوښتنه. وښاياست چې په بيضوي مدار کې د متحرکې سيارې مجموعي انرژي يوائې د نيمه-لوی محورپه اوږدوالي پورې اړه لري.

يا

وښاياست چې د m کتله لرونکې سيارې چې د M کتله لرونکې لمر شاوخوا په بيضوي مدار کې حرکت کوي مجموعي انرژي له $\frac{\mathrm{GmM}}{2\mathrm{a}}$ سره مساوي ده.

ځواب. د مخروط عمومي معادله عبارت ده له

$$\frac{1}{r} = l[1+\in \cos(\theta - \theta_0)]$$

يا

$$r = \frac{1}{l[1+\in\cos(\theta-\theta_0)]}$$

اجازه راکړئ چې دوه حالتونه واخلو

(i) کله چې $\theta - \theta_0 = \pi$ ، لوړه نقطه $= r = r_{max}$

نو

$$r_{max} = \frac{1}{l(1-\in)}$$

(ii) کله چې $\theta - \theta_0 = 0$ ، راس نقطه $= r = r_{min}$

نو

$$r_{min} = \frac{1}{l(1+\in)}$$

که 2a د سیارې د بیضوي مدار لوی محور وي، نو لرو چې

$$r_{max} + r_{min} = 2\mathrm{a}$$

$$a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l(1-\epsilon)} + \frac{1}{l(1+\epsilon)}\right]$$

$$a = \frac{1}{2l}\left[\frac{1+\epsilon+1-\epsilon}{1-\epsilon^2}\right]$$

یا

$$a = \frac{1}{l(1-\epsilon^2)} \qquad \dots(i)$$

د سیارې د بیضوي مدار عین المرکزیت عبارت دی له:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}}$$

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2}$$

$$1 - \epsilon^2 = \frac{2\mathrm{EL}^2}{\mu k^2} \qquad \dots(ii)$$

او

$$l = \frac{\mu k}{\mathrm{L}^2} \qquad \dots(iii)$$

په (i) معادله کې د (ii) او (iii) معادلو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu k}\left(-\frac{\mu k^2}{2\mathrm{EL}^2}\right)$$

یا

$$a = -\frac{k}{2\mathrm{E}}$$

یا

$$\mathrm{E} = -\frac{k}{2a}$$

یعنې مجموعي انرژي یوائې په نیمه-لوی محور پورې اړه لري.

څرنګه چې

$k = GmM$

$$E = -\frac{GmM}{2a} \quad \therefore$$

۰۱۳ پوښتنه. ایا په یوه ځانګړي مدار کې د مصنوعي سپوږمۍ چټکتیا ثابته پاتې کېږي؟ توضیح یې کړئ.

ځواب. نه، څکه جاذبوي قوه مرکزي قوه ده او سیاره په بیضوي مدار کې حرکت کوي مرکزي قوه (یا معکوس مربع قوه) خپل زاویوي مومنټم ثابت لري یعنې

$mvr =$ ثابت

څرنګه چې r په بیضوي مدار کې تغیر کوي، نو v هم تغیر کوي.

۰۱۴ پوښتنه. د کپلر د قوانینو په استعمالولو، ثبوت کړئ چې د لمر او سیارو ترمنځ قوه له معکوس مربع قانون څخه پیروي کوي.

ځواب. اجازه راکړئ چې د لمر شاوخوا د سیارې حرکت تقریباً د r شعاع او v خطي سرعت په لرلو سره دایروي فرض کړو.

نو، په سیارې باندې د لمر د جاذبوي قوې عمل، مرکز ته د جذب اړینه قوه برابروي.

یعنې

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

څرنګه چې

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$ (T د سیارې د وخت پریود دی)

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \quad \therefore$$

د کپلر له دریم قانون څخه، لرو چې

$$T^2 = kr^3$$

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{kr^3} \quad \therefore$$

یا $\mathrm{F} = \left(\frac{4\pi^2 m}{k}\right) . \frac{1}{r^2}$

یا $\therefore \left[\frac{4\pi^2 m}{k} = \text{ثابت} \right]$ $\qquad$ $\mathrm{F} \propto \frac{1}{r^2}$

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې د لمر او سیارې ترمنځ قوه له معکوس مربع قانون څخه پیروي کوي.

تمرین

<u>(اوږد ځوابه پوښتنې)</u>

۰۱ له مرکزي او غیر-مرکزي قواو څخه مو هدف څه شی دی؟ کم له کمه د هر یوه دوه مثالونه وړاندې کړئ.

۰۲ وښایاست چې د مرکزي قوې په حرکت کې، د ذرې زاویوي مومنټم همیشه محفوظ دی.

۰۳ وښایاست چې د مرکزي قوې د عمل لاندې د متحرکې ذرې مدار همیشه تر سطحې پورې محدود وي.

۰۴ مرکزي قوه تعریف او د مرکزي قوې خواص په تفصیل سره بیان کړئ.

۰۵ د دوو کتلو د یوه معادل یو جسم د حرکت معادله لاس ته راوړئ.

۰۶ د کمې شوې کتلې په استعمالولو، د دوو جسمونو مسئله د معادل یو جسم مسئلې ته واړوئ. د کمې شوې کتلې فزیکي مفهوم توضیح کړئ.

یا

وښایاست چې د هایدروجن کمه شوې کتله تقریباً د الکترون له کتلې سره مساوي ده.

۰۷ ولې مونږ د کمې شوې کتلې د مفهوم په معرفي کولو سره د دوو جسمونو مسئله د یوه جسم مسئلې ته اړوو؟ د یوه معادل یو جسم مسئلې معادله لاس ته راوړئ.

۰۸ د مرکزي قوې لاندې د متحرکې ذرې د حرکت معادله په θ-مختصاتو کې لاس ته راوړئ.

۰۹ وښایاست چې د مرکزي قوې د اغیزې لاندې د کمې شوې کتلې زاویوي مومنټم محفوظ دی.

۰۱۰ د مرکزي قوې لاندې د متحرکې ذرې د حرکت معادله لاس ته راوړئ او د r او θ لپاره یې انټګرالي حل پیدا کړئ.

۰۱۱ وښایاست چې د مرکزي قوې ساحې لاندې سیستم انرژي ثابته ده.

۰۱۲ په مرکزي قوې ساحه کې د مدار دیفرنسیالي معادله لاس ته راوړئ.

۰۱۳ د m کتلې لرونکې ذرې چې د ثابت مدار شاوخوا د $\mathrm{F}=\frac{k}{r^2}$ قوې ساحې د عمل لاندې حرکت کوي د مدار قطبي معادله پیدا کړئ.

۰۱۴ ثبوت کړئ چې د قوې معکوس مربع قانون لاندې متحرکې ذرې د مسیر شکل د هغې د زاویوي مومنټم او مجموعي انرژي ترمنځ اړیکې پورې اړه لري.

۰۱۵ د قوې معکوس مربع قانون لاندې متحرکې ذرې د مدار معادله لاس ته راوړئ. توضیح کړئ، د مدار شکل د انرژي او زاویوي مومنټم په واسطه څنګه تعینیږي.

۰۱۶ مرکزي قوې څه شی دي؟ د دوو ذرو سیستم لپاره چې د مرکزي قوې د عمل لاندې حرکت کوي وښایاست ، چې د سیستم مجموعي انرژي ثابته پاتې کیږي.

۰۱۷ د مرکزي قوې لاندې متحرکې ذرې چې د فاصلې له مربع سره معکوساً تغیر کوي د مسیر قطبي معادله په وکتوري میتود لاس ته راوړئ.

۰۱۸ په معکوس مربع قوې ساحه کې د مدار معادله توضیح کړئ. د بیرته ګرځیدو نقطې او د مسیر شکل وټاکئ.

۰۱۹ د بیرته ګرځیدو نقطې څه شی دي؟ په بیضوي کې د بیرته ګرځیدو نقطو شمیر څو دی؟

۰۲۰ وښایاست چې د بیرته ګرځیدو په نقطه کې، د ذرې شعاعي سرعت (یا حرکي انرژي) صفر ده.

۰۲۱ د مرکزي قوې لاندې متحرکې ذرې په مسیر کې د بیرته ګرځیدو نقطې وټاکئ.

۰۲۲ د بیرته ګرځیدو نقطې څه شی دي؟ د جسم د مسیر د انرژی او عین المرکزیت ترمنځ اړیکه لاس ته راوړئ.

۰۲۳ د متحرکې ذرې د مجموعي انرژي د مختلفو ساحو لپاره د مرکزي قوې ساحې لاندې د اربیټالي حرکت طبیعت توضیح کړئ.

۰۲۴ د کپلر د سیاره یي حرکت قوانین بیان او د سیارو حرکت د معادل یو جسم مسئلې په څېرمعامله کوونې څخه یې ثبوت کړئ.

۰۲۵ د کپلر د سیاره یي حرکت قوانین بیان او هریو یې ثبوت کړئ.

۰۲۶ د کپلر د توضیح په څیر د سیاره یي حرکت درې قوانین بیان او دویم قانون یې ثبوت کړئ.

۰۲۷ د کپلر د سیاره یي حرکت دویم قانون ثبوت کړئ.

۰۲۸ که $\vec{r}$ شعاعي وکتور چې m کتله لرونکي ذره د قوې له مرکز سره نښلوي او $\vec{A}$ د شعاعي وکتور په واسطه جارو شوې سطحه وي، وښایاست چې:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

داسې چې $\vec{L}$ د کتلې د مرکز په شاوخوا د ذرې زاویوي مومنتم وي.

۰۲۹ د کپلر د حرکت قوانین بیان او ثبوت کړئ.

۰۳۰ د کپلر د سیاره یي حرکت قوانین بیان او لاس ته راوړئ.

۰۳۱ وښایاست چې دبیضوي مدار نیمه-لوی محور a عبارت دی له:

$$a = -\frac{k}{2E}$$

داسې چې E د سیارې انرژي وي.

عددي مسائل

۰۱ وښایاست چې د مرکزي قوې ساحه همیشه محفوظه ده.

۰۲ د متقابل عمل د مرکزي قوې برخه د $U(r) = -\frac{ke^{-ar}}{r}$ په ډول لیکل کیدای شي، داسې چې k او a ثوابت او $U(r)$ د یوکاوا پوتنسیال بلل کیږي. د پوتنسیال اړوند قوې لپاره افاده لاس ته راوړئ.

[اشاره، $F = \frac{\partial U}{\partial r}$] ځواب. $-ke^{-ar}\left[\frac{a}{r} + \frac{1}{r^2}\right]$

۰۳ په مرکزي قوې ساحه کې د مجموعي زاویوي مومنتم $L = \mu r^2\dot{\theta}$ محفوظ فرضوونې سره، ثبوت کړئ چې $r\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta} = 0$

$$\begin{bmatrix} \text{اشاره،} & L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \\ \text{یا} & r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \\ \multicolumn{2}{c}{\text{اوس نظر } \dot{\theta} \text{ ته د دواړو خواو مشتق اخلو}} \end{bmatrix}$$

۰۴ m کتله لرونکې ذره په یوه مرکزي قوې ساحه $-\frac{k}{r^2}$ کې چې لوری یې یوې ثابتې نقطې ته دی حرکت کوي. د ممکنه مدارونو معادله یې پیدا کړئ.

۰۵ یو ذره د $\mathrm{F} = \mathrm{A}e^{-\alpha r}$ مرکزي قوې لاندې واقع شوی ده، داسې چې A او α ثوابت دي. له قوې سره مل پوتنسیال انرژي پیدا کړئ.

[اشاره، $\mathrm{U} = \int \mathrm{F}dr$]　　　　[ځواب. $\frac{\mathrm{A}}{\alpha}e^{-\alpha r}$]

۰۶ په m کتله لرونکې ذرې باندې عاملې قوې لپاره افاده لاس ته راوړئ، د مسیر شکل له $r = asin\theta$ څخه عبارت دی.

[ځواب. $\mathrm{F}(r) = -\frac{2a^2\mathrm{L}^2}{mr^5}$]

۰۷ د بیضوي مدار لپاره وښایاست چې

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

۰۸ یوه ذره د معکوس مربع جاذبوي قوې لاندې په یو بیضوي مدار کې حرکت کوي. وښایاست چې د سیستم مجموعي انرژي یواځې د بیضوي په لوی محور پورې اړه لري.

۰۹ د μ کتله لرونکې ذره په مرکزي قوې ساحه کې چې د $\vec{\mathrm{F}} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$ په واسطه تعریفیږي حرکت کوي. ثبوت کړئ چې د ذرې چټکتیا عبارت ده له:

$v = \left[\frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\right]^{1/2}$ ، داسې چې E ذرې ته ورکړل شوې مجموعي انرژي ده.

۰۱۰ د عطارد سیارې په واسطه د مدار د بشپړولو لپاره نیول شوی وخت ۲۵ کلونه دي. له لمر څخه یې وسطي فاصله پیدا کړئ.

درپیمه برخه

اهتزازات-۱

پوتنسیالي څاه، پریودیکي او ساده هارمونیکي اهتزازات، تفاضلي معادله او د هغې حل، د ساده هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي، مثالونه: فنر او د کتلې سیستم، ساده او مرکب شاقول، ټارسیونال شاقول، بیفیلار اهتزازات، هیلم هولتز ریزونېټر، LC سرکټ، د مقناطیس اهتزازات، د فنر په واسطه نښلول شویو دوو کتلو اهتزازات.

استهلاکي ساده هارمونیکي اهتزازات، تفاضلي معادله او د هغې حل، انرژي، د طاقت خپریدل، د ځرنګوالي ضریب، مقاومت او الکترومقناطیسي استهلاک.

څلورم څپرکی

هارمونيکي اهتزازات

۱.۴ مقدمه

هغه حرکت چې د وخت د منظم انټروال وروسته خپل ځان بیا تکرار کړي پریودیک حرکت بلل کیږي. د ساده شاقول د ګلولې حرکت، د فنر یوه انجام پورې نښلول شوې کتله، د لمر شاوخوا سیارې او داسې نور د پریودیک حرکت مثالونه دي. د یوه جسم پریودیک حرکت که د کومې ثابتې نقطې مخ ته او شا ته حرکت وي اهتزازي بلل کیږي. هر اهتزازي حرکت پریودیک دی خو هر پریودیک حرکت اهتزازي نه دی یعنې د ساده شاقول د ګلولې حرکت دواړه اهتزازي او پریودیک دی په داسې حال کې چې د لمر شاوخوا د یوې سیارې حرکت یواځې پریودیک دی نه اهتزازي. که هغه قوې چې د پریودیک حرکت مخالفت کوي په پام کې ونیول شي، نوموړی حرکت استهلاکي پریودیک حرکت بلل کیږي. د پریودیک حرکت حلونه په ریاضیکي توګه د ساین یا کوساین توابعو له مخې، چې د هارمونیک په توګه پیژندل کیږي توضیح کیږي او له همدې امله پریودیک حرکت د هارمونیک حرکت په توګه هم پیژندل کیږي. د وخت کوچنی انټروال چې له هغې وروسته پریودیک حرکت خپل ځان تکراروي د وخت پریود یې بلل کیږي او د هغو اهتزازاتو شمیر چې د وخت په واحد کې یې ترسره کوي فریکونسي یې بلل کیږي.

۲.۴ پوتنسیالی څاه او پریودیک اهتزازات

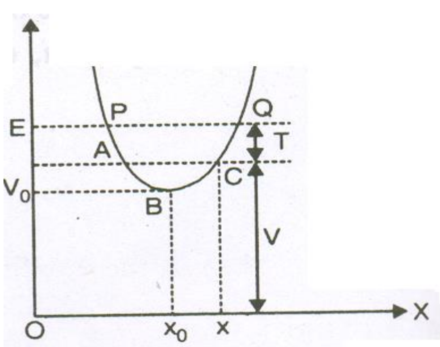
د یوې ذرې یو بعده حرکت د x-محور په امتداد چې د پوتنسیال انرژي تابع یې $V(x)$ وي لکه چې په ۱.۲.۴ شکل کې ښودل شوي په پام کې ونیسئ. په ذره باندې قوه په لاندې توګه توضیح کیدای شي

$$F = -\frac{dV}{dx} \qquad \dots (۱.۲.۴)$$

په AB ساحه کې د ذرې پوتنسیال انرژي $V(x)$ له مبدا څخه د هغې د فاصلې x په زیاتیدو سره کمیږي. ځکه نو، په دې ساحه کې د پوتنسیال انرژي د منحني میل $\frac{dV}{dx}$ منفي او په ذره باندې د F قوه مثبته ده. په عین توګه، په BC ساحه کې $\frac{dV}{dx}$ مثبت او F منفي کېږي. د B نقطې اړوند $\frac{dV}{dx} = 0$ او په ذره باندې هیڅ قوه عمل نه کوي.

له دې ځایه، د ذرې حرکت په داسې ډول دی چې یوه قوه زغمي چې د ترټولو کوچني پوتنسیال انرژي V_0 موقعیت ته یې تیل وهي. د $x = x_0$ اړوند د کوچني پوتنسیال انرژي دا نقطه د پایدار تعادل حالت ښیي.

کله چې ذره په $x = x_0$ کې چې د تعادل حالت یې دی وي د یو څه حرکي انرژي T په ورکولو لږ څه بې ځایه شي نو مجموعي انرژي $E = T + V$ یې له V_0 څخه زیاتیږي. ذره یو نوی موقعیت چې په P یا Q ښودل شوی نیسي چې د هغې د بې ځایه کیدو په لوري پورې اړه لري. د P او Q نقطې د ذرې د مجموعي انرژي E اړوند افقي کرښې او د هغې د پوتنسیال انرژي منحني د تقاطع نقطې دي. د x په هره نقطه کې، د ذرې پوتنسیال انرژي د پوتنسیال انرژی د منحني له ترتیب (Ordinate) سره مساوي په داسې حال کې چې حرکي انرژي T یې د E او V له توپیر سره مساوي ده یعنې $T = E - V$. د تعادل له حالت $x = x_0$ څخه د ذرې د تغیر مکان په زیاتیدو سره، د V قیمت زیاتیږي. او د T تر هغې کمیږي تر څو چې په P یا Q نقطه کې صفر شي. ځکه نو، د تعادل له حالت څخه په لیرې کیدو د ذرې حرکي انرژي او په نتیجه کې یې سرعت کمیږي تر څو چې په P یا Q نقطه کې صفر شي. د حرکي انرژي د کمیدنې لامل د ذرې په واسطه د بیرته ګرځوونکې یا مخالفې قوې $F = -\frac{dV}{dx}$، چې په هغې عمل کوي په مقابل کې کار کونه ده. کله چې ذره د مثال په توګه په P نقطه کې ازاده پریښودل شي، نوموړې د بیرته ګرځونکې قوې د عمل لاندې د تعادل حالت $x = x_0$ لوري ته حرکت پیل کوي. پوتنسیال انرژي یې کمیږي چې د زیاتې شوې حرکي انرژي په توګه ښکاره کېږي. د تعادل په حالت کې، د ذرې پوتنسیال انرژي اصغري او حرکي انرژي یې اعظمي وي. ددې حرکي انرژي له امله، ذره د تعادل له حالت څخه تیریږي او Q نقطې لور ته حرکت کوي. د دې حرکت په اوږدو کې، حرکي انرژي کمیږي او پوتنسیال انرژي زیاتیږي ترڅو چې په Q کې ذره صفر حرکي انرژي او اعظمي پوتنسیال انرژي ولري. دا پروسه بیا بیا تکراریږي. له دې ځایه، دا ډول پوتنسیال انرژي تابع لرونکې ذره د P او Q نقطو په منځ کې اهتزاز کوي. په بل عبارت، د ذرې حرکت د P او Q نقطو په منځ ساحه کې محدود دی. دغسې ساحه د پوتنسیالي څاه یا یوې محدودې ساحې په توګه پیژندل کېږي. د P او Q نقطې د بیرته ګرځیدو



شکل ۱.۲.۴

نقطې يا نهايي نقطې بلل کيږي. دا بايد په پام کې ولرو چې يوه پوتنسيالي څاه يا يوه محدوده ساحه هميشه د پايدار تعادل نقطې ته نږدې شتون لري.

۳.۴ په پوتنسيالي څاه کې د کوچنيو اهتزازاتو طبيعت

په پوتنسيالي څاه کې داسې ډول يوه ذره لکه چې په مخکې برخه کې توضيح شوه په پام کې ونيسئ. د پايدار تعادل له حالت $x = x_0$ څخه د ذرې د کوچني ځای بدلون $\Delta x(= x - x_0)$ لپاره، په پوتنسيال انرژي تابع کې تغير د ټايلور قضيې په واسطه په لاندې ډول ورکول کيږي

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}_0 = \Delta \mathrm{V} = \left.\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right|_{x=x_0} . \Delta x + \left.\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{\lfloor 2} + \left.\frac{d^3\mathrm{V}}{dx^3}\right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^3}{\lfloor 3} + \cdots$$

$$\therefore \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \left.\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right|_{x=x_0} . \Delta x + \left.\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{\lfloor 2} + \left.\frac{d^3\mathrm{V}}{dx^3}\right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^3}{\lfloor 3} + \cdots$$

$x_0 = 0$ د تعادل حالت په پام کې ونيسئ نو x $\Delta x = x - x_0 = x$ او

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \left.\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right|_{x=x_0} . x + \left.\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{x^2}{\lfloor 2} + \left.\frac{d^3\mathrm{V}}{dx^3}\right|_{x=x_0} \frac{x^3}{\lfloor 3} + \qquad \ldots (۱.۳.۴)$$

چې $x_0 = 0$ د کوچني پوتنسيال انرژي سره برابر دی، ځکه نو، لرو چې

$$\left.\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{او د مثال په توګه} \quad k = \text{يو مثبت کميت} = \left.\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

نو (۱.۳.۴) معادله په لاندې توګه ليکل کيدای شي

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \mathbf{K}\,\frac{x^2}{\lfloor 2} + \mathbf{K}_1\,\frac{x^3}{\lfloor 3} + \mathbf{K}_2\,\frac{x^4}{\lfloor 4} + \cdots$$

داسې چې $\mathbf{K}_1 = \left.\frac{d^3\mathrm{V}}{dx^3}\right|_{x=x_0}$ ، $\mathbf{K}_2 = \left.\frac{d^4\mathrm{V}}{dx^4}\right|_{x=x_0}$ ، ...

کله چې د x ځای بدلون کوچنی وي، نو x^3 ، x^4 ، .... او نور ټول حدونه د صرف نظر وړ دي او مونږ د پوتنسيال انرژي افاده په لاندې ډول ليکلای شو

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{K}x^2 \qquad \ldots (۲.۳.۴)$$

(۲.۳.۴) معادله د پارابولا معادله ده.

په ذره باندې بيرته ګرځوونکې قوه عبارت ده له

$$F = -\frac{dV}{dx} = -Kx \qquad \dots (۳.۳.۴)$$

دا معادله ښيي چې د F قوه د تعادل له موقعيت څخه له ځای بدلون سره مستقيماً متناسبه ده او لوری يې هميشه د همدې موقعيت په لور وي. دغسې يو اهتزازي حرکت چې په هغه کې پوتنسيال انرژي تابع پارابولايي او قوه (يا تعجيل چې له قوې سره متناسب دی) له ځای بدلون سره مستقيماً متناسبه او لوری يې هميشه د تعادل د موقعيت په لوري وي ساده هارمونيکي حرکت (S. H. M) بلل کېږي.

۴.۴ د ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله او د هغې حل

کله چې يوه ذره په مستقيمه کرښه (د مثال په توګه د x-محور) ساده هارمونيکي حرکت سرته رسوي، نو پوتنسيال انرژي تابع يې پارابوليک او د x ځای بدلون د تابع په توګه په لاندې شکل راکول کېږي

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \dots (۱.۴.۴)$$

دلته، مونږ پوتنسيال انرژي چې د تعادل په موقعيت کې اصغري وي، صفر فرض کړې ده.

په ذره باندې د هغې د x ځای بدلون لپاره قوه عبارت ده له

$$F = -\frac{dV}{dx} = -Kx \qquad \dots (۲.۴.۴)$$

که m د ذرې کتله وي، نو قوه په لاندې توګه هم توضيح کېدای شي

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \qquad \dots (۳.۴.۴)$$

له (۲.۴.۴) او (۳.۴.۴) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې

$$m\ddot{x} = -Kx$$

يا $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ داسې چې $\omega_0^2 = K/m$

يا $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \dots (۴.۴.۴)$$

داسې چې $$\omega_0^2 = K/m$$

دا (۴.۴.۴) معادله د ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله بلل کېږي. ددې لپاره چې په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې د ځای بدلون، سرعت او تعجيل د وخت د تابع توب نظريه تر لاسه کړو، مونږ د (۴.۴.۴) معادلې حل کولو ته اړتيا لرو او ددې لپاره، مونږ يو حل ازمويو.

$$x = e^{\alpha t} \qquad \dots (۵.۴.۴)$$

داسې α چې یو ثابت دی.

نو $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$ او $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$

له (۴.۴.۴) معادلې څخه، لاس ته راوړو چې

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0{}^2) = 0 \qquad \ldots (۶.۴.۴)$$

چې د t هر قیمت لپاره $x = e^{\alpha t} \neq 0$ ، ځکه نو، له (۶.۴.۴) معادلې څخه

$$(\alpha^2 + \omega_0{}^2) = 0$$

یا $\alpha = \pm j\omega_0$ داسې چې $\left(j = \sqrt{-1}\right)$

د α د قیمتونو له امله، د (۴.۴.۴) معادلې عمومي حل په لاندې توګه لیکل کیدای شي

$$x = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{-j\omega_0 t} \qquad \ldots (۷.۴.۴)$$

داسې چې a_1 او a_2 ثوابت دي.

$$\therefore \quad x = a_1(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) + a_2(\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t)$$

یا

$$x = (a_1 + a_2)\cos\omega_0 t + j(a_1 - a_2)\sin\omega_0 t \qquad \ldots (۸.۴.۴)$$

فرض کړئ چې

$$a_1 + a_2 = a\sin\Phi \qquad \ldots (۹.۴.۴)$$

او

$$j(a_1 - a_2) = a\cos\Phi \qquad \ldots (۱۰.۴.۴)$$

نو (۸.۴.۴) معادله به

$$x = a\cos\omega_0 t\sin\Phi + a\sin\omega_0 t\cos\Phi$$

$$x = a\sin(\omega_0 t + \Phi) \qquad \ldots (۱۱.۴.۴)$$

داسې چې a د تعادل له موقعیت څخه د ځای بدلون اعظمي قیمت دی او د ساده هارمونیکي حرکت امپلیتیود بلل کیږي او Φ ثابت دی چې د لومړني فاز په توګه پیژندل کیږي. د ساده هارمونیکی حرکت په معادله کې د هارمونیکي تابع متحول $(\omega_0 t + \Phi)$ په t وخت کې د ساده هارمونیکي حرکت فاز بلل کیږي. د a او Φ قیمتونه چې له (۹.۴.۴) او (۱۰.۴.۴) څخه لاس ته راغلي په ترتیب سره عبارت دي له

$$a = \sqrt{(a\sin\Phi)^2 + (a\cos\Phi)^2}$$

$$= \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + [j(a_1 - a_2)]^2}$$

$$= \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2}$$

او

$$\Phi = \tan^{-1}\left[\frac{a_1 + a_2}{j(a_1 - a_2)}\right]$$

که مونږ $\Phi = \delta + \frac{\pi}{2}$ ونیسو، نو (۱۱.۴.۴) معادله په لاندې شکل توضیح کیدای شي

$$x = a\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad \ldots (۱۲.۴.۴)$$

دا له (۱۱.۴.۴) او (۱۲.۴.۴) معادلو څخه ځرګنده ده چې ساده هارمونیکي حرکت د ساین او یا د کوساین د یوې تابع په شکل توضیح کیدای شي. هره یوه د (۷.۴.۴) ، (۸.۴.۴) ، (۱۱.۴.۴) او (۱۲.۴.۴) معادلو څخه د ساده هارمونیکي حرکت د تفاضلي معادلې یو حل وړاندې کوي.

ددې لپاره چې په (۱۱.۴.۴) معادله کې د ω_0 حد په فزیکي ارزښت وپوهیږو، د t قیمت د $\frac{2\pi}{\omega_0}$ په واسطه زیاتوو. نو ځای بدلون په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x' = a\sin\left\{\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \Phi\right\}$$

$$= a\sin(\omega_0 t + \Phi + 2\pi)$$

$$= a\sin(\omega_0 t + \Phi)$$

یا

$$x' = x$$

ځکه نو، ځای بدلون وروسته له یوه وخت څخه چې $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ اصغري قیمت لري خپل ځان تکراروي. د T دغه وخت د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود بلل کیږي او عبارت دی له

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}} \qquad \left(\because \quad {\omega_0}^2 = \frac{\mathrm{K}}{m}\right)$$

<u>۵.۴ د ځینو مهمو اصطلاحاتو تعریفونه</u>

۱. هارمونیکي اهتزاز ورکوونکی. هغه جسم چې ساده هارمونیکي حرکت سرته رسوي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکی بلل کیږي.

۲. ځای بدلون. کله چې یو جسم په مستقیمه کرښه ساده هارمونیکي حرکت سرته رسوي، له منځني موقعیت څخه یې هر لوري ته فاصله په همدې وخت کې له تعادل یا منځني موقعیت څخه ځای بدلون بلل کېږي.

۳. امپلیتیود. په ساده هارمونیکي حرکت کې د منځني موقعیت څخه په هر لوري کې د ذرې اعظمي ځای بدلون د ساده هارمونیکي حرکت امپلیتیود بلل کېږي.

۴. اهتزاز یا سایکل. په ساده هارمونیکي حرکت کې د یوې ذرې مخ ته او شا ته یو بشپړ اهتزاز یو سایکل یا د ساده هارمونیکي حرکت اهتزاز جوړوي.

۵. د وخت پریود. د وخت کوچنی انټروال چې له هغې وروسته یو ساده هارمونیکي حرکت خپل ځان بیا تکراروي د هغه د وخت پریود بلل کېږي. په بل ډول، دا په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې په واسطه د یوه اهتزاز د پوره کولو لپاره د نیول شوي وخت په توګه هم تعریف کیدای شي. دا د T په واسطه ښودل کېږي.

۶. فریکونسي. په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې د بشپړو اهتزازاتو شمیر د وخت په واحد کې د ساده هارمونیکي حرکت فریکونسي بلل کېږي. دا د ν_0 په واسطه ښودل کېږي او واحد یې دور پر ثانیه $(c.p.s)$ یا هرتز (Hz) دی. دا د وخت د پریود معکوس دی.

$$\nu_0 = \frac{1}{\mathrm{T}_0}$$

۷. زاویوي فریکونسي. د ساده هارمونیکي حرکت زاویوي فریکونسي د لاندې کمیت په توګه تعریف کېږي.

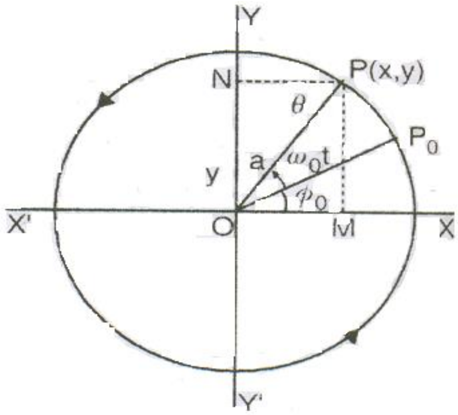
$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}$$

۸. فاز. په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې فاز هر وخت د هغې حالت یعنې موقعیت او په همدې وخت کې د حرکت لوری ورکوي. دا د هغه وخت د پریود د کسر په توګه اندازه کېږي چې د ذرې له منځني موقعیت څخه مثبت لوري ته وروستي ځل تیریدو په وخت کې تیر شوی وي.

په عمومي توګه فاز د فاز زاویې له مخې توضیح کېږي چې په هغې کې د یوه وخت پریود T_0 فاز د 2π رادیان فاز زاویې سره معادل نیول کېږي

۹. لومړنی فاز. په $t = 0$ کې د ساده هارمونیکي حرکت فاز لومړنی فاز بلل کېږي.

۶.۴ ساده هارمونیکی حرکت د یونواخت دایروي حرکت د تصویر په توګه



۱.۶.۴ شکل

د P یوه ذره داسي په پام کي ونیسئ چي د a په شعاع او O مرکز لرونکي دایرې د محیط په امتداد په ω_0 زاویوي سرعت سره د ساعت د عقربې په مخالف لوري په یونواخته توګه د حرکت په حال کي وي لکه په ۱.۶.۴ شکل کي چي ښودل شوي دي. XOX' او YOY' د دایرې دوه یو پر بل عمود قطرونه دي. فرض کړئ چي په $t = 0$ وخت کي د ذرې (هغه چي مأخذي ذره بلل کیږي) موقعیت په P_0 کي دی داسي چي $\angle XOP_0 = \Phi_0$ او په t وخت کي یې موقعیت پهP کي دی. نو $\angle POP = \omega_0 t$.

له P څخه $PM \perp XOX'$ او $PN \perp YOY'$ رسم کړئ. د P مختصات په O مبدا کي (x, y) فرض کړئ.

دا لیدل کیدای شي چي د N نقطه چي په YOY' قطر باندې له P څخه د رسم شوي عمود لاندینی برخه ده، کله چي P ذره د دایرې په امتداد حرکت کوي مخ ته او شا ته حرکت کوي. د منځني موقعیت O نقطې په لرلو سره په YOY' قطر باندې د N حرکت ساده هارمونیکي حرکت دی.

په قایم الزاویه ΔONP کې،

$$\frac{ON}{OP} = \sin\theta = \sin(\omega_0 t + \Phi_0)$$

یا

$$\frac{y}{a} = \sin(\omega_0 t + \Phi_0)$$

یا

$$y = a\sin(\omega_0 t + \Phi_0) \qquad \dots (۱.۶.۴)$$

دا په YOY' قطر باندې د N نقطې د ځای بدلون معادله او د ساده هارمونیکي حرکت معادله ده. په عین توګه په XOX' قطر باندې د M نقطې حرکت هم ساده هارمونیکي حرکت دی او په لاندې ډول توضیح کیدای شي.

$$x = a\cos(\omega_0 t + \Phi_0) \qquad \dots (۲.۶.۴)$$

په (۱.۶.۴) او (۲.۶.۴) معادلو کي x او y ځای بدلونونه یا د یونواخته دایروي حرکت تصویرونه دي او ساده هارمونیکي حرکت وړاندې کوي. له دې ځایه، د یونواخت دایروي حرکت تصویر همیشه یو ساده هارمونیکي حرکت دی. په (۱.۶.۴) او (۲.۶.۴) معادلو کي $(\omega_0 t + \Phi_0)$ په t وخت کي د ساده هارمونیکي حرکت فاز بلل کیږي. په $t = 0$ کي د فاز قیمت Φ_0 دی او لومړنی

فاز یا $Epoch$ بلل کېږي. که P ذره په $t = 0$ کې په X نقطه کې وي، نو لومړنی فاز $\Phi_0 = 0$ او د (۱.۶.۴) او (۲.۶.۴) په واسطه د ساده هارمونيکي حرکت راکړل شوي معادلې په تريب سره په لاندې ډول اړول کېږي.

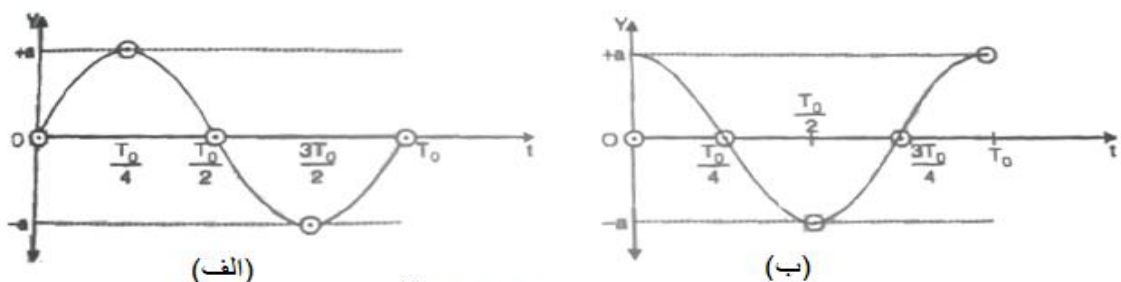
$$y = a\sin\omega_0 t = a\sin\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}t\right) \quad \text{... (۳.۶.۴)}$$

او

$$x = a\cos\omega_0 t = a\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}t\right) \quad \text{... (۴.۶.۴)}$$

د ځای بدلون- وخت ګرافونه چې دغه دوه ساده هارمونيک حرکتونه وړاندې کوي په ترتيب سره په ۲.۶.۴ (الف) او ۲.۶.۴ (ب) شکلونو کې راکړل شوي دي.

نوټ: هغه ذره چې د دايرې په امتداد په يونواخته توګه حرکت کوي مأخذي ذره بلل کېږي او نوموړې دايره مأخذي دايره بلل کېږي ځکه، د همدې دايرې په مأخذ نيوني سره، مونږ ساده هارمونيکي حرکت مطالعه کوو.



۲.۶.۴ شکل

<u>۷.۴ په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې سرعت او تعجيل</u>

د y-محور په امتداد يوه بعده ساده هارمونيکي حرکت کې د مثال په توګه د t په وخت کې د ذرې تغير مکان عبارت دی له

$$y = a\sin\omega_0 t \quad \text{... (۱.۷.۴)}$$

داسې چې a د ساده هارمونيکي حرکت امپليتيود او ω_0 يې زاويوي فريکونسي ده. دلته د اسانتيا لپاره لومړنی فاز Φ_0 صفر نيول کېږي.

(1) په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې سرعت

په t وخت کې په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې سرعت، نظر وخت ته د (۱.۷.۴) معادلې د مشتق نيولو څخه په لاندې ډول لاس ته راوړل کيدای شي

$$v(t) = \dot{y}$$ [1]

$$= \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(a\sin\omega_0 t)$$

یا $v(t) = \dot{y} = a\omega_0 \cos\omega_0 t$ ... (۲.۷.۴)

د ذرې سرعت د y ځای بدلون له مخې هم توضیح کیدای شي لکه لاندې چې بیان شوی دی:

$$v = a\omega_0 \cos\omega_0 t = a\omega_0\sqrt{1-\sin^2\omega_0 t}$$

یا $\left[\because\right.$ له (۱.۷.۴) معادلې څخه $\left.\sin\omega_0 t = \frac{y}{a}\right]$ $v = a\omega_0\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}$

$\therefore$ $v = \omega_0\sqrt{a^2-y^2}$ ... (۳.۷.۴)

ځانګړي حالتونه.

(i) د تعادل په موقعیت کې،

ځای بدلون، $y = 0$

$\therefore$ $v = \omega_0\sqrt{a^2-0^2}$

$= \omega_0 a$ د تعادل په موقعیت کې

دا په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې اعظمي سرعت دی او د سرعت امپلیتیود بلل کېږي. ځکه نو، په ساده هارمونیکي حرکت کې کله چې ذره د تعادل له موقعیت څخه تیریږي اعظمي سرعت لري.

(ii) په انجامي موقعیتونو کې،

$y = a$ یا $y = -a$ او $y^2 = a^2$

$$v = \omega_0\sqrt{a^2-a^2} = 0$$

---

[1] $\dot{y}$ ددې لپاره استعمالیږي چې نظر t وخت ته د y لومړی ترتیب دیفرنسیال وښیي.

ځکه نو، په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې سرعت کله چې په یوه انجامي موقعیت کې وي صفر دی.

(2) په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې تعجیل

په t وخت کې په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې سرعت، نظر وخت ته د (۲.۷.۴) معادلې د مشتق نیولو څخه بیا لاس ته راوړل کیدای شي او عبارت دی له

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(a\omega_0 \cos \omega_0 t) = a\omega_0(-\omega_0 \sin\omega_0 t)$$

$$\ddot{y} = -a\omega_0{}^2 \sin\omega_0 t \qquad \dots (۴.۷.۴)$$

د (۱.۷.۴) معادلې په استعمالولو سره، د تعجیل افاده په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$\ddot{y} = -\omega_0{}^2 y \qquad \dots (۵.۷.۴)$$

دا معادله ښیي چې په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې تعجیل د تعادل له موقعیت څخه د هغې له تغیر مکان سره مستقیماً متناسب دی او منفي علامه ښیي چې د تعجیل لوری همیشه د تعادل موقعیت لوري ته دی.

ځانګړې حالتونه.

(i) د تعادل په موقعیت کې،

ځای بدلون $y = 0$ دی او له دې ځایه تعجیل $\ddot{y} = 0$

(ii) په انجامي موقعیتونو کې،

د ځای بدلون اندازه یعنې $|y| = a$

$\therefore$ د تعجیل اندازه، $|\ddot{y}| = \omega_0{}^2|y| = \omega_0{}^2 a$ او اعظمي دی.

له دې ځایه په ساده هارمونیکي حرکت کې د یوې ذرې تعجیل په تعادل موقعیت کې صفر او په انجامي موقعیتونو کې اعظمي دی.

۸.۴ په ساده هارمونیکی حرکت کی د ذرې د ځای بدلون، سرعت او تعجیل ترمنځ فازي اړیکه

فرض کړئ چې په t وخت کې د y-محور په امتداد په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې ځای بدلون عبارت دی له

$$y = a\sin\omega_0 t \qquad ...(۱.۸.۴)$$

داسې چې a د ساده هارمونیکي حرکت امپلیتیود او ω_0 یې زاویوي فریکونسي ده.

په t وخت کې د ذرې سرعت عبارت دی له

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(a\sin\omega_0 t)$$

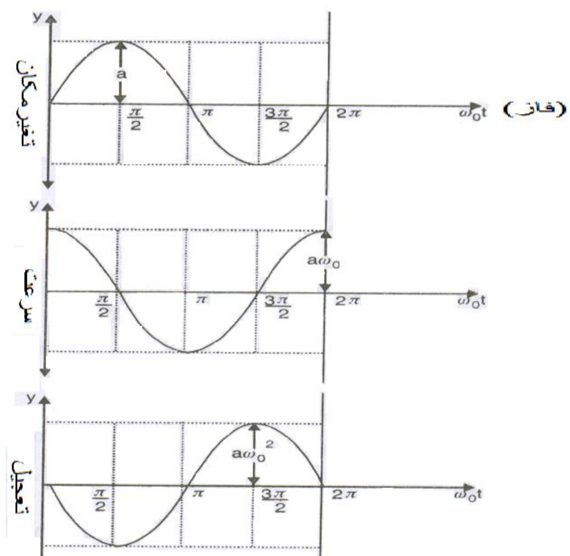
یا

$$\dot{y} = a\omega_0 \cos\omega_0 t \qquad ...(۲.۸.۴)$$

یا

$$\dot{y} = a\omega_0 \sin\omega_0 t + {}^{\pi}/_{2} \qquad ...(۳.۸.۴)$$

د (۱.۸.۴) او (۳.۸.۴) معادلو له پرتله کولو څخه، دا لیدل کیږي چې



۱.۸.۴ شکل

(i) په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې سرعت له ځای بدلون څخه په فاز کې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې په اندازه مخکې دی. د فاز دا اړیکه په ۱.۸.۴ شکل کې ښودل شوې ده.

(ii) د ذرې د سرعت اعظمي قیمت یعنې د سرعت امپلیتیود $a\omega_0$ یا د ځای بدلون امپلیتیود او زاویوي فریکونسي د ضرب حاصل دی.

په t وخت کې د ذرې تعجیل، نظر وخت ته د (۲.۸.۴) معادلې د مشتق په نیولو سره ورکول کیږي لکه

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}(a\omega_0 \cos\omega_0 t)$$

$$= -a\omega_0^2 \sin\omega_0 t$$

یا

$$\ddot{y} = a\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \pi) \qquad ...(۴.۸.۴)$$

د (۱.۸.۴) او (۴.۸.۴) معادلو له پرتله کولو څخه، دا ليدل کېږي چې

(i) په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې تعجيل له ځای بدلون څخه په فاز کې د π زاويې په اندازه مخکې ده. د فاز دا اړيکه په ۱.۸.۴ شکل کې ښودل شوې ده.

(ii) د ذرې د تعجيل اعظمي قيمت يعنې د سرعت امپليتيود $a\omega_0{}^2$.

۹.۴ په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې انرژي (يا د هارمونيکي اهتزاز ورکوونکي انرژي)

کله چې يوه ذره ساده هارمونيکي حرکت سرته رسوي، په هر وخت کې يې مجموعي انرژي د همدې وخت د حرکي انرژي او پوتنسيالي انرژي مجموعه ده. د ذرې حرکي او پوتنسيالي انرژي د تعادل له موقعيت څخه د هغې په ځای بدلون سره تغير کوي خو مجموعي انرژي محفوظه پاتې کېږي. د حرکي، پوتنسيالي او مجموعي انرژي رابطې په لاندې توګه لاس ته راتلی شي.

(i) په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې حرکي انرژي

فرض کړئ چې د y-محور په امتداد د ساده هارمونيکي حرکت ترسره کوونکې ذرې امپليتيود a او زاويوي فريکونسي ω_0 او ځای بدلون يې په t وخت کې عبارت دی له

$$y = a\sin\omega_0 t \qquad \dots (۱.۹.۴)$$

په t وخت کې د ذرې سرعت عبارت دی له

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$= a\omega_0 \cos \omega_0 t = \omega_0\sqrt{a^2 - y^2}$$

په t وخت کې د ذرې حرکي انرژي عبارت ده له

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2(a^2 - y^2) \qquad \dots (۲.۹.۴)$$

ځانګړې حالتونه.

(الف) د تعادل په موقعيت کې، $y = 0$

$\therefore$ د تعادل په موقعيت کې حرکي انرژي

$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2a^2$ او دا اعظمي ده.

(ب) په انجامي موقعيتونو کې،

$y^2 = a^2$ یا $y = \pm a$

په انجامي موقعيتونو کې حرکي انرژي

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 (a^2 - a^2) = 0$$

له دې ځايه، په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې حرکي انرژي په تعادل موقعيت کې اعظمي او په انجامي موقعيتونو کې صفر ده.

(ii) په ساده هارمونيکي حرکت کې د ذرې پوټنسيالي انرژي

په t وخت کې په ساده هارمونيکي حرکت کې په ذره باندې عامله بيرته ګرځوونکې قوه عبارت ده له

$$F = -m\omega_0{}^2 y$$

داسې چې y په t وخت کې د تعادل له موقعيت څخه د ذرې ځای بدلون دی. منفي علامه ښيي چې نوموړې قوه د تعادل د موقعيت په لوري عمل کوي. ددې لپاره چې ذره د تعادل له موقعيت څخه د dy په اندازه ليرې وښودل شي د F مخالفه يوه قوه F' بايد پرې عمل وکړي

يعني
$$F' = -F = m\omega_0{}^2 y$$

د dy په دې ځای بدلون کې کوچنی سرته رسيدلی کار عبارت دی له

$$dW = F'dy = m\omega_0{}^2 y dy$$

څکه نو، د ذرې په y ځای بدلون کې مجموعي سرته رسيدلی کار عبارت دی له

$$W = \int dW$$

یا
$$W = \int_0^y m\omega_0{}^2 y dy = m\omega_0{}^2 \int_0^y y dy$$

یا
$$W = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 (\, y^2\,)_0^y = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2\, y^2$$

دغه سرته رسيدلی کار د ذرې د پوټنسيالي انرژي په توګه ذخيره کيږي. څکه نو، د ذرې پوټنسيالي انرژي له $E_P = W$ څخه عبارت ده.

یا
$$E_P = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2\, y^2 \qquad \dots (۳.۹.۴)$$

ځانګړي حالتونه.

(الف) د تعادل په موقعیت کې، $y = 0$

او د ذرې پوتنسیالي انرژي به $E_P = 0$

دا اصغري پوتنسیالي انرژي ده.

(ب) په انجامي موقعیتونو کې، $y = \pm a$ یا $y^2 = a^2$

او د ذرې پوتنسیالي انرژي به

$$E_P = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 a^2$$

دا د پوتنسیالي انرژي اعظمي قیمت دی.

له دې ځایه، په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې پوتنسیالي انرژي په تعادل موقعیت کې اصغري او په انجامي موقعیت کې اعظمي ده.

(iii) په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې مجموعي انرژي

په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې د حرکي او پوتنسیالي انرژیو مجموعه د ذرې مجموعي انرژي ورکوي. که په ساده هارمونیکي حرکت کې د ذرې هغه وخت چې د تعادل له موقعیت څخه یې ځای بدلون y وي حرکي او پوتنسیالي انرژي په ترتیب سره E_k او E_P وي ، نو

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 (a^2 - y^2)$$

او

$$E_P = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 y^2$$

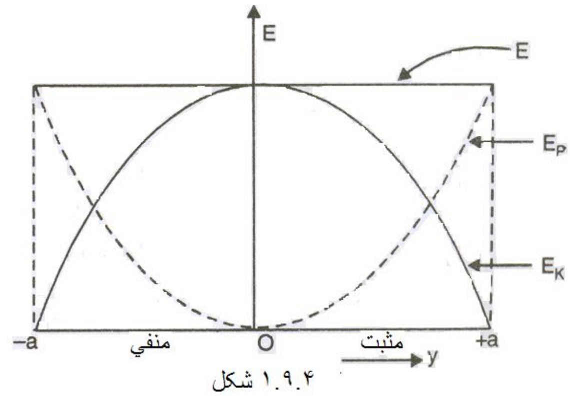
ځکه نو، د ذرې مجموعي انرژي هغه وخت چې د تعادل له موقعیت څخه یې ځای بدلون y وي، عبارت ده له

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 (a^2 - y^2) + \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 y^2$$

یا

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 a^2 \qquad \ldots (۴.۹.۴)$$

دا معادله ښيي چې په ساده هارمونيکي حرکت کې مجموعي انرژي د تعادل له موقعيت څخه د ذرې په ځای بدلون پورې اړه نه لري او ثابته پاتې کېږي.



۱.۹.۴ شکل

په ساده هارمونيکي حرکت کې د تعادل له موقعيت څخه د y په ځای بدلون د ذرې پوتنسيال، حرکي او مجموعي انررژي تغير په ګرافيکي توګه په ۱.۹.۴ شکل کې ښودل شوی دی. ټکي ټکي او نرۍ متمادي پارابوليک منحني ګانې په ترتيب سره د y په ځای بدلون د حرکي او پوتنسيالي انرژيو تغير وړاندې کوي

د تعادل په موقعيت کې، د ذرې پوتنسيالي انرژي صفر او حرکي انرژي اعظمي ده. کله چې ذره د تعادل له موقعيت څخه ليرې کېږي، حرکي انرژي کميږي په داسې حال کې چې پوتنسيالي انرژي په عين اندازه زياتيږي. په نهايي موقعيتونو کې، پوتنسيالي انرژي اعظمي کېږي په داسې حال کې چې حرکي انرژي ترصفر پورې کميږي. په هر ځای کې، مجموعي انرژي عين شی ده.

۱۰.۴ زاويوي ساده هارمونيکي حرکت (يا د خطي بيرته ګرځوونکي تورک لاندې حرکت)

په مخکې برخو کې، مونږ په يوه مستقيمه کرښه د يوه جسم ساده هارمونيکي حرکت توضيح کړ. په دغسې حالاتو کې، په جسم باندې عامله قوه د تعادل له موقعيت څخه له ځای بدلون سره متناسبه ده او لوری يې د تعادل د موقعيت په لوري دی. په بله مانا، د ذرې حرکت د خطي بيرته ګرځوونکي قوې د عمل لاندې رامنځ ته کېږي. د ساده هارمونيکي حرکت بل ډول هغه وخت رامنځ ته کيدای شي چې د خطي بيرته ګرځوونکي تورک د عمل لاندې رامنځ ته شي. په دغسې حالاتو کې، په جسم باندې عامل تورک د تعادل له موقعيت څخه د زاويوي ځای بدلون سره مستقيماً متناسب او ددې ميل لري چې جسم بيرته د دې موقعيت لور ته راوګرځوي. په دا ډول حالاتو کې د جسم ساده هارمونيکي حرکت زاويوي ساده هارمونيکي حرکت بلل کېږي او نوموړي اهتزازات زاويوي يا ټارسيونال اهتزازات بلل کېږي.

که θ په t وخت کې د تعادل يا منځني موقعيت څخه د جسم زاويوي ځای بدلون وي، نو په t وخت کې په جسم باندې عامل بيرته ګرځونکی تورک عبارت دی له

$$\tau = -C\theta \qquad \dots (۱.۱۰.۴)$$

داسې چې C يو ثابت، بيرته ګرځوونکی تورک پر واحد زاويوي ځای بدلون بلل کېږي. دا په مستقيمه کرښه د يوه جسم د ساده هارمونيکي حرکت د قوې ثابت K سره مشابه دی.

که I د اهتزاز د محور په شاوخوا د اهتزاز کوونکي جسم د عطالت مومنټ او α زاويوي تعجيل وي، نو تورک په لاندې ډول ليکل کيداى شي

$$\tau = \mathrm{I}\alpha \qquad \text{... (۲.۱۰.۴)}$$

له (۱.۱۰.۴) او (۲.۱۰.۴) معادلو څخه،

$$\mathrm{I}\alpha = -\mathrm{C}\theta$$

يا

$$\alpha = -\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\right)\theta$$

خو زاويوي تعجيل α نظر وخت t ته د زاويوي ځاى بدلون θ د دويم ترتيب ديفرنسيال څخه لاس ته راځي لکه

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$\therefore$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\right)\theta$$

يا

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\right)\theta = 0$$

يا

$$\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0 \qquad \text{... (۳.۱۰.۴)}$$

داسې چې

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}} = \text{ثابت}$$

(۳.۱۰.۴) معادله د زايوي ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله ده. د نوموړې معادلې حل کيداى شي لاندې شکل ولري

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \Phi_0) \qquad \text{... (۴.۱۰.۴)}$$

داسې چې θ_0 د منځني موقعيت په هر لوري کې اعظمي زاويوي ځاى بدلون دى يعنې θ_0 د ټار سيونال اهتزازاتو امپليتيود دى.

د زاويوي ساده هارمونيکي حرکت د وخت پريود عبارت دى له

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}} \qquad \text{... (۵.۱۰.۴)}$$

د زاويوي ساده هارمونيکي حرکت فريکونسي عبارت ده له

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I}} \qquad \text{... (۶.۱۰.۴)}$$

۱.۴ مثال. یوه ذره په یوه پوتنسیالي انرژي ساحه $U = U_0 - ax + bx^2$ کې حرکت کوي، داسې چې a او b مثبت ثوابت وي (i) په ذره باندې د عاملې قوې لپاره افاده پیدا کړئ (ii) په کوم موقعیت کې نوموړې قوه صفر کېږي؟ (iii) ایا دا د پایدار تعادل موقعیت دی؟ (iv) د ذرې د قوې ثابت، د وخت پریود او د حرکت فریکونسي محاسبه کړئ.

حل. (i) په ذره باندې عامله قوه عبارت ده له

$$F = \frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(U_0 - ax + bx^2)$$

یا

$$F = a - 2bx$$

(ii) په ذره باندې قوه صفر کېږي کله چې $F = a - 2bx = 0$

یعنې کله چې $x = \frac{a}{2b}$

(iii)

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}[-a + 2bx] = 2b$$

چې b مثبت ثابت دی، ځکه نو، $\frac{d^2U}{dx^2}$ همیشه مثبت او $x = \frac{a}{2b}$ په منحني باندې د اصغري پوتنسیال انرژي نقطه ده چې له x سره د U تغیر ښیي. ځکه نو، دا د پایدار تعادل نقطه ده.

(iv) له $F = a - 2bx$ معادلې څخه، لاس ته راوړو چې په ذره باندې قوه یوه خطي بیرته ګرځوونکې قوه ده او $2b$ یې د قوې ثابت دی.

(v) د ذرې د اهتزازي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2b}}$$

داسې چې m د ذرې کتله ده.

د ذرې د اهتزاز فریکونسي عبارت ده له

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2b}{m}}$$

۲.۴ مثال. د $1kg$ کتله لرونکي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي پوتنسیال انرژي د هغه د سکون په حالت کې 5 J ده او مجموعي انرژي یې 9 J ده. د وخت پریود یې محاسبه کړئ داسې چې د اهتزاز امپلیتیود یې $1cm$ درکړل شوی وي.

حل. د اهتزاز ورکوونکي د انرژي زیاتیدنه کله چې د سکون له موقعیت څخه تر انجامي موقعیت پورې حرکت کوي عبارت ده له

$$= (9-5)\ \mathrm{J}$$

$$= 4\ \mathrm{J}$$

په دې موقعیت کې یې ځای بدلون x له امپلیتیود a سره مساوي دی.

$$\therefore \quad x = a = 1\mathrm{cm} = 10^{-2}\mathrm{m}$$

همدارنګه، په انرژي کې زیاتیدنه د سکون له موقعیت څخه ځای بدلون x دی.

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\mathrm{K}x^2 = 4\ \mathrm{J}$$

یا

$$\mathrm{K} = \frac{2\times4}{x^2} = \frac{2\times4}{(10^{-2})^2}\mathrm{Nm^{-1}}$$

یا

$$\mathrm{K} = 8\times10^4\ \mathrm{Jm^{-2}}(\text{یا } \mathrm{Nm^{-1}})$$

د نوموړي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي د اهتزازاتو د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{8\times10^4}}\,\mathrm{s}$$

$$\mathrm{T_0} = 2.2\times10^{-2}\mathrm{s}$$

۳.۴ مثال. یوه ذره د مستقیمې کرښې په امتداد په ساده هارمونیکي حرکت کې ده. هغه وخت چې د تعادل له موقعیت څخه یې ځای بدلونونه x_1 او x_2 وي، سرعتونه یې په ترتیب سره u_1 او u_2 وي. وښایاست چې د وخت پریود یې $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{({x_2}^2-{x_1}^2)}{({u_2}^2-{u_1}^2)}}$ دی. همدارنګه، د ذرې د ځای بدلون امپلیتیودونه او سرعت پیدا کړئ.

حل. کله چې یوه ذره په ساده هارمونیکي حرکت کې وي، سرعتu یې له منځني موقعیت څخه له ځای بدلون x سره د $u = \omega\sqrt{a^2-x^2}$ رابطه لري، داسې چې a د ځای بدلون امپلیتیود او ω د ساده هارمونیکي حرکت زاویوي فریکونسي وي.

دلته $$u_1 = \omega\sqrt{a^2 - {x_1}^2}$$

$\therefore$ $${u_1}^2 = \omega^2(a^2 - {x_1}^2)$$

په عین توګه، $${u_2}^2 = \omega^2(a^2 - {x_2}^2)$$

$\therefore$ $${u_1}^2 - {u_2}^2 = \omega^2({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

یا $$\omega = \sqrt{\frac{({u_2}^2 - {u_1}^2)}{({x_2}^2 - {x_1}^2)}}$$

$\therefore$ د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{({x_2}^2 - {x_1}^2)}{({u_2}^2 - {u_1}^2)}}$$

د ځای بدلون امپلیتیود (a).

چې $$\frac{({u_1}^2 - {u_2}^2)}{({x_2}^2 - {x_1}^2)} = \omega^2$$

او $$\omega^2 = \frac{{u_1}^2}{a^2 - {x_1}^2}$$

$\therefore$ $$\frac{{u_1}^2 - {u_2}^2}{{x_2}^2 - {x_1}^2} = \frac{{u_1}^2}{a^2 - {x_1}^2}$$

یا $$a^2 - {x_1}^2 = {u_1}^2\left(\frac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{{u_1}^2 - {u_2}^2}\right)$$

$\therefore$ $$a^2 = \frac{{u_1}^2({x_2}^2 - {x_1}^2)}{({u_1}^2 - {u_2}^2)} + {x_1}^2$$

یا $$a^2 = \frac{{u_1}^2{x_2}^2 - {u_1}^2{x_1}^2 + {u_1}^2{x_1}^2 - {u_2}^2{x_2}^2}{({u_1}^2 - {u_2}^2)}$$

یا $$a^2 = \frac{{u_1}^2{x_2}^2 - {u_2}^2{x_2}^2}{({u_1}^2 - {u_2}^2)}$$

د ځای بدلون امپلیتیود عبارت دی له

$$v_{max} = a\omega$$

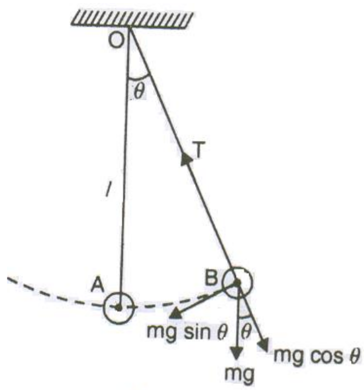
$$= \sqrt{\frac{u_1{}^2 x_2{}^2 - u_2{}^2 x_2{}^2}{(u_1{}^2 - u_2{}^2)}} \sqrt{\frac{(u_1{}^2 - u_2{}^2)}{(x_2{}^2 - x_1{}^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{u_1{}^2 x_2{}^2 - u_2{}^2 x_2{}^2}{(x_2{}^2 - x_1{}^2)}}$$

۱۱.۴ د ساده هارمونیکي حرکت مثالونه

لاندې د ساده هارمونیکي حرکت څو مثالونه دي

۱. ساده شاقول (Simple pendulum)



۱.۱۱.۴ شکل

یو خیالي ساده شاقول له یوې درندې نقطوي کتلې څخه، چې له یوې محکمې پایې څخه د یوه بې کتلې او په بشپړه توګه نه کش کیدونکي او نرم تار په واسطه ځوړند دی جوړ شوی دی. یو عملي ساده شاقول لکه په ۱.۱۱.۴ شکل کې چې ښودل شوی د نقطوي کتلې پر ځای له یوې درندې ګلولې څخه چې له یوې محکمې پایې څخه د یوه نري وریښمین تار په واسطه ځوړند دی جوړ شوی دی.

فرض کړئ چې m د ګلولې کتله او O د ځوړندیدو نقطه ده. A د تعادل په حالت کې هغه وخت چې OA عمود وي د ګلولې مرکز ښیي. $\mathrm{OA} = l$ د شاقول اوږدوالی دی. B هغه وخت چې تار له عمود سره د θ یوه زاویه جوړه کړي د ګلولې مرکز ښیي. د B ګلولې موقعیت د t په هر وخت کې د θ زاویې په واسطه چې زاویوي ځای بدلون بلل کېږي توضیح کېږي.

په B کې په ګلولې باندې عاملې قوې عبارت دي له

(i) د mg وزن په عمودي توګه ښکته خوا ته عمل کوي.

(ii) په تار کې د تار کښښ T

د mg وزن په دوو قایم الزاویه مرکبو تجزیه کیدای شي.

(الف) $mgcos\theta$ چې په تار کې د تار د کښښ T په مخالف لوري عمل کوي.

(ب) $mgsin\theta$ چې تورک τ رامنځ ته کوي چې هغه ددې میل لري چې ګلوله د تعادل موقعیت ته بیرته وګرځوي

ځکه نو، په شاقول باندې بیرته ګرځوونکی تورک عبارت دی له

$$\tau = -(mgsin\theta)\mathrm{OB} = -(mgsin\theta)l$$

کله چې θ کوچنۍ وي (او په رادیان اندازه کېږي)، $sin\theta \approx \theta$ ، نو

$$\tau = -(mgl)\theta$$

دا معادله په لاندې ډول ده

$$\tau = -\mathrm{C}\theta \qquad ...(۱.۱۱.۴)$$

داسې چې $\mathrm{C} = mgl$

چې په ګلوله باندې تورک له زاویوي ځای بدلون سره متناسب او لوری یې د تعادل د موقعیت لوري ته دی، ځکه نو، د ګلولې حرکت ساده هارمونيکي حرکت دی. د دې ساده هارمونيکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}}$$

د اهتزاز نقطې شاوخوا د ګلولې د عطالت مومنټ له $\mathrm{I} = ml^2$ څخه عبارت دی.

$$\therefore \qquad \mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad ...(۲.۱۱.۴)$$

نوټ. د ساده شاقول حرکت یوازې هغه وخت ساده هارمونيکي حرکت دی چې زاویوي ځای بدلون θ ډیره کوچنۍ وي چې $sin\theta$ په کې له θ سره عوض شي. کله چې دا شرط پوره نه شي حرکت ساده هارمونيکي حرکت نه دی او د وخت د پریود لاس ته راغلې رابطه بنه صدق نه کوي.

۲. د فنر او کتلې سیستم حرکت. د صرف نظر وړ کتلې لرونکی فنر چې له یوې محکمې پایې A څخه ځوړند وي په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې L د فنر اصلي وزن او k یې د فنر ثابت وي. کله چې مونږ د فنر ازاد انجام ته د m کتله ور ونښلوو، د فنر اوږدوالي د l په اندازه داسې زیاتیږي چې په هغه کې بیرته ګرځوونکې قوه $\mathrm{F} = -kl$ رامنځ ته کېږي. دلته منفي علامه ښیي چې F د mg وزن په مخالف لوري عمل کوي. په تعادل کې، په جسم باندې محصله قوه صفر ده یعنې

$$\mathrm{F} + mg = 0$$

$$\therefore \qquad -kl + mg = 0$$

$$\text{یا} \qquad mg = kl \qquad ...(۳.۱۱.۴)$$

کله چې m کتله د تعادل له موقعیت څخه ورو ښکته لور ته کش شي لکه چې په ۲.۱۱.۴ (ب) شکل کې ښودل شوي دي، نو په خوشې کولو سره، دا پورته او ښکته لور ته اهتزاز کوي.

که په فنر کې د تعادل له موقعیت څخه مخکې رامنځ ته شوې کش کېدنه y وي لکه په ۲.۱۱.۴ (ب) شکل کې چې ښودل شوي دي، نو د فنر په جوړښت کې مجموعي بیرته ګرځونکې قوه چې په ۲.۱۱.۴ (ج) شکل کې ښودل شوې ده، عبارت ده له

$$F' = -k(l + y)$$

او په m کتله لرونکي جسم باندې محصله قوه په لاندې ډول ورکول کېږي

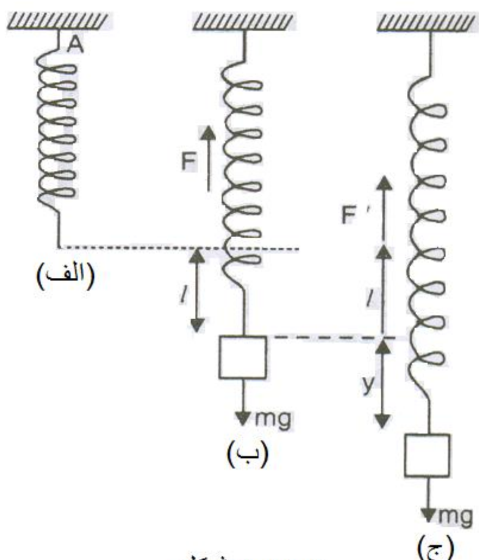
$$F'' = F' + mg = -k(l + y) + mg$$

یا $F'' = -kl - ky + kl, \qquad (mg = kl \quad \therefore)$

یا $F'' = -ky \qquad ...(۴.۱۱.۴)$

له دې ځایه، د m کتله لرونکي جسم تعجیل عبارت دی له

$$\ddot{y} = \frac{F''}{m} = -\left(\frac{k}{m}\right)y \qquad ...(۵.۱۱.۴)$$



۲.۱۱.۴ شکل

چې د m کتلې تعجیل له منځني موقعیت څخه د ځای بدلون سره مستقیماً متناسب دی او لوری یې د منځني موقعیت لور ته دی، ځکه نو، د m کتلې حرکت ساده هارمونیکي حرکت دی.

(۵.۱۱.۴) معادله په لاندې توګه توضیح کېدای شي

$$\ddot{y} = \omega_0{}^2 y = 0$$

داسې چې $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\therefore$ د m کتلې د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

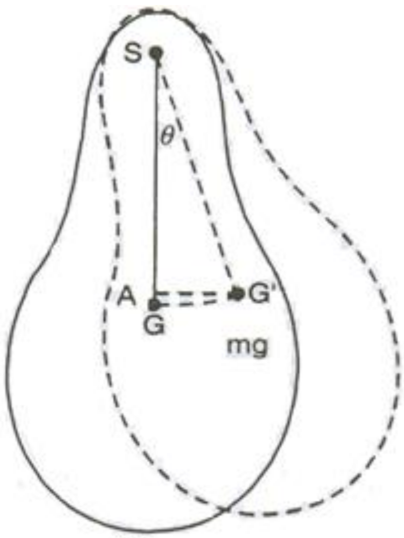
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

او د اهتزاز فریکونسي یې عبارت ده له

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

نوټ. کله چې یو فنر په یوه هواره سطحه داسې ځای په ځای شوی وي، چې یو انجام یې په محکمه توګه ثابت او په بل پورې یې د m کتله نښلول شوي وي، نو د m کتلې د کش کولو یا منقبض کولو وروسته د هغې له خوشې کولو څخه فنر د نوموړې کتلې د ساده هارمونیکې حرکت لامل ګرځي. د ساده هارمونیکي حرکت فریکونسي عین شی دی لکه چې پورته ورکړل شوی ده.

۳. مرکب شاقول



۳.۱۱.۴ شکل

یو مرکب شاقول د هرې کتلې له یوه محکم جسم څخه چې په عمودي مستوي کې د افقي محور شاوخوا چې له هغه څخه تیریږي د اهتزاز کولو وړتیا لري جوړ دی.

m کتله لرونکی یو مرکب شاقول چې په عمودي مستوي کې د افقي محور شاوخوا اهتزاز کوي لکه په ۳.۱۱.۴ شکل کې چې ښودل شوی په پام کې ونیسئ.

فرض کړئ چې S د جسم دځوړندیدو مرکز او G یې د ثقل مرکز دی چې له S څخه عموداً ښکته لور ته د تعادل په موقعیت کې چې د پیرې منحنې په واسطه ښودل شوی د l په فاصله واقع دی. جسم داسې فرض کړئ چې د ځوړندیدو نقطې شاوخوا ټکې ټکې ښودل شوې منحنې موقعیت ته تاویږي نو د ثقل مرکز G' موقعیت ته بې ځایه کیږي او $\angle GSG' = \theta$.

په جسم باندې په بې ځایه شوي موقعیت کې عاملې قوې عبارت دی له:

(i) د جسم mg وزن چې ښکته لوري ته عموداً عمل کوي.

(ii) د S په واسطه د عکس العمل قوه چې له mg سره مساوي ده.

دا دواړه قوې یوه بیرته ګرځوونکې جوړه جوړوي چې د θ د کمیدنې په لوري یعنې د ساعت د عقربې موافق لوري ته عمل کوي. ددې جوړې تورک عبارت دی له

$$\tau = -mg \times G'A$$

داسې چې $G'A$ = د جوړې جوړولو دوو قواو د کرښو ترمنځ عمودي فاصله.

$$\tau = -mgl\sin\theta \qquad \dots (۶.۱۱.۴)$$

$$[\, G'A = l sin\theta \quad \therefore]$$

که I د جسم د څوړندیدو له مرکز S څخه د تیریدونکي یوه محور په شاوخوا د هغه د عطالت مومنټ وي، نو تورک په لاندې ډول هم ورکول کېږي

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \dots (۷.۱۱.۴)$$

داسې چې $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ د جسم زاویوي تعجیل دی.

له (۶.۱۱.۴) او (۷.۱۱.۴) معادلو څخه،

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl sin\theta$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgl}{I}\right) sin\theta$$

کله چې د اهتزاز امپلیتیود دومره کوچنی ونیول شي چې $sin\theta$ په θ عوض کیدای شي، نو

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgl}{I}\right)\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$$

یا

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0 \qquad \dots (۸.۱۱.۴)$$

داسې چې $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

(۸.۱۱.۴) معادله د ساده هارمونیکي حرکت تفاضلي معادله ده. څکه نو، نوموړی جسم له لاندې وخت پریود سره په ساده هارمونیکي توګه اهتزاز کوي.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad \dots (۹.۱۱.۴)$$

I_g د جسم د عطالت مومنټ د ثقل له مرکز څخه د تیریدونکي یوه افقي محور په شاوخوا په پام کې ونیسئ، نو د څوړندیدو له نقطې څخه د تیریدونکي افقي محور شاوخوا د جسم د عطالت مومنټ عبارت دی له

$\mathrm{I} = \mathrm{I}_g + ml^2$ [د موازي محوررونو قضيي په استعمالولو سره]

همدارنګه، $\mathrm{I}_g = mk^2$ ، داسې چې k له G څخه د افقي محور شاوخوا د جسم د څرخیدو شعاع ده.

∴ $\mathrm{I} = mk^2 + ml^2 = m(k^2 + l^2)$

د مرکب شاقول د وخت پریود افاده به

$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m(k^2+l^2)}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gl}}$$

یا $$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{k^2}{l}+l)}{g}} \quad \ldots (۱۰.۱۱.۴)$$

یا $$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}} \quad \ldots (۱۱.۱۱.۴)$$

داسې چې $\mathrm{L} = \frac{k^2}{l} + l = \frac{k^2+l^2}{l}$

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې د مرکب شاقول د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود د

$\mathrm{L} = \frac{k^2+l^2}{l}$ اوږدوالي لرونکي ساده شاقول د وخت پریود په څېر توضیح کیدای شي. د L دا اوږدوالی د یوه معادل ساده شاقول د اوږدوالي یا د شاقول د کم شوي اوږدوالي په توګه پیژندل کیږي.

دا باید په پام کې ولرو چې د k^2 همیشه مثبت کیدو سره $\mathrm{L} = \left(\frac{k^2}{l} + l\right) > l$ یعنې د یو معادل ساده شاقول اوږدوالي L همیشه د مرکب شاقول له اوږدوالي l څخه لوی دی.

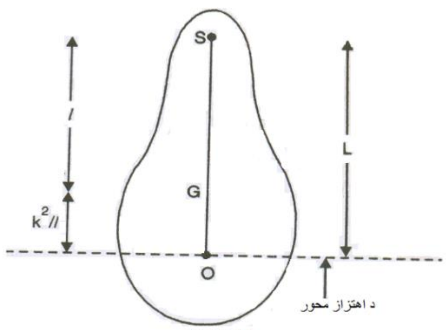
د اهتزاز مرکز. دا د ثقل مرکز G په ښکته څنګ کې د SG په کرښه له G څخه د $\frac{k^2}{l}$ په فاصله د O یوه نقطه ده. له دې نقطې څخه تیریدونکی یو افقي محور د مرکب شاقول د اهتزاز محور بلل کیږي.

له ۴.۱۱.۴ شکل څخه څرګنده ده چې

$\mathrm{SO} = \mathrm{SG} + \mathrm{GO}$

يا $\mathrm{SO} = l + \frac{k^2}{l}$

يا $\mathrm{SO} = \mathrm{L}$



۴.۱۱.۴ شکل

له دې ځایه، د مرکب شاقول د ځوړندیدو او اهتزاز د مرکزونو ترمنځ فاصله د معادل ساده شاقول له اوږدولي سره مساوي ده. اوس مو ثبوت کړه چې په مرکب شاقول کې د ځوړندیدو او اهتزاز مرکزونه یو له بل سره د بدلیدو وړ دي. کله چې S د ځوړندیدو نقطه وي، د مرکب شاقول د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{k^2}{l}+l)}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{(l'+l)}{g}}$$

داسې چې $l' = \frac{k^2}{l}$

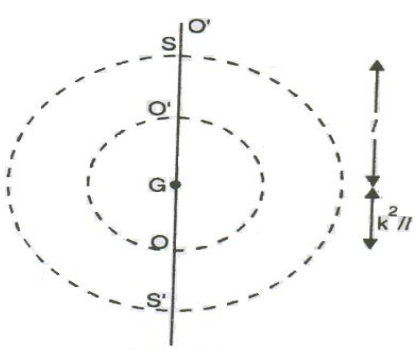
اوس، اجازه راکړئ چې شاقول چپه کړو داسې چې له O څخه د تیریدونکي افقي محور شاوخوا اهتزاز وکړي. نو د شاقول اوږدوالی به $\mathrm{OG} = l'$ شي او د اهتزاز د وخت پریود به یې په لاندې توګه توضیح شي

$$\left[\begin{array}{ll} \mathrm{OG} = l' & \because \\ \mathrm{GS} = k^2/l' & \therefore \end{array}\right]$$

$$\mathrm{T'}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{k^2}{l'}+l')}{g}}$$

خو $\mathrm{GS} = \frac{k^2}{l'} = l$

$\therefore$ $k^2 = ll'$



۵.۱۱.۴ شکل

د وخت پریود $\mathrm{T'}_0$ عبارت دی له

$$\mathrm{T'}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{ll'}{l'}+l')}{g}}$$

يا

$$\mathrm{T'}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(l+l')}{g}} = \mathrm{T}_0$$

له دې ځایه، په مرکب شاقول کې د ځوړندیدو او اهتزاز مرکزونه یو له بل سره د بدلیدو وړ دي.

دا لیدل کیدای شي چې که مونږ دوه عین مرکز لرونکي دایرې رسمې کړو چې د شاقول د ثقل مرکز G یې مرکز او $l=\mathrm{SG}$ او $\mathrm{GO}=\frac{k^2}{l}$ د شعاع په توګه وي، نو لکه چې په ۴.۱۱.۵ شکل کې ښودل شوي دي، O' او S' یوه جوړه نقطې، یوه یوه د G په هر یوه لوري، د SG په کرښه لاس ته راځي. S' له G څخه لاندې او O' له G څخه پورته. د دغو دوو نقطو S' او O' شاوخوا د شاقول د وخت پریود هم T_0 دی یعنې عین شي لکه د S او O په شاوخوا. له دې ځایه، په عمومي توګه څلور[2] نقطې شتون لري چې د مرکب شاقول د ثقل له مرکز سره په یوه مستقیمه کرښه پرتې دي، چې د هغوی په شاوخوا د شاقول د وخت پریود عین شی دی.

د مرکب شاقول د وخت د پریود تغیر

د مرکب شاقول د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0=2\pi\sqrt{\frac{l+k^2/l}{g}}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(l+\frac{k^2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (۴.۱۱.۱۲)$$

په څرګنده توګه، T_0 د ځوړندیدو له نقطې څخه د جاذبې د مرکز فاصلې l پورې اړه لري.

نظر l ته د (۴.۱۱.۱۲) معادلې په مشتق اخستلو سره، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d\mathrm{T}_0}{dl}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\times\frac{1}{2}\left(l+\frac{k^2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(l-\frac{k^2}{l}\right)$$

د T د اعظمي او اصغري قیمتونو لپاره، $\frac{d\mathrm{T}_0}{dl}$ له منځه ځي.

[2] په $k^2=l^2$ حالت کې، دواړه عین المرکزه دایرې یو پر بل منطبق کیږي او یواځې دوه نقطې به شتون ولري چې د هغوی لپاره به د شاقول د وخت پریود عین شی وي.

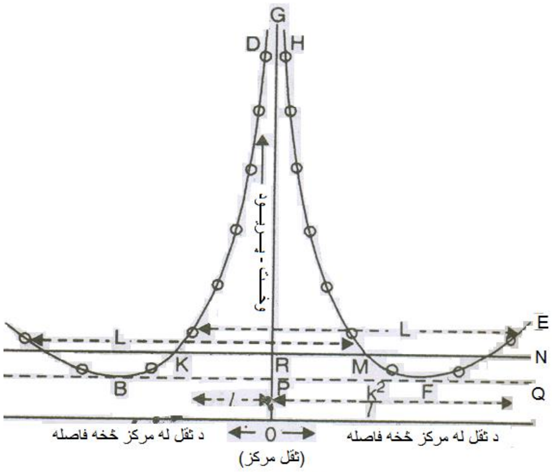
ددې لپاره، $\left(l - \frac{k^2}{l}\right) = 0$

یا $l = \pm k$

دا هم لیدل کیدای شي چې

(i) د $l = \pm k$ لپاره $\frac{d^2 T_0}{dl^2}$ یو مثبت کمیت دی. ځکه نو، د $l = \pm k$ لپاره T اصغري دی.

(ii) د $l = 0$ او $l = \infty$ لپاره، د وخت پریود T_0 قیمت صفر ته رسیږي.



شکل ۶.۱۱.۴

د مرکب شاقول د وخت پریود T_0 تغیر د ځوړندیدو له نقطې څخه د ثقل تر مرکز پورې فاصلې سره په ۶.۱۱.۴ شکل کې ښودل شوی دی. یوه منحني د ثقل د مرکز یو لور ته د ځوړندیدو نقطو ته په داسې حال کې چې بله منحني د ثقل د مرکز بل لور ته اشاره کوي.

۴. ټارسیونال شاقول. یو درروند جسم لکه ډسک (یا کره، استوانه او داسې نور) چې د یوه نري، ارتجاعي او عمودي سیم چې پورته انجام یې محکم وي په لاندیني انجام پورې متناظراً تړل شوی وي، ټارسیونال شاقول بلل کیږي. دا ځکه داسې نومول شوی دی چې که ډسک د هغه د تعادل له موقعیت څخه لږ څه وګرځې داسې لکه سیم چې تاو شوی وي نو په خوښې کولو سره، په سیم کې د رامنځ ته شوي بیرته ګرځوونکي تورک د اغیز لاندې نوموړی ټارسیونال اهتزازات سرته رسوي.

فرض کړئ چې ډسک د هغه د تعادل له موقعیت څخه د θ زاویې په اندازه بې ځایه کیږي، نو سیم هم د θ زاویې په اندازه تاویږي او یو بیرته ګرځوونکی تورک په کې رامنځ ته کیږي. ځکه نو، په ډسک باندې عامل تورک عبارت دی له

$$\tau = -C\theta \qquad \dots (۱۳.۱۱.۴)$$

دلته منفي علامه ښیي چې تورک د تعادل موقعیت ته د شاقول د بیرته راګرځولو میل لري او C په هر واحد تاو کې بیرته ګرځوونکی تورک یا د ځوړند سیم ټارسیونال کلکوالی دی.

د C قیمت عبارت دی له

$$C = \frac{\pi \eta r^4}{2l} \qquad \dots (۱۴.۱۱.۴)$$

داسې چې η د سیم د موادو د کلکوالي ضریب دی، r او l په ترتیب سره د ځوړند سیم شعاع او اوږدوالی دی.

که I د اهتزاز د محور په توګه د ځوړند سیم په شاوخوا د جسم د عطالت مومنټ او $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ زاویوي تعجیل وي نو په جسم باندې تورک په لاندې توګه لیکل کیدای شي

$$\tau = \mathrm{I}\ddot{\theta} \qquad \text{... (۱۵.۱۱.۴)}$$

له (۱۳.۱۱.۴) او (۱۵.۱۱.۴) معادلو څخه،

$$\mathrm{I}\ddot{\theta} = -\mathrm{C}\theta$$

یا

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\right)\theta$$

یا

$$\ddot{\theta} = -\omega_0{}^2\theta \qquad \text{... (۱۶.۱۱.۴)}$$

داسې چې

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}}$$

چې زاویوي تعجیل له زاویوي ځای بدلون سره مستقیماً متناسب دی او لوری یې د تعادل موقعیت لور ته دی، ځکه نو، د جسم حرکت ساده هارمونیکي حرکت دی. د دغه ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}}$$

له دې ځایه، د ټارسیونال شاقول د ټارسیونال اهتزازاتو د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}} \qquad \text{... (۱۷.۱۱.۴)}$$

نوټ. (i) د (۱۶.۱۱.۴) معادلې په لاس ته راوړنه کې هیڅ تخمین ونشو. ځکه نو، دا افاده آن د لویو امپلیتیودنو اهتزازاتو لپاره هم صدق کوي. خو پام باید وشي چې د ځوړند سیم د ارتجاعیت حد تجاوز ونکړي.

(ii) عطالتي میز د ټارسیونال شاقول د قانون په بنا یوه اله ده او په لابراتوارونو کې د منظم او غیرمنظم شکل لرونکو اجسامو دعطالت مومنټ د تعینولو لپاره استعمالیږي.

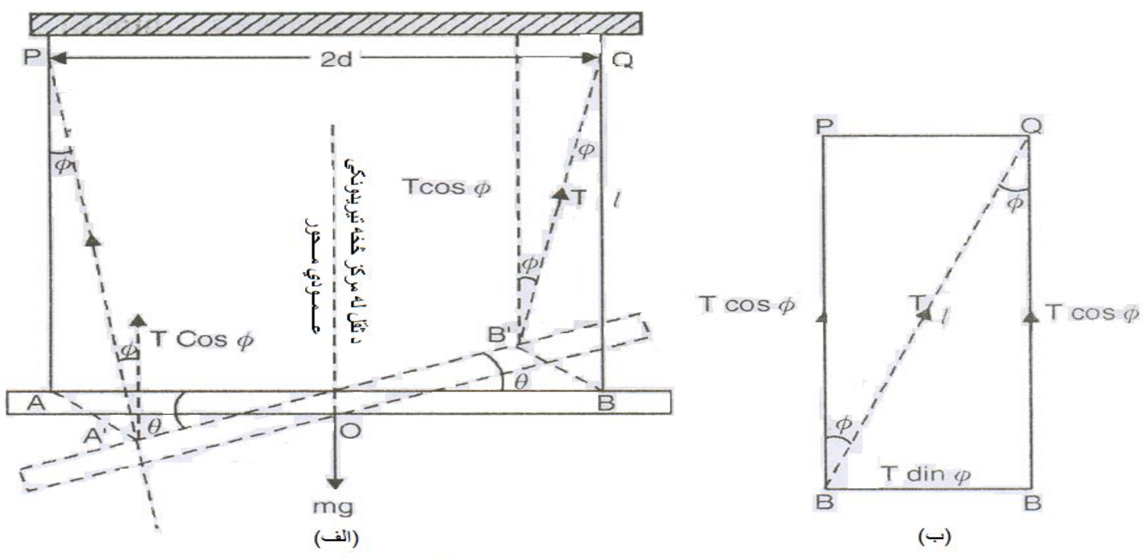
۵. بیفیلار ځوړندونکی او بیفیلار اهتزاز

یوه درنده متجانسه میله چې په افقي توګه د دوو مساوي، عمود، د کړیدنې وړ او غیرارتجاعي تارونو په واسطه چې دواړه د میلې د ثقل له مرکز څخه مساوي فاصلې لري ځوړنده شوې وي یو بیفیلار ځوړندونکی بلل کېږي. کله چې میلې ته ورو ورو په خپلې افقي سطحې کې د هغې د ثقل له مرکز څخه د تیریدونکي عمودي محور شاوخوا دوران ورکړل شي نو په خوشې کولو سره، د عمودي محور شاوخوا ساده هارمونیکي حرکت سرته رسوي. د نوموړي اهتزازات بیفیلار اهتزازات بلل کېږي.

په ۷.۱۱.۴ شکل کې AB د O جاذبې مرکز او m کتلې لرونکي بیفیلار ځوړندونکي د تعادل موقعیت ښیي. وزن mg یې په عمودي توګه له O څخه ښکته لور ته عمل کوي.

فرض کړئ چې د ځوړندونکي تارونه PA او PB یو له بل سره موازي او هر یو l اوږدوالی او د هغوی ترمنځ جلاوالی $2d$ دی.

کله چې میلې ته په θ کوچنۍ زاویې $\mathrm{A'B'}$ موقعیت ته د ثقل له مرکز څخه د تیریدونکي عمودي محور شاوخوا په افقي سطحه کې دوران ورکړل شي، ځوړندونکي تارونه $\mathrm{PA'}$ او $\mathrm{PB'}$ موقعیتونه اخلي لکه چې په شکل کې ښودل شوي دي.



۷.۱۱.۴ شکل

فرض کړئ چې T په هر تار کې کښښ دی چې د هغه د اوږدو په امتداد عمل کوي. په تارونو کې کښښ په دوو قایم الزاویه مرکبو تجزیه کیدای شي:

(i) $\mathrm{T}\cos\Phi$ په عمودي توګه پورته لور ته عمل کوونکې

(ii) $\mathrm{T}\sin\Phi$ په افقي توګه د $\mathrm{B'B}$ او $\mathrm{A'A}$ په امتداد عمل کوونکې

داسې چې Φ په بې ځایه شوي موقعیت کې د تار په واسطه له عمود سره جوړه شوې زاویه ده. د کښښ پورته لور ته عمودي مرکبې د میلې وزن د توازن په حال کې ساتي یعنې

$$2\mathrm{T}\cos\Phi = mg$$

کله چې میله لږ بې ځایه شي او تارونه اوږده وي، نو د Φ زاویه (چې په رادیان اندازه کېږي) کوچنۍ او په نتیجه کې یې $\cos\Phi = 1$

$$\therefore \quad (۱۸.۱۱.۴) \ldots \quad \mathrm{T} = \frac{mg}{2}$$

$\mathrm{T}\sin\Phi$ افقي مرکبې په افقي سطحه کې په میله باندې په مخالف لوري عمل کوي. دوی یوه جوړه جوړوي. ددې جوړې له امله تورک عبارت دی له

$$\tau = -\mathrm{T}\sin\Phi \,.\, 2d$$

یا $\left[\sin\Phi \approx \Phi\right.$(په رادیان)$\left.\right]$ (۱۹.۱۱.۴) ...

$$\tau = -\mathrm{T}.\,\Phi 2d$$

دلته د منفي علامې نیول دا ښيي چې تورک د میلې د تعادل د موقعیت د بیرته راګرځولو میل لري.

له شکل څخه، دا څرګنده ده چې

$$\Phi = \frac{\mathrm{BB}'}{l} \quad \text{او} \quad \theta = \frac{\mathrm{BB}'}{d}$$

$$\therefore \quad \Phi l = \theta\, d$$

$$\text{یا} \quad (۲۰.۱۱.۴) \ldots \quad \Phi = \frac{\theta\, d}{l}$$

$\therefore$ په (۱۹.۱۱.۴) معادله کې د (۱۸.۱۱.۴) او (۲۰.۱۱.۴) معادلو په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\tau = -\frac{mg}{2}\cdot\frac{\theta\, d}{l}\cdot 2d$$

$$\text{یا} \quad (۲۱.۱۱.۴) \ldots \quad \tau = -\left(\frac{mgd^2}{l}\right)\theta$$

که I د میلې د جاذبې مرکز څخه د تیریدونکي عمودي محور شاوخوا د عطالت مومنټ وي، نو

$$\tau = \mathrm{I}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\therefore$ (۲۱.۱۱.۴) معادله به

$$\mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd^2}{l}\right)\theta$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd^2}{\mathrm{I}l}\right)\theta$$

یا $\quad$ (۲۲.۱۱.۴) ...

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + {\omega_0}^2\theta = 0$$

داسې چې

$${\omega_0}^2 = \frac{mgd^2}{\mathrm{I}l}$$

(۲۲.۱۱.۴) معادله ښيي چې د میلې حرکت د هغې د مرکز څخه د تیریدونکي عمودي محور شاوخوا زاویوي ساده هارمونیکي حرکت دی. د دې ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}l}{mgd^2}}$$

که د اهتزاز د عمودي محور شاوخوا د بیفیلار میلې د څرخیدو شعاع k وي، نو $\mathrm{I} = mk^2$ او بیفیلار اهتزاز د وخت پریود افاده به

$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2l}{mgd^2}}$$

یا

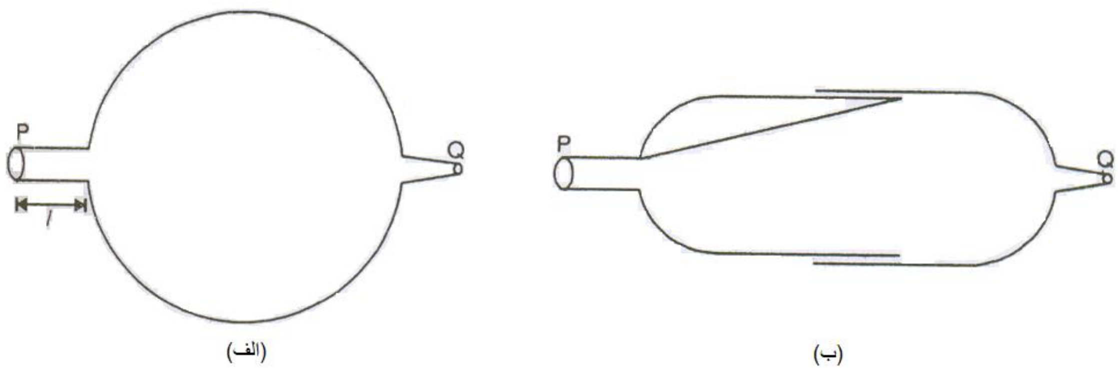
$$\mathrm{T}_0 = 2\pi\frac{k}{d}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

د بیفیلار اهتزاز فریکونسي عبارت ده له

(۲۳.۱۱.۴) ...

$$\nu_0 = \frac{1}{\mathrm{T}_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

۶. هیلم هولتز ریزونېټر. هیلم هولتز ریزونېټر یوه اله ده چې د غږ د یوه سخت نوټ د تجزیه کولو لپاره استعمالیږي یعنې په یوه راکړل شوي نوټ کې موجودي فریکونسي ټاکي. دا ریزونانس کوي یعنې تیره ریزونانسونه رامنځ ته کوي یا له داسي ځانګړو فریکونسیو سره بیا غږ وباسي چې د طبیعي فریکونسیو سره برابرې وي.



۸.۱۱.۴ شکل

جوړښت: دا له یوه لوی کروي یا استوانه یې ښیښه یي یا فلزي مخزن څخه چې هوا او دوه یو له بل سره مخالفې غاړې لري جوړ دی لکه چې په ۸.۱۱.۴ (الف) او (ب) شکل کې ښودل شوي دي.

د دغه ډول یو ریزونېټر چې په ۸.۱۱.۴ (الف) شکل کې ښودل شوی د کروي هندسي په لرلو سره که طبیعي فریکونسي یې ثابته شي او کیدای شي چې یواځې د یوې فریکونسي چې له خپلې فریکونسي سره یې مساوي ده د کشف کولو لپاره استعمال شي. خو په ۸.۱۱.۴ (ب) شکل کې ښودل شوی ریزونېټر له دوو برخو څخه جوړ دی او کیدای شي په یوه نوټ کې د موجودو مختلفو فریکونسیو د کشف کولو لپاره استعمال شي ځکه د ده په یوه برخه باندې د بلې په ښوی کیدو سره یې طبیعي فریکونسي تغیر کولای شي.

لوی او پراخه غاړه P د صوتي څپو د رانیولو لپاره استعمالیږي او نرۍ غاړه Q په هوا کې ځای پر ځای ده چې ریزونانس کشف کړي.

د ریزونېټر په P غاړه کې هوا د هغه پستون په توګه چې په هوا لرونکي استوانه کې اهتزازي حرکت سرته رسوي عمل کوي. په P غاړه کې هوا له هغې کتلې سره هم چې له فنر سره نښتې وي پرتله کیدای شي داسې چې په مخزن کې هوا د فنر په توګه عمل کوي.

د ریزونېټر د طبیعي فریکونسي افاده په لاندې ډول لاس ته راتلای شي:

فرض کړئ چې

د P غاړې اوږدوالی $= l$

د P غاړې د عرضي مقطع مساحت $= \mathrm{A}$

په ريزونېټر کې د هوا کثافت $= \rho$

په هغه غاړه کې چې د پستون په توګه عمل کوي د هوا کتله عبارت ده له

$$m = l\mathrm{A}\rho$$

که د هوا په دې پستون باندې مخکې لور ته قوه د x فاصلې په اندازه عمل وکړي، نو په مخزن کې د هوا په حجم کې کمښت عبارت دی له

$$-\Delta\mathrm{V} = -\mathrm{A}x$$

داسې چې منفي علامه په حجم کې کمښت ښيي.

په نتيجه کې، په مخزن کې د هوا فشار د $\Delta\mathrm{P}$ په اندازه زياتيږي. که د مخزن د هوا د بلک ظريب K او V د مخزن د هوا حجم وي، نو په هغه کې د هوا د حجم او فشار تغير په لاندې ډول اړيکه لري:

$$\mathrm{K} = \frac{\Delta\mathrm{P}}{{-\Delta\mathrm{V}}/{\mathrm{V}}}$$

$$\therefore \qquad \Delta\mathrm{P} = -\mathrm{K}\frac{\Delta\mathrm{V}}{\mathrm{V}} \qquad \ldots (۲۴.۱۱.۴)$$

په مخزن کې د هوا د تراکم له امله، په غاړه کې د هوا په پستون باندې بهر لور ته قوه عمل کوي چې عبارت ده له:

$$\mathrm{F} = \Delta\mathrm{P}.\mathrm{A} = -\mathrm{K}\frac{\Delta\mathrm{V}}{\mathrm{V}}\mathrm{A}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{F} = -\mathrm{K}(\Delta\mathrm{V}).\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{K}(-\mathrm{A}x)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} \qquad [-\Delta\mathrm{V} = -\mathrm{A}x \quad \because]$$

يا

$$\mathrm{F} = -\left(\frac{\mathrm{K}\mathrm{A}^2}{\mathrm{V}}\right)x \qquad \ldots (۲۵.۱۱.۴)$$

که په غاړه کې د هوا پستون تعجيل $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ وي، نو په هغه باندې قوه هم په لاندې توګه توضيح کېدای شي.

$$\mathrm{F} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

يا

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}.l.\rho.\ddot{x} \qquad \ldots (۲۶.۱۱.۴)$$

له (۲۵.۱۱.۴) او (۲۶.۱۱.۴) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې

$$A.l.\rho.\ddot{x} = -\left(\frac{KA^2}{V}\right)x$$

یا

$$\ddot{x} = -\left(\frac{KA}{Vl\rho}\right)x$$

یا (۲۷.۱۱.۴) ...

$$\ddot{x} = {\omega_0}^2 x$$

داسې چې

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{KA}{Vl\rho}}$$

چې په غاړه کې د هوا پستون تعجیل د هغه له ځای بدلون سره مستقیماً متناسب دی او د ځای بدلون په مخالف لوري عمل کوي، ځکه نو، حرکت یې ساده هارمونیکي دی. د دې ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

(۲۸.۱۱.۴) ...

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{Vl\rho}{KA}}$$

په هوا کې د غږ سرعت عبارت دی له:

$$v = \frac{K}{\rho}$$

$$\therefore \quad K = v^2\rho$$

ځکه نو، د ریزونېټر په غاړه کې د اهتزازاتو د وخت پریود افاده عبارت ده له

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{Vl\rho}{v^2\rho A}} = \frac{2\pi}{v}\sqrt{\frac{Vl}{A}}$$

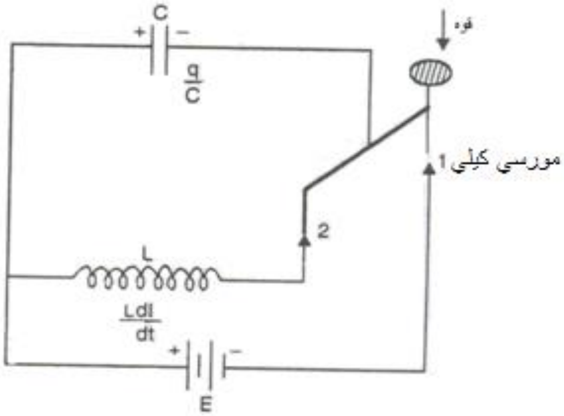
په ریزونېټر کې د رامنځ ته شویو اهتزازاتو فریکونسي عبارت ده له

(۲۹.۱۱.۴) ...

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{Vl}}$$

له دې معادلې څخه، دا څرګنده ده چې د ریزونېټر د اهتزازاتو طبیعي فریکونسي د هغه د غاړې په اوږدوالي او عرضي مقطع مساحت او د ریزونېټر په مجموعي حجم پورې اړه لري. د استوانه یي ریزونېټر د یوې برخې د ښویدلو څخه په بله باندې لکه په ۸.۱۱.۴ (ب) شکل کې چې لیدل کېږي، د ریزونېټر حجم او له دې ځایه د اهتزاز فریکونسي یې تغیر کولای شي.

۷. القا کیدني-برق قبلووني یا (LC) سرکټ. د L برق قبلونې یو انډکټر او د C خازني ظرفیت یو خازن د الکترو مقناطیسي قوې یوې بټرۍ E سره د مورسي کیلي په واسطه نښلول شوی لکه چې په ۹.۱۱.۴ شکل کې ښودل شوی په پام کې ونیسئ. کله چې د مورسي کیلي ته زور ورکول کېږي، خازن له بټرۍ سره نښلول کېږي ځکه ۱ خالیګا بندیږي. په دې حالت کې، ۲ خالیګا خلاصیږي او انډکټر له سرکټ څخه بهر کېږي. د خازن چارج کیدنه رامنځ ته کېږي او تر اعظمي چارج پورې چارج کېږي چې عبارت دی له $q_0 = \mathrm{CE}$.



۹.۱۱.۴ شکل

که په دې مرحله کې، د مورسي کیلي خوشې شي، خازن له بټرۍ څخه جلا کېږي او له انډکټر سره نښلي ځکه د مورسي کیلي په خوشې کیدو سره ۱ خالیګا خلاصه او ۲ خالیګا بندیږي. د پوره چارج شوي خازن بې چارجه کیدنه پیل کېږي. چې په سرکټ کې جریان د زیاتیدو میل لري، په انډکټر کې رامنځ ته شوې الکترو مقناطیسي قوه له دې سره مخالفت لري ځکه چې انډکټر همیشه له هغه څخه د تیریدونکي جریان په شدت کې له تغیر سره مخالفت کوي.

فرض کړئ چې د خازن د بې چارجه کیدو په جریان کې I په سرکټ کې د t په هر وخت کې جریان او q چارج دی (ددې په قبلونې سره چې بې چارجه کیدنه په $t = 0$ وخت کې پیل کېږي) نو

د خازن په اوږدو کې د پوتنسیال توپیر$= \frac{q}{\mathrm{C}}$

په انډکټر کې رامنځ ته شوې الکترومقناطیسي قوه $= \mathrm{L}\frac{dl}{dt}$

داسې چې $\frac{dl}{dt}$ په سرکټ کې په t وخت کې د جریان د تغیر اندازه ده.

په سرکټ کې مجموعي الکترومقناطیسي قوه صفر ده (ځکه د خازن د بې چارجه کیدو په وخت کې بټرۍ په سرکټ کې شتون نه لري).

∴ $$\mathrm{L}\frac{dl}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0$$

یا $$\frac{dl}{dt} + \frac{q}{\mathrm{LC}} = 0$$

خو $\mathrm{I} = \frac{dq}{dt}$

∴ $\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{1}{\mathrm{LC}}\right) q = 0$

یا $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0{}^2 q = 0$ ... (۳۰.۱۱.۴)

داسې چې $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$

(۳۰.۱۱.۴) معادله د ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله ده. له دې ځايه، په خازن کې چارج په ساده هارمونيکي توګه اهتزاز کوي يعنې د انډکټر په واسطه د خازن بې چارجه کيدل اهتزازي دي. د دغو اهتزازاتو د وخت پريود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}$$

او د اهتزازاتو فريکونسي عبارت ده له

$$\nu_0 = \frac{1}{\mathrm{T}_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

د (۳۰.۱۱.۴) معادلې حل په دې ډول دی

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \Phi_0) \quad ... (۳۱.۱۱.۴)$$

داسې چې q_0 امپليتيود يا د چارج اعظمي قيمت دی، $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$ د اهتزازاتو زاويوي فريکونسي ده. Φ_0 لومړنی فاز او په $t = 0$ وخت کې په حالت پورې اړه لري.

مونږ پوهيږو چې په $t = 0$ وخت کې $q = q_0$ دی.

∴ له (۳۱.۱۱.۴) معادلې څخه

$$q = q_0 \sin\Phi_0$$

یا $\Phi_0 = {}^{\pi}/_{2}$

∴ $q^3 = q_0 \sin\left(\omega_0 t + {}^{\pi}/_{2}\right)$ ... (۳۲.۱۱.۴)

[3] دا معادله يو خيالي حالت ښيي چې په هغه کې له سرکټ څخه محيط ته په هيڅ شکل انرژي نه خپريږي.

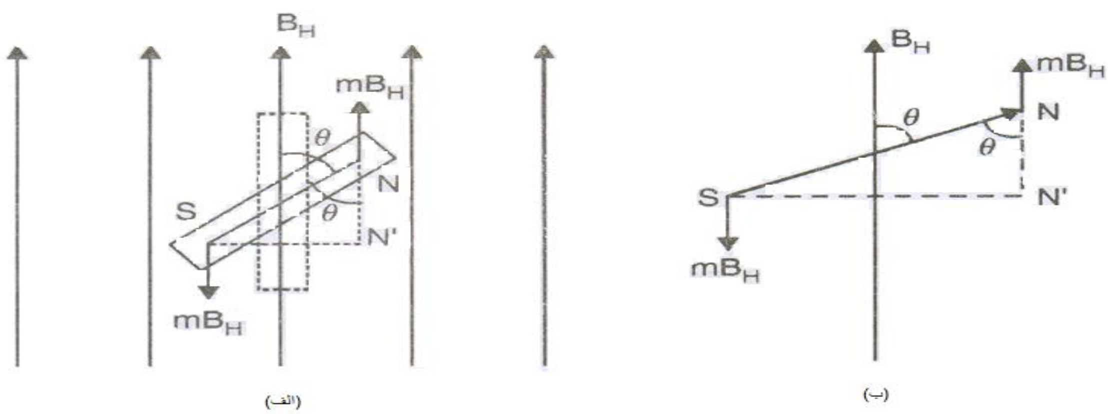
په t وخت کې په سرکټ کې جریان د (۳۲.۱۱.۴) معادلې له مشتق نیونې څخه لاس ته راتلای شي او عبارت ده له

$$I = q_0\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \pi/_2\right)$$

یا $$I = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \pi/_2\right) \quad ...(۳۳.۱۱.۴)$$

داسې چې $I_0 = q_0\omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ امپلیتیود یا په سرکټ کې د جریان اعظمي قیمت وړاندې کوي.

۸. د یوه مقناطیس اهتزازات. کله چې یو مقناطیس په ازاده توګه ځوړند وي نو په یوه افقي مستوي کې د اهتزاز کولو وړتیا لري، بیا تعادل ته راځي داسې چې د ډایپول مومنټ $\vec{M}$ یې د ځمکې د مقناطیسي ساحې د افقي مرکبې $\vec{B}_H$ سره موازي وي. که مقناطیس د هغه د تعادل له موقعیت څخه د θ کوچنۍ زاویې په اندازه بې ځایه شي چې په ۱۰.۱۱.۴ (الف) شکل کې په ټکي ټکي کرښو ښودل شوی، نو په خوشې کولو سره، د تعادل د موقعیت شاوخوا په ساده هارمونیکي توګه اهتزاز کوي.



۱۰.۱۱.۴ شکل

m د مقناطیس د هر قطب د قطب شدت په پام کې ونیسئ. کله چې مقناطیس د هغه د تعادل له موقعیت څخه د θ زاویې په اندازه بې ځایه شي، دوه قوې چې هره یوه یې د mB_H اندازه لري د مقناطیس په قطبونو باندې په مخالفو لوریو عمل کوي. دوی یوه جوړه جوړوي او ددې جوړې تورک عبارت دی له

$$\tau = -mB_H \times SN'$$

دلته منفي علامه ښیي چې تورک همیشه ددې لپاره عمل کوي چې د مقناطیس د تعادل حالت بیرته ترلاسه کړي.

په ۱۰.۱۱.۴ (ب) شکل کې

$$\frac{SN'}{SN} = \sin\theta$$

یا

$$SN' = (SN)\sin\theta$$

نو د مقناطیس د تورک افاده به

$$\tau = -mB_H.(SN)\sin\theta$$

$$= -MB_H\sin\theta \qquad [\because\ m(SN) = M]$$

کله چې د مقناطیس زاویوي ځای بدلون θ د هغه د تعادل له موقعیت څخه ډېر کوچنی وي نو

$$\sin\theta \approx \theta$$

او په هغه باندې عامل تورک عبارت دی له

$$\tau = -MB_H\theta \qquad \dots (۳۴.۱۱.۴)$$

فرض کړئ چې I د مقناطیس د څوړندیدو د محور شاوخوا د عطالت مومنټ او $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ د مقیاطیس زاویوي تعجیل وي. نو په هغه باندې تورک په لاندې توګه توضیح کیدای شي:

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta} \qquad \dots (۳۵.۱۱.۴)$$

له (۳۴.۱۱.۴) او (۳۵.۱۱.۴) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې

$$I\ddot{\theta} = -MB_H\theta$$

یا

$$\ddot{\theta} = -\omega_0{}^2\theta \qquad \dots (۳۶.۱۱.۴)$$

داسې چې

$$\omega_0{}^2 = \left(\frac{MB_H}{I}\right)$$

له (۳۶.۱۱.۴) معادلې څخه، دا څرګنده ده چې د مقناطیس زاویوي تعجیل د تعادل له موقعیت څخه د هغه له ځای بدلون سره مستقیماً متناسب دی. او لوری یې د تعادل موقعیت په لوري دی. ځکه نو، د مقناطیس حرکت ساده هارمونیک دی. د مقناطیس د دې ساده هارمونیک حرکت د وخت پریود عبارت دی له:

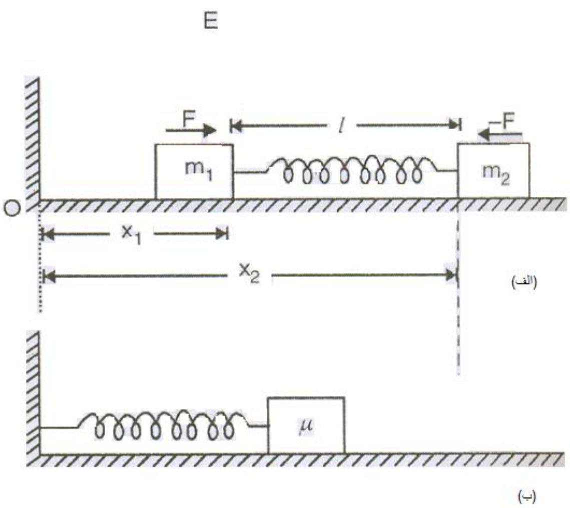
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MB_H}} \qquad \dots (۳۷.۱۱.۴)$$

له دې ځایه، د مقناطیس د اهتزازاتو د وخت پریود د هغه د اهتزاز د محور شاوخوا د عطالت مومنټ، ډایپول مومنټ او د ځمکې د مقناطیس په افقي مرکبې پورې اړه لري.

یا د اهتزاز فریکونسي $v_0 \leq \frac{1}{\mathrm{T}_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{MB_H}}{\mathrm{I}}}$

۹. د فنر په واسطه دوه نښلول شوې کتلې (یا یو جوړه یې اهتزاز ورکوونکی)

د m_1 او m_2 دوو کتلو چې په هواره افقي سطحه د ځای په ځای شوي صرف نظر وړ کتلې لرونکي فنر په دوو ازادو څوکو کې نښلول شوي یو سیستم لکه چې په ۱۱.۱۱.۴ (الف) شکل کې ښودل شوی دی په پام کې ونیسئ. دواړه کتلې د فنر د اوږدو په امتداد د اهتزاز کولو لپاره ازادې دي. دا جسم د دوو جسمونو اهتزاز ورکوونکی یا جوړه يي اهتزاز ورکوونکی بلل کیږي.



۱۱.۱۱.۴ شکل

فرض کړئ چې O نقطه نیول شوې مبدا او l د فنر له عادي اوږدوالي څخه عبارت دی. په هر t وخت کې، د فنر د دوو څوکو د همغه وخت موقعیتونه x_1 او x_2 نیول کیږي. نو په t وخت کې د فنر اوږدوالی $l = x_2 - x_1$ او په t وخت کې د فنر غزیدنه له $x = l - l_0$ څخه عبارت ده. په m_1 او m_2 کتلو باندې عامله قوه په ترتیب سره په لاندې ډول لیکل کیدای شي:

$$\mathrm{F}_1 = k(l - l_0) = kx$$

او

$$\mathrm{F}_2 = -k(l - l_0) = -kx$$

داسې چې k د فنر د قوې ثابت دی. د قوې د مثبت قیمت معنا داده، چې د مثبت x-محور په امتداد عمل کوي په داسې حال کې چې منفي قوه په مخالف لوري عمل کوي. او په t وخت کې د دوو کتلو تعجیلونه په ترتیب سره $\ddot{x}_1$ او $\ddot{x}_2$ دي او په دوی باندې دوه عاملې قوې

$$m\ddot{x}_1 = \mathrm{F}_1 = kx \qquad \dots (۳۸.۱۱.۴)$$

او

$$m\ddot{x}_2 = \mathrm{F}_2 = -kx \qquad \dots (۳۹.۱۱.۴)$$

(۳۸.۱۱.۴) او (۳۹.۱۱.۴) معادلې په ترتیب سره په m_1 او m_2 کې ضرب او له دوهمې څخه د لومړۍ په تفریق کولو، لاس ته راوړو چې

$$m_1 m_2(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)=-(m_1+m_2)kx \qquad \dots(۴۰.۱۱.۴)$$

خو

$$x=l-l_0=(x_2-x_1)-l_0$$

نظر t وخت ته په مشتق نیولو سره، لاس ته راوړو چې

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \qquad [\because \ l_0 = \text{ثابت}]$$

بیا نظر t وخت ته په مشتق نیولو سره،

$$\ddot{x}=\ddot{x}_2-\ddot{x}_1 \qquad \dots(۴۱.۱۱.۴)$$

د (۴۰.۱۱.۴) او (۴۱.۱۱.۴) معادلو په استعمالولو سره، لاس ته راوړو چې

$$m_1 m_2\ddot{x}=-(m_1+m_2)kx$$

یا

$$\ddot{x}=-\frac{k}{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)}x=\frac{-k}{\mu}x\,، \qquad \dots(۴۲.۱۱.۴)$$

داسې چې $\mu=\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)$ له فنر سره د نښلول شویو دوو جسمونو کمه شوې کتله بلل کیږي. μ د m_1 او m_2 هریوه څخه کوچنی دی.

(۴۲.۱۱.۴) معادله له فنر سره د نښلول شوې یوې اهتزاز کوونکې ذرې د حرکت معادلې سره مشابه ده بغیر له دې چې دلته μ د یوه جسم د کتلې m پر ځای د سیستم کمه شوې کتله ښیي. او x دلته د تعادل له موقعیت څخه د یوې ځانګړې کتلې د ځای بدلون پر ځای د تعادل له موقعیتونو څخه د دواړو کتلو د نسبتي ځای بدلون لپاره څرګندیږي.

ځکه نو، مونږ نتیجه اخستی شو چې د یوه فنر په واسطه دوه نښلول شوي جسمونه د هغه یوه جسم په شان چې د نوموړي فنر په یوه څوکه پورې نښلول شوی او کتله یې د دوو جسمونو له کمې شوې کتلې سره مساوي وي اهتزاز کوي لکه په ۱۱.۱۱.۴ (ب) شکل کې چې ښودل شوي د فنر بله څوکه په محکمه توګه ثابته ده. د کمې شوې کتلې د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود عبارت دی له

$$\mathrm{T}_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} \qquad \dots(۴۳.۱۱.۴)$$

۴.۴ مثال. د r شعاع لرونکی یو متجانس دایروي ډسک د افقي محور شاوخوا په یوه عمودي مستوي کې اهتزاز کوي. له مرکز څخه د دوران د هغه محور فاصله پیدا کړئ چې پریود یې اصغري وي. دا اصغري پریود محاسبه کړئ.

حل. په دې حالت کې، ډسک مرکب شاقول جوړوي. د وخت پریود یې عبارت دی له

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2/_l + l}{g}}$$

داسې چې k د ثقل له مرکز څخه د تیریدونکي یوه محور شاوخوا د ډسک د څرخیدو شعاع ده. د مرکب شاقول د وخت پریود هغه وخت اصغري وي کله چې یې اوږدوالی د ثقل له مرکز څخه د تیریدونکي یوه محور شاوخوا د څرخیدو له شعاع سره مساوي وي یعنې $l = k$.

د ډسک لپاره، د هغه د ثقل له مرکز څخه په تیریدونکې مستوي باندې د عمودي محور شاوخوا د څرخیدو شعاع د لاندې معادلې په واسطه ورکول کیږي

$$I = Mk^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

$$\therefore \quad k = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

له دې ځایه، د ډسک د ثقل له مرکزه د تیریدونکي محور څخه د هغه د دوران د محور غوښتل شوې فاصله له $l = k = \frac{r}{\sqrt{2}}$ څخه عبارت ده.

همدارنګه د وخت پریود اصغري قیمت عبارت دی له:

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2/_l + l}{g}} = \sqrt{\frac{k^2/_k + k}{g}}$$

یا

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = \sqrt{\frac{2\frac{r}{\sqrt{2}}}{g}}$$

$$\therefore \quad T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}r}{g}}$$

۵.۴ مثال. یوه $30cm$ شعاع لرونکې جامده کره د یوه ځوړند سیم چې د ټارسیونال اهتزازاتو د وخت پریود یې $2\pi\sqrt{2}s$ دی په ازاده څوکه کې نښلول شوې ده. که د ځوړند سیم د تورک ثابت $6 \times 10^{-3}N - m\, rad^{-1}$ وي، د کرې کتله پیدا کړئ.

حل. M د کرې کتله فرض کړئ. نو د محور په توګه د ځوړند سیم شاوخوا یې د عطالت مومنټ له $I = \frac{2}{5}MR^2$ څخه عبارت دی.

د کرې د ټارسیونال اهتزازاتو د وخت پریود عبارت دی له

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

∴
$$I = \frac{C \cdot T^2}{4\pi^2}$$

یا
$$\frac{2}{5}MR^2 = \frac{C \cdot T^2}{4\pi^2}$$

∴
$$M = \frac{5CT^2}{2\times 4\pi^2\times R^2}$$

$$= \frac{5\times 6\times 10^{-3}\times(2\pi\sqrt{12})^2}{2\times 4\pi^2\times(0.3)^2}$$

[∵ $6\times 10^{-3}\mathrm{N-m\,rad^{-1}}$, $T = 2\pi\sqrt{2}\mathrm{s}$ او $R = 30\mathrm{cm} = 0.3\mathrm{m}$]

$$\therefore \quad M = 2kg$$

۶.۴ مثال. 5 لیتره ظرفیت لرونکی یو کروي هیلم هولتز ریزونېټر $1cm$ شعاع او $1cm$ اوږدوالي لرونکي غاړه لري. د هغه نوټ فریکونسي او د موج اوږدوالی پیدا کړئ چې نوموړی ریزونېټر ورته ژر ځواب ویلای شي، په هوا کې د صوت سرعت $340ms^{-1}$ درکړل شوی دی.

حل. د هغه نوټ فریکونسي چې هغه ته د هیلم هولتز ریزونېټر ځواب ویلای شي عبارت دی له

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{Vl}}$$

له دې ځایه،
$$A = \pi r^2 = \frac{22}{7}\times(10^{-2})^2\mathrm{m}^2 \ ، \ \nu_0 = 340ms^{-1}$$

$$V = 5\mathrm{litre} = 5\times 10^{-3}\mathrm{m}^3$$

$$l = 1\mathrm{cm} = 10^{-2}\mathrm{m}$$

∴
$$\nu_0 = \frac{340\times 7}{2\times 22}\sqrt{\frac{22\times 10^{-4}}{7\times 5\times 10^{-3}\times 10^{-12}}}\mathrm{Hz}$$

$$= 135.8\mathrm{Hz}$$

د هغه نوټ د موج اوږدوالی چې نوموړی ریزونېټر ورته ځواب وای عبارت دی له

$$\lambda_0 = \frac{v}{v_0} = \frac{340}{135.8}\text{m} = 2.5\text{m}$$

۱۲.۴ استهلاک

هغه میکانیزم چې په نتیجه کې یې د یوه اهتزاز ورکوونکي انرژي خپریږي استهلاک بلل کیږي. استهلاک، په عمومي توګه یوه ډیره ستونځمنه پدیده او د مختلفو اندازو ستونځو لرونکي فکتورونه په ځان کې لرلی شي. د مثال په توګه، میخانیکي اهتزاز ورکوونکي، استهلاک کیدای شي د (i) لزوجي وتنې (ii) اصطکاک (iii) جوړښت له امله وي. په عمومي توګه دا ډیره سخته ده چې د استهلاک د طبیعت په هکله وړاندوینه وشي، ځکه نو، مونږ ډیر ځلې په تجربه تکیه کوو. دا عمومي عمل دی چې فرض کړلی شي چې محصله استهلاک د لزوجي استهلاک په شان د عین طبیعت لرونکی دی. دا لاس ته راغلي دي چې لزوجي وتنه له سرعت سره مستقیماً متناسبه ده داسې چې د اهتزازاتو امپلیتیود کوچنی وي. لزوجي وتنه حرکت ورو کوي او کیدای شي چې مقاومتي فکتور یا په اهتزاز ورکوونکي باندې مقاومتي قوه وبلل شي.

په برقي اهتزاز ورکوونکي کې، په سرکټ کې د مقاومت د شتون له امله کیدای شي انرژي خپره شي.

همدارنګه انرژي د الکترومقناطیسي څپو د خپریدو له امله خپریدای شي. په میخانیکي اهتزاز ورکوونکي کې، کله چې اهتزاز ورکوونکی په لزوجي محیط کې اهتزاز وکړي په محیط کې وړانګې تولیدیږي. صوتي دوشاخه یا رشته صوتي څپې تولیدوي ځکه چې په لزوجي محیط کې اهتزاز کوي. له برقي اهتزاز ورکوونکو څخه د تشعشعاتو خپریدل ورته پدیده ده. دا لاس ته راغله چې د میخانیکي اهتزاز ورکونکو په شان، په برقي اهتزاز ورکوونکو کې استهلاک په اهتزازي متحولینو پورې اړه لري. له دې ځایه، که اهتزاز ورکوونکی متحول x وي، نو د اهتزاز ورکوونکي استهلاکي فکتور یا مقاومتي قوه له $\frac{dx}{dt}$ سره مستقیماً متناسبه ده. داسې چې:

$$\mathrm{F}_d \propto \frac{dx}{dt}$$

یا $$\mathrm{F}_d = r\frac{dx}{dt} \qquad \ldots (۱.۱۲.۴)$$

دلته r ثابت دی چې استهلاکي ثابت بلل کیږي.

میخانیکي اهتزاز ورکوونکی

په میخانیکي اهتزاز ورکوونکي کې F_d مقاومتي قوه ښیي او $\frac{dx}{dt}$ سرعت دی. ځکه نو r د قوې÷سرعت بعدونه لري. له دې ځایه، استهلاکي ثابت د سیستم د اهتزازي برخې په واحد سرعت

باندې د مقاومتي قوې په توګه تعریف کیدای شي. نو په میخانیکي اهتزاز ورکوونکي کې د استهلاکي ثابت واحد له

$N/ms^{-1} = kg\,ms^2/ms^{-1} = kgs^{-1}$ څخه عبارت دی.

برقي اهتزاز ورکوونکی

په برقي اهتزاز ورکوونکي کې، F_d ولتیج ښیي او $\frac{dq}{dt} = \frac{dx}{dt}$ جریان دی. ځکه نو، د استهلاکي ثابت بعدونه له ولتیج ÷ جریان څخه عبارت دي. دا د مقاومت معادل دی. له دې ځایه، استهلاکي ثابت په سیستم کې په واحد جریان باندې د مقاومتي ولتیج په توګه تعریف کیدای شي. دا د سرکټ له مقاومت سره مساوي دی او $\frac{\text{ولټ}}{\text{امپیر}}$ یا اوم واحد لري.

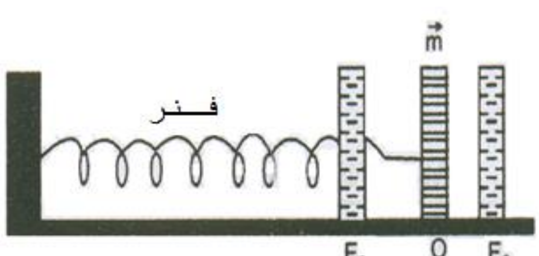
استهلاکي فکتور له وخت سره تغیر کوي

استهلاکي فکتور په $\frac{dx}{dt}$ پورې اړه لري چې په ساده هارمونیکي اهتزازاتو کې په ساینوسي توګه تغیر کوي. ځکه نو، استهلاکي فکتور هم په ساینوسي توګه تغیر کوي. په بله معنا دا له وخت سره په پریودیکي توګه تغیر کوي.

۱۳.۴ استهلاکي ساده هارمونیکي اهتزاز

استهلاکي ساده هارمونیکي اهتزاز هغه دی چې په هغه کې د اهتزازاتو امپلیتیود صفر ته کمیږي.

د استهلاکي ساده هارمونیکي اهتزاز تفاضلي معادله



۱،۱۳،۴ شکل

یو میخانیکي اهتزاز ورکوونکی په پام کې ونیسئ چې له S سختي ثابت لرونکي څخه جوړ دی لکه په ۱.۱۳.۴ شکل کې چې ښودل شوی دی. فرض کړئ چې د کتلې لحظوي ځای بدلون x دی. په کتله باندې بیرته ګرځوونکې قوه به $- Sx$ وي او استهلاکي قوه به له $F_d = -r\frac{dx}{dt}$ څخه عبارت وي. منفي علامه ښیي چې بیرته ګرځوونکې قوه او همدارنګه استهلاکي قوه دواړه د کتلې د تعجیل په خلاف دي. د نیوټن د حرکت د دویم قانون په تطبیق کولو، لاس ته راوړو چې:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Sx - r\frac{dx}{dt} \quad \text{... (۱.۱۳.۴)}$$

چې په لاندې توګه هم لیکل کیدای شي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{S}{m}x = 0 \qquad \dots (۲.۱۳.۴)$$

دلته r/m استهلاکي حد او S/m د سختي حد بلل کيدای شي.

$r/m = 2b$ او $S/m = \omega_0^2$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \dots (۳.۱۳.۴)$$

پورتنی وضع کوونه د تفاضلي معادلي د رياضيکي تحليل د اسانتيا لپاره ترسره شوې ده. (۳.۱۳.۴) معادله د يوه استهلاکي ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله بلل کېږي.

د تفاضلي معادلې حل

فرض کړئ چې (۳.۱۳.۴) معادلې حل:

$$x = \mathrm{A}e^{\alpha t}$$

نو $\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\alpha e^{\alpha t}$ او $\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{A}\alpha^2 e^{\alpha t}$

په (۳.۱۳.۴) معادله کې د نوموړو قيمتونو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$\mathrm{A}e^{\alpha t}[\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2] = 0$$

چې عبارت ده له:

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad \dots (\mathrm{I})$$

ځکه A او $e^{\alpha t}$ دواړه صفر کيدای نه شي.

(I) معادله د α دوهمه درجه معادله ده، او له دې ځايه جذرونه يې عبارت دي له:

$$\alpha = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

که جذرونه په α_1 او α_2 سره وښودل شي، نو:

$$\alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

او

$$\alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

او د (۳.۱۳.۴) معادلې بشپړ حل په لاندې توګه ليکل کيدای شي:

$$x = \mathrm{A}_1 e^{\alpha_1 t} + \mathrm{A}_2 e^{\alpha_2 t}$$

یا $$x = e^{-bt}\left[\mathrm{A}_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + \mathrm{A}_2 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right] \quad \ldots (۴.۱۳.۴)$$

داسي چې A_1 او A_2 ثوابت او د A په څیر عین بعدونه لري او قیمتونه یې د اهتزاز ورکوونکي په لومړنیو شرطونو پورې اړه لري.

د استهلاکونو درې ډولونه

د اهتزاز ورکوونکي کړه وړه په اساسي توګه د $\sqrt{b^2-\omega_0^2}$ حد په واسطه ټاکل کیږي. د b او ω_0 قیمتونو پورې اړوند، درې حالتونه لکه په لاندې توګه چې توضیح شوي راپورته کیږي.

۱ حالت. زیات استهلاکي یا درانده استهلاکي اهتزاز ورکوونکي

اهتزاز ورکوونکي ته زیات استهلاکي ویل کیږي که:

$$b^2 > \omega_0^2$$

یا

$$\frac{r^2}{4m^2} > \frac{\mathrm{S}}{m}$$

په دې حالت کې، استهلاکي حد د اهتزاز ورکوونکي د سختې په حد غلبه مومي. اوس په (۴.۱۳.۴) معادله کې د α_1 او α_2 قیمتونو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$x = e^{-bt}\left[\mathrm{A}_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} + \mathrm{A}_2 e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t}\right]$$

$$x = e^{-bt}\left[\mathrm{A}_1\left(\cos h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t + \sin h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t\right) + \right.$$
$$\left.\mathrm{A}_2\left(\cos h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t + \sin h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t\right)\right]$$

یا $$x = e^{-bt}\left[(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)\sin h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t + (\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)\cos h\sqrt{b^2-\omega_0^2}t\right] \quad \ldots (۵.۱۳.۴)$$

دلته هم $\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2$ او $\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2$ ثوابت دي. چې x ، اوس د وخت یوه غیر-پیریودیک تابع ده (ځکه $\cos h$ او $\sin h$ توابع غیر-پیریودیک دي)، ځکه نو، x ځای بدلون په نمایي توګه صفر ته ښکته کیږي او حرکت غیر-اهتزازي دی. له وخت سره د x تغیر په ۲.۱۳.۴ شکل کې ښودل شوی دی. دا ښیي چې له وخت سره ځای بدلون په نږدې کیدونکې خو د منحني په نه قطع کولو

سره (Asymptotically) ښکته کېږي. او سیستم د تعادل حالت ته د بیرته راګرځیدو لپاره اوږد وخت نیسي.

۲ حالت. بحراني استهلاکي اهتزاز ورکوونکي

اهتزاز ورکوونکي ته بحراني استهلاکي ویل کېږي که:

$$b^2 = \omega_0^2$$

یا

$$\frac{r^2}{4m^2} = \frac{S}{m}$$

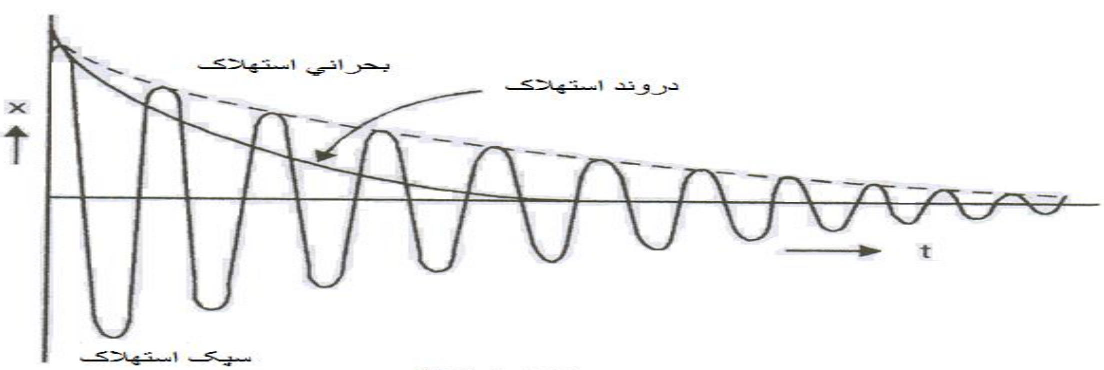
په دې حالت کې، استهلاکي حد او د سختي حد دواړه کوښښ کوي چې د یو بل اغیزې په توازون کې وساتي. د α_1 او α_2 په قیمتونو کې د $b^2 = \omega_0^2$ په وضع کولو، (۴.۱۳.۴) معادله په لاندې ډول بدلېږي.

$$x = e^{-bt}[\mathrm{A}_1 e^0 + \mathrm{A}_2 e^0]$$

یا (۶.۱۳.۴) ...

$$x = (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)e^{-bt} = \mathrm{G}e^{-bt}$$

داسې چې $\mathrm{G} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ یو ثابت دی. دا ښیي چې ځای بدلون په نمایي شکل صفر ته ښکته کېږي او سیستم لومړني حالت ته په کوچني ممکنه وخت کې راګرځي. ۲.۱۳.۴ شکل وګورئ. سره ددې، چې د تفاضلي معادلې حل یوازې یو ثابت لري، په داسې حال کې چې د دوهمه درجه تفاضلي معادلې په حل کې باید دوه ثوابت شتون ولري.



۲.۱۳.۴ شکل

دا ښیي چې (۶.۱۳.۴) معادله د تفاضلي معادلې یوازې یو قسمي[4] حل دی. د بشپړ حل د پیدا کولو لپاره مونږ په لاندې ډول مخ ته ځو:

---

[4] که (۶.۱۳.۴) معادله بشپړ حل وي، نو $\frac{dx}{dt} = -Gbe^{-bt}$

فرض کړئ چې b^2 له ω_0^2 څخه لږ څه زيات دی. داسې چې $\delta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$. څکه نو، (۴.۱۳.۴) معادله په لاندې ډول کېږي:

$$x = e^{-bt}\left[\mathrm{A}_1 e^{+\delta t} + \mathrm{A}_2 e^{-\delta t}\right]$$

د δ لږونکي نمايي حدونه په غزولو او يواځې د لومړنيو دوو حدونو په نيولو داسې چې $\delta \to 0$ ، لاس ته راوړو چې:

$$x = e^{-bt}[\mathrm{A}_1(1 + \delta t + \cdots) + \mathrm{A}_2(1 - \delta t + \cdots)]$$

يا

$$x = e^{-bt}[(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) + (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\delta t]$$

د $(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) = \mathrm{A}$ او $(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\delta = \mathrm{B}$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$x = e^{-bt}[\mathrm{A} + \mathrm{B}t] \qquad \text{... (۷.۱۳.۴)}$$

دلته A د اوږدوالي بعدونه او B د سرعت بعدونه لري. لومړني حالت ته د بيرته راګرځيدو لپاره د سيستم په واسطه نيول کيدونکی وخت د b په قيمت پورې اړه لري، چې دا بيا په استهلاکي ثابت r پورې اړه لري. د اهتزاز ورکوونکي کړه وړه ويل کيږي چې بې اهتزازه دي.

۳ حالت. سپک استهلاکي اهتزاز ورکوونکي

اهتزاز ورکوونکي ويل کيږي چې سپک استهلاکي دي که

$$b^2 < \omega_0^2$$

يا

$$\frac{r^2}{4m^2} < \frac{\mathrm{S}}{m}$$

په دې حالت کې، د سختي حد په استهلاکي حد غلبه مومي. چې $b^2 - \omega_0^2$ منفي دی، څکه نو، ليکلای شو:

$$\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - b^2)} = i\sqrt{\omega_0^2 - b^2} = i\omega_0' \text{ (د مثال په توګه)}$$

داسې چې $i = \sqrt{-1}$. څکه نو، (۴.۱۳.۴) معادله په لاندې ډول کيږي:

اوس، که سيستم په $t = 0$ وخت کې د تعادل له موقعيت څخه بې ځايه شي، نو د تعادل په موقعيت کې به سرعت $dx/\mathrm{dt} = -\mathrm{G}b$ وي. همدارنګه د تعادل په موقعيت کې $x = 0$ دی. څکه نو، له (۶.۱۳.۴) څخه د t د قيمت په وضع کولو، لاس ته راوړو چې $G = 0$ دی. څکه نو، $dx/\mathrm{dt} = 0$ ، چې دا د تعادل په موقعيت کې شرط نه دی. نو حل بشپړ نه دی.

$$x = e^{-bt}\left[A_1 e^{i\omega_0' t} + A_2 e^{i\omega_0' t}\right]$$

یا

$$x = e^{-bt}[A_1(\cos\omega_0' t + \sin\omega_0' t) + A_2(\cos\omega_0' t - \sin\omega_0' t)]$$

$$= e^{-bt}[(A_1 + A_2)\cos\omega_0' t + i(A_1 - A_2)\sin\omega_0' t]$$

د $A_1 + A_2 = A_0\cos\phi$ او $i(A_1 - A_2) = \sin\phi$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$x = e^{-bt}[A_0\cos\omega_0' t\cos\phi + A_0\cos\omega_0' t\sin\phi]$$

یا

$$x = e^{-bt}[A_0\cos(\omega_0' t - \phi)]$$

د A_0 او ϕ قیمتونه عبارت دي له:

$$A_0 = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + i^2(A_1 - A_2)^2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 - (A_1 - A_2)^2}$$

یا

$$A_0 = 2\sqrt{A_1 A_2}$$

او

$$\tan\phi = \frac{i(A_1 - A_2)}{A_1 + A_2}$$

او

$$x = [A_0 e]^{-bt}\cos(\omega_0' t - \phi)$$

چې په لاندې توګه هم لیکل کیدای شي:

$$x = A_0 e^{-(r/2m)t}\cos\left[\left(\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)t - \phi\right] \quad \text{... (۸.۱۳.۴)}$$

دا د ω_0' فریکونسي او $A_0 e^{-bt}$ امپلیتیود لرونکي ساده هارمونیکي حرکت معادله ده. په څرګنده توګه امپلیتیود له وخت سره کمیږي. ۲.۱۳.۴ شکل وګورئ. په بل عبارت، د استهلاکي اهتزاز ورکوونکو امپلیتیود صفر ته په نمایي توګه ښکته کیږي. اهتزاز ورکوونکي د هغه وخت په جریان کې بندیږي چې بحراني استهلاکي اهتزاز ورکوونکی بیرته خپل لومړني حالت ته راګرځي.

د استهلاکي اهتزاز ورکوونکو فریکونسي عبارت ده له:

$$f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

یا

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad \text{... (۹.۱۳.۴)}$$

د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکو له فریکونسي سره د f_0' اړیکه

د طبیعي اهتزاز ورکوونکي فریکونسي له $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$ څخه عبارت ده.

له (۹.۱۳.۴) معادلې سره ددې پرتله کوونه ښيي چې f_0' له f_0 څخه کمه ده. توپیر په استهلاکي ضریب r پورې اړه لري. څومره چې د r قیمت زیات وي، د f_0 او f_0' ترمنځ به توپیر زیات وي.

په دقیقه توګه د دورونو په احساسوونه استهلاکي اهتزازات ساده هارمونیکي یا پریودیک نه دي.

استهلاکي اهتزازات ساده هارمونیکي نه دي په دې معنا چې د تعادل د موقعیت په دواړو خواو کې اعظمي ځای بدلون له وخت سره کمیږي. نوموړی حرکت پریودیک نه بلل کیږي ځکه چې په دقیقه توګه خپل ځان نه تکراروي، هره تاویدنه د مخکیني اهتزاز له اړونده څخه کوچنۍ ده. سره ددې، کله چې استهلاک کوچنی وي، حرکت میل لري چې ساده هارمونیکي او همدارنګه پریودیکي وي.

د غیر استهلاکي او استهلاکي اهتزازاتو ترمنځ پرتله کوونه

غیر استهلاکي اهتزازات	استهلاکي اهتزازات
۱ حرکت په دقیقه توګه پیریودیکي او ساده هارمونیکي دی.	۱ حرکت په دقیقه توګه پیریودیکي یا ساده هارمونیکي نه دی.
۲ امپلیتیود ثابت دی.	۲ امپلیتیود له وخت سره کمیږي.
۳ فریکونسي د عطالت او ارتجاعي خواصو په واسطه ټاکل کیږي.	۳ فریکونسي د عطالت، ارتجاعي خواصو او استهلاکي ثابت په واسطه ټاکل کیږي.
۴ د انرژي له منځه تګ نه رامنځ ته کیږي.	۴ انرژي په دوامداره توګه له منځه ځي.
۵ اهتزازات په نامعینه توګه ادامه لري.	۵ اهتزازات له څه وخت څخه وروسته بندیږي.

۷.۴ مثال. وښایاست چې $x = (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-\frac{r}{2m}t}$ د بحراني استهلاکي اهتزازاتو تفاضلي معادلې $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{S}{m}x = 0$ حل دی.

حل. د $r/m = 2b$ او $S/m = {\omega_0}^2$ په وضع کولو، د x قیمت او تفاضلي معادله به:

$$x = (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-bt}$$

او
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$$

ځکه نو
$$\frac{dx}{dt} = -b(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-bt} + \mathrm{B}e^{-bt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-bt} - b\mathrm{B}e^{-bt} - b\mathrm{B}e^{-bt}$$

یا
$$\frac{d^2x}{dt^2} = b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-bt} - 2b\mathrm{B}e^{-bt}$$

په تفاضلي معادله کې د x ، $\frac{dx}{dt}$ او $\frac{d^2x}{dt^2}$ د قیمتونو په وضع کولو، لاس ته روړو چې:

$$[b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) - 2b\mathrm{B} + 2b\{-b(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) + \mathrm{B}\} + {\omega_0}^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)]e^{-bt} = 0$$

یا
$$[b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) - 2b\mathrm{B} - 2b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) + 2b\mathrm{B} + {\omega_0}^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)]e^{-bt} = 0$$

یا
$$[-b^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) + {\omega_0}^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)]e^{-bt} = 0$$

یا
$$[(-b^2 + {\omega_0}^2)(\mathrm{A} + \mathrm{B}t)]e^{-bt} = 0$$

یا
$$({\omega_0}^2 - b^2)x = 0$$

خو x همیشه صفر نه وي، ځکه نو
$${\omega_0}^2 - b^2 = 0$$

یا
$$\frac{S}{m} = \frac{r^2}{4m^2}$$

چې د اهتزاز ورکوونکي د بحراني استهلاک شرط دی. له دې ځایه $x = (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-\frac{r}{2m}t}$ د بحراني استهلاکي اهتزازاتو تفاضلي معادلې حل دی.

۸.۴ مثال. د $25\mathrm{Nm}^{-1}$ سختي ثابت لرونکي یوه فنر څخه $1kg$ کتله ځوړنده ده. که د طبیعي اهتزازاتو فریکونسي $2/\sqrt{3}$ ځلې د استهلاکي اهتزازاتو د فریکونسي وي، استهلاکي ثابت پیدا کړئ.

حل.

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

او $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$$

راکړل شوي دي چې: $$f_0 = \frac{2}{3} f_0'$$

∴ $$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

یا $$\frac{S}{m} = \frac{4}{3}\left[\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right]$$

یا $$\frac{3}{4}\frac{S}{m} = \frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}$$

یا $$\frac{r^2}{4m^2} = \frac{1}{4}\frac{S}{m}$$

یا $$r^2 = Sm$$

دلته $$S = 25\mathrm{Nm}^{-1} \quad ، \quad m = 1kg$$

∴ $$r^2 = 25\mathrm{N}^2\mathrm{m}^{-2}s^2$$

یا $$r = 5\mathrm{Nm}^{-1}s^1$$

۱۴.۴ د یوه استهلاکي اهتزاز ورکوونکي انرژي (په کمه اندازه استهلاکي)

د t وخت په هره لحظه کې د یوه استهلاکي ساده هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي لحظوي ځای بدلون عبارت دی له

$$x = \mathrm{A}_0 e^{-bt}\cos(\omega_0' t - \Phi)$$

داسې چې A_0 د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي امپلیتیود او ω_0' یې فریکونسي ده.

∴ $$\frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}_0 e^{-bt}\, sin(\omega_0' t - \Phi)\omega_0' - \mathrm{A}_0 b e^{-bt}\cos(\omega_0' t - \Phi)$$

یا $$\frac{dx}{dt} = -\mathrm{A}_0 e^{-bt}\left[sin(\omega_0' t - \Phi)\omega_0' + b\cos(\omega_0' t - \Phi)\right] \qquad \ldots (۱.۱۴.۴)$$

نو، د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي چې m کتله لري حرکي انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

د (۱.۱۴.۴) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{K.E} = \frac{1}{2} m\mathrm{A}^2{}_0 e^{-2bt}[\omega_0'^2 sin^2(\omega_0' t - \Phi) + b^2 \cos^2(\omega_0' t - \Phi) +$$

$$2\omega_0' \, bsin \; (\omega_0' t - \Phi) \; \cos(\omega_0' t - \Phi)] \qquad \ldots (۲.۱۴.۴)$$

د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي لحظوي پوټنسیال انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{P.E} = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 \mathrm{A}^2{}_0 e^{-2bt} \cos^2(\omega_0' t - \Phi) \qquad \ldots (۳.۱۴.۴)$$

∴ مجموعي انرژي

$$\mathrm{E_{tot}} = \mathrm{KE} + \mathrm{PE}$$

$$= \frac{1}{2} m\mathrm{A}^2{}_0 e^{-2bt}[\omega_0'^2 sin^2(\omega_0' t - \Phi) + b^2 \cos^2(\omega_0' t - \Phi) +$$

$$2\omega_0' \, bsin \; (\omega_0' t - \Phi) \; \cos(\omega_0' t - \Phi)] + \omega_0{}^2 \cos^2(\omega_0' t - \Phi)$$

$$\mathrm{E_{tot}} = \frac{1}{2} m\mathrm{A}^2{}_0 e^{-2bt} \left[\omega_0'^2 \, sin^2(\omega_0' t - \Phi)\right] + (b^2 + \omega_0{}^2) \cos^2(\omega_0' t - \Phi) +$$

$$\omega_0' \, b2sin \; (\omega_0' t - \Phi) \qquad \ldots (۴.۱۴.۴)$$

که استهلاک ډېر کوچنی وي، نو په یوه وخت پریود T' کې په e^{-2bt} حد کې تغیر د صرف نظر وړ کوچنی دی، نو مونږ د اهتزاز ورکوونکي متوسطه انرژي اخلو.

متوسطه انرژي،

$$\mathrm{U}_{av} = \frac{1}{\mathrm{T}'} \int_0^{\mathrm{T}'} \mathrm{E_{tot}} dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}'} \frac{1}{2} m\mathrm{A}^2{}_0 e^{-bt} \left[\omega_0'^2 \int_0^{\mathrm{T}'} sin^2(\omega_0' t - \Phi) dt + (b^2 + \right.$$

$$\left. \omega_0{}^2) \int_0^{\mathrm{T}'} \cos^2(\omega_0' t - \; \Phi) dt + \; \omega_0' \, b \int_0^{\mathrm{T}'} sin\, 2\, (\omega_0' t - \Phi) \quad \right]$$

$$= \frac{m\mathrm{A}^2{}_0 e^{-2bt}}{2\mathrm{T}'} \left[\omega_0' \frac{\mathrm{T}'}{2} + (b^2 + \omega_0{}^2) \frac{\mathrm{T}'}{2} - 0\right]$$

$$\left[\begin{array}{ll} \int_0^{\mathrm{T}'} \cos^2 t dt = \int_0^{\mathrm{T}'} sin^2 t dt = \frac{\mathrm{T}'}{2} & \therefore \\ \int_0^{\mathrm{T}'} sin\, 2\; t dt = 0 & \text{او} \end{array}\right]$$

$$= \frac{mA^2{}_0 e^{-2bt}}{4}\left[\omega_0'^2 + b^2 + \omega_0{}^2\right]$$

خو

$$\omega_0'^2 = \omega_0{}^2 - b^2$$

∴

$$U_{av} = \frac{mA^2{}_0 e^{-2bt}}{4}\left[\omega_0{}^2 - b^2 + b^2 + \omega_0{}^2\right]$$

$$U_{av} = \frac{1}{2} mA^2{}_0 \omega_0{}^2 e^{-2bt} = U_0 e^{-2bt} \qquad \ldots (۵.۱۴.۴)$$

داسې چې

$$U_0 = \frac{1}{2} mA^2{}_0 \omega_0{}^2 \qquad \ldots (۶.۱۴.۴)$$

(U_0 د یوه غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي مجموعي انرژي بلل کېږي)

۱۵.۴ د طاقت خپریدل

په یوه استهلاکي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي کې د استهلاکي یا مخالفو قواو د عمل له امله چې په هغه یې کوي د اهتزاز امپلیتیود له وخت سره په نمایي توګه کمیږي. په نتیجه کې یې، انرژي په جاري توګه خپریږي. د دغې انرژي د خپریدني د وخت اندازه یا د طاقت خپریدنه په لاندې ډول محاسبه کیدای شي:

د هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي مستقیماً د امپلیتیود په مربع پورې اړه لري. د استهلاکي قواو په نه شتون کې ثابته پاتې کېږي ځکه د اهتزازاتو امپلیتیود ثابت پاتې کېږي. خو په یوه استهلاکي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي کې، نوموړې انرژي له وخت سره د اهتزازاتو د امپلیتیود د نمایي کمیدنې له امله کمیږي.

د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د طاقت خپریدنه د انرژي د تلف اندازه ده.

که U_{av} د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي متوسطه انرژي وي، نو د یو وخت پریود په جریان کې د طاقت خپریدنه به:

$$P_{av} = \frac{d}{dt}(U_{av})$$

چې

$$U_{av} = U_0 e^{-2bt}$$

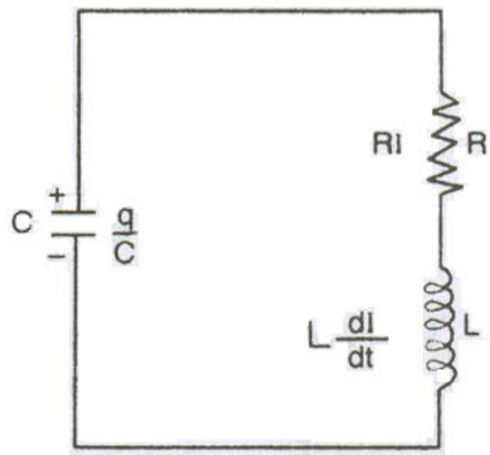
∴

$$P_{av} = U_0 \frac{d}{dt}(e^{-2bt}) = -2bU_0 e^{-2bt}$$

یا

$$P_{av} = -\frac{r}{m} U_0 e^{\frac{r}{m}t}$$

۱۶.۴ استهلاکي برقي اهتزاز ورکوونکی



۱.۱۶.۴ شکل

په استهلاکي برقي اهتزاز ورکوونکي کې، د انرژي خپریدنه د سرکټ په مقاومت کې رامنځ ته کیږي، چې په ښتو سیمانو او انډکټر کې ویشل کیدای شي. همدارنګه، په سرکټ کې اضافي مقاومت شتون لرلی شي. د تجزیې په هدف، ټول مقاومت به په یوه نقطه کې د استهلاکي په څیر معامله شي. نو اهتزاز ورکوونکی یو RCL سرکټ دی لکه چې په (۱.۱۶.۴) شکل کې ښودل شوی دی. خازن یې تر یوه معلوم قیمت پورې چارج کیږي (د مثال په توګه q_0) او بیا اجازه ورکول کیږي چې د مقاومت او انډکټر په واسطه بې چارجه شي.

فرض کړئ چې په t وخت کې په خازن کې لحظوي چارج= q

∴ په سرکټ کې لحظوي جریان

$$\mathrm{I} = \frac{dq}{dt}$$

د انډکټر په اوږدو کې د پوټنسیال توپیر $= \frac{\mathrm{L}dI}{dt} = \frac{\mathrm{L}d^2q}{dt^2}$

د مقاومت په اوږدو کې د پوټنسیال توپیر $= \mathrm{RI} = \mathrm{R}\frac{dq}{dt}$

د خازن په اوږدو کې د پوټنسیل توپیر $= \frac{q}{\mathrm{C}}$

د کرشوف قوانینو په عملي کولو، لاس ته راوړو چې:

$$\mathrm{L}\frac{dI}{dt} + \mathrm{RI} + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0$$

$$\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{R}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\mathrm{C}} = 0 \qquad \text{... (۱.۱۶.۴)}$$

چې په لاندې توګه هم لیکل کیدای شي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\mathrm{LC}}q = 0 \qquad \text{... (۲.۱۶.۴)}$$

دا د برقي اهتزاز ورکوونکي د ساده هارمونيکي اهتزازاتو معادله ده. دلته د اهتزاز ورکوونکي متحول q او استهلاکي فکتور له dq/dt سره متناسب دی. همدارنګه، R استهلاکي ثابت او د سرکټ مقاومت ښيي.

د $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} = 2b$ او $\frac{1}{\mathrm{LC}} = {\omega_0}^2$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2b\frac{dq}{dt} + {\omega_0}^2 q = 0 \qquad \text{... (۳.۱۶.۴)}$$

دا معادله بې له دې چې د x په ځای q ځای په ځای شوی دی (۳.۱۵.۴) معادلې ته ورته ده. دا د (۳.۱۵.۴) معادلې په شان په عين طريقه حل کېږي. دا د تمرين په توګه پريښودل شوه. د نوموړې معادلې حل به په لاندې ډول لاس ته راشي:

$$q = e^{-bt}\left[\mathrm{A}_1 e^{\sqrt{b^2-{\omega_0}^2}} + \mathrm{A}_2 e^{-\sqrt{b^2-{\omega_0}^2}}\right] \qquad \text{... (۴.۱۶.۴)}$$

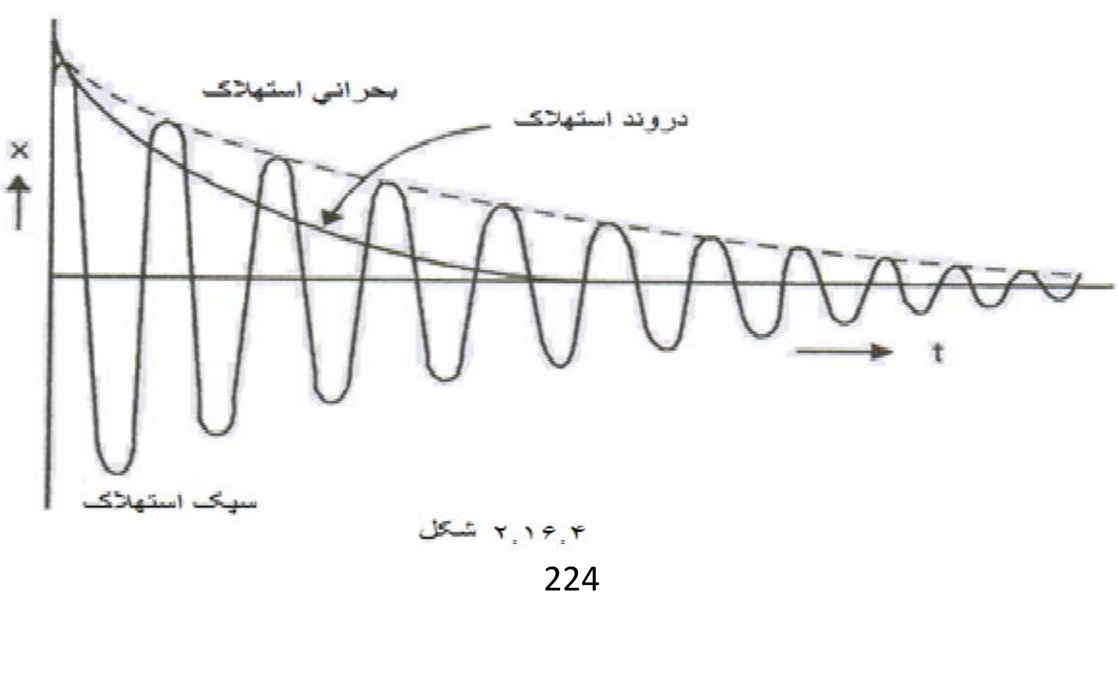
داسې چې A_1 او A_2 به د چارج بعدونه ولري او قيمتونه به يې د اهتزاز ورکوونکي په لومړنيو شرايطو پورې اړه ولري.

د استهلاک درې ډولونه

۱ حالت. درونډ استهلاک

کله چې ${\omega_0}^2 < b^2$ يا $\frac{1}{\mathrm{LC}} < \frac{\mathrm{R}^2}{4\mathrm{M}^2}$ وي

په کوچني ممکنه وخت کې د خازن چارج صفر ته کميږي. (د تشريحي مباحثې لپاره د ۱۳.۴ برخې ۱حالت وګورئ). ۲.۱۶.۴ شکل په خازن کې د چارج کميدنه په ګرافيکي توګه ښيي.



۲.۱۶.۴ شکل

۲ حالت. بحراني استهلاک

کله چې $b^2 = {\omega_0}^2$ یا $\frac{R^2}{4M^2} = \frac{1}{LC}$ وي

بې چارجه کیدنه غیر اهتزازي ده. (د تشریحي مباحثې لپاره د ۱۳.۴ برخې ۲ حالت وګورئ). په t هره لحظه کې چارج عبارت دی له:

$$q = e^{-bt}[A + Bt]$$

داسې چې A د چارج او B د جریان بعدونه لري. د چارج د کمیدنې اندازه د استهلاک په ثابت یا په R مقاومت پورې اړه لري. د اهتزاز ورکوونکې کړه وړه بې نوسانه بلل کیږي. ۲.۱۶.۴ شکل وګورئ.

۳ حالت. سپک استهلاک

کله چې $b^2 < {\omega_0}^2$ یا $\frac{R^2}{4M^2} < \frac{1}{LC}$ وي

بې چارجه کیدنه اهتزازي ده او په هره لحظه کې چارج عبارت دی له:

$$q = (A_0 e^{-bt}) \cos(\omega_0' t - \Phi)$$

چې په لاندې توګه لیکل کیدای شي

$$q = \left(A_0 e^{-(R/2L)t}\right) \cos\left[\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4M^2}\right)^{\frac{1}{2}} t - \Phi\right]$$

(د تشریحي لاس ته راوړنې لپاره د ۱۳.۴ برخې ۳ حالت وګورئ). د استهلاکي اهتزازاتو فریکونسي عبارت ده له

$$f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{{\omega_0}^2 - b^2}$$

یا

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4M^2}}$$

۲.۱۶.۴ شکل د چارجونو کمیدنه په ګرافیکي توګه ښيي.

۱۷.۴ د A_1 او A_2 ثوابتو ټاکنه

په ۱۳.۴ او ۱۶.۴ برخو کې، مونږ د سیستم اهتزازي کړه وړه د کم استهلاک په حالت کې تشریح کړل.

د اهتزازي متحول x ، د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي ځای بدلون او د برقي اهتزاز ورکوونکي چارج لحظوي قیمت عبارت دی له

$$x = e^{-bt}\left[A_1 e^{\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}} + A_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}}\right]$$

فرض کړئ مونږ هغه وخت اندازه کوو چې په هغه کې د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي ځای بدلون اعظمي وي د مثال په توګه A_0. دا وخت له هغې لحظې څخه اندازه کېږي چې په هغې کې د سیستم اهتزاز کوونکې برخه په اعظمي موقعیت کې وي.

نو په $t = 0$ کې $x = A_0$ دی.

همدارنګه، د اهتزاز کوونکې برخې سرعت په همدې لحظه کې صفر دی.

په بل عبارت په $t = 0$ کې $dx/dt = 0$ دی. د دغو شرایطو په عملي کولو سره مونږ د $t = 0$ لپاره $x = A_0$ لاس ته راوړو، له دې ځایه لرو چې

$$A_1 + A_2 = A_0 \qquad \dots (\mathrm{I})$$

او $$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left[A_1\left(-b+\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}\right)e^{\sqrt{b^2-\omega^2}t} + A_2\left(-b-\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}\right)e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}t}\right]$$

په $t = 0$ کې د $dx/dt = 0$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$0 = A_1\left(-b+\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}\right) + A_2\left(-b-\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}\right)$$

یا $$0 = -b[A_1 + A_2] + \sqrt{b^2-\omega_0{}^2}(A_1 - A_2)$$

د $A_1 + A_2 = A_0$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$0 = -bA_0 + \sqrt{b^2-\omega_0{}^2}(A_1 - A_2)$$

یا $$A_1 - A_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2-\omega_0{}^2}}A_0 \qquad \dots (\mathrm{II})$$

د (I) او (II) معادلو په جمع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$A_1 = \frac{A_0}{2}\left[1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - {\omega_0}^2}}\right]$$

$$A_2 = \frac{A_0}{2}\left[1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - {\omega_0}^2}}\right]$$

د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي لپاره، $b = r/2\,m$ او ${\omega_0}^2 = S/m$ دی.

برقي اهتزاز ورکوونکی

د برقي اهتزاز ورکوونکو لپاره، د A_1 او A_2 قیمتونه په عین طریقه پیدا کیدای شي. دلته وخت په هغه حالت کې اندازه کېږي چې خازن په بشپړه توګه چارج وي او اعظمي چارج له q_0 څخه عبارت دی. همدارنګه په $t = 0$ کې په سرکټ کې جریان صفر وي. څکه نو، د x په q او A_0 په q_0 عوض کولو څخه مونږ د A_1 او A_2 قیمتونه لاس ته راوړو لکه:

$$A_1 = \frac{q_0}{2}\left[1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - {\omega_0}^2}}\right]$$

او

$$A_2 = \frac{q_0}{2}\left[1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - {\omega_0}^2}}\right]$$

داسې چې $b = R/2L$ او ${\omega_0}^2 = 1/LC$ دی.
له دې ځایه، د راکړل شویو شرایطو لاندې A_1 او A_2 ثوابت ټاکل کیدای شي.

۱۸.۴ د ارامتیا وخت

د ارامتیا وخت د وخت دهغه انټروال په توګه تعریف کېږي چې په هغه کې د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي امپلیټیود د هغه د لومړني قیمت څخه $1/e$ ځلې کمېږي.

په بل عبارت، که اصلي امپلیټیود A_0 او په τ وخت کې امپلیټیود $A = A_0/e$ شي، نو τ د استهلاکي اهتزاز د ارامتیا وخت بلل کېږي. څر نګه چې $1/e = 0.368$ دی نو د ارامتیا وخت په اوږدو کې، د اهتزاز ورکوونکي امپلیټیود د هغه له لومړني قیمت څخه $36.8\ \%$ کمیږي. د ارمتیا وخت د امپلیټیود د کمیدو د چټکتیا یوه اندازه یا د اهتزاز ورکوونکي د استهلاک حد دی.

د انرژي د خپریدو د پروسې اندازه د ارامتیا وخت له مخې اندازه کېږي. د ارامتیا وخت په زیاتیدو، استهلاک کمیږي او له دې ځایه د انرژي د خپریدو اندازه یا د امپلیټیود کمیدنه ورو کېږي.

د ارامتیا وخت افاده

(i) میخانیکي اهتزاز ورکوونکی

د استهلاکي میخانیکي اهتزاز ورکوونکي امپلیتیود د لاندې رابطې مطابق کمیږي:

$$A = A_0 e^{-bt}$$

که τ د ارامتیا وخت وي، نو $t + \tau$ وخت څخه وروسته د اهتزاز ورکوونکي امپلیتیود عبارت دی له

$$A' = A_0 e^{-b(t+\tau)}$$

د تعریف له مخې:

$$A' = A/e$$

یا

$$A_0 e^{-b(t+\tau)} = \frac{A_0}{e} e^{-bt}$$

یا

$$e^{-b\,\tau} = \frac{1}{e}$$

یا

$$e^{-b\,\tau} = e^{-1}$$

یا

$$b\,\tau = 1$$

چې

$$b = \frac{r}{2m}$$

یا ... (۱.۱۸.۴)

$$\tau = \frac{1}{b} = \frac{2m}{r}$$

له دې ځایه، د ارامتیا وخت له استهلاکي ثابت (r) سره معکوساً متناسب دی.

(ii) برقي اهتزاز ورکوونکی

د استهلاکي برقي اهتزاز ورکوونکي د خازن په قابونو کې چارج عبارت دی له:

$$q = q_0 e^{-bt}$$

که τ د ارامتیا وخت وي، نو له τ وخت څخه وروسته د اهتزاز ورکوونکي امپلییتیود عبارت دی له

$$q' = q_0 e^{-b(t+\tau)}$$

د تعریف له مخې:

$$q' = \frac{q_0}{e}$$

یا $$q_0 e^{-b(t+\tau)} = \frac{q_0}{e} e^{-b(t+\tau)}$$

یا $$e^{-b\,\tau} = \frac{1}{e}$$

یا $$\tau = \frac{1}{b} = \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$$

۱۹.۴ د څرنګوالي ضریب

د څرنګوالي ضریب د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د انرژي د کمیدو اندازه ورکوي. دا د Q په واسطه ښودل کیږي او همدارنګه د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د Q-ضریب بلل کیږي. دا د اهتزاز ورکوونکي د لحظوي انرژي او له همدې لحظې وروسته د یوه وخت پریود په جریان کې د له منځه تللې انرژي د نسبت او د 2π د ضرب حاصل په توګه تعریف کیږي. یعنې

$$\mathrm{Q} = 2\pi \times \frac{\text{په هره لحظه کې د اهتزاز ورکوونکي انرژي}}{\text{د یوه وخت پریود په جریان کې له منځه تللې انرژي}}$$

$$= 2\pi \frac{\mathrm{U}}{[-d\mathrm{U}]_{\mathrm{T}'}}$$

(منفي علامې معنا د انرژي له منځه تګ دی)

اوس، د اهتزاز ورکوونکي مجموعي انرژي د هغه د امپلیتیود له مربع سره متناسب دی. په بل عبارت:

$$\mathrm{U} \propto \mathrm{A}^2$$

یا $$\mathrm{U} \propto \mathrm{A^2}_0 (e^{-bt})^2$$

یا $$\mathrm{U} \propto \mathrm{A^2}_0 e^{-2bt}$$

یا $$\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{-2bt}$$

داسې چې U_0 د اهتزاز ورکوونکي لومړنۍ انرژي ده.

د انرژي د تغیر اندازه عبارت ده له: $$d\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{-2bt} dt$$

څکه نو، $$\mathrm{Q} = 2\pi \frac{\mathrm{U}}{[-d\mathrm{U}]_{\mathrm{T}'}} = 2\pi \frac{\mathrm{U}_0 e^{-2bt}}{2b\mathrm{U}_0 e^{-2bt}\mathrm{T}'}$$

$$\mathrm{Q} = 2\pi \frac{1}{2b\mathrm{T}'}$$

د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي لپاره،

$$b = \frac{r}{2m}$$

یعنې $\mathrm{Q} = \frac{2\pi m}{r\mathrm{T}'}$

خو د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي زاویوي فریکونسي $\omega_0' = \frac{2\pi}{\mathrm{T}'}$ دی، ځکه نو:

$$\mathrm{Q} = \omega_0' \frac{m}{r}$$

د برقي اهتزاز ورکوونکي لپاره،

$$b = \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{L}}$$

یعنې $\mathrm{Q} = \frac{2\pi \mathrm{L}}{\mathrm{RT}'}$

بیا د $\omega_0' = \frac{2\pi}{\mathrm{T}'}$ په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$\mathrm{Q} = \omega_0' \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$$

۲۰.۴ الکترومقناطیسی استهلاک

(i) بی نوسانه او بالیستیک ګلوانومترونه.

کله چې د متحرک بوبین ګلوانومتر بوبین په هغه باندې د تاوونکو قواو د عمل په واسطه تاو شي، لاندې درې جوړې د هغه د حرکت مخالفت کوي.

(i) د ځوړنده تار د غبرګیدو له امله، $C\theta-$ بیرته ګرځوونکي جوړه. دلته C د ځوړند تار د ټارسیونال سختي بلل کېږي او د تار په واحد غبرګتوب باندې بیرته ګرځونکي جوړه ده. θ په هر وخت کې د تعادل له موقعیت څخه د بوبین تاویدنه ده.

(ii) د میخانیکي استهلاک له امله د $r\frac{d\theta}{dt}-$ جوړه، چې د هوا د لزوجیت او د ځوړنده تار له ارتجاعي وروسته والي (Hysteresis) څخه راپورته کېږي. دلته، r د دغه ډول استهلاک استهلاکي ثابت دی.

(iii) د الکترو مقناطیسي استهلاک یعنې په سرکټ کې د څرخیدونکي (Eddy) جریان له امله د $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\frac{d\theta}{dt}-$ جوړه. دا جوړه د بوبین له زاویوي سرعت $\frac{d\theta}{dt}$ سره مستقیماً متناسبه او د هغه له مقاومت

R سره معکوساً متناسبه ده. دا همدارنګه د بوبين په مقناطيسي ساحې او د هغه په مساحت او داسي نورو پورې اړه لري. دا ټول ضريبونه په K ثابت کې شامل دي. که I د بوبين د عطالت مومنټ د هغه د دوران د محور په شاوخوا وي، نو په t وخت کې يې د حرکت معادله په لاندې ډول توضيح کيدای شي.

$$\mathrm{I} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{C}\theta - r\frac{d\theta}{dt} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\frac{d\theta}{dt}$$

يا
$$\ddot{\theta} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\theta - \frac{1}{\mathrm{I}}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)\theta$$

يا
$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\mathrm{I}}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)\theta + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}\theta = 0$$

يا
$$\ddot{\theta} + 2b\theta + {\omega_0}^2\theta = 0 \qquad \dots (۱.۲۰.۴)$$

داسې چې $2b = \frac{1}{\mathrm{I}}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)$ او ${\omega_0}^2 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}$

(۱.۲۰.۴) معادله يوه دويم ترتيب تفاضلي معادله او حل يې (چې د ۲.۲۰.۴ معادلې په شان لاس ته راتللی شي) عبارت دی له

$$\theta = \frac{\theta_0 e^{-bt}}{2}\left[\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2-{\omega_0}^2}}\right)e^{\left(\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t} + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2-{\omega_0}^2}}\right)e^{\left(-\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t}\right] \qquad \dots (۲.۲۰.۴)$$

د b^2 او ${\omega_0}^2$ د نسبتي قيمتونو اړوند، مونږ لاندې درې ځانګړي حالتونه لرلی شو:

(الف) کله چې $\boldsymbol{b > \omega_0}$ وي

په داسې حالت کې، استهلاک اوږد وي. چې ${\omega_0}^2 < b^2$ يعني $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}} < \frac{1}{4\mathrm{I}^2}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)^2$

$\therefore$ $\sqrt{b^2 - {\omega_0}^2}$ حقيقي، مثبت او له b څخه کوچنی دی. د (۲.۲۰.۴) معادلې په ښي لوري کې د دواړو نمايي حدونو ضريبونه حقيقي دي. په دواړو نمايي حدونو کې طاقتونه منفي دي. ځکه نو، د ګلوانومتر تاويدنه θ له وخت سره د علامې له بدلولو پرته کميږي. د بوبين حرکت غيرمنظم يا غير اهتزازي دی. په دې حالت کې ګلوانومتر بې نوسان يا زيات استهلاکي بلل کيږي.

ځکه نو، ددې لپاره چې ګلوانومتر بې نوسان وي، $b = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{2\mathrm{I}}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)$ بايد لوی او ددې لپاره

(i) د بوبين د عطالت مومنټ I بايد کوچنی وي.

(ii) د ميخانيکي استهلاک د استهلاک ثابت r بايد زيات وي

(iii) د الکترومقناطیسي استهلاک ثابت K باید لوی او ددې لپاره، څرخیدونکي جریانونه باید زیات وي.

دا بوبین د هادي موادو په یو چوکاټ باندې تاو شوی دی.

(iv) د بوبین مقاومت R باید کوچنی وي.

(ب) کله چې $\omega_0 = b$ وي

په دې حالت کې، $\frac{1}{4\mathrm{I}^2}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)^2 > \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}$ او لکه چې د ۱۶.۴ برخې په (II) ځانګړي حالت کې توضیح شو، د بوبین حرکت بحراني استهلاکي دی. دا نه بې نوسان او اهتزازي دی. بوبین ژر د سکون موقعیت ته راځي.

(ج) کله چې $\omega_0 > b$ وي

په دې حالت کې، $\frac{1}{4\mathrm{I}^2}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)^2 > \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}}$. د بوبین تاویدنه له وخت سره د $\theta = \theta_0 e^{-bt}\sin(\omega t + \Phi)$ رابطې مطابق تغیر کوي، داسې چې $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - b^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{I}} - \frac{1}{4\mathrm{I}^2}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)}$. څکه نو، بوبین په $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ فریکونسي د هغه د $\theta = 0$ تعادل موقعیت شاوخوا اهتزاز کوي. د e^{-bt} حد د شتون له امله د دغو اهتزازاتو امپلیتیود له وخت سره په نمایي توګه کمیږي. هغه ګلوانومتر چې د چارج د اندازه کولو لپاره استعمالیږي بالیستیک ګلوانومتر بلل کیږي او د بوبین د اهتزاز د وخت پریود یې باید لوی وي، ددې لپاره چې ټول چارج (چې د څه وخت لپاره جریان لري) د بوبین د زیات تاویدو څخه مخکي له هغه څخه تیر شي. ددې لپاره $b = \frac{1}{2\mathrm{I}}\left(r + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}\right)$ باید تر ممکنه حده کوچنی وي. دا شرط د بې نوسان ګلوانومتر څخه مخالف دی. له دې ځایه، د بالیستیک ګلوانومتر د جوړولو لپاره، مونږ باید ولرو

(i) د بوبین د څوړندیدو د محور شاوخوا د اهتزازاتو لوی عطالت مومنټ I.

(ii) د میخانیکي استهلاک کوچنی استهلاکي ثابت r

(iii) د الکترومقناطیسي استهلاک ثابت K کوچنی قیمت او ددې لپاره، بوبین د نې، ابونیټ او داسې نور په څیر غیر هادي موادو په یوه چوکاټ باندې تاویږي.

(iv) د ګلوانومتر د بوبین مقاومت R باید زیات وي.

دا هم باید په پام کې ونیسو چې په بالیستیک ګلوانومتر کې د استهلاک له کمیدو څخه برعلاوه د لمپ په پیمانه د لومړۍ اچووني لیدل شوی قیمت او د پیماني ترتیب د استهلاک په نه شتون کې د هغې له حقیقي قیمت څخه کم دی. د لومړۍ اچووني په لیدل شوي قیمت باید یوه سمونه ترسره شي.

۸.۴ مثال. وښایاست چې د یوه استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د انرژي د له منځه تلو اندازه د مقاومو قواو خلاف د ترسره شوي کار له اندازې سره مساوي ده.

حل.

د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{S}x^2$$

له دې ځایه،

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{1}{2} m \times 2 \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\mathrm{S} \times 2x \frac{dx}{dt}$$

یا

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\mathrm{S}x\right)\frac{dx}{dt} \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

خو د یوه استهلاکي میخانیکي اهتزاز ورکوونکي لپاره:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \mathrm{S}x = 0$$

$\therefore$ استهلاکي قوه،

$$\mathrm{F}_d = \frac{rdx}{dt} = -\left[m \frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{S}x\right]$$

په (I) کې له وضع کولو څخه، لاس ته راوړو چې:

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = -\mathrm{F}_d \frac{dx}{dt} = -\frac{\mathrm{F}_d dx}{dt} = -\frac{d\mathrm{W}}{dt}$$

داسې چې $\frac{d\mathrm{W}}{dt}$ د مقاومو قواو خلاف د ترسره شوي کار اندازه ده.

$\therefore$ د انرژي د خپریدنې اندازه $=$ د مقاومو قواو خلاف ترسره شوي کار اندازه

۹.۴ مثال. وښایاست چې Q-ضریب هغه وخت چې د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي انرژي د هغې د لومړني قیمت $1/e$ ته کمیږي د فاز تغیر وړاندې کوي.

حل. د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{-2bt}$$

فرض کړئ چې په t وخت کې انرژي $\frac{\mathrm{U}_0}{e}$ ته کمیږي، نو:

$$\frac{\mathrm{U}_0}{e} = \mathrm{U}_0 e^{-2bt'}$$

یا

$$e = e^{2bt'}$$

یا

$$t' = \frac{1}{2b}$$

چې

$$b = \frac{r}{2m}$$

دا راکوي چې

$$t' = \frac{m}{r}$$

اوس د t' وخت په جریان کې د فاز تغیر عبارت دی له

$$d\Phi = \omega_0' t'$$

ځکه نو

$$d\Phi = \frac{\omega_0' m}{r} = \mathrm{Q}$$

له دې ځایه،Q د فاز تغیر راکوي چې د اهتزاز ورکوونکي د انرژي د هغې د لومړني قیمت $\frac{1}{e}$ په اندازه کمیدنې ته لاربښوونه کوي.

۱۰.۴ مثال. وښایاست چې په هره دوره کې د انرژي د له منځه تلو او په استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د ذخیره شوې انرژي نسبت $\frac{2\pi}{\mathrm{Q}}$ دی، داسې چې Q د ځرنګوالي ضریب دی.

حل. د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي انرژي عبارت ده له:

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{-2bt}$$

د انرژي د له منځه تلو اندازه عبارت ده له

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = -2b\mathrm{U}_0 e^{-2bt}$$

په یوه پریود کې د انرژي له منځه تلل داسې لاس ته راځي:

د $dt = \mathrm{T}'$ په وضع کولو، له دې ځایه،

$$[d\mathrm{U}]_{\mathrm{T}'} = -2b\mathrm{U}_0 e^{-2bt}\mathrm{T}'$$

اوس $\frac{U}{[dU]_{T'}} = \frac{U_0 e^{-2bt}}{-2bU_0 e^{-2bt}T'} = -\frac{1}{2bT'}$

منفي علامه ښيي چې انرژي کميږي.

اوس $\omega_0' = \frac{2\pi}{T'}$ او $b = \frac{r}{2m}$ ، له دې ځايه،

$$\frac{U}{[dU]_{T'}} = \frac{1}{2\times\frac{r}{2m}\times\frac{2m}{\omega_0'}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0' m}{r} = \frac{Q}{2\pi}$$

يا $\frac{[dU]_{T'}}{U} = \frac{2\pi}{Q}$

۱۱.۴ مثال. وښاياست چې په غير استهلاکي هارمونيکي اهتزاز ورکوونکي باندې د استهلاکي هارمونيکي اهتزاز ورکوونکي د ريزونانس فريکونسي کسري تغير≈ $1/8\ Q^2$ دی، داسې چې Q د ځرنګوالي ضريب دی.

حل. د غير استهلاکي هارمونيکي اهتزاز ورکوونکي طبيعي فريکونسي عبارت دی له:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m}}$$

د استهلاکي هارمونيکي اهتزاز ورکوونکي طبيعي فريکونسي عبارت ده له:

$$\omega_0' = \left[\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}} == \left[{\omega_0}^2 - \frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}} == \omega_0\left[1 - \frac{r^2}{4{\omega_0}^2 m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

خو $\frac{m\omega_0}{r} = Q$

$\therefore$ $\omega_0' = \omega_0\left[1 - \frac{1}{4Q^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

يا $\omega_0' \cong \omega_0\left[1 - \frac{1}{8Q^2}\right]$

يا $\omega_0 - \omega_0' \cong \omega_0\left[\frac{1}{8Q^2}\right]$

يا $\frac{\omega_0 - \omega_0'}{\omega_0} \cong \frac{1}{8Q^2}$

دا په اهتزاز ورکوونکي کې د استهلاک له امله کسري تغير ورکوي.

۱۲.۴ مثال. د $0 \cdot 2H$ ، $1\,\mu F$ او 800Ω قیمتونو لرونکي یو انډکټر، خازن او مقاومت په سلسله کې تړل شوي دي. وښایاست چې سرکټ اهتزازي دی او د اهتزازاتو فریکونسي یې محاسبه کړئ.

حل. $L = 0 \cdot 2H$ ، $C = 1\,\mu F$ ، $R = 800\Omega$ راکړل شوي دي.

$\therefore$ $$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0 \cdot 2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^{6}$$

او $$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{64 \times 10^{4}}{4 \times 4 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^{6}$$

$\therefore$ $$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

له دې ځایه سرکټ اهتزازي دی.

د اهتزازاتو فریکونسي یې عبارت ده له $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{10^3}{2 \times 3 \cdot 142}\,\text{Hz} = 159\text{Hz}$$

څو ځوابه پوښتنې

۱. په ساده هارمونيکي حرکت کې، د لاندينيو څخه د کوم يوه تغير د ساين منحني نه ده؟

(الف) ځای بدلون (ب) سرعت

(ج) تعجيل (د) امپليتيود

۲. په دوو عمودو قطرونو باندې د متشابه دايروي حرکت د مرتسم ترمنځ اصغري فاز زاويه عبارت ده له

(الف) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$

(ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

۳. کوم يو له لاندينيو څخه د ساده هارمونيکي حرکت لپاره اړين نه دی؟

(الف) عطالت (ب) بيرته ګرځوونکې قوه

(ج) ارتجاعيت (د) جاذبه

۴. د ارامتيا وخت د هغه وخت په توګه تعريف شوی دی چې د هغه په جريان کې د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي امپليتيود

(الف) e ته پورته شي (ب) $\frac{1}{e}$ ته کم شي

(ج) e^2 ته پورته شي (د) $\frac{1}{e^2}$ ته کم شي

۵. د ساده هارمونيکي حرکت ترسره کوونکې ذرې حرکي انرژي هغه وخت اعظمي ده چې ځای بدلون يې مساوي وي له

(الف) امپليتيود (ب) $\frac{\text{امپليتيود}}{2}$

(ج) $\frac{\text{امپليتيود}}{4}$ (د) صفر

۶. د ساده هارمونيکي حرکت فريکونسي 100Hz ده د وخت پريود يې عبارت دی له

(الف) $0 \cdot 01\ s$ (ب) $100\ s$

(ج) $1\ s$ (د) $0 \cdot 1\ s$

ځوابونه

۱ (د) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ب) ۵ (د) ۶ (الف)

لنډ ځوابه پوښتنې

۱. پریودیک حرکت څه شی دی؟

ځواب. هغه حرکت چې د وخت د مساوي انټروالونو څخه وروسته تکراریږي پریودیک حرکت بلل کیږي.

۲. ایا ټول پریودیک حرکتونه ساده هارمونیکي حرکتونه دی؟ ایا معکوس یې سم دی؟ تشریح یې کړئ.

ځواب. نه. ټول پریودیک حرکتونه ساده هارمونیکي حرکتونه نه دي. د مثال په توګه، د لمر شاوخوا د ځمکې حرکت پریودیک دی، خو ساده هارمونیکي نه دی. معکوس یې سم دی. دا سې چې ټول ساده هارمونیکي حرکتونه پریودیک دي، ځکه، ساده هارمونیکي حرکت په یوه ځانګړې فریکونسی او له دې ځایه په ثابت وخت پریود کې رامنځ ته کیږي.

۳. وښایاست چې $x = \mathrm{A}\cos(\omega t + \Phi)$ د $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ وخت پریود لرونکی پریودیک حرکت دی.

ځواب. راکړل شوي دي چې

$$x = \mathrm{A}\cos(\omega t + \Phi) = \mathrm{A}\cos(\omega t + 2\pi + \Phi)$$

یا

$$x = \mathrm{A}\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \Phi\right]$$

ښکاره ده چې x په t او $t + \frac{2\pi}{\omega}$ دواړو کې عین شی دی. له دې ځایه، د وخت پریود $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ دی.

۴. د یوه اهتزاز ورکوونکي په طبیعي فریکونسي د استهلاک اغیز څه شی دی؟

ځواب. د استهلاک له امله د اهتزازاتو فریکونسي کمیږي.

$$f = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{m}} \quad \text{او} \quad f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

$$\therefore \quad f' < f$$

۵. وښاياست چې د استهلاکي حد b واحد s^{-1} دی.

ځواب. $\mathrm{F}_d = \frac{rdx}{dt}$

$$[r] = \frac{[\mathrm{F}_d]}{[dx/dt]} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{M^0LT^{-1}}} = \mathrm{MT^{-1}}$$

او $[b] = \left(\frac{r}{2m}\right) = \frac{\mathrm{MT^{-1}}}{\mathrm{M}} = \mathrm{T^{-1}}$

د b واحد s^{-1} دی.

۶. د سختي د ثابت د قيمت تغير توضيح کړئ، کله چې د $\mathrm{S_1}$ او $\mathrm{S_2}$ سختي ثوابتو لرونکي دوه فنرونه په (i) مسلسل (ii) موازي توګه تړل شوي وي.

ځواب. په مسلسله تړنه کې، د فنرونو ځای بدلون عين شی وي، خو بيرته ګرځونکي قوې مختلفې وي. په بل عبارت:

$$\mathrm{F_1} = -\mathrm{S_1}x \text{ ، } \mathrm{F_2} = -\mathrm{S_2}x$$

مجموعي قوه $\mathrm{F_S} = \mathrm{F_1} + \mathrm{F_2} = -(\mathrm{S_1}x + \mathrm{S_2}x) = -(\mathrm{S_1} + \mathrm{S_2})x$

يا $\mathrm{F_S} = -\mathrm{S_s}x = -(\mathrm{S_1} + \mathrm{S_2})x$

$\therefore$ $\mathrm{S_s} = \mathrm{S_1} + \mathrm{S_2}$

(ii) په موازي تړنه کې، قوه عين شی دی خو د فنرونو ځای بدلون توپير لري:

$$\mathrm{F} = -\mathrm{S_1}x \text{ ، } \mathrm{F} = -\mathrm{S_2}x \text{ ، } \mathrm{F_p} = \mathrm{F} = -\mathrm{S_p}x$$

خو $x = x_1 + x_2$

يا $\frac{1}{\mathrm{S_p}} = \frac{1}{\mathrm{S_1}} + \frac{1}{\mathrm{S_2}}$

۷. د باليستيک ګلوانومتر په حالت کې، بوبين په غيرفلزي چوکاټ تاو شوی دی. نظر ورکړئ.

ځواب. په بالستيک ګلوانومتر کې، مونږ ټيټ استهلاک ته اړتيا لرو، نو د غيرفلزي چوکاټ په استعمالولو سره، الکترومقناطيسي استهلاک کميږي.

۸. د متحرک بوبين ګلوانومتر بوبين، اميټر او ولټ متر د مسو يا المونيمو په يو فلزي چوکاټ تاو دي. ولې؟

ځواب. ګلوانومتر، اميټر او ولټ متر بايد بې نواسان (غير اهتزازي) وي. دا لوړ استهلاک ته اړتيا لري، چې د بوبين لپاره د فلزي چوکاټ د استعمالولو په واسطه لاس ته راتلی شي.

تمرين

۱. د مثالونو په واسطه د پريوديکي او اهتزازي حرکتونو ترمنځ توپير وکړئ.

۲. د پوتنسيالي څاه اړتيا او د اهتزازي حرکت د رامنځ ته کيدو لپاره د پايدار تعادل حالت توضيح کړئ.

۳. ساده هارمونيکي حرکت څه شی دی؟ ثبوت کړئ چې په پوتنسيالي څاه کې کوچني اهتزازات د ساده هارمونيکي حرکت حالت دی.

۴. د ساده هارمونيکي حرکت تفاضلي معادله لاس ته راوړئ. د نوموړې معادلې حل پيدا کړئ.

۵. د يوې ساده هارمونيکي حرکت سرته رسونکي ذرې د ځای بدلون افادې $x = a\sin(\omega t + \Phi)$ د لاس ته راوړلو لپاره نوموړې تفاضلي معادله حل کړئ. د وخت پريود او فريکونسي يې پيدا کړئ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

۶. په ساده هارمونيکی حرکت کې د ذرې د ځای بدلون، سرعت او تعجيل ترمنځ د فاز اړيکې توضيح کړئ.

۷. د هارمونيک اهتزاز ورکوونکي (i) پوتنسيالي انرژي (ii) حرکي انرژي لپاره افاده لاس ته راوړئ. وښاياست چې مجموعي انرژي يې ثابته ده.

۸. وښاياست چې د ساده شاقول حرکت ساده هارمونيکي حرکت دی او د وخت پريود افاده يې پيدا کړئ.

۹. مرکب شاقول څه شی دی؟ د وخت پريود افاده يې پيدا کړئ.

۱۰. ثبوت کړئ چې په مرکب شاقول کې د ځوړنديدو او اهتزازاتو مرکزونه د بدليدو وړ دي.

۱۱. ټارسيونال شاقول څه شی دی؟ د ساده هارمونيکي حرکت د وخت پريود افاده يې لاس ته راوړئ.

۱۲. بيفيلار ځوړندونکی څه شی دی؟ وښاياست چې حرکت يې ساده هارمونيک حرکت دی. د فريکونسي افاده يې لاس ته راوړئ.

۱۳. هیلم هولتز ریزونیټر څه شی دی؟ د هغه نوټ د فریکونسی افاده لاس ته راوړئ چې په هغه سره نوموړی ریزونانس کوي.

۱۴. هیلم هولتز ریزونیټر څه شی دی؟ د ساده هارمونیکي حرکت تفاضلي معادله یې لاس ته راوړئ. د وخت پریود افاده یې پیدا کړئ.

۱۵. په LC سرکټ کې هغه وخت چې په بشپړه توګه چارج شوي خازن ته اجازه ورکړل شي چې د انډکټر په واسطه بې چارجه شي د رامنځ ته شویو اهتزازاتو فریکونسي افاده لاس ته راوړئ.

۱۶. د ازاد ځوړند مقناطیس کله چې د هغه د تعادل له موقعیت څخه ورو بې ځایه شي د ساده هارمونیکي حرکت د وخت پریود رابطه لاس ته راوړئ.

۱۷. د یوه مقناطیس د اهتزاز د فریکونسي افاده لاس ته راوړئ.

۱۸. وښایاست چې په یوه خیالي فنر پورې نښلول شوې دوه نقطوي کتلې د یوې ځانګړې ذرې په توګه اهتزاز کوي او له دې ځایه د اهتزازاتو د فریکونسي افاده یې پیدا کړئ.

۱۹. د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د حرکت معادله لاس ته راوړئ. حل یې پیدا کړئ او ځانګړي حالتونه یې توضیح کړئ.

۲۰. د استهلاکي اهتزاز کوونکي د حرکت معادله لاس ته راوړئ او حل یې پیدا کړئ. د استهلاک مختلف حالتونه په توضیحي توګه تشریح کړئ.

۲۱. په استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د طاقت خپریدل تشریح کړئ.

۲۲. ثبوت کړئ چې په استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د طاقت خپریدل د استهلاک له ثابت او په ورکړل شوي وخت کې د اهتزاز ورکوونکي له انرژي سره متناسب دي.

۲۳. د څرنګوالي ضریب څه شی دی؟ په استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د څرنګوالي ضریب توضیح کړئ.

۲۴. د انډکټر او مقاومت په واسطه د خازن بې چارجه کیدنه توضیح کړئ. د بې چارجه کیدني د اهتزازي کیدو شرط څه شی دی؟

عددي مسائل

۱. د انرژي د تحفظ په استعمالولو، وښاياست چې د شاقول زاويوي چټکتيا عبارت ده له

$$\omega = \left[\frac{2}{ml^2}\{\mathrm{E} - mgl(1-\cos\theta)\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

داسې چې E مجموعي انرژي، m او l د شاقول کتله او اوږدوالی، θ يې له عمود څخه زاويوي ځای بدلون دی.

۲. $25cm$ شعاع او $2.5kg$ کتله لرونکی ډسک د ټارسيونال شاقول د جوړولو لپاره له يوه سيم څخه ځوړند دی. د سيم ټارسيونال ثابت $5\times10^{-3}\mathrm{Nm\ rad^{-1}}$. د اهتزاز د وخت پريود يې محاسبه کړئ.

[ځواب. $24.8\ s$]

۳. په يوه مسلسل LCR سرکټ کې، $\mathrm{L} = 10\mathrm{mH}$ ، $\mathrm{C} = 1\mu\mathrm{F}$ او $\mathrm{R} = 0.1\Omega$. د اهتزاز فريکونسي يې محاسبه کړئ. څومره وخت نيسي چې د چارج امپليتيود يې د لومړني قيمت نيمايي ته ولوېږي. همدارنګه د ځرنګوالي ضريب يې محاسبه کړئ.

[ځواب. $1\cdot59\mathrm{KHz}$ ، $0\cdot14s$ ، 1000]

۴. يو LC سرکټ په $20\mathrm{Hz}$ فريکونسي سره اهتزاز کوي. په سرکټ کې ظرفيت $5\mu\mathrm{F}$ دی. د القا کيدنې قيمت پيدا کړئ.

[ځواب. $12\cdot67\mathrm{H}$]

۵. $3kg$ او $7kg$ دوه کتلې د يوه فنر په واسطه چې د قوې ثابت يې $100\mathrm{Nm^{-1}}$ دی نښلول شوي دي. او سيستم په يوه هواره افقي سطحه باندې ساکن دی. د دواړو جسمونو د اهتزازاتو فريکونسي پيدا کړئ کله چې کتلې ورو ليرې او خوشې شي. همدارنګه د هغوی د حرکي انرژيو نسبت پيدا کړئ.

[ځواب. $1\cdot1\mathrm{Hz}$ ، $7:3$]

څلورمه برخه

اهتزازات ـ ۲

چليدونکي هارمونيکي اهتزازات، مؤقتي او دايمي حالت کېږه وړه، د تفاضلي معادلې حل، په دايمي حالت کې د ميخانيکي اجباري اهتزاز ورکوونکي سرعت، د چلونې قوې له فريکونسي سره د ځای بدلون کېږه وړه، د چلونې قوې فريکونسي په مقابل کې د سرعت کېږه وړه، د طاقت جذب او د طاقت خپريدنه، د ريزونانس تيره والی، د څرنګوالي ضريب.

دوه جوړه يي اهتزاز ورکوونکي، عادي مختصات او موډونه، د ازادۍ درجې، د انرژي انتقال،

N -جوړه يي اهتزاز ورکوونکي

پنځم څپرکی

چليدونکي او جوړه يي اهتزاز ورکوونکي

۱.۵ مقدمه

په څلورم څپرکي کې، مونږ د غير استهلاکي او همدارنګه د استهلاکي هارمونيکي اهتزاز ورکوونکو کړه وړه وڅيړل. کله چې داسې يوه اهتزاز ورکوونکي ته لومړنۍ پارونه ورکړل شي او بيا خپل ځان ته خوشې شي، نومړی ازاد يا طبيعي اهتزازات ترسره کوي. د اهتزازاتو فريکونسي د اهتزاز ورکوونکي د طبيعي فريکونسي په توګه نومول کيږي، چې په غير استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د f_0 او په استهلاکي اهتزاز ورکوونکي کې د f_0' په واسطه ښودل کيدای شي. د غير استهلاکي هارمونيکي (ميخانيکي) اهتزاز ورکوونکي طبيعي فريکونسي f_0 د سيستم په عطالتي او ارتجاعي خواصو پورې اړه لري او د غير استهلاکي هارمونيکي برقي اهتزاز ورکوونکي د سرکټ په القا او ظرفيت پورې اړه لري. دغير استهلاکي اهتزازاتو امپليتيود څخه دا طمع کيږي چې د تل لپاره ثابت پاتې شي. دلته د طمع کليمه ډيره مهمه ده. ځکه، په عمل کې، غير استهلاکي اهتزاز ورکوونکی ستونځمن دی، آن تردې چې پيژندل يې ناممکن دي. هر عملي اهتزاز ورکوونکی د استهلاک لپاره کار کوي سره ددې، چې اندازه به يې کوچنۍ وي. د استهلاکي ميخانيکي اهتزاز ورکوونکي طبيعي فريکونسي f_0' د سيستم په عطالتي، ارتجاعي او استهلاکي خواصو پورې اړه لري او د استهلاکي برقي اهتزاز ورکوونکي د سرکټ په القا، ظرفيت او مقاومت پورې اړه لري. دا لاس ته راغلې چې f_0' هميشه له f_0 څخه کوچنی او که استهلاک زيات وي نو توپير يې زيات دی. د وخت په تيريدو سره د استهلاکي اهتزازاتو امپليتيود کميږي او په اخر کې اهتزازات پای مومي. په بل عبارت اهتزاز ورکوونکی په پرله پسې توګه انرژي له لاسه ورکوي. که هيله ولرو چې د استهلاکي اهتزازاتو امپليتيود دې پاتې شي، مونږ بايد د اهتزاز ورکوونکي په واسطه د انرژي له لاسه ورکوونه " د ښه والي" له پاره ترتيب کړو. په بل عبارت، د انرژي داسې يوه بهرنۍ منبع بايد شتون ولري، چې په پرله پسې توګه اهتزاز ورکوونکي ته انرژي ورسوي. په بله مانا، اهتزاز ورکوونکی بايد دې ته اړ شي چې د انرژي د بهرنۍ منبع توازن (tune) ته اهتزاز وکړي. دغسې اهتزاز ورکوونکی اجباري اهتزاز ورکوونکی بلل کيږي.
په دې څپرکي کې، مونږ د يوې بهرنۍ منبع په واسطه، چې اهتزاز ورکوونکي ته متغيره پارونه برابرولی شي چليدونکي اجباري اهتزاز ورکوونکي کړه وړه څيړو. د مثال په توګه، په ريزونانسي تيوب کې د هوا پايه د صوتي دوه شاخې د اغيز لاندې اجباري اهتزازات سرته رسوي. د سونومتر تار هم د صوتي دوه شاخې په واسطه د برابرې شوې پريوديکې پارونې له امله اهتزاز کوي. د لوډ سپيکر ديافراګم د امپليفاير څخه په لاس ته راغلو اجباري اهتزازاتو کې ځای په ځای شوی دی. مونږ له زياتو داسې سيستمونو سره مخامخ کيږو. دلته، بې له شکه لکه په مخکې څپرکي کې، د عموميت د له لاسه ورکولو څخه پرته، مونږ به اصلاً د ميخانيکي اهتزاز ورکوونکي د نمونه

يي مثال په توګه له هغې کتلې سره چې له فنر سره نښتې ده او د برقي اهتزاز ورکوونکي د مثال په توګه د مسلسل مقاومت القا (RCL) سرکټ سره سر او کار لرو.

<u>۲.۵ چليدونکی (يا اجباري) اهتزاز ورکوونکی</u>

اهتزاز ورکوونکی چې د کوم بهرني عامل په واسطه ورته پارونه برابريږي اجباري (يا چليدونکی) اهتزاز ورکوونکی بلل کيږي. دا له دوو برخو جوړ دی:

۱ بهرنی چلوني عامل.

۲ چليدونکی سيستم

په عمومي توګه چليدونکی سيستم يو استهلاکي اهتزاز ورکوونکی دی. د چلوني عامل، د ميخانيکي سيستم په حالت کې د ميخانيکي قوې منبع ده او د برقي سيستم په حالت کې د برقي محرکې قوې يا $e.m.f$ منبع ده. د ځانګړې علاقې حالات هغه دي چې په هغوی کې د چلوني قوه يا $e.m.f$ په خپله د وخت يوه په هارمونيکي توګه متغيره تابع وي.

د چلوني سيستم (بهرنی عامل) او چليدونکی سيستم (اهتزاز ورکوونکی) يو له بل سره په داسې طريقه جوړه دي چې له مخکې څخه وروسته ته د انرژي پرله پسې رسيدنه رامنځ ته کيږي خو د اهتزاز ورکوونکي څخه بهرني عامل ته د انرژي د توجه وړ فيډبک څخه پرته. دا د لاندې دوو تخنيکونو څخه د هريوه په واسطه ممکن کيږي:

۱ د چلوني او چليدونکي سيستم ترمنځ د جوړه کوونې د يوه ډېر زيات کمزوري ترتيب په واسطه.

۲ د انرژي ديوه ډېر زيات لوی مخزن لرونکي چلوني سيستم د لرلو په واسطه. نو په مخزن کې د ذخيره شوې انرژي سره په پرتلې د چلوني له سيستم څخه دانرژي فيډبک، که هرڅه وي، د صرف نظر وړ دی.

نوټ: د چليدونکي اهتزاز ورکوونکي د افادې د لاس ته راوړنې څخه مخکې، اجازه راکړئ د مختلطو اعدادو په هکله بحث وکړو. ځکه د چليدونکي اهتزاز ورکوونکي لپاره د استعماليدونکې کړنې طرز د مختلطو اعدادو د دوران پر بنا دی.

۳.۵ د مختلطو اعدادو لیکنه

د یوه خیالي عدد او یوه حقیقي عدد د جمع (یا تفریق) په واسطه لاس ته راغلی عدد یو مختلط عدد بلل کیږي.

که A او[5] $i\mathrm{B}$ حقیقي او موهومي اعداد وي، نو $\vec{\mathrm{Z}}$ مختلط عدد به عبارت وي له

$$\vec{\mathrm{Z}} = \mathrm{A} + i\mathrm{B} \qquad \text{... (۱.۳.۵)}$$

داسې چې A حقیقي برخه او B په $i = \sqrt{-1}$ سره خیالي برخه بلل کیږي.

د $\vec{\mathrm{Z}}$ مختلط مزدوج عبارت دی له

$$\vec{\mathrm{Z}}^{*} = \mathrm{A} - i\mathrm{B} \qquad \text{... (۲.۳.۵)}$$

د $\vec{\mathrm{Z}}$ مطلقه عبارت دی له

$$\mathrm{Z} = |\vec{\mathrm{Z}}| = \sqrt{\vec{\mathrm{Z}}\ \vec{\mathrm{Z}}^{*}}$$

$$= \sqrt{(\mathrm{A} + i\mathrm{B})(\mathrm{A} - i\mathrm{B})}$$

یا

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$$

د مختلط عدد او د هغه د برخو هندسي ښودنه ارګاند دیاګرام بلل کیږي.

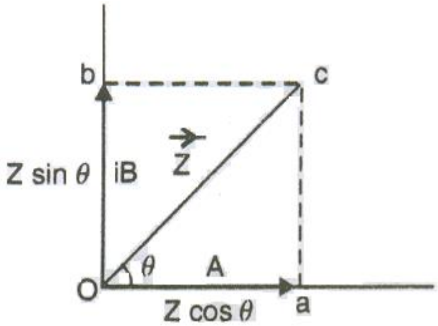
په قطبي شکل

څرنګه چې

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

[5] $i = \sqrt{-1}$

نو $\vec{Z} = A + iB$ مختلط عدد په لاندې توګه توضیح کیدای شي



۱.۳.۵ شکل

$$\vec{Z} = \vec{Z}\cos\theta + i\,Z\sin\theta$$ [۱.۳.۵ شکل وګورئ]

یا
$$\vec{Z} = Z(\cos\theta + i\sin\theta)$$

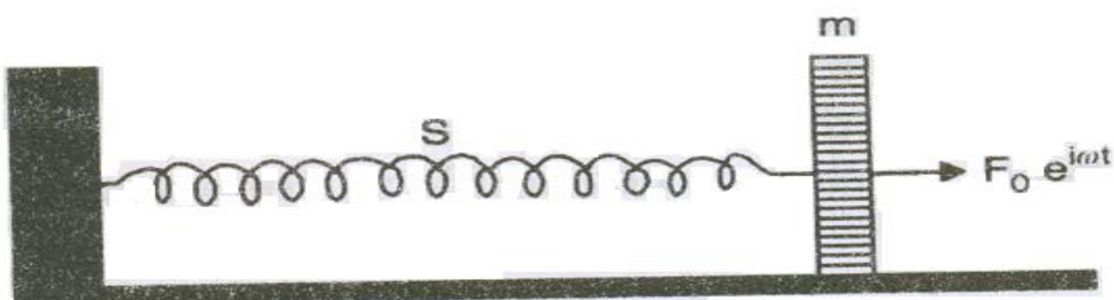
یا
$$\vec{Z} = Ze^{i\theta}$$

۴.۵ د چلیدونکي (یا اجباري) اهتزاز ورکوونکي معادله

فرض کړئ، یو بهرنی عامل چې میخانیکي اهتزاز ورکوونکي ته د قوې په شکل په هارمونیکي توګه د متغیرې پارونې او برقي اهتزاز ورکوونکي ته د برقي محرکي قوې د ورکولو وړتیا لري، په یوه استهلاکي هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي باندې په پرله پسې توګه عمل کوي. نو، د میخانیکي او برقي اهتزاز ورکوونکو لپاره د اهتزازاتو معادله په لاندې توګه لیکل کیدای شي.

میخانیکي اهتزاز ورکوونکی

۱.۴.۵ شکل د S سختي ثابت لرونکي فنر په یوې څوکې پورې نښلول شوې m کتله ښیي. د فنر یوه څوکه په یوې محکمې پایې پورې نښلول شوې ده. په سیستم باندې د چلونې قوه $\vec{F} = F_0 e^{i\omega t}$ په پام کې ونیسئ داسې چې F_0 د چلونې قوې اعظمي قیمت او ω د چلونې سیستم په واسطه د تطبیق شوې قوې د اهتزازي تغیر فریکونسي ده.



۱.۴.۵ شکل

د چلونې سیستم په واسطه تطبیق شوې قوه د $\vec{F} = F_0\cos\omega t + i\,F_0\sin\omega t$ په توګه لیکل کیدای شي. په بل عبارت، حقیقي برخه د $F_0\cos\omega t$ قوې سره برابره او موهومي برخه د $F_0\sin\omega t$ قوې سره برابره ده. په هره لحظه کې، سیستم به د لاندې قواو د اغیز لاندې عمل کوي:

(i) بیرته ګرځونکې قوه= $-\mathrm{S}\vec{x}$ ، داسې چې $\vec{x}$ د تعادل له موقعیت څخه د کتلې ځای بدلون دی. مونږ ځای بدلون د مختلط کمیت په توګه لیکو. حقیقي برخه یې د بهرنی قوې $\mathrm{F}_0 \cos \omega t$ سره برابره او موهومي برخه یې له $\mathrm{F}_0 \sin \omega t$ سره برابره ده.

(ii) استهلاکي قوه= $-r\frac{d\vec{x}}{dt}$ داسې چې r استهلاکي ثابت دی.

(iii) چلونې قوه، $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_0 e^{i\omega t}$

په لومړیو دوو افادو کې منفي علامې په دې دلالت کوي چې دواړه بیرته ګرځوني قوه او همدارنګه استهلاکي قوې د ځای بدلون مخالفې دي. په بل عبارت، دوی ورو کوونکې قوې دي. د نیوټن د حرکت د دویم قانون له مخې، لیکلای شو چې

$$m\frac{\vec{d}^2x}{dt^2} = -\mathrm{S}\vec{x} - r\frac{d\vec{x}}{dt} + \mathrm{F}_0 e^{i\omega t}$$

داسې چې $\frac{\vec{d}^2x}{dt^2}$ په فنر پورې د نښلول شوې کتلې تعجیل دی. په بیا ترتیبونې سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$m\frac{\vec{d}^2x}{dt^2} + r\frac{d\vec{x}}{dt} + \mathrm{S}\vec{x} = \mathrm{F}_0 e^{i\omega t} \qquad \ldots (۱.۴.۵)$$

دا د چلیدونکي میخانیکي اهتزاز ورکوونکي د حرکت معادله ده.

<u>۵.۵ د چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي مؤقتي او دایمي ځواب</u>

فرض کړئ چې د $f_0 = \frac{\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}{2\pi}$ طبیعي فریکونسي لرونکي میخانیکي اهتزاز ورکوونکي باندې د f فریکونسي لرونکي چلونې قوې (په خپله) اهتزاز ورکوونکي عمل کړی. په $t = 0$ وخت کې به اهتزاز ورکوونکی د $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_0 e^{i\omega t}$ قوې د اغیز لاندې راشي. اهتزاز ورکوونکی، د هغه د تعادل له موقعیت څخه په بې ځایه کیدو، په خپلې طبیعي فریکونسي f_0' سره به د اهتزاز کولو میلان ولري. سره ددې، د چلونې قوه به کوښښ کوي چې په اهتزاز کوونکي باندې خپله فریکونسي تحمیل کړي. ځکه نو، اصلي حرکت به د دوو ډولونو اهتزازاتو د ترکیب کوم ډول وي. بې له شکه، له پیل کیدو سره، د سیستم طبیعي اهتزازات به غالب وي. سره ددې، د وخت په تیریدو، اهتزاز ورکوونکی به د چلونې قوې د زیاتیدونکي اغیز لاندې راځي او په اخر کې به د چلونې سیستم په فریکونسي اهتزاز پیل کړي. د اهتزاز ورکوونکي طبیعي اهتزازات یواځې په پیل کې ادامه مومي او د وخت ددې لنډ انټروال په جریان کې د اهتزاز ورکوونکي کړه وړه مؤقتي بلل کېږي. د اهتزاز ورکوونکي کړه وړه، د طبیعي اهتزازاتو له ختمیدو وروسته، دایمي بلل کېږي. دا تر هغې ادامه مومي ترڅو چې چلونې سیستم د اهتزاز ورکوونکي د پارونې لپاره ادامه لري. د

وخت انټروال چې په هغه کې مؤقتي کړه وړه ادامه لري د استهلاک په اندازې پورې اړه لري. د استهلاک په زیاتیدو، د وخت انټروال چې په هغه کې مؤقتي کړه وړه ادامه لري کمیږي.

د مؤقتي کړو وړو په جریان کې فزیکي پدیدې په لاندې توګه تشریح کیږي.

فرض کړئ چې په $t = 0$ کې اهتزاز ورکوونکی د تعادل په موقعیت کې دی. کله چې په هارمونیکي توګه تغیر کونکې بهرنۍ قوه په هغه باندې عمل پیل کړي، بهرنۍ قوه د ځای بدلون د رامنځ ته کولو میلان لري او ورو کونکې قوې د ځای بدلون مخالفت پیل کوي. د دواړو قواو متقابل عمل اهتزاز ورکوونکی عمل ته برابروي، چې په خپله طبیعي فریکونسي $f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi}$ اهتزاز کوونه غوره بولي. سره ددې، بهرنۍ قوه ژر اهتزاز ورکوونکی خپل اغیز ته راتیتوي او اهتزاز ورکوونکی د بهرنۍ قوې په فریکونسي $f = \frac{\omega}{2\pi}$ د اهتزازاتو په سرته رسوني، د بهرنۍ قوې پیروي پیل کوي. د اهتزاز ورکوونکي د ارامتیا له وخت څخه وروسته د طبیعي اهتزازاتو غلبه په بشپړه توګه کمزورې کیږي.

۶.۵ د اجباري میخانیکی اهتزاز ورکوونکی د معادلې حل

د اجباري میخانیکي اهتزاز ورکوونکي معادله عبارت ده له

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + r\frac{d\vec{x}}{dt} + S\vec{x} = F_0 e^{i\omega t} \qquad \dots (۱.۶.۵)$$

چلونکې قوې $\vec{F} = F_0 e^{i\omega t}$ ته به د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي ځواب له لاندې دوو برخو جوړ وي.

۱ مؤقتي کړه وړه.

۲ دایمي کړه وړه.

مؤقتي کړه وړه.

مؤقتي کړه وړه په پیل کې یواځې د وخت په یوه کوچني انټروال کې ادامه لري. د دغه وخت په جریان کې، د سیستم طبیعي فریکونسي به غالبه او سیستم به داسې کړه وړه ترسره کوي لکه بهرنۍ قوه چې شتون نه لري. نو، د اهتزاز ورکوونکي ځای بدلون د لاندې معادلې له حل څخه عبارت دی:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + Sx = 0$$

دا په پنځم څپرکي کې مخکې له مخکې تشریح شوي دي، چې د پورتنی معادلې حل عبارت دی له:

چې په نمايي شکل په لاندې ډول ليکل کيدای $x = \mathrm{A}_0 e^{-rt/2m}\cos\left[\left(\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}} t - \phi\right]$ شي:

$$\vec{x} = \mathrm{A}_0 e^{-rt/2m} e^{i\left[\left(\mathrm{S}/m - r^2/4m^2\right)^{\frac{1}{2}} t - \phi\right]}$$

د $\vec{x}$ حقيقي برخه له اصلي حل څخه عبارت دی. دلته x له وخت سره په نمايي توګه کميږي. دا د سپک استهلاکي اهتزاز ورکوونکي حالت دی چې په هغه کې $\frac{\mathrm{S}}{m} > \frac{r^2}{4m^2}$، د استهلاکي اهتزازاتو فريکونسي عبارت ده له:

$$f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

دايمي کړه وړه.

د استهلاک د اندازې اړوند، مؤقتي اهتزازات له منځه ځي او بهرنۍ چلونې قوه د اهتزاز ورکوونکي په کړو وړو غلبه مومي. په دې حالت کې ځای بدلون د (۱.۶.۵) معادلې حل دی. فرض کړئ چې حل عبارت دی له:

$$\vec{x} = \vec{\mathrm{A}} e^{i\omega t} \qquad \ldots \text{(I)}$$

دلته x داسې مختلط کميت دی چې د $\mathrm{F}_0 \cos \omega t$ بهرنۍ قوې سره برابره حقيقي برخه او د $\mathrm{F}_0 \sin \omega t$ بهرنۍ قوې سره برابره موهومي برخه لري. همدارنګه، A امپليتيود په خپله کيدای شي يو مختلط کميت وي. نظر وخت ته په دوه ځلې مشتق نيونې، لاس ته راوړو چې:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\mathrm{A}} i e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\mathrm{A}}\omega^2 e^{i\omega t}$$

په (۱.۶.۵) معادله کې په عوض کوونې، لاس ته راوړو چې

$$\left(-m\omega^2\vec{\mathrm{A}} + i\omega r\vec{\mathrm{A}} + \mathrm{S}\vec{\mathrm{A}}\right)e^{i\omega t} = \mathrm{F}_0 e^{i\omega t}$$

دا راکوي چې:

$$\vec{\mathrm{A}}\omega\left[ir + \left(\frac{\mathrm{S}}{\omega} - m\omega\right)\right] = \mathrm{F}_0$$

یا $\vec{A}=\frac{F_0}{\omega\left[ir+\left(\frac{S}{\omega}-m\omega\right)\right]}$

په بښي لوري کې د i – له ضرب او ويشلو څخه، لاس ته راوړو چې

$\vec{A}=\frac{-iF_0}{\omega\left[r+i\left(m\omega-\frac{S}{\omega}\right)\right]}$ ... (II)

د $r+i\left(m\omega-\frac{S}{\omega}\right)=\vec{Z}_m$ په ليکلو، مونږ (II) معادله په لاندې ډول بيا ليکلای شو:

$\vec{A}=\frac{-iF_0}{\omega\vec{Z}_m}$ ... (III)

دلته $\vec{Z}_m=r+i\left(\omega m-\frac{S}{\omega}\right)$ د اهتزاز ورکوونکي (مختلط) ميخانيکي ظاهري مقاومت ($Impedance$) بلل کيږي. دا په لاندې توګه دوه برخې لري:

(i) r – د اصطکاک يا لزوجيت له امله د اهتزازي حرکت مقاومت.

(ii) $X_m=\left(\omega m-\frac{S}{\omega}\right)$ –د عطالت او ارتجاعيت ترکيبي اغيزې له امله مقاومت.

له دې ځايه $m\omega$ عطالتي ځوابي مقاومت ($Reactance$) او $\frac{S}{\omega}$ ارتجاعي ځوابي مقاومت دی.

د ميخانيکي ظاهري مقاومت ځواب ويونکې برخه د تطبيق شوې قوې او ځای بدلون ترمنځ د فاز د توپير (د مثال په توګه ϕ) لامل ګرځي او په لاندې ډول ټاکل کيدای شي:

فرض کړئ چې $r=Z_m\cos\phi$

$m\omega-\frac{S}{\omega}=Z_m\sin\phi$

داسې چې Z_m د $\vec{Z}$ مطلقه ده.

څرنګه چې $\vec{Z}_m=r+i\left(\omega m-\frac{S}{\omega}\right)$

يا $\vec{Z}_m=Z_m\cos\phi+iZ_m\sin\phi$

$=Z_m(\cos\phi+i\sin\phi)$

يا $\vec{Z}_m=Z_m e^{i\phi}$ ... (۲.۶.۵)

په څرګنده توګه $Z_m = |\vec{Z}_m| = [{Z_m}^2\cos^2\phi + i{Z_m}^2\sin^2\phi]^{\frac{1}{2}}$

یا ... (۳.۶.۵) $$Z_m = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

او ... (۴.۶.۵) $$\tan\phi = \frac{Z_m \sin\phi}{Z_m \cos\phi} = \frac{\omega m - \frac{S}{\omega}}{r} = \frac{X_m}{r}$$

په (III) معادله کې د (۲.۶.۵) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

... (IV) $$\vec{A} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m e^{i\phi}}$$

په (I) معادله کې د (IV) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

... (۶.۶.۵) $$\vec{x} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m e^{i\phi}} e^{i\omega t} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t - \phi)}$$

یا $$\vec{x} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m}[\cos(\omega t - \phi) + i\sin(\omega t - \phi)]$$

یا ... (۷.۶.۵) $$\vec{x} = \frac{F_0}{\omega Z_m}[i\cos(\omega t - \phi) - \sin(\omega t - \phi)]$$

څرنګه چې $\vec{F} = F_0 e^{i\omega t} = F_0\cos\omega t + i\,F_0 \sin\omega t$

∴ که $F = F_0\cos\omega t$

نو $$x = \mathrm{Re}\,(\vec{x}) = \frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t - \phi)$$

یا ... (۸.۶.۵) $$x = \frac{F_0}{\omega Z_m}\cos\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

په عین توګه، که $F = F_0 \sin\omega t$

نو $$x = \mathrm{Im}\,(\vec{x}) = -\frac{F_0}{\omega Z_m}\cos(\omega t - \phi)$$

یا ... (۹.۶.۵) $$x = \frac{F_0}{\omega Z_m}\sin\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

له دې ځایه، لاس ته راوړو چې په دواړو حالاتو کې د x او F د فاز توپیر $-\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$ دی.

امپلیتیود

د ځای بدلون اعظمي قیمت امپلیتیود بلل کیږي او

$$A_{max} = \frac{F_0}{\omega Z_m}$$

۷.۵ د چلیدونکی اهتزازاتو سرعت

د چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي سرعت عبارت دی له

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

څرنګه چي

$$\vec{x} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t-\phi)}$$

نو

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{i(i\omega)F_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t-\phi)}$$

یا

$$\vec{v} = \frac{F_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t-\phi)} = v_0 e^{i(\omega t-\phi)} \quad \text{... (۱.۷.۵)}$$

دا سرعت په مختلط شکل راکوي.

که د چلوني قوه $F = F_0 \cos \omega t$ وي، نو

$$v = \text{Re}\ (v) = \frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi) \quad \text{... (۲.۷.۵)}$$

او کله چي $F = F_0 \sin \omega t$ وي، سرعت عبارت دی له

$$v = \text{Im}\ (v) = \frac{F_0}{Z_m} \sin(\omega t - \phi) \quad \text{... (۳.۷.۵)}$$

دا څرګنده ده چي:

(i) د چلوني قوې او سرعت د فاز توپیر ϕ دی. سرعت د چلوني قوې څخه د ϕ په اندازه وروسته پاتې کیږي.

(ii) سرعت هم په ساده هارمونیکي توګه تغیر کوي.

(iii) د سرعت د اهتزازاتو فریکونسي د چلوني د قوې سره یو شی ده.

(iv) د سرعت امپلیتیود له $v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$ څخه عبارت دی او د ځای بدلون ω خلې دی.

امپلیتیود

(v) سرعت له ځای بدلون څخه د $\frac{\pi}{2}$ په اندازه مخکې دی.

۸.۵ په چلیدونکې اهتزازاتو کې تعجیل

د چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي تعجیل عبارت دی له

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

څرنګه چې

$$\vec{v} = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \phi)}}{Z_m}$$

ځکه نو (۱.۸.۵) ...

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{i\omega F_0}{Z_m} e^{i(\omega t - \phi)} = a_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

دا تعجیل په مختلط شکل راکوي.

که د چلونې قوه $F = F_0 \cos \omega t$ وي، تعجیل عبارت دی له

$$a = \text{Re}\,(a) = -\frac{\omega F_0}{Z_m}\sin(\omega t - \phi)$$

یا

$$a = \frac{\omega F_0}{Z_m}\cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)^{6}$$

او کله چې د چلونې قوه $F = F_0 \sin \omega t$ وي، تعجیل عبارت دی له:

$$a = \text{Im}\,(a) = \frac{\omega F_0}{Z_m}\cos(\omega t - \phi)$$

یا

$$a = \frac{\omega F_0}{Z_m}\sin\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)^{7}$$

دا څرګنده ده چې:

(i) د چلونې قوې او تعجیل د فاز توپیر $\left(-\phi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad}$ دی.

(ii) تعجیل په ساده هارمونیکي توګه تغیر کوي.

---

[6] $\cos(\theta + \theta/2) = -\sin\theta$

[7] $\sin(\theta + \theta/2) = \cos\theta$

(iii) د تعجیل د اهتزازاتو فریکونسي د چلوني د قوې سره یو شی ده.

(iv) د تعجیل امپلیتیود له $a_0 = \frac{\omega F_0}{Z_m}$ څخه عبارت دی او د ځای بدلون د امپلیتیود له ω^2 ځلې سره مساوي دی.

(v) تعجیل له ځای بدلون څخه د π rad په اندازه مخکې دی.

۹.۵ د ω چلوني قوی فریکونسي لرونکي چلوني قوی او ځای بدلون ترمنځ د فاز توپیر تغیر

فرض کړئ چې په یوه اجباري اهتزاز ورکوونکي باندې عامله د چلوني قوه [8] $F = F_0 \cos \omega t$ ده. د ځای بدلون افاده به:

$$x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) \qquad \dots (I)$$

(۶.۶.۵ معادله وګورئ)

داسې چې $$Z_m = [r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (II)$$

او $$\tan \phi = \frac{\omega m - S/\omega}{r} \qquad \dots (III)$$

(I) معادله په لاندې ډول لیکل کیدای شي:

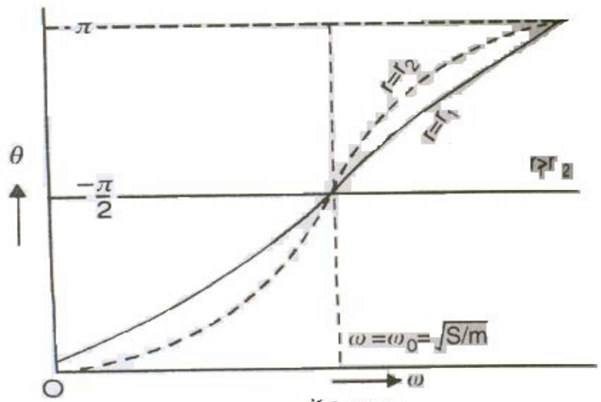
$$x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \cos(\omega t - \phi - \pi/2)$$

یا $$x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \cos[\omega t - (\phi + \pi/2)] \qquad \dots (IV)$$

---

[8] په دې برخې او په راتلونکو ځینو نورو برخو کې، مونږ د چلوني قوې لپاره د $\vec{F} = F_0 e^{i\omega t}$ عمومي افادې پر ځای د $F = F_0 \cos \omega t$ ځانګړې افاده په پام کې نیسو. سره ددې، چې که مونږ د $F = F_0 \sin \omega t$ عمومي افاده په پام کې ونیسو نومورې توضیح سمه پاتې کیږي.

له (IV) معادلې څخه، لاس ته راوړو چې ځای بدلون د چلونې قوې څخه $(\phi + \pi/2)$ وروسته پاتې کېږي. اوس، له (III) معادلې څخه لاس ته راوړو چې ϕ د ω چلونې فریکونسي سره تغیر کوي. ځکه نو، د x او F ترمنځ د فاز توپیر به هم له ω سره تغیر وکړي. فرض کړئ چې د x او F ترمنځ د فاز توپیر په θ سره وښودل شي. له دې ځایه، $\theta = -(\phi + \pi/2)$. نو د θ او ω ترمنځ ګراف داسې لاس ته راځي لکه په ۱.۹.۵ شکل کې چې ښودل کېږي.



۱.۹.۵ شکل

درې په زړه پورې حالتونه په لاندې ډول دي:

۱. کله چې ω ډېره کوچنۍ وي. د مثال په توګه $\omega \to 0$.

له (III) معادلې څخه، لاس ته راوړو چې $\tan\phi = -\infty$.

نو $\phi = -\pi/2$

له دې ځایه، $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

په بل عبارت ځای بدلون او د چلونې قوه هم فازه دي.

۲. کله چې د چلونې فریکونسي عبارت وي له

$$\omega = \sqrt{S/m} = \omega_0$$

هغه چې د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي طبیعي فریکونسي هم ده. له (III) معادلې څخه لاس ته راوړو چې:

$$\tan\phi = \frac{(\sqrt{S/m})m - S/\sqrt{S/m}}{r} = \frac{\sqrt{S/m} - \sqrt{S/m}}{r}$$

یا $\tan\phi = 0$

په بل عبارت $\phi = 0$. په دې حالت کې، لرو چې

$$\theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

په بل عبارت په ریزونانس کې به ځای بدلون د چلونې قوې ښخه د $\pi/2$ په اندازه وروسته پاتې شي.

۳. کله چې د چلونې فریکونسي ډېره زیاته وي، یعني په ω/∞ ، لرو چې $\tan\phi = +\infty$. په بله مانا، $\phi = \pi/2$. ځکه نو:

$$\theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

په بل عبارت ځای بدلون د π په اندازه وروسته پاتې کېږي.

له ω سره د ϕ فاز زاویې تغیر.

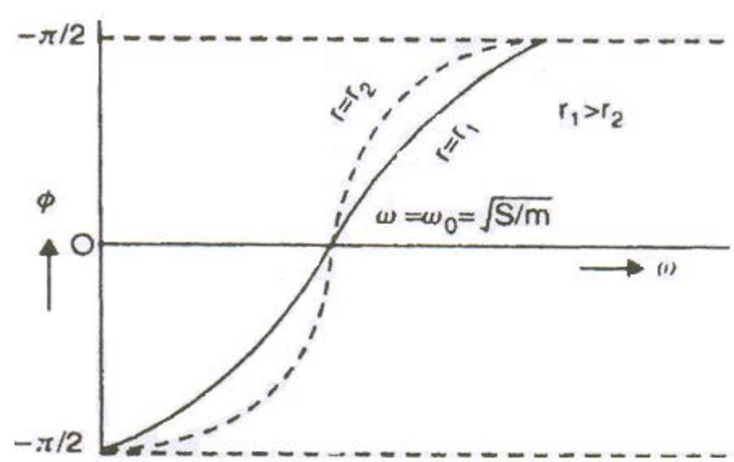
دا همدا اوس تشریح شوي دي چې:

د ټیټو فریکونسیو $(\omega \to 0)$لپاره، $\phi = -\pi/2$

$= \sqrt{S/m}$ ، $\phi = 0$

او (iii) د لوړو فریکونسیو $(\omega \to \infty)$ لپاره، $\phi = -\pi/2$

ځکه نو، له ω سره د ϕ فاز زاویې تغیر داسې دی لکه په ۲.۹.۵ شکل کې چې ښودل شوی دی.



۲.۹.۵ شکل

<u>**۱۰.۵ د ω چلونې قوې فریکونسي سره د ځای بدلون امپلیتیود تغیر**</u>

فرض کړئ چې په یوه اهتزاز ورکوونکي باندې عامله د چلونې قوه له $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \cos\omega t$ ښخه عبارت ده، نو د اهتزازاتو ځای بدلون یې عبارت دی له:

$$x = \frac{\mathrm{F}_0}{\omega \mathrm{Z}_m}\sin(\omega t - \phi) \qquad \dots (\mathrm{I})$$

دلته $A = F_0/\omega Z_m$ د اهتزازاتو امپلیتیود بلل کېږي.

څرنګه چې $Z_m = [r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}$ دی، نو:

$$A = \frac{F_0}{\omega[r^2+(\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \text{(II)}$$

درې په زړه پورې حالتونه په لاندې ډول دي:

۱. کله چې ω ډېره کوچنۍ وي. د مثال په توګه $\omega \to 0$. په دې حالت کې، د S/ω حد ظاهري مقاومت مغلوبوي او اهتزاز ورکوونکی سختي کنټرول شوی بلل کېږي. همدارنګه، r ډېر لوی نه دی، ځکه نو، لرو چې

$$Z_m = [r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \cong S/\omega$$

او امپلیتیود به

$$A = \frac{F_0}{\omega(S/\omega)} = \frac{F_0}{S}$$

په بل عبارت، امپلیتیود له فریکونسي څخه ازاد دی. (۱.۱۰.۵ شکل وګورئ)

۲. کله چې ω ډېره زیاته لویه وي. د مثال په توګه $\omega \to \infty$. په دې حالت کې، د ωm حد ظاهري مقاومت مغلوبوي او اهتزاز ورکوونکی عطالتي کنټرول شوی بلل کېږي.

او ځکه نو:

$$Z_m = [r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \cong \omega m$$

د اهتزازاتو امپلیتیود به:

$$A = \frac{F_0}{\omega(\omega m)} = \frac{F_0}{\omega^2 m}$$

څرنګه چې $\omega \to \infty$ ، ځکه نو $A \to 0$. ۱.۱۰.۵ شکل وګورئ.

۳. ریزونانس.

دا حالت هغه وخت په ځانګړې توګه په زړه پورې دی چې امپلیتیود اعظمي وي. دا هغه وخت رامنځ ته کېږي چې ωZ_m اصغري وي. د ریزونانس فریکونسي د پیدا کولو لپاره، مونږ په لاندې توګه مخکې ځو.

ددې لپاره چې ωZ_m اصغري وي، لرو چې

$$\frac{d}{d\omega}(\omega \mathrm{Z}_m) = 0$$

خو

$$\omega \mathrm{Z}_m = \omega[r^2 + (\omega m - \mathrm{S}/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} = [\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - \mathrm{S})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$

$$\frac{d}{d\omega}(\omega \mathrm{Z}_m) = \frac{1}{2}\left[[\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - \mathrm{S})^2]\right]^{\frac{1}{2}} \times [2\omega r^2 + 2(\omega^2 m - \mathrm{S})2\omega m]$$

$$= \frac{\omega r^2 + 2\omega m(\omega^2 m - \mathrm{S})}{[\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - \mathrm{S})^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega[r^2 + 2m(\omega^2 m - \mathrm{S})]}{\mathrm{Z}_m}$$

د $d(\omega \mathrm{Z}_m)/d\omega = 0$ لپاره، لرو چې:

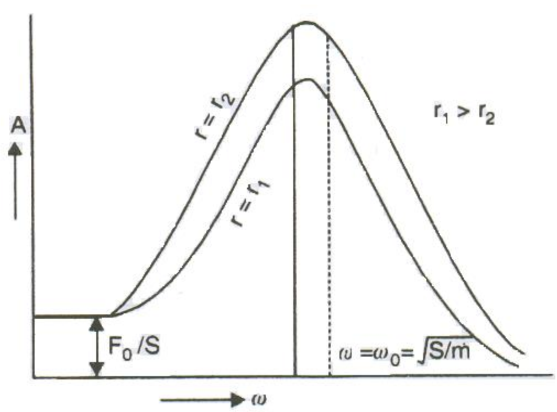
$$\omega[r^2 + 2m(\omega^2 m - \mathrm{S})] = 0$$

دا یا $\omega = 0$ ورکوي، چې بې معنا او د منلو وړ نه دی.

یا $r^2 + 2m(\omega^2 m - \mathrm{S}) = 0$ یا $r^2 = 2m(\mathrm{S} - \omega^2 m) = 2m\mathrm{S} - 2\omega^2 m^2$

یا $2\omega^2 m^2 = 2m\mathrm{S} - r^2$ یا $\omega^2 = (\mathrm{S}/m - r^2/2m^2)$

په بل عبارت (د مثال توگه) $\omega = \left(\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega'$



۱.۱۰.۵ شکل

خو $\sqrt{\mathrm{S}/m} = \omega_0$ ، د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي طبیعي فریکونسي ده. له دې ځایه د اهتزازاتو یا ریزونانس اعظمي ځای بدلون امپلیتیود د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي څخه په لږ څه کمه فریکونسي کې رامنځ ته کېږي. د $r \to 0$ لپاره او/ یا د m په ډېر زیاتیدو سره ریزونانس د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي طبیعي فریکونسي ته په ډیرې نږدې فریکونسي کې رامنځ ته کېږي. له ω سره د A تغیر په ۱.۱۰.۵ شکل کې ښودل شوی دی.

د ځای بدلون اعظمي قیمت په لاندې ډول لاس ته راتللی شي. د اهتزازاتو امپلیتیود له $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{F}_0}{\omega \mathrm{Z}_m}$ څخه عبارت دی. په ریزونانس کې، لرو چې:

$$\omega = \left(\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

څکه نو
$$\omega Z_m = \omega[r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} = [\omega^2 r^2 + (\omega^2 m - S)^2]^{\frac{1}{2}}$$

د ω د قیمت په عوض کولو سره، لاس ته راوړو چې:

$$\omega Z_m = \left[\left(\frac{S}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right) r^2 + \left\{\left(\frac{S}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right) m - S\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{S}{m} r^2 - \frac{r^4}{2m^2}\right) + \left\{S - \frac{r^2}{2m} - S\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{S}{m} r^2 - \frac{r^4}{2m^2} + \frac{r^4}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

یا
$$\omega Z_m = \left(\frac{S}{m} r^2 - \frac{r^4}{2m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
یا
$$\omega Z_m = r\left(\frac{S}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0' r$$

داسې چې ω_0' د استهلاکي اهتزازاتو طبیعي فریکونسي ده. له دې ځایه، په ریزونانس کې د اهتزازاتو امپلیتیود عبارت دی له:

$$A_{max} = \frac{F_0}{\omega_0' r}$$

په بل عبارت د استهلاک په زیاتیدو، امپلیتیود کوچنی کېږي لکه چې په ۱.۱۰.۵ شکل کې ښودل شوي.

۱۱.۵ د چلونې قوې له فریکونسي (ω) سره د سرعت امپلیتیود تغیر

د اجباري اهتزازاتو د سرعت امپلیتیود عبارت دی له

(۷.۵ برخه وګورئ)
$$v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$$

یا
$$v_0 = \frac{F_0}{[r^2 + (\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

درې په زړه پورې حالتونه په لاندې ډول دي:

۱. د ω په ټیټو قیمتونو، د S/ω حد غلبه مومي. اهتزاز ورکوونکی سختي کنټرول شوی بلل کېږي. په بل عبارت کله چې $\omega \to 0$ ، S/ω د r او همدارنګه د ωm په پرتله ډېر زیات لوی او ∞ ته تقرب کوي. له دې ځایه $v_0 \to 0$. په بل عبارت په ټیټو فریکونسیو کې، د سرعت امپلیتیود صفر دی.

۲. په ډېرو لوړو فریکونسیو کې، چې $\omega m \to \infty$. نو بیا $Z_m \to \infty$ ، د ωm حد غلبه مومي. اهتزاز ورکوونکی عطالتي کنټرول شوی بلل کېږي. $\omega m \to \infty$. نو بیا $Z_m \to \infty$ او $v_0 \to 0$.
په بل عبارت په لوړو فریکونسیو کې هم د سرعت امپلیتیود صفر دی.

۳. دغیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي په طبیعي فریکونسي کې،

په بل عبارت په $\omega = \omega_0 = \sqrt{S/m}$ کې ځواب ویونکی

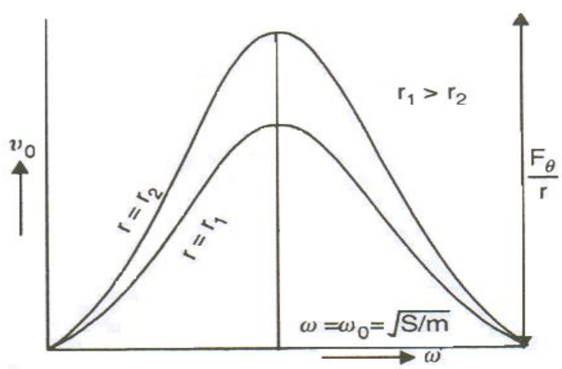
$X_m = \omega m - S/\omega = \left(\sqrt{S/m}\right)m - S/\sqrt{S/m} = \sqrt{Sm} - \sqrt{Sm} = 0$.

ځکه نو $Z_m = r$.

دا د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د Z_m اصغري ممکنه قیمت دی. نو، په دې فریکونسي کې د سرعت امپلیتیود اعظمي دی. په دې فریکونسي کې ویل کېږي چې اهتزاز ورکوونکی د سرعت په ریزونانس کې دی. د سرعت امپلیتیود اعظمي قیمت عبارت دی له:

$$v_{max} = F_0/r$$

له ω سره د سرعت امپلیتیود v_0 تغیر په ۱.۱۱.۵ شکل کې ښودل شوی دی.



۱.۱۱.۵ شکل

<u>۱۲.۵ د چلوونې قوې فریکونسي ω سره د تعجیل امپلیتیود تغیر</u>

د اجباري اهتزاز ورکوونکي د تعجیل امپلیتیود عبارت دی له

$$a_0 = \frac{\omega F_0}{Z_m}$$ (۸.۵ برخه وګورئ)

یا

$$a_0 = \frac{\omega F_0}{[r^2+(\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

یا

$$a_0 = \frac{F_0}{[r/\omega^2+(m - S/\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots (I)$$

درې په زړه پورې حالتونه په لاندې ډول دي:

۱. په ټيټه فريکونسي کې، $\omega \to 0$ ، ځکه نو، د (I) معادلې په مخرج کې په دې شرط چې r کوچنی وي د S/ω^2 حد غلبه مومي. اهتزاز ورکوونکی سختي کنټرول شوی بلل کېږي. ځکه نو د کوچني r لپاره $Z_m = S/\omega$. او له دې ځايه $a_0 = \omega^2 F_0/S$ په $\omega \to 0$ سره $a_0 \to 0$. په بل عبارت د تعجيل امپليتيود صفر ده.

۲. په لوړه فريکونسي کې، $\omega \to \infty$ ، ځکه نو، د (I) معادلې په مخرج کې د m حد غلبه مومي. اهتزاز ورکوونکی عطالتي کنټرول شوی بلل کېږي. ځکه نو د $\omega \to \infty$، a_0 په F_0/m بدلېږي. په بل عبارت، په لوړو فريکونسيو کې، د تعجيل امپليتيود له فريکونسي څخه ازاد دی.

۳. د تعجيل امپليتيود هغه وخت اعظمي کېږي، چې ω/Z_m اصغري يا Z_m/ω اعظمي وي. لکه له (I) معادلې څخه چې څرګندېږي د $Z_m/\omega = \omega^{-1}Z_m$ اعظمي کيدو لپاره، لرو چې:

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^{-1}Z_m) = 0$$

اوس

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^{-1}Z_m) = \frac{d}{d\omega}\left[\omega^{-1}\{r^2 + (\omega m - S/\omega)^2\}^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{d}{d\omega}[r^2/\omega^2 + (m - S/\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega^2} + \left(m - \frac{S}{\omega^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2\frac{r^2}{\omega^3}\right) + 2\left(m - \frac{S}{\omega^3}\right)\left(\frac{2S}{\omega^3}\right)$$

$$= \frac{-\frac{r^2}{\omega^3} + 2(m - S/\omega^2)\left(\frac{S}{\omega^3}\right)}{[r^2/\omega^2 + (m - S/\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

يا

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^{-1}Z_m) = \frac{-r^2/\omega^3 + 2Sm/\omega^3 - 2S^2/\omega^5}{[r^2/\omega^2 + (m - S/\omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \text{(III)}$$

اوس، ددې لپاره چې د پورتنی معادلې ښی لوری صفر شي، لرو چې:

$$-r^2/\omega^3 + 2Sm/\omega^3 - 2S^2/\omega^5 = 0$$

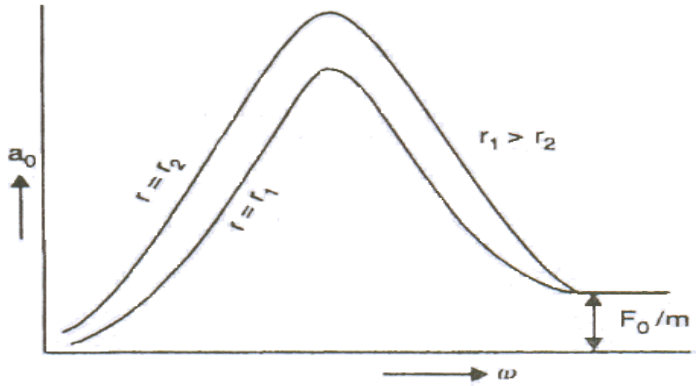
يا $-r^2 + 2Sm - 2S^2/\omega^2 = 0$ يا $2Sm - r^2 = 2S^2/\omega^2$

يا $\omega^2 = \frac{2S^2}{2Sm - r^2}$ يا $\omega = \sqrt{\frac{2S^2}{2Sm - r^2}} = \omega''$ (د مثال توګه)

له دې ځايه د تعجيل امپليتيود په ω'' فريکونسي کې اعظمي دی. دا عبارت دی له:

$$a_{max} = \frac{\omega'' F_0}{[r^2 + \omega''(m - S/\omega'')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

له ω سره د a_0 تغیر په ۱.۱۲.۵ شکل کې ښودل شوی دی.



شکل ۱.۱۲.۵

۱۳.۵ له ω سره د A ، v_0 او a_0 د تغیر مقایسوی څیرنه

۱.۱۳.۵ جدول د ځای بدلون، سرعت او تعجیل د امپلیتیودونو مقایسوي قیمتونه راکوي.

۱.۱۳.۵ جدول

د امپلیتیود ډول	د امپلیتیود افاده	ریزونانس فریکونسي	د امپلیتیود قیمتونه په			امپلیتیود له فریکونسي څخه ازاد دی په
			تیټ ω	لوړ ω	ریزونانس	
د ځای بدلون امپلیتیود A	$A = \frac{F_0}{\omega Z_m}$	$\omega_\phi = \left[\frac{S}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{F_0}{S}$	صفر	$\frac{F_0}{\omega' r}$	تیټه فریکونسي
سرعت امپلیتیود v_0	$v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$	$\omega_0 = \left[\frac{S}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$	صفر	صفر	$\frac{F_0}{r}$	ریزونانس
تعجیل امپلیتیود	$a_0 = \frac{\omega F_0}{Z_m}$	$\omega'' = \left[\frac{2S^2}{2Sm - r^2}\right]^{\frac{1}{2}}$		صفر	$\frac{F_0}{m}$	$\frac{\omega'' F_0}{[r^2 + (\omega'' m - S/\omega^2)]^{\frac{1}{2}}}$

د جدول تجزیه دا په ډاګه کوي چې د ځای بدلون، سرعت او تعجیل ریزونانس په مختلفو فریکونسیو کې رامنځ ته کیږي.

۱.۵ مثال. وښایاست چې د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي په طبیعي فریکونسي کې د اجباري اهتزاز ورکوونکي تعجیل د چلونې په لوړو فریکونسیو کې د تعجیل امپلیتیود د حدي قیمت سره مساوي دی، په دې شرط چې $r = (Sm)^{1/2}$.

حل.

د تعجیل امپلیتیود عبارت دی له:

$$a = \frac{\omega \mathrm{F}_0}{\mathrm{Z}_m}$$

اوس

$$\mathrm{Z}_m = [r^2 + (\omega m - \mathrm{S}/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}$$

د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي طبیعي فریکونسي له $\omega_0 = \sqrt{\mathrm{S}/m}$ څخه عبارت ده. په $\omega = \omega_0 = \sqrt{\mathrm{S}/m}$ کې به ظاهري مقاومت:

$$\mathrm{Z}_m = \left[r^2 + \left\{\sqrt{(\mathrm{S}/m)m} - \mathrm{S}/\sqrt{(\mathrm{S}/m)}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[r^2 + \left(\sqrt{Sm} - \sqrt{Sm}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

یا

$$\mathrm{Z}_m = r$$

څکه نو په $\omega = \omega_0$ کې امپلیتیود عبارت دی له:

$$a = \frac{\omega_0 \mathrm{F}_0}{r} \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

اوس $\omega_0 = \sqrt{\mathrm{S}/m}$ او $r = \sqrt{Sm}$ راکړل شوی. له دې ځایه

$$a = \frac{\sqrt{\mathrm{S}/m}\mathrm{F}_0}{\sqrt{Sm}} = \frac{\mathrm{F}_0}{m} \qquad \ldots (\mathrm{II})$$

همدارنګه، په لوړو فریکونسیو کې، $\omega \to 0$ ، څکه نو په ظاهري مقاومت کې د ωm حد غلبه مومي او اهتزاز ورکوونکی عطالتي کنټرول شوی بلل کیږي.

کله چې $\omega \to 0$

$$\mathrm{Z}_m = [r^2 + (\omega m - \mathrm{S}/\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \to \omega m$$

او همدارنګه په $\omega \to 0$ حدي حالت کې د اجباري اهتزاز ورکوونکي امپلیتیود عبارت دی له

$$a' = \frac{\omega F_0}{\omega m} = \frac{F_0}{m} \qquad \text{... (III)}$$

د (II) او (III) معادلو په پرتله کولو، لاس ته راوړو چې: $a = a'$

په بل عبارت په ω_0 کې امپلیتیود د لوړو چلونکو فریکونسیو له امپلیتیود سره مساوي دی.

۲.۵ مثال. د $F_0 \cos \omega t$ په واسطه چلیدونکي غیر استهلاکي قوې میخانیکي اهتزاز ورکوونکي مؤقتي ځای بدلون عبارت دی له:

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

داسې چې $\omega_0 = (S/m)^{\frac{1}{2}}$ طبیعي فریکونسي ده. که په $t = 0$ کې د سرعت ا و ځای بدلون دواړه صفر وي، وښایاست چې:

$$x = \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

حل.

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \qquad \text{... (I)}$$

په $t = 0$ کې، لرو چې $x = 0$ دی، له دې ځایه

$$0 = A \qquad \text{... (II)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0\, \omega \cos \omega t}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} - A\, \omega_0 \sin \omega t + B\omega_0 \cos \omega t$$

په $t = 0$ کې، مونږ ته $\frac{dx}{dt} = -0$ راکول کیږي.

له دې ځایه $0 = -\frac{F_0 \omega}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} + B\omega_0$

یا $B = \frac{-F_0(\omega/\omega_0)}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} \qquad \text{... (III)}$

په (I) معادله کې د A او B د قیمتونو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$x = \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

دا غوښتل شوې نتیجه ده.

۱۴.۵ په چلیدونکی یا اجباري اهتزاز ورکوونکی کي د طاقت جذب

طاقت د کیدونکي کار د اندازې په توګه تعریف کېږي. فرض کړئ چې یو اهتزاز کوونکی د $F = F_0 \cos \omega t$ قوې په واسطه چلیږي، نو ځای بدلون یې عبارت دی له:

$$x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) \qquad \text{... (I)}$$

داسې چې Z_m میخانیکي ظاهري مقاومت دی چې عبارت دی له:

$$Z_m = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

سرته رسیدلی کار اهتزاز ورکوونکی د dx واټن په اندازه بې ځایه کوي چې عبارت دی له:

$$dW = F dx$$

طاقت عبارت دی له:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} \qquad \text{... (II)}$$

له (I) معادلې څخه، لاس ته راوړو چې:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{\omega Z_m} \omega \cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi)$$

په (II) معادله کې د F او $\frac{dx}{dt}$ قیمتونو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$P = (F_0 \cos \omega t)\, \frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{{F_0}^2}{Z_m} \cos \omega t \, \cos(\omega t - \phi)$$

په یو وخت پریود کې متوسط طاقت عبارت دی له:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{{F_0}^2}{Z_m} \cos \omega t \, \cos(\omega t - \phi)\, dt \qquad \text{... (III)}$$

$$= \frac{{F_0}^2}{T Z_m} \int_0^T \cos \omega t \, (\cos \omega t \, \cos\phi + \sin \omega t \, \sin\phi)\, dt$$

$$= \frac{{F_0}^2}{T Z_m} \int_0^T (\cos^2 \omega t \cos\phi + \cos \omega t \sin \omega t \sin\phi)\, dt$$

$$= \frac{F_0{}^2}{TZ_m}\int_0^T \left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\ \cos\phi + \frac{\sin 2\omega t}{2}\sin\phi\right)\ dt$$

$$P_{av} = \frac{F_0{}^2}{2TZ_m}\left(\cos\phi \int_0^T dt + \cos\phi \int_0^T \cos 2\omega t\, dt + \sin\phi \int_0^T \sin 2\omega t\, dt\right)$$

خو
$$\int_0^T \cos 2\omega t\, dt = \int_0^T \sin 2\omega t\, dt = 0$$

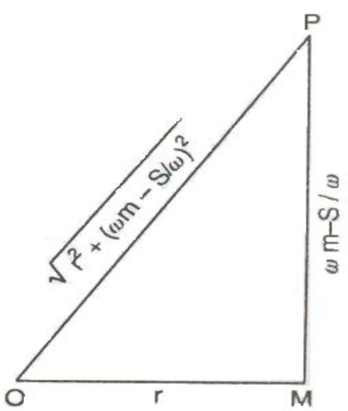
په بل عبارت
$$P_{av} = \frac{F_0{}^2}{2TZ_m}[(\cos\phi)t]_0^T$$

یا
$$P_{av} = \frac{F_0{}^2}{2TZ_m}(\cos\phi)T$$

یا
$$P_{av} = \frac{F_0{}^2}{2Z_m}(\cos\phi) \qquad \ldots (۱.۱۴.۵)$$

دا په یوه وخت پریود کې متوسط طاقت ورکوي. په بل عبارت، دا د وخت په یوه پریود کې د خیرې شوې انرژي اندازه ورکوي. له دې ځایه $\cos\phi$ د طاقت ضریب بلل کیږي، داسې چې ϕ د قوې او ځای بدلون ترمنځ د فاز توپیر دی.

۱۵.۵ د چلونې فریکونسي سره د متوسط طاقت تغیر



۱.۱۵.۵ شکل

پوهیږو چې:

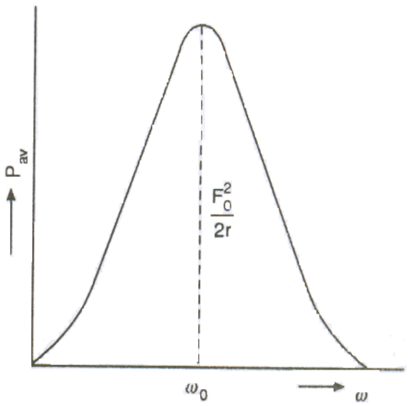
$$\tan\phi = \frac{\omega m - S/\omega}{r}$$

څکه نو لکه په ۱.۱۵.۵ شکل کې چې ښودل شوي، د طاقت ضریب عبارت دی له:

$$\cos\phi = \frac{r}{[r^2+(\omega m - S/\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{r}{Z_m}$$

د چلونې فریکونسي په ټیټو قیمتونو کې، د $\frac{S}{\omega}$ حد غلبه مومي او اهتزاز ورکوونکی سختي کنټرول شوی بلل کیږي. کله چې $\omega \to 0$ ، لرو چې $\frac{S}{\omega} \to 0$ او څکه نو $Z_m \to 0$. او $\cos\phi = 0$. په بل عبارت په ټیټو فریکونسیو کې د طاقت خپریدنه کوچنۍ او د صرف نظر وړ ده.

په لوړو فریکونسیو کې، د ωm حد غلبه مومي او اهتزاز ورکوونکی عطالتي کنټرول شوی بلل کیږي. کله چې $\omega \to 0$ ، $\omega m \to 0$ او څکه نو $Z_m \to 0$. په بل عبارت $\cos\phi = 0$. نو، د چلونې فریکونسیو په ډیرو زیاتو لوړو قیمتونو کې، د طاقت خپریدنه صفر ته میلان کوي.



شکل ۲.۱۵.۵

د غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي د طبیعي فریکونسي په مساوي فریکونسي یا په بل عبارت په $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m}}$ کې، ځواب ویونکی حد $\left(\omega m - \frac{S}{m}\right)$ له منځه ځي او همدارنګه $Z_m = r$ دی.

د طاقت ضریب له ۱ سره مساوي دی او اهتزاز ورکوونکي ته د طاقت رسیدنه تر ټولو لوړه او قیمت یې مساوي دی له:

$$P_{max} = \frac{{F_0}^2}{2r}$$

له ω سره د P_{av} تغیر په ګرافیکي توګه په ۲.۱۵.۵ شکل کې ښودل شوی دی.

۱۶.۵ په یوه دوره کې مجموعي خپره شوې انرژي

خپره شوې انرژي= وخت × P_{av}

∴ په یوه پریود کې خپره شوې انرژي عبارت ده له

$$U = P_{av} \times T$$

اوس

$$P_{av} = \frac{{F_0}^2}{2Z_m}(\cos\phi) = \frac{{F_0}^2}{2Z_m} \times \frac{r}{Z_m} = \frac{{F_0}^2}{2Z_m^2}$$

ځکه نو

$$U = \frac{{F_0}^2 r}{2Z_m^2} \times T$$

په ω^2 کې د ښي لوري د ضرب او ویشلو څخه، لاس ته راوړو چې

$$U = \frac{{F_0}^2 r}{2(\omega Z_m)^2} \times \omega^2 T$$

خو $\omega T = 2\pi$ ، ځکه نو $\omega^2 T = \omega \times 2\pi$. له دې ځایه د U افاده به:

$$U = \frac{2\pi\omega r}{2}\frac{{F_0}^2}{(\omega Z_m)^2} = \pi\omega r\frac{{F_0}^2}{(\omega Z_m)^2}$$

خو $A^2 = \frac{{F_0}^2}{(\omega Z_m)^2}$ ، داسې چې A داهتزازاتو امپلیتیود دی. له دې ځایه لاس ته راوړو چې:

$$U = \pi\omega r A^2$$

دا په یوه دوره یا د وخت په یوه پریود کې مجموعي خپره شوې انرژي ورکوي.

۱۷.۵ د چلوني قوې په واسطه د طاقت رسیدنه د اصطکاکي قوې په مقابل کې خپور شوي طاقت سره مساوي ده.

څرنګه چې د استهلاک قوه عبارت ده له

$$F_d = r\frac{dx}{dt} \qquad \ldots (۱.۱۷.۵)$$

نو، د استهلاکي قوې په مقابل کې په یوه ثانیه کې سرته رسیدلی کار د استهلاکي قوې په مقابل کې د خپور شوي طاقت څخه عبارت دی.

یعني
$$P_d = \frac{dW_d}{dt} = F_d\frac{dx}{dt}$$

د (۱.۱۷.۵) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$P_d = r\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \ldots (۲.۱۷.۵)$$

که تطبیق شوې قوه $F = F_0\cos\omega t$ وي

نو، ځای بدلون، $x = \frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t - \phi)$ دی

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{Z_m}$$

نو (۲.۱۷.۵) معادله به

$$P_d = r\frac{F_0^2}{Z_m^2}\cos^2(\omega t - \phi)$$

په یو وخت پریود کې خپور شوی متوسط طاقت عبارت دی له

$$P'_{av} = \frac{\text{په یوه دوره کې مجموعي خپور شوی طاقت}}{\text{د یوې دورې د وخت پریود}}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T P_d\,dt$$

یا
$$P_{av} = \frac{rF_0^2}{TZ_m^2}\int_0^T \cos^2(\omega t - \phi)\;dt$$

$$= \frac{rF_0^2}{TZ_m^2}\int_0^T \left(\frac{1+\cos 2(\omega t - \phi)}{2}\right)\,dt$$

$$= \frac{rF_0^2}{2TZ_m^2}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos 2(\omega t - \phi)\, dt\right]$$

$$= \frac{rF_0^2}{2TZ_m^2}[T + 0] \qquad \left[\int_0^T \cos 2(\omega t - \phi)\, dt = 0 \quad \therefore\right]$$

$$= \frac{rF_0^2}{2Z_m^2}$$

یا $$P'_{av} = \frac{rF_0^2}{2Z_m^2}\cdot\frac{r}{Z_m}$$ ... (۳.۱۷.۵)

څرنګه چې $$\tan\phi = \frac{\omega m - \frac{S}{\omega}}{r}$$

∴ $$\cos\phi = \frac{r}{Z_m}$$ [۱.۱۷.۵ شکل وګورئ]

نو $$P'_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m}.\cos\phi$$

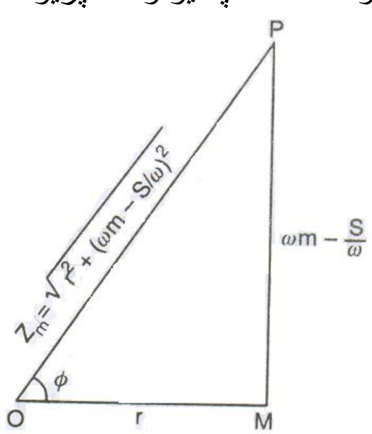
خو $$\frac{F_0^2}{2Z_m}.\cos\phi = P_{av}$$

(په یو وخت پریود کې رسیدلی متوسط طاقت)

نو $$P'_{av} = P_{av}$$

یا $$P_{av} = P'_{av}$$

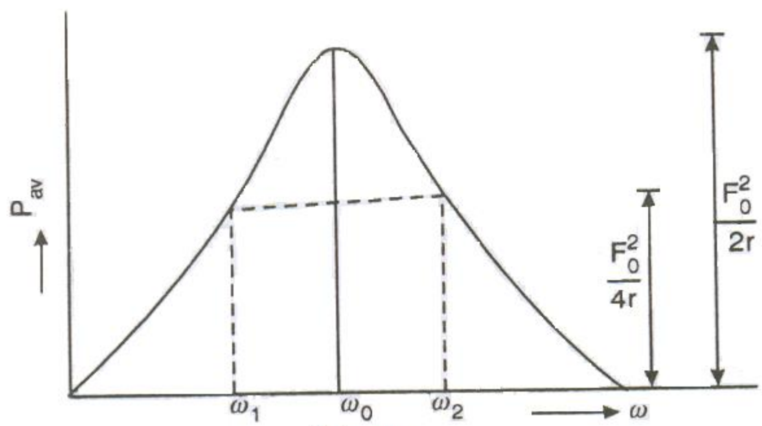
یعني اهتزاز ورکوونکي ته د چلوني قوې په واسطه رسیدلی متوسط طاقت په یو وخت پریود کې خپور شوي متوسط طاقت سره مساوي دی.



۱.۱۷.۵ شکل

۱۸.۵ بانډ پراختیا

په ۱۵.۵ برخه کې، مونږ له فریکونسي سره د چلوني قوې په واسطه اهتزاز ورکوونکي ته د رسیدلي طاقت تغیر وڅیړلو. دا لاس ته راغله چې په $\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m}}$ فریکونسي کې، چې د اهتزاز ورکوونکي طبیعي فریکونسي ده رسیدلی طاقت اعظمي او له $\frac{F_0^2}{2r}$ سره مساوي دی. ۱.۱۸.۵ شکل وګورئ. ω_1 او ω_2 د ω_0، چې په دې کې P_{av} د اعظمي قیمت نیمایي دی په هر لوري کې فریکونسي په پام کې ونیسئ. په بل عبارت په ω_1 او ω_2 دواړو کې $P_{av} = \frac{F_0^2}{4r}$ دی. نو $\omega_2 - \omega_1$ بانډ پراختیا بلل کیږي.



۱.۱۸.۵ شکل

دا مو باید په پام کې وي چې د سرعت ریزونانس په ω_0 کې رامنځ ته کیږي. له دې ځایه، بانډ پراختیا، د سرعت ریزونانس فریکونسي ω_0 ، چې په هغې کې اهتزاز ورکوونکي ته رسیدلی طاقت د خپل اعظمي قیمت نیمایي ته کمیږي، په هر یو لوري کې د چلوني قوې د فریکونسیو د توپیر په توګه تعریف کیږي.

$(\omega_2 - \omega_1)$ د جذب بانډ پراختیا هم بلل کیږي، ځکه دا د انرژي په جذب پورې تړلې ده. بانډ پراختیا همدارنګه د سرعت ریزونانس تیره توب هم ښیي. د بانډ پراختیا په کوچني توب، د سرعت ریزونانس تیره توب زیاتوالی کوي.

۱۹.۵ د اجباري اهتزاز ورکوونکي د څرنګوالي ضریب

د اجباري میخانیکي اهتزاز ورکوونکي د څرنګوالي ضریب، Q –ضریب په لاندې توګه تعریف کیږي:

$$Q = 2\pi \frac{\text{په اهتزاز ورکوونکي کې ذخیره شوې متوسطه انرژي}}{\text{په یوه دوره کې خپره شوې انرژي}}$$

$$Q = 2\pi \frac{U_{av}}{P_{av} \times T} \qquad \dots (I)$$ یا

فرض کړئ چې د چلوني قوه $F = F_0 \cos \omega t$ ده.

ځای بدلون عبارت دی له

$$x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$$

د اهتزاز ورکوونکي مجموعي انرژي عبارت ده له:

$$U = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} S x^2$$

یا
$$U = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \cos^2(\omega t - \phi) = \frac{1}{2} S \left(\frac{F_0}{\omega Z_m}\right)^2 \sin^2(\omega t - \phi)$$

اوس
$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T U dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt + \frac{1}{2} S \left(\frac{F_0}{\omega Z_m}\right)^2 \int_0^T \sin^2(\omega t - \phi) dt\right]$$

اوس
$$\int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt = \int_0^T \sin^2(\omega t - \phi) dt = \frac{T}{2}$$

له دې ځایه
$$U_{av} = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{4} m \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 T + \frac{1}{4} S \left(\frac{F_0}{\omega Z_m}\right)^2 T\right]$$

یا
$$U_{av} = \frac{1}{4} m \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \left[m + \frac{S}{\omega^2}\right]$$

یا
$$U_{av} = \frac{m}{4} \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \left[1 + \frac{S/m}{\omega^2}\right]$$

خو $\frac{S}{m} = \omega_0^2$ ، ځکه نو

$$U_{av} = \frac{m}{4} \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right] \qquad \dots (II)$$

همدارنګه
$$P_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m} . \cos \phi = \frac{F_0^2}{2Z_m} \left(\frac{r}{Z_m}\right)$$

یا
$$P_{av} = \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \frac{r}{2} \qquad \dots (III)$$

په (I) معادله کې د قیمتونو په عوض کولو، لاس ته راوړو چې:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{m}{4}\left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2\left[1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]}{\left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2 \frac{r}{2}\times T} = \frac{2\pi}{T}\frac{m}{2r}\left[1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]$$

خو $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ،

∴ $$Q = \frac{\omega m}{2r}\left[1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right] \quad \dots (۱.۱۴.۶)$$

دا د اجباري اهتزاز ورکوونکي د Q -قیمت ورکوي.

په ریزونانس کې، لرو چې $\omega = \omega_0$ ، نو

$$Q = \frac{\omega_0 m}{2r}\left[1+\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right] = \frac{\omega_0 m}{2r}[1+1]$$

یا $$Q = \frac{\omega_0 m}{r} \quad \dots (۲.۱۴.۶)$$

له دې ځایه، مونږ عین افاده لرو لکه د استهلاکي اهتزاز ورکوونکي لپاره مو چې لاس ته راوړې وه.

۲۰.۵ د بانډ پراختیا او Q -ضریب ترمنځ اړیکه

اجباري اهتزاز ورکوونکي ته رسیدلی متوسط طاقت عبارت دی له:

$$P_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m}.\cos\phi = \frac{F_0^2}{2Z_m}\left(\frac{r}{Z_m}\right)$$

یا $$P_{av} = \left(\frac{F_0}{Z_m}\right)^2\frac{r}{2} \quad \dots (I)$$

طاقت په $\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m}}$ کې اعظمي دی، کله چې د ظاهري مقاومت ځواب ویونکي برخه صفر وي.

په بل عبارت $\left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right) = 0$ دی. په ω_0 فریکونسي کې، ځکه نو

$$(P_{av})_{max} = \left(\frac{F_0}{r}\right)^2\frac{r}{2} = \frac{F_0^2}{2r} \quad \text{او} \quad Z_m = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = r$$

ω فریکونسي فرض کړئ، طاقت به د اعظمي طاقت د قیمت نیمايي وي. په بل عبارت په ω فریکونسي کې،

$$P_{av} = \left(\frac{F_0}{r}\right)^2 \frac{r}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{F_0^2}{2r}\right] \qquad \text{... (II)}$$

د (I) او (II) معادلو په پرتله کولو سره، لاس ته راوړو چې

$$Z_m^2 = 2r$$

یا $$r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2 = 2r^2 \qquad \text{یا} \qquad \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2 = r^2$$

یا $$\left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right) = \pm r$$

چې د ω دوه قیمتونه د مثال په توګه ω_1 او ω_2 راکوي. فرض کړئ چې $\omega_1 < \omega < \omega_2$. نو،

$$m\omega_1 - \frac{S}{\omega_1} = -r$$

او $$m\omega_2 - \frac{S}{\omega_2} = +r$$

د نوموړو معادلو په جمع کولو، لاس ته راوړو چې:

$$m(\omega_2 + \omega_1) - S\left[\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2\omega_1}\right] = 0 \qquad \text{... (III)}$$

د نوموړو معادلو په تفریق کولو، لاس ته راوړو چې:

$$m(\omega_2 + \omega_1) + S\left[\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2\omega_1}\right] = 0 \qquad \text{... (IV)}$$

له (III) معادلې څخه مومو چې

$(\omega_2 + \omega_1) \neq 0$ ، څکه نو، نوموړې معادله په لاندې توګه لیکل کیدای شي:

$$m - \frac{S}{\omega_2\omega_1} = 0$$

یا $$\frac{S}{\omega_2\omega_1} = m \qquad \text{... (V)}$$

په (IV) کې د نوموړي قیمت په وضع کولو، مومو چې:

$$m(\omega_2-\omega_1)+m(\omega_2-\omega_1)=2r$$

یا $\omega_2-\omega_1=\frac{r}{m}$ ... (IV)

ځرنګه چې $Q=\frac{\omega_0 m}{r}=\frac{\omega_0}{r/m}$

ځکه نو، له (IV) معادلې څخه د r/m قیمت په وضع کولو، مومو چې:

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1} \quad ...(۱.۲۰.۵)$$

په بل عبارت: $Q=\frac{\text{د سرعت ریزونانس طبیعي فریکونسي}}{\text{باند پراختیا}}$

۲۱.۵ Q –ضریب او د تقویت ضریب

د ω_0' ریزونانس فریکونسي او ټیټې فریکونسي د امپلیتیود نسبت د اجباري اهتزاز ورکوونکي د تقویت ضریب بلل کېږي.

فرض کړئ چې د ځای بدلون ریزونانسي فریکونسي امپلیتیود A_{max} او د ټیټو فریکونسیو امپلیتیود A دی. نو د تقویت ضریب عبارت دی له:

$$\mu=\frac{A_{max}}{A}$$

ځرنګه چې $A_{max}=\frac{F_0}{\omega_0' r}$

داسې چې $\omega_0'=\left[\frac{S}{m}-\frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

او $A=\frac{F_0}{S}$

ځکه نو $\mu=\frac{\frac{F_0}{\omega_0' r}}{\frac{F_0}{S}}=\frac{S}{\omega_0' r}$

یا $\mu=\frac{S}{r\left[\frac{S}{m}-\frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$

خو $\frac{S}{m}=\omega_0^2$

یا $\quad \mathrm{S} = m\omega_0^2$

ځکه نو
$$\mu = \frac{m\omega_0^2}{r\left[\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{m\omega_0^2}{r\omega_0\left[1 - \frac{r^2}{4m^2\omega_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

یا
$$\mu = \frac{\omega_0 m}{r}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r^2}{m^2\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

خو
$$\frac{\omega_0 m}{r} = \mathrm{Q}$$

ځکه نو
$$\mu = \frac{\mathrm{Q}}{\left[1 - \frac{1}{4\mathrm{Q}^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

که Q لوی وي، نو $\frac{1}{4\mathrm{Q}^2}$ د صرف نظر وړ او له دې ځایه، $\quad \mu = \mathrm{Q}$

په بل عبارت د تقویت ضریب له Q –ضریب سره مساوي دی.

۳.۵ مثال. وښایاست چې د $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \sin\omega t$ قوې په واسطه چلیدونکي غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکي دایمي حالت حل عبارت دی له:

$$x = \frac{\mathrm{F}_0 \sin\omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

حل. که یو استهلاکي اهتزاز ورکوونکی د $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 e^{i\omega t}$ په واسطه وچلیږي، نو ځای بدلون عبارت دی له

$$\vec{x} = \frac{-i\mathrm{F}_0 e^{i(\omega t - \phi)}}{\omega \mathrm{Z}_m}$$

یا
$$\vec{x} = -i\,\frac{\mathrm{F}_0}{\omega \mathrm{Z}_m}\left[\cos(\omega t - \phi) + i\sin(\omega t - \phi)\right]$$

کله چې چلونکې قوه $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \sin\omega t$ وي، ځای بدلون د $\vec{x}$ له موهومي برخې څخه عبارت دی، په بل عبارت:

$$x = -\frac{F_0}{\omega Z_m}\cos(\omega t - \phi) \qquad \dots (I)$$

دلته
$$Z_m = \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

او
$$\tan\phi = \frac{\omega m - S/\omega}{r}$$

څرنګه چې راکړل شوی اهتزاز ورکوونکی غیر استهلاکي دی، ځکه نو $r = 0$ چې عبارت دی له:

$$Z_m = \omega m - \frac{S}{\omega}$$

او
$$\tan\phi = \frac{\omega m - \frac{S}{\omega}}{0} = \infty$$

په بل عبارت
$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

په (I) معادله کې د دې قیمتونو په عوض کولو سره، لاس ته راوړو چې:

$$x = \frac{-F_0}{\omega\left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

یا
$$x = \frac{-F_0}{\omega^2 m - \frac{S}{\omega}}\sin\omega t$$

یا
$$x = \frac{-F_0 \sin\omega t}{m\left(\frac{S}{m} - \omega^2\right)}$$

خو $\frac{S}{m} = \omega_0^2$ ، ځکه نو،

$$x = \frac{-F_0 \sin\omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

۴.۵ مثال. وښایاست چې د ریزونانسي جذب منحني باند پراختیا د فاز زاویې ساحه $\tan\phi = \pm 1$ تعریفوي.

حل.

پوهیږو چې (I) ... $\tan\phi = \frac{\omega m - S/\omega}{r}$

فرض کړئ چې ω د باند پراختیا په دواړو خواو کې د چلونې فریکونسي ده. نو په ω کې رسیدلی طاقت د رسیدلي طاقت د اعظمي قیمت نیمايي دی.

اوس

$$P_{av} = \frac{F_0^2}{2Z_m^2} r$$

همدارنګه

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{2r}$$

ځکه نو،

$$\frac{F_0^2 r}{2Z_m^2} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{2r}$$

چې عبارت دی له

$$Z_m^2 = 2r^2$$

یا

$$\left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right] = 2r^2$$

یا

$$\left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2 = r^2$$

یا

$$\left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right) = \pm r$$

که ω_1 او ω_2 دباند پراختیا په دواړو لوریو کې د چلونې فریکونسي وي، نو

$$\omega_1 m - \frac{S}{\omega_1} = -r$$

او

$$\omega_2 m - \frac{S}{\omega_2} = +r$$

فرض کړئ چې ϕ_1 او ϕ_2 په ترتیب سره د ω_1 او ω_2 چلونې فریکونسي اړوند د فاز زاویې دي، نو له (I) معادلې څخه،

$$\tan\phi_1 = \frac{\omega_1 m - \frac{S}{\omega_1}}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

او

$$\tan\phi_2 = \frac{\omega_2 m - \frac{S}{\omega_2}}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

په بل عبارت، د ریزونانسي جذب منحني باند پراختیا د فاز زاویې ساحه $\tan\phi = \pm 1$ تعریفوي.

$\therefore$

$$\omega_0 - p = \pm\frac{2b}{2} = \pm b$$

$$\therefore \qquad p = \omega_0 \pm b$$

یعني د نیم طاقت فریکونسی عبارت دي له

$$p_1 = \omega_0 - b \qquad \text{او} \qquad p_2 = \omega_0 - b$$

$$\therefore \qquad \text{باندِ پراختیا} = p_2 - p_1 = 2b$$

د چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي د څرنګوالي ضریب عبارت دی له

$$Q = \text{ریزونانسي فریکونسي} \times \text{د ارامتیا وخت}$$

$$= \omega_0 \tau$$

$$= \frac{\omega_0}{2b} \qquad \left[\therefore \quad \text{د ارامتیا وخت} \quad \tau = {}^{1}\!/_{2b}\right]$$

ځکه نو، د ریزونانس د تیره والي لپاره، $p_2 - p_1 = 2b$ باید کوچنی او د څرنګوالي ضریب Q ډیر لوی وي یعني په چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي کې د څرنګوالي ضریب د تیره والي اندازه ده.

۲۲.۵ جوړه یي اهتزاز ورکوونکی

د چلیدونکي یا اجباري اهتزاز ورکوونکي په بحث کې، مونږ فرض کړل چې د چلوني بهرنی عامل د چلیدونکي سیستم د اجباري اهتزاز څخه نه متاثره کیږي او له مخکیني عامل څخه وروستني ته د انرژي یوه غیرمستقیمه بهیدنه شتون لري. خو دا په عملي حالت کې سمه نه ده ځکه چې د چلیدونکي سیستم څخه د چلوني عامل ته همیشه د انرژي یو فیډبک، سره ددې چې کوچنی به وي، شتون لري. دوه یا زیات اهتزازي سیستمونه چې متقابلاً انرژي تبادله کوي یو جوړه یي اهتزاز ورکوونکی جوړوي. په داسې یوه سیستم کې، د اهتزازي سیستم یو جوړونکی کیدای شي دانرژي منبع یا یې رسیدلي انرژي وي، چې بیا د سیستم د ټولو جوړونکو ترمنځ تبادله کیږي.

د یوه جوړه یي اهتزاز ورکوونکي د اهتزازي جوړونکو ترمنځ د انرژي د تبادله کولو لپاره، باید نوموړي یو له بل سره تړلي یا جوړه وي.

د جوړه کیدني ډولونه

دوه اهتزاز ورکوونکي یو له بل سره د یوه عادي جوړونکي په واسطه یو ځای کیدای شي لکه:

(i) د میخانیکي اهتزاز ورکوونکي لپاره سختي (د قوې ثابت) یا د برقي اهتزاز ورکوونکي لپاره ظرفیت.

(ii) القا یا کتله (عطالت)

(iii) مقاومت یا لزوجیت او داسې نور

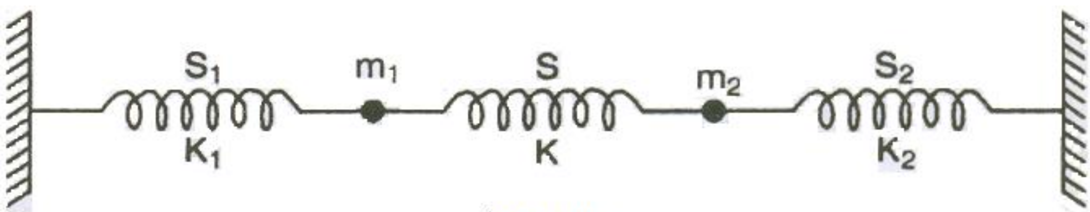
د مقاومت، لزوجیت او داسې نورو په واسطه د جوړه کیدو د حالت په څیر، د سختي یا عطالت په واسطه د جوړه کیدو په حالت کې، د انرژي د خپریدو ضایعات شتون نه لري.

دا مو باید په پام کې وي چې چلونه او چلیدونکی سیستم یو له بل څخه د بیلیدو وړ نه دي.

د جوړه یې سیستمونو مثالونه

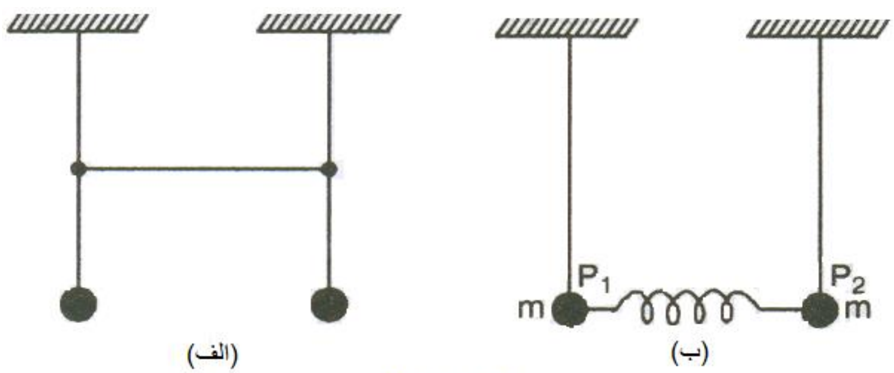
د جوړه یې اهتزاز ورکوونکو ځیني مثالونه لاندې دي.

۱ د m_1 او m_2 دوه کتلې چې K_1 او K_2 قوي (یا سختي) ثوابتو لرونکو S_1 او S_2 فنرونو پورې نښلول شوي او د K قوي ثابت لرونکي S فنر په واسطه یو له بل سره تړل شوي دي لکه په ۱.۲۲.۵ شکل کې چې ښودل شوي دي.



۱.۲۲.۵ شکل

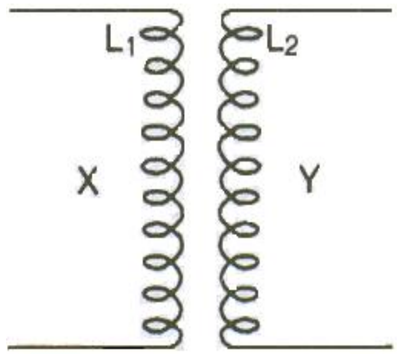
۲ دوه ساده شاقولونه، چې یو له بل سره د یوه تار [۲.۲۲.۵(الف) شکل] یا یو فنر [۲.۲۲.۵(ب) شکل] په واسطه نښلول شوي دي.



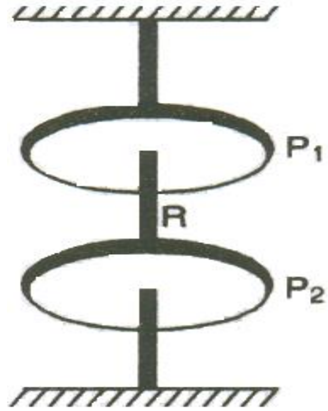
۲.۲۲.۵ شکل

۳ دوه P_1 او P_2 تارسیونال شاقولونه چې د R میلې په واسطه یو له بل سره لکه په ۳.۲۲.۵ شکل کې چې ښودل شوي، تړل شوي دي.

۴ X او Y دوه سرکټونه چې په القايي توګه سره جوړه شوي دي لکه په ۴.۲۵.۲ شکل کې چې ښودل کېږي.



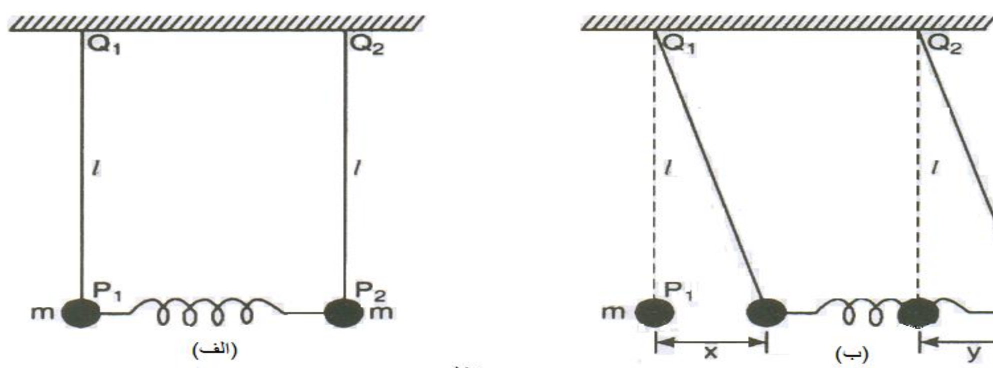
۴.۲۲.۵ شکل



۳.۲۲.۵ شکل

۲۳.۵ دوه جوړه يې اهتزاز ورکوونکي يا دوه سخت جوړه يې ساده شاقولونه

د m په کتله P_1 او P_2 ګلولې لرونکي دوه ورته ساده شاقولونه چې د l اوږدوالي لرونکي نه کشيدونکي، بې کتلې او د ارتجاعيت وړ تار په واسطه له يوې محکمې پايې ځخه ځوړند لکه چې په ۱.۲۳.۵ (الف) شکل کې ښودل شوي په پام کې ونيسئ. دواړه شاقولونه د K قوې ثابت لرونکي فنر په واسطه جوړه شوي داسې چې د تعادل په موقعيتونو کې تارونه عمود او په فنر کې هيڅ انقباض او انبساط شتون نه لري.

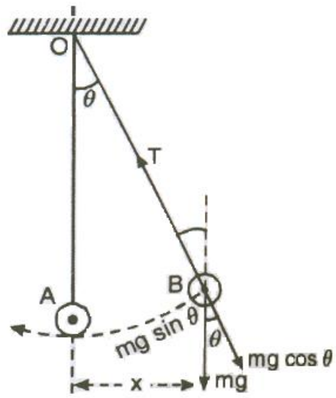


۱.۲۳.۵ شکل

د تعادل له موقعيت ځخه د سيستم په بې ځايه کولو، دواړه شاقولونه په اهتزازاتو پيل کوي. فرض کړئ چې په t وخت کې د P_1 او P_2 ګلولو موقعيتونه داسې دي لکه په ۱.۲۳.۵ (ب) شکل کې چې ښودل شوي دي. له دې ځايه د P_1 او P_2 ګلولو ځای بدلونونه د هغوی د اړوند تعادل موقعيتونو ځخه په ترتيب سره x او y دي. هر شاقول د لاندې دوو قواو د اغيز لاندې اهتزاز کوي.

(i) د وزن له امله بیرته ګرځوونکې قوه

د P_1 ګلولې په بې ځایه شوي موقعیت کې، هغه وخت چې د هغه تار له عمود سره θ زاویه جوړوي لکه چې په ۲.۲۳.۵ شکل کې ښودل شوي، د هغه وزن mg په دوو عمودي مرکبو ویشل کیږي.



۲.۲۳.۵ شکل

(الف) $mg\cos\theta$ چې په تار کې د T کښښ په واسطه موازنه مومي.

(ب) $mg\sin\theta$ چې بیرته ګرځونکې قوه رامنځ ته کوي.

$\therefore$ په P_1 باندې د هغه په موقعیت کې بیرته ګرځونکې قوه عبارت ده له

$$F_1 = -mg\sin\theta$$

منفي علامه ښیي چې F_1 قوه میل لري چې ګلوله د هغې د تعادل موقعیت ته راولي. په هغه حالت کې چې θ (چې په رادیان اندازه کیږي) کوچنۍ وي، نو

$$\sin\theta = \theta = \frac{x}{l}$$

او

$\therefore$

$$F_1 = \frac{-mgx}{l}$$

په عین توګه کله چې د P_2 ګلولې ځای بدلون د هغه د تعادل له موقعیت څخه y وي نو په هغه باندې بیرته ګرځونکې قوه عبارت ده له

$$F_2 = \frac{-mgy}{l}$$

(ii) د فنر له امله بیرته ګرځونکې قوه

د فنر په اوږدوالي کې تغیر لکه چې لیدل کیږي د P_1 د تعادل له موقعیت څخه $(y-x)$ او د P_2 د تعادل له موقعیت څخه $(x-y)$ دی.

څکه نو، د فنر له امله په P_1 باندې بیرته ګرځونکې قوه عبارت ده له

$$F_1' = -S(x-y)$$

او P_2 باندې بيرته ګرځونکې قوه

$$F_2' = -S(y - x)$$

د جوړه يي سيستم د حرکت معادله.

د P_1 او P_2 ګلولو د حرکت معادلې عبارت دي له

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{mg}{l}\right)x - S(x - y) \qquad \text{... (۱.۲۳.۵)}$$

او

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{mg}{l}\right)y - S(y - x) \qquad \text{... (۲.۲۳.۵)}$$

دا دواړه معادلې جوړه يي معادلې بلل کېږي ځکه هره يوه له دې معادلو څخه دواړه ازاد متحولين x او y لري. دا معادلې په لاندې توګه توضيح کيداى شي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x - \frac{S}{m}(x - y) \qquad \text{... (۳.۲۳.۵)}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y - \frac{S}{m}(y - x) \qquad \text{... (۴.۲۳.۵)}$$

د (۳.۲۳.۵) او (۴.۲۳.۵) معادلو په جمع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + y) = -\frac{g}{l}(x + y) \qquad \text{... (۵.۲۳.۵)}$$

له (۳.۲۳.۵) څخه د (۴.۲۳.۵) معادلې په تفريق کولو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - y) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2S}{m}\right)(x - y) \qquad \text{... (۶.۲۳.۵)}$$

فرض کړئ چې $x + y = X$

او $x - y = Y$ ... (۷.۲۳.۵)

د X او Y متحولين داسې تعريف کېږي چې دوى تابع متحولين بلل کېږي.

(۵.۲۳.۵) او (۶.۲۳.۵) معادلې به په ترتيب سره

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{g}{l}X \qquad \text{... (۸.۲۳.۵)}$$

او $$\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2} = -\left(\frac{\mathrm{g}}{l} + \frac{2\mathrm{K}}{m}\right)\mathrm{Y} \quad \ldots (۹.۲۳.۵)$$

دا معادلې غیر جوړه یي معادلې بلل کېږي ځکه هره یوه یواځې یو متحول یا X یا Y لري.

اوس، $\frac{\mathrm{g}}{l}$ او $\left(\frac{\mathrm{g}}{l} + \frac{2\mathrm{K}}{m}\right)$ ثوابت دي. اجازه راکړئ چې $\frac{\mathrm{g}}{l} = \omega_1^2$ او $\left(\frac{\mathrm{g}}{l} + \frac{2\mathrm{K}}{m}\right) = \omega_2^2$ ونیسو. نو (۸.۱۸.۶) او (۹.۱۸.۶) معادلې په لاندې توګه توضیح کیدای شي

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \omega_1^2\mathrm{X} \quad \ldots (۱۰.۲۳.۵)$$

او $$\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2} = \omega_2^2\mathrm{Y} \quad \ldots (۱۱.۲۳.۵)$$

دا دواړه معادلې په ترتیب سره د ω_1 او ω_2 زاویوي فریکونسیو ساده هارمونیکي حرکتونه ښیي. دا معادلې د دوو جوړه یي شاقولونو اهتزازي کړه وړه توضیح کوي او د جوړه یي اهتزاز ورکوونکي د حرکت معادلې دي.

عادي مختصات، موډونه او فریکونسۍ

X او Y تابع متحولین د جوړه یي سیستم عادي مختصات بلل کېږي. عادي مختصات هغه پارامترونه دي چې له مخې یې د جوړه یي سیستم هارمونیکي اهتزازات د ثابتو ضریبونو لرونکو خطي تفاضلي معادلو د یوه سیټ په توګه توضیح کیداشي. د جوړه یي اهتزاز ورکوونکي د اهتزاز طریقه یا څرنګوالی د هغه د اهتزاز موډ بلل کېږي او دا کیدای شي هارمونیکي یا غیر هارمونیکي وي. د اهتزاز هارمونیکي موډونه د ثابتو ضریبونو لرونکو خطي تفاضلي معادلو لکه (۱۰.۲۳.۵) او (۱۱.۲۳.۵) په شکل توضیح کیدای شي او د سیستم د اهتزازاتو نارمل موډونه بلل کېږي. هر هارمونیکي موډ د یوې عادي مختصې په واسطه توضیح کېږي. د دوه جوړه یي شاقولونو په شته حالت کې، دوه نارمل موډونه شتون لري، یو د X او بل د Y په واسطه توضیح کېږي.

د اهتزاز هر نارمل موډ خپله ځانګړې فریکونسي لري چې د عادي حالت فریکونسي بلل کېږي. یعنې

$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{l}}$ او $\omega_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{l} + \frac{2\mathrm{S}}{m}}$ د جوړه یي اهتزاز ورکوونکي دوه عادي موډ فریکونسي دي، چې مونږ وڅیړلې. دا هم څرګنده ده چې د X –موډ فریکونسي د دوو ساده شاقولونو څخه د هر یوه په یواځې ځان د اهتزاز د طبیعي فریکونسي سره برابره ده یعنې $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{l}}$. د Y –موډ فریکونسي د X –موډ فریکونسي څخه لوړه او عبارت ده له

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2S}{m}}$$

هم فاز او غیر هم فاز موډونه

جوړه يي سيستم، په يوه وخت کې، يا X –موډ يا Y –موډ سرته رسولی شي. اجازه راکړئ چې په دوو عادي موډونو کې د دوو شاقولونو ترمنځ د فاز اړيکه وڅيړو.

کله چې جوړه يي سيستم X –موډ سرته رسوي، Y –موډ شتون نه لري. دا په دې دلالت کوي چې $Y = 0$ دی. په بل عبارت $x - y = 0$ يا $x = y$. په بله مانا، کله چې د P_1 شاقول ځای بدلون مثبت وي نو د P_2 هم مثبت وي. دواړه ځای بدلونونه صفر قيمت لري، په يو وخت کې اعظمي مثبت او منفي قيمتونه. ځکه نو، د دواړو شاقولونو هارمونيکي حرکتونه يو له بل سره هم فاز دي. دا ځکه X –موډ هم فاز موډ بلل کېږي.

کله چې جوړه يي سيستم Y –موډ سرته رسوي، X –موډ شتون نه لري. په بل عبارت $X = 0$ دی. يا $x + y = 0$ چې $x = -y$ ورڅخه لاس ته راځي. په بله مانا، کله چې د P_1 شاقول ځای بدلون مثبت وي نو د P_2 منفي وي، خو د P_1 سره مساوي وي، په صفر ځای بدلونونو کې، دواړه شاقولونه به په مخالف لوري حرکت کوي. له دې ځايه، د دواړو شاقولونو هارمونيکي حرکت 180° غير هم فاز دی. نو، د Y –موډ غير هم فاز موډ بلل کېږي.

د موډ شکل يا جوړښت

د x او y نسبت، په بل عبارت د دوو کتلو د لحظوي ځای بدلونونو نسبت د موډ شکل يا جوړښت بلل کېږي. دا د جوړه يي سيستم شکل يا جوړښت ټاکي.

د هم فازه موډ شکل$= +1$ او د غير هم فازه -1 دی.

۲۴.۵ (i) د عادي موډونو د تفاضلي معادلو حل **(ii) د عادي موډونو د انطباق په توګه د دوو شاقولونو د حرکت عمومي حل** **(iii) د شاقولونو ترمنځ د انرژي تبادله**

(i) په ۱۸.۶ برخه کې، مونږ د دوو سختيو جوړو ورته ساده شاقولونو د جوړه يي سيستم تفاضلي معادلې لاس ته راوړې دي لکه:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_1^2 X = 0 \qquad \text{... (I)}$$

او

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \omega_2^2 Y = 0 \qquad \text{... (II)}$$

داسې چې $\omega_1 = \sqrt{g/l} = \omega_0$ او $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2S/m} = \sqrt{\omega_0^2 + 2S/m}$.

مخکینی په هم فازه موډ کې د جوړه یي سیستم د حرکت معادله او وروستی یې په غیر هم فازه موډ کې ده.

د اهتزازاتو د هم فازه موډ حل

د هم فازه موډ د تفاضلي معادلې د حل کولو لپاره، مونږ $Y = 0$ په پام کې نیسو، په بل عبارت $x = y$.

ځکه نو، x او y دواړه مساوي اعظمي قیمتونه لري. په بل عبارت د دواړو شاقولونو امپلیتیودونه ممکن مساوي او هر یو په a_1 سره ښودل کیږي. ځرنګه چې دواړه شاقولونه په ω_1 فریکونسي سره ساده هارمونیکي اهتزازات سرته رسوي ځکه یي نو ځای بدلونونه عبارت دي له

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

دلته ϕ_1 لومړنی فاز دی. د هم فاز موډ عادي مختصه عبارت ده له:

$$X = x + y = 2a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

چې په لاندې توګه لیکل کیدای شي

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \qquad \text{... (۱.۲۴.۵)}$$

داسې چې $X_0 = 2a_1$ د X ، د هم فاز موډ عادي مختصې اعظمي قیمت دی.

(۱.۲۴.۵) معادله د هم فاز موډ د تفاضلي معادلې حل ورکوي.

د اهتزازاتو د غیر هم فازه موډ حل

په غیر هم فازه موډ کې $X = 0$ دی. په بل عبارت $x + y = 0$ یا $x = y$.

ځکه نو، د x او y اعظمي قیمتونه به په اندازه کې سره مساوي (د مثال په توګه a_2 به وي) خو لوري یې سره مخالف دي. ځرنګه چې دواړه شاقولونه په ω_2 فریکونسي سره ساده هارمونیکي اهتزازات سرته رسوي، ځکه یې نوځای بدلونونه عبارت دي له

$$x = a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

او

$$y = -a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

دلته ϕ_2 لومړنی فاز دی. د غیر هم فاز موډ عادي مختصه عبارت ده له:

$$Y = x - y = 2a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

چې په لاندې توګه لیکل کیدای شي:

$$Y = Y_0 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \text{... (٢.٢۴.۵)}$$

داسي چې $Y_0 = 2a_2$ د Y ، د هم فاز موډ عادي مختصې اعظمي قیمت دی.

(٢.٢۴.۵) معادله د غیر هم فاز موډ د تفاضلي معادلې حل ورکوي.

(ii) د دوو شاقولونو د ځای بدلونونو عمومي افاده

د دوو اهتزاز ورکوونکو د هارمونیکي حرکت عمومي افاده په لاندې ډول لاس ته راتللی شي:

د x افاده

پوهیږو چې $X = x + y$ او $Y = x - y$. ځکه نو،

$$x = \frac{X+Y}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}[2a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + 2a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)]$$

یا

$$= a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \text{... (٣.٢۴.۵)}$$

د y افاده

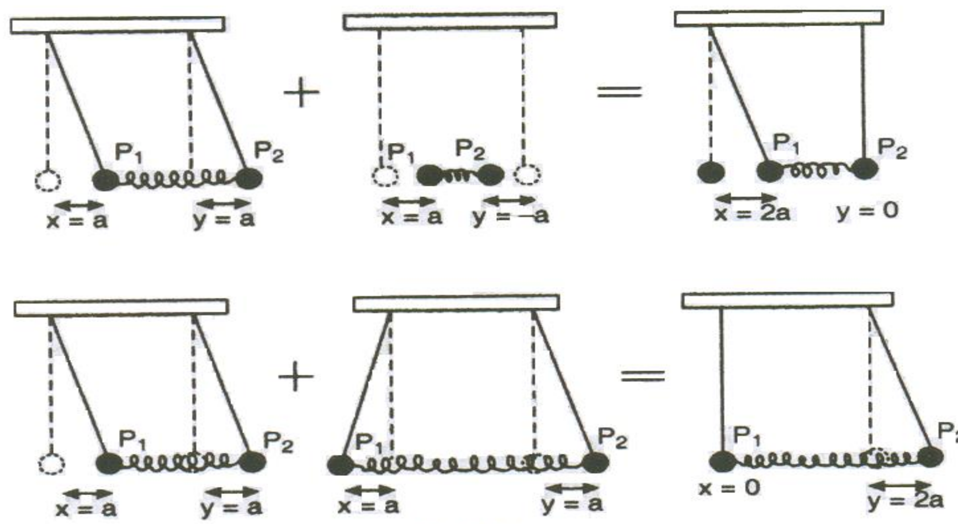
په عین توګه

$$y = \frac{X-Y}{2}$$

چې

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad \text{... (۴.٢۴.۵)}$$

(٣.٢۴.۵) او (۴.٢۴.۵) معادلې ښیي چې د دوو سختیو جوړه یي اهتزاز ورکوونکو هارمونیکي حرکت د جوړه یي سیستم د اهتزاز د دوو عادي موډونو د انطباق په توګه په پام کې نیول کیدای شي. دا په هندسي توګه په ۱.٢۴.۵ شکل کې ښودل شوي دي.



۱.۲۴.۵ شکل

(iii) د ځانګړو شاقولونو ترمنځ د انرژي تبادله

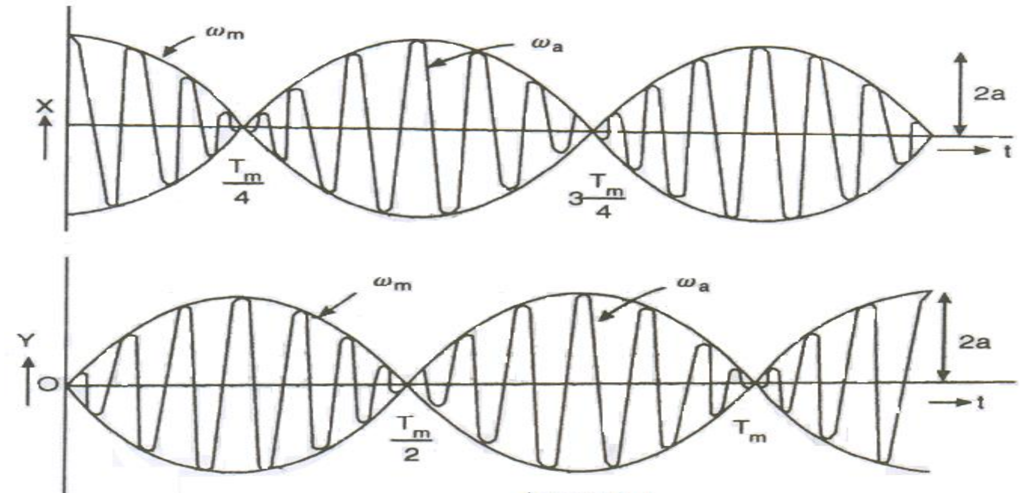
ددې لپاره چې د شاقولونو ترمنځ انرژي تبادله تجزیه کړو، مونږ د ساده کووني فرضیې جوړو چې $\phi_1 = \phi_2 = 0$ او (د مثال په توګه) $a_1 = a_2 = a$. د دغو فرضیو لاندې، له (۳.۲۴.۵) او (۲.۲۴.۵) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې:

$$x = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t$$

یا $$x = 2a\cos\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} \quad \ldots(۵.۲۴.۵)$$

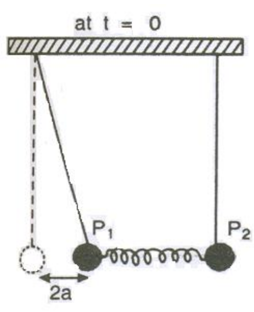
او $$y = a\cos\omega_1 t - a\cos\omega_2 t$$

یا $$y = 2a\sin\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\sin\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} \quad \ldots(۶.۲۴.۵)$$

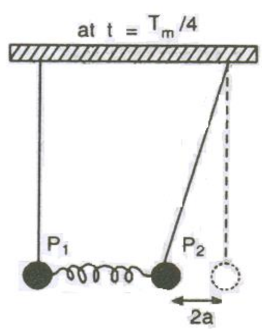


شکل ۲.۲۴.۵

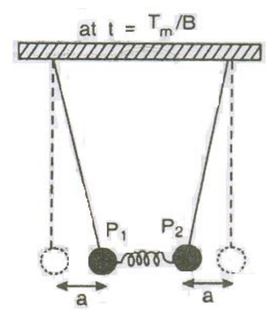
له (۵.۲۴.۵) او (۶.۲۴.۵) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې د دواړو شاقولونو امپلیتیود له (د مثال په توګه) $\omega_m = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ فریکونسي سره په ساینوسي توګه تغیر کوي. ω_m برابرونکي فریکونسي یا د ضربان فریکونسي بلل کېږي. همدارنګه، دواړه شاقولونه په $\omega_a = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ فریکونسي اهتزاز کوي، داسې چې ω_a د جوړه يي سیستم د دوو عادي موډونو متوسطه فریکونسي بلل کېږي. د دواړو شاقولونو اهتزازات او د هغوی د امپلیتیودونو تغیر په ۲.۲۴.۵ شکل کې ښودل شوي دي. دا څرګندنه ده چې په $t = 0$ کې $x = 2a$ دی، نو $y = 0$ او کله چې $x = 0$ وي، $y = 2a$ کېږي. په بله مانا، که مونږ په $x = 2a$ او $y = 0$ سره پیل کړو لکه په ۳.۲۴.۵ شکل کې چې ښودل شوي دي، نو د برابرونکي یا ضربان پریود $(T_m = 2/\pi/\omega_m)$ د یو پر څلور څخه وروسته ، په بل عبارت په $t = T_m/4$ کې به، مونږ $x = 0$ او $y = 2a$ لاس ته راوړو لکه په ۴.۲۴.۵ شکل کې چې ښودل شوي دي.



شکل ۳.۲۴.۵



شکل ۴.۲۴.۵



شکل ۵.۲۴.۵

په $t = T_m/8$ وخت کې به، هر شاقول د a په اندازه ځای بدلون کړی وي او د سیستم جوړښت به داسې وي لکه په ۵.۱۹.۶ شکل کې چې ښودل شوی دی. اوس، د ساده هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي د هغه دامپلیتیود له مربع سره متناسبه ده. څکه نو، لاس ته راوړو چې په $t =$

0 کې، ټوله انرژي له P_1 شاقول سره ده، په $t = {}^{T_m}/_8$ کې، دواړه شاقولونه مساوي انرژي لري او په $t = {}^{T_m}/_4$ کې، ټوله انرژي له P_2 شاقول سره ده. له دې ځایه، دواړه شاقولونه په پرله پسې توګه انرژي تبادله کوي. د سیستم مجموعي انرژي به عین شي وي، خو له یوه شاقول څخه به بل ته د انرژي پر له پسې بهیدنه وي.

پورتنی نتیجه په ریاضیکي توګه هم په لاندې ډول لاس ته راتلای شي.

فرض کړئ د دواړو شاقولونو ترمنځ اړیکه ډېره کمزورې ده. په بل عبارت، فنر په ځان کې ټوله انرژي نه ذخیره کوي. په دې حالت کې، مونږ فرض کوو چې ټوله انرژي له شاقولونو سره ده، او برابرونکی امپلیتیود یا د ضربان امپلیتیودونه $2a\cos\omega_m t$ او $2a\sin\omega_m t$ داسې فرض کیدای شي چې د اهتزاز په هره دوره کې ثابت پاتې شي. اوس، د یوه ساده هارمونیکي اهتزاز ورکوونکي انرژي عبارت ده له

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

داسې چې ω فریکونسي او A امپلیتیود دی.

دلته، د P_1 شاقول لپاره ، مونږ $A = 2a\cos\omega_m t$ او د P_2 شاقول لپاره، $A = 2a\sin\omega_m t$ لرو.

∴ د P_1 شاقول مجموعي انرژي عبارت ده له:

$$U_1 = \frac{1}{2}m{\omega_a}^2(2a\cos\omega_m t)^2$$

یا

$$U_1 = 2ma^2{\omega_a}^2\cos^2\omega_m t$$

او د P_2 شاقول عبارت ده له

$$U_2 = 2ma^2{\omega_a}^2\sin^2\omega_m t$$

د جوړه یي سیستم مجموعي انرژي عبارت ده له:

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 \\ &= 2ma^2{\omega_a}^2(\cos^2\omega_m t + \sin^2\omega_m t) \\ &= 2ma^2{\omega_a}^2 \end{aligned}$$

څکه نو، د دواړو شاقولونو انرژي په لاندې ډول لیکل کیدای شي

$$U_1 = U_0 \cos^2 \omega_m t$$

او
$$U_2 = U_0 \sin^2 \omega_m t$$

په څرګنده توګه $U_0 = U_1 + U_2$ مجموعي انرژي ثابته او د دواړو شاقولونو ترمنځ د انرژي یوه پرله پسې تبادله شتون لري.

د عادي موډونو ترمنځ د انرژي تبادله شتون نه لري

د دوو عادي موډونو لپاره، لرو چې:

$$X = 2a \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

او
$$Y = 2a \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$

دا څرګنده ده چې د سیستم مجموعي انرژي په هم فاز (یا X موډ) کې عبارت ده له:

$$U_x = \frac{1}{2} m\omega_1^2 (2a^2)$$

یا
$$U_x = 2ma^2\omega_1^2$$

د Y موډ یا د غیر هم فازه موډ مجموعي انرژي

$$U_y = 2ma^2\omega_2^2$$

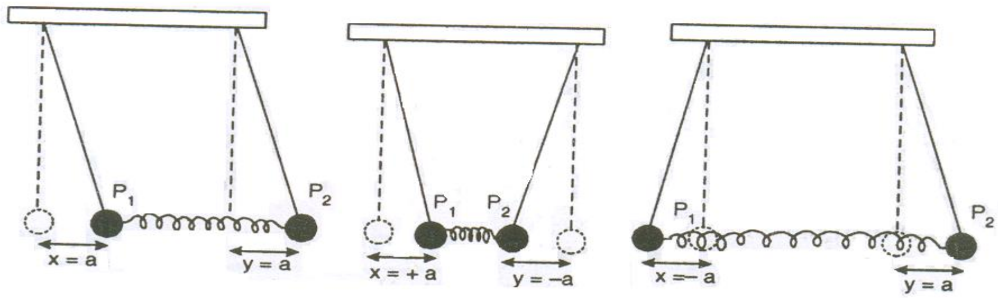
U_x او U_y همدارنګه دواړه له وخت سره تغیر نه کوي، دوی ثابت کمیتونه دي. څکه نو، مونږ دې نتیجې ته رسیږو چې له یوه موډ څخه بل ته د انرژي تبادله نه رامنځ ته کیږي.

۲۵.۵ د عادي موډونو پاریدنه

د دوو سختیو په شاقولونو کې عادي موډونه په لاندې ډول پارول کیږي:

د هم فازه موډونو پاریدنه

په دې موډ کې، د دواړو شاقولونو ځای بدلونونه همیشه مساوي او په یوه لوري وي. څکه نو، ددې موډ د پارولو لپاره، دواړساده شاقولونه باید په مساوي اندازه په یوه لوري (د مثال په توګه ښی لوري ته) بې ځایه شي لکه په ۱.۲۰.۶ شکل کې چې ښودل شوي دي او بیا دې خپلو ځانونو ته خوشي کړل شي.



د غیر هم فازه موډ پاریدنه

په دې موډ کې، د دواړو شاقولونو ځای بدلونونه همیشه د اندازې له مخې مساوي خو لوري یې مخالف وي. ځکه نو، د دې موډ د پارولو لپاره، دواړه ساده شاقولونه باید په مساوي اندازه په مخالفو لوریو بې ځایه شي لکه په ۲.۲۵.۵ او ۳.۲۵.۵ شکلونو کې چې ښودل شوي دي او بیا دې خپلو ځانونو ته خوشې کړل شي.

۲۶.۵ د هم فاز او غیر هم فاز موډونو ځانګړتیاوې

د دوو سختیو جوړه یې ورته شاقولونه په دوو عادي موډونو کې، چې یو د (۱۰.۲۳.۵) معادلې او بل د (۱۱.۲۳.۵) معادلې په واسطه توضیح کېږي اهتزاز کولای شي. اجازه راکړئ چې ځانګړتیاوې یې وڅیړو.

د هم فاز موډ ځانګړتیاوې

(الف) د نوموړي موډ معادله عبارت ده له:

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \omega_1^2 \mathrm{X} \qquad \text{... (I)}$$

دا هغه وخت، چې $\mathrm{Y} = 0$ وي د سیستم اهتزازي کړه وړه څېړي. په بل عبارت، کله چې:

$$x - y = 0$$

یا

$$x = y$$

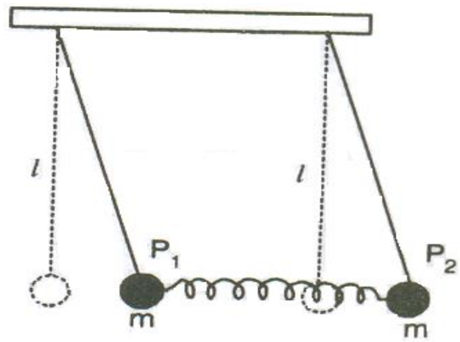
له دې ځایه، په دې موډ کې، د دواړو کتلو ځای بدلونونه د اندازې او همدارنګه د لورې له مخې سره مساوي دي. د همدې علت له امله، دا د جوړه یې سیستم هم فاز موډ بلل کېږي. په بل عبارت، دواړه کتلې په پرله پسې توګه یو له بل سره هم فاز اهتزاز کوي.

(ب) د دواړو کتلو (د ساده شاقولونو ګلولې) امپلیتیودونه سره مساوي د مثال په توګه a دي.

(ج) د نوموړي موډ د جوړښت شکل عبارت دی له:

$$\frac{x}{y} = +1$$

(د) موډ د دواړو کتلو په یوه لوري په عین اندازه د بې ځایه کولو او بیا هغوی ته په خپله د اهتزاز کولو اجازې ورکونې په واسطه پارول کیدای شي.



۱.۲۶.۵ شکل

(ه) هر شاقول (اهتزاز ورکوونکی) په $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ فریکونسي، چې د هر شاقول د ازادو اهتزازاتو طبیعي فریکونسي ده ساده هارمونیکي اهتزازات سرته رسوي.

(و) په دې موډ کې، د جوړې حد د کتلو حرکت هیڅ نه اغیزمن کوي. د جوړه کوونې فنر نه انبساط او نه انقباض کوي او د اهتزازاتو په جریان کې د دواړو کتلو ترمنځ واټن ثابت پاتې کېږي.

(ز) ۱.۲۶.۵ شکل د t په هره لحظه کې د کتلو موقعیت ښیي.

(ح) څرنګه چې X په ساده هارمونیکي توګه تغیر کوي او د (I) معادلې له حل څخه عبارت دی، ځکه نو، لیکلای شو:

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

که د x او y اعظمي قیمت a وي، نو

$$X_0 = 2a$$

دا د عادي موډ امپلیتیود بلل کېږي.

دا باید په پام کې ولرو چې X_0 د هر شاقول د اهتزاز امپلیتیود نه دی، چې د a په واسطه ښودل کېږي. له بلې خوا، $a = \frac{X_0}{2}$. له دې ځایه، X_0 یو خالص ریاضیکي کمیت دی.

(ط) دواړه شاقولونه په یو وخت کې د هغوی د تعادل له موقعیتونو یا یو له اعظمي موقعیتونو څخه تیریږي.

د غیر هم فازه موډ ځانګړتیاوې

(الف) د نوموړي موډ معادله عبارت ده له:

$$\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2} + \omega_2^2\mathrm{Y} = 0 \qquad \ldots \text{(II)}$$

دا د جوړه يي سيستم هغه وخت چې $\mathrm{X} = 0$ وي، اهتزازي کړه وړه څيړي. په بل عبارت، کله چې

$$x + y = 0$$

يا

$$x = -y$$

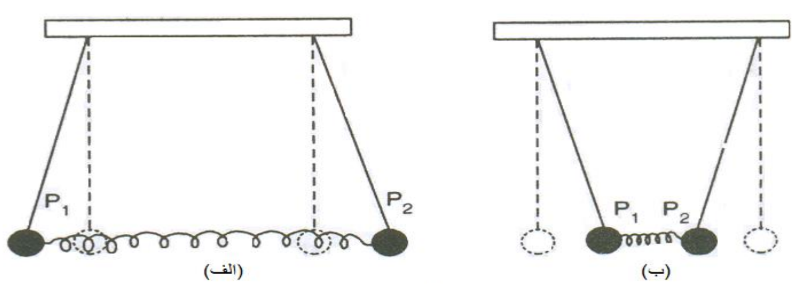
له دې ځايه، په دې موډ کې، د هرې يوې کتلې ځای بدلون د اندازې له مخې مساوي خو لوری يې له بلې کتلې سره مخالف دی. د دې علت له امله، دا د جوړه يي سيستم غير هم فازه موډ بلل کېږي. په بل عبارت، دواړه کتلې په پرله پسې توګه نظر يو بل ته د π په اندازه غير هم فازه اهتزاز کوي.

(ب) د دواړو کتلو (د ساده شاقولونو ګلولې) امپليتيودونه عين شی د مثال په توګه a دي.

(ج) د نوموړي موډ د جوړښت شکل عبارت دی له:

$$\frac{x}{y} = -1$$

(د) موډ د دواړو کتلو په مخالف لوري په عين اندازه د بې ځايه کولو او بيا هغوی ته په خپله د اهتزاز کولو اجازې ورکونې په واسطه پارول کيدای شي.



شکل ۲.۲۶.۵

(ه) هر شاقول (اهتزاز ورکوونکی) په $\omega_2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2S}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\omega_0^2 + \frac{2S}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ فريکونسي، چې د هر شاقول د ازادو اهتزازاتو له طبيعي فريکونسي څخه زياته ده ساده هارمونيکي اهتزازات سرته رسوي.

(و) په دې موډ کې، د جوړې حد د دواړو کتلو په حرکت غلبه مومي او د اهتزازاتو فريکونسي زياتوي. دا ځکه رامنځته کېږي چې د جوړه کووني فنر يا د انبساط او يا د انقباض په حالت کې

دی. په یو وخت پریود (اهتزاز) کې، کله چې کتلې د هغوی د تعادل له موقعیتونو څخه تیریږي فنر خپل عادي اوږدولی دوه ځلې ترلاسه کوي.

(ز) ۲.۲۶.۵ شکل په هره لحظه کې د جوړه کووني فنر د انقباض یا انبساط په حالتونو کې د کتلو موقعیت ښیي.

(ح) څرنګه چې Y په ساده هارمونیکي توګه تغیر کوي او د ۲.۱۹.۴ معادلې له حل څخه عبارت دی، ځکه نو، لیکلای شو:

$$Y = Y_0 \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$

که د x او y اعظمي قیمت a وي، نو

$$Y_0 = 2a$$

دا د عادي موډ امپلیتیود بلل کیږي.

دا باید په پام کې ولرو چې Y_0 د هر شاقول د اهتزاز امپلیتیود نه دی، چې د a په واسطه ښودل کیږي. له بلې خوا، $a = \frac{Y_0}{2}$. له دې ځایه، د X_0 په څیر Y_0 هم یو خالص ریاضیکي کمیت دی.

(ط) دواړه شاقولونه په یو وخت کې د هغوی د تعادل له موقعیتونو څخه تیریږي یا د هغوی په مخالفو اعظمي موقعیتونو کې دي.

<u>۲۷.۵ د ازادۍ درجې</u>

د ازادو لارو شمیر چې په هغوی کې سیستم انرژي تر لاسه کولای شي د سیستم د ازادۍ درجې بلل کیږي.

یو ساده شاقول د ازادۍ دوه درجې لري ځکه نوموړی انرژي د پوتنسیال او همدارنګه د حرکي انرژیو په شکل کې تر لاسه کولای شي. په عین توګه، په یوه فنر پورې نښلول شوې کتله د ازادۍ دوه درجې لري.

۳.۶ مثال. د دوو ورته شاقولونو د یوه جوړه یي سیستم د مجموعي انرژي افاده پیدا کړئ او وښایاست چې د ازادۍ څلور درجې لري.

حل.

فرض کړئ چې جوړه یي اهتزاز له دوو ورته ساده شاقولونو څخه جوړ شوی دی، چې هر یو د m په کتله ګلوله لري او د ګلولو ځای بدلونونه د x او y په واسطه ورکړل شوي دي.

د جوړه يي سيستم حرکي انرژي د دواړو کتلو د حرکي انرژيو له مجموعې سره مساوي ده. په بل عبارت:

$$U_k = \frac{1}{2}m(dx/dt)^2 + \frac{1}{2}m(dy/dt)^2$$

خو $x = \frac{X+Y}{2}$ او $y = \frac{X-Y}{2}$

$$\therefore \quad U_k = \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{X+Y}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}m\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + 2\frac{dX}{dt}\frac{dY}{dt}\right] + \frac{1}{4}m\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 - 2\frac{dX}{dt}\frac{dY}{dt}\right]$$

يا $$U_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 \quad \text{... (۱.۲۷.۵)}$$

چې په لاندې توګه ليکل کيدای شي:

$$U_k = a\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + b\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 \quad \text{... (۲.۲۷.۵)}$$

داسې چې $a = b = \frac{1}{2}m$

د سيستم پوتنسيال انرژي د دوو کتلو د پوتنسيال انرژيو او په فنر کې د ذخيره شوې پوتنسيال انرژي مجموعه ده. په بل عبارت

$$U_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2}S(x-y)^2$$

داسې چې S د فنر ثابت او $(x-y)$ د فنر اوږديدنه ده.

پورتنی افاده، په $x = \frac{X+Y}{2}$ ، $y = \frac{X-Y}{2}$ او $x - y = Y$ عوض کوونې سره راکوي چې

$$U_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}SY^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2\left[\frac{1}{4}\{(X+Y)^2 + (X-Y)^2\}\right] + \frac{1}{2}SY^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2\left[\frac{1}{2}(2X^2 + 2Y^2)\right] + \frac{1}{2}SY^2$$

$$= \frac{1}{4} m\omega_0^2 X^2 + \frac{1}{4}[m\omega_0^2 + 2S] Y^2$$

یا $U_p = cX^2 + dY^2$ ... (۳.۲۷.۵)

داسې چې $c = \frac{1}{4} m\omega_0^2$ او $d = \frac{1}{4}[m\omega_0^2 S]$

د جوړه يي سيستم مجموعي انرژي عبارت ده له:

$$U = U_k + U_p$$

یا

$$U = a\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + b\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + cX^2 + dY^2$$

دا ښرګنده ده چې سيستم په څلورو مختلفو لارو انرژي لاس ته راوړلی شي نو د شاقولونو يو جوړه يي سيستم د ازادئ څلور درجې لري.

۲۸.۵ د عادي موډونو ارزښت

يو جوړه يي سيستم په بې شميره لارو اهتزازات پيل کولای شي او کيدای شي چې په ټولو دغسې حالاتو کې اهتزازات پريوديک نه وي. عادي موډونه يواځنيني ځانګړې لارې دي چې په هغوی کې د جوړه يي سيستم هر جوړونکی په عين فريکونسي، مساوي اندازه او د ځای بدلونونو په عين نسبت ساده هارمونيکي اهتزازات سرته رسوي(۲۵.۵ برخه وګورئ). د عادي موډونو د پيدا کولو ارزښت په دې حقيقت کې نغښتی دی چې د جوړه يي سيستم عمومي حرکت د عادي موډونو له انطباق څخه عبارت دی. (۲۴.۵ (ii) برخه وګورئ). څکه نو، دا مونږ د عادي موډونو په هکله پوهيږو، بيا مونږ عمومي حرکت د لومړنيو شرطونو څخه چې لاندې توضيح شوي ټاکلی شو.

فرض کړئ چې عادي مختصات عبارت دي له

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

$$Y = Y_0 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

بیا

$$x = \frac{X+Y}{2}$$

یا

$$x = \frac{X_0}{2}\cos(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{Y_0}{2}\cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

او

$$y = \frac{X-Y}{2}$$

یا $$y=\frac{X_0}{2}\cos(\omega_1 t-\phi_1)+\frac{Y_0}{2}\cos(\omega_2 t-\phi_2)$$

دلته X_0 ، Y_0 ، ϕ_1 او ϕ_2 څلور ناپېژندل شوي کميتونه دي. دا د دوه جوړه يي اهتزاز ورکوونکي له لومړنيو شرطونو (ځای بدلونونو، سرعتونو او داسې نور) څخه ټاکل کېږي. يو ځلې چې دا کميتونه وپېژندل شي، د جوړه يي سيستم عمومي حرکت هم پېژندل کېږي. دلته د جوړه يي سيستم د عادي موډونو د مطالعه کولو ارزښت رامنځ ته کېږي.

۲۹.۵ د عادي موډونو ټاکل

د دوو ورته[9] اهتزاز ورکوونکو (ساده شاقولونو) يو جوړه يي سيستم په پام کې ونيسئ. په جوړه يي حالت کې د هغوی د عمومي حرکت تفاضلي معادلې په لاندې ډول ليکل کيدای شي (۲۴.۵ برخه وګورئ).

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\frac{x}{l}-S(x-y) \qquad \text{... (I)}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg\frac{y}{l}-S(y-x) \qquad \text{... (II)}$$

داسې چې x او y د دواړو شاقولونو لحظوي ځای بدلونونه دي. فرض کړئ چې د دواړو معادلو عمومي حلونه به:

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos\omega t$$

داسې چې A_1 او A_2 د دواړو شاقولونو امپليتيودونه او په ω فريکونسي اهتزاز کوي. په (I) او (II) معادلو کې په عوض کوونه، لاس ته راوړو چې:

$$-m\omega^2A_1\cos\omega t = -m\frac{g}{l}A_1\cos\omega t - S(A_1-A_2)\cos\omega t$$

یا $$-m\omega^2A_1=-m\frac{g}{l}A_1-S(A_1-A_2) \qquad \text{... (III)}$$

او $$-m\omega^2A_2\cos\omega t = -m\frac{g}{l}A_2\cos\omega t - S(A_2-A_1)\cos\omega t$$

یا $$-m\omega^2A_2=-m\frac{g}{l}A_2-S(A_2-A_1) \qquad \text{... (IV)}$$

[9] څرنګه چې په اساسي توګه زمونږ علاقه د عادي موډونو د ټاکلو په ښودلو کې ده، نو مونږ بيا د دوو ورته شاقولونو جوړه يي سيستم په پام کې نيسو. ځکه نو، په داسې يوه حالت کې رياضيکي تجزيه ډېر ساده ده.

(III) او (IV) رابطې د ω دوهمه درجه معادلې دي. نو، ω دوه قیمتونه لري، چې په لاندې توګه پیدا کېږي.

د (III) او (IV) معادلو په جمع کولو، مومو چې:

$$-m\omega^2(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2) = -m\frac{\mathrm{g}}{l}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)$$

چې د یوه عادي موډ د فریکونسي په توګه $\omega = \omega_1 = \sqrt{\mathrm{g}/l}$ ورکوي له (III) څخه د (IV) معادلې په تفریق کولو، مومو چې:

$$-m\omega^2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) = -m\frac{\mathrm{g}}{l}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) - \mathrm{S}(2\mathrm{A}_1 - 2\mathrm{A}_2)$$

یا

$$-m\omega^2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) = -m\frac{\mathrm{g}}{l}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) - 2\mathrm{S}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)$$

یا

$$m\omega^2 = m\frac{\mathrm{g}}{l} + 2\mathrm{S}$$

یا

$$\omega = \omega_2^2 = \left[\frac{\mathrm{g}}{l} + \frac{2\mathrm{S}}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

چې د دویم عادي موډ فریکونسي ده.

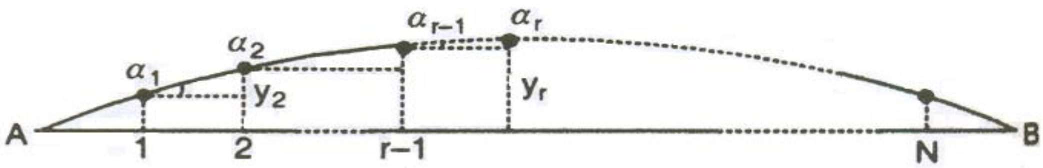
۳۰.۵ N-جوړه یې اهتزاز ورکوونکی (یا په تناب کې کتلې)

یو مستقیم، کړېدنې وړ، ارتجاعي تناب چې د A او B دوو ثابتو څوکو په منځ کې نښلول شوی په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې N , ... ,1,2,3 N ذرې هره یوه د m په کتله په مساوي جلاوالي a په نوموړي تناب پورې نښلول شوي دي لکه په ۱.۳۰.۵ شکل کې چې ښودل شوي دي. فرض کړئ چې د تناب په هره نقطه کې د T کښښ شتون لري او په نوموړي پورې نښلول شوې ذرې کوچنۍ عرضي ځای بدلون په تناب کې د کښښ د زیاتوالي څخه پرته زغملی شي. مونږ ته د عادي موډونو د فریکونسي او د اهتزاز په ځانګړي موډ کې د N-جوړه یې اهتزاز ورکوونکو د نوموړي سیستم د هرې کتلې د ځای بدلونونو پیدا کول په زړه پورې دي.

۱.۳۰.۵ شکل

فرض کړئ چې y_r د سیستم د r-مې ذرې ځای بدلون دهغې د تعادل له موقعیت څخه ښیي. دلته د $r = 1,2,3, \ldots, \mathrm{N}$ په نیولو سره، مونږ د سیستم د مختلفو ذرو ځای بدلون لاس ته راوړو.

د سیستم په هرې ذرې باندې بیرته ګرځوونکې قوه هغه ده چې په تناب کې د هغه په اوږدوالي عمود د کښښ له جوړونکي څخه لاس ته راځي یعني په r-مې ذرې باندې محصله قوه عبارت ده



شکل ۲.۳۰.۵

له

$$F_r = -T\sin\alpha_{r-1} - (-T\sin\alpha_r)$$

یا $$F_r = -T\sin\alpha_{r-1} + (T\sin\alpha_r) \qquad \ldots(۱.۳۰.۵)$$

خو $$\sin\alpha_{r-1} = \frac{y_r - y_{r-1}}{a}$$

او $$\sin\alpha_r = \left(\frac{y_{r+1} - y_r}{a}\right) \qquad \ldots(۲.۳۰.۵)$$

$\therefore$ له (۱.۳۰.۵) او (۲.۳۰.۵) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې

$\therefore$ $$F_r = -T\frac{(y_r - y_{r-1})}{a} + T\frac{(y_{r+1} - y_r)}{a}$$

یا $$m\frac{d^2y_r}{dt^2} = \frac{-2T}{a}y_r + \frac{T}{a}(y_{r+1} + y_{r-1})$$

یا $$\frac{d^2y_r}{dt^2} = \frac{-2T}{ma}y_r + \frac{T}{ma}(y_{r+1} + y_{r-1})$$

فرض کړئ چې

$$\frac{T}{ma} = \omega_0^2 \qquad \ldots(۳.۳۰.۵)$$

بیا $$\frac{d^2y_r}{dt^2} = -2\omega_0^2 y_r + \omega_0^2(y_{r+1} + y_{r-1})$$

یا $$\frac{d^2y_r}{dt^2} + 2\omega_0^2 y_r - \omega_0^2(y_{r+1} + y_{r-1}) = 0 \qquad \ldots(۴.۳۰.۵)$$

داسي چې $r = 1,2,\ldots\ldots\ldots, N$

د N-جوړه يي اهتزاز ورکونکي نوموړي سيستم د عادي موډونو د پيدا کولو لپاره، د

$$y_r = a_r \cos \omega t \qquad \dots (۵.۳۰.۵)$$

ډول يو حل امتحان کوو.

داسې چې د r-مې ذرې امپليتيود a_r او د اهتزازاتو فريکونسي داسې محاسبه کېږي چې نوموړي قيمتونه بايد د (۴.۳۰.۵) معادلې په واسطه راکړل شويو N-تفاضلي معادلو کې صدق وکړي.

د r-مې ذرې سرعت عبارت دی له

$$v_r = \frac{dy_r}{dt} = -a_r\, \omega \sin \omega t \qquad \dots (۶.۳۰.۵)$$

دا مو بايد په پام کې وي چې مونږ د y_r لپاره داسې حل غوره کړی دی چې په $t = 0$ وخت کې د ټولو ذرو سرعت صفر ورکوي. په (۴.۳۰.۵) معادله کې د y_r د هغه قيمت چې له (۵.۳۰.۵) معادلې څخه لاس ته راغلی په استعمالولو،

مونږ $\frac{d^2}{dt^2}(a_r \cos \omega t) + 2\omega_0^2 a_r \cos \omega t - \omega_0^2(a_{r+1} \cos \omega t + a_{r-1} \cos \omega t) = 0$ لاس ته راوړو.

$$-\omega^2 a_r \cos \omega t + 2\omega_0^2 a_r \cos \omega t - \omega_0^2(a_{r+1} + a_{r-1}) \cos \omega t = 0$$

څرنګه چې $\cos \omega t \neq 0$ ، ځکه په هغه حالت کې $y_r = 0$ دی او مونږ ته يواځې غير- صفري حلونه په زړه پورې دي.

$$\therefore \quad -\omega^2 a_r + 2\omega_0^2 a_r - \omega_0^2(a_{r+1} + a_{r-1}) = 0$$

يا

$$(-\omega_0^2 + 2\omega_0^2) a_r - \omega_0^2(a_{r+1} + a_{r-1}) = 0 \qquad \dots (۷.۳۰.۵)$$

داسې چې $r = 1,2, \dots \dots \dots, \mathrm{N}$

دا معادله بيا ترتيب کېدای شي لکه

$$\frac{a_{r-1} + a_{r+1}}{a_r} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} \qquad \dots (۸.۳۰.۵)$$

داسې چې $r = 1,2, \dots \dots \dots, \mathrm{N}$

په (۸.۳۰.۵) معادله کې، ښی لوری د ω د یوه ځانګړي قیمت لپاره ثابت دی او ځکه نو چپ لوری باید د ذرو د شمیر r څخه ازاد یو ثابت وي. دا ددې وړاندیز کوي چې د a_r ضریب باید د لاندې ډول وي

$$a_r = \mathrm{C}\sin r\theta \qquad \dots (۹.۳۰.۵)$$

داسې چې C ثابت او θ ناپیژندل شوې ثابته زاویه ده.

بیا $\quad a_{r-1} = \mathrm{C}\sin(r-1)\theta$

او $\quad a_{r+1} = \mathrm{C}\sin(r+1)\theta$

$$\therefore \quad a_{r-1} + a_{r+1} = \mathrm{C}[\sin(r-1)\theta + \sin(r+1)\theta]$$

$$= 2\mathrm{C}\sin r\theta\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{a_{r-1}+a_{r+1}}{a_r} = \frac{2\mathrm{C}\sin r\theta\cos\theta}{\mathrm{C}\sin r\theta}$$

یا $\quad \dfrac{a_{r-1}+a_{r+1}}{a_r} = 2\cos\theta \qquad \dots (۱۰.۳۰.۵)$

له دې ځایه، زمونږ د a_r ضریب انتخاب چې له (۹.۳۰.۵) معادلې څخه لاس ته راغلی، د (۸.۳۰.۵) معادلې دښي لوري په څیر د چپ لوري اړتیا چې باید له r څخه ازاد ووسي پوره کړه.

د θ زاویې قیمت د سرحدي شرط څخه، چې د $r=0$ لپاره $a_r = 0$ دی او $(\mathrm{N}+1)$ د تناب د څوکو په توګه چې ثابت دي ټاکل کیدای شي. خو لومړی شرط چې د $r = 0$ لپاره $a_r = 0$ دی همدا اوس صدق کوي.

دویم شرط یعنې د $r = \mathrm{N}+1$ لپاره $a_r = 0$ به هغه وخت ښه صدق وکړي چې که

$$\sin(\mathrm{N}+1)\theta = 0 = \sin n\pi$$

د $n = 1,2,3, \dots\dots$ سره یعنې که $(\mathrm{N}+1)\theta = n\pi$

یا که $\quad \theta = \dfrac{n\pi}{(\mathrm{N}+1)} \qquad \dots (۱۱.۳۰.۵)$

ځکه نو، د a_r ضریب عبارت دی له

$$a_r = \mathrm{C}\sin\left[\frac{nr\pi}{(\mathrm{N}+1)}\right] \qquad \dots (۱۲.۳۰.۵)$$

له (۸.۳۰.۵) او (۱۰.۳۰.۵) معادلو څخه، لاس ته راوړو چې

$$\frac{a_{r-1}+a_{r+1}}{a_r} = \frac{-\omega^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta$$

یا $$\frac{-\omega^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2\cos\left[\frac{n\pi}{(N+1)}\right]$$

یا $$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2\left[1-\cos\left\{\frac{n\pi}{(N+1)}\right\}\right]$$

یا $$\omega^2 = 2\omega_0^2 \times 2\sin^2\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

یا $$\omega = 2\omega_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \qquad \ldots (۱۳.۳۰.۵)$$

دا معادله د سیستم د اهتزاز د عادي موډونو اجازه ورکړل شوې فریکونسۍ ورکوي. په دې معادله کې n یو تام او $\omega_0 = \frac{T}{ma}$. د a_r قیمت د (۱۲.۲۶.۵) معادلې په واسطه ورکول کېږي او څکه نو په t وخت کې د r-مې ذرې ځای بدلون $y_r = a_r \cos\omega t$ هم ټاکل کیدای شي.

همدارنګه، د عادي موډ اعظمي فریکونسي لکه د (۱۳.۲۶.۵) معادلې په واسطه چې ورکړل شوې کیدای شي چې

$$\omega_{max} = 2\omega_0$$

څو ځوابه پوښتنې

۱. په کوم یو د لاندینیو اهتزاز ورکوونکو کې، امپلیتیود له وخت سره تغیر کوي؟

(الف) غیر استهلاکي اهتزاز ورکوونکی (ب) استهلاکي اهتزاز ورکوونکی

(ج) اجباري اهتزاز ورکوونکی (د) له پورتنیو څخه هیڅ یو

۲. کوم یو له لاندینیو پدیدو څخه په راکړل شوي اهتزاز ورکوونکي کې په هره کیفي فریکونسي کې رامنځ ته کیدای شي؟

(الف) ازاد اهتزازات (ب) اجباري اهتزازات

(ج) ریزونانس اهتزازات (د) له پورتنیو څخه هیڅ یو

۳. ω_0' فریکونسي لرونکي یو استهلاکي میخانیکي اهتزاز ورکوونکي باندې $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \sin \omega t$ بهرنۍ قوه عمل کوي. که د غیر استهلاکي اهتزازاتو طبیعي فریکونسي ω_0 وي، د اهتزازاتو فریکونسي به په دایمي حالت کې:

(الف) ω_0 (ب) ω_0'

(ج) ω (د) له پورتنیو څخه هیڅ یو

۴. د میخانیکي ظاهري مقاومت واحد له لاندیني سره عین شی دی

(الف) قوه (ب) په واحد ځای بدلون باندې قوه

(ج) امپلز (د) په واحد تغیر مکان باندې امپلز

۵. د میخانیکي ځواب وینې واحد له لاندیني سره عین شی دی

(الف) r-استهلاکي ضریب (ب) S-فنر ثابت

(ج) m-کتله (د) ω-زاویوي فریکونسي

۶. د ۵ ورته کتلو سیستم په متناوب شکل په مسلسله توګه له ۶ ورته فنرونو سره نښلول شوی دی. د لومړي او شپږم فنرونو ازادې څوکې په محکمه توګه نښلول شوي دي. د هغو فریکونسیو شمیر چې په هغوی باندې سیستم ریزونانس کولای شي عبارت دی له:

(الف) ۱ (ب) ۵

(ج) ۶ (د) ۱۱

۷. کوم یو له لاندینیو څخه د هغې تفاضلي معادلې چې د جوړه یي سیستم عادي موډونه توضیح کوي ځانګړنه ده ؟

(الف) د مختلفو حدونو ضریبونه په هارمونیکي توګه اهتزاز کوي.

(ب) په هره معادله کې د تابع متحولینو شمیر د سیستم د جوړونکو له شمیر سره مساوي دی.

(ج) تابع متحولین په یوه ځانګړې فریکونسي اهتزاز کوي.

(د) هیڅ یو د پورتنیو

ځوابونه

۱ (ب)	۲ (ب)	۳ (ج)	۴ (د)	۵ (الف)	۶ (ب)	۷ (د)

لنډ ځوابه پوښتنې

۱. اجباري اهتزاز ورکوونکی څه شی دی؟

ځواب. دا یو استهلاکي اهتزاز ورکوونکی دی چې انرژي ورته په پرله پسې توګه د یوه بهرني عامل په واسطه رسیږي. ددې لپاره چې د استهلاک له امله د انرژي له منځه تګ اصلاح کړو، نو د اهتزازاتو امپلیتیود ثابت نیسو.

۲. ایا په یوه اجباري اهتزاز ورکوونکي کې انرژي ذخیره کېږي؟ تشریح یې کړئ.

ځواب. په اجباري اهتزاز ورکوونکي کې هیڅ انرژي نه ذخیره کېږي. ځکه د چلونې قوې په واسطه رسیدونکی طاقت د اصطاکاک قوې په مقابل کې له خپور شوي طاقت سره مساوي دی.

۳. د یوه چلیدونکي اهتزاز ورکوونکي د دایمي حالت او مؤقتي کړو وړو څخه مطلب څه شی دی؟

ځواب. کله چې یو بهرنی عامل په اهتزاز ورکوونکي باندې عمل پیل کړي او پارونه (په میخانیکي اهتزاز ورکوونکي باندې قوه او په برقي اهتزاز ورکوونکي باندې برقي محرکه قوه) رامنځ ته کړي، سیستم میلان لري چې په خپله طبیعي فریکونسي (ω_0') اهتزاز وکړي. سره ددې، چې د چلونې قوه سیستم مجبوروي چې د هغه په خپلې فریکونسي (ω) اهتزاز وکړي. په طبیعي اهتزازاتو پیل کوونه غلبه مومي او د وخت د ډیر کوچني انټروال لپاره ادامه مومي. دا مؤقتي کړه وړه بلل کېږي. په اخر کې د اهتزازاتو طبیعي فریکونسي له منځه ځي، او سیستم د طاقت د رسونکي یا بهرني عامل په فریکونسي اهتزاز کوي. دا کړه وړه تر هغې پورې ادامه مومي ترڅو چې بهرنی عامل په اهتزاز ورکوونکي باندې عمل کوي او د دایمي حالت کړه وړه بلل کېږي.

۴. د اجباري اهتزاز ورکوونکي له میخانیکي ظاهري مقاومت څخه مطلب څه شی دی؟

ځواب. د بهرني عامل په واسطه د واردې شوې لحظوي قوې او د اهتزاز ورکوونکي د لحظوي سرعت ترمنځ نسبت میخانیکي ظاهري مقاومت بلل کېږي. دا د اهتزازاتو په واحد سرعت باندې د بهرنۍ قوې په توګه هم تعریف کیدای شي.

۵. د اجباري اهتزاز ورکوونکي د میخانیکي ظاهري مقاومت فزیکي ارزښت څه شی دی؟ واحد يې څه شی دی؟

ځواب. په فزیکي توګه، ظاهري مقاومت د اهتزاز ورکوونکي' د ځای بدلون د تغیر' (سرعت) مخالفت کوي. څرنګه چې $Z_m = F/v$ یا $v = F/Z_m$. نو، د ظاهري مقاومت په زیاتیدو، د بهرنۍ قوې په واسطه په اهتزاز ورکوونکي کې تولید شوی سرعت کوچنی کېږي.

واحد یې له $N/ms^{-1} = Nsm^{-1}$ څخه عبارت دی.

۶. د یوه جوړه يي سیستم د اهتزازاتو د موډ مطلب څه شی دي؟

ځواب. ګڼ شمیر ، په اصولو کې، لایتناهي شمیر لارې شتون لري چې په هغوی کې ممکن اهتزاز ورکوونکي اهتزاز وکړي، د اهتزازاتو هره یوه لار د جوړه يي سیستم موډ بلل کېږي.

۷. د یو جوړه يي سیستم د اهتزازاتو عادي موډونه څه شی دی؟

ځواب. د یوه جوړه يي سیستم هغه موډونه چې په هغوی کې اهتزازات ساده هارمونیکي وي عادي موډونه بلل کېږي. هر یو له عادي موډونو څخه خپله ځانګړې فریکونسي لري او د یوې خطي تفاضلي معادلې په واسطه چې یواځې یو تابع متحول او ثابت ضریبونه لري توضیح کیدای شي. د سیستم ټول جوړونکي د عین فریکونسي ساده هارمونیکي اهتزازات سرته رسوي.

۸. ایا عادي موډونه یو له بل سره انرژي تبادله کوي؟

ځواب. نه، د جوړه يي سیستم د عادي موډونو ترمنځ د انرژي تبادله نه رامنځ ته کېږي. په بل عبارت، که جوړه يي سیستم د اهتزازاتو په یوه عادي موډ پیل وکړي، په همدې موډ کې ادامه مومي او بل هیڅ عادي موډ ته تبادله ممکنه نه ده.

[د عادي موډونو تر منځ د انرژي تبادله له یوه عادي موډ څخه بل ته د اهتزازاتو په انتقال دلالت کوي]

۹. عادي موډونه یو له بل څخه ازاد دي. نظر ورکړئ.

ځواب. ددې معنا داده چې د عادي موډونو ترمنځ د انرژي تبادله شتون نه لري. په بل عبارت، یو جوړه يي سیستم چې په یوه موډ کې اهتزاز کوي بل ته انتقال نه شي کولای.

۱۰. د يو جوړه يي سيستم د عادي موډونو ځانګړتياوي بيان کړئ.

ځواب. د عادي موډونو ځانګړتياوې په لاندې ډول دي:

۱. هر عادي موډ د يوې خطي تفاضلي معادلې چې يوه عادي مختصه يا تابع متحول لري په مرسته توضيح کيداى شي.

۲. په هر عادي موډ کې، د جوړه يي سيستم ټول جوړونکي د هغوی لومړنی هارمونيکي حرکت ساتي.

۳. د جوړه يي سيستم هر جوړونکی په عين (عادي موډ) فريکونسي او امپليتيود اهتززا کوي.

۴. د عادي موډ فريکونسي به د هر جوړونکي د طبيعي فريکونسي سره يا عين شی يا مخالفه وي. په عمومي توګه نومورې فريکونسي د جوړه يي سيستم په ځانګړتياو پورې اړه لري.

تمرين

۱. چليدونکی هارمونيکي اهتزاز ورکوونکی تشريح کړئ.

۲. د هغه اجباري اهتزاز ورکوونکي معادله وليکئ چې د $F_0 \cos \omega t$ په متغيرې قوې چليږي. د اجباري اهتزاز ورکوونکي د مؤقتي او دايمي حالت کړه وړه تشريح کړئ.

۳. د يوه سيستم په حرکت باندې د پريوديک قوې اعيز امتحان کړئ په داسې حال کې چې استهلاکي ثابت له پامه وغورځول شي. د بشپړ حل له مخې "مؤقتي برخه" او همدا رنګه "دايمي حالت" حد توضيح کړئ.

۴. (الف) د ميخانيکي او برقي اهتزاز ورکوونکي ظاهري مقاومت تشريح کړئ. قيمتونه يې لاس ته راوړئ.

(ب) د ميخانيکي اهتزاز ورکوونکي، چې د $\vec{F} = F_0 e^{i\omega t}$ قوې په واسطه چليږي د دايمي حالت کړه وړه توضيح کړئ. او ثبوت کړئ چې د ځای بدلون په حل $\vec{x} = \vec{A} e^{i\omega t}$ کې $\vec{A}$ مختلط کميت عبارت دی له

$$\vec{A} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m}$$

۵. (الف) وښاياست چې په دايمي حالت کې، د چليدونکي اهتزاز ورکوونکي امپليتيود او فاز خپل ځانونه داسې برابروي چې د چلوني قوې په واسطه متوسط رسيدونکی طاقت د اصطکاک د قوې په واسطه د خپور شوی طاقت سره په دقيقه توګه مساوي دی.

(ب) که د اجباري اهتزاز ورکوونکي ځای بدلون عبارت وي له

$$x = \frac{\mathrm{F}_0}{\omega \mathrm{Z}_m}\sin(\omega t - \phi)$$

نو وښایاست چې د ځای بدلون ریزونانس د ω په فریکونسي، د ازادو اهتزازاتو له فریکونسي $\omega_0 = {}^{\mathrm{S}}/_{m}$ څخه لږ څه کم، رامنځ ته کیږي.

۶. د اهتزاز ورکوونکي تفاضلي معادله ترتیب او حل کړئ ترڅو وښودل شي چې حل ثابت امپلیتیود لري.

۷. د چلونې قوې فریکونسي په مقابل کې د ځای بدلون فریکونسي کړه وړه تشریح کړئ او وښایاست چې د ځای بدلون ریزونانس په داسې یوه فریکونسي کې رامنځ ته کیږي چې د سرعت ریزونانس له فریکونسي څخه لږ څه کم وي.

۸. د اجباري اهتزاز ورکوونکي په حالت کې، د چلونې قوې فریکونسي ω په مقابل کې د ځای بدلون، سرعت او فاز کړه وړه توضیح کړئ.

۹. د اجباري اهتزاز ورکوونکي په حالت کې، د چلونې قوې فریکونسي په مقابل کې د ځای بدلون او سرعت کړه وړه توضیح کړئ.

۱۰. د تقویت ضریب په توګه، د یوه اهتزازي سیستم Q-قیمت پیدا کړئ.

۱۱. وښایاست چې د اجباري استهلاکي اهتزاز ورکوونکي چې د $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \cos \omega t$ قوې په واسطه چلیږي او د r استهلاکي ثابت لرونکی دی اعظمي امپلیتیود یې له $\mathrm{A}_{max} = \mathrm{F}_0/\omega' r$. داسې چې

$$\omega' = \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

۱۲. وښایاست چې په ریزونانس کې، $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$

۱۳. ثبوت کړئ چې د اجباري اهتزاز ورکوونکي په حالت کې، د تقویت ضریب د Q-قیمت سره مساوي دی.

۱۴. د جوړه یي اهتزاز ورکوونکي معنا تشریح کړئ.

۱۵. د عطالتي کنټرول شوي او سختي کنټرول شوي اهتزاز ورکوونکو معنا څه شی ده؟

۱۶. د سختي جوړه يي شاقولونو اهتزازات په بشپړه توګه توضيح کړئ او په مختلفو حالاتو کې د سيستم د حرکت معادلې وليکئ.

۱۷. د يوه اهتزازي سيستم د اهتزازاتو عادي مختصات، د ازادئ درجې او عادي موډونه تعريف او تشريح کړئ.

۱۸. د دوو برقي سرکټونو ترمنځ چې په القايي توګه جوړه يي وي د انرژي انتقال تشريح کړئ.

څه وخت جوړه کيدنه سسته يا محکمه ده؟

۱۹. د S سختي لرونکي فنر په واسطه د دوو ورته جوړه شويو شاقولونو سيستم په پام کې ونيسئ. د عادي مختصاتو X او Y له مخې د سيستم تفاضلي معادله لاس ته راوړئ. وښاياست چې کله عادي مختصه، $Y = 0$ وي، د جوړه يي سيستم فريکونسي په جلا حالت کې د هر شاقول له فريکونسي سره عين شی وي.

۲۰. د يوه ټرانسفرمر سسته او محکمه جوړه کيدنه تشريح کړئ.

۲۱. د دوو برقي اهتزاز ورکوونکو القايي جوړه کيدنه تشريح او د جوړه کيدنې ضريب تعريف کړئ.

۲۲. عادي مختصات او موډونو اصطلاحات تشريح کړئ.

۲۳. د دوو جوړه يي شاقولونو په حالت کې د اهتزازاتو عادي موډونه لاس ته راوړئ.

۲۴. د دوو ورته جوړه يي اهتزاز ورکوونکو د هم فاز او غير هم فاز موډونو د حرکت ځانګړتياوې بيان کړئ.

۲۵. عادي موډونه څه شی دي؟ وښاياست چې د دوو جوړه يي اهتزاز ورکوونکو د اهتزاز د دوو عادي موډونو د انطباق په توګه پام کې ونيول کيدای شي.

۲۶. وښاياست چې د اهتزاز ورکوونکو د جوړه يي سيستم مجموعي انرژي ثابته پاتې کيږي.

۲۷. وښاياست چې په هم فازه موډ کې، د اهتزاز فريکونسي د غير جوړه يي اهتزاز ورکوونکو سره عين شی ده، په داسې حال کې چې په غير هم فازه موډ کې د اهتزازاتو فريکونسي لږ څه پورته ځي.

۲۸. د ځواب وينې، ظاهري مقاومت او طاقت ضريب اصطلاحات تشريح کړئ.

عددي مسائل

۱. دوه ورته ساده شاقولونه د یوه سپک فنر په واسطه چې د سختي ثابت یې 0.12Nm^{-1} سره یوځای جوړه کېږي او د هرې ګلولې کتله $0.15kg$ ده. کله چې یو شاقول ونیول شي ، د بل پریود $1.25s$ دی. د عادي موډ وخت پریودونه پیدا کړئ

$[1.23s$ او $1.27s$. ځواب$]$

۲. په لومړئ مسئله کې، یو شاقول یو لوري ته حرکت کوي او بل د تعادل په موقعیت کې نیول شوی وي. دواړه بیا خوشې کېږي. د هر شاقول د پرله پسې اعظمي امپلیتیودونو ترمنځ د وخت انټروال څومره دی؟ $[34.25s$. ځواب$]$

یادونه. پرله پسې اعظمي امپلیتیود له $\text{T}_m/2$ څخه وروسته رامنځ ته کېږي داسې چې

$$\text{T}_m = 2\pi/\omega_m$$

$[\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$. ځواب$]$

۳. دوه ورته شاقولونه د یوه سپک جوړه کونکي فنر په واسطه سره نښلول شوي دي. د هر شاقول اوږدوالی 40cm او کله چې یو شاقول محکم ونیول شي، بل په 1.25s وخت پریود سره اهتزاز کوي. د دواړو عادي موډونو پریود هغه وخت محاسبه کړئ چې دواړه شاقولونه په اهتزاز پیل وکړي. $\text{g} = 9.8\text{ms}^{-2}$ راکړل شوی دی. همدارنګه که سیستم د یوه شاقول په لیرې بوولو او بیا خوشې کولو سره په اهتزازاتو پیل وکړي د هر شاقول د پرله پسې اعظمي ترمنځ د وخت انټروال محاسبه کړئ.

$[40s , 1.23s , 1.27s$. ځواب$]$

شپږم څپرکی

د نسبیت خاصه نظریه

۱.۶ مقدمه

د انستین په عقیده، ټول حرکتونه نسبتي دي. د یوې ذرې یا کومې پېښې د حرکت د مطالعه کولو لپاره، دا اړینه ده چې یوه نقطه یا مأخذي دستګاه وټاکو، چې نظر هغې ته باید اندازه کوونه ترسره شي. د یوې ځانګړې مأخذي دستګاه انتخاب د مسئلي په طبیعت پورې اړه لري. دا له زیاتو اړخونو ډېره اسانه ده چې د یوې ذرې حرکت نظر یوې مأخذي دستګاه ته ، چې هغه په خپله، د حرکت په حال کې وي، توضیح شي. د مثال په توګه، په ځمکه باندې د مختصاتو ثابت سیستم د یو پرتاب کېدونکي د حرکت د مطالعه کولو لپاره ترټولو اسانه ده، سره ددې چې ځمکه حرکت او دوران کوي.

۲.۶ د پېښې، مشاهده کونکی او مأخذي دستګاه تعریف

پېښه. په یوه ټاکلي وخت کې د فضا په یوه نقطه کې هره ناڅاپي یا خپل سرې واقعه (یوه فزیکي رامنځ ته کېدنه یا پدیده) یوه پېښه بلل کېږي. د مثال په توګه د دوو ګلولو ټکر، له ونې څخه د میوې غورځېدل، د نور تشعشع ټولې له پېښو څخه عبارت دي.

مشاهده کونکی. یو په بشپړه توګه مجهز شخص یا یوه اله چې یوه پېښه توضیح، اندازه، ثبت، ځای یې معلوم کړي یو مشاهده کونکی بلل کېږي.

مأخذي دستګاه. د مختصاتو سیستم چې نظر هغه ته مونږ د یوې ذرې یا یوې پېښې ځای په دوه یا درې بعده فضا کې اندازه کوو مأخذي دستګاه بلل کېږي.

۳.۶ عطالتي مأخذي دستګاه

عطالتي مأخذي دستګاه هغه مأخذي دستګاه ده چې د سکون په حال کې یا نظر مطلقې فضا ته د حرکت په حال کې وي.

د نیوټن د حرکت دویم قانون د کلاسیک میخانیک اساسي قانون دی. د نیوټن د دویم قانون له مخې، لرو چې

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

داسي چې $\vec{F}$ قوه، m کتله، $\vec{v}$ سرعت او $\vec{a}$ تعجیل دی. دا قانون یواځې د هغه مشاهده کونکي لپاره اعتبار لري چې په غیر تعجیلي مأخذي دستګاه کې ځای په ځای وي. دغسې یوه مأخذي دستګاه عطالتي مأخذي دستګاه بلل کېږي. له دې ځایه، په عطالتي مأخذي دستګاه باندې صفر محصله قوه عمل کوي او ځکه نو، په یوه ثابت سرعت حرکت یا به نظر مطلقي فضا ته د سکون په حالت کې وي. مطلقه فضا یو خیالي چوکاټ دی چې په هغه کې جسمونه حرکت کولای شي خو دا په خپله ساکنه ده. حرکت نظر مطلقې فضا ته مطلق حرکت دی خو لکه چې هیڅ تجربه مطلق حرکت نه شي څرګندولی، مطلقه فضا هیڅ فزیکي ارزښت نه لري.

د زیاتو هدفونو لپاره، ځمکه یوې عطالتي کتلې ته تقریباً ښه نږدیکت دی ځکه د ځمکې په حرکت کې تعجیل د هغې د خپل محور شاوخوا دوران له امله د صرف نظر وړ دی. سره ددې، دا کوچنی تعجیل د ټولو هدفونو لپاره په بشپړه توګه له پامه غورځول کیدای نشي. په عمل کې، دا اسانه ده چې یو ثابت ستوری د یوې عطالتي دستګاه په توګه په پام کې ونیسو. له دې ځایه د څرګندو دلایلو پر بنا، ټولې مأخذي دستګاوې چېنظر یوې عطالتي دستګاه ته په ثابت سرعت سره حرکت کوي عطالتي دي.

۴.۶ د نیوټني نسبیت اصل

سکون او حرکت نسبتي دي او یواځې له یوې ټاکلې مأخذي دستګاه سره په اړیکه کې معنا لري. یوه ذره ساکنه بلل کېږي، که نظر یوې مأخذي دستګاه ته د عین ځای نیونې ته ادامه ورکړي. له بل لوري، نوموړې به په حرکت کې فرض شي، که په همدې مأخذي دستګاه کې د عین ځای نیونې ته ادامه ورنکړي. نیوټن د نسبتي حرکت په دې حقیقت د حرکت د دریو قوانینو په اعلان کې پوه شو. نیوټن په دې حقیقت خبر وو چې په مستقیمه کرښه د یوې دستګاه یونواخت حرکت په همدې دستګاه کې د ترسره کیدونکي تجربې په واسطه کشف کیدای نه شي.

د فزیک دا اساسي قانون په ټولو عطالتي دستګاو کې ثابت پاتې کېږي. خو د کتلې، اوږدوالي انټروال او وخت انټروال د ثبات مفهوم او د هغوی متقابله ازادي چې د نیوټن په میخانیک کې ډېره اساسي ده، په متحرکې دستګاه کې نه ثابت او نه یو له بل څخه ازاد دي. دا کمیتونه داسې معلومېږي چې د جسم او مشاهده کونکي ترمنځ په نسبتي حرکت پورې په اړه لرلو سره تغیر کوي. دا تغیر کیدای شي د صرف نظر وړ وي، کله چې نظر جسم ته د مشاهده کونکي نسبتي سرعت د نور د سرعت په پرتله ډېر کوچنی وي خو هغه وخت زیاتیږي کله چې نسبتي سرعت د نور سرعت ته نږدې شي.

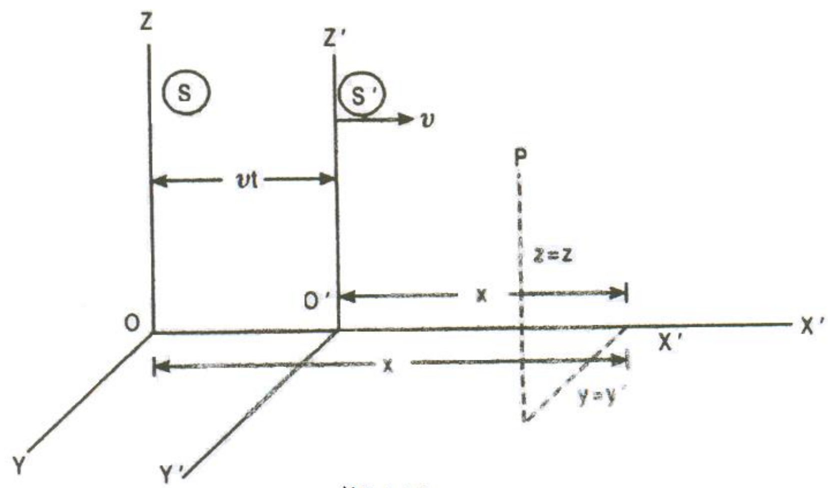
۵.۶ ګالیلایي انتقال

هغه معادلې، چې د یوې پیښې چې په یوه عطالتي دستګاه کې رامنځ ته کېږي هغه مشاهده کونکي ته چې په بله عطالتي دستګاه کې وي، د معلومیدو څرنګوالی تشریح کوي د ګالیلایي انتقالاتو په توګه پیژندل کېږي.

پوهېږو چې یو متحرک مشاهده کونکی او یو ساکن مشاهده کونکی د عین متحرک شي لپاره مختلف موقعیتونه او سرعتونه اندازه کوي. د ریاضیکي افادو یو سټ چې د یوه مشاهده کونکي اندازکووني ته د بل مشاهده کونکي له اندازه کوونې سره اړیکه ورکوي انتقال بلل کېږي.

ګالیلایي انتقال د میخانیک نسبیت ته ریاضیکي توضیح ورکوي لکه د مختلفو مشاهده کونکو مختلفو اندازه کوونو ته چې اړیکه ورکوي. یوه پیښه په یوه مأخذي دستګاه کې د $(x\ ,y,z)$ په واسطه توضیح کیدای شي چې د فضا درې مختصات په فضا کې د هغې موقعیت ټاکي او t د پیښې د رامنځ ته کیدو وخت دی. د یوه مشاهده کونکي د یوې پیښې د فضا او وخت مختصاتو انتقال بل ته ګالیلایي انتقال بلل کېږي.

اجازه راکړئ د S په څیر د O په مبدا یوه له مأخذي دستګاو څخه د سکون په حال کې او بله S' د O' په مبدا چې نظر S دستګاه ته په یونواخته توګه د حرکت په حال کې ده په پام کې ونیسو (۱.۵.۶ شکل). د اسانتیا لپاره، فرضوو چې، د دواړو دستګاو اړوند محورونه موازي دي، حرکت د X–لوري په امتداد محدود او د وخت اندازه کوونه له هغې لحظې څخه ترسره کېږي چې د دواړو دستګاوO او O' مبداګانې یو پر بل منطبق شي.



۱.۵.۶ شکل

فرض کړئ چې په P نقطه کې یوه پیښه رامنځ ته کېږي او په S دستګاه کې مشاهده کونکی پوهېږي چې پیښه په t وخت کې د $x\ ,y,z$ مختصاتو په واسطه ټاکل شوي ځای کې رامنځ ته شوې ده. فرض کړئ چې په S' دستګاه کې بل مشاهده کونکی چې په یونواخته توګه د حرکت په حال کې دی پوهېږي چې پیښه په t' وخت کې رامنځ ته شوې ده او د $(x'\ ,y',z')$ مختصات اخلي. اجازه راکړئ چې اوس په دوو سیستمونو کې د عین پیښې د اندازه کوونو ترمنځ اړیکه لاس ته راوړو.

په t وخت کې، د O' مبدا چې په $t=0$ وخت کې د O په مبدا منطبق شوې ده، د $OO'=vt$ یو واټن به ووهي. له دې ځایه،

$$x'=x-vt \qquad \dots (۱.۵.۶)$$

لکه چې مخکې وویل شول، د S'سیستم نظر S ته یواځې د X–محور په امتداد حرکت کوي. ځکه نو، د Y او Z محور په امتداد د حرکت په نه شتون کې، لرو چې

$$y' = y \qquad \text{... (۲.۵.۶)}$$

او

$$z' = z \qquad \text{... (۳.۵.۶)}$$

په کلاسیک فزیک کې، وخت په طبیعت کې نړیوال فرض کېږي یعنې دا د هرې ځانګړې مأخذي دستګاه څخه په ازادانه توګه تعریف کیدای شي. ځکه نو، په لاس راځي چې

$$t' = t \qquad \text{... (۴.۵.۶)}$$

(۱.۵.۶) معادله په S' دستګاه کې ترسره شوې اندازه کوونو ته له هغو سره چې په S کې ترسره شوې اړیکه ورکوي او له بې زبر څخه زبر لرونکې دستګاه ته ګالیلایي انتقال بلل کېږي.

د S' دستګاه مشاهده کونکې ته،S دستګاه داسې معلومیږي چې د منفي X–محور په امتداد حرکت کوي خو په عین اندازه سرعت سره یعنې له $v-$ سرعت سره. د پورته په څیر په دقیقه توګه له مخکې تګ څخه، یو څوک کولای شي لاندې معادلې لاس ته راوړي.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ t = t' \text{ او } z &= z' \end{aligned}\right\} \qquad \text{... (۵.۵.۶)}$$

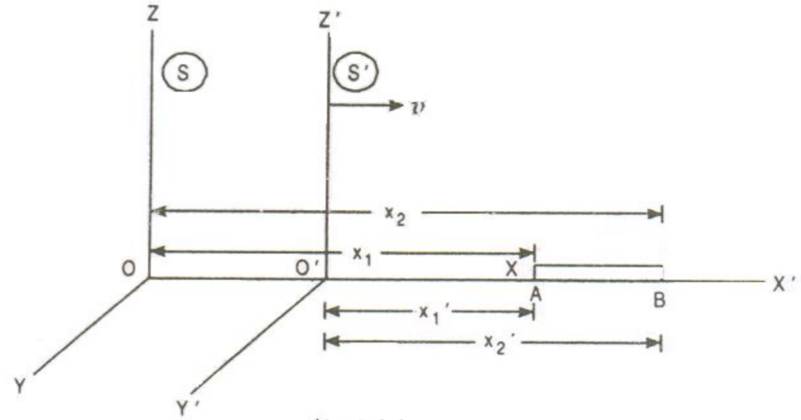
پورتنی معادلې له زبر لرونکې څخه بې زبره دستګاه ته ګالیلایي انتقال یا معکوس انتقال توضیح کوي.

له زبر لرونکې څخه بې زبره دستګاه ته ګالیلایي انتقال ته دقیقه کتنه وای چې دا له بې زبره څخه زبر لرونکې دستګاه ته له ګالیلایي انتقال څخه یواځې په v - باندې د v په بدلولو او زبر لرونکې مختصات په بې زبره او د هغې په معکوس څخه لاس ته راتلی شي. بې له شکه، مشاهده ښیي چې ګالیلایي انتقال د نسبیت له اصل سره موافق دی.

۶.۶ ګالیلایي ثبات

کله چې یو ځانګړی خاصیت د عین عددي قیمت په واسطه توضیح شي یا له یوې عطالتي مأخذي دستګاه څخه بلې ته د ګالیلایي انتقال لاندې اساسي فزیکي قوانین او اصول عین شی پاتې شي، دوی ته ګالیلایي ثوابت ویل کېږي.

په لاندې بحث کې، مونږ به ثبوت کړو چې د فضا یو انټروال او د وخت یو انټروال ګالیلایي ثوابت دي. S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونیسئ، S دستګاه د سکون په حال کې او S'دستګاه نظر S ته په یونواخت سرعت سره د X-محور په امتداد د حرکت په حال کې ده (۱.۶.۶ شکل).



شکل ۱.۶.۶

فرض کړئ په S' دستگاه کې د AB يوه میله پرته ده. د S' دستگاه مشاهده کونکی به د میلې اوږدوالی د سکون په حال کې اندازه کوي په داسي حال کې چې S دستگاه به د میلې اوږدوالی د یونواخت حرکت په حال کې اندازه کوي. فرض کړئ چې په Sدستگاه کې مشاهده کونکی له O مبدا څخه د A څوکه په t_1 وخت کې په x_1 واټن ثبت کوي او B څوکه په t_2 وخت کې په x_2واټن ثبت کوي. که په S'دستگاه کې مشاهده کونکی د A او B څوکو واټنونه په ترتیب سره په t_1' او t_2' وختونو کې x_1' او x_2' واټنونه اندازه کړي، نو

$$x_1' = x_1 - vt_1 \quad \text{او} \quad x_2' = x_2 - vt_2$$

او لرو چې

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) \qquad \dots (۱.۶.۶)$$

بې له شکه، د متحرکې میلې* د اوږدوالی د اندازه کوونې عملیه د S دستگاه مشاهده کونکي ته اړتیا لري چې په عین وخت کې د دواړو څوکو واټن له مبدا څخه اندازه کړي یعنې $t_1 = t_2$.

ځکه نو، (۱.۶.۶) معادله به

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 \qquad \dots (۲.۶.۶)$$

له (۲.۶.۶) معادلې څخه دا څرگندیږي چې له یوې عطالتي دستگاه څخه بلې ته د فضا یو انټروال له گالیلایي انتقال لاندې ثابت پاتې کیږي.

ددې لپاره چې وښودل شي چې د گالیلایي انتقال لاندې د وخت یو انټروال ثابت پاتې کیږي، اجازه راکړئ چې په S' دستگاه کې د یوې پیښې رامنځ ته کیدنه په پام کې ونیسو. فرض کړئ، چې دا نظر د S' دستگاه مشاهده کونکي ته په t_1' وخت کې په A کې او په t_2' وخت کې په B کې رامنځ ته کیږي. فرض کړئ، چې په S دستگاه کې مشاهده کونکی په ترتیب سره په t_1 او t_2 وختونو کې د پیښې رامنځ ته کیدنه په A او B نقطو کې ثبت کوي. نو د وخت د نړیوال طبیعت له امله، لرو چې $t_1' = t_1$ او $t_2' = t_2$.

یا

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 \qquad \dots (۳.۶.۶)$$

له (۳.۶.۶) معادلې څخه، دا څرګندېږي چې له يوې عطالتي مأخذي دستګاه څخه بلې ته د وخت يو انټروال هم له ګاليلايي انتقال لاندې ثابت پاتې کېږي.

له دې ځايه، په دوو دستګاو کې، چې يوه نظر بلې ته په يونواخته توګه د حرکت په حال کې وي د فضا د انټروال او د وخت د انټروال اندازه کوونې د ګاليلايي انتقال لاندې ثابتې دي.

دا د هغه حقيقت له امله ده چې د دستګاونسبتي سرعت د انټروالونو په افادو کې نه داخلېږي. په کلاسيک ميخانيک کې، د يو جسم کتله ثابته فرض کېږي. له دې ځايه، مونږ نتيجه اخلو چې په ميخانيک کې درې اساسي کميتونه- کتله، اوږدوالی او وخت د ګاليلايي انتقال لاندې د مشاهده کونکي د نسبتي حرکت څخه ټول ازاد دي.

۷.۶ د ګاليلايي انتقال لاندې د سرعت او تعجيل انتقال

اوس اجازه راکړئ چې د ګاليلايي انتقال لاندې له يوې عطالتي مأخذي دستګاه څخه بلې ته د يوې ذرې د سرعت او تعجيل د انتقال څرنګوالی وڅېړو.

(الف) د سرعت انتقال. له S دستګاه څخه S' بلې دستګاه ته د ذرې د سرعت د لاس ته راوړلو لپاره،مونږ د x'، y' او z' لپاره د (۱.۵.۶) افادې ديفرنسيال نظر t ته اخلو او لرو چې،

$$\frac{dx\prime}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \qquad \text{... (۱.۷.۶)}$$

څرنګه چې $t = t'$ دی، دا لاس ته راځي چې $\frac{dx\prime}{dt} = \frac{dx\prime}{dt'}$

ځکه نو (۱.۷.۶) معادله به

$$\frac{dx\prime}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

په عين توګه، $\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}$

او

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}$$

سره ددې، $\frac{dx}{dt} = u_x$، په Sدستګاه کې د سرعت د X-مرکبه ده او $\frac{dx\prime}{dt'} = u_x'$په S' دستګاه کې د سرعت د X-مرکبه ده

په عين توګه $\frac{dy}{dt} = u_y$ ، $\frac{dy'}{dt'} = u_y'$ ، $\frac{dz}{dt} = u_z$او$\frac{dz'}{dt'} = u_z'$ بللو سره، لرو چې

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z \end{aligned}\right\}$$

دا په ساده توگه د سرعتونو د جمع کولو کلاسیک قانون دی او لاس ته راغلې چې د نور د سرعت په پرتله د ډېرو ورو حرکتونو د سرعتونو لپاره ډېر ښه کټل کېږي. له دې ځایه لاس ته راوړو چې د گالیلایي انتقالاتو لاندې سرعت متغیر دی.

په وکتوري توگه، $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$

(ب) د تعجیل انتقال. ددې لپاره چې د تعجیل انتقال لاس ته راوړو، مونږ د u'_x ، u'_y او u'_z لپاره نظر t ته د افادې دیفرنسیال اخلو. نظر وخت ته په دیفرنسیال اخستلو او د $t = t'$ په استعمالولو، لرو چې

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{d}{dt}(u_x - v)$$

یا

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} - 0$$

v یو ثابت دی، له دې ځایه $\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt}$ ، $\frac{du'_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt}$ او $\frac{du'_z}{dt'} = \frac{du_z}{dt}$

یا

$$a'_x = a_x, a'_y = a_y \text{ او } a'_z = a_z \qquad \text{... (۲.۷.۶)}$$

داسې چې $\frac{du'_x}{dt'} = a'_x$ ، $\frac{du_x}{dt} = a_x$ او داسې نور.

له دې ځایه، د یوې ذرې تعجیل د دواړو دستگاو له نسبتي حرکت څخه ازاد دی. په بله مانا، د گالیلایي انتقال لاندې تعجیل ثابت دی. په وکتوري توگه لیکنه کې،

$$\vec{a}' = \vec{a} \qquad \text{... (۳.۷.۶)}$$

په ټولو عطالتي مأخذي دستگاو کې چې نسبت یو بل ته په ثابت سرعت سره حرکت کوي.

۸.۶ د انتقال لاندې د نیوټن د حرکت د قوانینو ثبات

لکه چې مخکې وویل شول، په کلاسیک فزیک کې، کتله د مشاهده کونکي له حرکت څخه ازاده یو ثابت کمیت دی. څکه نو، د $m\vec{a}$ ضرب په ټولو عطالتي دستګاو کې عین شی پاتې کېږي. او لرو چې

$$m\vec{a}' = m\vec{a}$$

له دې ځایه، هر مشاهده کونکی به په ذره باندې عامله قوه عین شی اندازه کوي. په بله مانا، په دواړو عطالتي دستګاو کې چې په هغو کې اندازه کوونه د ګالیلایي انتقال په واسطه تړل شوې ده، دواړه مشاهده کوونکي په ذره باندې عامله قوه د کتلې او د تولید شوي تعجیل د ضرب د حاصل په توګه اندازه کوي. د نیوټن د حرکت دویم قانون د ګالیلایي انتقال لاندې په دواړو مأخذي دستګاو کې خپل شکل ساتي. په نتیجه کې، د نیوټن د حرکت قوانین او نور د تحفظ قوانین لکه د انرژي، خطي مومنټم او زاویوي مومنټم لپاره چې د حرکت له دویم قانون څخه پیروي کوي، د ګالیلایي انتقال لاندې ثابت دي.

۹.۶ د ګالیلایي انتقال لاندی د خطي مومنټم د تحفظ قانون ثبات

اجازه راکړئ د m_1 او m_2 دوه کتلې چې په $\vec{u}_1$ او $\vec{u}_2$ سرعتونو سره$(\vec{u}_2 < \vec{u}_1)$ له ټکر څخه مخکې په S دستګاه کې په مستقیمه کرښه د حرکت په حال کې وي په پام کې ونیسو. فرض کړئ چې له ټکر څخه وروسته یې سرعتونه په ترتیب سره $\vec{v}_1$ او $\vec{v}_2$ ته بدلیږي.

د مومنټم د تحفظ له قانون څخه، لرو چې

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad \dots(۱.۹.۶)$$

اجازه راکړئ دا ټکر له بلې دستګاهS' څخه چې نظر S دستګاه ته په $\vec{v}$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده ووینو. فرض کړئ چې $\vec{u}_1'$ او $\vec{u}_2'$ او $\vec{v}_1'$ او $\vec{v}_2'$ په ترتیب سره د m_1 او m_2 کتلو لرونکو ذرو له ټکر څخه مخکې او وروسته سرعتونه وي.

د سرعتونو له ګالیلای انتقالاتو څخه

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{u}_1' + \vec{v}\\ \vec{u}_2 &= \vec{u}_2' + \vec{v}\\ \vec{v}_1 &= \vec{v}_1' + \vec{v}\\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_2' + \vec{v}\end{aligned}\right\} \qquad \dots(۲.۹.۶)$$

په (۱.۹.۶) معادله کې د (۲.۹.۶) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$m_1(\vec{u}_1' + \vec{v}) + m_2(\vec{u}_2' + \vec{v}) = m_1(\vec{v}_1' + \vec{v}) + m_2(\vec{v}_2' + \vec{v})$$

یا $m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 + \vec{v}(m_1 + m_2) = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 + \vec{v}(m_1 + m_2)$

یا $m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$ ... (۳.۹.۶)

دا د مومنټم د تحفظ قانون دی.

له دې ځایه د ګالیلایي انتقالاتو لاندې د مومنټم د تحفظ قانون ثابت دی.

<u>۱۰.۱ (الف) د ګالیلایی انتقال لاندی د انرژی د تحفظ قانون</u>

په S دستګاه کې د دوو ذرو ټکر ته په مراجعه کوونې لکه مو چې په تیره برخه کې توضیح کړه، که ټکر ارتجاعي وي، نو په S دستګاه کې حرکي انرژي محفوظه پاتې کیږي.

په Sدستګاه کې له ټکر څخه مخکې حرکي انرژي = په S دستګاه کې له ټکر څخه وروسته حرکي انرژي.

یعنې $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

یا $m_1(\vec{u}_1.\vec{u}_1) + m_2(\vec{u}_2.\vec{u}_2) = m_1(\vec{v}_1.\vec{v}_1) + m_2(\vec{v}_2.\vec{v}_2)$

د (۲.۹.۶)معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$m_1(\vec{u}'_1 + \vec{v})(\vec{u}'_1 + \vec{v}) + m_2(\vec{u}'_2 + \vec{v})(\vec{u}'_2 + \vec{v})$$

$$= m_1(\vec{v}'_1 + \vec{v})(\vec{v}'_1 + \vec{v}) + m_2(\vec{v}'_2 + \vec{v})(\vec{v}'_2 + \vec{v})$$

یا $m_1(u'^2_1 + v^2 + 2\vec{u}'_1v) + m_2(u'^2_2 + v^2 + 2\vec{u}'_2v)$

$$= m_1[v'^2_1 + v^2 + 2\vec{v}'_1v] + m_2[v'^2_2 + v^2 + 2\vec{v}'_2v]$$

یا $m_1u'^2_1 + m_2u'^2_2 + v^2(m_1 + m_2) + 2(m_1\vec{u}'_1 + m_2\vec{u}'_2).\vec{v}$

$$= m_1v'^2_1 + m_2v'^2_2 + v^2(m_1 + m_2) + 2(m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2).\vec{v}$$

د (۳.۹.۶) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$m_1u'^2_1 + m_2u'^2_2 = m_1v'^2_1 + m_2v'^2_2$$

یا $\frac{1}{2}m_1u'^2_1 + \frac{1}{2}m_2u'^2_2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$

یعنې په S' دستګاه کې له ټکر څخه مخکې حرکي انرژي= په S'دستګاه کې له ټکر څخه وروسته حرکي انرژي یعنې حرکي انرژي په S' دستګاه کې هم محفوظه ده.

يعنې د ګاليلايي انتقال لاندې د انرژي د تحفظ قانون ثابت دی.

۱.۶ مثال. وښاياست چې د الکترومقناطيسي څپې معادله $0 = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ د ګاليلايي انتقال لاندې ثابته نه ده، داسې چې ϕ سکالري پوټنسيال دی.

حل. ϕ سکالري پوټنسيال د x'، y' ، z' او t' تابع دی.

يعنې $\phi = \phi\ (x'،y'،z'،t')$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \qquad \dots(i)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} \qquad \dots(ii)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} \qquad \dots(iii)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad \dots(iv)$$

اوس، له بې زبره څخه زبر لرونکي مأخذي دستګاه ته ګاليلايي انتقال عبارت دی له

$$x' = x - vt،\quad y' = y ،\quad z' = z \quad \text{او} \quad t' = t \qquad \dots(v)$$

له (v) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 ،\ \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} = 0$$

$\therefore$ (i) معادله به

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}$$

يا

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

په نتيجه کې

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial {x'}^2} \qquad \dots(vi)$$

له (v) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = 1 \text{ ، } \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} = 0$$

∴ معادله به (ii)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y'}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

په نتیجه کې

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial {y'}^2} \qquad \dots (vii)$$

له (v) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \text{ ، } \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$$

∴ معادله به (iii)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z'}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

په نتیجه کې

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z'}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial {z'}^2} \qquad \dots (viii)$$

له (v) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \text{ ، } \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \text{،} \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$$

∴ معادله به (iv)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'}$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

په نتیجه کې $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \left(-v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(-v\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)$

$$= v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial t'^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\,\partial t'} \qquad \dots (ix)$$

د (vi) ، (vii) ، $(viii)$ او (ix) معادلو په استعمالولو، د الکترومقناطیسي څپې معادله به

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\,\partial t'}$$

یا

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\,\partial t'}$$

له دې ځایه، د الکترومقناطیسي څپې معادله د ګالیلایي انتقال لاندې خپل اصلي شکل نه شي ساتلی.

۱۰.۶ د ایترو فرضیه

د ماکسویل د الکترومقناطیسي څپو نظریې وښوده چې په تشیال کې د نور سرعت عبارت دی له

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

داسې چې ε_0 د ډای الکتریک ثابت او μ_0 د تشیال د تیریدنې وړتیا ده. د c قیمت چې په تجربوي توګه لاس ته راغلی له $2.997925 \times 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$څخه عبارت دی، چې د نور د سرعت له هغه قیمت سره چې له پورتني فورمول څخه لاس ته راځي موافق دی. دا توافق په قطعي توګه ثبوتوي، چې نور بې له شکه الکترو مقناطیسي تشعشع ده.

ماکسویل ته په تشیال کې د الکترومقناطیسي څپې د خپریدو د څرنګوالي تصور سخت ښکاره شو. ددې وړاندیز وشو چې لکه څرنګه چې صوتي څپې د خپریدو لپاره محیط ته اړتیا لري، د نور څپې هم باید محیط ته اړتیا ولري. دغه فرضي محیط ته د 'نور خپرونکي ایتر' نوم ورکړل شو. د نور د لوی سرعت د حسابولو لپاره، ایتر داسې فرض شو چې لوی شییر ضریب او صفر کثافت لري. علاوه له دې، څرنګه چې نور له شفافو جامداتو څخه تیریدای شي، ایتر باید ټوله فضا ډکه کړي. له دې ځایه، ایتر باید داسې یوه ماده وي چې په ټول کائنات کې شتون ولري. په دې مرحله کې، ایتر نه یوازې د الکترومقناطیسي څپو لپاره یو انتقالونکي برابرولو بلکې همدارنګه معلومیده چې یوه مأخذي دستګاه چې په مطلقه توګه د سکون په حال کې وي برابره کړي.

۱۱.۶ الکترومقناطیس او د ایترو د موقعیت ټاکلو کوښښونه

له تیرې برخې، پوهیږو چې د میخانیک قوانین د ګالیلایي انتقال لاندې ثابت دي. علاوه له دې، په تجربو کې د سرعتونو د جمع قانون د نور د سرعت په پرتله کوچنیو سرعتونو کې ډیر ښه ونیول شو. کله چې د نسبیت دا اصل د نور په خپریدو باندې تطبیق شو، یو شمیر مخالفتونه یې راپورته کړل. ددې لپاره چې وپوهیږو چې د نور د خپریدو مسئله له هغې میخانیکي څخه توپیر لري، اجازه راکړئ چې د ګالیلایي انتقالاتو څخه لاس ته راغلي د سرعتونو د جمع قانون ته بیرته وګرځو او په لاندې حالت یې تطبیق کړو.

فرض کړئ چې صوتي څپې په v سرعت سره په ساکنه هوا کې د حرکت په حال کې دي. د سرعتونو د جمع قانون مطابق، یو مشاهده کونکی چې په طیاره کې په v سرعت سره د صوتي څپې د خپریدو د لورې په امتداد یا مخالف سفر کوي د څپو سرعت له $u - v$ یا $u + v$ سره مساوي اندازه کوي.

اوس مونږ دا تجربه په بله طریقه توضیح کوو. که په طیاره کې مشاهده کونکی د صوت د سرعت تغیر د هغه د حرکت د لورې د تغیر له امله کشف کړای شي، نو دا ممکنه ده چې نظر ساکنې هوا ته د صوت سرعت اندازه شي. یعنې دا ممکنه ده چې د صوت مطلق سرعت اندازه کړو، داسې چې یوه ساکنه عطالتي مأخذي دستګاه لکه په دې حالت کې چې هوا ده، شتون ولري. په بله مانا، که په طیاره کې مشاهده کونکی د صوتي څپې د سرعتونو توپیر کشف کړای شي، تجربه د یوه محیط د شتون څخه چې په هغه کې صوتي څپې د حرکت په حال کې دي وړاندوینه کوي.

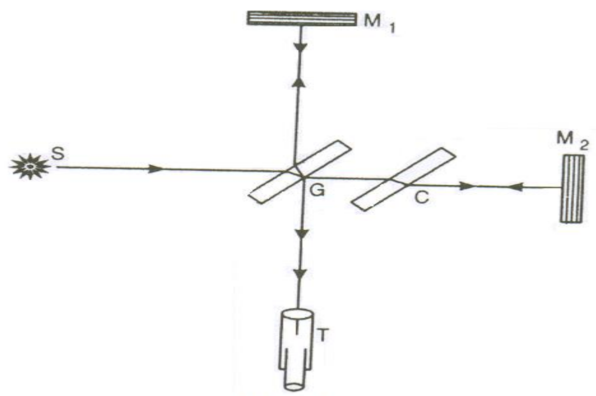
لکه چې په تیره برخه کې وویل شول، د نور د خپریدو لپاره اړین محیط ته د 'ایتر' نوم ورکړل شو، په هغه وخت کې دا نه وه منل شوې چې الکترومقناطیسي څپه په تشیال کې حرکت کولای شي. مونږ ټول په ځمکه باندې د ایتر په واسطه د ځمکې په سرعت، د مثال په توګه v سره حرکت کوو. ځکه نو، په ځمکه باندې مشاهده کونکی باید د نور د سرعت مختلف قیمت اندازه کړي، چې ساحه یې له $c - v$ څخه تر $c + v$ پورې ده چې دا د نور په نسبت د ځمکې د حرکت په لورې پورې اړه لري. د پورتني بحث په پام کې نیولو سره، که د ځمکې په سطحه کومه نوري تجربه تر سره شي، د ځمکې د حرکت له امله د نور د سرعت مختلف قیمتونه اندازه کولای شي، نو د ایترو محیط شتون یعنې د یوې مطلقې مأخذي دستګاه شتون به ثابت شي.

ددې په خلاف، د نور په چټکتیا کې د تغیر د کشف کولو ټول کوښښونه او له دې ځایه د ایترو محیط شتون ناکام شو. مونږ به په دې برخه کې د مچلسن او مورلي په واسطه تر سره شوې تجربه تر بحث لاندې ونیسو.

۱۲.۶ د مچلسن- مورلی تجربه

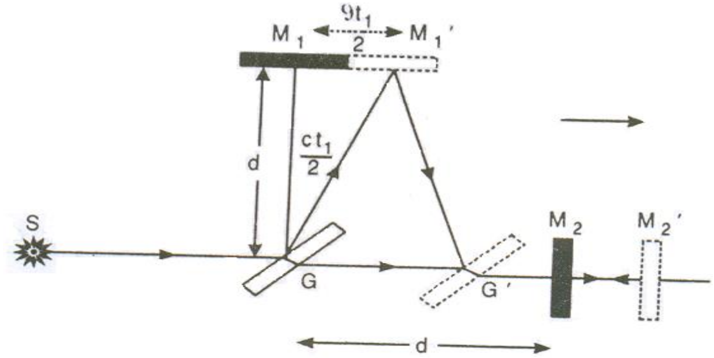
نوموړې تجربه په ۱۸۸۷ کې د مچلسن او مورلي په واسطه ترسره شوه ترڅو د ایترو په واسطه د ځمکې نسبتي حر کت کشف او له دې ځایه د ایترو شتون معلوم کړي.

طریقه. د نور یوه ګیډۍ په دوو عمودي لوریو بیلیږي، او وروسته بیرته د لیدلو هغې ساحې ته چې هلته د تداخل حلقې لیدل کیږي رسیږي. د حلقو تغیر د دوو ګیډیو د وخت د مختلفو حدونو له امله د لارې توپیر او له دې ځایه په ایترو کې د ځمکې سرعت ټاکي.



۱.۱۲.۶ شکل

تجربوي ترتیب.د مچلسن- مورلي تجربی نوري ترتیب داسې دی لکه چې په ۱.۱۲.۶ شکل کې ښودل شوی. نوموړې دستګاه اصلاً یو حساس انټرفیرومټر دی چې د نوري وړانګو ترمنځ د نوري لارې ډیر کوچنی توپیر هم کشف کولای شي. د نور یوه ګیډۍ له یوې قوي منبع S څخه په نیمه نقره یي ښیښه یي قاب G باندې چې له منبع څخه د نور له لوري سره 45° میل لري لویږي. ښیښه یي قاب د هغې په پورتنی برخه په G نقطه کې د نور ګیډۍ په دوو ګیډیو بیلوي. یوه ګیډۍ M_1 هنداري ته منعکس کیږي چې بیرته نور ښیښه یي قاب ته منعکس کوي. بله ګیډۍ (خپره شوې برخه) مستقیماً بلې هنداري M_2 ته ځي چې دا هم نور بیرته ښیښه یي قاب ته منعکس کوي. دواړه نیمه پوره ګیډۍ د قاب په G نقطه کې د تداخل د رامنځ ته کولو لپاره بیا یو ځای کیږي چې د T تلسکوپ په واسطه لیدل کیږي. د دواړو ګیډیو په واسطه وهل کیدونکي نوري لارې مساوي نه دي، آن تردې چې M_1 او M_2 هنداري له ښیښه یي قاب څخه په مساوي واټن پرتې وي.



۲.۱۲.۶ شکل

علت یې دادې چې منعکس شوې ګیډۍ ښیښه یي قاب ته دوه ځلې سفر کوي په داسې حال کې چې خپره شوې ګیډۍ په G نقطه کې له بیلیدو څخه وروسته یواځې یو ځل په ایترو محیط کې سفر کوي. ددې لپاره چې د دواړو نیمه پوره ګیډیو نوري لارې مساوي کړو، په عین ضخامت او انعکاسي انډکس یو ښیښه یي قاب C چې جبراني قاب بلل کیږي د خپرې شوې ګیډۍ په لاره کې ځای په ځای کیږي.

نظریه. فرض کړئ چې M_1 او M_2 دواړه هنداري له ښیینه یي قاب G څخه په d عین واټن کې دي.که دستګاه د وخت په تیریدو سره حرکت ونه کړي، نور مخکې او شاته منعکس کیږي، نو دواړه ګیډي ښیینه یي قاب ته په عین وخت کې راګرځي او په عین فاز کې یو له بل سره یوځای کیږي.

پوهیږو چې ځمکه د لمر شاوخوا په $3 \times 10^4 \mathrm{ms}^{-1}$ مداري سرعت سره حرکت کوي. فرض کړئ چې دستګاه په دې سرعت سره له منبع څخه د لومړنی ګیډۍ په لوري حرکت کوي. د ګیډیو لارې به بیا داسې وي لکه په ۲.۱۲.۶ شکل کې چې ښودل شوي دي.

فرض کړئ چې نظر د ایترو محیط ته د نور سرعت c دی. مونږ دا ثبوت کولای شو چې د دوو نیمه پوره ګیډیو په واسطه د هغوی د اړوندو لارو په امتداد نیول شوی وخت سره مساوي نه دی. (دا حالت په سیند کې د دوو لامبووهونکو له حالت سره مشابه دی، یو لامبووهونکی د سیند مقابل ته ځي او بیرته راځي، بل پورته په سیند کې ځي او بیرته راځي.)

په داسې لوري د سفر وخت چې د ځمکې د حرکت په لوري عمود وي.

فرض کړې چې نظر ایترو ته د نور سرعت c او د ځمکې یا سامان الاتو سرعت vدی. فرض کړئ چې t_1 له G څخه M_1 ته د ګیډۍ د تلو او راتلو وخت دی. نو د نور د ګیډۍ وخت M_1 ته تر رسیدو پورې $t_1/2$ او له $t_1/2$ څخه وروسته چې د نور ګیډۍ M_1 ته رسیږي، هنداره به په M_1' موقعیت کې ومومي داسې چې $M_1M_1' = \frac{vt_1}{2}$

په $\angle d\Delta GM_1M_1'$ قایم الزاویه مثلث کې، لرو چې

$$(GM_1')^2 = (GM_1)^2 + (M_1M_1')^2$$

یا
$$\left(\frac{ct_1}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{vt_1}{2}\right)^2$$

یا
$$\frac{c^2t_1^2}{4} = d^2 + \frac{v^2t_1^2}{4}$$

یا
$$\frac{t_1^2}{4}(c^2 - v^2) = d^2$$

یا
$$t_1 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

یا
$$t_1 = \frac{2d}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

څرنګه چې $1 \gg \frac{v^2}{c^2}$ دی، نو د باینومیل قضیې په استعمالولو او د $\frac{v^2}{c^2}$ د لویو طاقتونو څخه په صرف نظر کولو، لاس ته راوړو چې

$$t_1 = \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \qquad \dots (۱.۱۲.۶)$$

د ځمکې د حرکت په لوري د سفر وخت.

که t_2 له G قاب څخه $\mathrm{M_2}$ هنداري ته د نور د تلو او راتلو وخت وي، د نور کیږدئ کله چې له G څخه $\mathrm{M_2}$ ته حرکت کوي $(c - v)$ سرعت لري او کله چې له $\mathrm{M_2}$ څخه بیرته G ته حرکت کوي $(c + v)$ سرعت لري، نو:

$$t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2dc}{c^2-v^2} = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{2d}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{2d}{c}\left[1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} + \cdots\right]$$

د $\frac{v^2}{c^2}$ د لویو طاقتونو څخه په صرف نظر کولو، لاس ته راوړو چې

$$t_2 = \frac{2d}{c}\left[1 + \frac{v^2}{c^2}\right] \qquad \dots (۲.۱۲.۶)$$

ځکه نو، مونږ پوهیږو چې t_2 له t_1 څخه زیات دی یعنې د دواړو لارو په وختونو کې توپیر شته. توپیر یې عبارت دی له:

$$t_2 - t_1 = \frac{2d}{c}\left[1 + \frac{v^2}{c^2}\right] - \frac{2d}{c}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right]$$

یا

$$t_2 - t_1 = \frac{2d}{c}\frac{v^2}{2c^2} = \frac{dv^2}{c^3}$$

له دې ځایه، د دواړو ګیډیو ترمنځ د لارې مؤثر توپیر عبارت دی له:

$$c(t_2 - t_1) = \frac{dv^2}{c^3}.c = \frac{dv^2}{c^2}$$

که د استعمال شوي نور د څپې اوږدوالی λ وي، نو د لارې توپیر $\frac{dv^2}{c^2}$ به د حلقو په شمیر کې له یوه تغیر سره برابر شي چې عبارت دی له:

$$n = \frac{dv^2}{\lambda c^2}$$

د تداخل نمونه په ثابته توګه ولیدل شوه. سامان الات ته، بیا 90° دوران ورکول کیږي، داسې چې $\mathrm{GM_1}$ لاره د ځمکې له مداري لارې سره موازي او $\mathrm{GM_2}$ په دې حرکت عمودیږي. ددې په نتیجه کې به د حلقې یو تغیر رامنځ ته شي:

$$\mathrm{N} = n + n = 2n = \frac{2dv^2}{\lambda c^2}$$

د مچلسن-مورلي په تجربه کې، د هرې هنداري واټن له ښیښه یي قاب سره یعنې $d \approx 11\mathrm{m}$ دی. که مونږ $\lambda = 6 \cdot 0 \times 10^{-7}\mathrm{m}$ او $\frac{v}{c} = 10^{-4}$ غوره کړو، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{N} = \frac{2 \times 11 \times (10^{-4})^2}{6 \times 10^{-7}} = 0 \cdot 37$$

سره له دې، د حلقې تغیر و نه لیدل شو. انترفیرومټر ددې وړتیا لرله چې د یوی حلقې د پراختیا $0 \cdot 01$ تغیر کشف کړي. د غلطي نتیجې نسبت باید د سامان الات د حساسیت خرابوالي ته ونشي. د غلطي نتیجې د تشریح کولو لپاره لاندې توضیحات ورکړل شوي دي.

(i) **د ایترو کشیدنه.** غلطه نتیجه کیدای شي د ایترو د بشپړې کشیدنې له امله وي، کله چې ځمکه په هغه باندې حرکت کوي. که همداسې وي، نو د ځمکې او ایترو ترمنځ به هیڅ نسبتي حرکت شتون ونه لري یعنې $v = 0$ کیږي او له دې ځایه د هیڅ تغیر طمع باید ونشي. خو که مونږ دا توضیح ومنو، نو له ستورو څخه د نور د کږیدنې پدیده به تشریح نشي.

(ii) **د لارنتز-فتزګرالډ کمیدنه.** په ۱۸۹۳ کې فتزګرالډ د مچلسن-مورلي تجربې غلطې نتیجې ته توضیح ورکړه. هغه وړاندیز وکړ چې که یو جسم په داسې لوري حرکت وکړي چې د ځمکې د حرکت له لوري سره موازي وي، خپل اوږدوالی کموي او د $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ضریب په اندازه لنډیږي. هغه زیاته کړه چې د ځمکې د حرکت په لوري عمودي لوري کې داسې کوم مخالفت نه رامنځ ته کیږي. له دې ځایه، د کمیدنې د فرضیې مطابق، $\mathrm{M_2}$ هنداره لوري ته د تلونکې نور وړانګې لار به له d څخه $d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ته تغیر وکړي داسې چې د $\mathrm{M_1}$ هنداره لوري ته د تلونکې نور وړانګې لار به عین شی پاتې شي.د t_2 وخت چې له ښیښه یي قاب G څخه $\mathrm{M_2}$ هنداره ته د نور د وړانګې د تلو او راتلو وخت دی د d پر ځای د $d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ له عوض کوونې څخه لاس ته راتلای شي یعنې

$$t_2 = \frac{2d}{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{2d}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2d}{c}\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

د $\frac{v^2}{c^2}$ د لویو طاقتونو څخه په صرف نظر کولو، لرو چې

$$t_2 = \frac{2d}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{2c^2}\right) = t_1$$

له دې ځایه، د کمیدنې فرضیه د ځمکې د حرکت سره موازي نور د لارې لنډیدنه یواځې دومره مني چې د دواړو لارو وختونه سره مساوي کړي. دا د حلقې د نه لیدل کیدو لامل دی. دا توضیح هم رد شوه ځکه د کمیدنې فرضیه سوچه فرضي او د ځانګړي طبیعت لرونکې ده.

له دې ځایه، ټول توضیحات ناکام شو ځکه تجربو چې په ډیر دقت د کال په مختلفو فصلونو کې په مختلفو ځایونو کې ترسره شوې همیشه د حلقو هیڅ تغیر کشف نه کړ.

د مچلسن-مورلي له تجربې څخه استنباط

د تجربې ناکامي په دې دلالت کوي چې په ایترو کې د ځمکې حرکت د کشف وړ نه او له دې ځایه داسې هیڅ محیط شتون نه لري چې په مطلقه توګه ساکن وي. علاوه له دې، انسټین پوه شو چې د تجربې غلطه نتیجه مونږ مجبوروي چې داسې عقیده ولرو چې په فضا کې د ځمکې د حرکت په واسطه د نور چټکتیا تغیر نه کوي یعنې دا غلطه ده چې د ګالیلایي انتقالاتو د تطبیقولو په واسطه د دوو لارو په امتداد وختونه محاسبه کړو.

بې له شکه، د نوموړې نظریې ناکامي د نسبیت نظریه وزیږوله.

۱۳.۶ د انسټین د نسبیت د نظریې پاسټولیټونه

د مچلسن-مورلي د تجربې غلطې نتیجې د ایترو محیط شتون یا په بله معنا د سکون په حال کې د کومې نړیوالې مأخذي دستګاه شتون غلط ثابت کړ. په ۱۹۰۴ کې، انسټین د نسبیت خاصه نظریه له دوو اساسي پاسټولیټونو سره پیشنهاد کړه.

۱. د فزیک اساسي قوانین په ټولو عطالتي مأخذي دستګاو کې د عین شکل لرونکي دي.

۲. د نور سرعت نسبت مشاهده کونکي ته د منبع د حرکت په پام کې نه نیولو سره، په ټولو عطالتي مأخذي دستګاو کې عین شی دی.

دا پاسټولیټونه په لومړي نظر ډیر اساسي نه معلومیږي، خو نوموړي انقلابي نظریو ته لکه د جسم او مشاهده کونکي ترمنځ د نسبتي حرکت له امله د اوږدوالي، کتلې او وخت تغیر او دنوموړو کمیتونو داخلي تابعتوب ته رهنمایي کوي.

۱۴.۶ د انتقال معادلو يوه نوي سټ ته اړتيا

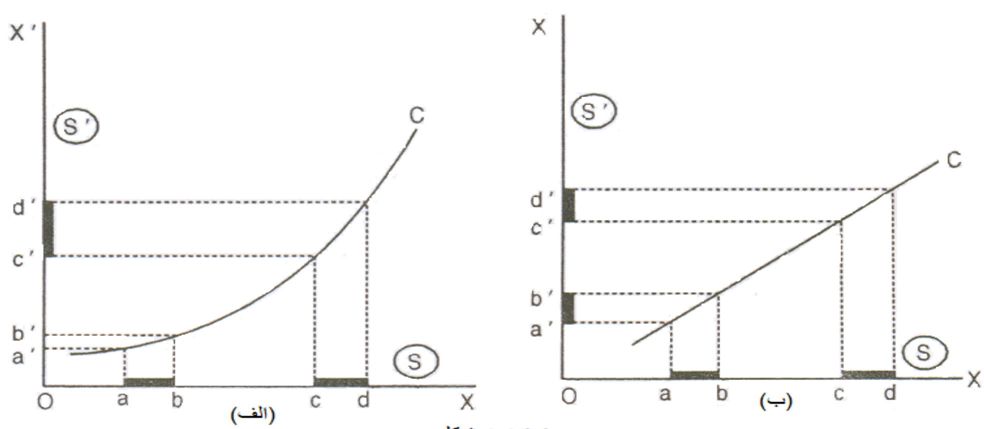
د ګاليلايي انتقال لاندې، د نور سرعت ثابت نه پاتې کيږي مګر د يوې مأخذي دستګاه نظر بلې ته په سرعت پورې اړه لري. علاوه له دې، ليدلي مو دي چې د الکترمقناطيس اساسي معادله

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

د ګاليلايي انتقال لاندې خپل شکل نه شي ساتلی. له دې ځايه، دا اړينه کيږي چې له يوې عطالتي مأخذي دستګاه څخه بلې ته په داخليدو کېد مختصاتو لپاره نوي انتقالات لاس ته راوړو ترڅو هغوی د نور د ثبات اصل او د فزيک نور قوانين سالم وساتي.بيا د نسبيت اصل چې له دغو انتقالاتو څخه لاس ته راغلی بايد په مساوي توګه سم په هغو جسمونو باندې تطبيق شي چې په نسبيتي سرعتونو يعنې د نور له سرعت سره د پرتله کيدو وړ سرعتونو سره حرکت کوي. مونږ د دغو انتقالاتو اساسي طبيعت له دې حقيقت څخه چې تشيال مشابه يا د ورته خواصو لرونکی دی حس کوو. دا دې ته اشاره کوي چې د انتقال معادلې بايد خطي وي يعنې که په يوه مأخذي دستګاه کې د فضا په مختلفو برخو کې د اوږدوالي انټروالونه او وخت انټروالونه مساوي اندازه شي نو له انتقال څخه وروسته يې بايد قيمتونه په بله دستګاه کې مساوي پاتې شي.

اجازه راکړئ ab او cd د اوږدوالي مساوي انټروالونه چې د فضا په دوو مختلفو برخو کې د X-محور په امتداد په S دستګاه کې په پام کې ونيسو. فرض کړئ چې C منحني له S دستګاه څخه S' ته غير خطي انتقال ښيي. نو له ۱.۱۴.۶ (الف) شکل څخه پوهيږو، چې له انتقال څخه وروسته به د اوږدوالي انټروالونه په S' دستګاه کې $a'b'$ او $c'd'$ څرګند شي يعنې دوی به زيات مساوي پاتې نشي.

له دې ځايه، که انتقال غير-خطي وي، نو د ميلې اوږدوالی به د فضا په هغې برخې پورې چې نوموړې په کې شتون لري، اړه ولري. دا د فضا د ورته والي له اصل سره مخالف دی. له ۱.۱۴.۶ (ب) شکل څخه، پوهيږو چې که انتقال خطي وي، د اوږدوالي انټروال مساويتوب ادامه مومي.

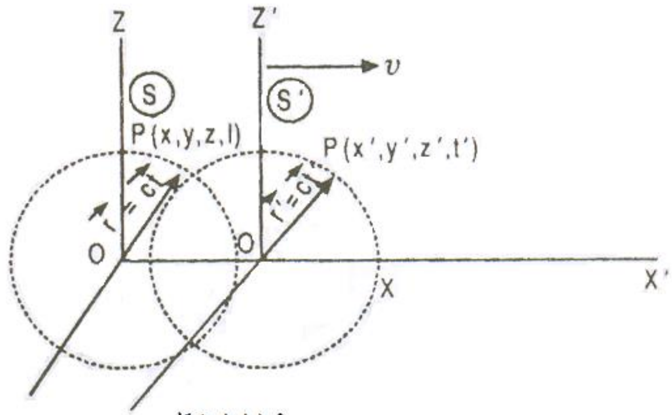


۱.۱۴.۶ شکل

د فضا د ورته خواصو د لرلو په اساس ورته دلیل د وخت د انټروال د انتقال لپاره نیول کېږي.

له دې ځایه، له یوې دستګاه څخه بلې ته انتقال باید خطي وي. لارنټز د یوې پېښې، چې له دوو عطالتي دستګاو څخه چې په نسبتي حرکت کې وي مشاهده کېږي د فضا او وخت مختصاتو د انتقال معادلې لاس ته راوړې.

۱۵.۶ د لارنټز انتقالات



۱.۱۵.۶ شکل

S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې S' نسبت S ته د x-جهت په مثبت لوري د v په سرعت د حرکت په حال کې دی (۱.۱۵.۶ شکل). فرض کړئ چې د وخت اندازه کوونه هغه وخت پیل کېږي چې د S او S' مبداګاني منطبق وي. د نور دسیګنال موجي جبهې لکه چې د O او O' مشاهده کونکي پواسطه لیدل کېږي کروي دي.

فرض کړئ چې د نور یو سیګنال په $t = t' = 0$ کې پیل کېږي. په S دستګاه کې د نومړي سیګنال په واسطه وهل شوی واټن عبارت دی له:

$$r = ct$$

یا

$$r^2 = c^2t^2$$

یا

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad \dots (i)$$

په عین توګه، په S' دستګاه کې د نومړي سیګنال په واسطه وهل شوی واټن عبارت دی له:

$$r' = ct'$$

یا

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

څرنګه چې مونږ فرض کړې ده چې S' د X-محور په امتداد د حرکت په حال کې ده، نو

$$y' = y \qquad \text{او} \qquad z' = z$$

نو پورتنی معادله به:

$$x'^2 + y^2 + z^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad \dots (ii)$$

د فضا او وخت د ورته والي له امله، x او t باید x' او t' خطي توابع وي او برعکس يې هم.

فرض کړئ چې دا رابطې په لاندې شکل دي.

$$x' = \mathrm{A}x + \mathrm{B}t \qquad \dots (iii)$$

او

$$t' = \mathrm{M}x + \mathrm{N}t \qquad \dots (iv)$$

داسې چې A، B، M او N عددونه دي چې باید اندازه شي.

د O'د X-مختصه به لکه چې په S دستګاه کې لیدل کیږي:

$$x = vt$$

د O'د X-مختصه به لکه چې په S' دستګاه کې لیدل کیږي:

$$x' = 0$$

نو (iii) معادله به

$$0 = \mathrm{A}vt + \mathrm{B}t$$

یا

$$\mathrm{A}vt = -\mathrm{B}t \qquad \dots (v)$$

یا

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A}v$$

که مونږ په (iii) او (iv) معادلو کې $x = 0$ وضع کړو، لاس ته راوړو چې

$$x' = \mathrm{B}t$$

$$t' = \mathrm{N}t$$

یا

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{N}}$$

خو $x = 0$ د O نقطه ښيي او x' ، t' د O د فضا او وخت مختصات دي لکه چې له S' څخه لیدل کیږي.

نو

$$\frac{x'}{t'} = -v \qquad \dots (vii)$$

له (v) او (vii) څخه، لاس ته راوړو چې

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{N}} = -v$$

یا $\mathrm{B} = -\mathrm{N}v$ ... $(viii)$

له (v) او $(viii)$ څخه،

$\mathrm{N} = \mathrm{A}$ ... (ix)

په (iii) او (iv) معادلو کې د B او N د قیمت په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$x' = \mathrm{A}x - \mathrm{N}vt = \mathrm{A}x - \mathrm{A}vt = \mathrm{A}(x - vt)$ ... (x)

او $t' = \mathrm{M}x + \mathrm{A}t$ ... (xi)

په (ii) معادله کې د (x) او (xi) معادلو په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{A}^2x^2 + \mathrm{A}^2v^2t^2 - 2\mathrm{A}^2xvt + \mathrm{y}^2 + z^2 - c^2(\mathrm{M}^2x^2 + \mathrm{A}^2t^2 + 2\mathrm{MA}xt) = 0$$

یا $x^2(\mathrm{A}^2 - \mathrm{M}^2c^2) + \mathrm{y}^2 + z^2 - t^2(\mathrm{A}^2c^2 - \mathrm{A}^2v^2) - 2\mathrm{A}xt(\mathrm{A}v + \mathrm{M}c^2)$ ... (xii)

د (xii)او (i) معادلو د ضرایبو له پرتله کولو څخه، لاس ته راوړو چې

$\mathrm{A}^2 - \mathrm{M}^2c^2 = 1$ ... $(xiii)$

$\mathrm{A}^2c^2 - \mathrm{A}^2v^2 = c^2$ ... (xiv)

$\mathrm{A}v + \mathrm{M}c^2 = 0$ ... (xv)

له (xiv) معادلې څخه، لرو چې

$$\mathrm{A}^2c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

یا $\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ... (xvi)

له (xv) معادلې څخه، لرو چې

$$\mathrm{M}c^2 = -\mathrm{A}v$$

یا $\mathrm{M} = -\frac{\mathrm{A}v}{c^2} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

نو (x) او (xi) معادلې په لاندې توګه لیکل کیدای شي:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \dots (xvi)$$

او

$$t' = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \dots (xvii)$$

نو د لارنتز انتقالات عبارت دي له

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ او} \end{array}\right\} \qquad \dots (۱.۱۵.۶)$$

د (۱.۱۵.۶) معادلو سټ د لارنتز د انتقال معادلې بلل کيږي. دوی د S بې زبره مأخذي دستگاه مختصات (x, y, z, t) د S' زبر لرونکي مأخذي دستگاه مختصاتو (x', y', z', t') ته انتقالوي. د لارنتز د انتقال معادلو معکوس د v په $-v$ او د زبر لرونکي کميتونو په بې زبره کميتونو بدلولو او ددې په عکس هم لاس ته راتلای شي. له دې ځايه، د لارنتز د انتقال معادلو معکوس به عبارت وي له

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ او} \end{array}\right\} \qquad \dots (۲.۱۵.۶)$$

په هغه حالت کې چې S' متحرکه دستگاه د نور د سرعت په پرتله ډير کوچنی سرعت ولري يعنې $v \ll c$، د لارنتز د انتقال معادلې گاليلايي انتقال معادلو ته اختصاريږي.

له همدې امله په دغسې حالت کې، په (۱.۱۵.۶) معادله کې $\frac{v^2}{c^2}$ ضريب د 1 په پرتله او $\frac{vx}{c^2}$ د t په پرتله له پامه غورځول کيدای شي په نتيجه کې لرو چې

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

او $t' = t$

له دې ځايه، دا کيداى شي وويل شي چې نسبتي اغيزې پواځې هغه وخت ليدل کيداى شي چې $v \approx c$.

۲.۶ مثال. وښاياست چې $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ د لارنتز د انتقال لاندې ثابت دی.

حل. د لارنتز انتقال له معکوس څخه، لرو چې

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ، \quad y = y' \quad ، \quad z = z' \text{ او } t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \frac{(x' - vt')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + {y'}^2 + {z'}^2 - c^2 \frac{\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{x'^2 + v^2t'^2 - 2x'vt' - c^2t'^2 - \frac{v^2{x'}^2}{c^2} - 2vx't'}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + {y'}^2 + {z'}^2$$

$$= \frac{x'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - c^2t'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + {y'}^2 + {z'}^2$$

$$= x'^2 - c^2t'^2 + {y'}^2 + {z'}^2$$

يا

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 + {y'}^2 + {z'}^2$$

له دې ځايه، $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ د لارنتز انتقال لاندې ثابت دی.

۳.۶ مثال. وښاياست چې $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ الکترومقناطيسي څپې معادله د لارنتز انتقال لاندې ثابته ده، داسې چې ϕ سکالري پوتنسيال دی.

حل.

ϕ سکالري پوتنسيال د x'، y' ، z' او t' تابع دی.

يعنې $\phi = \phi\,(x'،y'،z'،t')$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \qquad \ldots(i)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} \qquad \dots(ii)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} \qquad \dots(iii)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad \dots(iv)$$ او

اوس، له بې زبره څخه زبر لرونکې مأخذې دستګاه ته د لارنتز انتقال عبارت دی له

$$t'=\beta\left(1-\frac{vx}{c^2}\right) \text{ او } z'=z \text{ ، } y'=y \text{ ، } x'=\beta(x-vt) \qquad \dots(\text{A})$$

داسې چې $\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

له (A) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\beta \text{ ، } \frac{\partial y'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial x}=0 \text{ ، } \frac{\partial t'}{\partial x}=-\beta\frac{v}{c^2}$$

$\therefore$ معادله به (i)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)$$

$\therefore$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\beta\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

داسې چې

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\beta^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)$$

یا

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\beta^2\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}-\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\,\partial t'}\right] \dots(v)$$

له (A) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=1 \text{ ، } \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial y}=\frac{\partial t'}{\partial y}=0$$

$\therefore$ معادله به (ii)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y'}$$

∴

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

داسې چې $\quad ...(vi)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial {y'}^2}$$

له (A) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \ ، \ \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} = 0$$

∴ $\quad (iii)$ معادله به

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z'}$$

داسې چې $\quad ...(vii)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial {z'}^2}$$

له (A) معادلې څخه، لرو چې

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \beta \ ، \ \frac{\partial x'}{\partial t} = -\beta v ، \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$$

∴ $\quad (iv)$ معادله به

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial \phi}{\partial t'} - v\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)$$

∴

$$\frac{\partial}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

داسې چې

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \beta^2\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial t'} - v\frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)$$

یا $\quad ...(viii)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \beta^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial {t'}^2} + v^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial {x'}^2} - 2v\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\,\partial t'}\right)$$

څکه نو، د(v)،(vi) ، (vii)او $(viii)$ معادلو په استعمالولو، د الکترومقناطیسي څپې معادله به

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} =$$

$$\beta^2\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial {x'}^2} + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 \phi}{\partial {t'}^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\,\partial t'}\right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial {y'}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial {z'}^2} - \frac{\beta^2}{c^2}\left[\frac{\partial \phi}{\partial {t'}^2} + v^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial {x'}^2} - 2v\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\,\partial t'}\right]$$

$$= \beta^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}-\frac{\beta^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$$

څرنګه چې $\beta^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$، لرو چې

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$$

له دې ځایه، د الکترومقناطیسي څپې معادله د لارنتز انتقال لاندې ثابته پاتې کېږي.

۱۶.۶ په نسبیت کې مشاهده کونکی

په نسبیت کې مونږ ډېر ځلي ' یوه مشاهده کونکي ' ته اشاره کوو خو نوموړې اصطلاح معمولاً غلطه توضیح کېږي. د مشاهده کونکي معنا یو شخص نه دی، چې په یوه مأخذي دستګاه کې د یوې پیښې رامنځ ته کیدنه ویني او مشاهده کوي مګر هغه یو شخص دی چې د نومړې پیښې په هکله اندازه کوونه کولای شي. په بله مانا، یو مشاهده کونکی باید په ساده توګه د ' یوه لیدونکي 'په توګه په پام کې و نه نیول شي بلکې باید د ' یوه اندازه کونکي ' په توګه په پام کې ونیول شي. علاوه له دې، د یوه مشاهده کونکي معنا لازمي نه ده چې یو شخص به وي. یوه اله چې د یوې پیښې موقعیت معلوم، ثبت او اندازه کړي په نسبیت کېد یوه مشاهده کونکي په توګه ګرځول کېږي.

له دې ځایه، په نسبیت کې، یو شخص چې په الاتو لکه پیمانه، ساعت او داسې نورو باندې مجهز وي یا یوه اله چې د یوې پیښې موقعیت معلوم، ثبت او اندازه کړي مشاهده کونکی بلل کېږي.

د لارنتز د انتقال معادلې د یوې پیښې چې د ساکنې Sدستګاه د مشاهده کونکي په واسطه اندازه کېږي د فضا-وخت مختصاتو او د عین پیښې چې د S'دستګاه، چې نظر S دستګاه ته په کوم ثابت سرعت سره د حرکت په حال کې ده د مشاهده کونکي په واسطه اندازه کېږي، د فضا-وخت مختصاتو ترمنځ رابطې دي.د یوې پیښې د فضا-وخت مختصات (x_1, y_1, z_1, t_1)دې ته اشاره کوي چې دا مختصات د یوه ساعت په واسطه په (x_1, y_1, z_1) موقعیت کې په t_1 وخت کې ، چې نوموړې رامنځ ته کېږي، ثبت کېږي. د یوې پیښې د فضا-وخت مختصات (x_2, y_2, z_2, t_2) مختصات د بل ساعت په واسطه په (x_2, y_2, z_2) موقعیت کې په t_2 وخت کې ، چې نوموړې رامنځ ته کېږي، ثبت کېږي. په دې مفهوم، یو مشاهده کونکی په واقعي توګه د ثبت کونکو ساعتونو یو نامحدود سټ دی چې په فضا کې ویشل شوي، نظر یو بل ته ساکن او په یوه وخت کې کار کوي.

۱۷.۶ د اوږدوالی نسبیت (د اوږدوالی کمیدنه)

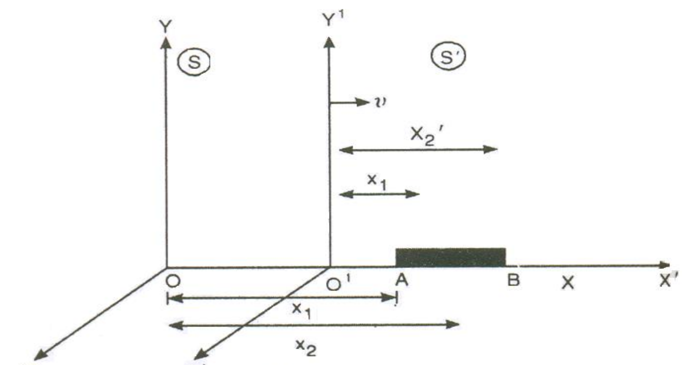
اجازه راکړئ چې اوس په دوو مختلفو عطالتي دستګاو کې د اوږدوالي د انټروالونو ترمنځ یوه رابطه لاس ته راوړو. په S' دستګاه کې د X'-محور په امتداد، یوه میله د سکون په حال کې په پام کې ونیسئ. په نوموړې دستګاه کې یو مشاهده کونکی د څوکو مختصات د x'_2 او x'_1 په توګه ټاکي او د میلې اوږدوالی د L_0 په توګه اندازه کوي. نو

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

L_0 د میلې هغه اوږدوالی دی چې په هغه دستګاه کې چې نوموړی په کې د سکون په حال کې شتون لري د مشاهده کونکي په واسطه اندازه کیږي او د میلې ځانګړی اوږدوالی بلل کیږي.

فرض کړئ چې S' دستګاه د X-لوري په امتداد نظر S بلې دستګاه ته په یونواخت سرعت v سره د حرکت په حال کې ده.اوس، مونږ هیله لرو چې د میلې اوږدوالی داسې پیدا کړو لکه په S دستګاه کې چې مشاهده کونکي ته معلومیږي. ددې لپاره، که د مثال په توګه په t عین لحظه کې د مشاهده کونکي په واسطه د میلې د څوکو مختصات x_2 او x_1 اندازه شي، نو

د لارنټز له انتقالاتو څخه لرو چې:



شکل ۱.۱۷.۶

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

∴ په S' دستګاه کې به د میلې اوږدوالی عبارت وي له:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

یا

$$L = L_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \qquad \dots(i)$$

داسې چې L_0 ځانګړی اوږدوالی بلل کېږي او L په S دستګاه کې د میلې اندازه شوی اوږدوالی دی.

پایلې (مباحثه)

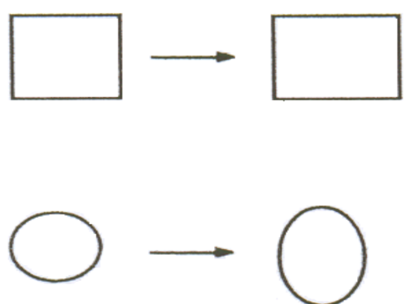
(i) څرنګه چې $\sqrt{1-v^2/c^2} < 1$

$\therefore$ $L < L_0$

له دې ځایه د میلې اندازه شوی اوږدوالی د هغې دستګاه په پرتله چې نوموړې په کې د سکون په حال کې ده په هغه دستګاه کې چې نوموړې په کې د حرکت په حال کې ده کم دی.

(ii) دا تاثیر متقابل دی یعنې پایله به عین شی وي، که میله ساکنه او مشاهده کونکی د حرکت په حال کې وي.

(iii)څرنګه چې د اوږدوالي کمیدنه د حرکت په لوري رامنځ ته کېږي او په عمودي لوریو کمیدنه شتون نه لري ($\therefore$ $y' = y$ ، $z' = z$) ، نو یوه مربع به د مستطیل او دایره به د کرې په څیر معلومه شي لکه چې په (۲.۱۷.۶) شکل کې ښودل شوي دي.



شکل ۲.۱۷.۶

(iv) که $v \ll c$ نو $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq 1$

نو $L = L_0$

(v) که $v = c$، نو $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-1} = 0$

نو $L = 0$ کېږي، چې دا ممکن نه دی.

که $v > c$ وي، نو $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ خیالي دی.

نو، خیالي کیږي $= L$، چې دا ممکن نه دی.

له دې ځایه، پوهیږو چې هیڅ مادي جسم په داسې سرعت سره حرکت نه شي کولای چې د نور له سرعت سره مساوي یا له هغه څخه زیات وي.

۴.۶ مثال. یو متر میله به څومره اوږده ښکاره شي که نظر مشاهده کونکي ته په $0 \cdot 9c(i)$ $0 \cdot 95c(ii)$ $0 \cdot 99c\ (iii)$ سرعت سره حرکت وکړي.

حل. $L_0 = 1\text{m}$ راکړل شوی دی

څرنګه چې $L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

نو (i) کله چې $v = 0 \cdot 9c$ ، $L = 1\sqrt{1 - (0 \cdot 9)^2} = 0 \cdot 436\text{m}$

(ii) کله چې $v = 0 \cdot 95c$ ، $L = 1\sqrt{1 - (0 \cdot 95)^2} = 0 \cdot 313\text{m}$

(iii) کله چې $v = 0 \cdot 99c$ ، $L = 1\sqrt{1 - (0 \cdot 99)^2} = 0 \cdot 141\text{m}$

۵.۶ مثال. د یو متر لښتې اوږدوالي پیدا کړئ چې په $0 \cdot 8c$ سرعت سره د اوږدوالي په امتداد حرکت کوي، داسې چې c د نور سرعت دی.

حل. دلته ځانګړی اوږدوالی، $L_0 = 1\text{m}$

$v = 0 \cdot 8c$

پوهیږو چې، د میلې اوږدوالی چې ساکن مشاهده کونکي ته څرګندیږي عبارت دی له

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

یا

$$L = 1 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0 \cdot 8c}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - (0 \cdot 8)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 0 \cdot 64} = \sqrt{0 \cdot 36} = \mathbf{0 \cdot 6m}$$

۶.۶ مثال. یوه میله نسبت لابراتوار ته د خپل اوږدوالي سره موازي په $0 \cdot 6c$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده. په لابراتوار کې الات د نوموړې میلې اوږدوالی 1m اندازه کوي. ځانګړی اوږدوالی یې څومره ده؟

حل. دلته، $\mathrm{L} = 1\mathrm{m}$ ، $v = 0 \cdot 6c$

پوهیږو چې

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

یا

$$\mathrm{L}_0 = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0\cdot 6c}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0\cdot 6)^2}}$$

یا

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0\cdot 36}} = \frac{1}{\sqrt{0\cdot 64}} = \frac{1}{0\cdot 8} = \mathbf{1 \cdot 25m}$$

۷.۶ مثال. یوه فضايي بیړۍ په ځمکه باندې 50 متره اوږده ده. کله چې په پرواز کې وي، په ځمکه باندې مشاهده کونکي ته 49 متره څرګندیږي. د فضايي بیړۍ چټکتیا پیدا کړئ.

حل. دلته، $\mathrm{L}_0 = 50\mathrm{m}$ ،$\mathrm{L} = 49\mathrm{m}$

پوهیږو چې،

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$49 = 50\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{49}{50}$$

یا

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{49}{50}\right)^2$$

یا

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{49}{50}\right)^2 = \frac{50^2-49^2}{50^2} = \frac{99\times 1}{2500}$$

یا

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{99}{2500}} = 0 \cdot 199$$

یا

$$v = \mathbf{0 \cdot 199}\boldsymbol{c}$$

۸.۶ مثال. د هغې میلې د کمیدو سلنه محاسبه کړئ چې په $0\cdot 6c$ سرعت سره په داسې لوري چې له خپل اوږدوالي سره يې په 60° د حرکت په حال کې وي.

حل. فرض کړئ چې د میلې اوږدوالی l دی.

د حرکت د لوري په امتداد د میلې د اوږدولي مرکبه $\mathrm{L} = l\cos 60^{\circ} = 0\cdot 5\, l$

د حرکت په لوري عمود د میلې د اوږدوالي مرکبه $= l\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l$

فرض کړئ چې د L_0 حرکت لوري په امتداد د اوږدوالي مرکبه د L اوږدوالي لرونکي څرګندیږي.

نو، $\mathrm{L} = \mathrm{L}_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

دلته، $\mathrm{L}_0 = 0\cdot 5l$ ،$v = 0\cdot 6c$

$$\therefore \quad \mathrm{L} = 0\cdot 5l\sqrt{1-\frac{(0\cdot 6c)^2}{c^2}}$$

$$= 0\cdot 5l\sqrt{1-\cdot 036}$$

$$= 0\cdot 5l\sqrt{0\cdot 64} = 0\cdot 5l\times 0\cdot 8 = \mathbf{0\cdot 4}\boldsymbol{l}$$

د حرکت په لوري عمود د اوږدوالي مرکبه ثابته پاتې کیږي.

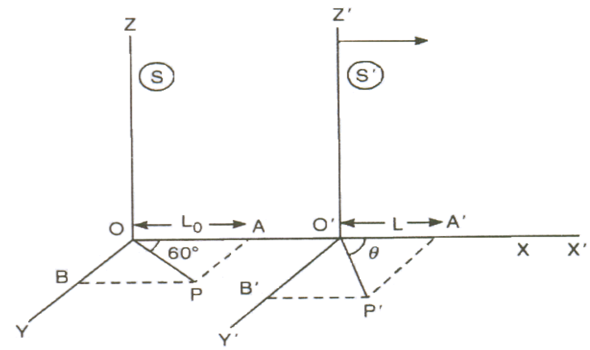
$\therefore$ په حرکت کې د میلې څرګندیدونکی اوږدوالی

$$\mathrm{L}' = \sqrt{(0\cdot 4l)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, l\right)^2} = \sqrt{0\cdot 16\, l^2 + 0\cdot 75\, l^2}$$

$$= \sqrt{0\cdot 19\, l^2} = 0\cdot 954\, l$$

$\therefore$ د میلې په اوږدوالي کې د کمیدو سلنه

$$= \frac{l-0\cdot 954\, l}{l}\times 100 = 4\cdot 6\%$$



۹.۶ مثال. $5\mathrm{m}$ اوږدوالي لرونکې يوه ميله د S ساکنې دستګاه په XY-مستوي کې پرته ده او له X-محور سره 60° زاويه جوړوي. په S' بلې دستګاه کې چې د X-لوري په امتداد په $2\cdot 4\times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده د نوموړې اوږدوالی او له X-لوري سره ميل پيدا کړئ.

حل.

$\mathrm{OP}=5\mathrm{m}$ اوږدوالي لرونکې ميله د ساکنې دستګاه په XY-مستوي کې له X-محور سره په 60° زاويې جوړولو پرته ده لکه چې په شکل کې ښودل شوي دي. څرنګه چې حرکت د X-محور په امتداد دی، د X-محور په امتداد د ميلې د اوږدوالي مرتسم $\mathrm{OA}=\mathrm{L}_0$(د مثال په توګه) به د S'دستګاه د حرکت په واسطه اغيزمن شي.

اوس،

$$\mathrm{L}_0=\mathrm{OA}=\mathrm{OP}\cos 60^{\circ}=5\times\frac{1}{2}=2\cdot 5\mathrm{m}$$

همدارنګه،

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OP}\sin 60^{\circ}=\frac{5\sqrt{3}}{2}=4\cdot 33\mathrm{m}$$

فرض کړئ چې د X-محور په امتداد د اوږدوالي مرتسم د S' دستګاه مشاهده کونکي ته (د مثال په توګه) د $\mathrm{O'A'}=\mathrm{L}$ په څير څرګنديږي.

نو،

$$\mathrm{L}=\mathrm{L}_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

دلته، $\mathrm{L}_0=2\cdot 5\mathrm{m}$، $v=2\cdot 4\times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$، $c=3\times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$

$$\therefore\quad \mathrm{L}=2\cdot 5\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot 4\times 10^{8}}{3\times 10^{8}}\right)^{2}}=2\cdot 5\sqrt{1-(0\cdot 8)^{2}}$$

$$=2\cdot 5\times\sqrt{0\cdot 36}=2\cdot 5\times 0\cdot 6=1\cdot 5\mathrm{m}$$

د S' دستګاه د Y'-محور په امتداد د اوږدوالي مرتسم يعني $\mathrm{O'B'}$له OB سره مساوي دی يعني $4\cdot 33\mathrm{m}$ له دې ځايه، د S' دستګاه مشاهده کونکي ته د ميلې اوږدوالی عبارت دی له

$$\mathrm{OP'} = [(\mathrm{O'A'})^2 + (\mathrm{O'B'})^2]^{1/2}$$

$$= [(1 \cdot 5)^2 + (4 \cdot 33)^2]^{1/2}$$

$$= [2 \cdot 55 + 18 \cdot 75]^{1/2} = (21)^{1/2} = \mathbf{4 \cdot 58m}$$

فرض کړئ چې θ په $\mathrm{S'}$ دستګاه کې د $\mathrm{X'}$-محورسره د میلې میل دی.

نو، $\tan\theta = \frac{\mathrm{A'P'}}{\mathrm{O'A'}} = \frac{\mathrm{O'B'}}{\mathrm{O'A'}} = \frac{4\cdot33}{1\cdot5} = 2 \cdot 8867$

$\therefore$ $\theta = 70^\circ 54'$

۱۰.۶ مثال. که L_0^3 د مکعب د سکون حجم وي نو وښایاست چې $\mathrm{L}_0^3\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ هغه حجم دی چې د مکعب د يوې څنډې سره په موازي لوري په يونواخت سرعت سره د متحرکې مأخذي دستګاه څخه ليدل کيږي.

حل.

څرنګه چې د مکعب د سکون حجم L_0^3 دی. د معکب هره ضلعه د L_0 اوږدوالي لرونکې ده. د مکعب هغه ضلعه، چې مأخذي دستګاه له هغې سره موازي حرکت کوي کميدنه زغمي او ځکه نو، $\mathrm{L}_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ کيږي.

د مکعب دوه نورى ضلعې به بې اغيزې پاتې شي او د L_0 اوږدوالى به ولري. ځکه نو، د مکعب حجم کله چې له متحرکې مأخذي دستګاه څخه ليدل کيږي په داسې توګه څرګنديږي

$$= (\mathrm{L}_0)(\mathrm{L}_0)\mathrm{L}_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \mathrm{L}_0^3\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

۱۸.۶ د وخت نسبیت (د وخت وروسته والی)

د دوو پیښو ترمنځ د وخت انټروال هم په دوو عطالتي دستګاو کې چې نسبت یو بل ته په یونواخته توګه حرکت کوي مختلف څرګندیږي. د مختلفو دستګاو د وخت د انټروالونو ترمنځ د کمیتي رابطې د لاس ته راوړولو لپاره، په S' دستګاه کې چې نظر S دستګاه ته د X-محور په امتداد د v په یونواخت سرعت سره د حرکت په حال کې ده په x' نقطه کې یو ځای پر ځای شوی ساعت په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې په هره لحظه کې، د S' دستګاه مشاهده کونکی، چې د هغه لپاره ساعت د سکون په حال کې دی، t_1' وخت مومي. د S دستګاه مشاهده کونکی به لاندې وخت ومومي

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

که څه وخت وروسته، د S' دستګاه مشاهده کونکی وخت د t_2' په توګه ثبت کړي، د S دستګاه مشاهده کونکی به یې په لاندې توګه ثبت کړي

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

څکه نو،

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$t_2' - t_1'$ وخت انټروال په داسې دستګاه کې چې په هغې کې ساعت د سکون په حال کې دی اندازه شوی او ځانګړی وخت بلل کیږي د مثال په توګه τ_0. که $t_2 - t_1 = \tau$ وي، نو

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \dots (۱.۱۸.۶)$$

مباحثه:

(i) دا لاس ته راځي چې $\tau > \tau_0$ یعني د هغه مشاهده کونکي په واسطه د وخت ثبت شوی انټروال چې نظر هغه ته ساعت د سکون په حال کې دی د وخت له هغه انټروال څخه چې د هغه مشاهده کونکي په واسطه چې نظر هغه ته ساعت په حرکت کې دی کوچنی دی. په بله مانا، په S' دستګاه کې ساکن ساعت په Sدستګاه کې مشاهده کونکي ته داسې څرګندیږي چې په S' دستګاه کې د مشاهده شوې اندازې په پرتله په کمې اندازې چلیږي. دا اثر د وخت وروسته والی بلل کیږي.

(ii) د اوږدوالي د کمیدنې د اثر په څیر، دا اثر هم په طبیعت کې متقابل دی.

(iii) که $v = c$وي، نو$0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ دی.

نو $\tau = \frac{\tau_0}{0} = \infty$ ، چې ناممکن دی

(iv) که $v > c$ ، نو $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ خيالي دی، چې دا هم نا ممکن دی.

له دې ځايه مونږ لاس ته راوړو چې هيڅ مادي ذره د نور له سرعت سره مساوي يا له هغه څخه په زيات سرعت سره پرواز نشي کولای.

۱۱.۶ مثال. په لابراتوار کې، د يوې ذرې چې په $2 \cdot 8 \times 10^{10}\mathrm{cms}^{-1}$سرعت سره حرکت کوي د ژوند موده $2 \times 10^{-7}s$ لاس ته راغلې ده. د ذرې د ژوند ځانګړې موده محاسبه کړئ.

حل.

دلته، $\tau = 2 \times 10^{-7}s$ ، $v = 2 \cdot 8 \times 10^{10}\mathrm{cms}^{-1}$، $c = 3 \times 10^{10}\mathrm{cms}^{-1}$.

ځانګړی وخت د لاندې رابطې په واسطه ورکول کيږي

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2 \times 10^{-7}\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot8\times10^{10}}{3\times10^{10}}\right)^2}$$

$$= 2 \times 10^{-7}\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot8}{3}\right)^2}$$

$$= 2 \times 10^{-7}\sqrt{\frac{3^2-(2\cdot8)^2}{3^2}}$$

$$= 2 \times 10^{-7}\sqrt{\frac{5\cdot8\times0\cdot2}{9}} = 2 \times 10^{-7} \times 0 \cdot 359$$

$$= \mathbf{7 \cdot 18 \times 10^{-8}s}$$

۱۲.۶ مثال. په فضايي بيړۍ کې يو ساعت په 3 ثانيو کې سيګنالونه خپروي کله چې په فضايي بيړۍ کې د فضا ته سفر کونکي په واسطه مشاهده کيږي. که فضايي بيړۍ په $1 \cdot 8 \times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$ سرعت سره پرواز وکړي، په ځمکه باندې مشاهده کونکي ته د رسيدونکو پرله پسې سيګنالونو ترمنځ انټروال پيدا کړئ.

حل: دلته، $v = 1 \cdot 8 \times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$، $c = 3 \times 10^{8}\mathrm{ms}^{-1}$

لرو چې،

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{-\left(\frac{1\cdot8\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-(0\cdot6)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-0\cdot36}} = \frac{3}{\sqrt{0\cdot64}} = \frac{3}{0\cdot8}$$

$$= \mathbf{3\cdot75}\boldsymbol{s}$$

۱۳.۶ مثال. یو مووان چې په اتموسفیر کې پورته رامنځ ته کېږي په $0\cdot99c$ سرعت سره $5\cdot$ $4km$ واټن مخکې له دې چې تجزیه شي وهي. د مووان د حرکت موده چې په خپله يې اندازه کړي څومره ده؟

حل: د مووان سرعت، $v = 0\cdot99c = 0\cdot99\times3\times2\cdot97\times10^8\mathrm{ms}^{-1}$

د مووان په واسطه د هغه له تجزیه کیدو څخه مخکې وهل کیدونکی واټن،

$$d = 5\cdot4km = 5400\mathrm{m}$$

∴ د مووان د ژوند موده چې زمونږ په واسطه اندازه کېږي عبارت ده له

$$\tau = \frac{d}{v} = \frac{5400}{2\cdot97\times10^8} = \mathbf{1\cdot818\times10^{-5}}\boldsymbol{s}$$

د مووان په واسطه په خپله اندازه شوي ژوند ځانګړی وخت (τ_0) دی او عبارت دی له

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 1\cdot818\times10^{-5}\sqrt{1-\left(\frac{0\cdot99c}{c}\right)^2}$$

$$= 1\cdot818\times10^{-5}\sqrt{1-(0\cdot99)^2}$$

$$= 1\cdot818\times10^{-5}\sqrt{1\cdot99\times0\cdot01}$$

$$= 1\cdot818\times10^{-5}\times0\cdot1411$$

$$= \mathbf{2\cdot565\times10^{-6}}\boldsymbol{s}$$

د مووان په واسطه د هغه د تجزیه کیدو څخه مخکې په خپله اندازه شوی وهل شوی واټن عبارت دی له

$$d_0 = v\tau_0 = 2\cdot 97 \times 10^8 \times 2\cdot 565 \times 10^{-6}$$

$$= \mathbf{761.8m}$$

۱۴.۶ مثال. د ثېتې سرعت میو-میزون چې په لابراتور کې لاس ته راځي متوسط ژوند له 2×10^{-6} ثانیو څخه عبارت دی. په کیهاني وړانګو کې د ځانګړې لوړې چټکتیا لرونکي میو-میزون 10^{-5} ثانې لاس ته راځي. د کیهاني وړانګو میو-میزون سرعت محاسبه کړئ.

حل.

ځرنګه چې لابراتواري میو-میزون په ثېتې سرعت سره سفر کوي، نومړی د سکون په حال کې فرض کیدای شي او له دې ځایه په لابراتوار کې د میو-میزون متوسطه ژوند ځانګړی وخت دی یعنې

$$\tau_0 = 2 \times 10^{-6}\mathrm{s}$$

همدارنګه،

$$\tau = 10^{-5}\mathrm{s}$$

لرو چې $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

یا
$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{2\times10^{-6}}{10^{-5}} = 0\cdot 2$$

یا
$$1-\frac{v^2}{c^2} = 0\cdot 04$$

یا
$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - 0\cdot 04 = 0\cdot 96$$

یا
$$\frac{v}{c} = (0\cdot 96)^{1/2} = 0\cdot 98$$

یا
$$\boldsymbol{v = 0\cdot 98\ c}$$

۱۵.۶ مثال. د π^+ میزونونو چې له $\beta = 0\cdot 73$ سره د حرکت په حال کې دي د تجزیې منځنی عمر څومره دی؟ (د ځانګړي منځني عمر موده τ_0 یې $2 \times 10^{-8}\mathrm{sec}$ ده). د یوه منځني عمر په اوږدو کې په نوموړي سرعت کې څومره واټن وهل شوی دی؟

حل. دلته، د π^+ میزونونو ځانګړي منځني عمر موده

$\tau_0 = 2 \cdot 5 \times 10^{-8}\text{sec}$

ځکه نو، د $\beta = \frac{v}{c} = 0 \cdot 73$ لپاره، مشاهده شوې د ژوند موده،

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{\cdot}5\times10^{-8}}{\sqrt{1-(0{\cdot}73)^2}}$$

$$= \frac{2{\cdot}5\times10^{-8}}{\sqrt{0{\cdot}4671}} = \frac{2{\cdot}5\times10^{-8}}{0{\cdot}6834} = \mathbf{3 \cdot 658 \times 10^{-8}sec}$$

د π^+ میزونونو سرعت، $v = \beta c = 0 \cdot 73 \times 3 \times 10^{10}$ دی.

$$= 2 \cdot 19 \times 10^{10}\text{cms}^{-1}$$

$\therefore$ په یوه منځني ژوند کې په نوموړي سرعت وهل شوی واټن

$$= v\tau = 2 \cdot 19 \times 10^{10} \times 3 \cdot 658 \times 10^{-8} = \mathbf{801 \cdot 1cm}$$

د وخت وروسته والي په ملاتړ کې تجربوي دلیل

(i) د μ-میزون تجزیه. μ-میزونونه د کیهاني وړانګو د باران له امله په تقریباً 10km لوړوالي کې رامنځ ته کېږي. د μ-میزون سرعت تقریباً $0 \cdot 998c$ او د ژوند موده یې $2 \cdot 2 \times 10^{-6}$s ده.

$\therefore$ دوی باید د $= v\tau$ واټن ووهي

$$= 0 \cdot 998 \times 3 \times 10^8 \times 2 \cdot 2 \times 10^{-6}$$

$$\simeq 660\text{m}$$

خو دوی آن تر دې چې په 10kmواټن کې هم پیدا کېږي،

نو، د وخت وروسته والي په استعمالولو

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{\cdot}2\times10^{-6}}{\sqrt{1-\left(\frac{0{\cdot}998c}{c}\right)^2}} = 34 \cdot 9 \times 10^{-6}\text{s}$$

$\therefore$ د μ-میزون په واسطه وهل کیدونکی واټن $= v\tau$

$$= 0 \cdot 998 \times 3 \times 10^8 \times 34 \cdot 9 \times 10^{-6}$$

$$\simeq 10 \cdot 4\text{km}$$

(ii) د π-میزون تجزیه. π-میزونونه هغه وخت رامنځ ته کیدای شي چې په کاربن باندې د کمې انرژي α ذرې بمبارد شي. د π-میزونسرعت تقریباً $0 \cdot 9c$او د ژوند موده یې تقریباً 26×10^{-9}s ده.

∴ دوی باید د $= v\tau$ واټن ووهي

$$= 0 \cdot 9 \times 3 \times 10^{8} \times 26 \times 10^{-9}$$

$$\simeq 7\text{m}$$

خو دوی آن تر دې چې په 15mواټن کې هم پیدا کېږي،

نو، د وخت وروسته والي په استعمالولو

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{26\times10^{-9}}{\sqrt{1-\left(\frac{0\cdot9c}{c}\right)^2}} = 59 \times 10^{-9}\text{s}$$

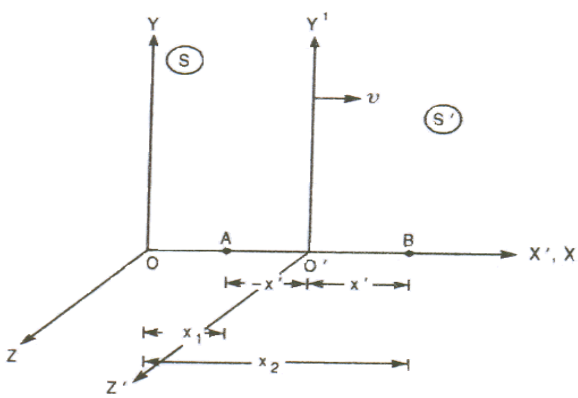
∴ د π-میزون په واسطه وهل کیدونکی واټن $= v\tau$

$$= 0 \cdot 9 \times 3 \times 10^{8} \times 59 \times 10^{-9}$$

$$\simeq 16\text{m}$$

دا دوخت د وروسته والي تجربوي دلایل دي.

<u>۱۹.۶ د یو وخت والی نسبیت</u>



۱.۱۹.۶ شکل

دوو پیښو ته په یو وخت کې رامنځ ته کیدونکې ویل کېږي که د هغوی ترمنځ د وخت انټروال صفر وي. ددې معنا داده چې په یو وخت کې پیښې د وخت په عین لحظه کې رامنځ ته کېږي، د فضا په بله کومه نقطه کې اړینه نه ده چې عین شی وي.

فرض کړئ چې په S' دستګاه کې چې نظر Sدستګاه ته په v یونواخت سرعت سره د حرکت په حال کې ده دوه پیښې په x' او $-x'$ کې په A او B کې رامنځ ته کېږي لکه چې په ۱.۱۹.۶ شکل کې ښودل کېږي. په S' دستګاه کې دt_1' او t_2' ترمنځ د وخت انټروال به په O' کې مشاهده کونکي ته عین شی وي. ۱.۱۹.۶ شکل

یعنې $t_2' - t_1' = 0$

يا $\quad t'_2 = t'_1 \quad \dots(i)$

په S دستګاه کې د رامنځ ته کيدني د A او B نقطو مختصات مختلف دي. که په S دستګاه کې د A او B نقطو مختصات x_1 او x_2 وي، نو:

د لارنټز انتقالاتو څخه

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

د (i) معادلې په استعمالولو لاس ته راوړو چې

$$\frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

يا $\quad t_1 - \frac{vx_1}{c^2} = t_2 - \frac{vx_2}{c^2}$

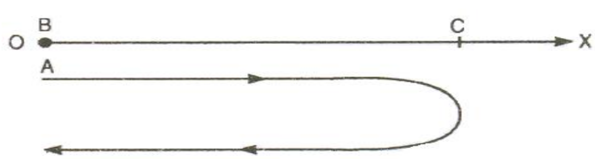
يا $\quad t_2 - t_1 = \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}$

څرنګه چې $x_2 \neq x_1$

$\therefore \quad t_2 - t_1 \neq 0 \quad \dots(ii)$

يعني پيښې به په S دستګاه کې په يو وخت کې څرګندې نه شي.

۲۰.۶ د غبرګونو معما



شکل ۱.۲۰.۶

د غبرګونو معما د وخت وروسته والي پديدې پورې اړه لري. فرض کړئ چې A او B دوه غبرګوني ورونه په $t = 0$ لحظه کې په O مبدا کې پيدا شوي، 20 کاله وروسته، دواړه د 25 کلو عمر په لرلو سره، د وخت وروسته والي د مطالعه کولو اراده کوي.

فرض کړئ چي A ورور په $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ سرعت سره د X-محور په امتداد په حرکت پیل کوي او د هغه د خپل ساعت مطابق 10 کاله په پرله پسې توګه سفر کوي.(B په ځمکه پاتې کېږي) او خپل B ورور ته چي په ځمکه انتظار کوي بیرته راګرځي (۶.۲۰.۱ شکل)

نو د Aعمر $A = 25 + 10 = 35$ yrs کېږي.

خو د وخت انټروال، چي د B په واسطه اندازه شوی عبارت دی له

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{3c^2}{4c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 20 \text{ yrs}$$

ځکه نو، د Bعمر $B = 25 + 20 = 45$ yrs کېږي. له دې ځایه B ته باید داسي څرګنده شي چي A ورور یې له هغه څخه 10 کاله ځوان دی. دا د غبرګونو معما یا د ساعت معما بلل کېږي.

ایا دا حالت به په ربښتیا رامنځ ته شي؟ ځواب نه دی. ځکه د A حرکت هیڅ یونواخت نه دی او یو تعجیلي حرکت دی، نو پورتنی معادلې تطبیق کیدای نه شي، او که تعجیل په پام کې ونیول شي، نو دا به د وخت وروسته والی په بشپړه توګه غلط کړي. له دې ځایه A او B دواړه به په بیرته راتګ کې عین عمر ولري.

۲۱.۶ د سرعت انتقال (د سرعتونو نسبیتي جمع)

د سرعتونو د جمع کووني نسبیتي قانون د لارنټز د انتقال معادلو په استعمالولو سره لاس ته راتلای شي. یو جسم چي نظر د S دستګاه یوه مشاهده کونکي ته د u په ثابت خطي سرعت سره د خپل X-محور په امتداد حرکت کوي په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چي نسبت بلې مأخذیدستګاه S' ته یې سرعت u' دی، داسي چي S' دستګاه په v سرعت سره نظر د S دستګاه ته په عین لوري حرکت کوي. فرض کړې چي په S دستګاه کې د جسم د سرعت مرکبې u_x ، u_y او u_z دي او په S' دستګاه کې د سرعت اړونده مرکبې u'_x ، u'_y او u'_z دي. د لارنټز د انتقال مطابق

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

په دیفرنسیال کووني، لرو چي

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

اوس، $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$

$$= \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2} dx}$$

$$= \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

یا $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$ ... (i)

داسې چې $u_x = \frac{dx}{dt}$

اوس، $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$

$$= \frac{dy \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

یا $u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$ ... (ii)

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2} dx}$$

$$= \frac{\frac{dz}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

یا $$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad \dots(iii)$$

(i) ، (ii)او(iii) معادلې له بې زبره مأخذي دستګاه څخه زبرلرونکې دستګاه ته د سرعت مرکبو د انتقال معادلې راکوي.

په $v \ll c$ حالت کې، له 1 سره په پرتلې د $\frac{v}{c^2}u_x$ او $\frac{v^2}{c^2}$ ضریبونه له پامه غورځول کېږي. په دغسې یو حالت کې (i) ، (ii)او(iii) معادلې لاندې شکل غوره کوي

$$u'_x = u_x - v$$

$$u'_y = u_y$$

او $$u'_z = u_z$$

چې د سرعتونو د جمع له کلاسیکي قانون سره په مطابقت کې دي.

له S' دستګاه څخه S ته د سرعتونو د انتقال معادلې معکوس په $-v$ باندې د v او د زبر لرونکو او بې زبره کمیتونو په بدلولو لاس ته راتلای شي.

له دې ځایه، لرو چې

$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \qquad \dots(iv)$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \qquad \dots(v)$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \qquad \dots(vi)$$

نوټ. دا به ارزښت لرونکې وي چې و ازمایل شي چې د سرعتونو د جمع نسبیتي قانون په ټولو عطالتي دستګاو کې د نور د سرعت د ثابت قیمت په هکله وړاندوینه کوي. فرض کړئ چې په S دستګاه کې د نور یو سیګنال په c سرعت سره د X-محور په امتداد لیږل کېږي. په S' دستګاه کې مشاهده کونکي ته چې نظر S ته په v سرعت د عین لوري په امتداد د حرکت په حال کې دی،

سرعت u'_x څرګندیږي چې له (iv) معادلې څخه د $u_x = c$ په وضع کولو سره لاس ته راتلای شي. څکه نو، په S' دستګاه کې به د نور سرعت په لاندې توګه څرګندیږي

$$u'_x = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot c} = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}}$$

یا $$u'_x = c$$

۱۶.۶ مثال. دوه ذرې یو د بل لوري ته په $0 \cdot 9c$ چټکتیا سره ځي. نسبتي چټکتیا یې څومره ده؟

حل.

په ځمکه باندې یوه مشاهده کونکي یعنې د S یوې ساکنې دستګاه لرونکي ته،1 او 2 ذرې په $0 \cdot 9\ c$ چټکتیا یو د بل لوري ته حرکت کوي لکه چې په شکل کې ښودل شوي. مونږ د 1 ذرې سرعت په u_x ښیو.

له دې ځایه، $\frac{u_x = 0\cdot 9c}{1} \frac{v = -0\cdot 9c}{2}$ $u_x = 0 \cdot 9c$،

مونږ 2 ذرې سره S' دستګاه نښلوو. دا به کیڼ لوري ته په $0 \cdot 9c$ چټکتیایا ښې لوري ته په $-0 \cdot 9c$چټکتیا سره حرکت وکړي. مونږ د S' دستګاه چټکتیا په v سره ښیو. له دې ځایه

$$v = -0 \cdot 9c$$

اوس د 1 ذرې سرعت لکه چې د S' دستګاه مشاهده کونکي ته څرګندیږي عبارت دی له

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{0\cdot 9c-(-0\cdot 9c)}{1-\frac{(-0\cdot 9c)(0\cdot 9c)}{c^2}}$$

$$= \frac{1\cdot 8\ c}{1+0\cdot 81} = \frac{1\cdot 8\ c}{1\cdot 81} = \mathbf{0 \cdot 9945c}$$

۱۷.۶ مثال. یو فزیک پوه یو راډیو اکتیف اتوم چې په $0 \cdot 5\ c$ سرعت سره د حرکت په حال کې دی مشاهده کوي. اتوم له هغې وروسته د β-ذره خپروي چې نسبت اتوم ته د هغه د حرکت په لوري $0 \cdot 9c$ سرعت لري.د β-ذرې سرعت چې د فزیک پوه په واسطه مشاهده کېږي محاسبه کړئ.

حل.

دلته $$v = 0 \cdot 5\ c$$

$$u'_x = 0 \cdot 9c$$

لرو چې،
$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{0\cdot 9c+0\cdot 5\ c}{1+\frac{(0\cdot 5\ c)(0\cdot 9c)}{c^2}}$$

$$= \frac{1\cdot 4\ c}{1+0\cdot 45} = \frac{1\cdot 4\ c}{1\cdot 45} = \mathbf{0\cdot 966\ c}$$

۱۸.۶ مثال. يوه ذره په $0\cdot 9c$ سرعت سره په S' دستګاه کې، چې دا په خپله نظر S دستګاه ته په $0\cdot 9c$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده حرکت کوي. په S دستګاه کې د ذرې سرعت څومره دی؟

حل.

دلته، $v = 0\cdot 9c$

$$u'_x = 0\cdot 9c$$

لرو چې،
$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{0\cdot 9c+0\cdot 9c}{1+\frac{(0\cdot 9c)(0\cdot 9c)}{c^2}}$$

$$\frac{1\cdot 8\ c}{1+0\cdot 81} = \frac{1\cdot 8\ c}{1\cdot 81} = \mathbf{0\cdot 9945c}$$

۱۹.۶ مثال. يوه فضايي بيړۍ چې له ځمکې څخه په $0\cdot 6\ c$ سرعت سره حرکت کوي يو راکټ فير کوي چې نسبت فضايي بيړۍ ته يې سرعت $0\cdot 8\ c$ دی (i) له ځمکې څخه بل لوري ته (ii) د ځمکې لوري ته. په دواړو حالتونو کې د راکټ سرعت لاس ته راوړئ چې له ځمکې څخه ليدل کېږي.

حل.

(i) دلته، $v = 0\cdot 6\ c$

$$u'_x = 0\cdot 8\ c$$

لرو چې،

$$u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{0\cdot 8\ c+0\cdot 6\ c}{1+\frac{(0\cdot 6\ c)(0\cdot 8\ c)}{c^2}}$$

$$= \frac{1\cdot 4\ c}{1+0\cdot 48} = \frac{1\cdot 4\ c}{1\cdot 48}$$

$= \mathbf{0\cdot 946}\ \boldsymbol{c}$ (له ځمکې څخه بل لوري ته)

(ii) دلته، $v = 0\cdot 6\ c$

$u'_x = -0 \cdot 8\ c$

لرو چې، $u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{-0{\cdot}8\ c + 0{\cdot}6\ c}{1+\frac{(0{\cdot}6\ c)(-0{\cdot}8\ c)}{c^2}} = \frac{-0{\cdot}2\ c}{1-0{\cdot}48} = \frac{-0{\cdot}2\ c}{0{\cdot}52}$

$= \mathbf{0 \cdot 385\ c}$ (د ځمکې لوري ته)

۲۰.۶ مثال. یو راکټ په $0 \cdot 9c$ سرعت سره لیرل کیږي. د عین لارې په امتداد یو نوري پلز هم لیرل کیږي. نسبت راکټ ته د نوري پلز سرعت څومره دی؟

حل.

دلته $v = 0 \cdot 9\ c$

د نوري پلز سرعت، $u_x = c$

لرو چې، $u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{1-0{\cdot}9c}{1-\frac{(0{\cdot}9c)(c)}{c^2}}$

$= \frac{0{\cdot}1\ c}{1-0{\cdot}9} = \frac{0{\cdot}1\ c}{0{\cdot}1} = c$

۲۱.۶ مثال. یوه ذره په یوه ساکنه دستګاه S کې په XY-مستوي کې ځای په ځای او X-محور سره په 60° میل لرلو $0 \cdot 8\ c$ سرعت لري. د ذرې سرعت به څومره وي که په S' دستګاه کې چې نسبت S دستګاه ته په $0 \cdot 4c$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده د یوه شخص په واسطه مشاهده شي؟ (c په تشیال کې د نور سرعت دی)

حل.

دلته، $v = 0 \cdot 4\ c$

$u = 0 \cdot 8\ c$

څرنګه چې، نوموړې له X-محور سره 60° زاویه جوړوي، لرو چې

$u_x = 0 \cdot 8c\ \cos 60^{\circ} = 0 \cdot 8c \times 0 \cdot 5 = 0 \cdot 4\ c$

او $u_y = 0 \cdot 8c\ \sin 60^{\circ} = 0 \cdot 8c \times 0 \cdot 866 = 0 \cdot 6928\ c$

اوس، $u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{0{\cdot}4\ c - 0{\cdot}4\ c}{1-\frac{(0{\cdot}4\ c)(0{\cdot}4\ c)}{c^2}} = 0$

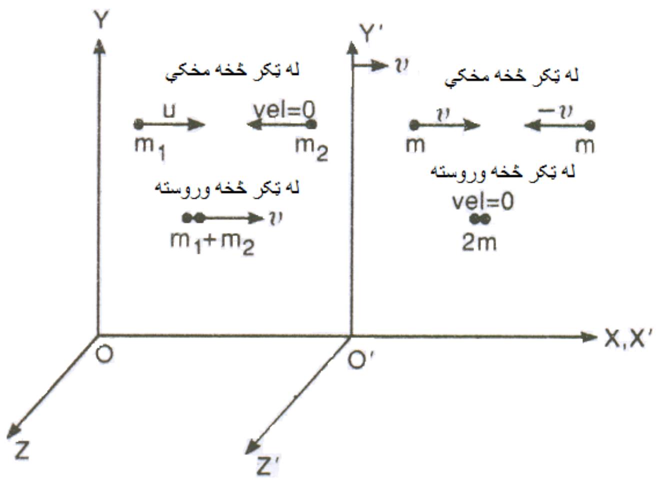
$$u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{0\cdot6928\,c\sqrt{1-\left(\frac{0\cdot4\,c}{c}\right)}}{1-\frac{(0\cdot4\,c)(0\cdot4\,c)}{c^2}}$$

$$=\frac{0\cdot6928\,c\sqrt{1-0\cdot36}}{1-0\cdot16}=\frac{0\cdot6928\,c\times0\cdot8}{0\cdot84}=0\cdot66c$$

$$\therefore\quad u'=\left({u'_x}^2+{u'_y}^2\right)^{1/2}=[0^2+(0\cdot66c)^2]^{1/2}=\mathbf{0\cdot66c}$$

څرنګه چې $u'_x=0$ دی، په S' دستګاه کې به د ذرې سرعت د Y-محور په امتداد څرګندیږي.

۲۲.۶ له سرعت سره د کتلې تغیر



۱.۲۲.۶ شکل

S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې S' دستګاه نظر S دستګاه ته د X-محور په امتداد په v یونواخت سرعت سره د حرکت په حال کې ده. فرض کړئ چېد m عین کتلې لرونکي A او B دوه ذرې په S' دستګاه کې نسبت O' مبدا ته په ترتیب سره په v او v' سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي لکه چې په ۱.۲۲.۶ شکل کې ښودل شوي دي.
فرض کړئ چې په S' دستګاهکې نوموړې له ټکر څخه وروسته د سکون حالت غوره کوي.

کله چې له S دستګاه څخه ولیدل شي، د A کتله m_1 او B کتله m_2 څرګندیږي. همدارنګه د m_2 کتله به د سکون په حالت کې څرګندیږي او m_1 به له ټکر څخه مخکې په کوم سرعت د مثال په توګه u سره د حرکت په حال کې وي او له ټکر څخه وروسته، دواړه ذرې به د S'دستګاه په سرعت سره متحرکې څرګندیږي یعني په v سرعت سره لکه چې په شکل کې څرګندیږي.

د سرعت د انتقال له معادلې څخه، لرو چې

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}$$

له دې ځایه $u_x=u$ او $u'_x=v$ دی

$$\therefore\quad u=\frac{v+v}{1+\frac{v\cdot v}{c^2}}=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\qquad\ldots(i)$$

څرنګه چې په ټولو عطالتي دستګاو کې مومنټم محفوظ پاتې کېږي، نو په S دستګاه کې د مومنټم د تحفظ له قانون څخه، لرو چې

$$m_1 u = m_2 0 = (m_1 + m_2) v$$

یا $v = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2}$ $\quad ...(ii)$

په (i) کې د (ii) معادلې په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$u = \frac{2 \cdot \frac{m_1 u}{m_1 + m_2}}{1 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{u^2}{c^2}}$$

یا $1 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{u^2}{c^2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$

یا $1 + \frac{m_1^2 u^2}{(m_1 + m_2)^2 c^2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$

په دواړو خواو کې د $(m_1 + m_2)^2 c^2$ په ضربولو، لاس ته راوړو چې

$$(m_1 + m_2)^2 c^2 + m_1^2 u^2 = 2m_1 (m_1 + m_2) c^2$$

یا $(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2) c^2 + m_1^2 u^2 = 2m_1^2 c^2 + 2m_1 m_2 c^2$

یا $m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_1 m_2 c^2 + m_1^2 u^2 = 2m_1^2 c^2 + 2m_1 m_2 c^2$

یا $m_2^2 c^2 = m_1^2 c^2 - m_1^2 u^2$

یا $m_2^2 c^2 = m_1^2 c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$

یا $m_2 = m_1 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

یا $m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ $\quad ...(iii)$

څرنګه چې m_2 کتله د سکون په حال کې ده، نو اجازه راکړئ چې (د سکون کتله $m_2 = m_0$) ولیکو او د $m_1 = m$ په لیکلو به (iii)معادله په لاندې ډول شي

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

په عمومي توګه، د ذرې سرعت v نیول کېږي، نو د $u = v$ په لیکلو، لاس ته راوړو چې

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \dots (iv)$$

څرنګه چې $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$، نو $m > m_0$

یعني د یوې ذرې کتله د نور له سرعت سره د هغې د سرعت د پرتلې وړ کیدو سره زیاتیږي. له سرعت سره د کتلې تغیر په تجربوي توګه له راډیو اکتیف موادو څخه په خپرو شویو لوړو چټکتیاو لرونکو الکترونونو او β-ذرو کې د بوچیر، کفمان او نورو په واسطه تاید شوی دی.

د پایلې مباحثه

(i) کله چې جسم د نور سرعت په پرتله په ډېر کوچني سرعت $v \ll c$ سره حرکت کوي، نو په (iv) معادله کې د 1 په پرتله $\frac{v^2}{c^2}$ له پامه غورځول کېږي. نو

$$m = m_0$$

یعني د جسم کتله له دې وروسته د هغه په سرعت پورې اړه نه لري.

دا په دقیقه توګه هغه څه دي چې په کلاسیک میخانیک کې فرض کېږي.

(ii) که $v = c$ وي، نو $m = \infty$ کېږي، چې دا ممکنه نه ده. که v له c څخه زیات شي، نو m خیالي ګرځي، چې دا بیا ناممکنه ده. له دې ځایه هیڅ مادي جسم د نور له سرعت سره مساوي یا له هغه څخه زیات سرعت لرلی نه شي.

۲۲.۶ مثال. ذره په کوم سرعت سره حرکت کوي، که کتله یې د سکون د کتلې څلور برابره شي؟

حل.

دلته، $m = 4m_0$

لرو چې
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا
$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m} = \frac{m_0}{4m_0} = \frac{1}{4}$$

یا
$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{16}$$

یا $\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0 \cdot 9375$

یا $\frac{v}{c} = 0 \cdot 968$

یا $\boldsymbol{v = 0 \cdot 968c}$

۲۳.۶ مثال. د ذرې د کتلې نسبت د هغې د سکون له کتلې سره محاسبه کړئ، کله چې د نور د سرعت په $0 \cdot 2$ ځلې حرکت وکړي.

حل.

دلته، $v = 0 \cdot 2c$

لرو چې $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

یا $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0 \cdot 2c}{c}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0 \cdot 04}} = \frac{1}{\sqrt{0 \cdot 96}} = \frac{1}{0 \cdot 98}$$

یا $\frac{m}{m_0} = \boldsymbol{1 \cdot 02}$

<u>۲۳.۶ د کتلې-انرژۍ معادل والی</u>

فرض کړې چې د F یوه قوه په یوه جسم باندې چې د سکون کتله یې m_0 ده د dx په واټن عمل کوي. د قوې په واسطه تر سره شوی کار په حرکي انرژۍ کې د زیاتوالي په توګه څرګندیږي یعني

$$dT = Fdx \qquad \ldots (i)$$

فرض کړئ چې په کومه لحظه کې د جسم سرعت $v = \left(\frac{dx}{dt}\right)$ او کتله یې m وي، چې عبارت ده له

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots (ii)$$

څرنګه چې، قوه نظر وخت ته د خطي مومنتم د تغیر په توګه تعریف کیږي، لرو چې

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

په نسبيتي ميخانيک کې، کتله ثابت کميت نه دی. ځکه نو،

$$F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad \dots(iii)$$

په (i) معادله کې د F په عوض کوونې، لاس ته راوړو چې

$$dT = \left(m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}\right)d$$

$$= m\frac{dx}{dt}dv + v\frac{dx}{dt}dm$$

$$= mvdv + v^2dm \qquad \dots(iv)$$

له (ii) معادلې څخه، لرو چې

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

يا

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0^2c^2$$

په ديفرنسيال اخيستنې سره، لرو چې

$$m^2(0 - 2vdv) + (c^2 - v^2).2mdm = 0$$

$$mvdv + v^2dm = c^2dm \qquad \dots(v)$$

له (iv) او (v) معادلو څخه، لرو چې

$$dT = c^2dm \qquad \dots(vi)$$

په کلاسيک ميخانيک کې، د جسم حرکي انرژي د هغه د سرعت د تزايد له امله زياتيږي. خو د جسم په حرکي انرژي کې تغير هم د هغه د حرکت له امله د هغه په کتله کې د تغير له مخې توضيح کيدای شي.

کله چې يو جسم ته د سکون له حالت څخه تر v سرعت پورې تعجيل ورکړل شي، کتله يې له m_0 څخه تر m پورې زياتوالی کوي او اخستل شوې حرکي انرژي د m_0 او m حدونو ترمنځ د (vi) معادلې په انتګرال نيولو لاس ته راځي.

نو،

$$T = \int_{m_0}^{m} c^2dm = c^2(m - m_0)$$

نو، د یوه متحرک جسم حرکي انرژي د حرکت له امله د هغه په کتله کې د زیاتوالي c^2 ځلې دی. په بله مانا، د حرکت له امله د یوه جسم په انرژي کې زیاتوالی د هغه د کتلې د زیاتوالی له امله دی. څرنګه چې، جسم آن تر دې چې د سکون په حال کې د m_0 کتله لري، دا کیدای شي، فرض شي چې د جسم د سکون کتله د داخلي ذخیره شوې انرژي m_0c^2 له امله ده، چې د جسم د سکون کتلې انرژي بلل کیږي. د جسم مجموعي انرژي، نو، د حرکي انرژی او د سکون کتلې انرژی له مجموعي څخه عبارت دی یعني

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + m_0c^2$$

$$= c^2(m - m_0) + m_0c^2$$

یا

$$\mathrm{E} = mc^2 \qquad \dots(vii)$$

له دې ځایه، m یوه کتله د mc^2 له یوې انرژي سره معادله ده. دا د انستین د کتلې-انرژي مشهوره رابطه ده چې د کتلې او انرژی معادل والی ښیي.

د پایلي مباحثه

(i) د $\mathrm{E} = mc^2$ رابطه د کتلې او انرژي معادل والی ښیي. له دې ځایه، د نسبیت خاصه نظریهد انرژیو ټولو کتلو ته او د کتلو ټولو انرژیو ته نسبت ورکوي.

(ii) په کلاسیک میخانیک کې، د کتلې او انرژي د تحفظ قوانین یو له بل څخه مستقل دوه جلا قوانین دي. د $\mathrm{E} = mc^2$ رابطه په یوه قانون یعنې د نسبیتي انرژي تحفظ قانون کې د دواړو قوانیونو یو ځای کولو ته لاربښوونه کوي.

(iii) په کلاسیک میخانیک کې کتله د مادې اساسي شی په پام کې نیول کیږی په داسي حال کې چې انرژي د مادې یو خاصیت دی چې د خپل موقعیت یا حرکت له امله یې لاس ته راوړي. د $\mathrm{E} = mc^2$ رابطه د کتلې او انرژي ترمنځ داسي یو توپیر ته د پای ټکی کیږدي.

(iv) په v سرعت سره د سفر کونکي ذرې حرکي انرژي د لاندې معادلې په واسطه ورکول کیږي.

$$\mathrm{T} = c^2(m - m_0)$$

داسي چې

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathrm{T} = c^2\left[m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - m_0\right]$$

$$= m_0c^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]$$

$$= m_0c^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)-1\right]$$

$$= \frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2}+\cdots$$

کله چې $v \ll c$، لرو چې

$$\mathrm{T} \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

دا په کلاسیک فزیک کې د v په سرعت د متحرکې m_0 کتله لرونکې ذرې د حرکي انرژي فورمول دی.

۲۴.۶ مثال. که د یوې ذرې مجموعي انرژي په دقیقه توګه د هغې د سکون انرژۍ درې ځلې وي، د ذرې سرعت څومره دی؟

حل.

پوهیږو چې د m کتله لرونکې ذرې مجموعي انرژي عبارت ده له

$$\mathrm{E} = mc^2$$

که m_0 یې د سکون کتله وي، نو

$$\mathrm{E} = 3m_0c^2$$

له دې ځایه، $mc^2 = 3m_0c^2$

یا

$$m = 3m_0$$

یا

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 3m_0$$

یا

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$$

یا

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

یا

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0\cdot 89$$

یا $\frac{v}{c} = 0 \cdot 94$

یا $v = \mathbf{0 \cdot 94}\boldsymbol{c}$

۲۵.۶ مثال. د $1\ amu$ سرعت محاسبه کړئ که حرکي انرژي يې د سکون کتلې انرژي درې ځلې وي.

حل.

د ذرې مجموعي انرژي عبارت دی له

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + m_0 c^2$$

دلته، $\mathrm{T} = 3m_0 c^2$

$\therefore$ $$\mathrm{E} = 3m_0 c^2 + m_0 c^2 = 4m_0 c^2$$

همدارنګه، $$\mathrm{E} = mc^2$$

$\therefore$ $$mc^2 = 4m_0 c^2$$

یا $$m = 4m_0$$

یا $$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 4m_0$$

یا $$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{4}$$

یا $$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

یا $$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0 \cdot 9735$$

یا $$\frac{v}{c} = 0 \cdot 968$$

یا $$v = \mathbf{0 \cdot 968}\boldsymbol{c}$$

۲۶.۶ مثال. که دوه $10\mathrm{g}$کتلې په $2 \times 10^4 \mathrm{cms}^{-1}$ مساوي او مخالفو سرعتونو سره ټکر او یو په بل کې ونښلي، د یوځای شوې جوړې اضافي سکون کتله محاسبه کړئ.

حل.

دلته، د کتلو حرکي انرژي به د اضافي کتلې په توګه څرګنده شي.

له دې ځایه، $\Delta m = \frac{\mathrm{T}}{c^2}$

اوس، $\mathrm{T} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 10(2 \times 10^4)^2 = 4 \times 10^9 \text{ erg}$$

$$\therefore \quad \Delta m = \frac{2\times10^4}{(3\times10^{10})^2} = 4 \cdot 44 \times 10^{-12}\text{g}$$

۲۷.۶ مثال. د پروتون په کتله کې څومره زیاتوالی رامنځ ته کېږي کله چې تر 500 MeV حرکي انرژي پورې تعجیل ورکړل شي؟

حل.

دلته $\quad \mathrm{T} = 2500 \text{ MeV}$

$$= 2500 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-6} \qquad (\because \quad 1\text{MeV} = 1 \cdot 6 \times 10^{-6}\text{erg})$$

$$= 8 \times 10^{-4}\text{erg}$$

د پروتون د کتلې زیات والی په کتله باندې د هغه د حرکي انرژي د بدلیدو له امله دی.

له دې ځایه،

$$\Delta m = \frac{\mathrm{T}}{c^2} = \frac{8\times10^{-4}}{(3\times10^{10})^2} = \mathbf{8 \cdot 89 \times 10^{-25}g}$$

۲۸.۶ مثال. تر 1 میلیون ولټ پوتنسیال پورې تعجیل ورکړل شوي الکترون سرعت محاسبه کړئ.

حل.

پوهیږو چې، $\mathrm{T} = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$

یا

$$\mathrm{T} = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

دلته، $\quad \mathrm{T} = 1\text{MeV} = 1 \cdot 6 \times 10^{-6}\text{erg}$

$m_0 = 9 \cdot 1 \times 10^{-28}\text{g}$

$c = 3 \times 10^{10}\text{cms}^{-1}$

$$1 \cdot 6 \times 10^{-6} = 9 \cdot 1 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^{10})^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] \qquad \therefore$$

یا $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{1 \cdot 6 \times 10^{-6}}{9 \cdot 1 \times 10^{-28} \times 9 \times 10^{20}}$

یا $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + 1 \cdot 954 = 2 \cdot 954$

یا $\frac{1}{\sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2 \cdot 954} = 0 \cdot 339$

یا $1 - \frac{v^2}{c^2} = 0 \cdot 1146$

یا $\frac{v^2}{c^2} = 1 - 0 \cdot 1146 = 0 \cdot 8856$

یا $\frac{v}{c} = 0 \cdot 941$

یا $v = \mathbf{0 \cdot 941}\, \boldsymbol{c}$

۲۹.۶ مثال. 1A°څپې اوږدوالي لرونکي فوتون اغیزمنه کتله محاسبه کړئ.

حل.

د یوه فوتون انرژي عبارت ده له

$$\text{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

دلته، $h = 6 \cdot 62 \times 10^{-27}$

$c = 3 \times 10^{10}\text{cms}^{-1}$

$\lambda = 1\text{A}^{\circ} = 10^{-8}\text{cm}$

∴ $$\mathrm{E}=\frac{6\cdot 62\times 10^{-27}\times 3\times 10^{10}}{10^{-8}}$$

$$=1\cdot 986\times 10^{-8}\mathrm{erg}$$

که m د فوتون اغیزمنه کتله وي، نو

$$\mathrm{E}=mc^2$$

یا $$m=\frac{\mathrm{E}}{c^2}=\frac{1\cdot 986\times 10^{-8}}{(3\times 10^{10})^2}=\mathbf{2\cdot 21\times 10^{-29}g}$$

۳۰.۶ مثال. په $0°C$ کې د $1g$اوبو په کتله کې کموالی محاسبه کړئ کله چې په $0°C$ کې نوموړې په یخ بدلیږي.

حل.

په یخ باندې بدلیدو کې د $1g$اوبو په واسطه د له منځه تللې تودوخې اندازه،

$$\mathrm{E}=m\mathrm{L}=1\times 80=80calories$$

$$=80\times 4\cdot 2\times 10^7=3\cdot 36\times 10^9\mathrm{ergs}$$

اوس$\mathrm{E}=mc^2$

∴ $m=\frac{\mathrm{E}}{c^2}=\frac{3\cdot 36\times 10^9}{(3\times 10^{10})^2}=\mathbf{3\cdot 73\times 10^{-12}g}$ ، په کتله کې کموالی

۳۱.۶ مثال. د $0\cdot 2$ مخصوصه تودوخې لرونکې $1kg$ فلزي توټې په کتله کې زیاتوالی پیدا کړئ کله چې تر $500°C$ پورې تودوخه ورکړل شي.

حل.

د فلزي توټې په واسطه د اخستل شوې تودوخې اندازه

$$\mathrm{E}=ms\theta=1000\times 0\cdot 2\times 500calories$$

$$=1000\times 0\cdot 2\times 500\times 4\cdot 2\times 10^7=4\cdot 2\times 10^{12}\mathrm{ergs}$$

اوس$\mathrm{E}=mc^2$

∴ $m=\frac{\mathrm{E}}{c^2}=\frac{4\cdot 2\times 10^{12}}{(3\times 10^{10})^2}=\mathbf{4\cdot 67\times 10^{-9}g}$ ، په کتله کې زیاتوالی

۲۴.۶ نسبيتي مومنټم

د m_0 سکون کتلې لرونکی یو جسم چې په u سرعت سره د حرکت په حال کې دی په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې u_x ، u_y او u_z د مختصاتو د دریو محورونو په امتداد د هغه د سرعت مرکبې دي. نو،

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

د مأخذي دستګاه مشاهده کونکي ته، د هغه کتله په لاندې توګه څرګندیږي

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

ځکه نو، د نوموړي جسم د مومنټم درې مرکبې عبارت دي له

$\mathrm{p}_x = mu_x$ یا $\mathrm{p}_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

$\mathrm{p}_y = mu_y$ یا $\mathrm{p}_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

او $\mathrm{p}_z = mu_z$ یا $\mathrm{p}_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

دې ته مو پام وي چې د هرې مرکبې د افادې په مخرج کې، د مجموعي سرعت u اندازه څرګندیږي.

۲۵.۶ نسبيتي انرژي

د انستین د کتلې-انرژي رابطې له مخې، د m_0 ساکنې کتلې لرونکې یوه ذره چې په v سرعت سره د حرکت په حال کې ده د E له یوې انرژي سره چې په لاندې توګه راکړل شوې ده معادله ده.

$$\mathrm{E} = mc^2$$

داسې چې

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\therefore$

$$\mathrm{E} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

یا $$E^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4$$

یا $$E^2 - \frac{E^2}{c^2} v^2 = m_0^2 c^4$$

یا $$E^2 = \frac{E^2}{c^2} v^2 + m_0^2 c^4 = \left[\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 v^2\right] c^2 + m_0^2 c^4$$

څرنګه چې $$\frac{E}{c^2} = m$$

د جسم کتله ، لرو چې $E^2 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

داسي چې، $p = mv$ د ذرې خطي مومنټم دی.

ځکه نو، $E = \pm\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

دا د نسبيتي انرژي اړيکه ده. له دې ځايه، د يوې ذرې انرژي کيدای شي مثبت يا منفي وي. ددې پايلې په هکله لومړی په ۱۹۲۸ کې پ.ا.م ډيراک وړاندوينه وکړه.

۶.۳۲ مثال. ددې په منلو سره چې د پروتون د سکون کتلې انرژي تقريباً 1GeV ده د يوه 25GeV پروتون خطي مومنټم محاسبه کړئ.

حل.

25GeV حرکي انرژي لرونکی پروتون يو نسبيتي پروتون دی ($\because$ $T \gg m_0 c^2$)

لرو چې، $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$، دلته $m_0 c^2 = 1\text{GeV}$

$$E = T + m_0 c^2 = 25 + 1 = 26\text{GeV}$$

$\therefore$ $$26 = \sqrt{p^2 c^2 + (1)^2}$$

یا $$p^2 c^2 = 26^2 - 1 = 676 - 1 = 675$$

$\therefore$ $$pc = (675)^{1/2} = 25 \cdot 98\text{GeV}$$

$$= 25 \cdot 98 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-3}\text{erg} \qquad (1\text{GeV} = 1 \cdot 6 \times 10^{-3}\text{erg} \because)$$

$\therefore$ $$p = \frac{25 \cdot 98 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{10}}$$

$$= 1 \cdot 386 \times 10^{-8}\text{gcms}^{-1}$$

۲۶.۶ د مومنټم او انرژۍ انتقال

د m_0 سکون کتلې لرونکی یو جسم چې په Sدستګاه کې په u سرعت سره حرکت کوي په پام کې ونیسئ. فرض کړئ چې u_x ، u_y او u_z د سرعت مرکبې دي. د S دستګاه مشاهده کونکي ته، د جسم کتله د m په توګه څرګندیږي او عبارت ده له

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \dots (i)$$

د S' بله مأخذي دستګاه په پام کې ونیسئ چې نظرS دستګاه ته په v ثابت سرعت سره د X-محور په امتداد د حرکت په حال کې ده. فرض کړئ چې د S' دستګاه مشاهده کونکي ته، د جسم سرعت u' څرګندیږي. فرض کړئ چې u'_x ، u'_y او u'_z د جسم د سرعت مرکبې دي. د S' دستګاه مشاهده کونکي ته، د جسم کتله د مثال په توګه m' څرګندیږي چې عبارت ده له

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \qquad \dots (ii)$$

په S' دستګاه کې د سرعت درې مرکبې عبارت دي له

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad \dots (iii)$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad \dots (iv)$$

او

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad \dots (v)$$

په S' دستګاه کې د جسم د مومنټم X-مرکبه عبارت ده له

$$\mathrm{p}'_x = m'u'_x$$

له (ii) او (iii) معادلو څخه په پورتنی معادله کې د m' او u'_x په عوض کوونه، لرو چې

$$\mathrm{p}'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \cdot \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \qquad \dots (vi)$$

ددې لپاره چې د مومنټم X-مرکبه په ساده شکل توضیح کړو، مونږ لومړی د $\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$ فکتور په لاندې ډول امتحان کوو:

پوهيږو چې

$$u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$$

$$= \frac{(u_x - v)^2 + \left(u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 + \left(u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

يا

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + \left(u_y^2 + u_z^2\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

څرنګه چې $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ ، لرو چې $u_y^2 + u_z^2 = u^2 - u_x^2$

نو پورتنی معادله به

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

اوس،

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{\frac{1}{c^2}\left[(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{u_x}{c} - \frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2 - \left(\frac{u_x}{c} - \frac{v}{c}\right)^2 - \left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{v^2 u_x^2}{c^4} + \frac{2v}{c^2}u_x - \frac{u_x^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}u_x - \frac{u^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{u_x^2}{c^2} - \frac{v^2 u_x^2}{c^4}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)} \qquad \dots(vii) \qquad \therefore$$

په (vi) کې له (vii) معادلې څخه د $\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$ قیمت په عوض کولو، لرو چې

$$\mathrm{p}'_x=\frac{m_0\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{u_x-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

د (i) معادلې په استعمالولو، لرو چې

$$\mathrm{p}'_x=\frac{m(u_x-v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{mu_x-mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

اوس، $m=\frac{\mathrm{E}}{c^2}$ او په بې زبره مأخذي دستګاه کې د مومنتم د X-مرکبې $mu_x=\mathrm{p}_x$ په لیکلو، لاس ته راوړو چې

$$\mathrm{p}'_x=\frac{\mathrm{p}_x-\frac{\mathrm{E}}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \dots(۱.۲۶.۶)$$

اوس، په زبر لرونکې دستګاه کې د مومنتم د Y-مرکبه عبارت ده له

$$\mathrm{p}'_y=m'u'_y$$

له (ii) او (iv) معادلو څخه د m' او u'_y قیمتونو له عوض کولو څخه، لرو چې

$$\mathrm{p}'_y=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\cdot\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

له (vii) معادلې څخه د $\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$ ضریب قیمت په عوض کولو، لرو چې

$$\mathrm{p}'_y=\frac{m_0\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

یا (۲.۲۶.۶) ...

$$p'_y = p_y$$

په عین توګه (۳.۲۶.۶) ...

$$p'_z = p_z$$

زمونږ په واک کې د (vii) معادلې د پانګې په لرلو، مونږ په دواړو دستګاو کې د انرژي د انتقال معادلې لاس ته راوړلی شو. لرو چې

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} c^2$$

له (vii) معادلې څخه د $\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$ ضریب قیمت په عوض کولو، لرو چې

$$E' = \frac{m_0\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot c^2$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot c^2 \cdot \frac{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2-mu_xv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا (۴.۲۶.۶) ...

$$E' = \frac{E-p_xv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(۱.۲۶.۶) ، (۲.۲۶.۶)او(۳.۲۶.۶) معادلې د مومنتم د انتقال معادلې دي په داسې حال کې چې (۴.۲۶.۶) معادله له بې زبره مأخذي دستګاه څخه زبر لرونکي مأخذي دستګاه ته د انرژي د انتقال معادله ده. د مومنتم معکوس انتقال معادلې د v په $-v$ او د زبر لرونکو او بې زبره کمیتونو په بدلولو لاس ته راتلای شي. د معکوس انتقال معادلې عبارت دي له

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_x-\frac{E'}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \\ E &= \frac{E'-p'_xv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ او} \end{aligned}\right\}$$

(۵.۲۶.۶) ...

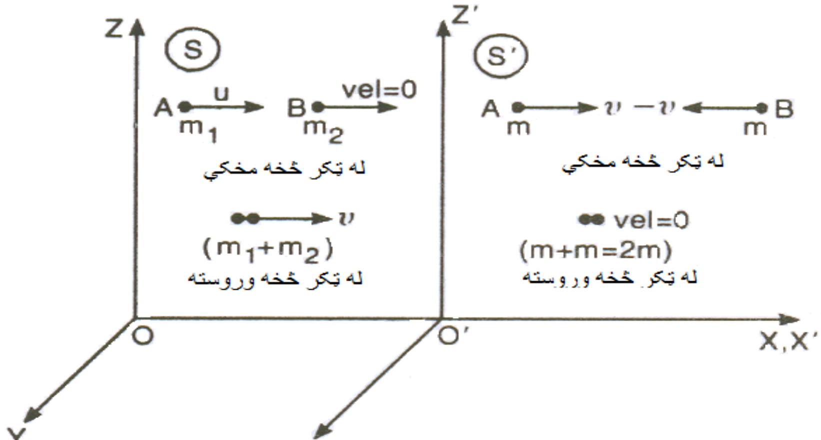
۲۷.۶ په يوه غير ارتجاعي ټکر کې د کتلې زياتوالی

غير ارتجاعي ټکر له هغه ټکر څخه عبارت دی چې په هغه کې مومنتم محفوظ پاتې کېږي خو حرکي انرژي محفوظه نه پاتې کېږي.

S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونيسئ داسې چې S' په يونواخت سرعت v سره د X-لوري په امتداد د حرکت په حال کې وي. فرض کړئ چې دوه عين کتلې m لرونکې ذرې په دې دستګاو کې پرتې دي.

په S' دستګاه کې، فرض کړئ چې A او B دوه ذرې m عين نسبيتي کتلې لري چې له ټکر څخه مخکې او وروسته په مستقيمه کرښه په v او $-v$ سرعتونو سره د حرکت په حال کې دي او له ټکر څخه وروسته دوی د $m + m = 2m$ مجموعي کتلې په لرلو د سکون حالت ته راځي.

په S دستګاه کې د A ذره داسې څرګندېږي چېm_1 کتله لري او په ځانګړي سرعت د مثال په توګه u سره حرکت کوي او د B کتلهm_2 څرګندېږي چې له ټکر څخه مخکې ساکنه پرته او له ټکر څخه وروسته د $(m_1 + m_2)$ کتلو لرونکې دواړه ذرې په v سرعت سره د حرکت په حال کې څرګندېږي لکه په (۱.۲۷.۶) شکل کې چې ښودل شوي دي.



۱.۲۷.۶ شکل

د سرعت د انتقال له معادلې څخه، لرو چې

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

دلته $u_x = u$ او $u'_x = v$ دی.

نو پورتنی معادلې به

$$u = \frac{v+v}{1+\frac{v.v}{c^2}} = u = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2vc^2}{c^2+v^2}$$

یا $$u = \frac{2vc^2}{c^2+v^2} \qquad \ldots(i)$$

څرنګه چې په ټولو عطالتي دستګاو کې مومنټم محفوظ پاتې کېږي، نو په S دستګاه کې د مومنټم د تحفظ له قانون څخه، لرو چې

$$m_1 u + 0 = (m_1 + m_2)v$$

یا $$m_1 u = (m_1 + m_2)v$$

که m_0 د هرې ذرې د سکون کتله وي او په S دستګاه کې د $(m_1 + m_2)$ د سکون کتله M_0 وي، نو

$$\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\mathrm{M}_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots(ii)$$

په (ii) معادله کې له (i)معادلې څخه د u د قیمت په وضع کولو، لاس ته راوړو چې

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{4v^2c^4}{c^2(c^2+v^2)^2}}}\frac{2vc^2}{c^2+v^2} = \frac{\mathrm{M}_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا $$\frac{m_0}{\sqrt{\frac{(c^2+v^2)^2-4v^2c^2}{(c^2+v^2)^2}}}\frac{2vc^2}{c^2+v^2} = \frac{\mathrm{M}_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا $$\frac{m_0(c^2+v^2)}{\sqrt{(c^2+v^2)^2-4v^2c^2}}\frac{2vc^2}{c^2+v^2} = \frac{\mathrm{M}_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا $$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{(c^2-v^2)^2}} = \frac{\mathrm{M}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[(a+b)^2 - 4\mathrm{ab} = (a-b)^2 \ \because\right]$$

یا $$\frac{2m_0c^2}{c^2-v^2} = \frac{\mathrm{M}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا $$\frac{2m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\mathrm{M}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا
$$\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{M}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

یا
$$\mathrm{M}_0=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

څرنګه چې $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}<1$

نو $\mathrm{M}_0>2m_0$

له غیر ارتجاعي ټکر څخه وروسته، د دوو ذرو کتله زیاتیږي.

$$\therefore \quad \text{په کتله کې محصله زیاتوالی} = \mathrm{M}_0-2m_0$$

$$=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-2m_0$$

$$=2m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

<u>۲۸.۶ د صفر سکون کتلې لرونکې ذرې (یعنې بې کتلې ذرې)</u>

د نسبیت له نظریې څخه، پوهیږو چې هیڅ مادي ذره د نور د چټکتیا په اندازه یا له هغه څخه زیاته چټکتیا نه شي لرلی. خو د فوتونو په څیر ځینې ذرې شتون لري چې د نور له چټکتیا سره مساوي چټکتیا لري او د خپل حرکت له امله کتله لري او د سکون کتله یې صفر ده. د فوتون کتله $m=\frac{h\nu}{c}$ نسبیتي کتله بلل کیږي. په عین توګه نیوترینو او انټي نیوترینو جوړې د نور له سرعت سره مساوي سرعت او د سکون کتله یې صفر ده. د m_0 سکون کتلې لرونکې ذرې نسبیتي مجموعي انرژي E عبارت ده له

$$\mathrm{E}=\sqrt{\mathrm{p}^2c^2+m_0^2c^4}$$

که د ذرې د سکون کتله m_0 صفر وي، نو

$$\mathrm{E}=\mathrm{p}c \qquad \dots(i)$$

نسبیتي مومنټم عبارت دی له

$$\mathrm{p}=mv$$

یا $\quad [E = mc^2 \quad \because] \quad p = \frac{E}{c^2} v$

د (i) معادلې په استعمالولو، لاس ته راوړو چې

$$p = \frac{pc}{c^2} v$$

یا $\quad pc = pv$

یا $\quad v = c$

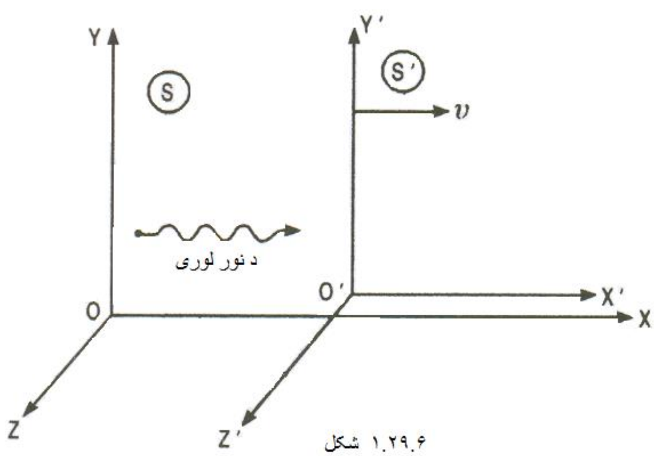
له دې ځایه، لاس ته راوړو چې صفر سکون کتله لرونکې ذره همیشه په تشیال کې د نور په سرعت حرکت کوي.

داسې ذرې شتون لري چې تکیان بلل کیږي، چې د نور له چټکتیا څخه په زیاتې چټکتیا حرکت کوي یعنې $v > c$ ، د داسې یوې ذرې، کتله m عبارت ده له

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

څرنګه چې $v > c$ ، نو m خیالي ده له دې ځایه تکیانونه خیالي کتلې لري، په داسې حال کې چې د هغوی مومنتم او انرژي حقیقي دي. کله چې انرژي له لاسه ورکوي، چټکتیا یې زیاتیږي. فزیک پوهان په تکیانونو باندې پلټنې کوي او نوموړې ذرې پیدا کیږي، نو زمونږ نوې نظریې کیدای شي منسوخې شي.

۲۹.۶ د ډاپلر نسبیتي اثر



۱.۲۹.۶ شکل

د مشاهده کونکي او د نور د منبع ترمنځ د نسبیتي حرکت له امله د نور د فریکونسي د ظاهري تغیر پیښه د ډاپلر نسبیتي اثر بلل کیږي.

فرض کړئ چې د S دستګاه په مبدا کې ν فریکونسي لرونکې منبع ځای پر ځای شوې ده. پهS' دستګاه کې یو مشاهده کونکی چې له منبع څخه په v سره د حرکت په حال کې دی فریکونسي ν' اندازه کوي. مونږ باید د ν او ν' ترمنځ اړیکه پیدا کړو.

د ډاپلر نسبیتي اثر په دوو طریقو مطالعه کیدای شي.

(i) د ډاپلر طولي اثر

(ii) د ډاپلر عرضي اثر

(i) د ډاپلر طولي اثر. که مشاهده د نور د حرکت له لوري سره موازي تر سره شي، په فریکونسي کې مشاهده کیدونکی تغیر د ډاپلر طولي اثر بلل کېږي.

S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونیسئ داسي چې S دستګاه ثابته او S' په ثابت سرعت v سره د X-محور د مثبت لوري په امتداد د حرکت په حال کې وي. یوه نوري منبع چې د نوري پلزونو د خپرولو وړتیا لري د S دستګاه په مبدا کې ځای پر ځای شوې په پام کې ونیسئ.

فرض کړئ چې د S دستګاه مشاهده کونکی د دوو پلزونو ترمنځ د وخت انټروال په $t = 0$ او $t = t_1$ کې داسي چې $(t_1 - 0) = t_1$ ثبت کوي.

اجازه راکړئ چې په S'دستګاه کې د وخت انټروال چې په $X' = 0$ کې ثبت شوی پیدا کړو.

د لارنټز انتقال معادلو څخه، لرو چې

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{او} \quad t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

د لومړي سیګنال لپاره

$$x = 0 \quad \text{او} \quad t = 0$$

$$\therefore \quad x' = \frac{0-0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

او

$$t' = \frac{0-0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

د دویم سیګنال لپاره

$$x = 0 \quad \text{او} \quad t = t_1$$

$$\therefore \quad x' = \frac{0-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

او

$$t' = \frac{t_1-0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

نو، دويم سيګنال بايد لاندې واټن ووهي

$$\Delta x = vt' = \frac{vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

∴ د نوموړي واټن د وهلو لپاره د نور په واسطه نيول شوی وخت

$$\Delta t' = \frac{\Delta x}{c} = \frac{vt_1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(\frac{v}{c}\right)t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

نو، په S' دستګاه کې په $x' = 0$ کې، د دواړو سيګنالونو د رسيدنې مجموعي نيول شوی وخت

$$t_1' = t' + \Delta t'$$

$$= \frac{t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\left(\frac{v}{c}\right)t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{t_1\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + t_1\sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}}$$

يا

$$t_1' = t_1\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

يا

$$v' = v_1'\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

۱. حالت. که v مثبت وي يعنې S'دستګاه په مثبت X-لوري د حرکت په حال کې وي، نو

$$\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} < 1$$

نو

$$v' < v$$

له دې ځايه، که مشاهده کونکی د نوري پلزونو لهمنبع څخه د حرکت کولو په حال کې وي څرګنده فريکونسي له عادي فريکونسي څخه کمه ده.

۲. حالت. که v منفي وي يعنې S'دستګاه په منفي X-لوري د حرکت په حال کې وي، نو

$$\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} > 1$$

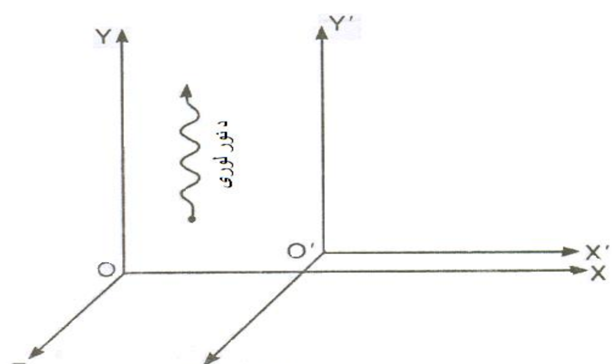
نو $\quad v' > v$

له دې ځايه، که مشاهده کونکی د نوري پلزونو د منبع په لوري د حرکت کولو په حال کې وي ځرګنده فریکونسي له عادي فریکونسي څخه زیاته ده.

د ډاپلر عرضي اثر

که مشاهده د نور د حرکت په لوري عمود تر سره شي، په فریکونسي کې مشاهده شوی تغیر د ډاپلر عرضي اثر بلل کېږي.

S او S' دوه عطالتي دستګاوې په پام کې ونیسئ داسې چې S ثابته او S' په ثابت سرعت v سره د x-محور د مثبت لوري په امتداد د حرکت په حال کې وي. یوه نوري منبع چې د نوري پلزونو د خپرولو وړتیا لري د S دستګاه په مبدا O کې ځای پر ځای شوې په پام کې ونیسئ. ۲.۲۹.۶ شکل.



۲.۲۹.۶ شکل

فرض کړئ چې د S دستګاه مشاهده کونکی د دوو پلزونو ترمنځ د وخت انټروال په $t = 0$ او $t = t_1$ کې داسې چې$(t_1 - 0) = t_1$ ثبت کوي. اجازه راکړئ چې په S' دستګاه کې د وخت انټروال چې په $x' = 0$ کې ثبت شوی پیدا کړو.

د لارنټز انتقال معادلو څخه، لرو چې

$$t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{او} \quad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

د لومړي سیګنال لپاره

$$x = 0 \quad \text{او} \quad t = 0$$

$$\therefore \quad x' = \frac{0-0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \text{او} \quad t' = \frac{0-0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

د دویم سیګنال لپاره

$x = 0$ او $t = t_1$

نو $x' = \frac{0 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

او $t' = \frac{t_1 - 0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

څرنګه چې، اوس نور د x-محور په امتداد سفر نه کوي، نو د وخت اضافي انټروال نه څرګندیږي.

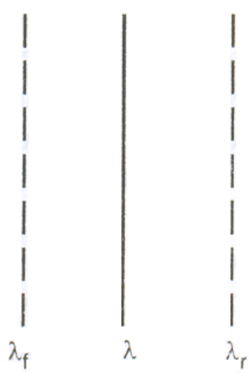
$\therefore$ $t_1' = t' = \frac{t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

یا $\frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu}\frac{t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\because \quad \nu = \frac{1}{t} \text{ او } \nu' = \frac{1}{t_1'}\right]$

یا $\nu' = \nu\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

له دې ځایه په فریکونسي کې تغیر شتون لري او د ډاپلر عرضي اثر بلل کیږي چې په کلاسیک میخانیک کې نه لیدل کیږي.

۳۰.۶ د ډاپلر نسبیتي اثر تجربوي تائید



شکل ۱.۳۰.۶

چ.ی.ایویس او ګ.ر.سټیل ویل د مالیکولي هایدروجن په استعمالولو سرهد ډاپلر نسبیتي اثر تائید کړ. د مالیکولي هایدروجن د مثبتو وړانګو په استعمالولو، دهغه نور د څپې اوږدوالی چې د کانالي وړانګو په لوري او په مخالف لوري خپور شوی وو، ولیدل شو. ۱.۳۰.۶ شکل په ترتیب سره د مالیکولونو د حرکت د مخ لوري او شا لوري په امتداد د خپریدنې اړوند λ_f او λ_r څپو اوږدوالیښیې او λ د مالیکولونو د سکون د حالت اړوند څپې اوږدوالی دی.

نو متوسط څپې اوږدوالی λ_0 عبارت دی له

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_f + \lambda_r}{2}$$

$\therefore$ د طیفي کرښې په منځني موقعیت کې تغیر

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda_f + \lambda_r\right) - \lambda \qquad \ldots (i)$$

ځرنګه چې ځرګنده فريکونسي

$$v' = v\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \quad \text{يا} \quad \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

يا

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

∴

$$\lambda' = \lambda\left[\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right]^{1/2}$$

او [∵ د شا لوري لپاره v منفي دى]

$$\lambda_r = \lambda\left[\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right]^{1/2}$$

نو (i) معادله به

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} + \frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}\right] - \lambda = \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)+\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] - \lambda$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$\Delta\lambda \cong \frac{\lambda}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

د تغير نظري قيمت $0\cdot072\text{A}^\circ$ په داسې حال کې چې تجربوي قيمت يې $0\cdot074\text{A}^\circ$ وو، چې د تجربوي قيمت سره په نږدې برابرښت کې وو.

۳۱.۶ د منسکواسکي فضا

رامان په ۱۸۵۴ کې وښوده چې درې بعده اقليدوسي هندسه د يوې زياتې عمومي څلوربعده هندسي د يوه ځانګړي حالت په توګه په کار وړل کيداى شي. د رامان د څلور بعده هندسي او د نسبيت د خاصې نظرې له اصولو څخه په ګټه اخستلو، منسکواسکي په ۱۹۰۸ کې، د فضا-وخت پيوستوالي

یو نوی مفهوم وړاندی کړ، چې د نسبیت د خاصې نظرې د هندسي توضیح په توګه په پام کې نیول کیدای شي.

په کلاسیک فزیک کې، فضا او وخت یو له بل څخه ازاد دي په داسې حال کې چې د نسبیت په خاصه نظریه کې، دوی یو له بل سره تړلي دي. له دې ځایه په نسبیت کې، فضا او وخت باید په جلا توګه په کار وې نه وړل شي. په یوه مأخذي دستګاه د مثال په توګه S کې هره پیښنه د x, y, z او t څلورو مختصاتو په واسطه ښودل کیدای شي. ددې لپاره چې د ټولو مختصاتو بعدونه عین شی وساتل شي، منسکواسکي څلورمه مختصه د وخت او نړیول ثابت c (د نور سرعت) د ضرب د حاصل په څیر وړاندې کړه یعنې د ct په توګه.

له دې ځایه، د لارنتز د انتقال معادلې په لاندې ډول لیکل کیدای شي:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{x-(v/c)ct}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

او $$ct' = \frac{ct-(v/c)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ یا } t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

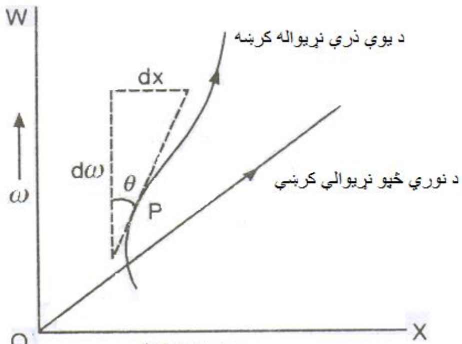
که مونږ $ct = \omega$ او $v/c = \beta$ ونیسو، نو

د لارنتز د انتقال معادلې لاندې شکل اخلي

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-\beta\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y\,;\ z' = z \\ \omega' &= \frac{\omega-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ او} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (۱.۳۱.۶)$$

په هندسي توګه د نوموړي حالت د ښودلو لپاره، مونږ به یواځې د فضا یو محور یعنې X-محور په پام کې ونیسو او د Y-محور او Z-محور به له پام څخه وغورځوو. دا به په هندسي توګه وړاندې کوونه ډېره اسانه کړي. ددې کار د کولو لپاره، دوه متقابلاً عمود کرښې رسم کړئ. افقي کرښه د X-محور په توګه او عمودي کرښه د W-محور په توګه وبولئ. [۱.۳۱.۶ شکل]

(i) د فضا-وخت په سیستم کې یوه نقطه **’نړیواله-نقطه‘** بلل کېږي.



۱.۳۱.۶ شکل

(ii) د فضا-وخت په سیستم کې د یوې ذرې حرکت په یوې منحني چې **’نړیواله- کرښه‘** بلل کېږي ښودل کیدای شي.

(iii)د نړیوالي کرښې په هره نقطه د مماس میل په همغه نقطه کې د نړیوالي کرښې میل ورکوي. د نړیوالي کرښې په هره نقطه د مماس میل د پیدا کولو لپاره، په نوموړې نقطه کې په نړیوالي کرښې د مماس او W-محور ترمنځ زاویه اندازه کړئ. که θ هغه زاویه وي چې د نړیوالي کرښې په هره نقطه کې یې مماس له W-محور سره جوړوي، نو

$$\tan\theta = \frac{dx}{d\omega} = \frac{dx}{d(ct)} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{u}{c},$$

داسې چې u په نوموړې نقطه کې د ذرې سرعت دی.

څرنګه چې د یوې مادي ذرې، u همیشه له c څخه کم دی، θ زاویه باید همیشه حاده وي.

(iv) په څرګندو دلایلو، د یوې نوري څپې $(u = c)$ نړیواله کرښه به یوه مستقیمه کرښه وي چې له W-محور سره 45° زاویه جوړوي.

د (x, ct) مختصاتو پورتنی بحث (x, y, z, ct) مختصاتو ته غزیدلی شي. د فضا او وخت مختصاتو دا ډول اړیکه د منسکواسکي نړۍ یا منسکواسکي فضا په توګه پیژندل کېږي.

لنډ ځوابه پوښتنې

۱. پوښتنه.د مچلسن-مورلي تجربې هدف څه شی وو؟

ځواب. د مچلسن-مورلي تجربې هدف په ایترو کې د ځمکې د نسبیتي حرکت کشف او له دې ځایه د ایترو د شتون کشف وو.

۲. پوښتنه.ولې د مچلسن-مورلي د تجربې په دوو بازوګانو کې د څوکو هندارې په دقیقه توګه په قایمه زاویو کې نه دي؟

ځواب. د مچلسن-مورلي د تجربې په دوو بازوګانو کې د څوکو هندارې ددې لپاره په دقیقه توګه په قایمه زاویو کې نه دي اینبودل شوي چې د تداخل مستقیمي حلقې لاس ته راوړي.

۳. پوښتنه.د مچلسن-مورلي په تجربه کې استعمال شوی جبراني ښیښنه ای قاب څه شی دی؟

ځواب. د نیمه نقره یي ښیښنه یي قاب په څیر د عین ضخامت لرونکي یو مستوي ښیښنه یي قاب د خپور شوی بیم په پرتله د منعکس شوي بیم په واسطه د وهل شوې اضافه لارې د جبران کولو لپاره استعمالیږي، ځکه منعکس شوی بیم د نیمه نقره یي قاب د پورتنی سطحې له انعکاس څخه وروسته له هغه څخه دوه ځلي تیریږي په داسې حال کې چې خپور شوی بیم له هغه څخه آن تر دې چې یو ځل هم سفر نه کوي.

۴. پوښتنه.د مچلسن-مورلي تجربې لاس ته راوړنې څه شی دي؟

ځواب.ایتر د یوې مطلقې مأخذي دستګاه په توګه په پام کې نیولو سره، د حلقې تغیر باید د یوې حلقې $0\cdot 37$ وي خو د حلقې هیڅ تغیر مشاهده نه شو. انټرفیرومټر ددې وړتیا لرله چې تقریباً د یوې حلقې $0\cdot 01$ کشف کړي. د مچلسن-مورلي تجربې غلطو نتیجو د ایترو فرضیې ردولو ته لاربنوونه وکړه.

۵. پوښتنه.لارنټز او فټزګرالډ څرنګه د مچلسن-مورلي تجربې غلطو نتیجو د تشریح کولو کوښښ وکړ؟

ځواب. لارنټز او فټزګرالډ وړاندیز وکړ چې ټول جسمونه چې په سرعت سره حرکت کوي د حرکت په لوري د $\sqrt{1-v^2/c^2}$ ضریب په اندازه کمیږي او د حرکت په لوري عمود هیڅ کموالی نه رامنځ ته کیږي. خو دا توضیح هم رد شوه ځکه نوموړې فرضیه په بشپړه توګه نظري او د ځانګړي طبیعت لرونکې وه.

۶.پوښتنه.ایا د نور د سرعت د ثبات نسبیتي پاستولیټ یواځې په عطالتي دستګاو کې صدق کوي که په غیرعطالتي دستګاو کې هم صدق کوي؟

ځواب.دا یواځې په عطالتي دستګاو کې صدق کوي ځکه په عطالتي دستګاو کې د نور سرعت یو مطلق کمیت په پام کې نیول کېږي.

۷.پوښتنه. ولې د یوې نړیوالې مأخذي دستګاه اړتیا راپورته شوه او څرنګه پوره شوه؟

ځواب.د هیوګنز په واسطه ددې وړاندیز وشو چې نوري څپې د غږ په څیر خپرېږي او د خپریدو لپاره یوه مادي محیط ته اړتیا لري. د غږ (یا میخانیکي څپې) د څپې سرعت عبارت دی له:

$$v = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\rho}}$$

داسې چې K د ارتجاعیت د بلک ضریب او ρ د محیط کثافت دی. په عین توګه د نوري څپو د خپریدو لپاره، محیط ته د ایتر نوم ورکړل شوی وو. څرنګه چې د نور سرعت ($c = 3 \times 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$) ډیر زیات دی، نو ایتر داسې په پام کې نیول شوي وو چې K به لوی قیمت او ρ به کوچنی قیمت ولري او داسې طمع کیده چې د تشیال په شمول به ټوله فضا ډکه او دا په پام کې نیول شوې وه چې د سکون په حال کې به وي نو دا به ممکن یوه مطلقه مأخذي دستګاه په پام کې نیول کیده.

۸. پوښتنه. څه شي د لارنتز د انتقال معادلو ته اړتیا پیدا کړه، په داسې حال کې چې په دواړو دستګاو کې ترسره شویو اندازه کوونو ته د اړیکې ورکولو لپاره ګالیلایي انتقال معادلو شتون لرلو؟

ځواب. د نسبیت د خاصې نظریې له مخې:

(i) په ټولو عطالتي مأخذي دستګاو کې د فزیک ټول قوانین عین شی پاتې کېږي.

(ii) د نور سرعت د مشاهده کونکي او د منبع د سرعت په پام کې نه نیولو سره عین شی دی.

د لومړي قانون له مخې، د ماکسویل معادلې باید په ټولو عطالتي دستګاو کې اعتبار ولري خو دا معادلې د ګالیلایي انتقال لاندې تغیر کوي. همدارنګه د ګالیلایي انتقال لاندې، د نور سرعت ثابت نه پاتې کېږي خو دیوې مأخذي دستګاه په سرعت پورې نظر بلې ته اړه لري. دا دفضا او وخت د اساسي مفاهیمو تکرار ته اړتیا لري. له دې ځایه د لارنتز په انتقالاتو کې مونږ اړتیا لرله چې د نور سرعت محفوظ او د فزیک د قوانینو شکل ثابت وساتو.

۹. پوښتنه. د نسبیت په خاصه نظریه کې، د اوږدوالي کمیدنه بیان کړئ.

ځواب. د اوږدوالي کمیدنې له مخې، د یوه جسم L_0 اوږدوالی د Sدستګاه، چې نظر هغه ته دا په نسبیتي حرکت کې ده، مشاهده کونکي ته کم شوی څرګندیږي.

او $$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

د اوږدوالي د کميدنې رامنځ ته کيدنه يواځې هغه وخت څرګنديږي، کله چې د S'دستګاه نسبتي سرعت نظر S ته (يعنې v) د نور له سرعت سره د پرتلې وړ وي، او دا تاثير متقابل دی. د کميدنې تاثير يو څرګند تاثير دی او د جسم په بعدونو کې د جسم د حرکت له امله هيڅ حقيقي کميدنه نه رامنځ ته کيږي.

۱۰. پوښتنه. د نسبيت په خاصه نظريه باندې به څه وشي، که د نور سرعت لايتناهي شي؟

ځواب.د لارنتز له انتقالاتو څخه، لرو چې

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}، \quad y' = y، \quad z' = z \text{ او } t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

که $c = \infty$، نو

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

او

$$t' = t$$

يعنې د لارنتز انتقالات به ګاليلايي انتقالاتو ته اختصار شي.

۱۱. پوښتنه. دوه فوتونونه يو بل ته مخامخ د حرکت په حال کې دي. د هغوی نسبيتي سرعت څومره دی؟

ځواب. د سرعتونو له نسبيتي جمع څخه، لرو چې

$$u'_x = \frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}$$

څرنګه چې په S' دستګاه کې دواړه فوتونونه يو بل ته مخامخ د حرکت په حال کې دي، فرض کړئ چې ديوه فوتون سرعت $u_x = v$ او د بل فوتون $v = -c$ دی، نو پورتنی معادله به:

$$u'_x = \frac{c-(-c)}{1-\frac{(-c)c}{c^2}} = \frac{2c}{c}$$

۱۲. پوښتنه. ثبوت کړئ چې د $\mathrm{m_0}$ سکون کتلې او T حرکي انرژي لرونکي جسم مومنتم عبارت دی له:

$$\mathrm{p} = \sqrt{\mathrm{T}^2/c^2 + 2\mathrm{m_0T}}$$

داسې چې توري خپله عادي معنا لري.

ځواب.د m_0 سکون کتلې او p مومنتم لرونکي ذرې نسبيتي انرژي عبارت ده له:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \qquad ...(i)$$

که T د ذرې حرکي انرژي وي، نو

$$E = m_0 c^2 + T \qquad ...(ii)$$

له (i) او (ii)معادلو څخه، لرو چې

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = m_0 c^2 + T$$

يا

$$m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m_0^2 c^4 + T^2 + 2m_0 c^2 T$$

يا

$$p^2 c^2 = T^2 + 2m_0 c^2 T$$

يا

$$p = \sqrt{T^2/c^2 + 2m_0 T}$$

۱۳. پوښتنه. د 25 GeV پروتون خطي مومنتم محاسبه کړئ، د یوه پروتون د سکون کتلې انرژي په 1 GeV منلو سره.

ځواب. دلته $T = 25\ \text{GeV} m_0 c^2 = 1\ \text{GeV}$;دی.

د پروتون نسبيتي انرژي عبارت ده له:

$$E = m_0 c^2 + T = 1 + 25 = 26\ \text{GeV}$$

او، د پروتون نسبيتي انرژي عبارت ده له:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

يا

$$pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{26^2 - 1^2} = 25 \cdot 98\ \text{GeV}$$

$$= 25 \cdot 98 \times 1 \cdot 6 \times 10^{-10} \text{J}$$

يا

$$p = \frac{25\cdot98\times1\cdot6\times10^{-10}}{c} = \frac{25\cdot98\times1\cdot6\times10^{-10}}{3\times10^8}$$

$$= \mathbf{1 \cdot 386 \times 10^{-17} kgms^{-1}}$$

۱۴. پوښتنه. د نوري پلز سرعتنسبت په $0 \cdot 9c$ سرعت سره متحرک راکټ ته پیدا کړئ.

ځواب. دلته نوي $u_x = c$ او $v = 0 \cdot 9c$ ، $u'_x = ?$

ځرنګه چې $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$

$$u'_x = \frac{c - 0 \cdot 9c}{1 - \frac{c \times 0 \cdot 9c}{c^2}} = \frac{c(1 - 0 \cdot 9)}{1 - 0 \cdot 9} = c$$

∴ د نوري پلز سرعت نسبت راکټ ته $= c$

۱۵. پوښتنه.وښایاست چې د فوتون د سکون حالت کتله صفر ده.

ځواب.ځرنګه چې د یوې متحرکې ذرې کتله عبارت ده له

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

داسې چې $m_0 =$ د ذرې د سکون کتله

$v =$ د ذرې سرعت

او $c =$ د نور سرعت

∴ $$m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

د فوتون لپاره $v = c$

∴ د فوتون د سکون کتله، $$m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$$

څو ځوابه پوښتنې

۱. 'ټولې عطالتي دستګاوې معادلې دي.' دا بیانیه لاندې کوم قانون بلل کیږي:

(الف) تعادل (ب) تطابق

(ج) نسبیتي حرکت (د) یو وخت والی

۲. د مچلسن-مورلي تجربه ددې لپاره ترسره شوه چې:

(الف) د نور چټکتیا اندازه کړي

(ب) د ایترو شتون ثبوت کړي

(ج) د ځمکې سرعت نسبت ایترو ته اندازه کړي.

(د) د فضا متجانس والی امتحان کړي.

۳. د یوه جسم اوږدوالی به اعظمي وي، کله چې:

(الف) د سکون په حال کې وي (ب) کله چې په $v = c$ سرعت سره په حرکت کې وي.

(ج) په $c \gg v$ سرعت سره په حرکت کې وي (د) هیڅ یو له پورتنیو څخه.

۴. د فوتون د سکون کتله عبارت ده له:

(الف) صفر (ب) $\mathrm{E}c^2$

(ج) E/c^2 (د) هیڅ یو له پورتنیو څخه.

۵. نسبیتي انتقالاتو وړاندیز د کوم یوه په واسطه وشو:

(الف) نیوټن (ب) انستین

(ج) هیوګنز (د) چ.ا. لارنټز

۶. دوه فوتونونه یو بل ته رسیږي، د هغوی نسبیتي سرعت به:

(الف) صفر (ب) c

(ج) له c څخه کم (د) $c/2$

۷. دوه فوتونونه یو له بل څخه لیرې کیږي، د هغوی نسبیتي سرعت به:

(الف) $2c$ (ب) $c/2$

(ج) صفر (د) c

۸. یو جسم په $\mathbf{0 \cdot 2c}$ سرعت سره د حرکت په حال کې دی، د متحرکې کتلې او د سکون حالت کتلې ترمنځ نسبت عبارت دی له:

الف) $1 \cdot 0$ ب) $1 \cdot 2$

ج) $1 \cdot 02$ د) $0 \cdot 2$

۹. کله چې یو گرام کتله په بشپړه توگه په انرژي بدله شي، دا لاندې اندازه تولیدوي

الف) 10^{16} J ب) 10^{20} J

ج) 9×10^{3} J د) 3×10^{10} J

۱۰. په کوم سرعت سره، د یوې ذرې حرکي انرژي د هغې د سکون کتلې له انرژي سره مساوي ده؟

الف) $\frac{c}{2}$ ب) $\frac{c}{3}$

ج) $\sqrt{2}c$ د) $\sqrt{\frac{3}{2}}c$

ځوابونه

۱ (الف)	۲ (ج)	۳ (الف)	۴ (الف)	۵ (د)
۶ (ب)	۷ (د)	۸ (ج)	۹ (ج)	۱۰ (د)

پوښتنې

۱. پیښه، مشاهده او مأخذي دستگاه اصطلاحات تعریف کړئ.

۲. د نیوټني نسبیت اصل څه شی دی؟ گالیلایي انتقالاتو ته یې اختصار کړئ.

۳. عطالتي مأخذي دستگاه څه شی ده؟ وښایاست چې په گالیلایي- نیوټني میخانیک کې، د فضا او وخت انټروالونه ثابت دی.

۴. ثبوت کړئ چې ټولې مأخذي دستگاوې چې نظر یوې عطالتي دستگاه ته په یونواخت سرعت سره د حرکت په حال کې وي هم عطالتي دي.

۵. ولې باید د طبیعت قوانین په ټولو عطالتي مأخذي دستگاو کې عین شی وي؟

۶.په عطالتي مأخذي دستګاو باندې څومره پوهیږئ؟ وښایاست چې د ګالیلایي انتقالاتو په واسطه تړل شویو دوه مأخذي دستګاو کې د فزیک د اساسي قوانینو شکل تغیر نه کوي.

۷. عطالتي او غیر عطالتي مأخذي دستګاوې کومې دي؟ د هرې یوې دوه مثالونه وړاندې کړئ.

۸.وښایاست چې د یوه پرتاب کیدونکي حرکت کله چې له بل پرتاب کیدونکي څخه لیدل کیږي همیشه یوه مستقیمه کرښه وي.

۹. د ګالیلایي انتقال او ګالیلایي ثبات معنا څه شی ده؟ وښایاست چې په ګالیلایي انتقالاتو کې د مومنتم او انرژي د تحفظ قوانین ثابت دي.

۱۰. ګالیلایي انتقالات څه شی دي؟ ثبوت کړئ چې دنیوټن د حرکت قوانین د ګالیلایي انتقالاتو لاندې ثابت دي.

۱۱. د ګالیلایي ثبات او د انرژي د تحفظ په مرسته د خطي مومنتم د تحفظ قانون لاس ته راوړئ.

۱۲. د عطالتي او غیر-عطالتي مأخذي دستګاو اصطلاحات تشریح کړئ. وښایاست چې په ګالیلایي انتقالاتو کې د خطي مومنتم د تحفظ قانون ثابت دی.

۱۳. ګالیلایي انتقالات څه شی دي؟ وښایاست چې د ګالیلایي انتقالاتو لاندې سرعت تغیر کوونکی، او تعجیل ثابت دی.

۱۴. د عطالتي مأخذي دستګاه مقصد څه شی دی؟ ولې ایتر داسې فرض شوي وو چې د نړیوالې دستګاه په توګه وپیژندل شي.

۱۵. ولې باید د طبیعت قوانین په عطالتي مأخذي دستګاو کې عین شی وي؟

۱۶. د مچلسن-مورلي تجربه تشریح او منفي نتیجې یې توضیح کړئ.

۱۷.د انستین د نسبیت د خاصې نظریې پاستولیټونه توضیح کړئ.

۱۸. د مچلسن-مورلي تجربه توضیح کړئ. نظر د ایترو شتون ته کومې نتیجې ورڅخه لاس ته راتلای شي.

۱۹. توضیح کړئ چې څرنګه او ولې د مچلسن-مورلي تجربه ترسره شوه. ارزښت یې څه شی دی.

۲۰. د مچلسن-مورلي تجربه توضیح کړئ چې د ایترو نه شتون ثبوت کړي.

۲۱. ولې د مچلسن-مورلي تجربه ترسره شوه؟ تجربه توضیح کړئ. تاسې ورڅخه څه نتیجې لاس ته راوړې.

۲۲. د انستین د نسبیت د خاصې نظریې پاستولیټونه ولیکئ. دفضا او وخت لپاره د لارنتز انتقال د هغو دوو دستګاو ترمنځ چې نسبت یو بل ته په یونواخت سرعت سره د حرکت په حال کې دي لاس ته راوړئ.

۲۳. د وخت وروسته والی تشریح کړئ. د $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ رابطه لاس ته راوړئ.

۲۴. د نور د ثبات اصل څه شی دی؟ نظر دې ته د ګالیلایي او لارنتز انتقال ترمنځ توپیر څه شی دی؟ د لارنتز انتقالات څه شی دي؟ د نوموړو انتقالاتو لپاره یوه افاده لاس ته راوړئ.

۲۵. د نسبیت د خاصې نظریې اساسي پاستولیټونه بیان او د لارنتز انتقال لاس ته راوړئ.

۲۶. د لارنتز د انتقال له مخې د فضا او وخت نسبیت توضیح کړئ.

۲۷. د نسبیت په خاصه نظریه کې، بیان کړئ:

(i) د دوو پیښو یو وخت والی (ii) د اوږدوالي کمیدنه (iii) د وخت وروسته والی

۲۸. د مچلسن-مورلي د تجربې هدف څه شی وو؟ ولې مچلسن او مورلي خپله تجربه د ورځو او شپو له مخې د کال د ټولو فصلونو په جریان کې تکرار کړه؟

۲۹.د مچلسن-مورلي د تجربې اصلي هدف څه شی وو؟ د لاس ته راغلې نتیجې ارزښت توضیح کړئ.

۳۰. (الف) د اوږدوالي، کتلې او وخت مفاهیم، چې له انستین څخه مخکې مطلق وو، له انستین څخه وروسته یو د بل تابع شول، دا تشریح کړئ.

(ب) یوه مشاهده کونکي ته چې نظر مشاهده کونکي ته د حرکت په حال کې دی یوه کره به څرنګه ښکاري. دا تشریح کړئ.

۳۱. د سرعتونو د جمع لپاره نسبیتي فورمول لاس ته راوړئ او ثبوت کړئ چې یوه ذره د نور په سرعت او یا له هغه څخه په زیات سرعت سره حرکت نه شي کولای.

۳۲. د نسبیت د خاصې نظریې له نظره د سرعتونو د جمع فورمول توضیح کړئ. وښایاست چې د نور له سرعت سره د هر سرعت جمع کول یواځې د نور سرعت ورکوي.

۳۳. د نسبیت په خاصه نظریه کې د سرعتونو د جمع کولو قانون لاس ته راوړئ. وښایاست چې نوموړی قانون د غیر-نسبیتي سرعتونو لپار د وکتورونو د جمع کولو قانون سره مطابقت لري.

۳۴. (الف) د فضا مختصاتو لپاره د لارنتز انتقال معادلې څخه په پیل کولو، د سرعتونو د انتقال معادلې لاس ته راوړئ، د کومو شرایطو لاندې نوموړې معادلې د سرعتونو لپاره د ګالیلایي انتقال معادلو ته اختصاریږي.

(ب) د لارنتز د انتقال معادلې لاس ته راوړئ.

۳۵. له سرعت سره د کتلې د تغیر لپاره یوه افاده لاس ته راوړئ. وښایاست چې هیڅ مادي جسم په تشیال کې د نور له سرعت څخه په زیات سرعت سره حرکت نه شي کولای.

۳۶. له سرعت سره د کتلې د نسبیتي تغیر فورمول لاس ته راوړئ.

۳۷. له سرعت سره د کتلې تغیر تشریح کړئ. وښایاست چې دا د فزیک د دوو اساسي قوانینو-'د کتلې تحفظ ' او' د انرژي تحفظ ' په یوه ' کتلې انرژیمعادل والي ' کې سره یوځای کولو ته لاربښوونه کوي.

۳۸. د کتلې انرژي رابطه لاس ته راوړئ.

۳۹. د یوې ذرې حرکي انرژي لپاره د هغې د سکون کتلې له مخې نسبیتي افاده او له دې ځایه د کتلې انرژي رابطه $\mathrm{E} = mc^2$ لاس ته راوړئ.

۴۰. د$\mathrm{E}^2 = m_0^2c^4 + \mathrm{p}^2c^2$رابطه لاس ته راوړئ

دلته نوموړي سمبولونه خپله عادي معنا لري.

۴۱. که په Sاو S'دستګاو کې د ذرې سرعتونه u او u'وي، ثبوت کړئ چې

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

۴۲. د لارنتز انتقال له مخې د اوږدوالي کمیدنه او د وخت تغیر توضیح کړئ.

۴۳. ثبوت کړئ چې د نسبیت په نظریه کې د متحرکې میلې اوږدوالی د $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ضریب په اندازه لنډ ځرګندیږي.

۴۴.دوه ذرې په مساوي سرعتونو سره په مخالفو لوریو د حرکت په حال کې دي. که دهرې یوې سرعت د نور له سرعت c سره مساوي وي، د دوی نسبیتي سرعت څومره دی؟

۴۵. د انستین د کتلې انرژي رابطه په ریاضیکي توګه توضیح کړئ. د نوموړې رابطې فزیکي ارزښت تشریح کړئ. ددې رابطې په ملاتړ کې دوه هستوي پدیدې ذکر کړئ.

۴۶. په v سرعت سره د m_0 سکون کتلې لرونکې متحرکې ذرې د نسبيتي حرکي انرژي لپاره يوه افاده لاس ته راوړئ.

۴۷. د کتلې انرژي رابطه تشريح کړئ.

۴۸. د مومنتم او انرژي د دريو مرکبو په واسطه منل شويو انتقالاتو لپاره يوه افاده لاس ته راوړئ.

۴۹. د ډاپلر نسبيتي اثر په هکله څه پوهيږئ؟ د ډاپلر طولي اثر لپاره يوه افاده لاس ته راوړئ.

۵۰.د ډاپلر نسبيتي اثر په هکله څه پوهيږئ؟ د ډاپلر عرضي اثر لپاره يوه افاده لاس ته راوړئ.

۵۱. د (i)د ډاپلر طولي اثر (ii) د ډاپلر عرضي اثر لپاره افادې لاس ته راوړئ.

۵۲. د منسکواسکي فضا توضيح کړئ.

عددي مسئلې

۱.يو متر لښته فضا ته په داسې لوړېچټکتيا سره پرتاب کيږي چې اوږدوالى يې يواځې 50cmکم ځرګنديږي. نوموړې څومره تيز حرکت کوي؟[ځواب. $2\cdot6\times10^{20}$ cm/sec]

۲. ځمکه به، نسبت لمر ته ساکن مشاهده کونکي ته د لمر شاوخوا د خپل مداري حرکت له امله د هغې د قطر په امتداد لنډه ځرګنده شي. د لمر ځرګند قطر محاسبه کړئ. د ځمکې مداري سرعت $30\ \text{km/sec}$ درکړل شوی دی او د ځمکې شعاع له 6400kmڅخه عبارت ده.

[ځواب. $0\cdot064$m]

۳. (الف) يوه ميله دوه متره اوږدوالى لري. اوږدوالى يې هغه وخت محاسبه کړئ چې په يوه راکټ کې په $2\cdot8\times10^{8}\text{ms}^{-1}$چټکتيا سره وړل کيږي. د نور سرعت$3\times10^{8}\text{ms}^{-1}$دی.

[ځواب. $0\cdot718$m]

(ب) د يو متر ميلې ځرګند اوږدوالى محاسبه کړئ کله چې په $2\cdot8\times10^{8}\text{ms}^{-1}$چټکتيا سره وړل کيږي. $c=3\times10^{8}\text{ms}^{-1}$ونيسئ.[ځواب. $0\cdot359$m]

اشاره. $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

۴. په يوه متحرکه ميله کې چې په $0\cdot9c$ سرعت سره په داسې يوه لوري چې له خپل اوږدوالي سره 45°ميل لري د کميدنې سلنه محاسبه کړئ.

۵. د 10cmاو 20cm ضلعو لرونکي يوه مستطيلي صفحه نسبت يوه عطالتي مشاهده کونکي ته په اوږده لوري په $0 \cdot 5c$ سرعت سره حرکت کوي. بعدونه به يې څومره وي کله چې د يوه ثابت مشاهده کونکي په واسطه اندازه کېږي. [ځواب. $10\text{cm} \times 17 \cdot 32\text{cm}$]

۶. په ځمکه باندې د ارام کولو په حالت کې د فضايي بېړۍ د دوو پيښو ترمنځ انټروال 3ثاني دی د عين دوو پيښو ترمنځ به د وخت انټروال څومره وي کله چې فضايي بېړۍ په $0 \cdot 9c$ سرعت سره د حرکت په حال کې وي؟

۷. يو راکټ بايد په کوم سرعت سره پرواز وکړي چې په هغه باندې تير شوی هر کال د ځمکې په سطحې باندې له 4 کلونو سره مطابقت ولري؟ د نور سرعت $3 \times 10^8\ \text{m/sec}$ ونيسئ.

[ځواب. $2 \cdot 91 \times 10^8\ \text{cm/sec}$]

۸. په ځمکه باندې د ارام کولو په حالت کې د فضايي بېړۍ د دوو پيښو ترمنځ انټروال 3 ثاني دي د عين دوو پيښو ترمنځ به د وخت انټروال څومره وي کله چې فضايي بېړۍ په $0 \cdot 8c$ سرعت سره د حرکت په حال کې وي؟ [ځواب. 5seconds]

۹. که 1000kg اوبو ته له $0°\text{C}$ څخه تر $100°\text{C}$ پورې تودوخه ورکړل شي، د اوبو په کتله کې زياتوالی محاسبه کړئ.

اشاره. د تودوخې انرژي زياتوالی $\Delta \text{E} = ms\theta = 10^3 \times 1000 \times 100$

$$= 10^8 \text{cal} = 4 \cdot 2 \times 10^8\ \text{J}$$

$$\Delta \text{E} = \Delta mc^2$$

∴ ځواب. $\Delta m = \frac{\Delta \text{E}}{c^2} = 0 \cdot 467 \times 10^8 \text{kg}$

۱۰. يو ساعت سم وخت ورکوي. نسبت يوه مشاهده کونکي ته بايد نوموړي ته کومې چټکتيا سره حرکت ورکړل شي ترڅو په 24 ساعتونو کې 1 دقيقه شا ته ولاړ شي.[ځواب. $0 \cdot 037c$]

۱۱.د β يوه ذره ختيځ لوري ته په $0 \cdot 95c$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده په داسې حال کې چې د β دوهمه ذره لويديځ لوري ته په $0 \cdot 85c$ سرعت سره د حرکت په حال کې ده. د دواړو β ذرو نسبيتي سرعت پيدا کړئ. [ځواب. $0 \cdot 9958c$]

۱۲. ځمکې لوري ته په $2 \times 10^8\ \text{m/s}$ چټکتيا سره يو متحرک راکټ يو پرتاب کونکی فاير کوي چې نظر ځمکې ته په $2 \cdot 25 \times 10^8\ \text{m/s}$ چټکتيا سره حرکت کوي. نظر راکټ ته د پرتاب کونکي سرعت پيدا کړئ.

[$2 \cdot 83 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$.ځواب]

۱۳. یو راډیو اکتیف اتوم په $v = 0 \cdot 1c$ سرعت سره د s یوه سیستم د x-محور په امتداد حرکت کوي. نوموړی د β یوه ذره نسبت s' سیستم ته چې په هغه کې راډیو اکتیف اتوم د سکون په حالت کې دی په $0 \cdot 95c$ سرعت سره خپروي. که د β ذره په s' کې د x-محور په امتداد خپره شي، نسبت s ته یې چټکتیا پیدا کړئ. دا قیمت له ګالیلایي انتقال څخه د ترلاسه شوي سره پرتله کړئ او په پایله باندې خپل نظر ولیکئ.

۱۴. له ځمکې څخه اخوا په $0 \cdot 5c$ سرعت سره متحرکه فضایي بیړۍ یو راکټ فیر کوي چې نسبت فضایي بیړۍ ته یې د ځمکې په لوري سرعت $0 \cdot 8c$ دی. د راکټ سرعت څومره دی که له ځمکې څخه مشاهده شي؟[ځواب. $0 \cdot 5c$ د ځمکې لوري ته]

۱۵.له ځمکې څخه اخوا په $0 \cdot 6c$ سرعت سره متحرکه فضایي بیړۍ یو راکټ فیر کوي چې نسبت فضایي بیړۍ ته یې سرعت $0 \cdot 7c$ دی:

(i) له ځمکې څخه اخوا (ii) د ځمکې لوري ته

د راکټ سرعت څومره دی که له ځمکې څخه په دواړو حالاتو کې مشاهده شي.

[ځواب. (i) له ځمکې څخه اخوا $0 \cdot 915$ (ii) د ځمکې لوري ته $0 \cdot 172\ c$]

۱۶. الکترونونو ته په بیتاټرون ماشین کې د نور د سرعت تر $90\ \%$ پورې یوپېچټکتیا ته تعجیل ورکول کېږي. د هغوی نسبیتي کتله څومره ده؟

د الکترون د سکون کتله= $9 \cdot 0 \times 10^{28}\mathrm{gm}$

[$9 \cdot 45 \times 10^{-27}\mathrm{gm}$.ځواب]

۱۷.دا راپور ورکړل شوی وو چې د اپولو- ۱۱ فضایي لوله چې تقریباً $1600\mathrm{kg}$ وزن لري په $396000\,\mathrm{km/hr}$ چټکتیا سره حرکت ورکړل شو د ځمکې اتموسفیر ته د بیا داخلیدو په وخت کې، په کتله کې څومره تغیر وو. [ځواب. $0 \cdot 107\mathrm{kg}$]

۱۸.یو الکترون $1 \cdot 02\mathrm{MeV}$ حرکي انرژي لري. چټکتیا یې د نور د چټکتیا له مخې محاسبه کړئ. د الکترون د سکون کتله $0 \cdot 51\mathrm{MeV}$ ده.

۱۹. د الکترون کتلې او د هغه د سکون کتلې نسبت محاسبه کړئ کله چې نوموړی په $20\mathrm{MeV}$ حرکي انرژي سره د حرکت په حال کې وي. د الکترون د سکون کتله $0 \cdot 510\mathrm{MeV}$ ده.

[ځواب. $40 \cdot 21$]

اشاره. $\mathrm{KE} = \mathrm{m}c^2 - \mathrm{m}_0c^2$

$\mathrm{m}c^2 = \mathrm{KE} + \mathrm{m}_0c^2 = 20 + 0\cdot 510$

∴ $\left[\right.$ځواب. $\left.= 20\cdot 51\right] \left[\frac{\mathrm{m}c^2}{\mathrm{m}_0c^2} = \frac{20\cdot 51}{0\cdot 510} = 40\cdot 21\right.$

۲۰. د یوې ذرې د حرکي انرژي په محاسبه کولو کې د کلاسیک فزیک له مخې او د نسبیتي فزیک له مخې کله چې په $0\cdot 5c$ چټکتیا سره د حرکت په حال کې وي څومره غلطي شامله ده.

[ځواب. $15\cdot 4\%$]

۲۱. د (i) الکترون او (ii) پروتون د سکون کتلې معادله انرژي پیدا کړئ. د الکترون او پروتون د سکون کتلې $9\cdot 1\times 10^{-28}\mathrm{gm}$ او $1\cdot 67\times 10^{-24}\mathrm{gm}$ راکړل شوي دي.

[ځواب. $931\cdot 38$ MeV ; $0\cdot 512$MeV]

۲۲. ثبوت کړئ چې د یوې ذرې د سکون کتله $\mathrm{m}_0 = \frac{\mathrm{p}c^2 - \mathrm{T}^2}{2\mathrm{T}c^2}$ ده.

۲۳. یو پروتون له بل پروتون سره ددې لپاره ټکر کوي چې پروتون انتي پروتون جوړه رامنځ ته کړي. که د پروتون د سکون کتله 939 MeV وي، اصغري انرژي چې پروتون ورته اړتیا لري محاسبه کړئ.[ځواب. 5634 MeV]

۲۴. په F ساکنه دستګاه کې دوه الکترونونو څخه یو د X− په لوري او بل د X+ په لوري په مساوي چټکتیاو سره چې اندازه یې $0\cdot 9c$ ده حرکت کوي. د یوه الکترون چټکتیا نسبت بل ته څومره ده؟

[ځواب. $0\cdot 994c$]

اشاره. $u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$

$u_x = 0\cdot 9c$ او $v = -0\cdot 9c$

۲۵. هغه سرعت محاسبه کړئ چې په هغه کې د یوه جسم کتله د هغه د سکون کتلې دوه چنده کیږي.

اشاره. $2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

[ځواب. $\frac{v^2}{c^2} = \cdot 75$ یا $v = 0\cdot 866\ c$]

د محترم پوهندوی علی جان عادل بیوګرافي

پوهندوی علی جان عادل د محمد هاشم زوی په ۱۳۵۹ هـ ش کال د ننګرهار ولایت حصارک غلجايي ولسوالي غوګيزې قريې په يوه ديندراه کورنۍ کې وزېږېد. لومړنۍ زده کړې يې د کلي په ابتدايه ښوونځي کې ترسره کړې، منځنۍ او ثانوي زده کړې يې په حضرت قيس بن سعد عالي لېسې کې پای ته رسولي او په ۱۳۸۰ هـ ش کال له يادې لېسې څخه په اعلی درجه بريالی شو. په ۱۳۸۲ هـ ش کال د کانکور ازموينې له لارې ننګرهار پوهنتون ښوونې او روزنې پوهنځي رياضي او فزيک څانګې ته بريالی او په ۱۳۸۶ هـ ش کال له يادې څانګې څخه فارغ شو.

په ۱۳۸۷ هـ ش کال کې شېخ زايد پوهنتون ښوونې او روزنې پوهنځي رياضي او فزيک څانګې ته د ازاد رقابت له لارې د علمي کادر غړي په توګه جذب شو.

په ۲۰۱۰ م کال کې د هند په جامعه ملي اسلامي پوهنتون طبعي علومو پوهنځي فزيک ديپارتمنت کې ماستري پيل او په ۲۰۱۲ کال کې يې له ياد پوهنتون څخه په لېزر او سپکتروسکوپي کې په تخصص کولو سره ماستري ترلاسه کړه. له ۲۰۱۲ م کال وروسته بيا شېخ زايد پوهنتون کې په تدريس بوخت شو. په شېخ زايد پوهنتون کې د تضمين کيفيت په برخه کې له کلونو کار او د رياضي او فزيک څانګې د آمر په توګه له دندې کولو وروسته په ۱۳۹۶ هـ ش کال د پکتيکا پوهنتون د رئيس په توګه مقرر شو او تر ۱۴۰۰ هـ ش کال پورې يې په پکتيکا کې د رئيس په توګه دنده ترسره کړه او د ۱۴۰۰ هـ ش کال حمل مياشتې څخه په لوړو زده کړو وزارت کې د علمي برنامو د انکشاف رياست د رئيس په توګه دنده پيل کړه او د ۱۴۰۰ هـ ش کال عقرب مياشتې پورې يې دنده ترسره کړه.

په ۱۴۰۰ هـ ش کال عقرب مياشت کې ننګرهار پوهنتون طب پوهنځي بزيک ساينس څانګې کې د استاد په توګه دنده پيل او تردا مهاله په ياده څانګه کې د استاد په توګه دنده ترسره کوي.

په درنښت سره

پوهندوی توريالی همدرد

د ننګرهار طب پوهنځي استاد

Abstract

I feel immense pleasure in presenting the Pashto version of ' Mechanics, Oscillations, and Relativity' to the students of the Education, Science, and Engineering faculties.

The text has been written in simple and lucid language in a concise manner. Mathematical derivations have been made simple, logical, and easily understandable. A large number of solved and unsolved numerical problems have been incorporated into each chapter.

The book consists of three parts, and six big topics, namely the coordinate system, the system of Particles and Their Collisions, Motion Under a Central Force Field, Harmonic Oscillations, Driven Harmonic Oscillators, coupled oscillators, and the special theory of relativity, are explained simply and widely.

I hope the book will be able to fulfill the objectives for which it was written. Suggestions for further improvement of this book are highly acknowledged.

Assistant Professor Ali Jan Adil

د افغانستان د ۹ پوهنتونونو د ۳۸۹چاپ شویو درسي کتابونو لېست

(کابل، کابل طبي پوهنتون، کابل پولي تخنیک، ننگرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپیسا) ۲۰۱۰ ـ ۲۰۲۳

شمیره	د کتاب نوم	لیکوال	پوهنتون	شمیره	د کتاب نوم	لیکوال	پوهنتون
۱. اخلاق، طبي لارښود او ترمینولوژي							
۱	اخلاق طبابت	پوهاند داکټرعبدالغفورهمدل صدیقی	بلخ	۲	رهنمای تدریس طب	پوهاند دوکتورنادراحمد اکسیر	کابل طبي پوهنتون
۳	د طبابت لنډ تاریخ	پوهاند عبدالحی مومنی	ننگرهار	۴	طبی ترمینولوژي	دوکتورگل سیما ابراهیم خیل قادری	ننگرهار
۵	د ننگرهار طب پوهنځی نصاب او درسي مفردات (انگلیسی)	ننگرهارطب پوهنځی	ننگرهار	٦	رهنمود PBL درافغانستان	پوهنوال دوکتورمحمد فرید برنایار	کاپیسا
۷	انگلیسي- پښتو طبي قاموس I	رنځورمل دوکتور عجب گل مومند	ننگرهار	۸	انگلیسي- پښتو طبي قاموس I	رنځورمل دوکتور عجب گل مومند	ننگرهار
۹	د طب محصلینو درسي کتابونه	ډاکتر یحیی وردک	ټول پوهنتونونه	۱۰	۱۴۰ طبي کتابونه په ډي وي ډي کې (پښتو، دري او انگلیسي)	بېلا بېل مؤلفین	ټول پوهنتونونه
۱۱	۲۱۴ طبي کتابونه په ډي وي ډي کې (پښتو، دري او انگلیسي)	بېلا بېل مؤلفین	ټول پوهنتونونه	۱۲	د طبیعي علومو انگلیسي- پښتو قاموس	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی څدران	ننگرهار
۲. فزیک							
۱۳	په معاصر طب کې د فزیک پیژندنه	گل احمد سهیل	ننگرهار	۱۴	بیوفزیک	پشتانه بنایي	ننگرهار
۱۵	بیوفزیک	پوهنیار گل احمد سهیل	ننگرهار	۱٦	بیوفزیک	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۱۷	طبي فزیک	پوهنیار هدایت الله مهمند	ننگرهار	۱۸	فزیک طبی بخش میخانیک	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۱۹	فزیک طبی بخش حرارت	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ	۲۰	توضیح اساسات فزیکی، وسایل تشخیصیه طبی	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۲۱	فزیک نور	پوهاند میر محمد ظاهر حیدری	بلخ	۲۲	فزیک اوپتیک	پوهنوال غلام قادر دهگان	هرات
۲۳	نور و فزیک جدید	پوهنوال غلام قادر دهگان	هرات	۲۴	د نور فزیک	پوهنیار هدایت الله مهمند	ننگرهار
۲۵	د برق فزیک	پوهنیار هدایت الله	ننگرهار	۲٦	میخانیک او د نور فزیک	پوهنیار هدایت الله	ننگرهار
۲۷	کوانتم میخانیک	پوهنیار اکرام الله وقار	ننگرهار	۲۸	حرارت و ترمودینامیک	پوهنوال غلام قادر دهگان	هرات
۲۹	برېښنا، مقناطیسیت او الکترو مقناطیسي تیوري	پوهندوی توریالی همدرد	ننگرهار	۳۰	میخانیک، اهتزازات او نسبیت	پوهندوی علي جان عادل	ننگرهار
۳. کیمیا							
۳۱	طبي کېميا	پوهنوال امرالله آصفي	خوست	۳۲	طبي بیوشمي	پوهاند خان محمد احمدزی	کابل طبي پوهنتون
۳۳	کېمیایي عنصرونه، لومړی ټوک	محمد طاهر کاني	ننگرهار	۳۴	کېمیایي عنصرونه، دوهم ټوک	محمد طاهر کاني	ننگرهار
۳۵	فزیکي کېمیا گازونه او کېمیاوي ترمودینامیک	پوهاند خیر محمد ماموند	ننگرهار	۳٦	فزیکی کیمیا دوهم جلد، ترمودینامیک	حبیب الله نوابزاده	ننگرهار
۳۷	عضوي کېميا، کړيوال ترکیبونه	پوهاند دوکتور محمد غوث حکیمي	ننگرهار	۳۸	فزیکي کېميا II،	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننگرهار
۳۹	فزیکي کېميا III، کېمیاوي کنتک او کتلسس، کروماتوگرافي او اسپکتروسکوپي	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننگرهار	۴۰	عمومي کیمیا	پوهاند دوکتورخیرمحمد ماموند	ننگرهار
۴۱	عضوی کیمیا، د الیفاتیک برخه	پوهنوال ډاکترگل حسن ولیزی	خوست	۴۲	عضوي کیمیا، د اروماتیک او هیترو سیکلیک برخه	پوهنوال ډاکترگل حسن ولیزی	کابل
۴۳	د قندونو هضم، جذب او استقلاب	پوهیالی دوکتوریحیی فهیم	ننگرهار	۴۴	د شحمیاتو استقلاب	دوکتور محمد عظیم عظیمي	ننگرهار
۴. بیولوژي او جنیټیک							
۴۵	عمومي بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننگرهار	۴٦	عمومي بیولوژي	پوهندوی الفت شیرزی	ننگرهار
۴۷	بیولوژي مالیکولي حجره، بخش اول	پوهنوال علی یوسف پور	کابل طبي پوهنتون	۴۸	بیولوژي مالیکولي حجره، بخش دوم	پوهنوال علی یوسف پور	کابل طبي پوهنتون
۴۹	د حجرې بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننگرهار	۵۰	مالیکولي بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننگرهار
۵۱	وراثت	پوهنوال دوکتور گل سالم شرافت	ننگرهار	۵۲	کلاسیک اومالکیولی جنتیک	دوکتورمحمد صابر	ننگرهار
۵۳	وراثت او د سمورفولوژي	پوهنمل ډاکتر مسیح الله مسیح	ننگرهار	۵۴	طبي جنیټیک	پوهندوی الفت شیرزی	ننگرهار
۵۵	زولوجي فقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار	۵٦	زولوجي غیرفقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار
۵۷	حیوانات مفصلیه	پروفیسور داکتر دیپلوم علی آقا نحیف	هرات				

۵. اناټومي او هستالوژي							
۵۸	اناټومي لومړی جلد (هډوکي، مفاصل او عضلات)	پوهنمل ډاکټر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۵۹	د هډوکو او مفاصلو اناټومي	پوهنوال دوکتور حمیدالله حامد	خوست
۶۰	د سر او غاړې اناټومي درسي کتاب I	پوهندوی دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۱	د سر او غاړې اناټومي درسي کتاب II	پوهندوی دوکتور یما صدیقي	ننگرهار
۶۲	د ټټر اناټومي	پوهنیار دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۳	اناتومی	پوهنمل ډاکټرحفیظ الله سهار	کابل طبي پوهنتون
۶۴	د سینې بطن او حوصلې اناټومي	پوهنوال دوکتور حمیدالله حامد	خوست	۶۵	د جهازاتو اناتومي	پوهنوال ډاکتر محمد حسین یار	ننگرهار
۶۶	د عصبي سیستم اناټومي	پوهنیار دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۷	اناټومي دریم جلد، عصبي سیستم، حواس او اندوکراین غدوات	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار
۶۸	د زړه او د وینې د رګونو اناټومي	پوهنمل ډاکټر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۶۹	د هضمي سیستم اناټومي	پوهنمل ډاکټر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار
۷۰	د بولې تناسلي سیستمو اناټومي	پوهنمل ډاکټر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۷۱	د انسان فزیولوژي او اناټومي	عبدالملک پرهېز	ننگرهار
۷۲	د انسان اناټومي (پورتنی طرف او صدر) ناحیوي او عملي له تسلیخ او کلینیک سره	پوهندوی ډاکتر توریالی سهاک	ننگرهار	۷۳	اناتومی و فزیولوژی انسان، جلد دوم	پوهندوی محمد طاهرنسیمی	بلخ
۷۴	اناتومی و فزیولوژی انسان، جلد اول	پوهندوی محمد طاهرنسیمی	بلخ	۷۵	عمومي هستالوژي	پوهندوی ډاکټرفضل الهي	کندهار
۷۶	عمومي هستالوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۷۷	طبی هستولوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۷۸	طبي هستالوژي	پوهاند داکتربری صدیقي	خوست	۷۹	هستالوژي	پوهاند ډاکټربری صدیقي	کابل طبي پوهنتون
۸۰	د سیستمونو هستالوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار				
۶. امبریولوژي							
۸۱	عمومي امبریولوژي	پوهاند دوکتوربری صدیقي	خوست	۸۲	امبریولوژي	پوهنوال ډاکتر محمد حسین یار	ننگرهار
۸۳	امبریولوژی طبی	پوهندوی داکتربشیر نورمل	کابل طبي پوهنتون	۸۴	طبي امبریولوژي	پوهنمل داکتر ناصر نصرتي	ننگرهار
۸۵	امبریولوژی عمومی انسان	پوهندوی داکتربشیر نورمل	کابل طبي پوهنتون	۸۶	د انسان عمومي کلینیکي امبریولوژي	پوهنیار ډاکتر عبدالله جان شینواری	ننگرهار
۷. فزیولوژي او پتولوژي							
۸۷	طبي فزیولوژي	داکتر شریف الله	ننگرهار	۸۸	د ځانګړو حسیتونو، پوستکي، اوتونومیک او مرکزي سستم فزیولوژي	پوهنوال دوکتور محب الله شینواری	ننگرهار
۸۹	د اندوکراین، زړه، رګونو او پښتورګو فزیولوژي	پوهنوال دوکتور احسان الله احسان	ننگرهار	۹۰	د تنفسي سیستم فزیولوژي	پوهنوال دوکتور احسان الله احسان	ننگرهار
۹۱	د وینې فزیولوژي	پوهنمل ډاکتر ولي محمد ویاړ	کندهار	۹۲	عمومي پتالوژي	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۹۳	پتالوژی عمومی	پوهندوی ډاکټرزهرا فروغ	هرات	۹۴	عمومي پتالوژي	پوهندوی دوکتور محمد آصف	ننگرهار
۹۵	د سیستمونو پتالوژي	پوهندوی ډاکترخلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۹۶	د سیستمونو پتالوژي دوهمه برخه	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۹۷	د قلبي وعایي، وینې، تنفسي او هضمي جهاز پتالوژي	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۹۸	د وینې، جګرو، تنفسي جهاز، هضمي جهاز او نویو زېږېدلو فزیولوژي	پوهنوال دوکتور جنت میر مومند	ننگرهار
۹۹	مالیکولي ایمینولوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار				
۸. مایکروبیولوژي او پرازیتولوژي							
۱۰۰	مایکرو بیولوژی طبی، جلد اول	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون	۱۰۱	مایکرو بیولوژی طبی، جلد دوم	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون
۱۰۲	مایکروبیولوژي	پوهاند محمد جمعه حنیف	هرات	۱۰۳	مایکروبیولوژي عمومي	دوکتور شعیب احمد شاخص	هرات
۱۰۴	پرازیتولوژی طبی	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون	۱۰۵	اساسات پرازیتولوژی طبی	پوهنمل دوکتورمحمد یوسف مبارک	کابل طبي پوهنتون
۱۰۶	د پرازیتولوژي اساسات	ډاکتر محمد صابر	ننگرهار	۱۰۷	طبي پرازیتولوژي	پوهنوال دوکتور غلام جیلاني ولي	ننگرهار
۱۰۸	هلمنتولوژي	پوهنوال ډاکترسید رفیع الله حلیم	ننگرهار				

۹. فارمکولوژي							
۱۰۹	فارمکولوژي	پوهنوال داکتر قمبرعلي حیدري	ننگرهار	۱۱۰	فارمکولوژی، دریم ټوک	پوهنوال سید قمبر علي حیدري	ننگرهار
۱۱۱	فارمکولوژي، دوهم ټوک	پوهنوال داکتر قمبرعلي حیدري	ننگرهار	۱۱۲	د اتونوم او مرکزي عصبي سیستمونو فارمکولوژي	ډاکترغلام ربی بهسودوال	ننگرهار
۱۱۳	گیاهان طبی مستعمله در تداوی امراض قلبی و وعایی	پوهنوال محمد عثمان بابری	کابل طبي پوهنتون	۱۱۴	امینیو فارمکولوژي	پوهنوال سید قمبر علي حیدري	ننگرهار
۱۱۵	د درملو د استعمال عملي لارښود (انگلیسی/ پښتو)	ډاکتر مالتې ایل وان بلومرودر	خوست	۱۱۶	فارمکولوژي (دریم کال، دوهم سمستر لپاره)	پوهنوال دوکتور غلام ربي بهسودوال	ننگرهار
۱۱۷	د درملو بدې اغیزې	پوهنوال سید قمبر علي حیدري	ننگرهار				
۱۰. عامه روغتیا							
۱۱۸	د عامې روغتیا اساسات او اداره	پوهنوال ډاکتر محمدعارف رحماني	ننگرهار	۱۱۹	ډیموگرافي او کورنی تنظیم	پوهیالی ډاکټر محمد ابراهیم شیرزی	ننگرهار
۱۲۰	د چاپیریال او ٲندیزه روغتیا	پوهنوال ډاکتر محمدعارف رحماني	ننگرهار	۱۲۱	تغذیه او روغتیا	پوهیالی ډاکټر محمد هارون	ننگرهار
۱۲۲	تغذیه او سوٌتغذیه	پوهنوال داکترعبدالواحد وثیق	قندهار				
۱۱. داخله							
۱۲۳	فزیکل دیاگنوزس	پوهنوال ډاکترحفیظ الله اپریدی	ننگرهار	۱۲۴	فزیکی تشخیص او د تاریخچې اخیستنه	پوهاند داکتر شریف الله	ننگرهار
۱۲۵	فزیکي تشخیص	داکتر ناصر جبارخیل	ننگرهار	۱۲۶	فزیکي تشخیص (هادي کلینیکل میتود)	پوهاند ډاکتر سیف الله هادي	ټول پوهنتونونه
۱۲۷	د داخله ناروغیو تفریقي تشخیص I	پوهاند دوکتور سیف الله هادي	ننگرهار	۱۲۸	د داخله ناروغیو تفریقي تشخیص I	پوهاند دوکتور سیف الله هادي	ننگرهار
۱۲۹	د زړه برقي گراف (ECG)	رنځوروال ډاکټر سید عبدالله سادات	ننگرهار	۱۳۰	رهنمای عملی مشکلات عام طبی (دری)	داکتر مالتې ال-وان بلومرودر	بلخ
۱۳۱	هیماتولوژي، ایمینولوژي او د ویټامینونو کموالي ناروغی	پوهندوی دوکتورایمل شیرزی	ننگرهار	۱۳۲	د طبي عامو ستونځو عملي لارښود (انگلیسی)	داکتر مالتې ال-وان بلومرودر	ننگرهار
۱۳۳	د وینې ناروغی	پوهاند ډاکټر محمد ظاهرظفرزی	ننگرهار	۱۳۴	د وینې ناروغی	پوهنوال دوکتور حیات الله احمدزی	ننگرهار
۱۳۵	اندوکراینولوژي او روماتولوژي	پوهاند داکتر محمد طیب نشاط	ننگرهار	۱۳۶	د پښتورگو ناروغی	پوهاند ډاکټرمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۳۷	د هضمي سیستم او پښتوروگو ناروغی	پوهندوی ډاکټرسیف الله هادي	ننگرهار	۱۳۸	اندوکراینولوژی او روماتولوژي	پوهاند دوکتور سیف الله هادي	ننگرهار
۱۳۹	د خولې او د هضمي سیستم ناروغی	پوهاند ډاکټرمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار	۱۴۰	د هضمي جهاز ناروغی	پوهاند ډاکټر محمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۴۱	امراض جهاز هضمی و کبد	دوکتورمحمد یونس فخری	بلخ	۱۴۲	د هضمي جهازاو پښتورگو ناروغی	پوهنوال ډاکټرعبدالواحد وثیق	کندهار
۱۴۳	د زړه او رگونو ناروغی	پوهندوی ډاکټر دل آقا دل	ننگرهار	۱۴۴	د ځیگر ناروغی	پوهاند ډاکټرمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۴۵	د تنفسي سیستم او د زړه روماتیزمل ناروغی	پوهاند دوکتور سیف الله هادي	ننگرهار	۱۴۶	تنفسي او د زړه د دسامونو روماتیزمل ناروغی	پوهاند ډاکټرمحمد طیب نشاط	ننگرهار
۱۴۷	د شکرې ناروغي	ډاکتر محمد نعیم همدرد	ننگرهار	۱۴۸	د تنفسي او د زړه روماتیزمل ناروغی	پوهندوی داکتر سلام جان شمس	ننگرهار
۱۲. بیړنی درملنه							
۱۴۹	بیړنی طبي پیښې	پوهنوال داکترعبدالواحد وثیق	قندهار	۱۵۰	د داخلي بیړنې پیښې او د بحران څارنه	پوهنوال ډاکترحفیظ الله اپریدی	ننگرهار
۱۵۱	بیړنی درملنې	ډاکتر عبدالولی رنځورمل وردک	خوست	۱۵۲	د بیړنیو پیښو د درملنې لارښود (انگلیسی)	پوهنوال ډاکترایمل شیرزی	ننگرها
۱۵۳	بیړنی طبي درملنې	داکتر سید ملیار سادات	ننگرهار	۱۵۴	کمک های اولیه	پوهاند دوکتورنجیب الله امرخیل	کابل طبي پوهنتون
۱۳. انکالوژي							
۱۵۵	د سینې سرطان، پېژندنه، درملنه او مخنیوی	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی څدراڼ	ننگرهار	۱۵۶	د سرطاني ناروغیو اساسات	پوهاند داکتر محمد ظاهر ظفرزی	ننگرهار
۱۵۷	د وینې سرطان	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی	ننگرهار	۱۵۸	سرطان او د چاپیریال رادیو اکټیویټي	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی څدران	ننگرهار
۱۵۹	د سرطاني ناروغیو راډیوتراپي	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی څدران	خوست				

۱۴. جراحي							
۱۶۰	نرسنگ عملیات خانه	پوهاند دوکتورنجیب الله امرخیل	کابل طبي پوهنتون	۱٦۱	جراحي، د کلینیکي معایناتو سیستم	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست
۱٦۲	د عمومي جراحي اساسات	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست	۱٦۳	اساسات جراحی	پوهاند ډاکټرنجیب الله امرخیل	کابل طبي پوهنتون
۱٦۴	عمومي جراحي I	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست	۱٦۵	عمومي جراحي II	پوهندوی داکتر بادشاه زارعبدالي	خوست
۱٦٦	عمومي جراحي	داکترگل سیما ابراهیم خیل قادري	خوست	۱٦۷	امراض جراحی سیستم هضمی وملحقات آن	پوهاند ډوکتورعبدالوهاب نورا	کابل طبي پوهنتون
۱٦۸	امراض جراحي بطن و ملحقات ان	پوهاند دوکتورمحمد معصوم عزیزی	کابل طبي پوهنتون	۱٦۹	امراض جراحي بطن و ملحقات ان	پوهندوی ډاکټرعبدالخالق دوست	کندهار
۱۷۰	جراحي بطن ، چاپ دوم	پوهاند دوکتورمحمد معصوم عزیزی	کابل طبي پوهنتون	۱۷۱	د ګېډې د ملحقاتو د جراحي ناروغی	پوهنوال دوکتور بادشاه زار عبدالي	خوست
۱۷۲	بطن حاد و مزمن	پوهنوال ډاکټرعبدالغفور ارصاد	هرات	۱۷۳	د پلاستیک جراحي اساسات او تخنیکونه	داکتر الفت هاشمي	ننگرهار
۱۷۴	د کولمو بندش او د پریطوان جراحي ناروغی	پوهاند ډاکټرعبدالرؤف حسان	ننگرهار	۱۷۵	امراض یورولوژی	پوهندوی دوکتورغلام سخی حسنی	کابل طبي پوهنتون
۱۷٦	یورولوژي	پوهندوی دوکتور غازي جمال عبدالناصر	ننگرهار	۱۷۷	یورولوژي	پوهنوال ډاکټرعبدالحد حمید	ننگرهار
۱۷۸	جراحي عصبی	پوهنوال دوکتور عبدالغفور ارصاد	هرات	۱۷۹	عصبي جراحي	پوهندوی دوکتور فضل الرحیم شگیوال	ننگرهار
۱۸۰	عصبي جراحي	پوهندوی داکتر عبدالبصیر منگل	ننگرهار	۱۸۱	عصبي جراحي	پوهاند دکتور بادشاه زار عبدالی	خوست
۱۸۲	د جراحي انکال	رنځوریار داکتر عجب گل مومند	ننگرهار	۱۸۳	جراحي عمومی اطفال	پوهنیار داکتر توریالی حکیمی	کابل طبي پوهنتون
۱۸۴	د کوچنیانو جراحي	پوهاند ډاکتر فضل الرحیم شگیوال	ننگرهار	۱۸۵	حاد اپندیسایتیس، تشخیص، اختلاطات او تداوي	پرفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ننگرهار
۱۸٦	تروماتولوژی	پوهنوال عبدالغفور ارصاد	هرات	۱۸۷	د صدر ترضیضات	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۱۵. ارتوپيدي او انستيزيولوژي							
۱۸۸	کسرونه او خلعې	پوهندوی سید بها کریمي	ننگرهار	۱۸۹	اورتوپیدي	پوهندوی ډاکټرسید شال سیدي	ننگرهار
۱۹۰	اورتوپیدي اوکسرونه	پوهنمل ډاکټر محمد همایون مصطفی	کندهار	۱۹۱	د عامو کسرونو تړلې درملنه	پوهندوی دوکتور ظاهر گل منگل	خوست
۱۹۲	رهنمای انستیزی برای کشورهای رو به انکشاف، جلد اول	دانیل دی موس	کابل طبي پوهنتون	۱۹۳	رهنمای انستیزی برای کشورهای رو به انکشاف، جلد دوم	دانیل دی موس	کابل طبي پوهنتون
۱۹۴	د اورتوپیدي د انتاناتو اساسات، وبلی او د ستون فقرات انتانات	رنځوروال دوکتور سیدالرحمن حکیمي	شیخ زاید				
۱٦. انتاني							
۱۹۵	انتاني ناروغی	پوهنوال ډاکټرعبدالناصر جبارخیل	ننگرهار	۱۹٦	امراض انتانی (انگلیسی)	پوهنمل ډاکټر محمد ذکریا امیرزاده	کندهار
۱۹۷	انتاني ناروغی	پوهنوال داکتر حفیظ الله اپریدی	ننگرهار	۱۹۸	د ساري ناروغیو کنټرول	پوهندوی ډاکټر محمد عظیم منگل	ننگرهار
۱۹۹	د کوچنیانو ساري ناروغی	پوهاند دوکتورسلطان محمد صافی	خوست	۲۰۰	د کوچنیانو ساري ناروغی	پوهندوی دوکتور نجیب الله امین	ننگرهار
۲۰۱	امراض ساری اطفال	پوهاند ډاکټرسلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون	۲۰۲	د ماشومانو انتاني ناروغی	پوهاند دوکتور عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۰۳	توبرکلوز	پوهندوی ډاکټرسید انعام سیدی	ننگرهار	۲۰۴	په ماشومانو کې نری رنځ	پوهنمل ډاکټر حقیق الله چاردیوال	ننگرهار
۲۰۵	د توبرکلوز ناورغی	ډاکټرمحمد ناصرناصري	کندهار	۲۰٦	د سینې ناروغی او توبرکلوز	ډاکټر ناصر محمد شینواری	کندهار
۲۰۷	ملاریا	دوکتور محمد اسحاق شریفي	ننگرهار	۲۰۸	سارس – ۲ او کووید- 19	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۲۰۹	د ځیګر ویروسي التهاب (طبي تشخیص او درملنه)	دوکتور محمد اسحاق شریفي	ننگرهار	۲۱۰	شل خپرې ساري ناروغی	ډاکتر غلام سرور ظهیر	شیخ زاید

۱۷. اطفال

۲۱۱	اطفال	پوهنوال ډاکټرمحمد رسول فضلي	ننگرهار	۲۱۲	د کوچنیانو ناروغی I	پوهنوال دوکتور عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۱۳	د کوچنیانو ناروغی II	پوهنوال دوکتور عبدالستار نیازی	ننگرهار	۲۱۴	د ماشومانو کلینکی معاینات	پوهنوال ډاکټرناصرکاموال	ننگرهار
۲۱۵	روش های ارزیابی کلنیکی اطفال	پوهندوی ډاکټرفاروق حمیدي	کابل طبي پوهنتون	۲۱۶	د کوچنیانو ناروغی تکست بوک	پوهاند ډاکټر سلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون
۲۱۷	د کوچنیانو د درملنX لارښود (انگلیسی)	پوهندوی داکترمنصوراسلمزی	ننگرهار	۲۱۸	د کوچنیانو تغذیه	پوهنمل ډاکټر نجیب الله امین	ننگرهار
۲۱۹	د کوچنیانو خوارخواکی	پوهندوی ډاکترسمیع الله حیات	ننگرهار	۲۲۰	د کوچنیانو د وینې ناروغی	پوهندوی داکتر منصور اسلمزی	ننگرهار
۲۲۱	د نوي زیږیدلي ماشوم څارنه	پوهندوی ډاکتر ناصر خان کامه وال	ننگرهار	۲۲۲	د نیونتالوژی او کوچنیانود ناروغیو کلینیکی هندبوک	پوهندوی داکتر منصور اسلمزی	ننگرهار
۲۲۳	د ماشومانو د ناروغیو عملي لارښود	داکتر مالتِی ال-وان بلومرودر	ننگرهار	۲۲۴	نیونتولوژي	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۵	د کوچنیانو د جهازاتو معمولې ناروغی I	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار	۲۲۶	د کوچنیانو نارغی د پنځم صف لپاره لومړی سمیستر	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۷	د ماشومانو د معدې معایي سیستم او ینې ناروغی	پوهنمل ډاکټر ولي گل مخلص	خوست	۲۲۸	د کوچنیانو د جهازاتو معمولې ناروغی II	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۹	د کوچنیانو ناروغی I	پوهاند دوکتور احمد سیر احمدي	ننگرهار	۲۳۰	د کوچنیانو ناروغی II	پوهاند دوکتور احمد سیر احمدي	ننگرهار
۲۳۱	د ماشومانو تنفسي، زړه، وینې او پښتورگي ناروغی	پوهاند داکتر نجیب الله امین	ننگرهار	۲۳۲	د کوچنیانو ناروغی	پوهاند ډاکټر سلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون
۲۳۳	د ماشومانو اساسات، هضمي، اندوکراین او عصبي ناروغی	پوهاند ډاکتر سمیع الله حیات	ننگرهار	۲۳۴	معاینات کلینیکی اطفال بطور ساده	پوهندوی دوکتور سید نجم الدین جلال	کابل طبي پوهنتون

۱۸. ولادي/ نسایي

۲۳۵	زیږون	پوهنمل ډاکټرمریم اکرم معصوم	ننگرهار	۲۳۶	ولادی جراحی، لمړی ټوک	داکترعجب گل مومند	قندهار
۲۳۷	کتاب ولادی	پوهندوی داکترحسن فرید	هرات	۲۳۸	ولادی جراحی، دوهم ټوک	داکترعجب گل مومند	قندهار
۲۳۹	امراض نسایی	پوهندوی ډاکتر حسن فرید	هرات	۲۴۰	د ثدیې ناروغی	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۲۴۱	نسایي ناروغی	پوهندوی دوکتورس تورپیکې اپریدی	ننگرهار	۲۴۲	امېندواري او زېږون	پوهنوال دوکتورس حفیظه سهاک	ننگرهار

۱۹. روانشناسي، رواني/عقلي اوعصبي

۲۴۳	امراض روانی I	پوهندوی دوکتورعبدالعزیز نادری	کابل طبي پوهنتون	۲۴۴	امراض روانی II	پوهندوی دوکتورعبدالعزیز نادری	کابل طبي پوهنتون
۲۴۵	رواني رنځپوهنه	پوهندوی ډاکټرجهان شاه تنی	خوست	۲۴۶	نشه يي توکي او اړونده ناروغی	ډاکټر محمد سمین ستانکزی	ننگرهار
۲۴۷	د رواني روغتیایي ستونځو عملي لارښود (انگلیسي)	سیان نیکولاس	ننگرهار	۲۴۸	عصبي ناروغی	پوهنمل داکتر بلال پاینده	ننگرهار
۲۴۹	عقلي ناروغی	پوهنمل داکتر بلال پاینده	ننگرهار	۲۵۰	روانشناسی و ضرورت آن در جامعۀ افغانستان	داکتر اعظم دادفر	کابل
۲۵۱	روانشناسی عمومی	پوهاند ماریا صاعد سلطانی	بلخ	۲۵۲	عصبي معاینات او سلوکپوهنه	پوهنوال دوکتور جهان شاه تنی	خوست

۲۰. رادیولوژي/ تصویربرداری طبی

۲۵۳	کلینکي رادیولوژي	پوهنوال ډاکټر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۴	د زړه او سږو د ناروغیو تشخیصیه رادیولوژي	پوهنیار ډاکټر شاه محمد رنځورمل	خوست
۲۵۵	تشخیصي رادیولوژي	پوهنوال ډاکټر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۶	تصویرې یا ترسیمې رادیولوژی	پوهنوال ډاکتر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار
۲۵۷	رادیولوژي ازموینې او ناروغتیاوې	پوهنوال ډاکټر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۸	التراساونډ تشخیصیه	پوهندوی ډاکټر محمد نواب کمال	کابل طبي پوهنتون
۲۵۹	رادیولوژي	پوهنوال ډاکتر سید عارف ویاړ	ننگرهار	۲۶۰	التراسونډ	ډاکټر محمد یونس سلطانی	ننگرهار
۲۶۱	تشخیصیه رادیولوژي، سینه یا صدر، دوهمه برخه	پوهنوال دوکتور نور محمد شینواری	ننگرهار	۲۶۲	تلویزیوني آزموینې	پوهندوی ډاکټر نجیب الله خلیلي	ننگرهار
۲۶۳	د التراسونډ طبي کارول	پوهنوال ډاکټر نظر محمد سلطانزی څدران					

۲۱. چشم، گوش و گلو، جلدی

۲۶۴	د پوستکي ناروغی	پوهندوی دوکتوراسدالله شینواری	ننگرهار	۲۶۵	دغوږ، پزې او ستوني ناروغی	داکتر عزیز الله فقیر	کندهار
۲۶۶	د سترگو ناروغی	پوهنمل داکترخالد یار	ننگرهار	۲۶۷	دغوږ، پزې او ستوني ناروغی	پوهنمل دوکتور میر محمد اسحاق خاورین	ننگرهار

۲۶۸	د پوستکي ناروغی	پوهنمل ډاکتر سید انور اکبري	ننگرهار	۲۶۹	د سترگې کلینیکي ناروغی	پوهنوال ډاکتر عبدالبصیر صافی	ننگرهار
۲۲. غاښونه							
۲۷۰	رهنمای کلینیکی برای داکتران دندان	داکتر سید معروف سیرت	ټول پوهنتونونه				
۲۳. انجنیري							
۲۷۱	د اوبو رسولو انجنیري	پروفیسور انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار	۲۷۲	د فاضله اوبو انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقي	ننگرهار
۲۷۳	چگونگی مصرف انرژی در ساختمان های رهایشی	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	ننگرهار	۲۷۴	تأسیسات و تجهیزات تخنیکی ساختمان	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	پولی تخنیک کابل
۲۷۵	د ساختمانونو تحلیل، لومړی برخه	پوهاند محمد اسحق رازقي	ننگرهار	۲۷۶	د ساختمانونو تحلیل، دوهمه برخه	پوهاند محمد اسحق رازقي	ننگرهار
۲۷۷	د مهندسانو د پاره ساختماني ستاتیک زده کړه	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار	۲۷۸	د جوړښتونو تحلیل، لومړی برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
۲۷۹	د جوړښتونو تحلیل، دوهمه برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	۲۸۰	۴۵ انجنیري درسي کتابونه (DVD)	ټول پوهنتونونه	ټول پوهنتونونه
۲۸۱	د موادو مقاومت	پوهنمل بهرام امیري	خوست	۲۸۲	اوسپنیز کانکریټي عناصر I	پوهنوال دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
۲۸۳	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین دوهمه برخه، لومړی ټوک	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار	۲۸۴	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین دوهمه برخه، دوهم ټوک	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
۲۸۵	د اوسپیز کانکریټي عناصرو د لومړی صنفي کار مېتودیکي لارښود	پوهندوی انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار	۲۸۶	د جامداتو میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقي	ننگرهار
۲۸۷	په سیول انجنیري کې د اټوکډ استعمال	پوهنوال میا پاچا میاخېل	ننگرهار	۲۸۸	د سرخلاصو کانالونو هایدرولیک	پوهنوال میا پاچا میاخېل	ننگرهار
۲۸۹	د لوبو لارو د هندسي عناصرو ډیزاین	پوهنیار انجنیر م. شاکر فاروقي	ننگرهار	۲۹۰	د ودانیو د تودولو تخنیک، لومړی برخه، د سون تخنیک	ډاکتر غلام فاروق میر احمدي	ننگرهار
۲۹۱	د تهداب انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقي	ننگرهار	۲۹۲	معیارهای جدید اعمار ساختمان	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	ننگرهار
۲۹۳	د انجنیري میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقي	ننگرهار	۲۹۴	عمومي تخنیکي رسم	پوهیالی فضل اکبر	ننگرهار
۲۹۵	انرژي سپما کوونکې ودانی	انجنیر اسد الله ملکزی	ننگرهار	۲۹۶	انجنیري جیودوزي (سروې)	پوهندی گل حکیم شاه سیدي	ننگرهار
۲۹۷	د ساختمان د جوړولو طریقې I	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار	۲۹۸	رهنمود موثریت حفظ انرژی در تعمیرات	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	کابل
۲۹۹	اعمار ساختمانها (اساسات، مواد و سیستم ها)	پوهندوی انجنیر امان الله فقیری	کابل پولیتخنیک	۳۰۰	د ساختمان د جوړولو طریقې II	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار
۳۰۱	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات II	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار	۳۰۲	کیډ او گرافیک	پوهنوال دیپلوم انجنیر بهاوالدین جلالي	ننگرهار
۳۰۳	د اوبو لگولو انجنیري	پوهندوی دیپلوم انجنیر اصغر غفورزی	ننگرهار	۳۰۴	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات، لومړی ټوک	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار
۳۰۵	د جوړښتونو تحلیل، درېیمه برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	۳۰۶	اساسات هندسه ترسیمی مسطح	پوهنوال سید یوسف مانووال	بلخ
۳۰۷	د پولادي عناصرو ډیزاین لومړی ټوک	محمد ذکریا محمدي	ننگرهار	۳۰۸	د پولادي عناصرو ډیزاین دوهم ټوک	محمد ذکریا محمدي	ننگرهار
۲۴. زراعت							
۳۰۹	د خاورې تخریب او د چاپېریال ککړتیا	پوهنیار محمد حنیف هاشمي	خوست	۳۱۰	د کرنیزو محصولاتو بازار موندنه	پوهاند محمد طیب	ننگرهار
۳۱۱	د کرنې تشریحي قاموس، انگلیسی -پښتو	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	۳۱۲	د کورنیو الوتونکو د روزنې بنسټونه	پوهاند میر حاتم نیازی	ننگرهار
۳۱۳	نېماتولوژي	پوهنوال حسین آرمان	ننگرهار	۳۱۴	نباتي فزیولوژي لومړی جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخېل	خوست
۳۱۵	نباتي فزیولوژي، دوهم جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخېل	خوست	۳۱۶	عمومي نباتات	پوهنوال عبدالخلیل افغاني	شیخ زاید
۲۵. وترنري							
۳۱۷	وترنري عمومي پتالوژي	پوهندوی محمد طاهر کاکړ	ننگرهار	۳۱۸	حیواني تغذیه، لومړی برخه	پوهندوی روزي خان صادق	ننگرهار
۳۱۹	حیواني تغذیه، دوهمه برخه	پوهندوی روزي خان صادق	ننگرهار	۳۲۰	وترنري داخله	پوهنوال پیر محمد ستانکزی	ننگرهار
۳۲۱	وترنري فارمکولوژي دوهمه برخه	پوهنوال محمد بایر درمل	ننگرهار	۳۲۲	د ژوبو فزیولوژي	پوهاند غنچه گل حبیب صافی	ننگرهار
۲۶. ژورنالېزم							
۳۲۳	د راډیویي خپرونو تولید	پوهنوال دوکتور ماستر واحدي	خوست	۳۲۴	د ټلویزیوني خپرونو تولید	پوهنوال ډاکتر ماستر واحدي	خوست
۳۲۵	اطلاعاتو ته د لاسرسي لارې چارې	دانش کروخېل	ننگرهار				
۲۷. اقتصاد او مدیریت							
۳۲۶	د اقتصادي پرمختیا تیوري	پوهاند محمد بشیر دوبال	ننگرهار	۳۲۷	د اقتصاد او تجارت اصطلاحات (انگلیسي - پښتو تشریحي قاموس)	پوهنیار عبدالله عادل او امان الله ورین	ننگرهار
۳۲۸	تیوری و سیاست بودجه عامه	پوهنوال داکتر سید محمد ټینگار	کابل	۳۲۹	د پروژې مدیریت په عمل کې	محمد داود علم او یو اف. گهل	ننگرهار
۳۳۰	د پروژې تحلیل او مدیریت	پوهاند محمد بشیر دوبال	ننگرهار	۳۳۱	مبادی اقتصاد زراعتی	پوهاند ولی محمد فائز	بلخ
۳۳۲	صنعتي اقتصاد	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	۳۳۳	د اقتصاد د علم اساسات	شېر خان حساس	ننگرهار

۳۳۴	مرکزي بانک او پرمختللي پولي سياستونه	پوهاند دوکتور عبدالقيوم عارف	خوست	۳۳۵	اقتصادي جيولوجي (کانپوهنه-فلزي کانونه)	پوهاند دوکتور شريف الله سهاک	ننگرهار
۳۳٦	عامه اقتصاد	پوهندوی ريحان الله رحيمي	ننگرهار	۳۳۷	احصاييه	پوهاند محمد بشير دوديال	ننگرهار
۳۳۸	د احصايې اساسات	پوهنيارمحمد اغا ضياء	کندهار	۳۳۹	د اقتصاد تشريحي قاموس انکليسي - پښتو	پوهاند محمد بشير دوديال	ننگرهار

۲۸. عامه اداره او پاليسي

۳۴۰	د څېړنې مېتودولوژي	پوهنيار نثار احمد مصلح	ننگرهار	۳۴۱	رهبري له تيوري تر عمله	پوهنمل محمد عرفان قريشي	ننگرهار
۳۴۲	د سازماني اړيکو مديريت	پوهاند محمد بشير دوديال	ننگرهار	۳۴۳	نړيوالې تړونې	احسان الله آرينزی	ننگرهار
۳۴۴	د بشري سرچينو مديريت	پوهنمل منصور فقيرزی	ننگرهار	۳۴۵	پېداګوژي	پوهنيار راز محمد فيضي	ننگرهار
۳۴٦	گروه‌های اجتماعی بسته (مطالعه جامعه شناختی سکتها)	داکتر احمد سير مهجور	کابل پوهنتون	۳۴۷	اساسات تريننگ و انکشاف	رنځوروال عجب گل مومند	شيخ زايد
۳۴۸	د بشري سرچينو د مديريت اړين توکي	پوهندوی نعيم جان سروري	ننگرهار	۳۴۹	د رهبرۍ اصول	پوهنمل محمد عرغان قريشي	ننگرهار
۳۵۰	د ادارې اومديريت تشريحي قاموس انگليسي - پښتو	پوهاند محمد بشير دوديال	ننگرهار				

۲۹. چاپېريال او جغرافيه

۳۵۱	د نفوسو جغرافيه	پوهنوال لطف الله صافي	ننگرهار	۳۵۲	حياتي جغرافيه	پوهاند لطف الله صافي	ننگرهار
۳۵۳	جيومورفولوژي	پوهنوال عزت الله	ننگرهار	۳۵۴	اقليم پوهنه	پوهاند عزت الله سايل	ننگرهار
۳۵۵	کارتو گرافی با اساسات توپوگرافی	پوهنوال دوکتور محمد طاهر عنايت	ننگرهار	۳۵٦	د متيورولوژي مبادي	پوهنوال عبدالغياث صافي	ننگرهار
۳۵۷	د ژوند چاپېريال	پوهاند عارف الله مندوزی	ننگرهار	۳۵۸	گرم شدن کره زمين	محمد نعيم نسين	بلخ

۳۰. رياضيات

۳۵۹	عمومي رياضيات	پوهنوال گل محمد جنت زی	خوست	۳٦۰	د عالي رياضياتو عمومي کورس	پوهندوی محب الرحمن جنتي	ننگرهار
۳٦۱	عالي کلکولس I، 434 A رياضي	پوهندوی حميدالله يار	ننگرهار	۳٦۲	عالي کلکولس II	پوهندوی نظر محمد	ننگرهار
۳٦۳	الجبر او د عددونو تيوري، لومړی برخه	سطان احمد نيازمن	ننگرهار	۳٦۴	خطي الجبر	داکتر عبدالله مهمند	ننگرهار
۳٦۵	کلکولس او تحليلي هندسه I	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار	۳٦٦	کلکولس او تحليلي هندسه II	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار
۳٦۷	الجبر او د عددونو تيوري، دوهمه برخه	سلطان احمد نيازمن	ننگرهار	۳٦۸	د رياضي په هکله خبرې اترې	سلطان احمد نيازمن	ننگرهار
۳٦۹	الجبر معاصر	داکتر عبدالله مهمند	بلخ	۳۷۰	معاصر الجبر	ډاکتر عبدالله مهمند	خوست
۳۷۱	سېټونه او هر څه د هغوی په هکله	ليف بوکوفسکي/ سلطان احمد نيازمن	ننگرهار	۳۷۲	د رياضي منطق	سطان احمد نيازمن	ننگرهار
۳۷۳	د انجنيري اساسي رياضي I	پوهندوی عبدالغفور نيازی	ننگرهار	۳۷۴	د انجنيري اساسي رياضي II	پوهندوی عبدالغفور نيازی	ننگرهار
۳۷۵	د تحليلي هندسې I	سيد شير اقا سيدي	ننگرهار	۳۷٦	اناليزرياضی I	سيد يوسف ماڼووال	بلخ
۳۷۷	عالي رياضي د تسريحي مثالونو سره	ډاکتر عبدالله وردک	شيخ زايد				

۳۱. ژبه او ادبيات

۳۷۸	آلماني د افغانانو لپاره	ډاکتر يحيی وردک	ببلابېل	۳۷۹	آلمانی برای افغانها به دری	ډاکتر يحيی وردک	ببلابېل
۳۸۰	د جرمني ژبې آسانه زده‌کړه، له اساساتو نه تر ادبياتو پورې	ډاکتر اکرم ملکزی	ننگرهار	۳۸۱	د افغانستان د پوهنتونونو د درسي کتابونو چاپول (پښتو)	ډاکتر يحيی وردک	ټولو ته
۳۸۲	د افغانستان د پوهنتونونو د درسي کتابونو چاپول (انگليسي)	ډاکتر يحيی وردک	ټولو ته	۳۸۳	د کتاب خپرولو لنډ لارښود	ډاکتر يحيی وردک	ټولو ته
۳۸۴	د کتاب خپرولو لنډ لارښود (انگليسي)	ډاکتر يحيی وردک	ټولو ته	۳۸۵	جرمني - پښتو ستر قاموس	ډاکتر اکرم ملکزی	شيخ زايد پوهنتون
۳۸٦	پښتو - انگليسي قاموس	رحيمزی	ننگرهار				

۳۲. کمپيوټرساينس

۲۸۷	د ډېټابېس اساسات	زړگی حبيبي	ننگرهار	۳۸۸	د کمپيوټرو جال	سلطان احمد نيازمن	ننگرهار
۳۸۹	د کمپيوټر جوړښت او اسمبلي ژبه	پوهندوی بادام نيازی	ننگرهار				

مرسته کوونکي: Afghanistan-Schulen (x4)، Michael Klett(x٦)، DAUG (x7)، Konrad Adenauer Stiftung (x ٨) ، DAAD (x٩٦)، Kinderhilfe-Afghanistan (x٢٥٠)،

سرکنسولگری جمهوری فدرال آلمان مزارشريف (x١) inasys، humedica(x٢)، ، SlovakAid (x٢)، (x٢)، صافی بنسټ (x١) او افغانيک

تطبيق کوونکی: ډاکټر يحيی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، څلورمه کارته، کابل افغانستان، مې ۲۰۲۳

موبايل:0780232310، ۰۷۰۷۳۲۰۸۴۴، ايميل: www.mohe.gov.af, info@ecampus-afghanistan.org

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of Afghan universities .
For this reason, we have published 389 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism, and Agriculture from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic, and Kabul Medical universities since 2010. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org .

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states: *"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit ".*
We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 250 medical and non-medical textbooks so far.

I would like to cordially thank Chancellor of Universities, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project .

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally, I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Fahim Habibi, Gul Agha Ahmadi and Hewad Safi in the office for publishing and distributing the textbooks.

Dr. Yahya Wardak
Ministry of Higher Education, Kabul, Afghanistan, June, 2023
Mobile: 0706320844, 0780232310
Email: info@ecampus-afghanistan.org

Book Name	Mechanics, Oscillations & Relativity
Translator	Assist Prof Ali Jan Adil
Publisher	Nangarhar University, Faculty of Medicine
Website	www.nu.edu.af
Published	2023, First Edition
Copies	1000
Serial No	378
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning translator and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Karte – 4, Kabul
Office 0780232310, 0706320844
Email info@ecampus-afghanistan.org

Printed in Afghanistan 2023

ISBN 978-9936-622-59-3