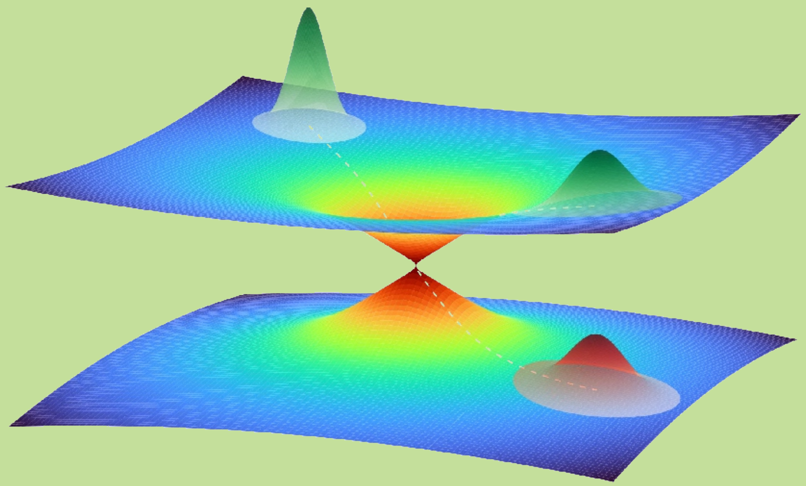
ساینس پوهنځی

Faculty of Science

Afghanic

کوانتم میخانیک



پوهنیار اکرام الله وقار

۱۴۰۱

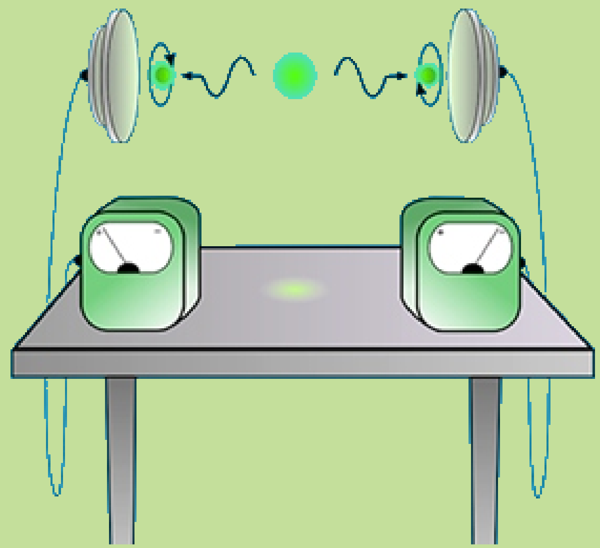
پلورل منع دی

کوانتم میخانیک

پوهنیار اکرام الله وقار

Teach Assist Ikramullah Waqar

Quantum Mechanics



Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

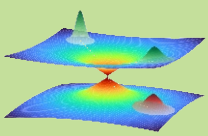
ISBN 978-9936-633-95-7

Not for Sale

2022

کوانتم میخانیک

پوهنیار اکرام الله وقار



Faculty of Science
ساینس پوهنځی

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Pashto PDF
2022

افغانیک
Afghanic

Quantum Mechanics

Teach Assist Ikramullah Waqar

Download:
www.ecampus-afghanistan.org

اقرأ باسم ربك الذي خلق

پوهنيار اکرام الله وقار

ژباړن: پوهنيار اکرام الله وقار

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ايف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:

د کتاب نوم	کوانتم میخانیک
ژباړن	پوهنیار اکرام الله وقار
خپرندوی	ننگرهار پوهنتون، ساینس پوهنځی
وېب پاڼه	www.nu.edu.af
د چاپ کال	۱۴۰۱، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۳۶۱
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې د افغانیک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسوولیت د کتاب په ژباړن او اړوند پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسوولیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کارته ۴، کابل
موبایل ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴
ایمېل info@ecampus-afghanistan.org

ای اس بي ان ۹۷۸-۹۹۳۶-۶۳۳-۹۵-۷

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمېر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاسرسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو نه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

موږ تر اوسه پورې د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل پوهنتون، د کابل طبي پوهنتون او د کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۳٦٥ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالېزم او کرهنې پوهنځیو لپاره چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړوندو پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او موسساتو ته په وړیا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.ecampus-afghanistan.org ویب پاڼې څخه ډانلوډولی شئ.

دا کړنې په داسې حال کې ترسره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده، چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي، د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې نه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دغو امکاناتو پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاسرسی نه شي پیدا کولای."

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هېواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچرنوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره اړینه ده چې د افغانستان پوهنتونونو لپاره هر کال لږ تر لږه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو درنو استادانو نه هيله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه وليکي، ويې ژباړي او يا هم خپل پخواني ليکل شوي کتابونه، لکچرنوټونه او چپټرونه ايډېټ او د چاپ لپاره تيار کړي، زموږ په واک کې يې راکړي چې په ښه کيفيت چاپ او وروسته يې د اړوند پوهنځيو، استادانو او محصلينو ته په واک کې ورکړو. همدارنګه د يادو ټکو په اړه خپل وړانديزونه او نظريات له موږ سره شريک کړي، چې په ګډه په دې برخه کې اغېزمن ګامونه پورته کړو.

د ليکوالانو او خپرونکو له خوا پوره زيار ايستل شوی، چې د کتابونو محتويات د نړيوالو علمي معيارونو پر اساس برابر شي، خو بيا هم کېدای شي د کتاب په محتوا کې ځينې تېروتنې او ستونزې وليدل شي، نو له درنو لوستونکو نه هيله لرو چې خپل نظريات او نيوکې ليکوال او يا موږ ته په ليکلې بڼه راولېږي، چې په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې او د هغې له مشر ډاکتر ايروس نه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت يې ورکړی دی. دوی تر دې مهاله د ننګرهار پوهنتون د ۲۳۰ عنوانه طبي او غير طبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه اخيستی دی.

د پوهنتونونو رييسانو، د پوهنځيو رييسانو او استادانو نه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ يې هڅولې او مرسته يې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له ليکوال نه ډېر منندوی يم او ستاينه يې کوم، چې خپل د کلونو - کلونو زيار يې په وړيا توګه ګرانو محصلينو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر يو؛ ښاغلي حکمت الله عزيز او ښاغلي فهيم حبيبي نه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر يحيی وردک

د لوړو زده‌کړو وزارت، کابل، مې، ۲۰۲۲

د دفتر ټيليفون: ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ايميل: info@ecampus-afghanistan.org

د لاربنود استاد تقریظ

د ښاغلي پوهيالي اکرام الله وقار د پوهنيار علمي رتبې ته د لوړيدو په موخه د (کوانتم ميخانيک) ژباړه چې له خارجي ژبې (E) څخه ملي ژبې (پښتو) ته ترسره شوې په پوره غور او دقت سره سر تر پايه ولوست، په دې برخه کې خپل نظر داسې ليکم:

دا کتاب د Quantum Mechanics د هند د پونا پوهنتون د فزيک څانګې د څلورم سمستر د يو درسي کتاب چې ليکوالان يې S.D.Aghav,B.M.Laware,Dr.P.S.Tambade,V.K.Dhas دي، او په 2010 کال کې چاپ شوی، په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی. نوموړی اثر په روانه او ساده پښتو ژبه ليکل شوی دی، د جملو او کليمو په کارونه او له هغو څخه د مانا اخيستنې په برخه کې کومه غوټه نه لري. په ښکلي فصيحه بڼه ترتيب شوی دی، شکلونه يې واضح او په مناسبو ځايونو کې راوړل شوي او معادلې يې ښې برابرې ليکل شوي دي چې لوستونکي پرې ښه پوهيدلی شي،ژباړن په ژباړه کې له پوره امانتداری څخه کار اخيستی دی. دا کتاب د ساينس پوهنځي د فزيک څانګې د کوانټ ميخانيک له مفرداتو سره 85% سمون لري، دا کتاب له يوې خوا د فزيک ديپارتمنت په درسي موادو غني کولو کې کومک کوي او له بلې خوا به د فزيک مينوالو ته په پښتو ملي ژبه کې يو ښه او معتبر کتاب پيدا شي. د کتاب په ليکلو کې د بهرنيو اصطلاحاتو د ليکنې پرځای په پښتو ژبه کې د هغې له معادل څخه ګټه اخيستل شوې ، چې زده کړيالانو او د دې څانګې نورو مينه والو ته د وخت او شرايطو مطابق اړونده تازه معلومات ترلاسه کوي. زه د لاربنود استاد په توګه د نوموړي د غه ژباړه د پوهيالي علمي رتبې څخه د پوهنيار علمي رتبې ته د لوړيدو لپاره له نورو شرايطو په پوره کولو سره کافي بولم او هيله مند يم چې نوموړی د دې ژباړې له ټولو امتيازياتو څخه د خپلې علمي ترفيع لپاره ګټه واخلي. په پای کې محترم اکرام الله وقار ته د الله(ج) له درباره د نورو برياوو هيله کوم.

په درنښت

پوهنوال ديپلوم انجينر شيرزمان حميدي

د ښوونې او روزنې د پوهنځي د فزيک څانګې امر

دژبې په اړه یې تقریظ

دساینس پوهنځي محترم ریاست ته !

دښاغلي پوهیالي اکرام الله وقاردپوهنیارعلمي رتبې ته دلوړیدوپه موخه علمي اثر(کوانتم میخانیک) مې ترپایه ولوست، دژبې فصاحت اولیکوالۍ په اړه یې خپل نظرلاندې راوړم

نوموړی اثرپه روانه اومعیاري پښتوژبه لیکل شوی دی دجملواوکلیموپه کارونه اوله هغوڅخه دماناااخیستنې په برخه کې کومه غوټه نه لري. په ښکلې فصیحه بڼه ترتیب شوی دی، په دې اړه یې زه دامښودبشپړبولم. هیله ده دنورو اجراتولپاره یې ورکړنې ترسره کړئ. قلم دې تاندوي اودنوروبریااوغوښتونکی یې یم.

پوهنوال محمدابراهیم همکار

دښوونې اوروزنې پوهنځي دپښتوڅانګې استاد

پیل خبرې

دغه کوانتم میخانیک کتاب دپوناپوهنتون لسانس دورې دفزیک څانګې دڅلورم سمستر2010 کال له نوي مفرداتو سره برابر لیکل شوی دی، دمفرداتو سره سم هره موضوع ښه په تفصیل، دمثالونو سره څیړل شوې ده. په مضمون دښه پوهیدو لپاره دهرې موضوع په پای کې یو څه حل شوې پوښتنې شته ، همدارنګه یو څه غیرحل شوې پوښتنې دهرې موضوع په پای کې هم شته دی.

هڅه شویده، چې ددغه مضمون موضوع ګانې ساده اوڅرګندې وي، فعالیت یې داسې جوړشوی دی چې هره اساسي موضوع په ریاضیکي ساده طریقه تشریح شي. په پوره احتیاط سره دکتاب دغلطیو اودچاپ دغلطیو مخنیوی شوی دی، خوبیاهم دا امکان لري چې دکتاب غلطي اویادچاپ ځینې غلطي شاید واقع شوې وي. که داسې کومه تیروتنه موترسترګوشوه زمونږخبرول به ستاسې لوی احسان وي.

مونږډیرزیات مننداوې یو، دهریوشري ډاینش باهي فوریه، شري جګنش فوریه، شري ایم- پ موند اوماسترنیلش ډیشموخ، اشوک بودکي، سجن شیند، نیکینګ محسن ، کیرن والینکر نیرالي پراکشان څخه چې په وخت یې دکتاب په کمپوز اوچاپ کې له مونږسره همکاري کړې ده.

ستاسوپشنهادونه به دکتاب دکیفیت دلوړاوي په خاطرپه ډیره خوشحالۍ قبلولای شي.

لیکوالان

2010 نومبر

مفردات

1. دکوانتم میخانیک سرچینه

۱. **تاریخي پس منظر**

(a) دتور جسم تشعشع ته کتنه

(b) فوتو الکتریک اثرته کتنه

۲. ذره وي موجي دوګانګي

۳. مادي موجونه

– دډي بروګلي فرضیې

– ډیوژن او جرمر تجربه

۴. دموجي پاکټ مفهوم، فازسرعت، ګروپ سرعت او ددوې ترمنځ رابطې

۵. تجربوي تصور سره دهایزنبرګ دعدم قطعیت اصل

– دالکترون دتفرق تجربه، دعدم قطعیت داصل مختلف شکلونه.

مسایل

2. دشروډینګر معادله

۱. موجي تابع او دهغې فزیکي تعبیر

۲. وخت پورې تړلې دشروډینګر معادله.

۳. وخت څخه مستقله دشروډینګر معادله (دثابت حالت معادله).

۴. دموجي تابع اړتیاوې.

۵. داحتمالي جریان کثافت، دمتمادیت معادله او دهغې فزیکي اهمیت.

۶. په کوانتم میخانیک دیو اوپراتور تعریف.

– دایګن تابع او دایګن قیمتونه.

۷. متوسط قیمت– دایرینفسټ قضیه

مسایل

3. دشرودینگرد ثابت حالت دمعادلې تطبیقات

۱. ازاده ذره.
۲. په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې ذره (یوبعدي).
۳. په درې بعدي کلک بکس کې ذره.
۴. سټېپ پوتنشیل.
۵. پوتنشیلي مانع. (کیفي مباحثه).
دمانع څخه تیریدنه اوتونلنګ اثر
۶. هارمونیک اسیلاتور (یوبعدي)، ددې مربوط اصل.
مسایل

4. کروي متناظرپوتنشیلونه

۱. په کروي قطبي مختصاتو کې دشرودینګرمعادله.
۲. کلک دوران کوونکی (ازاد اوثابت محور)
۳. هایدروجن اتوم: دتړلي حالت دانرژي په شعاعي اوزاویوي برخوباندې کیفي مباحثه
، دانرژي حالت تابع ګانې، کوانټم نمبرونه n, l, m_l, m_s – ډیجینرسي.
مسایل

5. په کوانټم میخانیک کې اوپراتورونه

۱. هرمیشن اوپراتور.
۲. دموقیعت ،مومنټم اوپراتور، دزاویوي مومنټم اوپراتور، اودکلي انرژي اوپراتور (هملتون).
۳. کموټیټورقوسونه، دایګن همزمان تابع ګانې.
۴. کموټیټورالجبره.
۵. دموقیعت،مومنټم اوزاویوي مومنټم اوپراتورپه کارونې کموټیټورقوسونه.
۶. دزاویوي مومنټم ټیټیدونکي اوجګیدونکي اوپراتورونه.
۷. دجوړې مفهوم، دجوړې اوپراتوراودهغې دایګن قیمتونه.
مسایل

محتوا یا منځپانګه

دکوانټم میخانیک سرچینه

پېژندنه

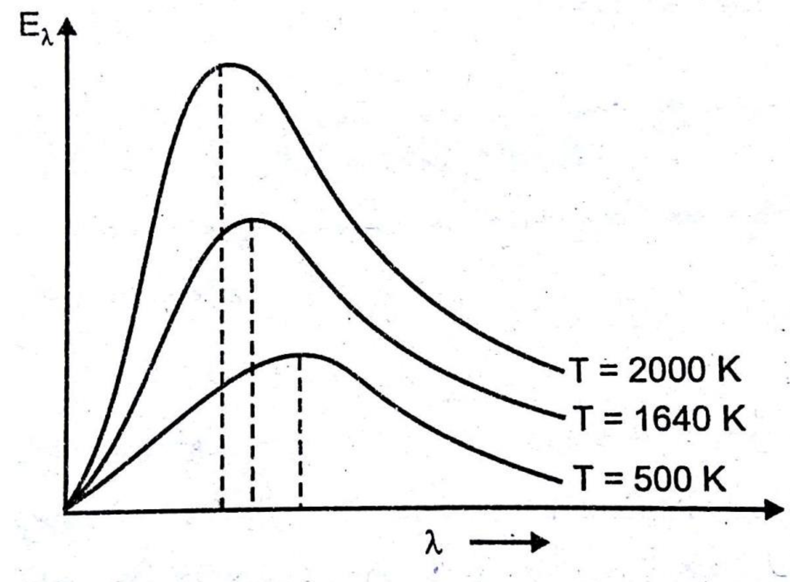
دترموډینامیک قوانین،برق اومقناطیس قوانین په کلاسیک فزیک کې دټولوپېښولپاره اساس تیاروي. کلاسیک فزیک په کامیابه توګه دهغه شیانوحرکت تشریح کوي، چې دالاتوپه کومک دلیدو وړ وي.کله چې شیان لکه الکترون ددغه الاتوپه واسطه دلیدو وړنه وي،په هغه باندې کلاسیکي مفهوم نه تطبیقیږي.دنولسمې پیړۍپه پای کې، ډیرې تجربوي نتیجې په دې ونه توانیدې، چې کلاسیکي نظریات تشریح کړي.دمثال په ډول ریلی–جینز قانون او دوین دتورجسم دتشعشع قانون دتشعشع دانرژۍ تجربوي توزیع تاییدنشوکړای.ریلی–جینزقانون د اوږدو موجونولپاره کارکوي مګرد لنډوموجونولپاره ناکام دی.دوین قانون دلنډوموجونولپاره دتجربوي نتیجو سره ډیرجوړدی ، مګر داوږدوموجونولپاره ناکام دی. په(1901) کې ماکس پلانک یوکوانټم مفهوم تعریف کړاوپه نتیجه کې یې داپریکړه وکړه، چې تشعشع په پرله پسې توګه نه خپریږي مګردانرژې په بیلابیلوپاکټونوکې، چې دهریوانرژي $h.v$ سره مساوي ده،چیرته چې v فریکونسي اوhدپلانک ثابت دی.دغه پاکټونوته فوتونونه یا کوانټا ویل کیږي.ددغه مفهوم په کارونې سره،پلانک دتورجسم دتشعشع دانرژي صحیح توزیع لاسته راوړه.لږ وروسته انشټین دغه مفهوم دتودوخې په ټیټه درجه کې دجامداتومخصوصه تودوخې تشریح اوهمدارنګه دفوتوالکتریک اثرتشریح لپاره وکاروو، دغه تیوري ته کوانټم تیوري وایې.

1-1 تاریخي پس منظر

راځئ! چې په بعضې تیوریوباندې لنډه کتنه وکړوکوم چې دکوانټم میخانیک اساس ته رهنمایي کوي.

(a) دتورجسم تشعشع ته کتنه:

دداسې سطحې لرونکی جسم کوم، چې وارده تشعشع ټوله جذبولای شي دکامل تورجسم په نوم یادیږي.ددې دجذب ضریب یودی همدارنګه داتنشارضریب یې هم یودی. یوتورجسم تشعشع هغه وخت خپروي، کله چې چاپیریال سره تودوخیزه اړیکه کې شي، تشعشع ټول طول موجونه $(0-\infty)$ پورې په برکې لري. دانرژي کثافت E_λ دتودوخې په مختلفودرجوکې دڅپې داوږدوالي په مقابل کې په 1.1شکل کې ښودل شوی دی.



1.1 شکل: دتورجسم دتوزیع قانون

دترموډینامیک عمومي بحثونو څخه ،کرشوف دا وښودله چې دتورجسم دتشعشع توزیع دتورجسم دماهیت څخه مستقله ده (مثلآدتورجسم ددیوال مواد) اویوازې تودوخې درجې **T** پورې تړلې ده.

دتورجسم په دیوال باندې دواردشوي فشارداستعمال نظریه،ستیفن اوبولتزمن په (1884) کې وښوده، چې دټولې انرژۍ کثافت دتورجسم دتودوخې درجې څلورم طاقت سره متناسب دی، یعنې $E \propto T^4$. د ستیفن دتورجسم دتشعشع قانون داسې ورکړشوی دی!

$$E = \sigma T^4$$

چیرته چې σ دستیفن ثابت دی اوقیمت یې $5{,}67.10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2k^4}}$ دی. لاسته راغلی قانون په تجربوي توګه باوري ، اوقناعت ورکوونکی دی، همدارازدغه قانون، جدا جدا څپوداوږدوالي په اړه څه نه وایي.

وین په (1893) کې دتغیرمکان قانون کشف کړ ،کوم چې!

$$\lambda.T = Constant \qquad (1)$$

$$ET^{-5} = Constant \qquad (2)$$

چیرته چې λ دڅپې اوږدوالی،T تودوخې او E دتشعشع شوې انرژي سره سمون لري. ددواړو قوانینوترکیب اودماکسویل دتوزیع په استعمال ،وین لاندې قانون لاسته راوړ:

$$E_{\lambda}.d\lambda = \frac{A}{\lambda^5} e^{-\frac{B}{\lambda t}} d\lambda \qquad (1.1)$$

چیرته چې A او B ثابتونه دي. دانښکاره شوه چې دغه قانون لنډوطول موجونوپه ساحه کې سم دی.

په (1900) کې، ریلی اوجینزدانرژي دتوزیع مسئلې ته په مختلفه توګه ورسیدل. دوی لاندې قانون لاسته راوړ!

$$E_{\lambda}.d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \qquad (1.2)$$

چیرته چې K دبولتزمن ثابت دی. دغه فورمول اوږدوطول موجونو په ساحه کې دتجربوي نتیجوسره سمون لري مګردلنډوطول موجونو په ساحه کې باالکل ناکام دی.

نوځکه په کلاسیکي نظریوکې دتشعشع په اړه دیوسم ځانګړي فورمول دلاسته راوړلوټولې هڅې دڅپوداوږدوالي په ټول رنج کې په نا امیده توګه ناکامې شولې.

په (1901) کې پلانک دتورجسم تشعشع لپاره یونوی فورمول پیشنهادکړ. ددې مطابق، دتورجسم په سطحه کې هراهتزازکوونکی په پرله پسې توګه انرژي نه خپروي، مګردانرژي په خاصو پاکټو کې یې خپروي.

$$E = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \ldots$$

دلته $\varepsilon = h\nu$ سره دی او **h** دپلانک ثابت دی، چې قیمت یې $6{,}625.10^{-34}\,\text{js}$ دی. دې ته دانرژي کوانټایزیشن وایي. پلانک په ډیرې کامیابۍ سره دتورجسم تشعشع تشریح کړه. هغه دانرژي دکثافت لپاره لاندې فورمول لاسته راوړ!

$$E_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} d\lambda \tag{1.3}$$

داپلانک دتشعشع فورمول دی. دادتجربوي نتیجوسره دقیق سمون لري،دادکوچنیوطول موجونو لپاره مشاهده شوی دی. دپلانک قانون د لنډوطول موجونولپاره وین فورمول او د اوږدوطول موجونولپاره دریلی اوجینزفورمول معرفي کوي.

(b) **دفوتوالکتریک اثرته کتنه:**

دا دلینارډ په واسطه مشاهده شوی دی کله چې ماورای بنفش نورپه یوفلزي سطحه لکه الومنیم وارد شي نودهغې څخه الکترونونه شړي.کله چې په فلزي سطحه نورواردشي دهغې څخه دالکترونونو شړنه دفوتوالکتریک اثرپه نوم یادیږي، شړل شوي الکترونونه دفوتوالکترونوپه نوم یادیږي.

داپه تجربوي توګه داسې مشاهده شوې ده چې!

I. کله چې دوارده تشعشع فریکونسي تغییرکوي ،دفوتوالکترونوانرژي هم تغیرکوي.
II. دفوتوالکترونوانرژي دوارده تشعشع دشدت څخه مستقله ده.
III. الکترونونه دفلزي سطحې څخه نه خپرېږي کله چې دوارده تشعشع فریکونسي دټاکلې فریکونسۍ څخه کمه وي. داټيټه فریکونسي ده، چې الکترونونه پکې نه خپرېږي دې ته شروع کیدونکي فریکونسي (threshold frequency) وايي.

دا دفوتوالکتریک اثردرې غټ خصوصیات دي چې دتشعشع دکلاسیکي موجي تیورۍ په اساس نه تشریح کیږي. دنوردموجي کلاسیکي تیورۍ له مخې:

١. یوڅوک داسې توقع کولای شي چې دوارده تشعشع شدت زیاتیږي،دفوتوالکترونوانرژي زیاتیږي او ددوی شمیرنه زیاتیږي.
٢. فوتوالکتریک اثربه دهرې فریکونسي لپاره واقع کیږي، چې دالکترونودشړلولپاره دنور پریمانه شدت په سطحه واردشي.
٣. که دکمزورۍ شدت نورپه فلزي سطحه واردشي،دلته به ډیروخت وي، چې د الکترونو دشړلولپاره پریمانه نورجذب شي(مثلآ دلته به دالکترونوپه شړنه دوخت وروسته پاتې کېدل وي) اګرچې،دا مشاهده شوې ده چې فوتوالکتریک اثرسمدلاسه دی اودلته دوخت وروسته والی نه دی مشاهده شوی.

علاوه دلینارډتجربوي مشاهدې دقناعت کوونکې تشریح جوړولوڅخه، انشتین په (1905) کې یوه نوی انقلابي تیوري وړاندې کړه. ددې مطابق،نور(الکترومقناطیسي تشعشع) کوم چې په فلزي سطحه لګیږي دانرژي دبنډلونو(کوانټا) څخه عبارت دی کوم چې لږوروسته دې ته راځي، چې فوتون ورته وویل شي.هغه فرض کړه، چې دبنډل یافوتونودانرژي ثابت **E** دهغه دفریکونسي سره ددې رابطې په واسطه تړلی دی.

$$E = h\nu$$

چیرته چې **h** دپلانک ثابت دی.

کله چې داډول فوتون په سطحه ولګیږي،دهغه ټوله انرژي دالکترون په واسطه جذبیږي. دانرژۍ یوه برخه دالکترون دشړلولپاره اوپاتې برخه یې الکترون ته دحرکي انرژي په شکل ورکول کیږي. دشړل شوي الکترون حرکي انرژي په دې پیداکوو!

$$K_E = h\nu - w = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.4}$$

چیرته چې **w** دکارتابع ده اودادفلزي سطحې څخه دالکترون دشړلولپاره کارول کیږي . دانشتین د فوتونوپه قضیوولاړه نظري پیشګویي ټولوتجربوي نتیجوته قناعت ورکړ.په(1921) کې انشتین دفوتوالکتریک اثردنظري پیشګویې لپاره نوبل جایزې ته ورسید .

1.1مثال: د 290nm نانومترپه طول موج تشعشع په داسې یوفلزي سطحه لګیږي، دکوم لپاره چې کاري تابع 4ev ده. کوم پوتنشیل ته ضرورت دی! چې ډیره انرژي لرونکي فوتوالکترونونه ودروي.

حل: دفوتون انرژي عبارت ده له

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = \frac{(6,64.10^{-34}\,\mathrm{j.s})(3.10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})}{2,9.10^{-7}\,\mathrm{m}} = 6,89.10^{-19}\,\mathrm{j}$$

$$E = \frac{6,89.10^{-19}\,\mathrm{j}}{1,6.10^{-19}\,\mathrm{ev}} = 4,28\mathrm{ev}$$

$$\mathrm{Max.K_E} = \mathrm{E} - \mathrm{W} = 4,28 - 4,00 = 0,28\mathrm{ev}$$

په نتیجه کې دپوتنشیل تفاوت 0,28ev دی.

1.2 موجي– ذره وي دوګانګي

دنورماهیت دنیوټن ترزماني پورې مبهم اوپیچلی وو.نیوټن فرض کړه، چې نورد ډیرو کوچنیوذروڅخه عبارت دی، چې دکورپسل په نوم یادیږي او دروښانه جسمونوله خوا خپریږي. ددې تیوري په کارونې سره هغه دانعکاس اوانکسارپیښې تشریح کړې،مګرداتیوري دنوردتداخل پیښې په تشریح کې ناکامه شوه.ځکه نو هیوګینز،یانګ،فریزنل دنورموجي نظریه جوړه کړه، دموجي نظریې له مخې،نوردموجونو په شکل په فرضي محیط کې چې ایترورته وایي، خپریږي اوداسې فرض شوې ده چې ایتر به دخلاپه شمول په هرځای کې موجودوي.موجي تیوري نه یوازې داچې دانعکاس اوانکسارپیښې تشریح کولای شي، بلکې دنورقطبیت اوتفرق هم تشریح کولای شي.په (1900) کې ماکسویل وښوده، چې نوري موجونه په ماهیت کې الکترومقناطیسي موجونه دي اوددې دخپریدولپاره محیط ضروري نه دی. لږوروسته، هرتزپه لابراتوارکې الکترومقناطیسي موجونه تولیدکړل اودنورموجي طبعیت په نړۍ کې قبول شو. په(1887)کې، هال واچز(Hallwachs) دفوتوالکتریک اثرکشف کړ،مګرهغه دموجي تیوري په اساس تشریح نشوکړای.په ترتیب سره دفوتوالکتریک اثرحادثې دتشریح کولولپاره انشتین په یوشمیرذروباندې دنورماهیت واخیست. هغه فرض کړه ،چې دنورانرژي دانرژۍ دپاکټونو $h\nu$ څخه عبارت ده،چې ν دنورفریکونسي ده. په (1923) کې،کامپتون دالکترومقناطیسي څپوذروي طبعیت دالکترون په واسطه دایکس وړانګو د شیندلودتشریح کولولپاره استعمال کړ. دغه اثرته دکامپتون اثرویل کیږي.

دلته دا پوښتنه پیداکیږي،چې دنورصحیح ماهیت څه شی دی؟ الکترومقناطیسي څپې په بعضې عملیوکې موجي اوپه بعضې عملیوکې ذروي ماهیت لري، دواړه ماهیتونه په یوه عملیه کې په یووخت کې نه مشاهده کیږي. هغه عملیې په کوم کې، چې دنورپه واسطه وهل شوې لاره په پام کې نیول کیږي، دنورموجي ماهیت پرې تطبیقیږي ،مثلاًتداخل،تفرق... اوهغه عملیې په کوم کې، چې نوردموادو د ذراتوسره متقابله اغېزه کوي، دنورذروي ماهیت پرې تطبیقیږي ،مثلاًفوتوالکتریک اثر،کامپتون اثر ...

نوځکه د نورپورې ترلی دوه ګونی ماهیت (ذره وي اوموجي) منځته راغی.

1.3 مادي موجونه

(A) دډي بروګلي قضیې

(1924) په پای کې داثرګنده شوه، چې نوردوه ګونی ماهیت لري. تداخل،تفرق،قطبیت اوداسې نورې حادثې دنورموجي ماهیت په واسطه تشریح کیږي، فوتوالکتریک اثر،کامپتون اثراوداسې نورې حادثې دنورذروي ماهیت په واسطه تشریح کیږي. په(1924)کې،لیوس ډی بروګلي یوپیشنهادوړاندې کړ،چې ماده ،لکه تشعشع ، دوه ګونی ماهیت لري،مثلاًهغه ماده، چې دخاصو ذراتوڅخه جوړه وي،اتومونه ،پروتونونه،الکترونونه اوداسې نورممکن دمناسبوشرایطولاندې موجي خصوصیات وښایي. دهغه بحث داسې وو، که چیرې الکترومقناطیسي څپې بعضې وخت کې دڅپې په شکل اوبعضې وخت دذرې په شکل عمل وکړي،نوشیان لکه الکترون،پروتون اوداسې نور، کله چې دحرکت په حال کې وي موجي خواص دځانه ښودلای شي.

هغه لاندې بحثونه جوړکړل:

١. طبعیت دتناظرسره مینه لري.
٢. بناپردې، دوه بنیادي کمیتونه ماده اوانرژي به خامخاددوې دخواصوله مخې دوه اړخیز تناظرلري.
٣. دځلنده انرژۍ په باره کې له مخکې دا نظریه وه، چې موجي خاصیت اوڅرګندشوی ذروي خاصیت ولري، دموادو ذرې دحرکت په حال کې خامخاموجي طبعیت لري.

دمتحرکې ذرې پورې تړلې څپې دمادي څپوپه نوم یادیږي.

لیوس ډی بروګلي دا پیشنهادکړه، چې ټاکلي اساسي فزیکي مفهومونه بایدپه دواړوبنیادي کمیتونویعنې ذرې اوڅپې ،تطبیق شي.

د υ فریکونسي سره دفوتون انرژي داسې ورکول کیږي.

$$E = h\nu \qquad (1.5)$$

دفوتون دسکون کتله صفرده. که **m** دفوتون دحرکت دحال کتله او **c** دهغه تیزي وي، نودنسبیت د تیوری مطابق، انرژي یې په دې ډول ورکول کیږي!

$$E = mc^2 \qquad (1.6)$$

ځکه چې ماده او انرژي دواړه دوه اړخیزتناظرلري.د (1.5) او (1.6)معادلو څخه حاصلوو چې!

$$h\nu = mc^2$$

فوتون په ازاده فضاکې په **c** تیزی سره حرکت کوي. نوځکه دهغه مومنتم به!

$$p = mc$$

$$p = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c}$$

$$E = h.\nu$$

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

$c = \nu.\lambda$ ∵ ، چیرته چې λ دڅپې اوږدوالی دی نو مونږحاصلووچې:

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (1.8)$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{h}{p} \qquad (1.9)$$

(1.9) معادله په متحرکه ذرې هم تطبیقیږي.که ذره د **m** په کتله د **v** په تیزی سره په حرکت کې وي، نو دهغې مومنتم $p = mv$ دی. ددې لپاره، دمتحرکې ذرې پورې تړلی دموج اوږدوالی عبارت دی له!

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad (1.10)$$

دمتحرکې ذرې دموج اوږدوالی د(1.10) معادلې په واسطه ورکړشوی دی چې دې ته دډی بروګلي دموج اوږدوالی وايي. دمتحرکې ذرې پورې تړلي دډی بروګلي دڅپو (مادي څپو) سرعت په ضروري توګه دذرې سرعت نه دی.

که u دذرې دحرکت په حال کې دمادي موجونو سرعت او v دډی بروګلي دموج سرعت وي نو !

$$u = \nu.\lambda \qquad (1.11)$$

چیرته چې υ دڅپو فریکونسي ده، (1.10) معادله په (1.11) معادله کې وضع کوو او حاصلوو :

$$u = \nu.\frac{h}{mv} = \frac{h\nu}{mv}$$

مګر $E = h\nu$ او $E = mc^2$ دی، له همدې امله !

$$u = \frac{mc^2}{mv}$$

$$\therefore \qquad u = \frac{c^2}{v} \qquad (1.12)$$

په نتیجه کې،دوه مختلف سرعتونه متحرکې ذرې پورې تړلي دي، یو دذرې دمیخانیکي حرکت سرعت **v** اوبل مادي موج پورې تړلی سرعت **u** دی. دا دواړه سرعتونه د(1.12) معادلې په واسطه یوبل سره اړیکه لري. اوس دذرې سرعت $v < c$ دی،له همدې امله دمادي موج دخپریدوسرعت $u > c$ دی، ځکه نودډی بروګلي څپې دالکترومقناطیسي څپوڅخه چې په ثابته تیزۍ خپرېږي، یوله بل سره توپیرلري.

یادونه: دذرې حقیقي انرژي په داسې ډول ورکول کیږي

$$E = \sqrt{p^2c^2 + {m_0}^2c^4}$$

دلته m_0 دسکون دحال کتله ،p دذرې مومنتم او c دنور چټکتیاده.

1.2مثال: د 2gr په کتله او د $3312,5\frac{m}{s}$ په سرعت دمتحرکې ذرې دموج اوږدوالی محاسبه کړئ.

حل: دلته $m = 2gr = 2.10^{-3}kg, v = 3312,5\frac{m}{s}$

بناپردې، مومنتم عبارت دی له $p = mv = 2.10^{-3}.3312,5 = 6625.10^{-3}kg.\frac{m}{s} = 6,625kg.\frac{m}{s}$

دموج اوږدوالی،

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,625.10^{-34}}{6,625} = 10^{-34}m$$

دا دموج اوږدوالی دذرې دبعدونوپه مقایسه ډیرکوچنی دی،په همدې دلیل، د ماکروسکوپیک ذراتولپاره کوم اهمیت نلري، مګر دډی بروګلي دموج اوږدوالی د مایکروسکوپیک ذراتولپاره ډیرلوی اهمیت لري.

1.3مثال : یوالکترون دنوردسرعت دلسمې برخې په تیزۍ سره دحرکت په حال کې دی، دډی بروګلي دموج اوږدوالی یې محاسبه کړئ.

حل: $m_e = 9,1.10^{-31}kg, v = \frac{c}{10} = 3.10^7\frac{m}{s}, h = 6,625.10^{-34}j.s$

$$p = mv = 9,1.10^{-31}.3.10^7 = 2,73.10^{-23}kg\frac{m}{s}$$

دموج اوږدوالی

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,625.10^{-34}}{2,73.10^{-23}} = 2,43.10^{-11}m = 0,234A^{\circ}$$

1.4مثال: یو الکترون د v ولټ ولتاژ په ذریعه تعجیلي شوی دی، ددې پورې تړلي دډی بروګلي دموج اوږدوالي لپاره یوه افاده لاسته راوړئ.

حل: د v ولټ ولتاژ په واسطه دتعجیلي شوي الکترون حاصل شوې حرکي انرژي عبارت ده له!

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

e دالکترون چارج دی.

$$\therefore \quad mv^2 = 2eV \Rightarrow m^2v^2 = 2meV$$

$$\therefore \quad mv = \sqrt{2meV}$$
$$P = \sqrt{2meV}$$

بناپردې، دالکترون پورې تړلی دموج اوږدوالی $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$ دی.

مونږ لرو ،چې $h = 6{,}625.10^{-34}\ \mathrm{js}, m = 9{,}1.10^{-13}\ \mathrm{kg}, e = 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{c}$

دټولو دغو قیمتونو په وضع کولو سره،مونږ حاصلوو !

$$\lambda = \frac{12{,}27.10^{-10}}{\sqrt{V}} m$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{12{,}27}{\sqrt{V}} A^{\circ} \tag{1.13}$$

که چیرې $\mathrm{V} = 100\mathrm{volt}$ وي

$$\lambda = \frac{12{,}27}{\sqrt{100}} A^{\circ} = 1{,}227 A^{\circ}$$

که چیرې $\mathrm{V} = 540\mathrm{volt}$ وي

$$\lambda = \frac{12{,}27}{\sqrt{V}} A^{\circ} = 1{,}67 A^{\circ}$$

1.5مثال: د 1ev انرژي لرونکي نیوترون لپاره دډی بروګلي دموج اوږدوالی پیداکړئ.

دنیوترون کتله $M_n = 1{,}676.10^{-27}\,kg$ ورکړشوې ده.

حل: دنیوترون حرکي انرژي 1ev ده،

$$1eV = 1{,}6.10^{-19}\,J$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = 1{,}6.10^{-19}\,J$$

$$\mathrm{v}^2 = \frac{2.1{,}6.10-19}{\mathrm{m}} = \frac{2.1{,}6.10^{-19}}{1{,}676.10^{-27}} = 1{,}9093.10^{8}$$
$$\mathrm{v} = 1{,}38.10^{4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

دډی بروګلي دموج اوږدوالی عبارت دی له!

$$\lambda = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{mv}} = \frac{6{,}625.10^{-34}}{1{,}676.10^{-27}.1{,}38.10^{4}}$$
$$\lambda = 2{,}864.10^{-11}\,\mathrm{m} = 0{,}286\mathrm{A}^{\circ}$$

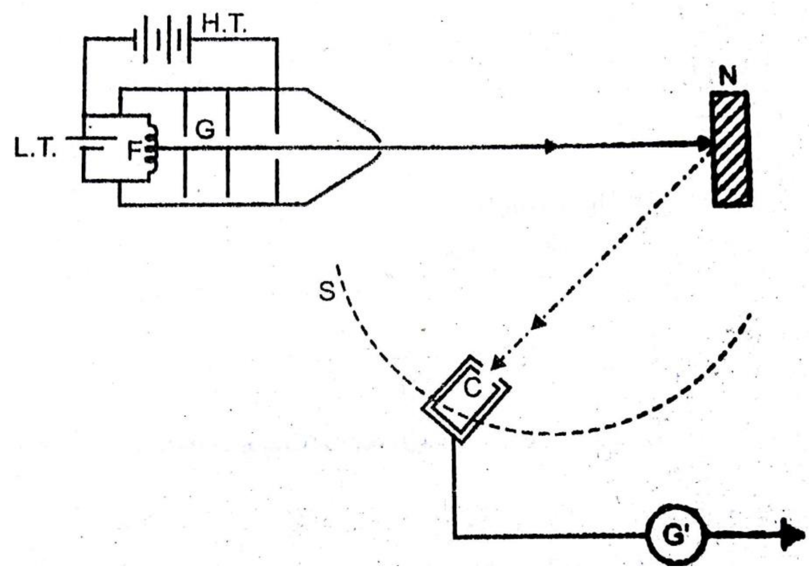
(B) دډی بروګلي دتیوري تجربوی ثبوت

دډی بروګلي، مادي څپونظریه علمي نړۍ ته نوی وه.مختلفوساینس پوهانومختلفې تجربې سرته ورسولې ترڅودمادي څپوشتون ثابت کړي، دډی بروګلي دڅپودشتون مستقیم ثبوت دالکترونود تفرق دتجربوپه واسطه برابرشو.مونږیوددې تجربوڅخه په نظرکې نیسو!

ډیویژن او جرمر تجربه

دغه تجربه په لاندې ډول بحث کیږي!

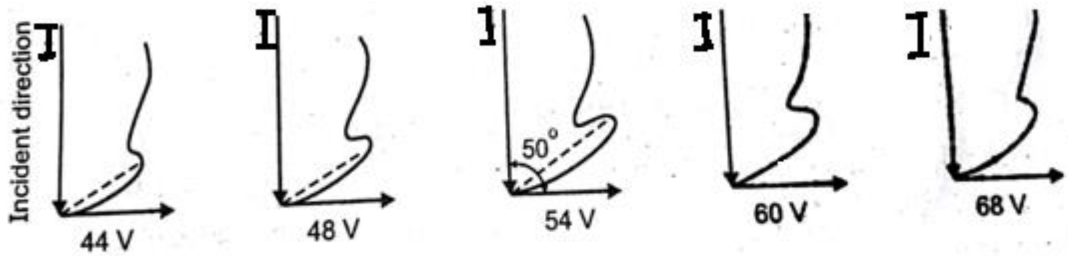
تجربوي ترتیب: تجربوي ترتیب په-(1.2)شکل کې ښودل شوی دی.الکترونونه دفلیمنټ په واسطه تولیدیږي،کوم چې دبطري په ټیټ ټنشن(L.T) سره ګرم شوي دی.دغه الکترونونه د دF او G شبکې (grid) ترمنځ دتطبیق شوي پوتنشیل تفاوت په واسطه یعنې دبطري په لوړټنشن (H.T) تحریک شوي دي.دغه الکترونونه دیو سلسله سوریو څخه تیریږي اودموازي بیم په شکل راوځي او ټول یو شان سرعت لري، چې داټوله مجموعه دالکتروني ټوپک پنوم یادیږي.دغه دیوانرژي لرونکي الکترونونه دنیکل په ځانګړي کرستال دN په هدف لګیږي.دکرستال په واسطه الکترونونه په مختلفو جهتونو شیندل کیږي.دغه شیندل شوي الکترونونه دc فارادي سلینډرپه واسطه سره را یوځای کیږی، چې دیته collector وایي. دcollector جریان دیوحساس ګلوانومتر G' په واسطه تقویه اواندازه کیږي. Collector دازادې دایروي تلې S په اوږدوکې حرکت کولای شي ترڅوالکترونونه د 20°او 90° زاویوترمنځ په مختلفوزاویو ورسیږي.کولکتوردسلنډرددوه فلزي د یوالونو څخه عبارت دی، چې اجازه ورکونکی سوری لري، دواړه دیوالونه یودبل څخه عایق دي. یووروکوونکی پوتنشیل د کولکتوردننوتونکي او وتونکي دیوالونو ترمنځ تطبیقیږي، مثلاًیوازې هغه تیزحرکت کوونکي الکترونونه چې دټوپک څخه دانتشاردسرعت غوندې اصغري سرعت لري دکولکتورداخلي سلینډرته داخلیدای شي.دنیکل کرستال دمرکزي مکعبي ډوله سطحې پورې تړلی دی اوداسې جدا شوی دی، چې دشبکې د(111)مستوي سره موازي یوهواره منعکس کوونکې سطحه منځته راوړي.



1.2شکل: تجربوي ترتیب

تجربوي کړنلاره :عادي واردیدنه : دالکتروني ټوپک څخه دوتونکوالکترونوګیډۍ په عادي ډول دکرستال په سطحه لویږي. دکرستال اتومي مستوي ګانې دشبکې دمستوي په شان عمل کوي.الکترونونه په مختلفو جهتونوشیندل کیږي، شیندل شوي الکترونونه دهغه کولکتورپه واسطه راجمع کیږي، چې دS په تله په مختلفوزاویوحرکت کوي، دمختلفوزاویولپاره انحراف په ګلوانومترکې اندازه کیږي. د ګلوانو مترانحراف دوارده ګیډۍ اوکولکتور(Collector) ته دداخلیدونکي ګیډۍ ترمنځ د زاویې مقابل کې طرح شوی دی. مشاهدې دمختلفوتعجیلي ولتاژونولپاره تکراریږي اویوشمیر منحني ګانې یې رسم شوي دي چې په (1.3) شکل کې ښودل شوي دي.

دامشاهده شوې ده، چې 44*volt* لپاره په منحني کې پړسوب یاوتلې برخه ښکاره کیږي، داپړسوب دولتاژپه زیاتېدومخکې ځي او 54*volt* او 50° زاویه کې اعظمي کیږي، دولتاژپه نور زیاتېدوسره په اوږدوالي کې کمیږي اوبالاخره په 68*volt* کې ورکیږي.



1.3 شکل: په مختلفو پوتنشیلونوکې دشدت بدلون

په $54volt$ کې اعظمي کېدنه دالکترون دموج دموجودیت دثبوت په شکل په پام کې نېول کیږي. په دغه ولتاژاوپه 50° زاویه کې، دالکترون دموجونوو دانونکی تداخل په دغه جهت شیندل شوی دی. په منظمه توګه اتومي مستوي ګانې واقع کیږي.

دډی بروګلي دنظریې له مخې، دهغه الکترونود موج اوږدوالی ، چې د v پوتنشیل په واسطه تعجیلي شوي دي عبارت دی له

$$\lambda = \frac{12,27}{\sqrt{V}} A^{\circ}$$

نوځکه د $54volt$ ولتاژدپاره، مونږحاصلوو

$$\lambda = \frac{12,27}{\sqrt{54}} A^{\circ} = 1,67 A^{\circ} \qquad (1.14)$$

دنیکل کرستال د(111)منعکسه مستوي لپاره، داتومي مستوي ګانوترمنځ جدایي $d = 2,15A^{\circ}$ ده.دشبکې دانعکاس دقانون په تطبیق لروچې

$$n\lambda = d\sin\theta \qquad (1.15)$$

دلمړي ترتیب لپاره n=1 اوزاویه 50° ده.

$$\therefore \qquad \lambda = 2,15\sin 50^{\circ}$$

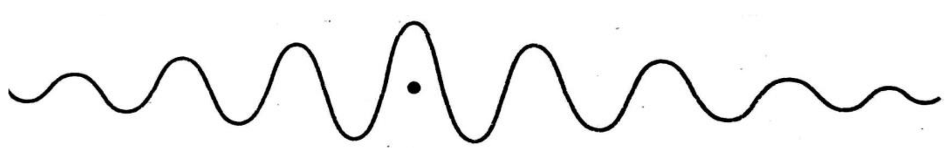
$$\therefore \qquad \lambda = 1,65 A^{\circ}$$

په نتیجه کې تجربوي قیمت دنظريي قیمت سره نږدېوالی لري. دابنايي چې الکترون دموج په څیر عمل کوي، نوځکه، دډیویژن اوجرمرتجربه دالکترون دحرکت موجي ماهیت تاییدوي.

1.4 دموجونودګروپ یادموجي پاکټ مفهوم

مونږولیدله چې ماده دوه ګونی طبعیت لري.بعضې وخت دذرې په شان عمل اجراء کوي اوبعضې وخت دڅپې په شان عمل کوي.دډی بروګلي دڅپې امپلیتودبه دذرې دحرکت مطابق دهغه احتمال سره تشریح کیږي دکوم سره، چې ذره په مشخص وخت کې په مشخص ځای کې پیداکیږي.دډی بروګلي څپه دلاربښودونکي څپې سره تړلی دی کوم چې په فضاکې دذرې حرکت کنترولوي.ددې لپاره ضروري ده، چې دډی بروګلي دڅپې امپلیتودبایدداسې برابرشوی وي، چې په یوه شیبه کې دذرې په ګاونډکې په محدوده ساحه باندې یوازې خلاف دصفروي.

دډی بروګلي دنظريې مطابق دمتحرکې مادې هره ذره شایددڅپوپه ګروپ یاموجي پاکټ کې دشاملې ذرې په شان ملاحظه شي. موجي پاکټ دڅپویوګروپ دی،هریودڅپې په اوږدوالي اوسرعت کې ډیرکم توپیرلري دې ته دڅپوګروپ هم ویل کیږي. ددوی امپلیتودونه اوفازونه داسې دي، لکه دوی چې په کمه ساحه کې په ودانونکي توګه تداخل کړی وي. دوخت په تېریدو ،دڅپوګروپ دذرې په شان په مساوي سرعت دذرې دحرکت دجهت په امتدادپه یقیني توګه حرکت کوي.دارنګه موجي پاکټ په (1.4) شکل کې ښودل شوی دی.



1.4شکل: دڅپوګروپ

دموجونودګروپ یاموجي پاکټ ماهیت پوهیدلولپاره اوامپلیتودیې څنګه برابریږي، راځئ فرض کړو، چې متحرکه ذره یود مستوي موجونوسره تړلې ده، چې په کم توپیردڅپې اوږدوالي اوسرعتونه لري اود x په مثبت جهت خپریږي. دریاضیکي ساده توب لپاره، دوه داسې څپې په پام کې نیسو ،دوی په دې ډول تشریح کیږي

$$\psi_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

$$\psi_2 = A\sin(\omega + d\omega)t - (k + dk)x \qquad (1.16)$$

چیرته $\omega = 2\pi\nu$ او $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (دخپریدنې ثابت دی) او موجي سرعت یا فازسرعت $V_P = \frac{\omega}{K}$ دی.

فازسرعت هغه سرعت دی په کوم سره چې څپه خپریږي.

دانطباق دقانون له مخې ،محصله تغیر مکان په دې ډول ورکړشوی دی

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\psi = A[\sin(\omega t - kx) + \sin\{(\omega + d\omega) - (k + dk)x\}]$$

$$\therefore \qquad \psi = 2A\cos(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x)\sin\{(\omega + \frac{d\omega}{2})t - (k + dk)x\} \qquad (1.17)$$

$d\omega$ او dk ډیر کوچني دي، نو ځکه پورتنۍ معادله په دې ډول لیکلای کیږي

$$\psi = 2A\cos(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x)\sin(\omega t - kx) \qquad (1.18)$$
$$= B\sin(\omega t - kx)$$

په نتیجه کې،پورتنۍ معادله دموجي یافازسرعت $v_p = \frac{\omega}{k}$ سره دهغه څپې ګرځېدنه تشریح کوي دکوم ،چې امپلیتود عبارت دی له

$$B = 2A\cos(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x) \qquad (1.19)$$

د B امپلیتودیوبل موج چې ګروپ سرعت سره ګرځي،تشریح کوي.دګروپ سرعت په دې ډول ورکول کیږي

$$V_g = \frac{coefficient \quad of \ t}{coefficien \quad of \ \ x} = \frac{\frac{d\omega}{2}}{\frac{dk}{2}} = \frac{d\omega}{dk}$$

ګروپ سرعت

$$\therefore \quad V_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (1.20)$$

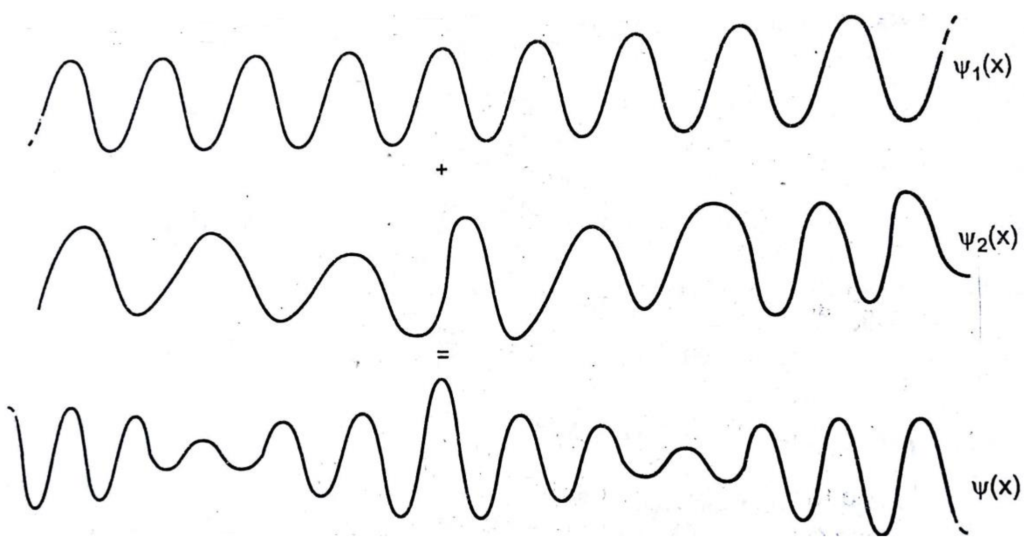
دا داسې ښودلای کیږي چې، دیونامحدودلوی شمیرخپریدونکوموجونولپاره،چې د یو ګروپ لپاره سره یوځای کیږي،دفازسرعت V_p اوګروپ سرعت V_g تړاود $\omega, k, d\omega, dk$ سره په دقیق ډول دپورته ساده مثال غوندې یوشان په پام کې نیول کیږي.

ددې پورې مربوط چې څنګه فازسرعت په مشخص حالت کې د ω او k سره بدلیږي اوګروپ سرعت کیدای شي دموجونوله ګروپ څخه دغړي موج دفازسرعتونو څخه کم یازیات وي.

څرنګه چې $\omega = 2\pi\nu$ او $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ دي،نو (1.20) معادله داسې هم لیکلای شو

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi d\nu}{-\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda} \qquad (1.21)$$

دوه موجونه دمحصله ګروپ موج سره په (1.5)شکل کې ښودل شوي دي.



1.5شکل: په مختلفوفریکونسیوسره ددوو موجونوانطباق

څرنګه چې $V_p = \frac{\omega}{k}$ دی،نوموږلیکلای شو،چې $\omega = kV_p$ دی. په (1.20) معادله کې ددې په کارونې ، موږحاصلوو

$$V_g = \frac{d(kV_p)}{dk}$$

$$\therefore \qquad V_g = V_p + k\frac{dV_p}{dk} \qquad (1.22)$$

(1.22) معادله دفازسرعت V_p اوګروپ سرعت V_g ترمنځ اویا دموج سرعت V_p اودخپریدودثابت **k** ترمنځ رابطه تشریح کوي.

څرنګه چې، $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ، $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$ $\therefore$ دی.

نوپه (1.22) معادله کې ددې په کارونې سره حاصلوو

$$V_g = V_p - \lambda\frac{dV_p}{d\lambda} \qquad (1.23)$$

(1.23) معادله دګروپ سرعت V_g اوفازیاموج سرعت **u**،او λ ترمنځ رابطه تشریح کوي.

داښودل چې دذرې سرعت V اوګروپ سرعت V_g مساوي دی:

که **E** دذرې ټوله انرژی او **V** پوتنشیل انرژي وي نودذرې حرکي انرژي عبارت ده له!

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V \qquad (1.24)$$

چیرته چې v دذرې سرعت دی. مګرټولیزه انرژي $E = h\nu = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$

چیرته چې $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ دی

او

$$p = mv = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

ددغه قیمتونو سره، (1.24) معادله داسې لیکلای شو!

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar^2 k^2}{m} = \hbar\omega - V$$

$$\therefore \qquad \omega = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2 K^2}{m} + \frac{V}{\hbar}$$

نظرK ته ډیفرنسیال نیسو، حاصلوو چې

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$$

مګر $V_g = \frac{d\omega}{dk}$ او $p = mv = \hbar k$ دی، نوځکه

$$V_g = \frac{mv}{m} = v$$

$$\therefore \qquad V_g = v \qquad (1.25)$$

په نتیجه کې،مونږګوروچې دذرې سرعت دګروپ سرعت سره یادموجي پاکټ سرعت سره مساوي دی، په همدې دلیل مونږنتېجه اخلو، چې دموجونوګروپ ذرې سره خپرېږي.

1.6مثال: دسمندري موجونوسرعت د $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ رابطې په ډول ورکول شوی دی، دګروپ سرعت پیداکړئ.

حل: ګروپ سرعت عبارت دی له

$$V_g = V_p - \lambda\frac{dV_p}{d\lambda}$$

دسمندري موجونوسرعت $V_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ دی.

$$\therefore \quad V_g = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} - \lambda\sqrt{\frac{g}{2\pi}}.\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad V_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$\therefore \quad Vg = \frac{1}{2}V_p$$

1.7مثال: د n انکسارضریب لرونکي محیط په ذریعه دموجونوسرعت $\sqrt{\frac{n}{k}}$ دی، په چاپیریال کې دګروپ سرعت پیدا کړئ.

حل: دموج سرعت یا دفازسرعت $V_p = \sqrt{\frac{n}{k}}$

مګردانکسارضریب $n = \frac{c}{V_p}$ دی،دلته c په خلا کې دموج سرعت دی.

$$\therefore \quad V_p = \sqrt{\frac{c}{kV_p}}$$

$$V^2{}_p = \frac{c}{kV_p}$$

$$\therefore \quad V^3{}_p = \frac{c}{k}$$

$$V_p = (\frac{c}{k})^{\frac{1}{3}}$$

دګروپ سرعت او فازسرعت ترمنځ رابطه په دې ډول ده.

$$V_g = V_p + k\frac{dV_p}{dk}$$

$$V_g = V_p + k\frac{d}{dk}(\frac{c}{k})^{\frac{1}{3}} = V_p + kc^{\frac{1}{3}}\frac{d(k^{-\frac{1}{3}})}{dk}$$

$$= V_p - \frac{1}{3}kc^{\frac{1}{3}}.k^{-\frac{4}{3}}$$

$$V_g = V_p - \frac{1}{3}(\frac{c}{k})^{\frac{1}{3}}$$

$$V_g = V_p - \frac{1}{3}V_p = \frac{2}{3}V_p$$

1.8مثال: وښایاست! چې د m_0 دسکون دحالت په کتلې او په λ طول موج دذرې دډی بروګلي دموج دفازدسرعت رابطه عبارت ده له

$$V_p = c.\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

چیرته چې c دنور سرعت دی.

حل: دفازسرعت عبارت دی له

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu\lambda$$

مونږ انرژي لرو $E = h\nu$

حقیقي انرژي عبارت ده له

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2{}_0c^4}$$

$$E = pc\sqrt{1+\frac{m^2{}_0c^4}{p^2c^2}}$$

$$E = pc\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

څرنګه چې $p = \frac{h}{\lambda}$ دی، مونږ حاصلوو :

$$E = \frac{h}{\lambda}c\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

$$\frac{E\lambda}{h} = c\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

$$\frac{h\nu\lambda}{h} = c\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

$$\nu\lambda = c\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

$$V_p = c\sqrt{1+(\frac{m_0 c\lambda}{h})^2}$$

1.9مثال: دکوچنیو څپو سرعت د $\sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$ مساوي دی، **T**سطحي کشش دی، ρ دمایع کثافت او λ دموج اوږدوالی دی، دګروپ سرعت پیدا کړئ.

حل: مونږ لرو چې

$$V_p = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$$

$$\therefore \qquad \frac{dVp}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda}.\sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}} = -\frac{1}{2\lambda}V_p$$

$$\therefore \qquad \lambda\frac{dV_p}{d\lambda} = -\frac{1}{2}V_p$$

اوس،

$$V_g = V_p - \lambda \frac{dV_p}{d\lambda}$$

$$\therefore \quad V_g = V_p - (-\frac{1}{2}V_p)$$

$$\therefore \quad V_g = \frac{3}{2}V_p$$

1.5 دهایزنبرګ دغیریقین والي اصل

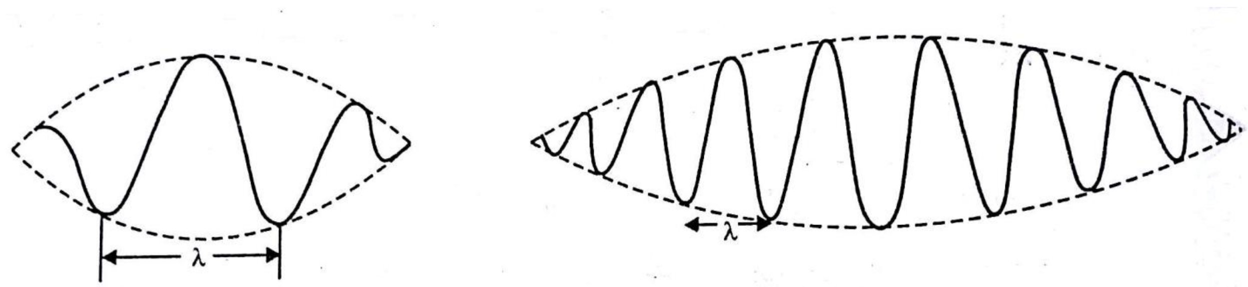
په کلاسیک فزیک کې، دینامیکي متحولین، لکه! موقیعت،دخطي مومنټمونو اجزاء، د زاویوي مومنټم اجزاء اوداسې نور. داسې فرض کیږي، چې دوخت په یوه شیبه کې دهغوی واقع کېدنه په صحیح ډول اندازه کیږي، مثلاً دلته په فزیک کې اساسي قوانین لکه دنیوټن قوانین تشریحي طبعیت لري، په کلاسیک فزیک کې داحتمال نظریه خارجي نه ده مګردهغې په احصایوي احتمال تیوري کې،کوم چې دهغې دپیچلوسیستمونوپه مطالعه کې دعملي تدابیرو په شان استعمالیږي.

دبوراوهایزنبرګ له مخې، احتمالي طبعیت په کوانټم فزیک کې یواساسي شی دی اوتشریحي طبعیت دپا م وړنه دی. دمایکروفزیکي سیستم حرکت محتاطنه تحلیل دابنایي چې دیوشي ددرستوالي اساسي لیمټ موجود دی دکوم لپاره چې متحولین لکه موقیعت ، مومنټم ، زاویوي مومنټم اندازه کیږي.

مونږولیدله چې دحرکت کوونکوموادوذرې دوه ګونی ماهیت لري، مثلاً په بعضوعملیوکې دذرې په شان عمل کوي اوپه بعضې عملیوکې دڅپې په شان عمل کوي.په هره شیبه کې ذره بایدمعلوم موقیعت اومعلوم مومنټم ولری.دذرې دحرکت دمطالعې لپاره،دهغې موقیعت اومومنټم بایدپه پرله پسې ډول اندازه شي.ورنرهایزنبرګ په (1927) کې، ډیرلیرې رسیدونکی اصل وړاندې کړ، چې دغیریقین والي داصل په نوم یادیږي. ددې اصل له مخې،که چیرې په صحیح توګه مونږدذرې موقیعت اندازه کړونودهغې مومنټم غیریقیني دی اوبالعکس، متحرکه ذره داسې په پام

کې نېول کیږي، چې څپه ایزپاکټ لري.په دې موجي پاکټ کې کیدای شي ذره په هرځای کې وي او که چیرې موجي پاکټ کوچنی وي، مثلاً دڅپوګروپ نری تنګ وي،دهغې موقیعت کېدای شي ډیرپه صحیح توګه پیداشي.مګرکله چې موجي پاکټ کوچنی وي دڅپې داوږدوالي توپیریې زیات مثلاًدڅپې اوږدوالی اوپه نتېجوي توګه دذرې مومنټم غیریقیني کیږي.اودبلې خوا ،که چیرې موجي پاکټ اوږد وي نودذرې مومنټم زیات یقیني کیږي مګرموقیعت غیریقیني کیږي.

دهایزنبرګ دعدم قطیعت اصل څرګندوي، چې دذرې مومنټم اوموقیعت په پرله پسې اوصحیح توګه تشریح کول امکان نلري.دلنډوڅپوګروپ په (a)1.6 شکل کې اوداوږدوڅپوګروپ په (b) 1.6شکل کې ښودل شوی دی.



(a) دلنډوڅپوګروپ (b) داوږدوڅپوګروپ

1.6. شکل

دغیریقین والي اصل په ریاضیکي توګه داسې دی: که چیرې Δx د موقیعت په اندازه کولوکې غیریقین والی وي او Δp_x دمومنټم په اندازه کولوکې غیریقین والی وي،نوبیا ددواړوغیریقین والو دضرب حاصل تقریباً دپلانک ثابت ورکوي.

$$\Delta x.\Delta p_x \approx h \qquad (1.26)$$

که چیرې Δx کوچنی وي نو Δp_x به لوی وي اوباالعکس. یعنې که یوکمیت په صحیح توګه اندازه شي نوبل کمیت لږصحیح کیږي. دغیریقین والي ډیره دقیقه رابطه عبارت ده له

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Δp_x د p_x لپاره او Δx د x لپاره پيژندل شوی دي.دلته $\hbar$ (د h بارپه شان لوستل کيږي) او د $\frac{h}{2\pi}$ څخه اخيستل شوی دی، دا يو کميت دی چې بعضې وخت په کوانټم ميخانيک کې دزاويوي مومنټم داساسي واحد په شان ښکاره کيږي.

دخطي مومنټم داجزاونورې رابطې په دې ډول دي

$$\Delta y.\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

او

$$\Delta z.\Delta pz \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1.27)$$

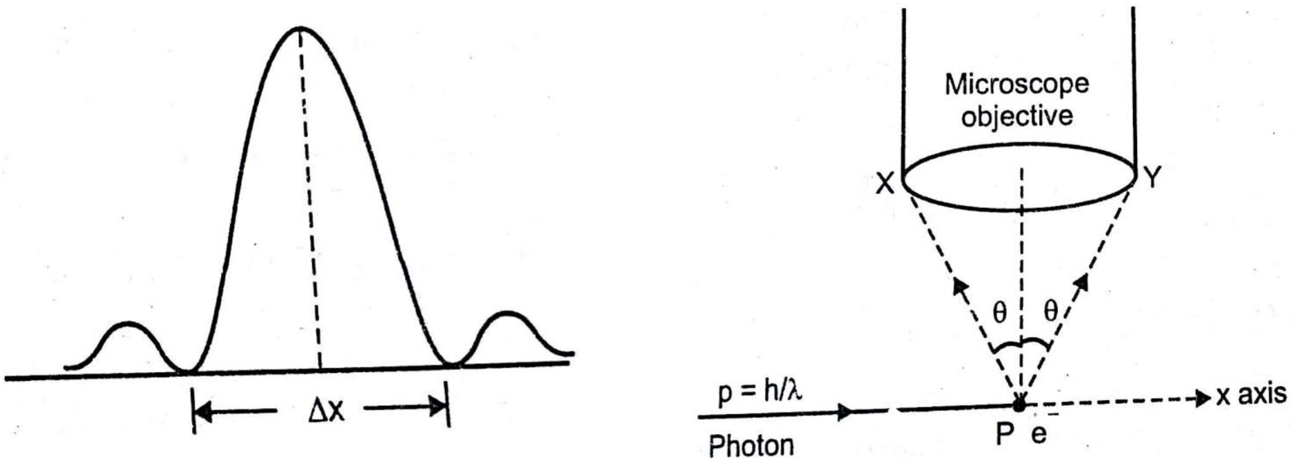
دادطبعيت قانون دی اوداندازه کولوپه آلوکې دکوم نقصان باعث نه کيږي. دا اصل وايي هغه حادثه، چې په اصل کې يې مونږدخيالي آلوپه مرسته سرته رسوود $\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ څخه يې ښه نشو ترسره کولای.

دهايزنبرګ دغيريقين والي اصل په څولاروتشريح کولای شو؟ راځئ ! چې دارنګه تشريح په نظرکې ونيسو.

1. ګاماوړانګې مايکروسکوپ:

مونږبه دلته دبورپه واسطه مشهوربحث ، چې دګاماوړانګې مايکروسکوپ په نوم ياديږي په پام کې ونيسو ، دا تصوري تجربه ده خوپه تجربوي توګه ترسره کېدای نه شي.

تجربوي ترتیب په (a)1.7شکل کې ښودل شوی دی.



(b) دتفرق نمونه (a)تجربوي ترتیب

1.7 شکل: د γ وړانګې

فرض کړئ، چې مونږ کوشش کوو ،چې په لوړ ریزولیشن مایکروسکوپ کې دیوالکترون موقیعت او خطي مومنټم اندازه کړو، الکترون هغه وخت مشاهده کېدای شي، چې کله کم ترکمه دالکترون څخه یوشیندل شوی فوتون دمایکروسکوپ په سوري کې داخل شي. دمایکروسکوپ دتجزیه کولو طاقت عبارت دی له،

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \qquad (1.28)$$

چیرته چې Δx ددوه نقطو ترمنځ تر ټولو کوچنۍ فاصله ده کوم ،چې دمایکروسکوپ په واسطه تجزیه کیږي، λ دنور دڅپې اوږدوالی دی تنویرلپاره استعمالیږي او θ دمایکروسکوپ په عدسیه کې د داخلید ونکو وړانګونیمه عمودي زاویه ده لکه څنګه چې په (a) 1.7شکل کې ښودل شوې ده، او دمربوطه تفرق نمونه یې په (b) 1.7شکل کې ښودل شوې ده. دتجزیې دطاقت زیاتوالي لپاره مثلآ(1.28) معادلې څخه په کم موقیعت کې غیریقین والی جوړیدل،مونږګوروچې λ باید خامخا کوچنی شي،څکه په پورته جوړښت کې $\sin\theta$ نشي زیاتیدای. ددې لپاره،دکوچنیوترینوطول موجونوتشعشعات مثلآ ګاماتشعشعات کارول شوي دي،چې په p کې الکترون روښانه کړي.

دارنګه د ګاماوړانګې مایکرو سکوپ اختراع کیدای نه شي مګردافقط یوه تصوري تجربه ده. او د دې په پام کې نیولو کې سره فزیکي قوانین نه ماتیږي.

راتلونکی فوتون (ګاماوړانګه) به دx په جهت دالکترون سره متقابله اغېزه کوي اوپه ټولوجهتونو خپریدای شي. دالکترون دلیدلوترتیب،خپورشوی فوتون بایدمایکروسکوپ ته په 2θ زاویې سره داخل شي.هغه مومنټم چې دفوتون په واسطه الکترون ته ورکول شوی دی په ترتیب کې $\frac{h}{\lambda}$ دی.

د PX په اوږدوکې دشیندل شوي فوتون دمومنټم برخه $\sim -\frac{h}{\lambda}\sin\theta$ ~ ده.

د PY په اوږدوکې دشیندل شوي فوتون دمومنټم برخه $\sim \frac{h}{\lambda}\sin\theta$ ~ ده.

دفوتون په واسطه الکترون ته ورکول شوی مومنټم دپورته دوه سرحدونوترمنځ دی. اوس دمومنټم په اندازه کېدنه کې غیریقین والی دx په جهت عبارت دی له

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda}\sin\theta - (-\frac{h}{\lambda}\sin\theta) = \frac{2h}{\lambda}\sin\theta$$

$$\therefore \qquad \Delta x.\Delta p = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \times \frac{2h}{\lambda}\sin\theta = h$$

$$\Delta x.\Delta p = h$$

ډیرسخته لاسته راوړنه به وښایي چې $\Delta x.\Delta p \geq \hbar$ دی.

2. دالکترون دتفرق تجربه

دالکترونویوه ګیډۍ په نظرکې ونیسئ چې دd په پلنوالي په یونرۍ لیکه د(1.8)شکل په شان لګیږي. دالکترونوګیډۍ دنرۍ لیکې څخه دتېریدو وروسته دتفرق په سبب جداکیږي اودp دعکاسۍ په لوحه باندې دتفرق نمونه دلیکې څخه دفاصلې په ساتلوسره مشاهده کیږي. دعکاسۍ په لوحه هرثبت شوی الکترون باید ددې لیکې څخه تېرشوی وي.مګردقیق موقیعت یې په لیکه کې

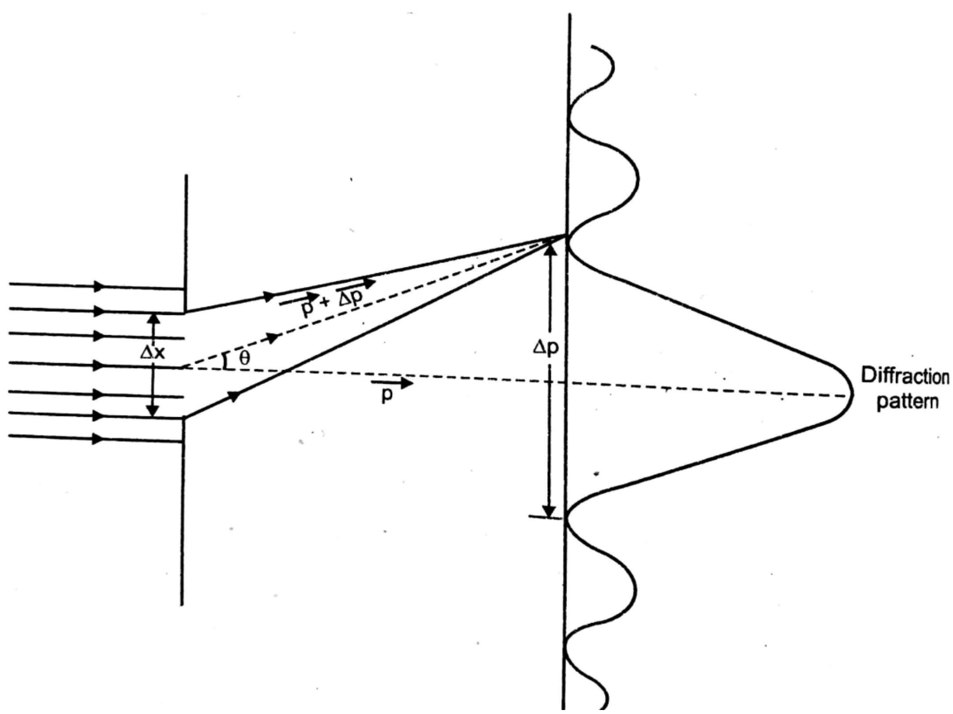
څنګه چې الکترون ترې تیریږي مشخصولای نه شي.ځکه نو دالکترون دموقیعت په مشخصولوکې غیریقین والی دلیکې دپلنوالي سره مساوي $\Delta x = d$ دی.

دنوردڅپه ایزې تیوري څخه،مونږپوهیږو ،چې دتفرق لپاره لیکو $2d\sin\theta = \lambda$

دلمړي ترتیب لپاره

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \qquad (1.29)$$

چیرته چې λ دڅپې اوږدوالی او θ دلمړي ترتیب لپاره دتفرق زاویه ده.



1.8شکل: دالکترون دتفرق تجربه

فرضوو p په وارده جهت دالکترون مومنټم وي.کله چې الکترون په نری لیکه کړیږي ، د $p\sin\theta$ اضافه مومنټم په هغه جهت چې په اصلي جهت عمود وي لاسته راوړي. لکه څنګه چې الکترون کېدای شي په نمونه کې د $\theta-$ څخه تر $\theta+$ په هرځای کې وي، نودالکترون دمومنټم اجزاء

امکان لري د $-p\sin\theta$ او $p\sin\theta$ په منځ کې قيمت ولري.ځکه نودمومنتم په اجزاوکې غيريقين والی عبارت دی له

$$\Delta p = p\sin\theta - (-p\sin\theta) = 2p\sin\theta$$

دډی بروګلي دقضيوڅخه لروچې!

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\therefore \qquad \Delta p = \frac{2h}{\lambda}\sin\theta \qquad (1.30)$$

د(1.29)او(1.30)معادلوڅخه،مونږ حاصلوو

$$\Delta x.\Delta p = \frac{\lambda}{2\sin\theta}\times\frac{2h}{\lambda}\sin\theta$$

$$\therefore \qquad \Delta x.\Delta p \sim h$$

دادغيريقين والي رابطه ده.

1.6 دغيريقين والي درابطې مختلف شکلونه

1. دوخت انرژي دغيريقين والي رابطه:

دذرې حرکي انرژي په پام کې ونيسئ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

په E کې غیریقین والی ΔE دی او عبارت دی له

$$\Delta E = \frac{p}{m}\Delta p = v.\Delta p \qquad (p = mv)$$

که چیرې v دوارده نورپه سبب دذرې شاته تګ سرعت په شان واخیستل شي په موقیعت کې غیریقین والی دمشاهدې په وخت کې دغیریقین والي سره تړلی دی.

$$\Delta x = v\Delta t$$

$$\Delta E.\Delta t = v\Delta p \times \frac{\Delta x}{v} = \Delta p \times \Delta x$$

$$\therefore \quad \Delta E.\Delta t = \frac{\hbar}{2} \qquad (1.31)$$

دانرژي – وخت دغیریقین والي رابطې تشریح دموقیعت مومنټم د غیریقین والي رابطې څخه ډیره مختلفه ده.که چیرې په خاص موقیعت کې ΔE دسیستم دانرژي په تشریح کې اعظمي غیریقین والی وي.نود(1.31)رابطې مطابق دوخت اصغري انتروال دکوم لپاره چې په دې موقیعت کې وخت باقي پاتې کیږي په داسې ډول دی

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E}$$

که چیرې سیستم دوخت اعظمي انتروال، Δt، لپاره په خاص موقیعت کې باقي پاتې شي نوبیاپه دې موقیعت کې دسیستم په انرژي کې غیریقین والی داسې دی

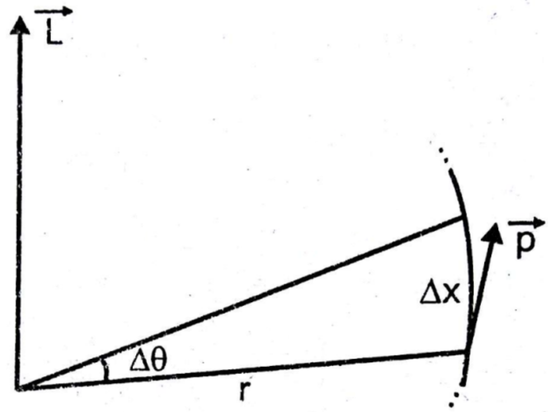
$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t}$$

2. زاویوي مومنټم–زاویوي تغیرمکان دغیریقین والي رابطه:

ΔL په زاویوي مومنټم کې غیریقین والي او $\Delta\theta$ دهغې مربوط په زاویوي تغیرمکان کې غیریقین والي ترمنځ دغیریقین والي رابطې لاسته راوړلولپاره، د m په کتله یوه ذره چې دv په تیزې دr په شعاع په دایره حرکت کوي په پام کې نیسو.

په یوه شیبه کې زاویوي مومنتم عبارت دی له!

$$L = mvr = pr$$



1.9: شکل

که چیرې ذره د $\Delta\theta$ زاویوي تغیرمکان په واسطه بې ځایه شي، ددایروي زاویې په اوږدوکې دذرې په واسطه وهل شوی واټن عبارت دی له !

$$s = r\Delta\theta$$

نو دابه دهغه په موقیعت کې غیریقین والی وي

$$\therefore \qquad \Delta x = r\Delta\theta$$

که چیرې په مومنتم کې غیریقین والی Δp وي نوپه زاویوي مومنتم کې غیریقین والی $\Delta L = r.\Delta p$ دی.

بناپردې،

$$\Delta p = \frac{\Delta L}{r}$$

$$\therefore \qquad \Delta p.\Delta x = \frac{\Delta L}{r}.r.\Delta\theta = \Delta L.\Delta\theta$$

مګر $\Delta p.\Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\therefore \qquad \Delta L.\Delta\theta \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1.32)$$

دا غوښتونکې نتيجه ده .

1.10 مثال: يو الکترون په $10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ سرعت د حرکت په حال کې دی،دالکترون په موقيعت کې ممکن ترټولو کوچنی غیریقین والی پیدا کړئ؟

حل: فرضوو Δx دالکترون د موقيعت په تشريح کې اصغري غیریقین والی دی،نوبیا د غیریقین والي داصل له مخې

$$\Delta x.\Delta P = \frac{\hbar}{2}$$

چیرته چې $\hbar = \frac{\text{h}}{2\pi} = 1{,}055.10^{-34}\ \text{j.s}$ دی.

په مومنټم کې داعظمي غیریقین والي نیونه $\Delta p = p = mv$. دالکترون کتله $9.1.10^{-31}\text{kg}$ او سرعت يې $10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ دی.

$$\therefore \qquad \Delta\text{p} = 9{,}1.10^{-31}.10^6 = 9{,}1.10^{-25}\,\text{kg.}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\therefore \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p}$$

$$= \frac{1{,}055.10^{-34}}{2.9{,}1.10^{-25}} = 0{,}5795.10^{-10}\,\text{m} = 0{,}5795\text{A}^{\circ}$$

$$\Delta x = 0{,}5795\text{A}^{\circ}$$

1.11 مثال: یو الکترون په $0,05\%$ دقت سره $6000\frac{m}{s}$ تیزي لري هغه غیریقین والی محاسبه کړئ! دکوم سره چې الکترون وکولای شي ځای په ځای شي؟

حل: دالکترون کتله $9,1.10^{-31}kg$ او $V = 6000\frac{m}{s}$

دالکترون مومنتم $p = mv = 9,1.10^{-31}.6000 = 54,6.10^{-28}\,kg\frac{m}{s}$

په مومنتم کې غیریقین والی

$$\Delta p = \frac{0,05}{100}54,6.10^{-28} = 5.54,6.10^{-32}\,kg\frac{m}{s}$$

$$\therefore \quad \Delta p = 2,83.10-29kg\frac{m}{s}$$

په موقیعت کې غیریقین والی

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta\Delta} = \frac{1,055.10^{-34}}{2.2,83.10^{-29}} = 0,189.10^{-5}\,m$$

$$\therefore \quad \Delta x = 1.89.10^{-6}\,m$$

1.12مثال: وښایاست! چې دازادې ذرې لپاره دغیریقین والي رابطه داسې هم لیکلای شو

$$\Delta\lambda.\Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

چیرته چې Δx په موقیعت کې غیریقین والی او $\Delta\lambda$ همزمان دڅپې په اوږدوالي کې غیریقین والی دی.

حل: مونږ دغیریقین والي رابطه لروچې!

$$\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (i)$$

دډی بروګلي دقضیې له مخې

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ډیفرنسیال نیولو سره، مونږ حاصلوو:

$$dp = -\frac{h}{\lambda^2}\,d\lambda$$

دپورته رابطې مقدار په دې توګه لیکلای شو

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda^2}\,\Delta\lambda \qquad (ii)$$

(ii) رابطه په (i) رابطه کې کارووا و حاصلوو چې

$$\Delta x.\frac{h}{\lambda^2}\,\Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\therefore \qquad \Delta x.\Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2}.\frac{\lambda^2}{h}$$

یا

$$\Delta x.\Delta\lambda \geq \frac{h}{4\pi}.\frac{\lambda^2}{h}$$

$$\therefore \qquad \Delta x.\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

1.13 مثال: یوه ځانګړې اتومي هسته $0{,}5.10^{-14}$ m شعاع لري. دغیریقین والي اصل په استعمال سره دا وښایاست! چې دهستې په داخل کې الکترون شتون نه لري.

حل: دهستې قطر $d = 2.0{,}5.10^{-14}$ m دی، نو ددې لپاره چې الکترون دهستې په داخل کې ځای پر ځای شوی وي، په موقیعت کې غیریقین والی د dڅخه نه زیاتیږي.

$$\therefore \qquad \Delta x = 1.10^{-14}\,\text{m}$$

مونږ دغیریقین والي رابطه لرو چې:

$$\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\therefore \qquad \Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1{,}055.10^{-34}}{2.10^{-14}}$$
$$= 0{,}5275.10^{-20}\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

که چیرې داپه هسته کې دالکترون په مومنټم کې غیریقین والی وي،مومنټم په خپله باید کم ترکمه په پراخوالي کې دمقایسې وړوي، مثلآ $p \sim \Delta p$. دې مومنټم سره دالکترون سرعت تقریبآ د نورسرعت سره مساوي دی اوهمدارنګه حرکي انرژي به یې $E = mc^2$ وي.

$$E = mc^2 = mc \times c = p \times c = \Delta p \times c$$
$$= 0{,}5275.10^{-20}.3.10^{8}$$

$$\therefore \qquad \text{E} = 1{,}5825.10^{-12}\,\text{j}$$
$$\therefore \qquad \text{E} = \frac{1{,}5825.10^{-12}}{1{,}6.10^{-19}}\,\text{ev} = 0{,}9890.10^{7}\,\text{ev}$$
$$= 9.89.10^{6}\,\text{ev} = 9{,}89\text{Mev}$$
$$\text{E} \approx 10\text{Mev}$$

دارابطه رانښايي، چې که چیرې الکترون په هسته کې شتون ولري نوکم ترکمه باید 10Mev انرژي ولري.تجربه رانښایې چې په یواتوم کې الکترون هیڅکله ددې دیوکوچني جزڅخه زیاته انرژي نه لري. ځکه نو ،الکترون په هسته کې موجودیدای نه شي.

خـلاصه

1. دتورجسم په طیف کې دانرژي دتوزیع په تشریح کولوکې کلاسیکه نظریه ناکامیږي،همدارنګه دفوتوالکتریک اثرپه تشریح کې هم ناکامیږي.

2. الکترومقناطیسي تشعشعات په بعضې عملیودذرې په شان اوپه بعضې عملیوکې دڅپې په شان په نظرکې نیول کیږي.

3. لیوس ډی بروګلي داپیشنهادوړاندې کړ،چې ماده، لکه! تشعشع دوه ګونی ماهیت لري،مثلاًهغه ماده، چې دجداذروڅخه جوړه وي ،اتومونه،پروتون، الکترون اوداسې نور. دمناسبوشرایطو لاندې شاید څپې ته ورته خواص دځانه وښایې.

دډی بروګلي دڅپې اوږدوالی $\lambda = \dfrac{h}{p}$.

4. موجي پاکټ دموجونویوګروپ دی،هریوپه ډیرکم توپیردموج اوږدوالی اوسرعت لري.دې ته دڅپوګروپ هم ویل کیږي.

5. فازسرعت هغه سرعت دی کوم سره چې څپه خپریږي. $V_P = \dfrac{\omega}{k}$

6. ګروپ سرعت (1.20) $V_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

7. دهایزنبرګ دغیریقین والي اصل څرګندوي چې داناممکنه ده، چې دذرې موقیعت اومومنټم دقیق او همزمان تشریح شي.دغیریقین داصل له مخې،که چیرې مونږدذرې موقیعت په درسته توګه اندازه کړو ،دهغې مومنټم غیریقیني کیږي اوباالعکس،

$$\Delta x.\Delta p_x \approx \hbar$$

که چیرې Δx کوچنی وي، نو Δp_x به لوی وي اوباالعکس، دغیریقین والي ډیره صحیح رابطه پدې ډول ده.

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

دوخت– انرژي غیریقین والي رابطه داسې ده

$$\Delta E.\Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

دزاویوي مومنتم– زاویوي تغیرمکان دغیریقین والي رابطه عبارت ده له :

$$\Delta L.\Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

تمرینونه

(A) لنډځوابه ډوله پوښتنې:

۱. دوه داسې پېښې وښایاست چې کلاسیک فزیک دهغوې په تشریح کې ناکامېږي.
۲. دموج–ذرې دوګانګي څه شی دی؟
۳. دډی بروګلي دموج اوږدوالی څه شی دی؟
۴. موجي پاکټ څه شی دی؟
۵. فازسرعت اوګروپ سرعت تعریف کړئ.
۶. دغیریقین والي اصل بیان کړئ.
۷. دغیریقین والي داصل مختلف شکلونه ولیکئ؟

(B) اوږدځوابه ډوله پوښتنې:

۱. دمادې دوګانګي اودتشعشع یو معلوماتي دلیل ورکړئ؟
۲. مادي موجونه څه شی دی؟ دهغې دطول موج لپاره یوه افاده لاسته راوړئ؟
۳. په ګروپ سرعت اوفازسرعت یو لنډ یاداشت ولیکئ؟
۴. دګروپ سرعت لپاره یوه افاده لاسته راوړئ؟
۵. وښایاست! چې ګروپ سرعت دذرې دسرعت سره مساوي دی؟
۶. دډی بروګلي قضیې باندې یو لنډ یاداشت ولیکئ؟
۷. دغیریقین والي اصل باره کې یویاداشت ولیکئ؟دغیریقین والي دمختلفو شکلونو رابطې ولیکئ؟
۸. وښایاست! چې $\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ او $\Delta L.\Delta\theta \geq \frac{\hbar}{2}$ دی.
۹. ګاما وړانګې مایکروسکوپ بحث کړئ چې دغیریقین والي رابطه تشریح کوي.
۱۰. دالکترون دتفرق تجربه بحث کړئ چې دغیریقین والي اصل تشریح کوي.
۱۱. وښایاست! چې $V_g = V_p + k\frac{dV_p}{dk}$

۱۲. وښاياست! چې $V_g = V_p - \lambda \frac{dV_p}{d\lambda}$

(C) غيرحل شوي مسئايل

۱. په 10ev انرژي سره فوتون په مولبديم لويږي دکوم لپاره چې کاري تابع 4,15ev ده. د ودريدو پوتنشيل پيدا کړئ. ځواب! 5,85volt

۲. دهغه الکترون دډی بروګلي طول موج محاسبه کړئ؟ چې په $\frac{3}{5}c$ په تيزي سره حرکت کوي.c دلته دنورتيزي ده. ځواب $0,0323A^\circ$

۳. دنيوترون دډی بروګلي دموج اوږدوالی څومره دی؟ دکوم چې انرژي 1ev ده. ځواب $0,286A^\circ$

۴. د 50ev الکترون دډی بروګلي دموج اوږدوالی پيدا کړئ؟

۵. وښاياست! چې دچارج لرونکې ذرې دډی بروګلي دموج اوږدوالی چې m_0 دسکون دحال کتله او نسبيتي تيزي لري په لاندې ډول دی. $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\sqrt{1+\frac{eV}{2m_0c^2}}$

۶. دهغه حالتونو ،چې دژوندوخت يې $2,8.10^{-10}s$ دی دانرژي غيريقين والی يې څه شی دی. ځواب ! 1,178Mev

۷. يوه ذره په 50ev حرکي انرژي او په $2,8A^\circ$ طول موج سره دحرکت په حال کې ده، که دهغې حرکي انرژي دوه چنده شي، طول موج به يې څرنګه شي. ځواب $1,97A^\circ$

۸. يو الکترون په 0,01% دقت سره $2.10^4 \frac{cm}{s}$ تيزي لري.په دې بنيادي دقت سره مونږد هغه الکترون کوم موقيعت تعينولای شو . ځواب0,29cm

۹. منځنی وخت دهغه الکترون لپاره چې په هيجاني حالت کې پاتې کيږي مخکې له دې چې ټيټ ليول ته ټوپ ووهي $10^{-8}s$ دی.دنشرشووطيفي خطونو په فريکونسي کې غير يقين والی څومره دی. ځواب $10^8 Hz$

۱۰. که ديو اتوم دهيجاني حالت او هغه چې تشعشع کوی ترمنځ منځنی وخت $10^{-8}s$ وي، دخپورشوي فوتون په انرژي کې غيريقين والی محاسبه کړئ؟

دشروډینګرمعادله

پېژندنه:

په کلاسیک فزیک کې، دیوجسم حرکت دنیوټن دحرکت دقوانینوپه مرسته سمبالیږي. موقیعت، مومنټم ،زاویوي مومنټم اوداسې نور، دوخت په یوه شېبه کې په دقیقه توګه اندازه کیږي، مګرپه کوانټم میخانیک کې دډینامیکي متحولینوهمزمان دقیقه اندازه کېدنه دصرف نظروړده اومونږپه موضوعاتوکې په احتمال خبرې کوو.

مونږپه اول فصل کې ولیدل، چې متحرکه ذره څپه ایز طبعیت لري اوذرې حرکت دڅپو دګروپ په واسطه رهنمایي کیږي.هغه ریاضیکي تابع، چې دڅپوګروپ تشریح کوي څپه ایزه تابع ده. دخارجي قووترعمل لاندې دذرې دحرکت پشان ،څپه ایزه تابع دوخت سره سم $\Psi(x,y,z,t)$ تغیرات کوي. داچې دذرې حرکت دڅپه ایزې تابع $\Psi(x,y,z,t)$ په واسطه تشریح کیږي، نوساینس پوهانوکوشش وکړ ترڅودڅپه ایزې تابع په اساس یوریاضیکي فورمول جوړکړي، په (1926)کې ایروین شروډینګرد $\Psi(x,y,z,t)$ په اساس یوه معادله کشف کړه، دغه معادلې ته اوس دشروډینګر معادله وایي. په وروستنۍ برخوکې به مونږ دهغه کوانټم میخانیکي مشکلاتوحل وګوروکوم، چې ددغه معادلې په واسطه حلیدای شي.

2.1 موج تابع اودهغې فزیکي تعبیر

مونږپوهیږو ،چې متحرکه ذره څپه ایزطبعیت لري. هغه ریاضیکي تابع کوم، چې دذرې حرکت تشریح کوي د $\Psi(x,y,z,t)$ څپه ایزه تابع ده.څپه ایزه تابع په واقعي توګه ټول هغه معلومات لري کوم چې دغیریقین والي اصل مونږته اجازه راکوي، چې ترڅودمربوطې ذرې په باره کې پوه شو، مګرڅپه ایزه تابع Ψ په خپله هیڅ کوم فزیکي تعبیرنلري، Ψ په خپله کېدای شي مثبت،منفي یاپیچلې وي. دذرې دخصوصیاتواوددې پورې تړلې څپه ایزې تابع ترمنځ اساسي اړیکه داحتمالي کثافت اصطلاح کې ښکاره کیږي.دڅپه ایزې تابع مطلقه مربع $|\Psi|^2$ داحتمالي کثافت په نوم یادیږي، په خاص ځای کې دوخت په خاصه شیبه کې ارزیابي شوې ده ،چې په هغه وخت کې دذرې دپیدا ایښت داحتمال سره متناسب دی. څرنګه چې څپه ایزه تابع دحقیقي اوموهومي برخوسره پیچلې ده،نو

داحتمال کثافت $|\Psi|^2$ د $\Psi.\Psi^*$ حاصل ضرب څخه اخیستل شوی دی، دلته Ψ^* د Ψ پیچلې جوړه ده. ماکس بورن په (1926)کې دا تعبیرورکړی وو. دماکس بورن دپاستولیت مطابق،

که دوخت په یوه شیبه **t** کې ، دڅپه ایزې تابع موقیعت ټاکلواندازه $\Psi(x,t)$ وي،نود **x** او **x+d** رنج کې دذرې احتمال $p(x,t)$ به د $\Psi(x,t)\Psi^*(x,t)dx$ سره مساوي وي.

څرنګه چې $|\Psi|^2$ یا $\Psi.\Psi^*$ داحتمال کثافت تشریح کوي،په ټوله فضاکې د $|\Psi|^2$ انتیګرال داتشریح کوي چې ټول احتمال بایدمحدودوي، ځکه چې ذره ددې ټولې فضابعضې کوم ځای کې شتون لري. ځکه د Ψ دتعریف څخه ، $|\Psi|^2$منفي اوپیچلې نشي کېدای.په همدې دلیل دلته یوازې یواحتمال شته، چې د $|\Psi|^2$یا $\Psi.\Psi^*$ انتیګرال باید محدودکمیت وي،که چیرې څپه ایزه تابع په مناسبه توګه حقیقي ذره تشریح کړي، نوله هغه وخته چې ذره به دتوجه لاندې همیشه بعضې ځایونوکې پیداکیږي، مجموعي احتمال همیشه مساوي یو دی.

$$\int \Psi.\Psi^* dV = 1$$

یا

$$\int |\Psi|^2 dV = 1$$

پورته معادله کې انتیګرال په ټوله فضاکې اخیستل شوی دی. د Ψ پورتنی شرط دساده کېدنې شرط په نوم یادیږي. هغه موج تابع چې پورتني شرط صدق کوي دساده شوې څپې ایزې تابع په نوم یادیږي. که څپه ایزه تابع ساده شوې نه وي،دموج تابع ساده کېدوڅخه علاوه داپه اختیاري ثابت کې ضربیږي اوبیاپورتنی انتیګرال په ټوله فضاکې ارزیابي کیږي.

که چیرې Ψ موج تابع ساده شوې نه وي، د A ثابت کې یې ضربوو، بیاد انتیګرال قیمت ټاکواوهغه دیوسره مساوي کوواود A ثابت دساده کېدنې ثابت محاسبه کوو.

$$\int A\Psi(A\Psi)^* .dV = 1$$

$$AA^* \int \Psi\Psi^* dV = 1$$

څرنګه چې A یو حقیقي ثابت دی، مونږ حاصلوو !

$$|A|^2 \int \Psi\Psi^* .dV = 1$$

داورکوي چې دساده کېدنې ضریب عبارت دی له !

$$|A|^2 = \frac{1}{\int \Psi\Psi^* .dV}$$

دساده کېدنې ضریب دپورته معادلې ددویم جذر څخه حاصلیږي.

2.2 وخت پورې تړلې دشرودینګرمعادله

دشرودینګر دمعادلې حاصلولو لپاره، مونږ د x دمحور مثبت جهت په اوږدو کې دڅپې دخپریدو یوې معادلې سره شروع کوو، دڅپه ایزحرکت عمومي معادله عبارت ده له!

$$y = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

په کوانټم میخانیک کې Ψ څپه ایزه تابع دعمومي څپه ایزحرکت د y یو متحول سره مطابقت کوي، اګرچې Ψ په خپله داندازه کېدو وړکمیت نه دی او کېدای شي پیچلې وي. همدې دلیل لپاره مونږ فرضووچې Ψ د **+x** محورپه اوږدوکې دازادې حرکت کوونکې ذرې لپاره په لاندې ډول مشخصیږي!

$$\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (2.1)$$

دډی بروګلي او انشتین پاستولیتونه $E = h\nu$ 　　 $\lambda = \frac{h}{p}$ دي

پورتنۍ معادلې داسې هم لیکلای شو !

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \qquad (\because \quad k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu = \hbar\omega \qquad (\because \quad \omega = 2\pi\nu)$$

بناپردې، $K = \frac{p}{\hbar} \quad , \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$

په (2.1) معادله کې ددې دواړو معادلو داستعمال څخه حاصلو :

$$\Psi = Ae^{i(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t)}$$

$$\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \qquad (2.2)$$

(2.2) معادله د x دمحور په مثبت جهت دازادې متحرکې ذرې دکلي انرژي اومومنتم معادل موج تشریح کوي. دویمه معادله یوازې دازادومتحرکوذرولپاره صحیح ده،چیرته چې دازادې ذرې حرکت کنترولیږي، په ځینوموقیعتونوکې بعضې بندیزونه مونږته په زړه پورې دي.اوس مونږد Ψ لپاره داسې یوه تفاضلي معادله حاصلولای شوکوم چې په خاص موقیعت کې حلیدای شي. دغه معادلې ته دشروډینګرمعادله وایي.

نظر x ته د (2.2) معادلې ډیفرنسیال اخلو او حاصلوو

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \qquad (2.3)$$

دپورته معادلې یوځل بیانظر x ته ډیفرنسیال نیسواو حاصلوو

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{-p^2}{\hbar^2} Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi \qquad (2.4)$$

کوم چې ورکوي

$$p^2\Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \qquad (2.5)$$

له (2.2) معادلې څخه نظر t ته ډیفرنسیال نیسوا و حاصلوو

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

یا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \Psi$$

چې داسې هم لیکلای کیږي

$$E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad (2.6)$$

کله چې دذرې سرعت دنوردسرعت په مقایسه کوچنی وي، دذرې ټولیزه انرژي دحرکي انرژي $\frac{p^2}{2m}$ اوپوتنشیلي انرژی $V(x)$ دمجموعي څخه عبارت ده.

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \qquad (2.7)$$

د (2.7) معادلې دواړه خواپه Ψ کې ضربوو، حاصلوو:

$$\Psi E = \frac{p^2 \Psi}{2m} + V\Psi \qquad (2.8)$$

$p^2\Psi$ او $E\Psi$ د (2.5) او (2.6) معادلې څخه په (2.8) معادله کې وضع کوو، حاصلوو

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \qquad (2.9)$$

(2.9) معادله اول ځل لپاره په (1926) کې دشرودینګرپه واسطه لاسته راغلې اودشرودینګر د معادلې په نوم یادیږي. داد وخت پورې تړلې دشرودینګرمعادله ده. (2.9) معادله یوبعدي معادله ده تراوسه پورې، دا د x دجهت په اوږدو کې حرکت لپاره ده.

په دوه بعدي سیستم کې ، (2.9) معادله داسې لیکلای شو

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) + V\Psi \qquad (2.10)$$

دلته $\Psi = \Psi(x, y, t)$ ده.

په دری بعدي سیستم کې (2.9) معادله داسې لیکلای شو:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + V\Psi$$

یا !

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad (2.11)$$

چیرته چې $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ ده،

او $$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{dz^2}$$

2.3 دوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله یادثابت حالت معادله

یودموقیعتونوڅخه دذرې پوتنشیل انرژي دوخت څخه په ښکاره توګه مستقل اویوازې دذرې موقیعت پورې تړلی دی. په داسې موقیعت کې،دشرودینګرمعادله ټول دوخت پورې تړلې برخوپه لېرې کولوسره ساده کیږي.

مونږپه یوبعدکې دشروډینګرمعادله لرو !

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \qquad (2.12)$$

چیرته چې $\Psi = \Psi(x, t)$ دی.

دمتحولینوپه جداکولوسره دغه معادله حلیدای شي.

فرضووچې!

$$\Psi(x,t) = \psi(x).\phi(t) \qquad (2.13)$$

(2.13)معادله په (2.12) معادله کې کاروو اوحاصلوو!

$$i\hbar \frac{\partial \psi\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi\phi}{\partial x^2} + V\psi\phi$$

$$\therefore \qquad i\hbar\psi \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi\phi$$

پورته معادله $\psi\phi$ ویشو اوحاصلوو

$$i\hbar \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \qquad (2.14)$$

دپورته معادلې ښې خوا یوازې د**x** تابع اوچپه خوایوازې د **t** تابع ده، دا یوازې هغه وخت ممکن ده، چې دواړه خوادکوم ثابت مثلا **E** سره مساوي شي. ددې لپاره، داثابت مونږ**E** انرژي ښایوځکه چې په ښي خوا کې اول حد حرکي انرژي او دویم حدپوتنشیل انرژي ده. بناپردې،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V = E \qquad (2.15)$$

او

$$i\hbar \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = E \qquad (2.16)$$

د(2.15)او(2.16)معادلې څخه دامشاهده شوې ده، چې**E** دانرژي بعدلري (2.15) معادله داسې هم لیکل کیږي

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0 \qquad (2.17)$$

دادشروډینګریوبعدي دوخت څخه مستقله معادله ده. تراوسه پورې تفاضلي معادله کې دوخت **t** متحول شامل نه دی. د ψ حل هم وخت پورې تړلی نه دی. ځکه نومعادلې ته دثابت حالت معادله وایي.

په دری بعدي کې دشروډینګردوخت څخه مستقله معادله!

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{dy^2}+\frac{\partial^2\psi}{dz^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0$$

یا

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0 \qquad (2.18)$$

دلته $\psi=\psi(x,y,z)$ دی او $\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{dy^2}+\frac{\partial^2\psi}{dz^2}$ دلاپلاس اوپراتوردی.

دمعادلې دوخت دبرخې حل

(2.16) معادله داسې هم لیکلای شو

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}E$$

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}E$$

$$\therefore \qquad \frac{d\phi}{\phi}=-\frac{i}{\hbar}Edt$$

انتیګرال نیولو څخه وروسته حاصلوو

$$\ln(\phi) = -\frac{i}{\hbar}Et$$

$$\therefore \qquad \phi = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

په نتيجه کې،مونږليکلای شو

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \qquad (2.19)$$

(2.17)معادله دوخت څخه مستقله دشرودينګرمعادلې په نوم يادېږي،ځکه دوخت متحول په دې معادله کې داخل نه دی. د(2.17) معادلې $\psi(x)$حل دشرودينګردمعادلې دحلونو $\Psi(x,t)$ پورې مربوط فضاء تشريح کوي. په ټولوحالتونوکې دشرودينګردوخت څخه مستقله معادله کېدای شي د i موهومي عددونلري او د دې لپاره ددې حل $\psi(x)$ په ضروري توګه پيچلې نه وي. د $\psi(x)$ تابع دايګن تابع په نوم يادېږي.

په دری بعدي کې ،موج تابع عبارت ده له

$$\Psi(x,y,z) = \psi(x,y,z)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

شاګردان بايددوخت پورې تړلې دشرودينګردمعادلې اودوخت څخه مستقله دشرو دينګر دمعادلې ترمنځ توپير اوهمدارنګه دايګن تابع اوموج تابع ترمنځ توپيرپه يادولري. موج تابع هميشه په غټ حرف Ψ سره ښودل کيږي اودايګن تابع په کوچني حرف ψ سره ښودل کيږي. $\psi(x)$ دايګن تابع دشرودينګر دوخت څخه مستقلې معادلې حل دی،مګر $\Psi(x,y,z)$په خپله د شرودينګردمعادلې حل دی او (2.19)معادله کې ښودل شوې ده.

2.4 دموج تابع شرطونه

دشرودينګر،دوخت څخه مستقلې معادلې دمنلو وړحل لپاره د $\psi(x)$ موج تابع اودهغه داول مشتق $\frac{d\psi}{dx}$بايدټاکلي اړتياووته قناعت ورکړي، دغه اړتياوې په لاندې ډول دي:

$\psi(x)$ بایدپه ټولو ځایونوکې مسلسله وي مثلآ دفضاپه هره نقطه اوهرځای کې.

$\psi(x)$ تابع بایدپه هرځای کې محدوده وي.

$\psi(x)$ تابع باید په هرځای کې یوقیمته وي.

په مشابه ډول،اول مشتق یې بایدخامخا په هرځای کې مسلسل ،محدود اویوقیمته وي. په ترتیب سره دې ډاډورکولولپاره چې موج تابع خامخاپه ریاضیکي توګه ښه کارورکړی وي پورتنۍ اړتیاوې موج تابع ته ورپه غاړه شوی. داضرورت دی ځکه داندزې وړهغه کمیتونه به ،چې دموج تابع څخه ارزیابي کېدای شي هم ښه کار ورکړي.(2.1)شکل دموج تابع دخواصو دمعنی تشریح کوي.که چیرې $\psi(x)$او $\frac{d\psi}{dx}$ محدود اویوقیمته نه وي، نو $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ او ددې مشتقات $\frac{d\Psi(x,t)}{dx}=e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\frac{d\psi(x)}{dx}$ به مسلسل اویوقیمته نه وي.

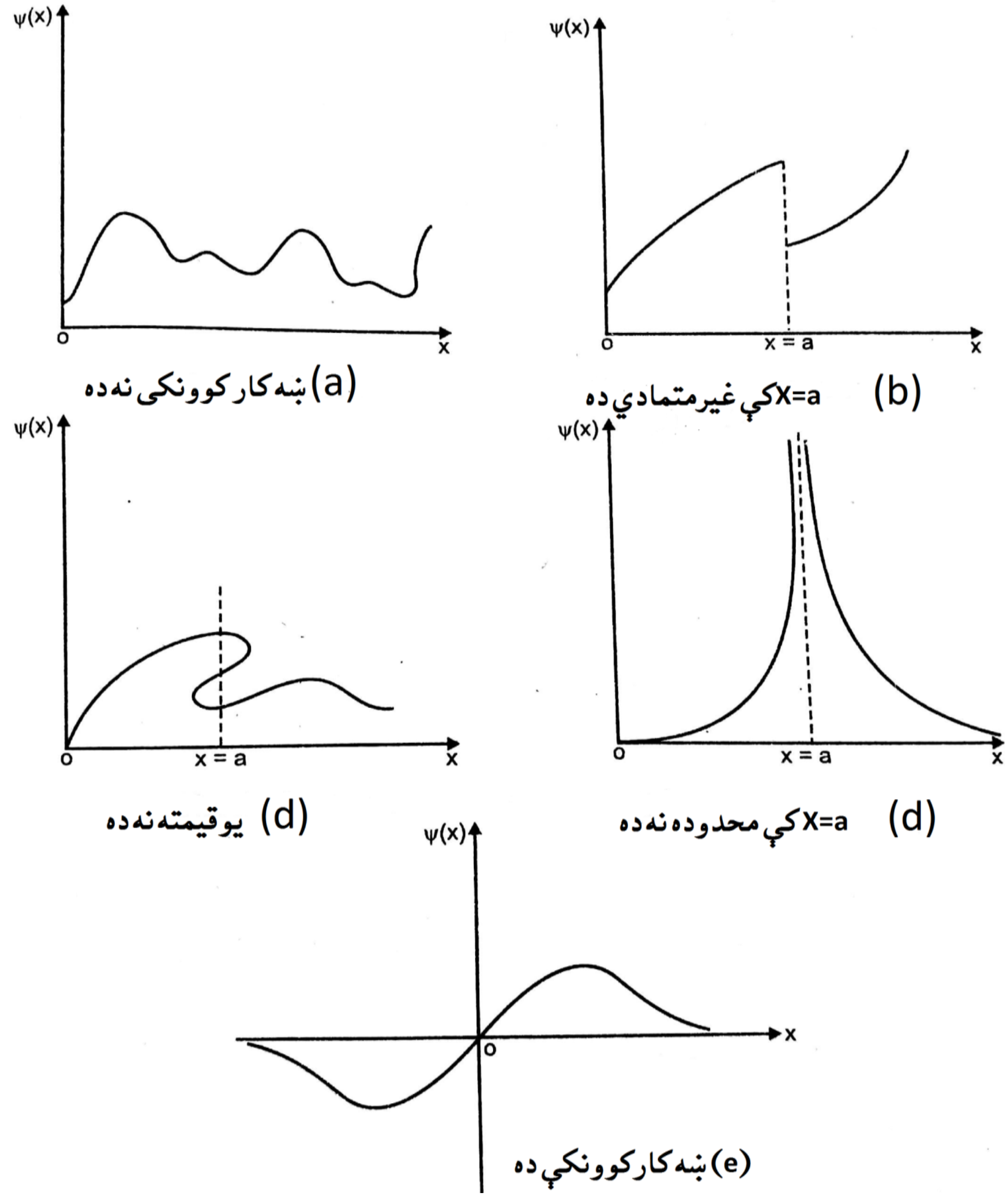
د **p** او**x** دمتوسط قیمتونودمحاسبې عمومي فورمول $\psi(x,t)$ یا $\frac{d\Psi(x,t)}{dx}$ لري. ددې لپاره یوددې حالتونوڅخه مونږشایدداندازه کولووړکمیت محدوداونامحدودقیمتونه لاسته رانه وړو، داپه مکمل ډول دمنلووړنه دی ځکه داندازه کیدلووړ کمیتونه لکه $<x>$ او $<p>$ په نامناسبه طریقه کارنکوي.

داچې $\frac{d\psi}{dx}$ محدودوي،موج تابع بایدمسلسله وي که چیرې موج تابع غیرمسلسله وي، نواول مشتق $\frac{d\psi}{dx}$ به یې جداوالي کې نامحدودوي اودوهم ترتیب مشتق به یې هم نامحدودوي، مونږدشروډینګر، دوخت څخه مستقله معادله لرو

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0$$

د E,V او $\psi(x)$ محدودقیمتونو لپاره ،دوهم مشتق $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ باید محدودوي. داغوښتنه کوي، چې $\frac{d\psi}{dx}$ بایدمحدود اوپه همدې دلیل موج تابع باید مسلسله وي.

په نتیجه کې داضرورده چې موج تابع خامخاپه ریاضیکي توګه ښه کارکړې وي اوپورتنۍ اړتیااووته یې جواب ورکړي.په (2.1)شکل کې په،(d)،(c)،(b) (a)کې موج تابع دقبول وړنه ده،موج تابع په (e)کې ښه کارکوونکې اودقبول وړده.



2.1 شکل: دموج تابع مختلف ډولونه

2.5 د جریان احتمالي کثافت، دمتمادیت معادله اودهغوې فزیکي اهمیتونه

دموج تابع فزیکي تعبیر دا وایي، چې دادفضاپه ټاکلې ساحه کې دذرې دپیدا کیدو د احتمال یوه اندازه ده. احتمالي کثافت داسې ورکړشوی دی $\rho = \Psi\Psi^*$، چیرته چې Ψ^* د Ψ پیچلې جوړه ده، ددې لپاره چې ذره په یقیني توګه دفضا په بعضې ځای کې پیداشي نوټولیز احتمال باید مساوي یو شي، مثلاً $\int_\tau \Psi\Psi^* d\tau = 1$ دلته $d\tau$ عنصري حجم دی. په بل عبارت ،موج تابع بایدیو (unity) ته ساده شوې وي. اوس بایددغه جمله دهروخت لپاره صحیح وي،ځکه چې ذره به په یقني توګه دفضاپه ټوله ساحه کې په بعضې ځایونوکې کې پیداکېدای شي. ددې لپاره ټولیزاحتمال بایدساتل شوی وي ،مثلاً $\Psi\Psi^*$ بایددوخت څخه مستقل وي داورکوي چې

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \Psi\Psi^* d\tau\right) = 0$$

یا

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*) d\tau = 0 \qquad (2.20)$$

مونږلیکلای شو

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \Psi\Psi^* d\tau\right) = \int \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*) d\tau$$

یا

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*) d\tau = \int \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\right] d\tau \qquad (2.21)$$

مونږدشروډینګردوخت پورې تړلې معادله لرو

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad (2.22)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi\right)$$

د (2.22)معادلې پیچلې جوړه عبارت ده له

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^* \qquad (2.23)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=-\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*\right)$$

په (2.21)معادله کې د $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ او $\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}$ قیمتونو په کارونې، حاصلوو

$$\int\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)d\tau=\int\left[\Psi^*\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi\right)-\Psi\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\int\left[\Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi\right)-\Psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{i\hbar}\int\left[-\frac{\hbar^2}{2m}[\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*]+V\Psi\Psi^*-V\Psi^*\Psi\right]d\tau$$

څرنګه چې $V\Psi^*\Psi=V\Psi\Psi^*$، حاصلوو

$$\int\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)d\tau=\frac{1}{i\hbar}\int\left[-\frac{\hbar^2}{2m}[\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*]\right]d\tau$$

$$\int\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)d\tau=-\frac{\hbar}{2mi}\int_\tau[\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*]d\tau \qquad (2.24)$$

دګرین تیوري په کارونې حجمي انتیګرال سطحي انتیګرال باندې بدلیږي، په نتیجه کې،

$$\int_\tau[\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*]d\tau=\int_s[\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*]\vec{ds}$$

دې معادلې سره(2.24)معادله داسې شکل غوره کوي،

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)d\tau = -\frac{\hbar}{2mi}\int_s [\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*]\vec{ds}$$

یا

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*)d\tau = -\int_s \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*]\vec{ds}$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*] \qquad (2.25)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \Psi\Psi^* d\tau\right) = -\int_s \vec{j}.\vec{ds}$$

$$\therefore \qquad \int \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau = -\int_s \vec{j}\,\vec{ds} \qquad (2.26)$$

دګاوس دډيورجانس تیوري له مخې $\int_s \vec{j}.\vec{ds} = \int_\tau \nabla.\vec{j}\,d\tau$

دا قیمت په(2.26)معادله کې وضع کوو ،حاصلوو

$$\int \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau = -\int_\tau \nabla.\vec{j}d\tau$$

$$\therefore \qquad \int_\tau \left(\nabla.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau = 0$$

دا دهراختیاري حجم لپاره صحیح ده په نتیجه کې،

$$\nabla.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (2.27)$$

(2.27)معادلې ته داتصال یامتمادیت معادله وایي، دامعادله دسیالاتو میخانیک کې داتصال معادلې سره یو شی ده مونږلرو

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*]$$

$\vec{j}$ داحتمالي جریان کثافت دی او داسې هم لیکل کیږي

$$\vec{j} = \text{Re}\left[\Psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla\Psi\right]$$

دلته Re دلوی قوس په داخل کې دکمیت دحقیقي برخې لپاره کارکوي.

دمتمادیت دمعادلې فزیکي اهمیت

(i) (2.26) معادله کېدای شي داسې هم ولیکل شي

$$\nabla.\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

که چیرې $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ مثبت وي، $\nabla.\vec{j}$ منفي دی،نوبیااحتمالي جریان داخل خواته روان دی اوپه ورکړشوې ساحه کې ټولیزاحتمالي کثافت زیاتیږي، که په ورکړشوي حجم کې احتمالي کثافت زیاتوالی وکړي ، نو په بعضې نوروځایونوکې کثافت کمیږي.

که چیرې $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ منفي وي، $\nabla.\vec{j}$ مثبت دی،نودلته احتمالي جریان بهرخواته روان دی اوپه ورکړ شوې ساحه کې ټولیزاحتمالي کثافت کمیږي، که په ورکړشوي حجم کې احتمالي کثافت زیاتوالی کوي، نوپه بعضې نوروځایونوکې کثافت کموالی کوي.

(ii) که چیرې د ρ هرحالت دوخت څخه مستقل وي،نوبیا $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. نوځکه ، $\nabla.\vec{j} = 0$.دې حالتونو ته ثابت حالتونه وایي.

2.6 په کوانټم میخانیک کې د یو اوپراتورتعریف

ریاضیکي عملیې، لکه ډیفرنسیال،انتیګرال نیونه،ضرب،تقسیم،جمع،تفریق اوداسې نوردخاصو سمبولونوپه واسطه چې د اوپراتورونوپه شکل پیژندل شوي، تشریح کیږي. په بل عبارت اوپراتور $\hat{O}$یوه ریاضیکي عملیه ده کوم چې کیدای شي په $f(x)$ تابع تطبیق شي او $f(x)$ په یوه بله $g(x)$ تابع بدلوي.داپه دې توګه تشریح کیدای شي

$$\hat{O}\, f(x) = g(x)$$

دمثال په ډول،

$$\frac{d}{dx}(4x^2 + 2x) = 8x + 2$$

د اوپراتورپه ژبه کې $\hat{O} = \frac{d}{dx}$ په $f(x) = 4x^2 + 2x$ تابع عمل کوي او هغه $g(x) = 8x + 2$ تابع ته بدلوي.

په کوانټم میخانیک کې اوپراتورونه

موج تابع عبارت ده له

$$\Psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

د(2.2)معادلې نظرxته ډیفرنسیال نیسو ،مونږحاصلوو

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

یا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\Psi$$

$$\therefore \qquad p\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

یا

$$p\Psi = -i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (2.28)$$

د $\Psi(x,t)$ نظر **t** ته ډیفرنسیال نیسو ،مونږحاصلوو

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

یا

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\Psi$$

$$\therefore \qquad -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

یا

$$E\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad (2.29)$$

(2.28)معادله ښايي، چې دp ډینامیکي کمیت اود $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ډیفرنسیالي اوپراتورترمنځ تړاوشته دی. دا p سره د $\Psi(x,t)$ د ضرب اثردی چې په $\Psi(x,t)$ تابع باندې دډیفرنسیالي اوپراتور د عمل کولوسره یوشان دی.دغه ډیفرنسیالي اوپراتورته مومنټم اوپراتوروایي. اوپه دې توګه لیکل کیږي

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad (2.30)$$

لکه څنګه چې دا دx متحول پورې تړلی دی،په نتیجه کې ،مونږحاصلوو

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

دمومنټم اوپراتورپوري تړلې اجزاوې دy او z متحولینولپاره

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

او

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

په دری بعدي کې، دمومنټم اوپراتورداسې دی

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

د(2.29) معادلې څخه ،مشابه تړاو د ډینامیکي متحول E اوډیفرنسیالي اوپراتور $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ترمنځ پیداکولای شونوڅکه،

$$E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad (2.31)$$

مونږدشرودینګر، دوخت څخه مستقله معادله لرو

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V) = 0$$

یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$$

یا

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = E\psi$$

یا

$$H\psi = E\psi$$

دلته $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$ ډیفرنسیالي اوپراتوردهملتون اوپراتورپه نوم یادیږی.

دایګن تابع اودایګن قیمت

فرضوو،چې ψ دسیستم دحالت ښه کارکوونکي تابع ده، په دې تابع د $\hat{A}$ اوپراتوردلاندې معادلې سره سم تطبیق شوې ده

$$\hat{A}\psi(x) = a\psi(x) \qquad (2.33)$$

چیرته چې a عدد دی نوموړوایو،چې a د $\hat{A}$ اوپراتوردایګن قیمت دی اوعملیات شوې $\psi(x)$ تابع د $\hat{A}$ اوپراتوردایګن تابع ده. ایګن جرمني لغت دی، چې معنی یې خاصیت یاخاص دی.

یواوپراتوریوه قاعده ده په کوم سره چې یوه تابع په بله تابع بدلیږي.دمثال په ډول، یو $\frac{d}{dx}$ اوپراتورپه یوه تابع عمل کوي مثلآ

$$f(x) = x^n$$
$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

بل مثال یې،

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{4x} = 16e^{4x}$$

موږوایوچې $\frac{d^2}{dx^2}$ یواوپراتوردی چې په e^{4x} تابع باندې عمل کوي اونتیجه $16e^{4x}$ کیږي، عملیات شوې تابع د $\frac{d^2}{dx^2}$ اوپراتوردایګن تابع ده او16 دایګن عدد دی.

دکلي انرژيE اوپراتورد(2.3)معادلې څخه عموماً داسې ليکو !

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

اودې ته دهملتون اوپراتوروايي. كه د $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$ هملتون اوپراتورپه ψ_nموج تابع عمل وکړي،مونږحاصلوو

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi_n = E_n\psi_n$$

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

ψ_n تابع ته دايګن تابع وايي او E_n دسيستم ديوحالت لپاره ، دهملتون داوپراتور، دانرژي دايګن قيمت دی.

2.7 متوسط قيمتونه

اصغري غيريقين والی په کوم سره چې دفزيکي کميتونو دوه پيچلې جوړې کېدای شي اندازه شي داسې ورکول کيږي

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

يا

$$\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

کله چې دشرودينګرموجي معادله ديوې ذرې لپاره دضروري سرحدي شرايطوسره حل شي، د $\Psi(x,y,z)$ حل ټول هغه معلومات (موقيعت،مومنتم،انرژي اوداسې نور)ورکوي، چې دهايزنبرګ دغيريقين والي اصل په واسطه اجازه ورکړشوې وي. دغه معلومات داحتمال په حدونوکې دی اوپه هغه حدونوکې نه دی چې دقيق قيمتونه لري.

داسې فکروکړئ! چې $\Psi(x,t)$ دیوې ذرې سره تړلې تابع ده،په یو سیستم کې دیوې ذرې دموقیعت اندازه کېدنه دموج تابع په واسطه تشریح شویده، دلته یو محدود داحتمال دی، چې یوه ذره د کوارد ینا تو په هرسیستم کې د x او x+dx په رنج کې دومره اوږدچې موج تابع په دې رنج کې صفرنه وي،پیداکېدای شي.په عمومي توګه موج تابع د x محورپه غزیدلي رنج کې صفرنه وي. نو،عموماً مونږپدې نه توانېږو،چې داسې کواردینات وټاکوچې محدود قیمت ولري. مونږ،ددې دپاره،دذرې متوسط قیمت محاسبه کوو،که چیرې $p(x,t)dx = \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)dx$ په x او x+dx رنج کې دذرې دپیداکېدو احتمال وي نوپه ټول رنج کې د **x** متوسط قیمت په دې ډول دی

$$< x >= \frac{\int xp(x,t)dx}{\int p(x,t)dx}$$

یا

$$< x >= \frac{\int \Psi^* x\Psi dx}{\int \Psi^* \Psi dx} \qquad (2.34)$$

که موج تابع ساده شوې وي مونږلرو،چې دټولې ساحې لپاره $\int \Psi^* \Psi dx = 1$ ،نوپه نتیجه کې

$$< x >= \int \Psi^* x\Psi dx \qquad (2.35)$$

په نتیجه کې،په عمومي توګه ، د f دهرډینامیکي متحول وسطي قیمت چې د $\Psi(x,t)$ موج تابع په واسطه لاسته راځي داسې ورکول کېږي

$$< f >= \frac{\int \Psi^* f \Psi dx}{\int \Psi^* \Psi dx}$$

دساده شوې موج تابع لپاره

$$< f >= \int \Psi^* f \Psi dx$$

دانرژي اومومنټم وسطي قیمتونه په یوه طریقه نه پیداکیږي.ځکه په کوانټم میخانیک کې، دغیریقین والي داصل له مخې دامکن نه دی چې p مومنټم د **x** دتابع په شان ولیکي،لکه څنګه چې p

او **x** په دقیق دقت سره په مسلسله توګه نه شي اندازه کېدای. دا ممکن نه ده چې p د **t** دتابع په شان ولیکي.په مشابه ډول،مونږ E د x او t دتابع په شان نه شو اخیستلای، نوپه دې اساس د p او **E** دوسطي قیمتونولاسته راوړلولپاره مطابق اوپراتورونه په انتیګرالي شکل استعمالیږي نو،

$$< P >= \int \Psi^* \hat{P} \Psi dx$$

$$= \int \Psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \Psi dx$$

$$\therefore \quad < p >= -i\hbar \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \qquad (2.36)$$

په مشابه ډول،

$$< E >= \int \Psi^* (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) \Psi dx$$

$$< E >= i\hbar \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx \qquad (2.37)$$

په نتیجه کې،که چیرې ډینامیکي متحول په اوپراتورحالت کې وښودل شي،نو متوسط قیمت یې دمربوطه اوپراتورپه استعمال لاسته راځي.

دایرینفسټ قضیه

مونږپوهیږو،چې دذرې مومنټم دذرې دکتلې اودڅپودپاکټ دګروپ سرعت حاصل ضرب سره په خاص شکل چې دې سره تړلی دی، مساوي دی، مګردطرزالعمل داډول، دعمومي موقیعت سره مناسب نه دی، په کوم کې چې دڅپه ایزپاکټ شکل او اندازه لکه پاکټ چې حرکت کوي تغیریږي. بیایوه پوښتنه راولاړیږي چې څنګه $< p_x >$ او $< x >$ دڅپې پاکټ په شان عمل کوي، داچې، دا $\frac{d < x >}{dt}$ څه شی دی؟ دامشکل دایرینفسټ په واسطه حل شو، دهغه مطابق په کلاسیک فزیک کې دنیوټن دحرکت قانون داسې دی.

$$m \frac{dx}{dt} = p \qquad , \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dx}$$

تراوسه پورې په کوانټم میخانیک کې په سمه توګه دابرابروي، چې دډینامیکي متحولینومتوسط قیمتونه مونږ وکاروو،دادایرینفسټ قضیه ده. په بل عبارت ،دقضیې دریځ دادی، چې دڅپه ایزپاکټ حرکت دذرې دکلاسیکي حرکت مطابق حرکت سره موافق دی.

دایرینفسټ قضیې داسې دي

1. لمړۍ قضیه:

$$m\frac{d<x>}{dt} = <p_x>$$

دټولو داجزاولپاره،

$$m\frac{d<\vec{r}>}{dt} = <\vec{p}>$$

2. دوهمه قضیه:

دمحافظوي قوې ساحې لپاره،

$$\frac{d<p_x>}{dt} = <-\frac{dV}{dx}>$$

دټولواجزاولپاره،

$$\frac{d<\vec{p}>}{dt} = <-\nabla V>$$

دلمړۍ قضیې ثبوت:

د x متوسط قیمت داسې ورکول شوی دی

$$<x> = \int \Psi^* x \Psi d\tau$$

$$\therefore \qquad \frac{d<x>}{dt} = \int \left(\frac{d\Psi^*}{dt} x\Psi + \Psi^* x \frac{d\Psi}{dt}\right) \qquad (2.38)$$

مونږ دوخت پورې تړلې دشرودینګرمعادله لرو

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi$$

دپورته معادلې پیچلې جوړه عبارت ده له

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*)$$

د $\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}$ او $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ قیمتونه په (2.38) معادله کې وضع کوو ،مونږ حاصلوو

$$\frac{d<x>}{dt}=\int\left[(\frac{1}{i\hbar}(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*))x\Psi+\Psi^*x(\frac{1}{i\hbar}(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi))\right]d\tau$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\int_\tau\left[(\nabla^2\Psi^*)x\Psi-\Psi^*x(\nabla^2\Psi)\right]d\tau$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\left[\int_\tau(\nabla^2\Psi^*)x\Psi d\tau-\int_\tau\Psi^*x(\nabla^2\Psi)d\tau\right] \qquad (2.39)$$

دګرین دویمه قضیه داسې ده

$$\int_\tau[\Psi_1(\nabla^2\Psi_2)-\Psi_2(\nabla^2\Psi_1)]d\tau=\int_s[\Psi_1\nabla\Psi_2-\Psi_2\nabla\Psi_1]\vec{ds}$$

S داسې یوه سطحه ده ،چې τ حجم یې رایسارکړی دی.

فرضوو، چې $\Psi_1=\Psi^*$ او $\Psi_2=x\Psi$ دی، نودپورتنۍ قضیې په کارونې سره حاصلوو چې

$$\int_\tau[\Psi^*\nabla^2(x\Psi)-(x\Psi)\nabla^2\Psi^*]d\tau=\int_s[\Psi^*\nabla(x\Psi)-(x\Psi)\nabla\Psi^*]\vec{ds} \qquad (2.40)$$

څرنګه چې حجمي انتیګرال په ټوله فضاکې دی، دSسطحه به ، کومه چې ټول حجم را ایسا روي په لایتناهي کې وي مګرپه لایتناهي کې $\Psi \to 0$ او $\nabla\Psi \to 0$ دی. همدارنګه په پورتني حالت کې سطحي انتیګرال په لایتناهي کې له منځه ځي. په نتیجه کې،د(2.40) معادلې څخه مونږ حاصلوو

$$\int_\tau \left[\Psi^* \nabla^2 (x\Psi) - (x\Psi)\nabla^2 \Psi^*\right] d\tau = 0$$

یا

$$\int_\tau \Psi^* \nabla^2 (x\Psi) d\tau - \int_\tau (x\Psi)\nabla^2 \Psi^* d\tau = 0$$

$$\int_\tau (x\Psi)\nabla^2 \Psi^* d\tau = \int_\tau \Psi^* \nabla^2 (x\Psi) d\tau \qquad (2.41)$$

(2.39)معادلې په بڼې خواکې د(2.41) معادلې په کارونه مونږحاصلوو

$$\frac{d<x>}{dt} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\int_\tau \Psi^* \nabla^2 (x\Psi) d\tau - \int_\tau \Psi^* x(\nabla^2\Psi) d\tau\right]$$

$$\frac{d<x>}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\int_\tau \Psi^* \nabla^2 (x\Psi) d\tau - \int_\tau \Psi^* x(\nabla^2\Psi) d\tau\right] \qquad (2.42)$$

اوس $\nabla^2(x\Psi)$ حدپه پام کې نیسو، مونږلرو

$$\begin{aligned}
\nabla^2 (x\Psi) &= \frac{\partial^2 (x\Psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x\Psi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x\Psi)}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial (x\Psi)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (x\Psi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x\Psi)}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\Psi + x\frac{\partial\Psi}{\partial x}) + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \\
&= 2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + x(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2})
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \nabla^2(x\Psi) = 2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + x\nabla^2\Psi$$

داپه(2.42) معادله کې کاروو ،مونږحاصلوو

$$\frac{d<x>}{dt} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\int_\tau \Psi^*(2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + x\nabla^2\Psi)d\tau - \int_\tau \Psi^* x(\nabla^2\Psi)d\tau\right]$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left[\int_\tau \Psi^*(2\frac{\partial\Psi}{\partial x}) + \int_\tau \Psi^* x\nabla^2\Psi d\tau - \int_\tau \Psi^* x(\nabla^2\Psi)d\tau\right]$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\int_\tau \Psi^*(2\frac{\partial\Psi}{\partial x})d\tau$$

$$= -\frac{i\hbar}{m}\int_\tau \Psi^*(\frac{\partial\Psi}{\partial x})d\tau$$

$$\therefore \quad \frac{d<x>}{dt} = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\int_\tau \Psi^*(\frac{\partial\Psi}{\partial x})d\tau\right)$$

مګرد(2.36) معادلې څخه ، $<p_x> = -i\hbar\int \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx$

$$\therefore \quad \frac{d<x>}{dt} = \frac{<p_x>}{m} \qquad (2.43)$$

داغوښتونکې نتیجه ده،کوم چې په منځنۍ توګه دموقیعت اومومنټم ترمنځ کلاسیکي تړاو ورکوي. که څه هم دا دواړه همزمان په دقیقه توګه پېژندل کېدای نه شي.

ددوهمې قضیې ثبوت:

مونږدمومنټم متوسط قیمت لروچې

$$<p_x> = -i\hbar\int \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\tau$$

نظر **t** ته ډیفرنسیال نیسو ،مونږحاصلوو

$$\frac{d<p_x>}{dt}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$
$$=-i\hbar\int\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)d\tau$$
$$=-i\hbar\int\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)d\tau$$

$$\therefore\qquad \frac{d<p_x>}{dt}=\int_\tau\left[\left(-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left(i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right]d\tau \qquad (2.44)$$

مونږدوخت پورې تړلې دشرودينګر معادله لرو

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi$$

دپورته معادلې پيچلې جوړه عبارت ده له

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*$$

په (2.44) معادله کې دپورته دواړه معادلوپه کارونه ،مونږحاصلوو

$$\frac{d<p_x>}{dt}=\int_\tau\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*+V\Psi^*\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\hbar 2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi\right)\right]d\tau$$
$$=\int_\tau\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}+V\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Psi)-\Psi^*\frac{\partial V\Psi}{\partial x}\right]d\tau$$
$$=\int_\tau\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}+V\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2(\frac{\partial\Psi}{\partial x})-\Psi^*\frac{\partial V\Psi}{\partial x}\right]d\tau$$

بېې خوادحدونوپه دوباره ترتيب سره ،مونږحاصلوو

$$\frac{d<p_x>}{dt}=\frac{\hbar^2}{2m}\int_\tau\left[\Psi^*\nabla^2(\frac{\partial\Psi}{\partial x})-\nabla^2\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]d\tau+\int_\tau\left[V\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi^*\frac{\partial V\Psi}{\partial x}\right]d\tau \qquad (2.45)$$

داول حدانتيګرال په پام کې نيسو،

$$\int_\tau \left[\Psi^* \nabla^2 (\frac{\partial \Psi}{\partial x}) - \nabla^2 \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] d\tau$$

دګرين د دوهمې قضيې په کارونې ، مونږ دغه انتيګرال سطحې انتيګرال ته بدلوو

$$\int_\tau \left[\Psi^* \nabla^2 (\frac{\partial \Psi}{\partial x}) - \nabla^2 \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] d\tau = \int_s \left[\Psi^* \nabla (\frac{\partial \Psi}{\partial x}) - \nabla \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \vec{ds}$$

مګر د **S** سطحه ټول حجم محاصره کوي. سطحه په لايتناهي کې ده، مګر په لايتناهي کې Ψ او دهغې اول ترتيب مشتق صفر ته ميلان کوي. په نتيجه کې، سطحي انتيګرال صفر دی نو مونږ حاصلوو

$$\int_\tau \left[\Psi^* \nabla^2 (\frac{\partial \Psi}{\partial x}) - \nabla^2 \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] d\tau = 0$$

په (2.45) معادله کې ددې په کارونې ،مونږ حاصلوو

$$\frac{d < p_x >}{dt} = \int_\tau \left[V\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial V\Psi}{\partial x} \right] d\tau$$

$$\int_\tau \left[- \Psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \Psi \right] d\tau$$

$$\therefore \qquad \frac{d < p_x >}{dt} = \int_\tau \Psi^* \left(- \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Psi d\tau$$

دپورته معادلې ښي خوا د $-\frac{\partial V}{\partial x}$ متوسط قيمت تشريح کوي.

$$\therefore \qquad \frac{d < p_x >}{dt} = \langle -\frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

داغوښتل شوې نتيجه ده، دلته دمتوسطو قيمتونو ترمنځ رابطه موجوده ده ،کوم چې په دقيقه ډول د نيوټن دوهم قانون سره موازي ده او دپوتنشيل انرژۍ په موده کې ظاهريږي.

تشریحي مثالونه

2.1 مثال: دیوې ازادې ذرې موج تابع په $(-\infty,+\infty)$ رنج کې په دې ډول ورکړل شوې ده

$$\psi(x) = e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}$$

موج تابع ساده کړئ اود p_x , x متوسط قیمت پیدا کړئ.

حل: برسیره پردې چې موج تابع ساده کړو، بنې خو اپه A کې ضربوو،

$$\therefore \qquad \psi(x) = Ae^{-\alpha \frac{x2}{2}}$$

دساده کېدنې شرط عبارت دی له

$$\int \Psi\Psi^* dx = 1$$

یا

$$\int |\Psi|^2 dx = 1$$

$$\therefore \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\alpha \frac{x2}{2}} A^*e^{-\alpha \frac{x2}{2}} dx = 1$$

$$\therefore \qquad AA^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{x2}{2}} dx = 1$$

یا

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} dx = 1$$

مونږعمومي انټیګرال لروچې

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$|A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

$$|A|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$A = (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}}$$

$$\psi(x) = (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}$$

د **x** متوسط قیمت په لاندې ډول دی

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi x \Psi^* dx$$

یا

$$\therefore \qquad < x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= (\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} dx$$

په ښي خوانټیګرال طاق دی او قیمت یې صفرسره مساوي دی.

$$\therefore \qquad < x >= 0$$

د $<p_x>$ متوسط قیمت عبارت دی له :

$$< p_x > = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}\right) dx$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}\right) dx$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} (-\alpha x).e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= i\hbar\alpha \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$$

په بنې خوا انتیګرال طاق دی او قیمت یې صفر دی،

$$\therefore \qquad < p_x > = 0$$

2.2 مثال: $\psi(x) = \frac{1+ix}{1-ix^2}$ موج تابع د **x** په $(-\infty,+\infty)$ رنج کې ساده کړئ.

حل: موج تابع داسې لیکو چې $\psi(x) = A\frac{1+ix}{1-ix^2}$ ده، دلته A د ساده کېدنې ثابت دی.

$$\therefore \qquad \psi\psi^* = A^* \frac{1-ix}{1-ix^2} A \frac{1+ix}{1+ix^2}$$

د ساده کېدنې شرط عبارت دی له

$$\int |\Psi|^2 dx = 1 \quad , \quad \int \Psi\Psi^* dx = 1$$

$$\therefore \qquad |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x2}{1+x^4} dx = 1$$

انتیګرال په نظرکې نیسو ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

فرضووچې $x-\frac{1}{x}=t$ دی

دواړه خواوې مربع کوو ، مونږ حاصلوو

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=t^2$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

$$dt=(1+\frac{1}{x^2})dx$$

داپه پورته انتیګرال کې کاروو ، مونږ حاصلوو

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}dt$$

د **t** رنج هم د $-\infty$ څخه تر $+\infty$ پورې دی لکه څنګه چې $x\rightarrow\infty$ کوی نو $t\rightarrow\infty$ هم کوي،

$$\therefore \quad |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}dt=1$$

$$\therefore \quad |A|^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right]_{-\infty}^{+\infty}=1$$

$$|A|^2\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right]=1$$

$$|A|^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}=1 \Rightarrow A=(\frac{\sqrt{2}}{\pi})^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \psi(x)=(\frac{\sqrt{2}}{\pi})^{\frac{1}{2}}\frac{1+ix}{1+ix^2}$$

2.3مثال : دیوې ذرې لپاره دموقیعت اومومنتم متوسط قیمتونه پیدا کړئ؟ که موج تابع یې په دې ډول وي

$$\Psi(x,t) = A.e^{-\frac{x^2}{2a}+ikx}$$

د **x** رنج $(-\infty,+\infty)$ دی

حل: که چیرې A د ساده کېدنې ثابت وي نو بیا $\int \Psi\Psi^* dx = 1$ ،

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\frac{x^2}{2a}+ikx}.A^*e^{-\frac{x^2}{2a}-ikx} dx = 1$$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}}.dx = 1..............................(i)$$

د **x** متوسط قیمت عبارت دی له

$$<x> = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi x\Psi^* dx$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{a}} dx$$

ښي خوا انتیګرال طاق دی بناپردې قیمت یې صفر دی

$$\therefore \qquad <x> = 0$$

دمومنتم متوسط قيمت عبارت دی له

$$< p_x > = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-\frac{x2}{2a} - ikx} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(A e^{-\frac{x2}{2a} + ikx}\right) dx$$

$$= -i\hbar |A| 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x2}{2a} - ikx} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x2}{2a} + ikx}\right) dx$$

$$= -i\hbar |A| 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x2}{2a} + ikx} \left(-\frac{x}{a} + ik\right) e^{-\frac{x2}{2a} + ikx} dx$$

$$\therefore \quad < p_x > = -i\hbar |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{x2}{2a} - ikx} \left(-\frac{x}{a}\right) e^{-\frac{x2}{2a} + ikx} + e^{-\frac{x2}{2a} - ikx} ik.e^{-\frac{x2}{2a} + ikx} \right) dx$$

$$= |A|^2 \frac{i\hbar}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{a}} dx + \hbar k |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} dx$$

په ښي خوالمړی انتيګرال طاق دی او قيمت يې صفر دی او دويم حد په (i) معادله کې کارو و، مونږ حاصلوو

$$< p_x > = \hbar k$$

2.4 مثال : په لاندې ډول د ذرې موج تابع په پام کې ونيسئ! د ساده کېدنې ثابت او د $< x >$ پيدا کړئ.

$$\Psi(x) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right) = |A|^2 \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{a}{2} < x < a$$

حل

$$|\Psi(x)|^2 = A\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 = |A|^2\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)$$

مونږلرو

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\therefore \quad |A|^2 \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 1$$

$$|A|^2 \left[x-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a} = 1$$

$$|A|^2 \left[a-\frac{a^2}{a}+\frac{a^3}{3a^2}-\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4a}+\frac{a^3}{24a^2}\right)\right] = 1$$

$$|A|^2\left(\frac{a}{24}\right) = 1$$

$$|A| = \sqrt{\frac{24}{a}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{24}{a}}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

د **x** متوسط قیمت داسې ورکول کیږي

$$< x > = \int_{\frac{a}{2}}^{a} x|\psi(x)|^2 dx$$

$$= |A|^2 \int_{\frac{a}{2}}^{a} x(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}) dx$$

$$= \frac{24}{a}\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(x-\frac{2x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{24}{a}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= \frac{24}{a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3a} + \frac{a^4}{4a^2} - \left(\frac{a^2}{8} - \frac{2a^3}{24a} + \frac{a^4}{64a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{24}{a}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3a} + \frac{a^4}{4a^2} - \frac{a^2}{8} + \frac{2a^3}{24a} - \frac{a^4}{64a^2}\right]$$

$$= \frac{24}{a}a2\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{2}{24} - \frac{1}{64}\right]$$

$$\therefore \qquad < p_x >= 0{,}625a$$

2.5 مثال: لاندې موج تابع په $(-\infty,+\infty)$ انتروال کې ساده کړئ.

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2a}+ikx}$$

حل: که چیرې A د ساده کېدنې ثابت دی نو

$$\int \Psi\Psi^* dx = 1$$

$$\therefore \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx} . A^* e^{-\frac{x^2}{2a^2}-ikx} dx = 1$$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = 1$$

مونږ عمومي انتیګرال لرو چې

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x2} . dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$|A|^2\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{a^2}}}=1$$

$$|A|^2 a.\sqrt{\pi}=1 \quad\Rightarrow\quad |A|=\frac{1}{\sqrt{a}\pi^{\frac{1}{4}}}$$

$$\therefore \qquad \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}\pi^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$$

2.6 مثال : که $\psi(x)=Ae^{ikx}$ موج تابع وي د جریان کثافت پیدا کړئ.

حل: د جریان کثافت په لاندې ډول دی

$$\vec{j}=\frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*]$$

د جریان د کثافت د **x** مرکبه عبارت ده له

$$j_x=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi^*}{dx}\right]$$

$$\psi(x)=Ae^{ikx}\ ,\ \psi^*(x)=A^*e^{-ikx}$$

$$j_x=\frac{\hbar}{2mi}\left[A^*e^{-ikx}\frac{dAe^{ikx}}{dx}-Ae^{ikx}\frac{dA^*e^{-ikx}}{dx}\right]$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}AA^*[e^{-ikx}(ik)e^{ikx}-e^{ikx}(-ik).e^{-ikx}]$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}AA^*[(ik)-(-ik)]$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}AA^*(2ik)$$

$$=\frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

$$\because \qquad \hbar k=p=mv$$

$$\therefore \qquad j_x=\frac{mv}{m}|A|^2=v|A|^2$$

2.7 مثال: هغه ذره په پام کې ونیسئ! دکومې چې موج تابع په لاندې ډول ده

$$\psi(x) = xe^{-\alpha x} \quad , \quad x \geq 0$$
$$= 0 \quad , \quad x < 0$$

الف: موج تابع ساده کړئ؟

ب: د $< x >$ پیدا کړئ؟

ج: د **x** هغه قیمت پیدا کړئ په کوم کې چې احتمال اعظمي وي؟

حل: (1) دموج تابع دساده کیدو لپاره ، موج تابع داسې لیکو ،

$$\psi(x) = Axe^{-\alpha x}$$

چیرته چې A دساده کیدنې ثابت دی.

دساده کېدنې شرط په دې ډول ورکول کیږي

$$\int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty |A|^2 x^2 . e^{-\alpha x} dx = 1$$

$$|A|^2 \int_0^\infty x^2 . e^{-2\alpha x} dx = 1$$

مونږ عمومي انتیګرال لرو چې

$$\int_0^\infty x^n . e^{-\beta x} dx = \frac{n!}{(\beta)^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^2 . e^{-2\alpha x} dx = \frac{2!}{(2\alpha)^3} = \frac{1}{4\alpha^3}$$

$$|A|^2 . \frac{1}{4\alpha^3} = 1$$

$$\therefore \quad |A| = (4\alpha^3)^{\frac{1}{2}} = 2\alpha\sqrt{\alpha}$$

$$\therefore \quad \psi(x) = 2\alpha\sqrt{\alpha}x.e^{-\alpha x}$$

(2) د **x** متوسط قیمت داسې ورکول کیږي

$$< x > = \int_0^\infty x|\psi(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^\infty 4\alpha^3 x^3 e^{-2\alpha x} dx$$

$$= 4\alpha^3 \int_0^\infty x^3 e^{-2\alpha x} dx$$

$$= 4\alpha^3 \frac{3!}{(2\alpha)^4}$$

$$= \frac{3!}{4\alpha}$$

$$\therefore \quad < x > = \frac{3}{2\alpha}$$

(3) P(x) دتابع احتمالي څوکه هغه وخت واقع کیږي، چې $\frac{dp}{dx} = 0$ وي.

$$\psi(x) = 2\alpha\sqrt{\alpha}xe^{-\alpha x}$$

$$p(x) = |\psi(x)|^2 = 4\alpha^3 x^2 e^{-2\alpha}$$

$$\frac{dp}{dx} = 4\alpha^3[2xe^{-2\alpha x} - 2\alpha.x^2 e^{-2\alpha x}]$$

داحتمال دڅوکې قیمت لپاره،

$$4\alpha^3[2xe^{-2\alpha x} - 2\alpha.x^2e^{-2\alpha x}] = 0$$
$$2xe^{-2\alpha x} - 2\alpha.x^2e^{-2\alpha x} = 0$$
$$x - \alpha x^2 = 0$$
$$\therefore \qquad x = \frac{1}{\alpha}$$

2.8 مثال: دهايدروجن اتوم دعادي حالت لپاره موج تابع په لاندې ډول ده.

$$\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$$

a_0 دبور شعاع ده

موج تابع ساده کړئ او د **r** متوسط قیمت پیدا کړئ؟

حل: د **r** رنج دصفرنه ترلايتناهي پورې دی.

دساده کېدنې شرط عبارت دی له

$$\int_0^{\infty} |\psi(r)|^2 .d\tau = 1$$

$d\tau$ دفضائځانګړی عنصري حجم دی او قیمت يې ، $d\tau = 4\pi r^2 dr$

$$\therefore \qquad |A|^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a_0}} d\tau = 1$$

$$|A|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr = 1$$

$$4\pi |A|^2 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = 1$$

$$4\pi |A|^2 . \frac{2!}{(\frac{2}{a_0})^3} = 1$$

$$\therefore \qquad |A| = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^{\ 3}}}$$

$$\therefore \qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^{\ 3}}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

د r متوسط قیمت په دې ډول ورکول کیږي

$$< r >= \int_0^\infty r|\psi(r)|^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^{\ 3}} \int_0^\infty r.e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 .dr$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^{\ 3}} 4\pi \int_0^\infty r^3 .e^{-\frac{2r}{a_0}} dr$$

$$= \frac{4}{a_0^{\ 3}} \frac{3!}{(\frac{2}{a_0})^4}$$

$$\therefore \qquad < r >= \frac{3}{2} a_0$$

2.9 مثال: په $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ انټروال کې دټاکلې ذرې موج تابع عبارت ده له

$$\psi = A\cos^2 x$$

(a) د A قیمت پیدا کړئ.

(b) هغه احتمال پیدا کړئ؟ په کوم کې چې ذره دصفراو $\frac{\pi}{4}$ ترمنځ پیدا کیږي

حل: (a) دساده کېدنې شرط عبارت دی له

$$\int |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\therefore \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |A|^2 \cos^4 x dx = 1$$

یا

$$|A|^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = 1$$

$$|A|^2 \; 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = 1$$

څرنګه چې $\cos x$ جفته تابع ده نوموندکموالي عمومي فورمول لروچې

$$\int \cos^n dx = \frac{\sin x.\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x.dx$$

$$\int \cos^4 dx = \frac{\sin x.\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x.dx$$

$$= \frac{\sin x.\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}(\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx)$$

$$= \frac{\sin x.\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}(\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x)$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \left[\frac{\sin x.\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}(\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}.1.0. + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}.1.0 + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}) - 0$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

په نتیجه کې،

$$|A|^2 \frac{3\pi}{16} = 1$$

$$\therefore \qquad |A| = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \cos^2 x$$

(b) دصفر او $\frac{\pi}{4}$ رنج کې دذرې دپیداکیدواحتمال عبارت دی له

$$p(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |A|^2 \cos^4 x dx$$

$$= \frac{8}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$$

دکموالي فورمول عبارت دی له

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \left[\frac{\sin x \cos 3x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x.\cos x}{2} + \frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})^3 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}) - 0$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3\pi}{8}) = \frac{8+3\pi}{32}$$

$$\therefore \qquad p(x) = \frac{8}{3\pi}.\frac{8+3\pi}{32}$$

$$p(x) = 0,4623$$

2.10 مثال: د $(-\infty,+\infty)$ په انتروال کې دازادې ذرې موج تابع عبارت ده له

$$\psi(x) = x.e^{-\alpha x^2}$$

موج تابع ساده کړئ.

حل: دتابع دساده کېدنې په خاطربنې خواپه A کې ضربوو،

$$\psi(x) = Axe^{-\alpha x^2}$$

$$\int |\Psi|^2 dx = 1 \quad , \quad \int \Psi\Psi^* dx = 1$$

$$\therefore \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Axe^{-\alpha x^2}.A^* xe^{-\alpha x^2} dx = 1$$

$$\therefore \qquad AA^* \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 1$$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = 1$$

مونږعمومي انتيګرال لرو

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2(2\alpha)}\sqrt{\frac{\pi}{(2\alpha)}}$$

$$|A|^2 = 1 \;\Rightarrow\; A = 2(\frac{2\alpha^3}{\pi})^{\frac{1}{4}}$$

$$\psi(x) = 2(\frac{2\alpha^3}{\pi})^{\frac{1}{4}} x e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}$$

خلاصه

1. هغه ریاضیکي تابع، چې حرکت تشریح کوي د $\Psi(x,y,z,t)$ موج تابع ده.

2. دموج تابع مطلقه مربع $|\Psi|^2$ (دکثافت احتمال) ارزيابي شوی دی چې، مشخص ځای کې دوخت په مشخصه لحظه کې دذرې دپیدا کېدنې داحتمال سره متناسب دی.

3. $\int \Psi\Psi^* dV = 1$

په پورته معادله کې انتیګرال په ټوله فضاء کې اخیستل کیږي د Ψ تابع پورتنی شرط دساده کېدنې دشرط په نوم یادیږي.

4. دشروډینګر، وخت پورې تړلې معادله!

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

5. $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V) = 0$

دايوبعدي دوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله ده چې دثابت حالت معادله ورته هم وايي.

6. دموج تابع اړتياوې په لاندې ډول دي:

$\psi(x)$ موج تابع بايد په هرځای کې مسلسله ،محدوده اويوقيمته وي. همدارنګه $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ بايد په هرځای کې مسلسل ،محدود او يوقيمته وي.

7. $\nabla.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ دمتماديت معادله ده.

8. $\hat{O}$ یواوپراتوریوه ریاضیکي عملیه ده کوم چې په $f(x)$ تابع تطبیقیږي اوهغه $g(x)$ یوې بلې تابع ته بدلوي.

داپه داسې ډول توضیح کیږي $\hat{O} f(x) = g(x)$

9. دمومنتم اوپراتور $\hat{p} = -i\hbar\nabla$

10. متوسط قیمت عبارت دی له $<x> = \frac{\int \Psi^* x \Psi dx}{\int \Psi^* \Psi dx}$

11. دایرینفست قضیې

1. اوله قضیه: $m.\frac{d<x>}{dt} = <p_x>$

دټولواجزاوولپاره $m.\frac{d<\vec{r}>}{dt} = <\vec{p}>$

2. دویمه قضیه:

دمحافظوي قوې دساحې لپاره،

$$\frac{d<p_x>}{dt} = \langle -\frac{dV}{dx} \rangle$$

دټولواجزاولپاره، $\frac{d<\vec{p}>}{dt} = \langle -\nabla V \rangle$

تمرینونه

(A) لنډځوابه دوله پوښتنې:

۱. موج تابع تعریف کړئ.
۲. وخت پورې تړلې اودوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله بیان کړئ.
۳. کله تابع ته ښه کاري تابع وايي؟
۴. دمتمادیت معادله وښایاست.
۵. اوپراتورتعریف کړئ.
۶. متوسط قیمت تعریف کړئ.
۷. دایګن قیمت تعریف کړئ؟
۸. دایرینفسټ قضیې بیان کړئ.

(B) اوږدځوابه دوله پوښتنې:

۱. دموج تابع فزیکي تعبیرو کړئ.
۲. دموج تابع شرطونه وواياست.
۳. وخت پورې تړلې دشروډینګرمعادله په لاس راوړئ.
۴. وخت پورې تړلې دشروډینګردمعادلې څخه دوخت څخه مستقله دشرودینګرمعادله په لاس راوړئ.
۵. وښایاست چې دموج تابع دوخت برخه $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ سره مساوي ده.
۶. دمتمادیت معادله لاسته راوړئ او فزیکي اهمیت یې څه دی.
۷. دایګن دقیمت اودایګن تابع مقصد څه دی؟
۸. یو اوپراتورتعریف کړئ، کوانټم میخانیکي اوپراتورونه بیان کړئ.
۹. دفزیکي کمیتونولپاره متوسط قیمتونه څنګه لاسته راوړی شو؟
۱۰. دایرینفسټ قضیې بیان اوثبوت کړئ.

۱۱. وښایاست چې $\frac{d<x>}{dt}=\frac{>p_x>}{m}$ او $\frac{d<p_x}{dt}=\langle-\frac{V}{dt}\rangle$ دی

(C) ناحله پوښتنې:

1. په $(-\infty,+\infty)$ رنج دا موج تابع نارملایز کړئ.

$$\psi(x)=e^{-\alpha x^2}$$

ځواب: $\psi=(\frac{2\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}}e^{-\alpha x^2}$

2. په $(-\infty,+\infty)$ رنج دا موج تابع نارملایز کړئ؟

$$\psi(x)=xe^{-\alpha x^2}$$

ځواب: $\psi=(4\alpha)^{\frac{1}{2}}(\frac{2\alpha}{\pi})^{\frac{1}{4}}xe^{-\alpha x^2}$

3. د $\psi(x)=e^{-i\alpha x}$ ایګن تابع لپاره د $\frac{d^2}{dx^2}$ اوپراتور دایګن قیمت پیدا کړئ؟

4. دمومنتم لپاره دایګن تابع e^{ikx} ده دایګن قیمت یې پیدا کړئ؟

ځواب: $\hbar k$

5. په $(-\infty,+\infty)$ کې دا موج تابع دنارملایز کیدو ثابت پیدا کړئ؟

$$\psi(x)=e^{-|x|}\sin\alpha x$$

ځواب: $A=\sqrt{\frac{2(1+\alpha^2)}{\alpha^2}}$

6. دیوې ازادې ذرې حالت د موج تابع په واسطه تشریح کیږي

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2a^2} + ikx}$$

(i) د A ثابت پیدا کړئ.

(ii) دفضا په کومه ساحه کې به ذره په ډیر ورته ډول پیدا شي.

ځواب: $|\psi|^2 = |A|^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$, $|A| = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}$

7. دموقیعت او مومنټم متوسط قیمتونه پیدا کړئ! دکوم چې موج تابع عبارت ده له

$$\psi(s) = N.e^{-\frac{x^2}{2s^2} + ikx}$$

ځواب: ($<x>=0$, $<p_x>=hx$)

8. $\frac{d^2}{dx^2}$ اوپراتور په پام کې ونیسئ.

(i) e^{2x} (ii) $\sin^2 x$ داوپراتور دایګن تابع ګانې دي دموجوده ایګن تابع ګانو مربوطه دایګن قیمتونه پیدا کړئ؟

ځواب: (i) دایګن قیمت 4 دی (ii) دایګن تابع نه ده.

دشروډینګر دثابت حالت معادلې تطبیقات

پیژندنه

مونږبه په دې فصل کې کوانټم میخانیکي پیښېپه اړه بعضې په زړه پورې پیشګویانې لاسته راوړو، مونږبه بعضې هغه مشکلات په پام کې ونیسو،په کوم کې چې دذرې په حرکت حدود تطبیقیږي، په مختلفو شکلونو دپوتنشیلونوپه تطبیق محدودیتونه تطبیقیږي.دوخت څخه مستقلې د شروډینګر معادلې دحل پواسطه به دغه محدودیتونوپورې تړلې پیشګویانې لاسته راوړو، دایګن تابع اوایګن قیمتونه به هم لاسته راوړو، دانرژي کوانټایزیشن دکوانټم میخانیکي مشکلاتودزړه پورې خصوصیاتوڅخه یوخصوصیت دی.بعضې مشکلات دانرژۍ دکوانټایزیشن په شمول به پدې فصل کې مطالعه کړو.

3.1 ازاده ذره یاصفرپوتنشیل

له وخت څخه مستقله دشروډینګردمعادلې ترټولوساده شکل په هغه موقیعت کې دی په کوم چې ذره دثابت پوتنشیل پواسطه حرکت کوي، مثلآ $V(x)=constant$. دکله نه چې $F=-\frac{dV}{dx}$ قوه په ذره صفر وي، ذره ازاده ذره ده، مونږپوهیږو، چې په کلاسیک فزیک کې ازاده ذره دثابت مومنټم سره یاحرکت په حال کې اویادسکون په حال کې وي، ددې دواړوڅخه په هریوموقیعت دذرې ټوله انرژي $E=\frac{P^2}{2m}+V=\frac{p^2}{2m}$ ثابته ده. د ازادې ذرې کوانټم میخانیکي رویې پیشګویې کولولپاره،مونږ د وخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله حلوو ،اوحاصلوو

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi=0$$

$V=0$سره مونږحاصلوو

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi=0 \qquad (3.1)$$

راځئ ! چې $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ وضع کړو

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + K^2\Psi = 0 \qquad (3.2)$$

ددغه معادلې حلونه دایګن تابع ګانې دي. د(3-2) معادلې ممکن حلونه e^{-ikx} او e^{ikx} دي.

دوخت برخې حل یې $\phi(t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$ څخه عبارت دی، څرنګه چې مونږ $E = \hbar\omega$ لرو، نوځکه $\phi(t) = e^{-i\omega t}$ دی. موج تابع عبارت ده له

$$\Psi(x,t) = \Psi(x).\phi(t)$$

$$\therefore \qquad \Psi(x,t) = e^{ikx}.e^{-i\omega t} = e^{i(kx-\omega t)} \qquad (3.3)$$

یا

$$\Psi(x,t) = e^{-ikx}.e^{-i\omega t} = e^{-i(kx+\omega t)} \qquad (3.4)$$

(3.3) معادله دڅپې خپریدنه د x محور د مثبت جهت په اوږدو کې او (3.4) دڅپې خپریدنه د **x** محور منفي جهت په اوږدو کې تشریح کوي.

راځئ (3.3) معادله په پام کې ونیسو او A به دنارملایز کېدو ضریب وي، نو د **x** محور مثبت جهت په اوږدو کې دڅپې خپریدنه په لاندې ډول ده

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (3.5)$$

داحتمال کثافت عبارت دی له

$$\Psi^*\Psi = A^*A = constant$$

نوذره به مساوي یوشان په هرځای کې پیدا کیږي اوهمدارنګه په موقیعت کې عدم قطعیت $\Delta x = \infty$ دی. د $\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ رابطې څخه ،مونږحاصلوو ، چې $\Delta p = 0$ مثلاً دذرې مومنټم محدود دی.

دایوه ذره ده چې په پوره توګه دمومنټم صحیح قیمت یې دډی بروګلي معادلې په واسطه ښودل شوی دی. $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

څرنګه چې ذره په هرځای کې پیدا کېدای شي،نامحدود وخت موجود دی، چې په نامحدود اوږدوالي کې دحرکت کوونکي ذرې انرژي اندازه کړي، نو په وخت کې عدم غیریقین والی $\Delta t = \infty$ دی. د $\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ رابطې څخه، په انرژي کې غیریقین والی $\Delta E = 0$ دی. په دې ډول دانرژۍ صحیح قیمت حاصلو، داهم دډی بروګلي–انشتین په معادله $E = \hbar\omega$ باندې کې ښودل شوی دی. دموج تابع په شان د **k** او **p** ځانګړی قیمت لري ، **p** او **E** ځانګړی قیمت لري.

دازادې ذرې دموج تابع په ساده کېدنه کې مشکل دی. دساده کېدنې موقیعت مطابق

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = A.A^* \int_{-\infty}^{+\infty} dx = 1$$

$$\therefore \qquad A.A^* \int_{-\infty}^{+\infty} dx = 1$$

امپلیتود به خامخا په له منځه تلونکي توګه کوچنی لکه $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ په شان یونامحدود قیمت لري. نوځکه ، دذرې دپیداکېدنې احتمال په له منځه تلونکي توګه هرځای کې کوچنی وي.نودساده کېدنې سره دذر ې دموج تابع په اړیکه کې مشکل دی،اګرچې مونږبایدددغه ریاضیکي مشکل په اړه ډیروارخطانشو،ځکه لمړی، مونږداسې ذره نشولرلای، چې دقووڅخه کاملاآزاده وي، دویم، په واقعي کارونې کې دذرې دحرکت رنج نامحدودنه وي.

دازادې ذرې دانرژي طیف:

دازادې ذرې انرژي $E = \frac{p^2}{2m}$ ده. دx په مثبت جهت دمتحرکې ذرې لپاره،مومنټم مثبت اودx په منفي جهت متحرکې ذرې لپاره مومنټم منفي دی.مګر p^2 همیشه مثبت ،دصفراولایتناهي ترمنځ

هرقیمت اخیستلای شي، نو ځکه دانرژۍ قیمت دصفرڅخه ترلایتناهي پورې دی. نو،دازادې ذرې دانرژي طیف مسلسل دی.

3.2 په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې ذره (یوبعد)

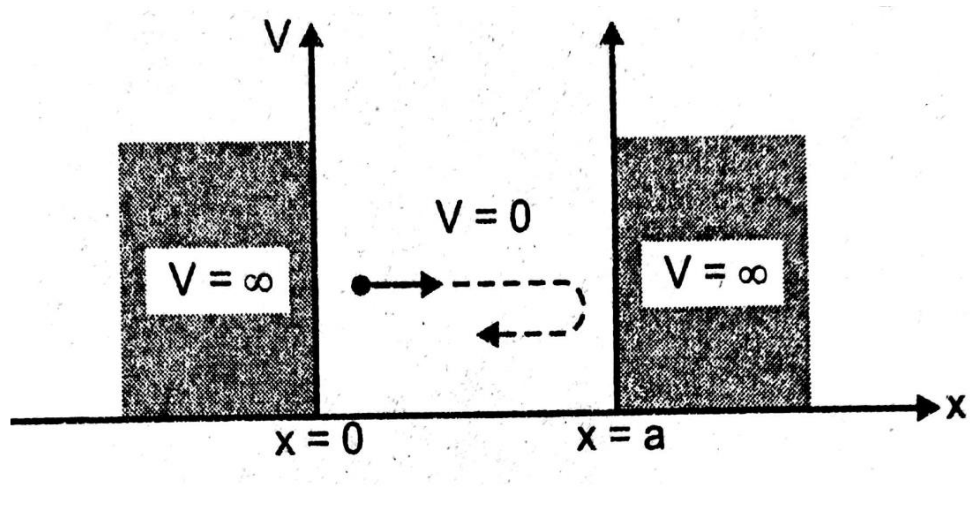
راځئ! چې په یوبعدي سیستم کې د **x** محورپه اوږدوکې د **x=0** او **x=a** نقطوترمنځ حرکت په پام کې ونیسو، ذره دصفراو **a** ترمنځ ازادحرکت کوي مګرددې حدودوڅخه تجاوزنه شي کولای، داموقیعت دپوتنشیل تابع په واسطه په لاندې ډول تشریح شوی دی.

$$V = \infty \qquad X \le 0$$

$$V = 0 \qquad 0 < X < a$$

$$V = \infty \qquad X \ge a$$

(3.1)شکل نامحدوده پوتنشیلي څاه تشریح کوي، نوموړی پوتنشیل داخصوصیت لري، چې ذره به **x=0** او **x=a** کې بنده کړي،دهرې محدودې انرژي سره $E \ge 0$. په کلاسیک میخانیک کې ددې انرژیوڅخه هریوامکان لري اودانرژي طیف مسلسل دی.،مګرپه کوانټم میخانیک کې دمحدودیتونوپه شکل تطبیقیږي، دابه لاندې ونبودل شي، چې یوازې دانرژي معینو جدا قیمتونوته اجازه ورکول کیږي، یوه ذره دپوتنشیلي ژورې مربعي څاه ترتاثیرلاندې چې عموماً ورته ذره په یو بعدي ریجډ بکس کې ویل کیږي، حرکت کوي .



3.1شکل: دنامحدودې ژورې پوتنشیلي څاه ګرافیکي تشریح

دپوتنشيلي څاه په داخل ساحه کې دوخت څخه مستقله دشروډينګر معادله حليداى شي چې دايګن دانرژي قيمتونه اودهغې پورې مربوط دايګن تابع ګانې لاسته راوړل شي.

دشروډينګر دوخت څخه مستقله معادله په لاندې ډول ده

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0 \qquad (3.6)$$

په $0<x<a$ ساحه کې پورتنۍ معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي!

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \qquad (3.7)$$

$$K^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}+K^2\psi=0 \qquad (3.8)$$

دا د ψ دويم ترتيب خطي متجانسه معادله ده. ددې عمومي حل په دې ډول دى

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx \qquad (3.9)$$

دلته **A** او **B** اختياري ثابتونه دي او د ψ محدودو موقيعتونو په واسطه لاسته راتلاى شي.

د $0<x<a$ ساحې څخه بهر، موج تابع $\psi(x)=0$ ده.

همدارنګه دڅاه په سرحدونو کې هم دغه تابع صفرده. بناپردې، په **x=0** کې، $\psi(x)=0$ ده. چې **B=0** ورکوي. په(3.9) معادله کې ددغه قيمت په کارونې سره حاصلوو چې

$$\psi(x)=A\sin(kx) \qquad (3.10)$$

په **x=a** کې، $\psi(x)=0$ ده، کوم چې ورکوي

$$A\sin(ka)=0$$

داصحيح ده که چيرې A=0 يا $\sin(ka)=0$ وي. خو $A\neq0$، نوغيرله دې په هرځاى کې $\psi=0$ ده اودا ممکن نه ده ځکه چې بيا دڅاه په داخل کې دذرې دپيداکېدو احتمال صفردى.

دامتضادې ویناوې دابنایې، چې ذره موجوده او د **x=0** او **x=a** ترمنځ حرکت کوي.

بناپردې، $\sin(ka)=0$ متغیردی، نومونږ **k** دارنګه انتخابوو چې $\sin(ka)=0$ شي . دایوازې هغه وخت امکان لري چې $ka=n\pi$ ، چیرته چې $n=1,2,3,4,5,...$

یا

$$k=\frac{n\pi}{a}$$

$$\therefore \qquad \psi(x)=A\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

دایګن دانرژي قیمتونه:

څرنګه چې مونږلرو ! $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\therefore \qquad \frac{n^2\pi^2}{a^2}=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

نو دایګن دانرژي قیمت حاصلوو

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

څرنګه چې انرژي په انډکس (n) متکي دی نو مونږلیکلای شو

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad (3.13)$$

دامعادله ښایي، چې دایګن دانرژي قیمتونه جدا دي.

په نتیجه کې مونږګورو ،چې یوازې ټاکلي قیمتونوته اجازه ورکول کیږي، لکه څنګه چې په (3.13) معادله کې ورکول شوې ده. n تام عدد دی، نودلته دانرژي دلیولویونامحدود دردیف دی کوم چې دمثبت تام عددسره مطابقت کوي، دغه تام عددته کوانټم نمبروایي. دکوانټم نمبرترټولوټیټ

حالت **n=1** قیمت لپاره دی چې دعادي حالت په نوم یادیږي. هغه لیولونه چې **n=2,3,4,...** سره مطابقت کوي دهیجاني حالتونوپه نوم یادیږي.

راځئ چې **n=1** لیول لپاره انرژي په پام کې ونیسو

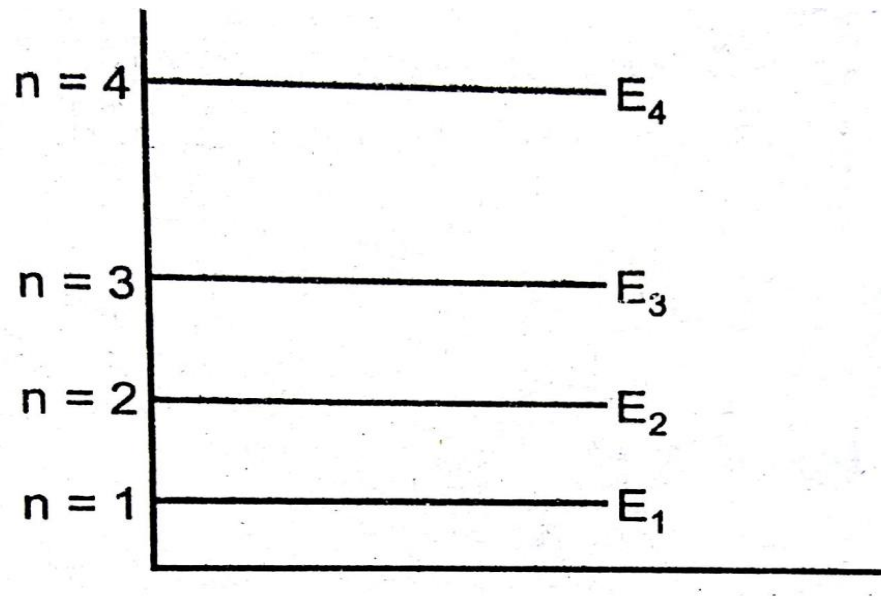
$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \qquad (3.14)$$

دادذرې ترټولوټيټه انرژي ده، چې دصفري نقطې انرژي په نوم یادیږي. په کلاسیکي توګه ترټولوټيټه انرژي صفرده مګرپه کوانټم میخانیکي توګه د عادي حالت انرژي صفرکیدای نه شي. دغه پیښه په بنیادي توګه دهایزنبرګ دغیریقین والي داصل نتیجه ده. که ذره د **a** په عرض دنامحدوده پوتنشیلي څاه پواسطه محصوره شوي وي، نوبیابه دهغه په موقیعت کې غیریقین والی $\Delta x = a$ وي. په نتیجوي توګه ،په مومنټم کی به غیریقین والی $\Delta p = \frac{\hbar}{2a}$ وي اوله دې امله انرژي سره مطابقت لري،نوځکه دغیریقین والي اصل نه پریږدي، چې ذره دې دپوتنشیل په واسطه محدوده وي اوصفرانرژي دې ولري.

دانرژي ډیرې لوړې لیولې عبارت دي له

$$\begin{aligned}
E_2 &= 4\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 4E_1 \\
E_3 &= 9\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 9E_1 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
E_n &= n^2 E_1
\end{aligned}$$

دانرژي طیف په (3.12) شکل کې ښودل شوی دی



3.2 شکل: دانرژي طیف

موج تابع ګانې: wave functions

موج تابع ګانې د (3.12) معادلې په اساس ورکول کیږي، څرنګه چې مشخصه یې n ده، نو مونږ لیکلای شو،

$$\psi_n(x) = A\sin(\frac{n\pi}{a}x) \qquad (3.15)$$

څرنګه ذره د **x=0** او **x=a** ترمنځ محدوده ده، چې حرکت وکړي،نو دساده کیدنې شرط عبارت دی له

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^a |A|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 1$$

$$|A|^2 \int_0^a \sin 2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3.16)$$

مونږلروچې! $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ په نتیجه کې،(3.16) معادله داسې لیکو

$$|A|^2 \int_0^a \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]dx = 1$$

$$\frac{|A|^2}{2}\int_0^a \left[1-\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right]dx = 1$$

$$\frac{|A|^2}{2}\int_0^a \left[dx-\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)dx\right] = 1$$

$$\frac{|A|^2}{2}\left[x-\frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}{\frac{2n\pi}{a}}\right]_0^a = 1$$

$$\frac{|A|^2}{2}a = 1$$

$$\therefore \qquad |A| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

نوځکه ،په نارملیزیشن کې مونږ حاصلوو

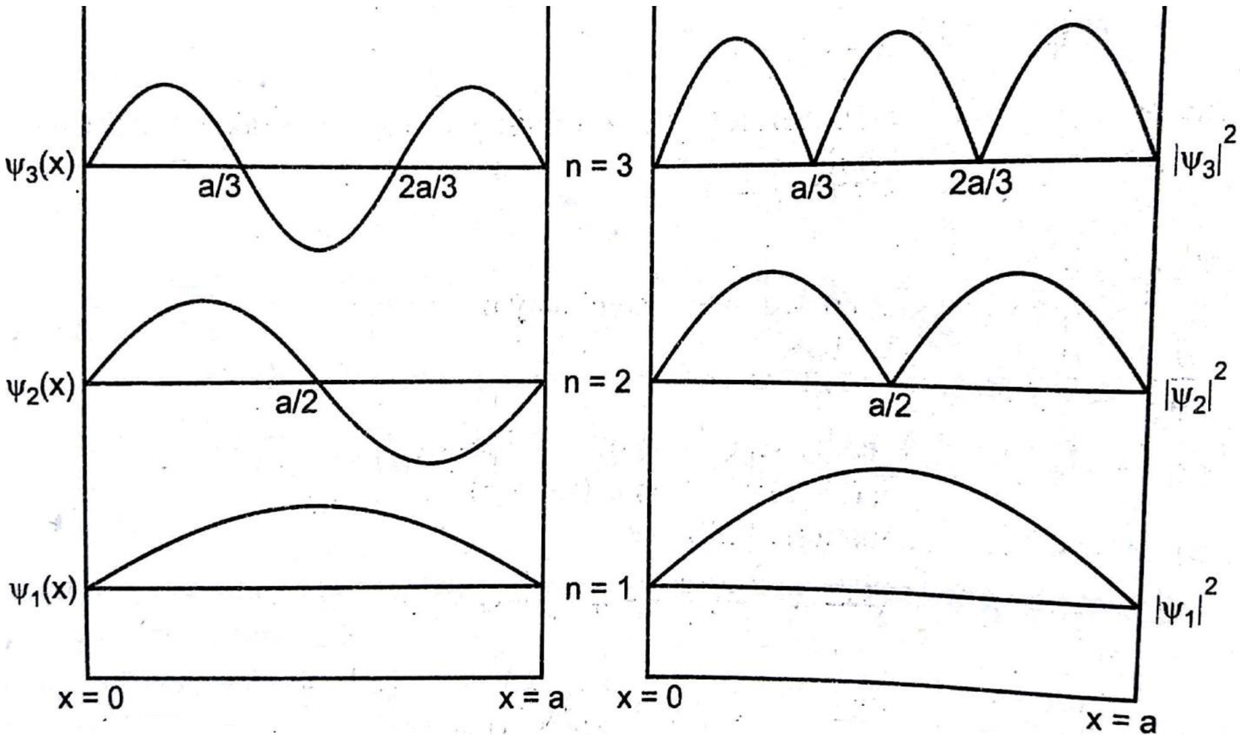
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad (3.17)$$

داهغه موج تابع ده چې دایګن دانرژي E_n سره مطابقت کوي.

دعادي حالت(**n=1**) تابع عبارت ده له

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (3.18)$$

په (a)3.3 شکل کې، لمړنۍ درې موج تابع ګانې ψ_1,ψ_2,ψ_3 ښودل شوي دي (b) 3.3 شکل کې د دې مربوط احتمالي کثافتونه $|\psi_3|^2,|\psi_2|^2,|\psi_1|^2$ ښودلی شوي دي.



(b) احتمالي کثافتونه (a) موج تابع ګانې

3.3: شکل

داڅرګندده ،چې ψ_1 په **x=0** او **x=a** کې دوه نوډونه لري، ψ_2 موج تابع په **x=0** او **x=a/2** کې درې نوډونه لري، ψ_3موج تابع په **x=o, x=a/3 ,x=2a/3** او **x=a** کې څلورنوډونه لري نو ځکه، ψ_n موج تابع (n+1) نوډونه لري.

3.3 په درې بعدي کلک بکس کې ذره

اوس به مونږدذرې داسې حالت په پام کې ونېسو ،چې د(a,b,c) په ابعادوپه مستطيلي بکس کې محصوره وي. دپوتنشيل تابع $V(x,y,z)$ دبکس په داخل کې صفراوپه خارج کې پوتنشيل

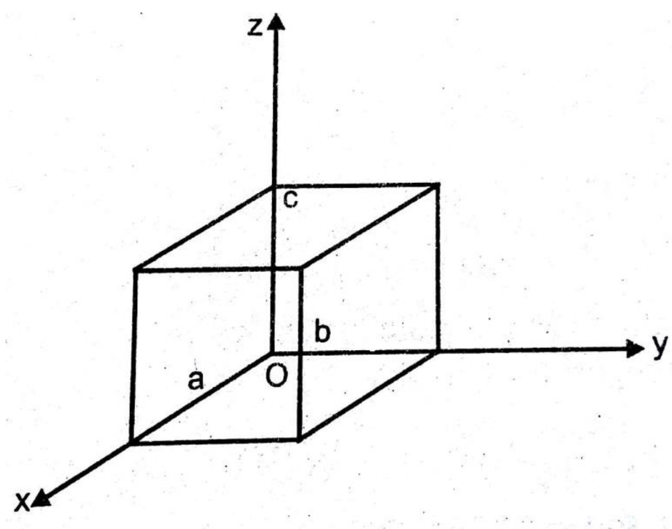
لایتناهي دی. څرنګه چې پوتنشیل دبکس په خارج کې لایتناهي دی،نوذره محصوره ده چې یوازې دبکس په داخل کې حرکت وکړي او خارج ته راوتلی نه شي نوځکه،بکس ته ټینګ کلک بکس وایي.

په ریاضیکي توګه پوتنشیل په دې ډول تشریح کېدلای شي

$$V = 0 \qquad \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \\ 0 < z < c \end{cases}$$

په بل هرځای کې $\qquad V = \infty$

مستطیلي بکس په (3.4) شکل کې ښودل شوی دی



3.4 شکل

درې بعدي دوخت څخه مستقله دشرودینګر معادله داسې ورکول کیږي

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

دبکس په داخل کې، مونږلرو $V = 0$ ، بناپردې،دشرودینګرمعادله داسې شکل غوره کوي

$$\nabla^2\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (3.19)$$

چیرته چې $\psi = \psi(x, y, z)$ ده. (3.19) معادله دکارتیزن دکواردیناتوپه سیستم کې په دې ډول لیکلای شو

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (3.20)$$

(3.20) معادله دمتحولینو دجداکېدو میتود په واسطه حلیدای شي.

فرضووچې

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\ \psi_2(y)\ \ \psi_3(z) \qquad (3.21)$$

(3.20) معادله کې د(3.21) معادلې په کارونې،مونږ حاصلوو

$$\frac{\partial^2\psi_1\psi_2\psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_1\psi_2\psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_1\psi_2\psi_3}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1\psi_2\psi_3 = 0$$

$$\therefore \quad \psi_2\psi_3\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \psi_1\psi_3\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \psi_1\psi_2\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1\psi_2\psi_3 = 0$$

پورتنۍ معادله په $\psi_1\psi_2\psi_3$ باندې ویشو ،مونږ حاصلوو

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \frac{1}{\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \frac{1}{\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (3.22)$$

فرضووچې $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2}+\frac{1}{\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2}=-k^2 \qquad (3.23)$$

په چپه خوا ،لمړی حد یوازې په **x** پورې تړلی دی، دویم حد یوازې **y** پورې تړلی دی، دریم حد یوازې **z** پورې تړلی دی، په ښي خوا $-k^2$ ثابت دی، څرنګه چې **x,y,z** ازاد متحولین دي ، نو دد ې درې واړو څخه هریو باید ثابت وي، دوی په ترتیب سره په $-k_1^2,-k_2^2,-k_3^2$ ښایو ،

مونږلرو

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}=-k_1^2 \qquad (3.24)$$

$$\frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2}=-k_2^2 \qquad (3.25)$$

$$\frac{1}{\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2}=-k_3^2 \qquad (3.26)$$

په (3.23) معادله کې دپورته درې معادلوپه استعمال،مونږحاصلوو !

$$k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2 \qquad (3.27)$$

(3.24) ،(3.25)،(3.26) معادلې داسې لیکلای شو

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\psi_1=0 \qquad (3.28)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dy^2}+k_2^2\psi_2=0 \qquad (3.29)$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dz^2}+k_3^2\psi_3=0 \qquad (3.30)$$

د(3.28) معادلې عمومي حل داسې لیکلای شو

$$\psi_1(x)=A_1\sin k_1x+B_1\cos k_1x \qquad (3.31)$$

دلته A_1 او B_1 اختیاري ثابتونه دي او ψ په باندې دسرحدي شرایطو په تطبیق لاسته راتلای شي.

د $0 < x < a$ ساحې نه بهر موج تابع $\psi_1(x) = 0$ ده همدارنګه دکلک بکس په سرحداتو کې $\psi_1(x) = 0$ ده. په نتیجه کې، په $x = 0$ کې $\psi_1(x) = 0$ ده. دغه قیمتونه په (3.31) معادله کې وضع کوو

$$\therefore \qquad B_1 = 0$$

که دا په (3.31) معادله کې وضع کړو، مونږ حاصلوو

$$\psi_1(x) = A_1 \sin(k_1 x) \qquad (3.32)$$

په **x=a** او $\psi_1(x) = 0$ کې ورکوي چې:

$$A_1 \sin(k_1 a) = 0$$

په پورته معادله کې $A_1 \neq 0$ دی بناپردې ψ به د **x=0** او **x=a** ترمنځ دبکس په داخل کې په هرځای کې صفروي، دلته همیشه په **x=0** او **x=a** کې دذرې دپیداکېدو څه احتمال شته دی.

په نتیجه کې، $\sin(k_1 a) = 0$

$$k_1 a = n_1 \pi$$

چیرته چې $n_1 = 1,2,3,4,5,...$

یا

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{a} \qquad (3.33)$$

$$\therefore \qquad \psi_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{n_1 \pi}{a} x\right) \qquad (3.34)$$

که چیرې دصفرنه تر **a** پورې ساحه کې مونږ پورته معادله ساده کړو، مونږ حاصلوو

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_1 \pi}{a} x\right) \qquad (3.35)$$

په ورته توګه، د(3.29) او (3.30) معادلو حل په ترتيب سره داسې ليکلای شو

$$\psi_2(y)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right)\quad,\ k_2=\frac{n_2\pi}{b}$$

چيرته چې $n_2=1,2,3,4,...$

$$\psi_3(z)=\sqrt{\frac{2}{c}}\sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right)\quad,k_3=\frac{n_3\pi}{c}$$

چيرته چې $n_3=1,2,3,...$

د(3.21) په معادله کې د ψ_1,ψ_2,ψ_3 په کارونې ،مونږ د محصله موج تابع ψ حاصلوو .څرنګه چې دا په n_1,n_2,n_3 پورې متکي ده، مونږ ليکلای شو

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right).\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right).\sqrt{\frac{2}{c}}\sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right)$$

يا

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right).\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right).\sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right)\tag{3.36}$$

په (3.27) معادله کې د k_1,k_2,k_3 په کارونې،مونږ حاصلوو

$$\frac{n_1^{\ 2}\pi^2}{a^2}+\frac{n_2^{\ 2}\pi^2}{b^2}+\frac{n_3^{\ 2}\pi^2}{c^2}=k^2$$

څرنګه چې $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\therefore\qquad \pi^2\left(\frac{n_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{n_2^{\ 2}}{b^2}+\frac{n_3^{\ 2}}{c^2}\right)=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\therefore\qquad E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{n_2^{\ 2}}{b^2}+\frac{n_3^{\ 2}}{c^2}\right)\tag{3.37}$$

(3.37) معادله دایګن دانرژي قیمتونه ورکوي، څرنګه چې دایګن دانرژي قیمتونه n_1, n_2, n_3 انډکسونوپورې تړلي دي،مونږلیکلای شو

$$E_{n1,n2,n3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_1{}^2}{a^2} + \frac{n_2{}^2}{b^2} + \frac{n_3{}^2}{c^2}\right) \tag{3.38}$$

دسیستم دعادي حالت لپاره $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ اوپه دې ډول ورکول کیږي

$$E_{111} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

راځئ چې په مکعبي (a=b=c)بکس کې دذرې دحرکت لپاره یوخاص حالت په پام کې ونیسو .

ددې حالت دپاره،مونږحاصلوو

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \sqrt{\frac{8}{a^3}}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right).\sin\left(\frac{n_2\pi}{a}y\right).\sin\left(\frac{n_3\pi}{a}z\right) \tag{3.39}$$

اودایګن دانرژي قیمت

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2) \tag{3.40}$$

دعادي حالت انرژي یادصفري نقطې انرژي په (3.40) معادله کې د $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ په استعمال سره لاسته راتلای شي،اوهغه دی چې $E_{111} = 3\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

دعادي حالت موج تابع عبارت ده له

$$\psi_{111} = \sqrt{\frac{8}{a^3}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right).\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right).\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) \tag{3.41}$$

بل دانرژي لوړلیول مثلآ داول هیجاني حالت انرژي دلاندې n_1, n_2, n_3 ترکیب سره مطابقت کوي.

n_1	n_2	n_3
1	1	2
1	2	1
2	1	1

داټول دری واړه ترکیبونه یوشان انرژي ولري $E_{112} = E_{121} = E_{211} = 6\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

دپورته درې واړه حالتونو مطابق موج تابع ګانې عبارت دي له

لپاره $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2$ $\psi_{112} = \sqrt{\frac{8}{a3}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$

لپاره $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$ $\psi_{121} = \sqrt{\frac{8}{a3}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$

لپاره $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$ $\psi_{121} = \sqrt{\frac{8}{a3}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$

په نتیجه کې،دابښکاره ده ،چې دلته دذرې درې ممکنه حالتونه دي چې دانرژي دعینې قیمت $E = 6\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ سره مطابقت کوي.

کله چې دیونه زیات دایګن تابع ګانې وي، چې دایګن دانرژي دعینې قیمت سره مطابقت کوي،دذرې دانرژۍ دې حالت ته تیتید ل(degenerate) وایي او دتیتیدو (degeneracy) ترتیب دعینې انرژي مطابق دایګن د تابع ګانو دشمیرسره مساوي دی.نوځکه، لمړی هیجاني حالت درې غبرګه تیتې شوی دی.

دوهم هیجاني حالت ددغه درې ترکیبونو n_1, n_2, n_3 سره مطابقت کوي کوم چې په لاندې ډول دي.

n_1	n_2	n_3
1	2	2
2	2	1
2	1	2

دغه حالت دایګن دانرژۍ دعینې قیمت $E = 9\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ درې غبرګه تیټ شوی دی. دریم هیجاني حالت د $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$ سره مطابقت کوي. داغیرتیټ شوی حالت دی اود $E = 12\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ انرژۍ لرونکی دی.

په پورته ډول، مونږ په دری بعدي بکس کې دذرې حرکت بحث کړ. مونږ په دوه بعدي بکس کې حرکت هم په پام کې نیولای شو، پدغه حالت کې دانرژي لپاره فورمول داسې دی

$$E_{n_1.,n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^{\ 2}}{a^2} + \frac{n_2^{\ 2}}{b^2}\right) \qquad (3.42)$$

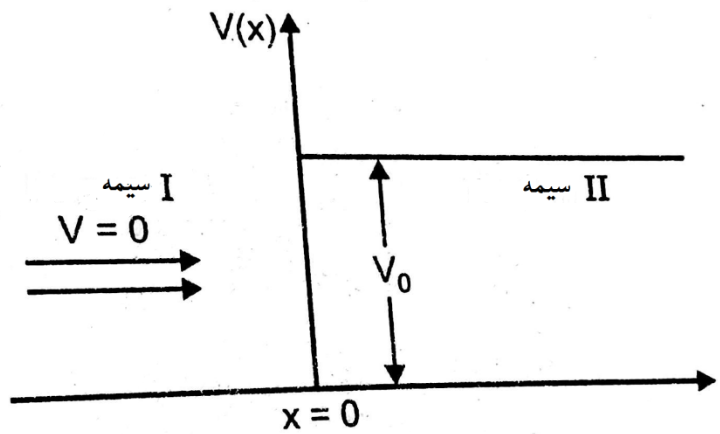
3.4 سټپ پوتنشیل

دسټپ پوتنشیل تابع داسې تعریفیږي

$$V(x) = 0 \quad for\ x \le 0$$

$$= V_0 \quad for\ \ x > 0 \qquad (3.43)$$

راځئ! په پام کې ونیسو چې ذره په **E** انرژي سره دچپ څخه ښي خواته حرکت کوي، مثلآ د**x** دمحور مثبت جهت په اوږدو کې حرکت کوي، (3.5) شکل وګورئ



3.5 شکل: سټپ پوتنشیل

مونږ به اول دذرې کلاسیکي حرکت په پام کې نیسو

کلاسیکي کړنلاره:

اول حالت: $E > V_0$: په I ساحه کې $V = 0$ دی. ددې لپاره،دذرې ټوله انرژي **E** دحرکي انرژي سره مساوي ده. که چیرې ذره دې حرکي انرژي سره **x=0** سرحدته ورسیږي، دا به په دې وتوانیږي چې II سیمې څخه د $E > V_0$ په شان تیریږي. حرکي انرژي $(E - V_0)$ په II سیمه کې مثبت ده،ذره به په دې جهت مخکې حرکت وکړي نوځکه د $E > V_0$ حالت لپاره،دانعکاس احتمال به **R=0** اودتېریدنې احتمال یې **T=1** دی.

دویم حالت: $E < V_0$: فرضوو، چې دذرویوه ویاله داولې ساحې څخه دویمې ساحې ته حرکت کوي. په I ساحه کې، دذرې ټولیزه انرژي**E** دحرکي انرژي سره مساوي ده ځکه **V=0**. که ذره دغه حرکي انرژي سره **x=0** سرحدته ورسیږي، ذره به په په دې ونه توانیږي ،چې $E < V_0$ په شان د II ساحې څخه تیره شي. ځکه حرکي انرژي $(E - V_0)$ به په II سیمه کې منفي وي.په کلاسیکي توګه ذره حرکي انرژي سره موجوده نه ده. په نتیجه کې $E < 0$ حالت لپاره ذره به په مکمل ډول **x=0** سرحدته منعکس شي.نودانعکاس احتمال به **R=1** اودتیریدنې احتمال به یې **T=0**شي.

اوس به وګورو ،چې ددې مشکل لپاره دکوانټم تیوري څه پیشګویې لري.

كوانتم ميخانيكي كړنلاره:

څرنګه چې پوتنشيل دوخت څخه مستقل دی،مونږ دوخت څخه مستقله دشروډينګر معادله كاروو

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar}(E-V)\psi=0 \qquad (3.44)$$

د I ساحې لپاره،**V=0** دی. نو دشروډينګر معادله داسې شكل غوره كوي

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar 2}\psi_1 \qquad (3.45)$$

فرضووچې $k_1{}^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

په نتيجه كې ،(3.45) معادله داسې كيږي

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1{}^2\psi_1=0 \qquad (3.46)$$

ددې معادلې عمومي حل داسې دی

$$\psi_1=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} \qquad (3.47)$$

بعضې ذرې كيدای شي دپوتنشيلي سيمې په واسطه منعكس شي اوبعضې تيرې شي. اول حد Ae^{ik_1x} وارده موج تشريح كوي اودويم حد Be^{-ik_1x} منعكسه موج تشريح كوي.

د II سيمې لپاره دشروډينګردموج معادله عبارت ده له

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_2=0 \qquad (3.48)$$

مونږدوه حالتونه په پام كې نيسولكه $E<V_0$, $E>V_0$

اول حالت: $E>V_0$ **:**

فرضووچې $k_2{}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

دې معادلې سره (3.48) معادله داسې کیږي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2{}^2\psi_2 = 0 \qquad (3.49)$$

د (3.49)معادلې عمومي حل عبارت دی له

$$\psi_2 = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \qquad (3.50)$$

په II ساحه کې، Ce^{ik_2x} لیږدول شوی موج تشریح کوي. د **x=0** څخه وروسته دفاع(منع کوونکی) نشته ،نو ذرې چپ طرفته x>0 لپاره سیلان نشي کولای نوپه (3.50)معادله کې D=0 دی اوپه دویمه II ساحه کې یې حل عبارت دی له

$$\psi_2 = Ce^{ik_2x} \qquad (3.51)$$

په (3.47) او (3.51) معادلو کې د A ،B او C ثابتونو دتشریح کولو لپاره،مونږدموج تابع ګانو سرحدي شرطونه کاروو،

په x=0 کې،

$$[\psi_1]_{x=0} = [\psi_2]_{x=0}$$

$$\therefore \quad A + B = C \qquad (3.52)$$

او

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

$$\therefore \quad k_1(A - B) = k_2C \qquad (3.53)$$

(3.52) معادله په k_1 کې ضربوو او د(3.53) معادلې سره یې جمع کوو ،مونږحاصلوو

$$2k_1 A = (k_1 + k_2)C$$

$$\therefore \quad C = \frac{2k}{k_1 + k_2} A \qquad (3.54)$$

دغه قيمت په (3.52) معادله کې وضع کوو، مونږ حاصلوو

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \qquad (3.55)$$

دوارده موجونو لپاره موج تابع عبارت دي له

$$\psi_{in} = Ae^{ik_1 x}$$

او دهغې پيچلې جوړه، $\psi^*_{in} = Ae^{-ik_1 x}$

دجريان دکثافت داحتمال معادله عبارت ده له

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}[\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]$$

دجريان کثافت دوارده موجونو لپاره،

$$\vec{j}_{in} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*_{in}\frac{d\psi_{in}}{dx} - \psi_{in}\frac{d\psi^*_{in}}{dx}\right)$$

د ψ_{in} او ψ^*_{in} په $\vec{j}_{in}$ کې کاروني سره، مونږ حاصلوو

$$\vec{j}_{in} = \frac{\hbar k_1}{m}|A|^2 \qquad (3.56)$$

دمنعکس شوو موجونو لپاره موج تابع عبارت ده له:

$$\psi_{ref} = Be^{-ik_1 x}$$

پیچلې جوړه یې $\psi^*_{ref} = Be^{ik_1x}$

دجریان کثافت دمنعکس شویو موجونو لپاره:

$$j_{ref} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{ref}^* \frac{d\psi_{ref}}{dx} - \psi_{ref}\frac{d\psi_{ref}^*}{dx}\right)$$

ψ_{ref} او ψ^*_{ref} په j_{ref} کې په کارونې سره مونږ حاصلوو

$$j_{ref} = \frac{\hbar k_1}{m}|B|^2 \qquad (3.57)$$

انتقال شوی یا لیږل شوی موج عبارت دی له

$$\psi_2 = \psi_{tr} = Ce^{ik_2x}$$

نو دجریان کثافت به دلیږدول شوي موج لپاره داسې وي

$$j_{tr} = \frac{\hbar k_2}{m}|C|^2 \qquad (3.58)$$

د انتقال احتمال T عبارت دی له

$$T = \frac{j_{tr}}{j_{in}}$$

د(3.58) او(3.56) معادلو په کارونې سره مونږ حاصلوو

$$T = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

د(3.54) څخه دC قیمت په کارونې،مونږ حاصلوو

$$T = \frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{4k_1^2}{(k_1+k_2)^2}$$

یا

$$T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \qquad (3.59)$$

دانعکاس احتمال عبارت دی له

$$R = \frac{j_{ref}}{j_{in}}$$

(3.57) او (3.56) په کاروني، مونږ حاصلوو

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

(3.55) معادله په پورته معادله کې کاروو او حاصلوو

$$R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} \qquad (3.60)$$

د (3.59) او (3.60) معادلو څخه، مونږ حاصلوو

$$R+T = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2} + \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$\therefore \qquad R+T = 1$$

دویم حالت: $E < V_0$ **:**

ددې شرط لاندې (3.58) معادله داسې کیږي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\psi_2 = 0 \qquad (3-.61)$$

فرضوو چې $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\alpha^2\psi_2=0 \qquad (3.62)$$

دانتقال شوي موج معادله په مخکې جهت کې د(3.62) معادلې حل دی،کوم چې به

$$\psi_2=\psi_{tr}=Ce^{-\alpha x} \qquad (3.63)$$

دجريان کثافت دانتقال شوي موج لپاره داسې دی

$$j_{tr}=\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{tr}{}^*\frac{d\psi_{tr}}{dx}-\psi_{tr}\frac{d\psi_{tr}{}^*}{dx}\right)$$

مونږلرو، $\psi_{tr}{}^*=Ce^{-\alpha x}$

ψ_{tr} او $\psi_{tr}{}^*$ په j_{tr} کې کاروو،مونږحاصلوو

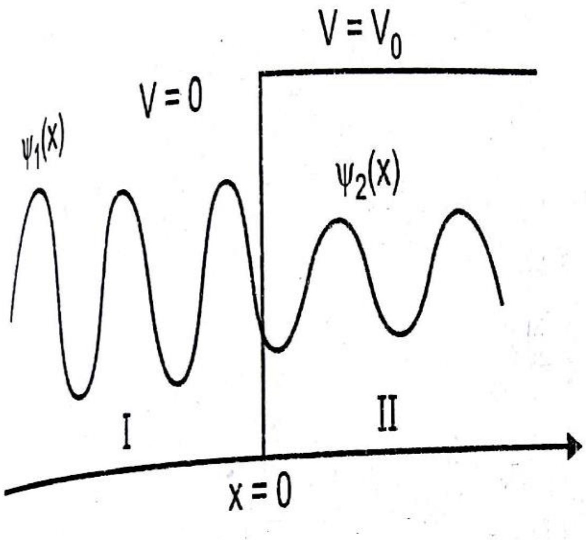
$$j_{tr}=0$$

څرنګه چې،**T=0** نودتعریف په اساس،**R+T=1** دی.بناپردې ،**R=1** دی. نوځکه دامکمل انعکاس دی.

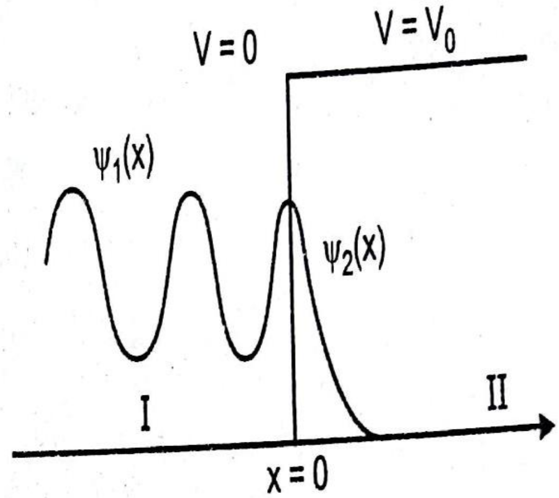
موج تابع په اوله اودوهمه ناحیه کې د $E>V_0$ او $E<V_0$ لپاره په (3.6)شکل کې ښودل شوې ده.

په کلاسيکي توګه، د $E<V_0$ لپاره $R=1$ او $T=0$ دی. بناپردې ددې حالت دکلاسيکي نتيجوسره کوانټم ميخانيکي نتيجې يوشی دی. اګر،چې کلاسيکي منع شوې ساحه کې تابع لکۍ (پای) لري. دغه پای د $e^{-\alpha x}$ حدپواسطه تشريح کيږي(6-3شکل وګورئ). د V_0 په مقايسه د E په کميدوسره دغه لکۍ کميږي. په $x>0$ ساحه کې دذرې دپيداکيدويوڅه احتمال حتی ډيرکوچنی احتمال شته دی.

دغه پېښه د سرحد د نفوذ په نوم یادیږي. دا شاید په پام کې ونیول شي چې $T = 0$ متناقض نه دی دهغه حقیقت سره چې په II ساحه کې دذرې دپیدا کېدو یوڅه احتمال شته ، ځکه په II ساحه کې د **x** په مثبت جهت کوم موج نه خپریږي. مونږ داویلای شوچې ذره په $x = 0$ کې سرحد څخه تېریږي اګرچې په II ناحیه کې دډیرکم وخت څخه بېرته I ناحیې ته راګرځي.



(a) $E>V_0$ لپاره

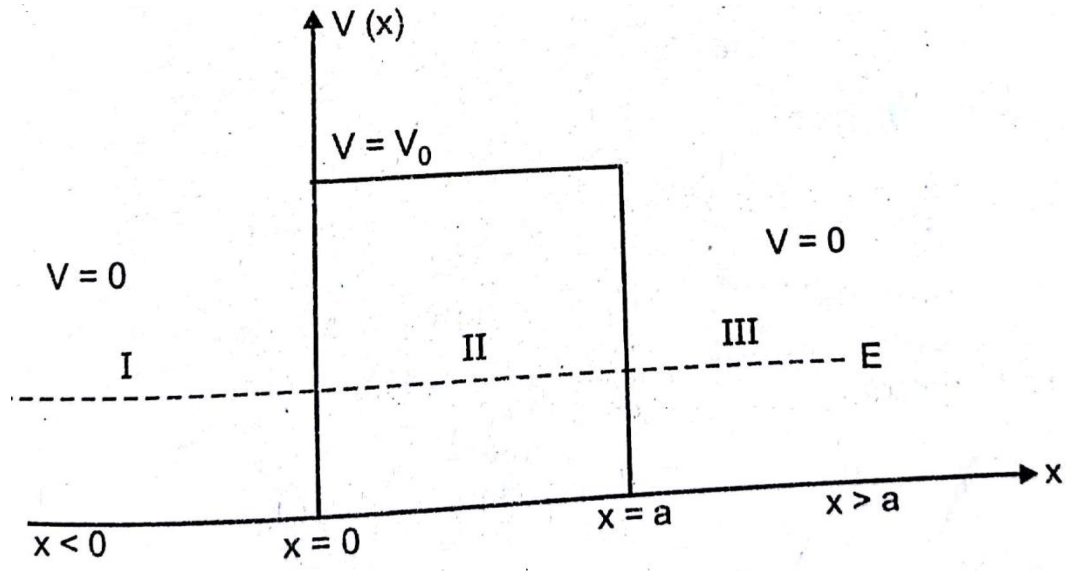


(b) $E<V_0$ لپاره

3.6 شکل

3.5 پوتنشیل بیریر (کیفي مباحثه)

په دې برخه کې، مونږ پوتنشیلي سرحدونه په پام کې نیسو ،چې په (3.7)شکل کې تشریح شوی دی.



3.7 شکل: پوتنشيل بيرير

دغه پوتنشيل په داسې ډول ليکلای شو:

$$
\begin{aligned}
V &= 0 & x &< 0 \\
V &= V_0 & 0 \le x &\le a \\
V &= 0 & x &> 0
\end{aligned}
$$

کلاسيکي حرکت: فرضوو، چې د **E** په کلي انرژی يوه ذره دچپ خوا څخه ښي خواته په I ساحه (x<0) کې حرکت کوي. کله چې دا په **x=0** کې په سرحد يا مانع باندې ولګيږي، دلته دوه احتمال شته دی. اول، که چيرې ددې ذرې انرژي $E<V_0$ وي ذره بېرته انعکاس کوي، دويم که چيرې $E>V_0$ وي، ذره دبيرير (مانع) څخه تيريږي او II ساحې (x>a) ته رسيږي.

کوانټم ميخانيکي حرکت: اوس، به مونږ کوانټم ميخانيکي نتيجې وګورو.

مونږ دوخت څخه مستقله يو بعدي دشرودينګر معادله لرو چې

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0 \qquad (3.64)$$

په I ساحه کې(v=0)،پورتنۍ معادله داسې کیږي چې

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1=0 \qquad (3.65)$$

په II ساحه کې(v=v0)،(3.64) معادله داسې کیږي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_2=0 \qquad (3.66)$$

په III ساحه کې(v=0)دی، (3.64) معادله داسې کیږي

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3=0 \qquad (3.67)$$

دوه حالتونه په پام کې نیسو

اول حالت: $E>V_0$:

فرضوو چې

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (3.68)$$

او

$$\alpha^2=\frac{2m(E-V0)}{\hbar^2} \qquad (3.69)$$

دپورته دوه معادلو سره،(3.65) او (3.66) او (3.67) معادلې داسې کیږي

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k^2\psi_1=0 \qquad (3.70)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+k^2\psi_2=0 \qquad (3.71)$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2}+k^2\psi_3=0 \qquad (3.72)$$

د(3.70) معادلې عمومي حل عبارت دی له

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad (3.73)$$

په (3.73) معادله کې، Ae^{ikx} حدپه **x=0** کې دمانع خواوشاته **+x** جهت په اوږدوکې وارده موج تشریح کوي او Be^{-ikx}. حدمنعکسه موج تشریح کوي مثلاً $\psi_{in} = Ae^{ikx}$ او $\psi_{ref} = Be^{-ikx}$.

د (3.71) معادلې عمومي حل عبارت دی له

$$\psi_2(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x}$$

د(3.72) معادلې عمومي حل عبارت دی له:

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

یوځلې چې ذره په دریمه ساحه کې انتقالیږي،دلته به یوازې د**+x** په اوږدوکې دموج خپریدنه وي ورسته لدې څخه چې په پورته معادله کې **D=0** شي نوپه دریمه ساحه کې به موج تابع داسې شي.

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx} \qquad (3.74)$$

داهمدارنګه لیږدول شوی موج هم تشریح کوي نوځکه،

$$\psi_{tr} = Ce^{ikx}$$

A,B,C,D,F,G ثابتونه دي. ددوې قیمتونه دسرحدي شرایطوپواسطه محاسبه کېدای شي

$$\therefore \qquad A = \frac{(k+\alpha)}{2k}F + \frac{(k-\alpha)}{2k}G$$

$$\therefore \qquad B = \frac{(k-\alpha)}{2k}F + \frac{(k+\alpha)}{2k}G$$

$$\therefore \qquad F = \frac{(k+\alpha)}{2\alpha}Ce^{ika}e^{-i\alpha a}$$

$$\therefore \qquad G = \frac{(\alpha-k)}{2\alpha}Ce^{ika}e^{i\alpha a}$$

ددغه ثابتونو په کارونې، مونږ د تېرېدنې او انعکاس ضريبونه لاسته راوړلای شو.

دتېرېدنې ضريب عبارت دی له

$$T = \frac{j_{tr}}{j_{in}} = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{CC^*}{AA^*}$$

ددې معادلې حل،

$$T = \frac{1}{\left[1 + \frac{V_0^{\,2}\sin^2\alpha a}{4E(E-V_0)}\right]} \qquad (5.75)$$

په ورته توګه، دانعکاس ضريب عبارت دی له

$$R = \frac{j_{ref}}{j_{in}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{BB^*}{AA^*}$$

ددې معادلې حل،

$$R = \frac{1}{\left[\frac{4E(E-V_0)}{V_0^{\,2}\sin^2\alpha a} + 1\right]} \qquad (3.76)$$

دا دانعکاس دضريب لپاره فورمول دی.

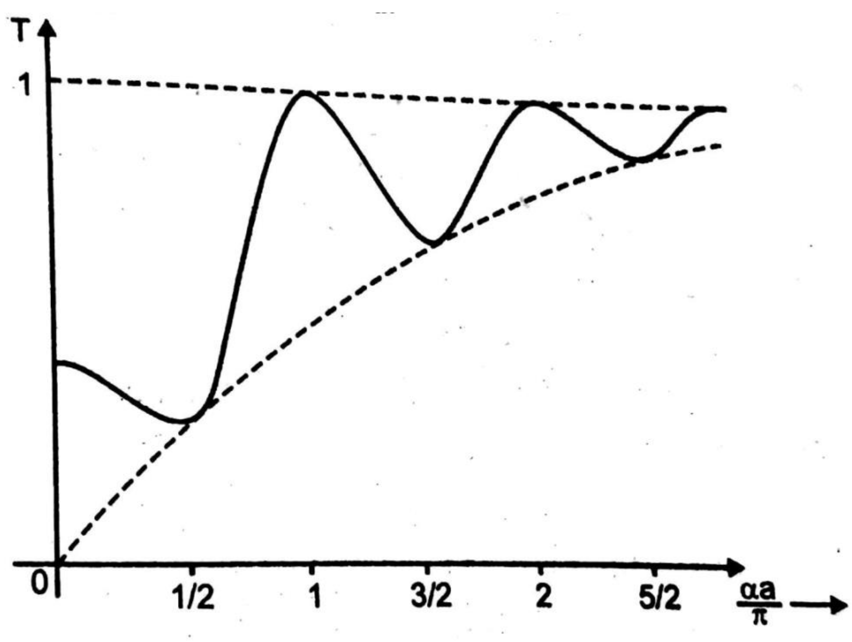
مونږثبوتولای شوچې **R+T=1** دی. د(3.75) او(3.76) معادلوپه کارونې،مونږلروچې

$$R+T=\frac{1}{\left[\frac{4E(E-V_0)}{V_0{}^2\sin^2\alpha a}+1\right]}+\frac{1}{\left[1+\frac{V_0{}^2\sin^2\alpha a}{4E(E-V_0)}\right]}$$

$$=\frac{4E(E-V_0)}{[4E(E-V_0)+V_0{}^2\sin^2\alpha a]}+\frac{V_0{}^2\sin^2\alpha a}{[4E(E-V_0)+V_0{}^2\sin^2\alpha a]}$$

$$\therefore \qquad R+T=1$$

د (3.75) معادلې څخه ليدل کيږي ،چې عموماً، **T** ديو څخه کم دی. بناپردې، هلته قسمي انعکاس او قسمي تېريدنه د پوتنشيل د سرحدونو ديو خوا څخه بل خواته د **x=0** او **x=a** په منځ کې ده اګرچې $\sin\alpha a=0$ مساوي دانرژي دهغه قيمتونولپاره صفردی دکوم لپارهچې $\alpha a=\pi,2\pi,3\pi,...$. په هغه وخت کې **T=1** دی، مثلاًدلته دسرحدونو په واسطه مکمل تېريدنه ده. ددې معنی داده چې ټولې ذرې دسرحد څخه داسې تېرې شوې دي، لکه چې سرحد نه وي دايوه ډيره زړه پورې پيښه ده. اګرچې،د II ساحې په اوږدو کې به دذروحرکي انرژي کميږي.



3.8: شکل

نظر $\frac{\alpha a}{\pi}$ ته د **T** بدلون په ګرافيکي توګه په **(3.8)** شکل کې ښودل شوی دی.دانتقال ضريب د اعظمي او اصغري ترمنځ د $\frac{\alpha a}{\pi}$ په زياتوالي سره حرکت کوي. اعظمي هميشه د **T=1** سره مطابقت کوي.

همدارنګه $\frac{\alpha a}{\pi}$ چې لایتناهي ته تقرب کوي نو $T \to 1$ ته تقرب کوي داد E>>V₀ سره مطابقت کوي.
کله چې **T** اعظمي وي نو**R** اصغري وي اوبرعکس. اګرچې اعظمي R_{Max} به (1) نه وي داهمیشه دیوڅخه کوچنی دی. مونږپوهیږوچې که $E > V_0$ دلته په کلاسیکي توګه دذروانعکاس نشته دی که چیرې $E > V_0$ نو $(R = 0, T = 1)$. مګرپه کوانټم میخانیکي توګه دلته د $E > V_0$ لپاره د تېریدنې څه احتمال شته دی خو $E \to \infty$ کوي نو $R \to 0$) کوي. دذروپه سیلان کې داعظمي او اصغري ښکاریدنه دنوري موجونو دتداخل دپېښې سره ورته دي.

دویم حالت: $E < V_0$:

داحالت نسبت $E > V_0$ حالت ته په اسانۍ سره مشتق کیږي. د(3.69) معادلې څخه مونږلروچې

$$\alpha^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

$$\therefore \qquad \alpha^2 = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$\beta^2 = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ وضع کوو. د $V_0 > E$ لپاره β^2 مثبت ده.

$$\alpha^2 = -\beta^2$$

$$\therefore \qquad \alpha = i\beta$$

په (3.75) او (3.76) معادلو کې د $\alpha = i\beta$ په استعمال سره مونږد لپاره**R** او **T** حاصلولای شو.

بنا پردې لیکو،

$$T = \frac{1}{\left[1 + \frac{V_0^{\,2} \sin^2 i\beta a}{4E(E - V_0)}\right]} \qquad (3.77)$$

$$R = \frac{1}{\left[\frac{4E(E - V_0)}{V_0^{\,2} \sin^2 i\beta a} + 1\right]} \qquad (3.78)$$

مونږلرو ،چې $\sin i\theta = i \sin h\theta$ دی دلته $\sin h\theta$ هایپرابولیک تابع تشریح کوي.

$$\therefore \qquad T = \frac{1}{\left[1+\frac{V_0^{\,2}(i)^2\sinh^2\beta a}{4E(E-V_0)}\right]}.$$

یا

$$T = \frac{1}{\left[1+\frac{V_0^{\,2}\sinh^2\beta a}{4E(V_0-E)}\right]} \qquad (3-79)$$

او

$$R = \frac{1}{\left[\frac{4E(V_0-E)}{V_0^{\,2}\sinh^2\beta a}+1\right]} \qquad (3-80)$$

داولیدل شول چې $E < V_0$ لپاره همیشه دتیریدنې څه احتمال شته دی. په کلاسیکي توګه، $E < V_0$ لپاره د تیریدنې احتمال $T = 0$ دی، یعنې احتمال نشته دی. داډول تېریدنه په پوره توګه کوانتم میخانیکي پېښه ده. همدارنګه دیته تونلینګ اثرهم وایي.

که چیرې یوه ذره دپوتنشیل دلوړ سرحد څخه په کمه انرژي دپوتنشیل په سرحد وویشتل شي نو دلته همیشه دسرحد څخه دتیریدنې یو څه احتمال شته دی، دغه پیښه دتونلینګ اثرپه نوم یادیږي.

تونلینګ اثرلاندې پیښوته تشریح برابروي

I. دیخې فلزي سطحې څخه دالکترون دانتشار ساحه
II. دعایق برقي لویدنه
III. دنیمه هادي ډایوډ په شالویدنه
IV. دتونل دډایوډ دچالانو عمل
V. دراډیو اکټیف عنصر څخه د دالفاذرې انتشار

3.6 یوبعدي هارمونیکي اسیلاتور

لمړی به مونږ دساده هارمونیکي اسیلاتور کلاسیکي حرکت په پام کې ونیسو

کلاسیکي حرکت:

په ساده خطي هارمونیک حرکت کې، F ارتجاعي قوه دمنځني موقیعت څخه دذرې تغیر مکان سره مستقیماً متناسب ده او دمنځني موقیعت خواته موجه ده نولیکو چې

$$F = -kx$$

$$\therefore \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

یا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

دلته چې $\omega^2 = \frac{k}{m}$ یا $k = m\omega^2$ دی.

دپورته معادلې حل عبارت دی له

$$x = a\sin(\omega t + \phi)$$

دلته a داهتزازلمن ده.

نو ذره د a+ او a- ترمنځ په لاندې فریکونسي سره اهتزازکوي.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

داسیلاتوریا اهتزازکوونکي ټولیزه انرژي،

$$E = \frac{1}{2}ka^2$$

دلته k امپلیتود دی او دکلاسیکي لیمټ په نوم یادیږي او دمختلفو انرژیو لپاره مختلف دی.

مونږ ویلای شو، چې ذره په نظرکې نیول شوې کلاسیکي ساحې په شاوخوا باید حرکت وکړي.

$|x| < a$ چې دلته $a = (\frac{2E}{k})^{\frac{1}{2}}$ دی. په کلاسیکي ډول په نظرکې نیول شوې ساحې دننه ټول فرعي تقسیمات یوشان احتمالي نه دي، څرنګه چې ذره دتعادل پواسطه زنګیږي، دذرې دوروحرکت په نتیجه کې زیات وخت مصرفیږي. dt وخت چې ذره یې د dx په کوچني وخت کې مصرفوي دذرې

سرعت پورې تړلی دی او عبارت له $dt=\frac{dx}{v}$ څخه دی. په dx کې دذرې دپیداکېدو احتمال dp دهغه دمصرفیدونکي وخت سره متناسب دی اوعبارت له $dp=\frac{2dt}{T}$ څخه دی.چیرته چې **T** داهتزاز کوونکي دتناوب وخت دی.

$$\therefore \qquad dp=\frac{2dt}{T}=\frac{2}{T}\frac{dt}{dx}dx$$

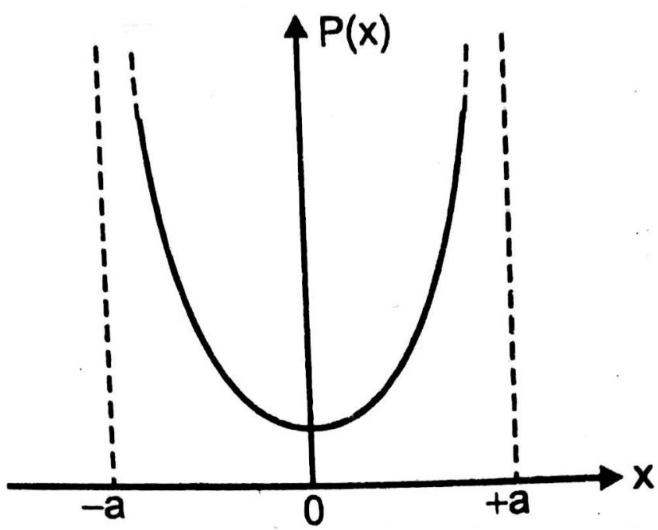
$$=\frac{2}{T}(\frac{1}{v})dx$$

$$\because \qquad v=\omega^2\sqrt{a^2-x^2} \qquad , \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$dp=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}dx=p(x)dx \qquad (3.81)$$

چیرته چې $p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$ ته دکثافت احتمال وایي.

دتغیرمکان په مقابل کې دکلاسیکي کثافت احتمال ترسیم په(3.9) شکل کې ښودل شوی دی.

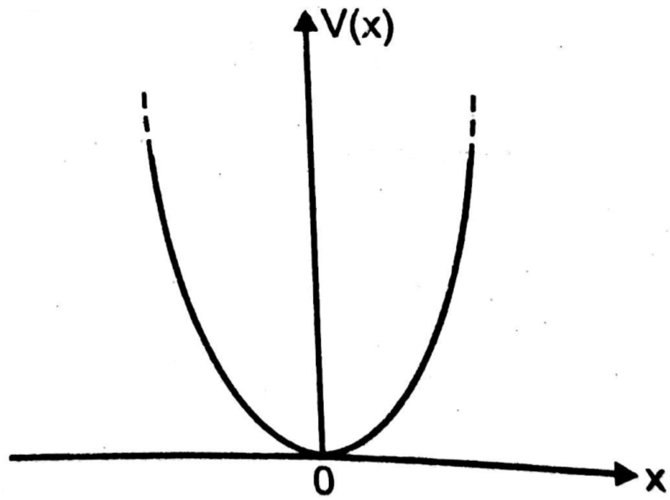


3.9 شکل: دکلاسیکي کثافت د احتمال ترسیم

کوانتم میخانیکي حرکت:

ساده هارمونیکي اسیلاتور $V=\frac{1}{2}kx^2$ پوتنشیل انرژي لري.

دتغیرمکان په مقابل کې دپوتنشیل ترسیم په (3.10) شکل کې ښودل شوی دی



3.10 شکل: پوتنشیل انرژي

دهارمونیک اسیلاتورلپاره دشروډینګرمعادله عبارت ده له

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}kx^2)\psi=0 \qquad (3.82)$$

ښه داده، چې (3.82) معادله دبې بعده کمیتونوپه واسطه ساده کړو..راځئ! چې بې بعده متحول معرفي کړو

$$\xi=\alpha x \qquad (3.83)$$

چیرته چې α ثابت دا وږدوالي معکوس بعدونه لري.

$$\therefore \qquad \frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$$

$$\therefore \qquad \frac{d\psi}{dx}=\alpha\frac{d\psi}{d\xi}$$

او

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{d\psi}{dx})=\frac{d}{dx}(\alpha\frac{d\psi}{d\xi})=\frac{d\xi}{dx}.\frac{d}{d\xi}(\alpha\frac{d\psi}{d\xi})=\alpha^2\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

دغه قيمتونه په (3.82) معادله وضع کووا و حاصلوو

$$\alpha^2\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}k\frac{\xi^2}{\alpha^2})\psi=0$$

$$\therefore \qquad \alpha^2\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{mk\xi^2}{\hbar^2\alpha^2})\psi=0$$

دواړه خواوې په α^2 باندې ويشواو حاصلوو

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{mk\xi^2}{\hbar^2\alpha^4})\psi=0 \qquad (3.84)$$

څرنګه چې α ثابت دی نو راځئ! چې α داسې انتخاب کړو

$$\frac{mk}{\hbar^2\alpha^4}=1 \qquad ,\alpha^4=\frac{mk}{\hbar^2} \quad ,\alpha=(\frac{mk}{\hbar^2})^{\frac{1}{4}}$$

همدارنګه λ يوبل ثابت هم معرفي کوو، داسې تعريفيږي،

$$\lambda=\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} \qquad (3.85)$$

په (3.85) معادله کې د $k=m\omega^2$ په کارونې سره مونږ حاصلوو:

$$\alpha=(\frac{m\omega^2}{\hbar})^{\frac{1}{2}}\text{.................................}(3.86)$$

$$\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}\text{.......................................}(3.87)$$

نوځکه، (3.84) معادله دا شکل غوره کوي.

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\psi=0\text{......................}(3.88)$$

زمونږغوښتنه په $(-\infty,+\infty)$ انټروال کې د ξ لپاره د $\psi(\xi)$ دحلونو لاسته راوړل دي. کوم چې (3.88) معادله صدق کړي او کوم چې دقبلولو وړ تابع ګانې دي. هره تابع باید مسلسله ،یو قیمته او په ساحه کې محدوده وي.

راځئ! بې علامې حل په پام کې نیسو $\xi \to \infty$ ، کله چې ξ لويه شي نود ξ په مقایسه د λ څخه صرف نظر کوو ، نو بیا (3-88) معادله په دې ډول کیږي

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = 0$$

دپورته معادلې عمومي حل به په لاندې شکل وي:

$$\psi(\xi) = Ae^{-\frac{\xi 2}{2}} + Be^{\frac{\xi 2}{2}}$$

څرنګه چې $\xi \to \infty$ نو $e^{-\frac{\xi^2}{2}} \to 0$ کیږي او $e^{\frac{\xi^2}{2}} \to \infty$ کوي نود قبلولو وړ حل به په لاندې ډول وي

$$\psi(\xi) = Ae^{-\frac{\xi 2}{2}}$$

مونږ مخکې څو ،چې د (3.88) موج تابع حل دفضا په $(-\infty,+\infty)$ انټروال کې د بې علامې حل په اساس لاسته راوړو ،

فرضوو ،چې حل په دا شکل لري

$$\psi(\xi) = A.H(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad ....(3.89)$$

چیرته چې A ثابت او $H(\xi)$ د ξ تابع ده.

د (3.89) معادله څخه لرو چې

$$\frac{d\psi}{d\xi} = A.H'(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi A.H(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

او

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = AH''(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi AH'(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi AH'(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} + \xi 2AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = AH''(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - 2\xi AH'(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} - AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} + \xi 2AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

په (3.88) معادله کې $\psi(\xi)$ او $\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$ کاروو، مونږ حاصلوو

$$AH''(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} - 2\xi AH'(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} - AH(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} + \xi^2 AH(\xi) + (\lambda - \xi^2)AH(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} = 0$$

$$\therefore \qquad Ae^{-\frac{\xi^2}{2}}[H''(\xi) - 2\xi H(\xi) + (\lambda - 1)H(\xi)] = 0 \quad \text{.........................(3.90)}$$

داچې $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ اختياري تابع ده، مونږ حاصلوو چې

$$H''(\xi) - 2\xi H'(\xi) + (\lambda + 1)H(\xi) = 0$$

يا

$$H'' - 2\xi H' + (\lambda - 1)H = 0 \quad \text{.............................(3.91)}$$

چيرته چې زور نظر ξ ته ډيفرنسيال ښايي.

(3.91) معادله د ξ متحول سره د **H** لپاره دهرميټ تفاضلي معادله ده، مونږ کوشش کوو، چې ددې معادلې حل د فروبنس توان لرونکې سلسلې په شکل لاسته راوړو،

فرضوو چې $H(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m.\xi^m$

$$\therefore \qquad H'(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m.\xi^{m-1}$$

او

$$H''(\xi) = \sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1).\xi^{m-2}$$

داټول قيمتونه په (3.91) معادله کې وضع کوو مونږ حاصلوو

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1).\xi^{m-2} - 2\xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m.\xi^{m-1} + (\lambda-1)\sum_{m=0}^{\infty} a_m.\xi^m = 0$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1).\xi^{m-2} - 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m.\xi^{m} + (\lambda-1)\sum_{m=0}^{\infty} a_m.\xi^m = 0$$

دپورته معادلې په لمړي حد کې **m** په **m+2** وضع کوو

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1).\xi^{m-2} - 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m.\xi^{m} + (\lambda-1)\sum_{m=0}^{\infty} a_m.\xi^m = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{m=2}^{\infty} [a_{m+2}(m+2)m - 2a_m m + (\lambda-1)a_m]\xi^m = 0.....................(3.92)$$

څرنګه چې ξ اختياري دی، د ξ هرضريب او هر طاقت په پورته معادله کې بايد صفر وي، ځکه نو د ξ^m ضريب باره کې مونږ حاصلوو

$$a_{m+2}(m+2)(m+1) - 2a_m m + (\lambda-1)a_m = 0$$

$$a_{m+2} = \frac{(2m+1-\lambda)}{(m+1)(m+2)} a_m.....................(3.93)$$

دې افادې ته د بيرته ګرځيدنې فورمول وايي. که مونږ a_0 وپيژنو، مونږ ..... a_2, a_4, a_6 محاسبه کولای شو او که مونږ a_1 وپيژنو ،مونږ..... a_3, a_5, a_7 محاسبه کولای شو. نو ځکه $H(\xi)$ دنامحدوده طاق او جفت طاقت لرونکو سلسلو لرونکې ده.

$$H(\xi) = [a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + ...] + [a_1\xi + a_3\xi^3 + a_5\xi^5 + ...]$$

دانرژي دپارامتر λ داختیاري قیمتونولپاره، پورته ورکړشوې سلسله دنامحدودو حدونوڅخه عبارت ده اودقناعت وړموج تابع سره مطابقت نه کوي. راځئ! چې ددې طاقت لرونکي سلسلې مربوطه حل امتحان کړوچې د(3.93) معادلې پواسطه تعریف شوی دی. لکه $m \to \infty$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{a_{m+2}}{a_m} = \lim_{m \to \infty} \frac{(2m+1-\lambda)}{(m+1)(m+2)} = \frac{2}{m} \text{..........................}(3.94)$$

د e^{ξ^2} سلسلې غزونه په پام کې نیسو، مونږلروچې

$$e^{\xi^2} = 1+\xi^2 + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + ... + \frac{\xi^m}{(\frac{m}{2})!} + \frac{\xi^{m+2}}{(\frac{m}{2}+1)!} + ...$$

$$= b_0 + b_2\xi^2 + b_4\xi^4 + ... + b_m\xi^m + b_{m+2}\xi^{m+2} + ...$$

ددې سلسلې څخه مونږحاصلوو

$$\frac{b_{m+2}}{b_m} = \frac{\frac{1}{(\frac{m}{2}+1)!}}{\frac{1}{(\frac{m}{2})!}} = \frac{2}{2+m}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{b_{m+2}}{b_m} = \lim_{m \to \infty} \frac{2}{2+m} = \frac{2}{m} \text{.....................}(3.95)$$

(3.94) او (3.95) معادلې په ترتیب سره د $H(\xi)$ او e^{ξ^2} سلوک ښايي، کوم چې دابنايي چې

د $H(\xi)$ د e^{ξ^2} په شان تباعد کوي، په نتیجه کې $\psi(\xi) = AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}} = Ae^{\xi 2}.e^{-\frac{\xi^2}{2}} = Ae^{\frac{\xi^2}{2}}$ د

داورکوي، چې $\xi \to \pm\infty$ کوي نو $\psi(\xi) \to \infty$ کوي نوځکه غیرقابل قبول موج تابع جوړوي.

یوازینی لاره چې ددې حالت نه په کې مخنیوی شوی وي هغه په (3.93) معادله کې د λ داسې انتخاب دی چې د ξ دطاقتونوضریبونه دټاکلي قیمت $m=n$ نه وروسته دمنځه ولاړ شي

اودنامحدودې سلسلې په ځای د ξ یوه پولینومل تابع $H(\xi)$ جوړه کړي. د a_n نه وروسته ټول ضریبونه صفردي، دا ممکنه ده که چیرې په (3.93) معادله کې $m=n$ شي. دا ورکوي

$$a_{n+2} = \frac{(2n+1-\lambda)}{(n+1)(n+2)} a_n = 0$$

مګر $a_n \neq 0$ دی بناپردې،

$$2n+1-\lambda = 0$$
$$\lambda = 2n+1$$

د (3.87) معادلې څخه مونږلرو

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$\therefore \qquad \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1$$

$$E = \frac{1}{2}(2n+1)\hbar\omega$$

یا

$$E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

دلته چې $n = 0,1,2,3,...$

څرنګه چې د n مختلف قیمتونولپاره انرژي ګانې مختلفې دي نو مونږلیکلای شو

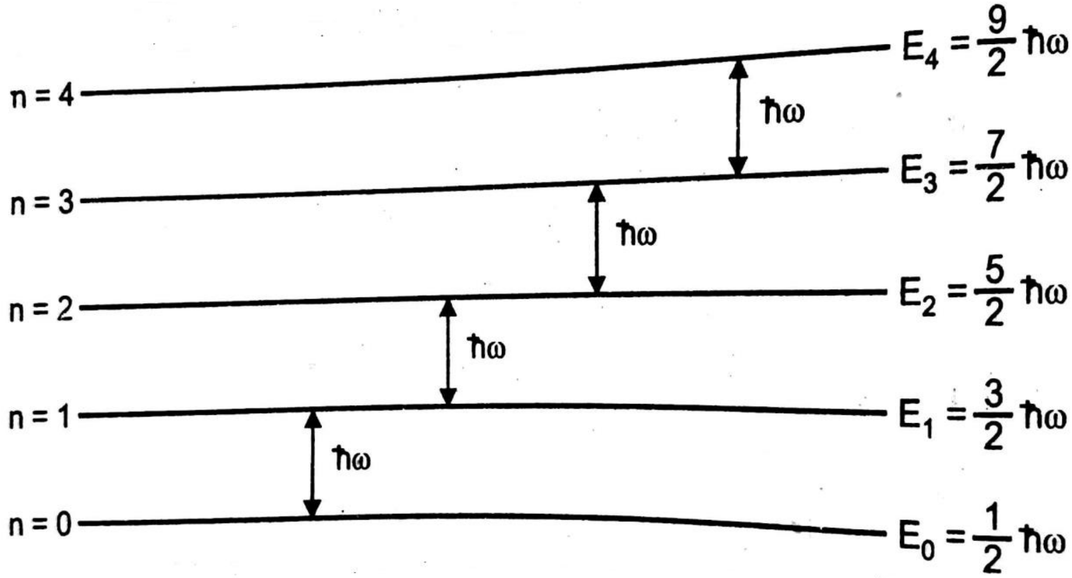
$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

پورتنۍ معادله د یوبعدي هارمونیکي اسیلاتور دانرژي طیف ورکوي. دهارمونیکي اسیلاتورد انرژي طیف باره کې مونږ په لاندې ډول یادونه کوو

1. دانرژي طیف منفصل دی. دانرژي نامحدودې لیولې موجودې دي، چې د $n = 0,1,2,3,...$ سره مطابقت کوي. اګرچې کلاسیکي تیوري دانرژي مسلسل طیف پیشګویي کوي.

2. ترټولو ټیټ دانرژي لیول(د $n=0$ سره مطابقت کوي)، چې $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ انرژي لري، دعادي حالت دانرژي یاصفري نقطې دانرژي په نوم یادیږي. په کلاسیکي توګه ترټولو ټیټه انرژي صفرده، کوم چې دسکون حالت سره مطابقت کوي، په کوانتم میخانیکي توګه ترټولو ټیټه انرژي صفرنه ده بلکې $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ده. دادغیریقین والي داصل پایله ده.

دانرژي طیف په (3.11) شکل کې ښودل شوی دی. دا لیدل شوی دی، چې دپرله پسې انرژي لیولو ترمنځ جدایې یوشان او د $\hbar\omega$ سره مساوي ده.



3.11 شکل: دیوبعدي هارمونیکي اسیلاتوردانرژي طیف

دموج تابع ساده کېدنه:

دیوبعدي هارمونیکي اسیلاتورموج تابع عبارت ده له

$$\psi(\xi) = AH(\xi).e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

چیرته چې A دساده کېدنې ثابت دی، څرنګه چې $\xi = \alpha x$ دی

$$\therefore \qquad \psi(x) = AH(\alpha x).e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

څرنګه چې انرژي n تام عدد پوري تړلې ده، دمختلفو انرژي لیولو پوري تړلې موج تابع عبارت ده له

$$\psi_n(\xi) = A_n H_n(\xi).e^{-\frac{\xi 2}{2}} \text{..........................(3.97)}$$

یا

$$\psi_n(x) = A_n H_n(\alpha x)e^{-\frac{\alpha 2x2}{2}} \text{..........................(3.98)}$$

مونږ A_n تشریح کوو، دساده کېدنې شرط کاروو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^* dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\therefore \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |A_n|^2 H_n{}^2(\alpha x)e^{-\alpha^2 x^2} dx = 1$$

$$\therefore \qquad |A_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n{}^2(\alpha x)e^{-\alpha^2 x^2} dx = 1$$

مونږلرو

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n{}^2(\alpha x)e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} H_n{}^2(\xi).e^{-\xi^2} d\xi$$

مګرد $\int_{-\infty}^{\infty} H_n{}^2(\xi).e^{-\xi 2} d\xi = \sqrt{\pi}\,2^n n!$ انتګرال

$$\therefore \qquad |A_n|^2 \frac{\sqrt{\pi}\,2^n n!}{\alpha} = 1$$

دا ورکوي

$$A_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

بناپردې دهارمونیک اسیلاتورلپاره ساده شوې تابع عبارت ده له

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} Hn(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \quad \text{..................................(3.99)}$$

دلته چې $n = 0,1,2,3,......$

د $n = 0$ لپاره موج تابع ته دعادي حالت تابع وایي.

دهرمیټ پولینومونه په لاندې ډول دي

ترتیب	$H_n(\xi)$	$H_0(\alpha x)$
0	$H_0(\xi) = 1$	$H_0(\alpha x) = 1$
1	$H_1(\xi) = 2\xi$	$H_1(\alpha x) = 2\alpha x$
2	$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$	$H_2(\alpha x) = 4\alpha^2 x^2 - 2$
3	$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$	$H_3(\alpha x) = 8\alpha^3 x^3 - 12ax$
4	$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$	$H_4(\alpha x) = 16\alpha^4 x^4 - 48\alpha^2 x^2 + 12$

دمختلفو حالتونو لپاره موج تابع ګانې په لاندې ډول ورکول کیږي

1. دعادي حالت تابع:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} H_0(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.100)$$ یا

دکثافت احتمال عبارت دی له

$$\left|\psi_0(x)\right|^2 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\alpha 2x2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.101)$$

2. داول هیجاني حالت موج تابع:

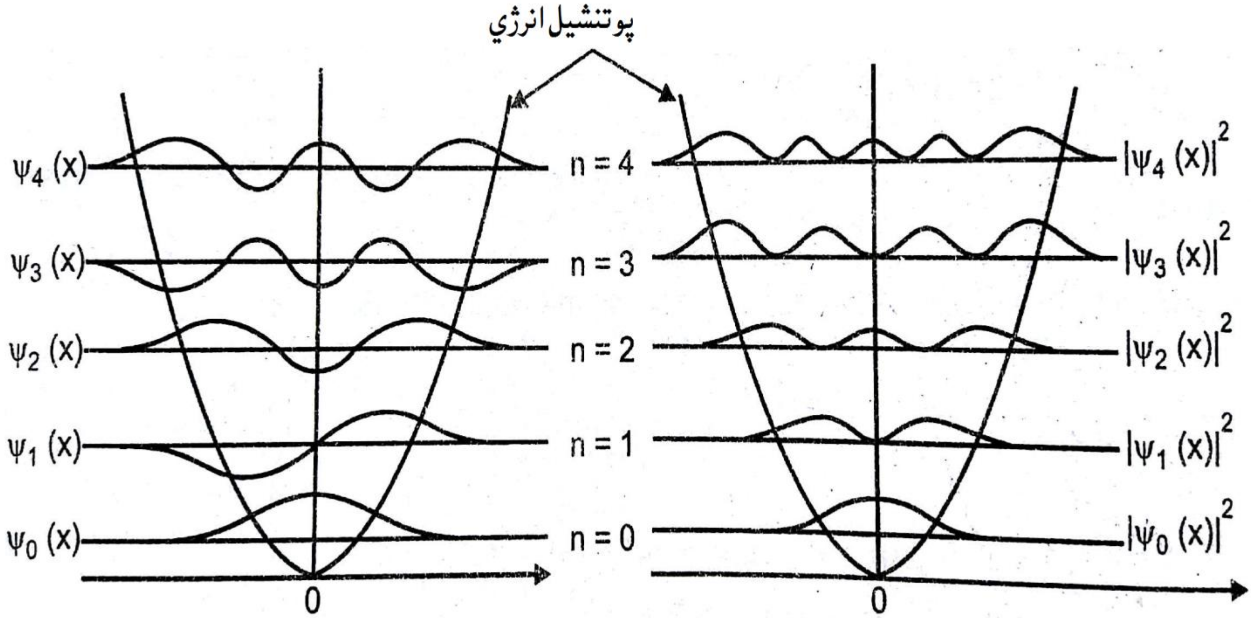
$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} H_1(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha x)\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.102)$$ یا

دکثافت احتمال عبارت دی له :

$$\left|\psi_1(x)\right|^2 = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right) 4\alpha^2 x^2 . e^{-\alpha^2 x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.103)$$

دعادي حالت او دلمړي څلورهیجاني حالتونو لپاره موج تابع او دکثافت احتمال په فزیکي توګه په (3.12) شکل کې رسم شوي دي.



(b) احتمالي کثافت (a) موج تابع ګانې

3.12 شکل

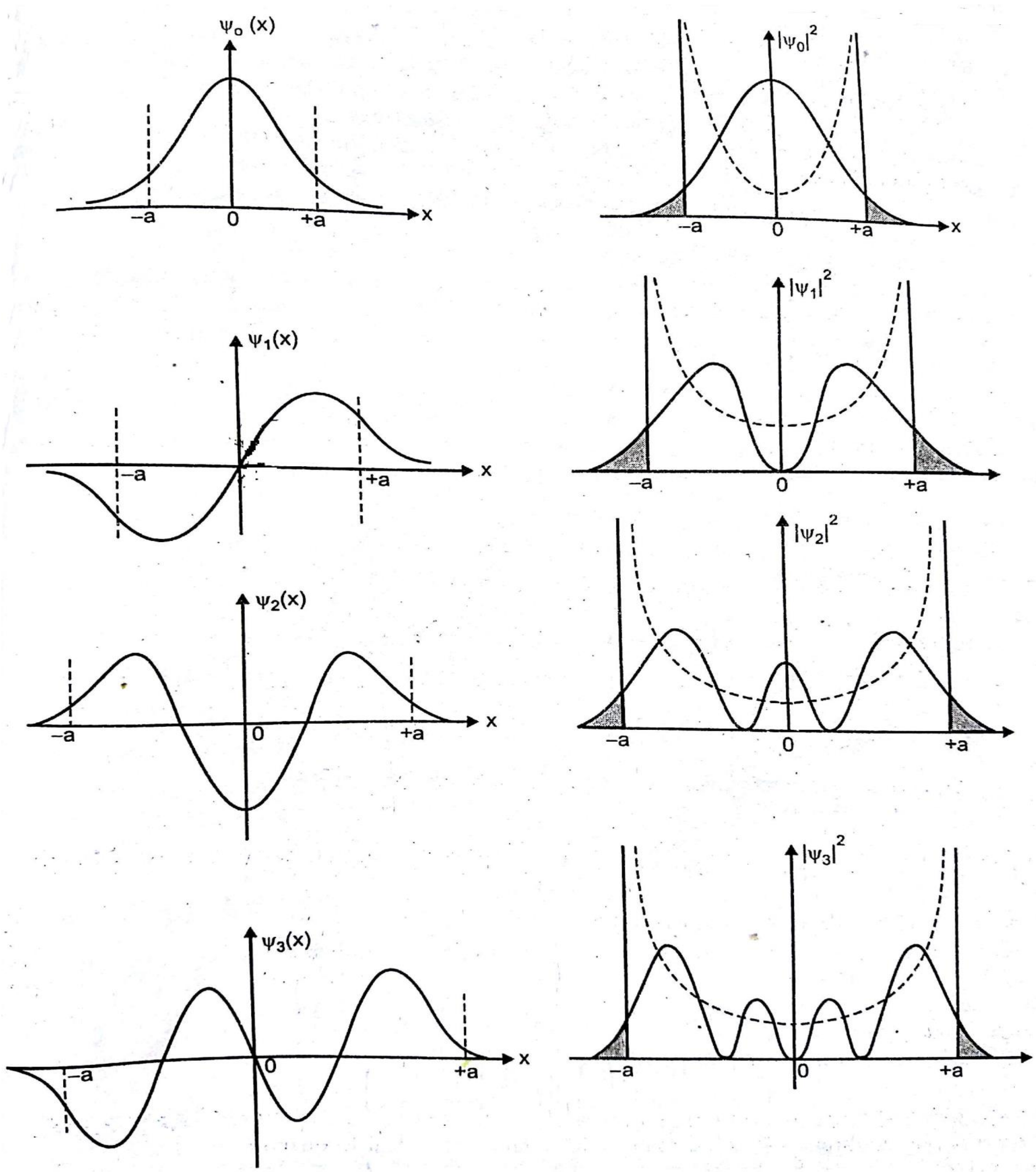
دهارمونیک اسیلاتوردتابع ګانوفزیکي تعبیر:

دلمړي څلورحالتونولپاره موج تابع ګانې اودهغوې مربوط دکثافتونو احتمال په (3.13) شکل کې ښودل شوي دي. په (b) 3.13شکل کې ټکی ټکی منحني ګانې کلاسیکي کثافتونو احتمال ښايي او هم ښايي، چې دکوانټم میخانیکي کثافت د احتمال منحني ګانې د n کوچني قیمتونولپاره دکلاسیکي منحني ګانوسره دمقایسې وړنه دي.

کلاسیکي کثافت احتمال عبارت دی له

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

څرنګه چې $x \to \pm a$ ، نو $p(x) \to \infty$. چیرته چې a دهغه اسیلاتور امپلیتود دی دکوم چې انرژي د کوانټم میخانیکي انرژي دایګن دقیمت سره مساوي دی.



3.13 شکل

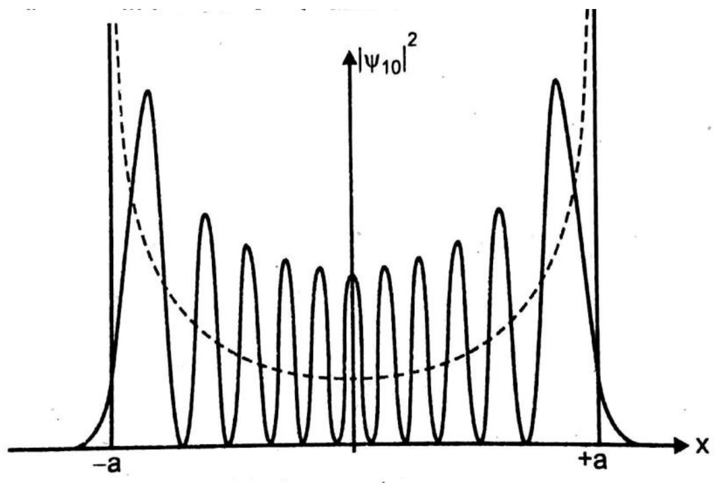
دکلاسیکي تیوري له مخې، دورکړشوې انرژي لپاره،یولیمټ موجود دی، چې دهغې نه اخوا اسیلاتور تګ نه شي کولای او دکلاسیکي کثافت احتمال په دې سرحد کې لایتناهي ته رسیږي. د کثافت احتمال اعظمي دی ځکه چې ذره په اعظمي نقطوکې ډیروخت مصرفوي او سرعت یې صفرخواته میلان کوي. په متوسط موقیعت کې ذره ترټولوکم وخت مصرفوي ځکه چې سرعت یې اعظمي دی، له دې وجې نه دذرې دپیدا کېدو احتمال په متوسط موقیعت کې کم دی.

دبلې خوا په کوانټم میخانیکي توګه، دکلاسیکي سرحدونوڅخه دباندې یوکوچنی احتمال موجود دی لکه څنګه چې په(b) 3.13شکل کې په پټه شوي برخه کې ښودل شوی دی. داځکه چې موج تابع په منع شوې ساحه کې لکۍ لري. دکلاسیکي سرحدونوڅخه بهر مثلآ په کلاسیکي منع شوې ساحه کې دذرې موجودیت دتونلنګ اثرپه نوم یادیږي.

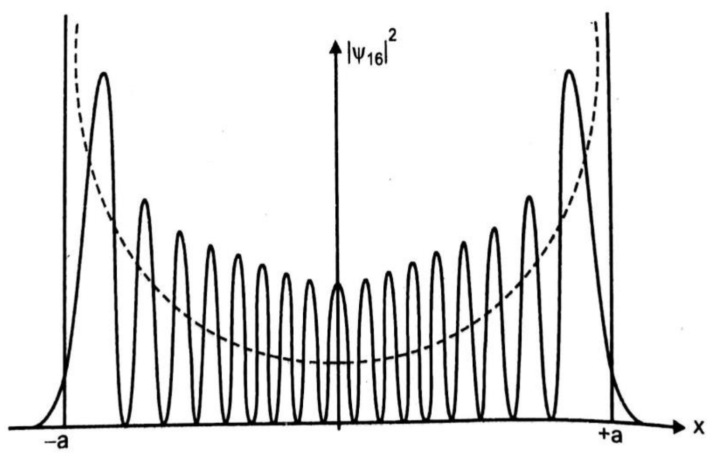
دکلاسیکي تیوري سره جوړیدنه:

له (b) 3.13شکل څخه معلومیږي چې دکثافتونو احتمال $|\psi_n(x)|^2$ دهغه ټیټوحالتونو سره چې دکلاسیکي هارمونیک اسیلاتوردکلاسیکي کثافتونو سره ډیرسمون لري ترلی دی،اګرچې دکلاسیکي اوکوانټم میخانیکي کثافتونوسمون په تیزۍ سره د n په زیاتېدوقوي کیږي.

(3.14) شکل دلوی n لپاره دکثافت داحتمال $|\psi_n(x)|^2$ ،ګرافونه ښایي. داالیدل کیږي، چې دکوانټم میخانیکي احتمال تابع اهتزازي تابع ده او اصغري نقطې $|\psi_n(x)|^2 = 0$ سره مطابقت کوي. دمختلفوارتفاع ګانواوچتوالی مختلف دی اوپه x=0 کې ترټولوکم اوچتوالی دی اوددې دواړوخواووته اعظمي اوچتوالی زیاتیږي.



(a) د n=10 لپاره



(b) د n=16 لپاره

3.14 شکل

ټکی ټکی منحني دکثافت دا احتمال وسط ښایي. دا مشاهده کیږي، چې دا منحني دکلاسیکي احتمال دمنحني په شان یوشان طبیعت لري. بناپردې دلوی n لپاره داالیدل کیږي، چې دکوانټم میخانیکي احتمال منحني(وسط) دکلاسیکي احتمال دمنحني سره موافقه ده چې دا دبورداصل سره موافق دی، کوم چې بیانوي چې n کوانټم نمبرسیستم مشخصوي. $n \to \infty$ کې کوانټم میخانیکي نتیجې دکلاسیکي تیوري دپشګویانو سره یوشی دي.

دموج تابع زوج:

دساده هارمونیک اسیلاتور موج تابع عبارت ده له

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

په پورته معادله کې **x** په **x−** بدلوو مونږ حاصلوو

$$\psi_n(-x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} H_n(-\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

دهرمیټ دپولینومل څخه مونږلرو، $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

بناپردې پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

یا

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$$

په دې ډول، که چیرې n جفت وي، نو $\psi_n(-x) = \psi_n(x)$ او که n طاق وي نو $\psi_n(-x) = -\psi_n(x)$ دی. همدارنګه جفت انډکس لرونکي ترتیب $\psi_0(x), \psi_2(x), \psi_4(x), ...$ جفتې جوړه ایزې توابع دي اوطاق ترتیب توابع $\psi_1(x), \psi_3(x), \psi_5(x), ...$طاقې جوړه ایزې توابع دي، په نتیجه کې، دساده هارمونیک اسیلاتوردایګن توابع محدودې جوړې لري کومې چې طاقې او جفتې دي.

تشریحي مثالونه

3.1مثال: یو الکترون د $1A^{\circ}$ په یو بعدي پوتنشیلي څاه کې راګیر او حرکت کوي، د الکترون ترټولو ټیټه انرژي پیدا کړئ. $m = 9,11.10^{-31}\,kg\ ,\hbar = 1,054.10^{-34}\,j.\sec\ ,1eV = 1,6.10^{-19}\,j$

حل: مونږ لرو

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$= \frac{(3,14)^2.(1,054.10^{-34})^2}{2.9,11.10^{-31}(10^{-10})^2} = 6.10^{-18}\ \text{j}$$

$$= \frac{6.10^{-18}}{1,6.10^{-19}} = 37,5\text{eV}$$

3.2مثال: په یو نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې دیوې ذرې موج تابع په دې ډول ورکړشوې ده.

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , 0 < x < a$$

$<x>\ \ ,<p_x>$ پیدا کړئ؟

حل: A دساده کیدنې ثابت دی، دا اسانه ده چې وښودل شي چې قیمت یې $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ دی.

$$\therefore \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}.\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

(a) د x متوسط قیمت عبارت دی له

$$<x> = \int_0^a x|\psi_n(x)|^2 dx$$

$$<x> = \int_0^a x|A|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a \frac{x}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \left(x - x\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a xdx - \int_0^a x\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^a - \int_0^a x\cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right)$$

ددویم حد انتګرال په حصه وي طریقه پیدا کوو

$$\int_0^a x\cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx = x.\frac{\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)}{\frac{2n\pi}{a}} - \int_0^a \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$= \left[x\frac{\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)}{\frac{2n\pi}{a}} - \frac{\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)}{\frac{2n\pi}{a}}\right]_0^a = 0$$

داورکوي چې $\int_0^a \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 0$

$$<x> = \frac{1}{a}\frac{a^2}{2}$$

یا

$$<x> = \frac{a}{2}$$

(b) د p_x مومنټم متوسط قیمت عبارت دی له

$$
\begin{aligned}
< p_x > &= \int_0^a \psi^*{}_n \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi_n dx \\
&= -i\hbar \int_0^a \psi^*{}_n \frac{d\psi_n}{dx} dx \\
&= -i\hbar \frac{a}{2} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \\
&= -i\hbar \frac{a}{2} \frac{n\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \\
&= \frac{-i\hbar n\pi}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x\right) dx \\
&= \frac{i\hbar n\pi}{a^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right)}{\frac{2n}{\pi}} \right]_0^a = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad < p_x > = 0$$

3.3مثال: په $1{,}00\mu gr$ کتلې سره یو کوچنی جسم راګیرشوی دی چې دده ټینګ دیوالونوترمنځ چې د $1{,}00mm$فاصلې په واسطه سره جدا شوي دي، حرکت کوي. (a) دجسم اصغري چټکتیا پیدا کړئ.
(b) که چیرې دجسم چټکتیا $3.10^6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ وي ددې پورې مربوط د n قیمت پیدا کړئ

حل: کله چې ذره په یوبعدي کلک بکس کې محصوره شوي وي، نودانرژي دایګن قیمتونه یې عبارت دي له

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

الف: که ذره په $n = 1$لیول کې وي، نوترټولوټیټه انرژي لري همدارنګه اصغري چټکتیالري.

نوپه دې اساس،

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$a = 1{,}00mm = 1.10^{-3}\,\text{m}$$
$$m = 1{,}00\mu gr = 1.10^{-6}\,gr = 1.10^{-9}\,\text{kg}$$
$$\hbar = 1{,}055.10^{-34}\,\text{j.s}$$

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{(3{,}14)^2(1{,}055.10^{-34})^2}{2(10^{-9})(10^{-3})^2} = 5{,}486.10^{-53}\,j$$

ذره يوازې حرکي انرژي لري،څرنګه چې $V = 0$ دی نو،

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\therefore \qquad v = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \left(\frac{(2.5{,}486.10^{-53})2}{10-9}\right)^2 = (10{,}972.10^{-44})^2$$
$$= 3{,}31.10^{-22}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

داسرعت ډېرکوچنی دی، چې ذره دسکون حالت کې ورسره عمل کوي مثلآعادي حالت ، نوموړې ذره به $3{,}021.10^{18}$s يا $9{,}57.10^{10}$ y وخت ته ضرورت ولري ترڅوهغه فاصله ووهي چې ديو بعدي ټینګ بکس دپراخوالي سره مساوي ده.

(b) فرضوو،چې ذره په n لیول کې په $v = 3.10^6\,\dfrac{m}{\text{sec}}$ تیزۍ موجوده ده.

مونږلرو $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

يا

$$n^2 = \frac{m^2a^2v^2}{\pi^2\hbar^2}$$

يا

$$n = \frac{mav}{\pi\hbar} = \frac{10^{-9}.10^{-3}.3.10^6}{3{,}14.1.055.10^{-34}} = 0{,}905.10^{28}$$
$$n = 9.10^{27}$$

n ډېر لوی دی، په نتیجه کې ذره په کوانتم میخانیکي توګه حرکت نه کوي.

3.4 مثال: په 2nm عرض یوبعدي بکس کې یوپروتون راګیردی، چې حرکت وکړي،

(a) دپروتون ترټولو ټیټه ممکنه انرژي پیدا کړئ.

(b) دالکترون ترټولو ټیټه ممکنه انرژي به څومره وي که په عینې بکس کې راګیرشوی وي.

حل: کله چې ذره په یوبعدي بکس کې راګیرشي، دایګن دانرژي قیمت یې په دې ډول دی

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

که چیرې ذره په $n=1$ لیول کې وي، مثلاً په عادي حالت کې ترټولو ټیټه انرژي، نوځکه لیکوچې

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

مونږلرو $\mathrm{a = 2nm = 2.10^{-9}\,m = 2.10^{-10}\,m}$

دپروتون لپاره، $\mathrm{m = 1{,}66.10^{-27}\,kg}$

$$\hbar = 1{,}055.10^{-34}\ \mathrm{j.s}$$

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{(3{,}14)^2(1{,}055.10-34)^2}{2..1{,}66.10^{-27}(2.10-10)^2}$$
$$= 0{,}826.^{-21}\ \mathrm{j}$$
$$= 5{,}16.10^{-3}\,\mathrm{ev}$$

(b) اوس، دالکترون لپاره په مسئله کارکوو:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

مونږلرو

$$\mathrm{a} = 0{,}2\mathrm{nm} = 0{,}2.10^{-9}\,\mathrm{m}$$
$$\mathrm{m} = 9{,}1.10^{-31}\,\mathrm{k}g$$
$$\hbar = 1{,}055.10^{-34}\ \mathrm{j.s}$$

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{(3,14)^2.(1,055.10^{-34})^2}{2.9,1.10^{-31}.(2.10^{-10})^2}$$
$$= 0,1507.10^{-17}\ \text{j} = 1,507.10^{-18}\ \text{j}$$
$$= 9,42\text{ev}$$

3.5 مثال: يو ياقوتي ليزر په 693,4nm طول موج نور خپروي. که دا نور د دې باعث شي چې په يو بعدي بکس کې الکترون د $n = 2$ **څخه** $n = 1$ ته انتقال وکړي. د بکس عرض پيدا کړئ.

حل: په n ام ليول کې دانرژي قيمت عبارت دی له

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

کله چې الکترون $n = 2$ **څخه** $n = 1$ ته ټوپ ووهي، نو دانرژي تفاوت يې عبارت دی له

$$E_2 - E_1 = 4\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 3\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

دانرژۍ دغه تفاوت د ν فريکونسۍ سره د فوتون په شکل خپرېږي

$$E_2 - E_1 = h.\nu$$
$$\therefore \qquad h.\nu = 3\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

يا

$$\frac{hc}{\lambda} = 3\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

يا

$$a^2 = 3\frac{\pi^2\hbar^2\lambda}{2mhc}$$

څرنګه چې $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ دی، مونږ لرو چې $a = \frac{3h\lambda}{8mc}$

ورکړشوي،

$$\lambda = 693,4nm = 693,4.10^{-9}m$$
$$c = 3.10^{8}\frac{m}{\sec}$$
$$m = 9,1.10^{-31}kg$$
$$h = 6,62.10^{-34}\,j.\sec$$

$$\therefore \quad a^2 = \frac{3.6,62.10^{-34}.693,4.10^{-9}}{8.9,1.10^{-31}.3.10^{8}}$$
$$= 63,1.10^{-20}m^2$$
$$\therefore \quad a = 7,94.10^{-10}m = 7,94A^{\circ}$$

3.6 مثال: دساده هارمونیک اسیلاتوردعادي حالت موج تابع په کارونې، وښایاست چې دعادي حالت انرژي $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ده.

حل: دساده هارمونیک اسیلاتور دعادي حالت تابع عبارت ده له

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} = Ae^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

چیرته چې $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$

دهارمونیک اسیلاتورلپاره دشروډینګرمعادله عبارت ده له

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \frac{1}{2}kx^2)\psi = 0$$

په عادي حالت کې،

$$\frac{d^2\psi_0}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}kx^2)\psi_0=0.................................(i)$$

$$\frac{d\psi_0}{dx}=\frac{d}{dx}(Ae^{-\frac{\alpha 2x2}{2}})=-\alpha^2 xAe^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\psi_0}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{d\psi_0}{dx}=\frac{d}{dx}(-\alpha^2 xAe^{-\frac{\alpha 2x2}{2}})=\alpha^4x^2Ae^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}-\alpha 2Ae^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}$$

یا
$$\frac{d^2\psi_0}{dx^2}=(\alpha^4x^2-\alpha^2)\psi_0$$

دغه قیمت په (i) معادله کې وضع کوو مونږ حاصلوو

$$(\alpha^4x^2-\alpha^2)\psi_0+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}kx^2)\psi_0=0$$

یا
$$(\alpha^4x^2-\alpha^2)\psi_0+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_0-\frac{mk}{\hbar^2}x^2\psi_0=0$$

مونږ لرو، $k=m\omega^2$

$$\therefore \quad (\alpha^4x^2-\alpha^2)\psi_0+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_0-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi_0=0$$

$$\left[(\alpha^4x^2-\alpha^2)+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right]\psi_0=0$$

چیرته چې ψ_0 دهارمونیک اسیلاتور دعادي حالت تابع ده ، اوصفرنه ده. په نتیجه کې مونږ لرو

$$\alpha^4x^2-\alpha^2+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x=0$$

$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ په کارونې، مونږ حاصلوو

$$\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2 - \frac{m\omega}{\hbar} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2 = 0$$

$$\therefore \quad -\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

یا

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\therefore \qquad E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

3.7 مثال: دساده هارمونیک اسیلاتوردعادي حالت تابع وکاروئ $< x^2 >$, $< x >$ او $< p_x >$ پیداکړئ.

حل: دساده هارمونیک اسیلاتوردعادي حالت تابع عبارت ده له

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

(a) د **x** متوسط قیمت عبارت دی له

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi_0(x)|^2 dx$$

$$\therefore \qquad < x > = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-\alpha 2x2}dx$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} x.e^{-\alpha 2x2}dx$$

دښي خوا انتګرال طاق دی. په نتیجه کې، په $(-\infty,+\infty)$ رنج کې انتګرال صفر کیږي.

$$\therefore \qquad < x >= 0$$

(b) د x^2 متوسط قيمت عبارت دی له

$$<x^2>=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left|\psi_0(x)\right|^2 dx$$

$$<x^2>=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

مونږ عمومي انتګرال لرو

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx=\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\therefore \qquad <x^2>=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}$$

$$\therefore \qquad <x^2>=\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\because \qquad \alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\therefore \qquad <x^2>=\frac{\hbar}{2m\omega}$$

(c) د p_x متوسط قيمت عبارت دی له

$$<p_x>=\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0{}^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi_0 dx$$

$$=-i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0{}^*\frac{d\psi_0}{dx}dx$$

$$=-i\hbar\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\ \frac{d}{dx}e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$=-i\hbar\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\ (-\alpha^2 x^2)e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= i\hbar\alpha^2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\alpha^2x^2}\,dx$$

په ښي خوا انټګرال په $(-\infty,+\infty)$ رنج کې طاق دی او بالاخره صفر کېږي.

$$\therefore \qquad < p_x >= 0$$

3.8 مثال: په یو بعدي ټینګ بکس کې دیوې ذرې لپاره، وښایاست! چې دایګن دانرژي دګاونډیو قیمتونو کسري تفاوت عبارت دی له

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

دغه نتیجه وکاروئ ترڅو دسیستم کلاسیکي سرحد وڅیړئ.

حل: په یو بعدي ټینګ بکس کې دایګن دانرژي قیمت په n ام حالت کې داسې ورکول کیږي

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

په $(n+1)$ ام حالت کې دایګن دانرژي قیمت داسې ورکول کیږي

$$E_{n+1} = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

دایګن دانرژي دقیمتونو ترمنځ توپیر داسې دی

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n$$
$$= \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$
$$= \left[(n+1)^2 - n^2\right]\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

دکلاسیکي سرحدلپاره، $n \to \infty$ کوي بناپردې،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta E_n}{E_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \to 0 \ , \ n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta E_n}{E_n} = 0$$

یاڅرنګه چې $n \to \infty$ نو $\Delta E_n \to \infty$ دی مثلآ دانرژي لیولې مسلسلې دي.

3.9 مثال: په دوه اتومي مالیکول کې داتوم دداخلي فضاداهتزازونودارتجاعي قوې ثابت $10^3 \ \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{m}^2}$ دی، که د مالیکول کتله $4{,}9.10^{-26}\,\mathrm{kg}$ وي،داسیلاتورصفري نقطې انرژي تخمین کړئ.

حل: ورکړشوي ،

$$\mathrm{m} = 4{,}9.10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

$$\mathrm{k} = 10^3 \ \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{m}^2}$$

داسیلاتوردصفري نقطې انرژي عبارت له $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ **څخه ده.**

د m اسیلاتوراو k دقوې ثابت لپاره، زاویوي فریکونسي عبارت ده له

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{10^3}{4{,}9.10^{-26}}} = \sqrt{\frac{10^{29}}{4{,}9}} = \sqrt{\frac{10^{30}}{49}} = \frac{10^{15}}{7}$$

$$\therefore \qquad E = \frac{1}{2}.1,055.10^{-34}.\frac{1}{7}.10^{15} = \frac{1}{14}.1,055.10^{-19} = 0,0754.10^{-19}$$

یا

$$E = 0,0754.10^{-19}\ j$$

$$\therefore \qquad E = 0,0471ev$$

3.10 مثال: دساده هارمونیک اسیلاتورپه لمړي هیجاني حالت کې دذرې ترټولو ممکنه فاصله محاسبه کړئ.

حل: داسیلاتوردلمړي هیجاني حالت موج تابع داسې ورکول شویده

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_1(\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

یا

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}(2\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

داسې چې $H_1(\alpha x) = 2\alpha x$

احتمالي کثافت

$$p(x) = |\psi_1(x)|^2 \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)4\alpha^2 x^2 e^{-\alpha^2 x^2}$$

هغه فاصله په کوم چې احتمال اعظمي وي،ترټولوزیات ممکنه فاصلې په نوم یادیږي. ددې دلاسته راوړلولپاره د $p(x)$ مشتق نیسو اوصفرسره یې مساوي کوو

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)4\alpha^2 \frac{d}{dx}(x^2.e^{-\alpha^2 x^2})$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)4\alpha^2(-2\alpha^2 x^3 e^{-\alpha^2 x^2} + 2xe^{-\alpha^2 x^2})$$

$\frac{dp}{dx} = 0$ ورکوي،

$$\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)4\alpha^2(-2\alpha^2 x^3 e^{-\alpha^2 x^2} + 2xe^{-\alpha^2 x^2}) = 0$$

یا
$$(-2\alpha^2 x^3 e^{-\alpha^2 x^2} + 2xe^{-\alpha^2 x^2}) = 0$$

$$(-2\alpha^2 x^3 + 2x)e^{-\alpha^2 x^2} = 0$$

یا
$$-2\alpha^2 x^3 + 2x = 0$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

یا
$$x = \pm\frac{1}{\alpha}$$

په نتیجه کې، احتمال ددې زیات دی ،چې ذره په $\frac{1}{\alpha}$ اوپه $-\frac{1}{\alpha}$ موقیعتونوکې پیدا شي.

3.11 مثال: په عادي حالت کې دیوبعدي اسیلاتورلپاره، دپوتنشیل انرژي متوسط قیمت لاسته راوړئ.

حل: دپوتنشیل انرژي متوسط قیمت داسې ورکول شوی دی

$$<V> = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 {}^* V \psi_0 dx$$

$$\because \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore \quad <V> = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 {}^* (\frac{1}{2}kx^2)\psi_0 dx$$

$$= \frac{1}{2}k\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 {}^* (x^2)\psi_0 dx$$

$$= \frac{1}{2}k\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-\alpha^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2}\, dx$$

مونږ عمومي انتګرال لرو چې

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$\therefore \qquad \langle V\rangle = \frac{1}{2}k\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{1}{2}k\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\because \qquad k = m\omega^2 \quad , \ \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\therefore \qquad \langle V\rangle = \frac{1}{4}m\omega^2 . \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\langle V\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega$$

3.12 مثال: دکلاسیکي سرحد څخه خارج د ساده هارمونیک اسیلاتور احتمال محاسبه کړئ کله چې په عادي حالت کې وي.

حل: د اسیلاتور د عادي حالت د ایګن تابع داسې ورکول کیږي

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

د اسیلاتور کلاسیکي سرحد $\pm a$ دی، چیرته چې a امپلیتود دی. د اسیلاتور کلاسیکي انرژي $E = \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ ده. په کوانټم میخانیکي توګه د عادي حالت انرژي $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ده.

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$

کوم چې ورکوي $a = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \pm\frac{1}{\alpha}$

دکلاسیکي ساحې څخه بهر دذرې دپیدا کېدو احتمال عبارت دی له

$$p(x) = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{-\infty} \left|\psi_0(x)\right|^2 dx + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \left|\psi_0(x)\right|^2 dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{-\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\alpha 2x2} dx + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{-\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \right]$$

څرنګه چې دا انتګرالونه جفت دي، نو مونږ لیکلای شو

$$\int_{-\frac{1}{\alpha}}^{-\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

$$\therefore \qquad p(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} 2. \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} e - \alpha^2 x^2 dx$$

$\alpha x = t$ وضع کوو ، $dx = \frac{dt}{\alpha}$ $\quad \therefore$

کله چې $x = \frac{1}{\alpha}$ شي، مونږ حاصلوو $t = 1$ ، او که $x = \infty$ شي مونږ حاصلوو $t = \infty$

$$\therefore \qquad p(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\alpha} \int_{1}^{\infty} e^{-t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1}^{\infty} e^{-t^2}$$

$$\therefore \qquad p(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{0}^{1} e^{-t^2} dt \right]$$

مونږلرو،

$$\int_0^\infty e^{-t2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \qquad p(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right]$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-t^2}\,dt ....(i)$$

دا $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ انتګرال په پام کې نېسو. مونږ د $e-t^2$ لپاره دنامحدودې سلسلې غزونه کاروو

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \int_0^1\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - ....\right)dt$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{2!.5} - \frac{t^7}{3!.7} + \frac{t^9}{4!.9} - ....\right]_0^1$$

$$= \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!.5} - \frac{1}{3!.7} + \frac{1}{4!.9} - ....\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2.5} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{24.9} - ....\right] = 0,74244$$

$$= 0,74244$$

په (i) کې ددې په کارونه، مونږ دکلاسيکي ليمټ څخه خارج دذرې دپيداکېدو احتمال حاصلوو

$$p(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}.0,74244$$

$$= 1 - 0,837966$$

$$\cong 0,16203$$

بالاخره دذرې دپيداکېدو احتمال دکلاسيکي ليمټ په داخل کې 0,837966 يا 84% دی.

3.13 مثال: په $3A^{\circ}$ اوږدوالي په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې یو الکترون ایسارشوی دی. که چیرې الکترون په عادي حالت کې وي، دچپ خوا دیوال په $1A^{\circ}$ کې دالکترون دپیدا کېدو احتمال څومره دی.

حل: د a په عرض په ژوره پوتنشیلي څاه کې دذرې دایګن تابع داسې ورکول کیږي

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \qquad , \quad 0 < x < a$$

دعادي حالت موج تابع عبارت ده له

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

دذرې دپیدا کېدو احتمال دصفرڅخه تر $\frac{a}{3}$ پورې ساحه کې، مثلاً دچپ دیوال څخه دټولې فاصلې ددریمې برخې پورې عبارت دی له

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_0(x)|^2 \, dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx \end{aligned}$$

مونږ لرو ، $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ ، بناپردې، پورتنۍ معادله داسې کیږي

$$p(x)=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{3}}\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a}{3}}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a}{3}}\left[dx-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[x-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\frac{2\pi}{a}}\right]_0^{\frac{a}{3}}$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{a}{3}-\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{a}\frac{a}{3}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=0{,}3333-0{,}1370$$

$$=0{,}1963$$

$$\therefore \qquad p(x)=19{,}63\%$$

خــلاصه

1. کله چې په ذره باندې عمل کوونکې قوه $F = -\frac{dV}{dx}$ صفروي ذره به ازاده وي، دازادې ذرې دانرژي طیف مسلسل دی.

2. دنامحدودې ژورې پوتنشیلي څاه لپاره،

$$\begin{aligned} V &= \infty \qquad x \le 0 \;\;, x \ge a \\ V &= 0 \qquad 0 < x < a \end{aligned}$$

ددغه ډول حالت لپاره دایګن قیمت عبارت دی له

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

3. درې بعدي کلک بکس کې ذرې لپاره،

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^{\,2}}{a^2} + \frac{n_2^{\,2}}{b^2} + \frac{n_3^{\,2}}{c^2}\right)$$

4. کله چې دیونه زیات دایګن تابع ګانې دانرژي د ایګن دعینې قیمت لپاره موجودې وي، دذرې دانرژۍ دغې حالت ته ډي جینریټ ویل کیږي.

5. سټپ پوتنشیل په لاندې ډول تعریفیږي

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \qquad x \le 0 \\ &= V_0 \qquad x > 0 \end{aligned}$$

د $E < V_0$ ساحې لپاره، $R = 1$ او $T = 0$ دی. تابع په کلاسیکي منع شوې ساحه کې لکۍ لري، چې د $e^{-\alpha x}$ حد په واسطه تشریح کیږي. دغه لکۍ د V_0 په مقایسه د E په کمیدو سره کمیږي. دلته په $x < 0$ ساحه کې دذرې دپیدا کېدو کوچنی احتمال موجود دی، دیته دسرحد نفوذ وایي.

6. دپوتنشیلي سرحدپه حالت کې د $E > V_0$ لپاره،

$$T = \frac{1}{\left[1 + \frac{V_0{}^2 \sin^2 \alpha a}{4E(E - V_0)}\right]} \;,\; R = \frac{1}{\left[\frac{4E(E - V_0)}{V_0{}^2 \sin^2 \alpha a} + 1\right]}$$

7. که چیرې یوه ذره دپوتنشیلي مانع سره دپوتنشیلي مانع دلوړوالي څخه په کمه انرژي تماس وکړي دلته همیشه دمانع په واسطه یوه څه احتمال دتېریدنې شته دی، دسرحددتېریدنې دغه پیښې ته تونلنګ اثروایي.

8. دهارمونیک اسیلاتورانرژي $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ده. دانرژي طیف غیرپیوسته دی. دانرژي ترټولو ټیټ لیول $n = 0$ لپاره دعادي حالت انرژي $E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ده. دعادي حالت موج تابع $\psi = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ ده.

9. دکلاسیکي لیمټ څخه دباندې(منع شوې ساحه) دذرې موجودیت دتونلنګ اثرپه نوم یادیږي.

10. د n لویوقیمتونولپاره کوانټم میخانیکي احتمال دکلاسیکي احتمال سره موافق دی. دادبور مربوطه اصل سره سمون لري کوم چې بیانوي چې د $n \to \infty$ لپاره کوانټم میخانیکي نتیجې دکلاسیکي تیوري سره یوشان دي.

تمرینونه

(A) لنډځوابه ډوله پوښتنې:

1. ازاده ذره څه شی دی؟

2. په یوبعدي کې په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې دذرې حالت په ریاضیکي توګه تشریح کړئ؟

3. په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې دذرې دصفري نقطې انرژي لپاره افاده ولیکئ؟

4. په نامحدوده ژوره پوتنشیلي څاه کې دیوې ذرې لپاره درې لمړنۍ موج تابع ګانې ولیکئ؟ اودهغوی احتمالي کثافت رسم کړئ؟

5. دذرې دانرژي حالتونوته کله ډي جینریټ ویل کیږي؟

6. وښایاست چې په درې بعدي بکس کې دذرې دویم هیجاني حالت درې غبرګه ډی جینریټ دی؟

7. سټپ پوتنشیل په ریاضیکي توګه تشریح کړئ؟

8. پوتنشیل بیریر څه شی دی؟

9. تونلنګ اثرتعریف کړئ؟

10. دتونلنګ اثرڅلورتطبیقات وښایاست ؟

11. دپوتنشیل بیریرپه حالت کې دانتقال دضریبونو دبدلون ګراف رسم کړئ.؟

12. دهارمونیک اسیلاتورپه حالت کې دموج تابع اودکثافت داحتمال ګراف رسم کړئ؟

(B) اوږدځوابه پوښتنې:

1. ثابت پوتنشيل سره دذرې كوانټم ميخانيكي حركت تشريح كړئ؟

2. دوخت څخه مستقله دشروډينګرد معادلې په كومک،په يوبعدي ژوره پوتنشيلي څاه كې دذرې لپاره دايګن دانرژي قيمتونه او ايګن تابع ګانې لاسته راوړئ؟

3. يوه ذره په درې بعدي بكس كې راګيرشويده،دشروډينګردثابت حالت دمعادلې په كارونې، دذرې دايګن دانرژي قيمتونه لاسته راوړئ؟ دډی جينريټ حالتونه كوم دي؟

4. وښاياست! چې په يوبعدي نامحدوده ژوره پوتنشيلي څاه كې ذره غيرپيوسته دانرژي حالتونه لري.لمړنی درې تابع ګانې رسم كړئ؟

5. په درې بعدي كلک بكس كې دذرې لپاره دانرژي دايګن قيمت لاسته راوړئ؟

6. دمانع په واسطه دتونلنګ څخه مومقصدڅه دی؟ ذره په $E > 0$ انرژي سره حركت كوي، ايا پوتنشيل بيريرپه دې ډول تعريفيږي.

$$V = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ V0 & 0 < x < a \\ 0 & x \ge a \end{cases}$$

دتيريدنې دضريب او دانعكاس دضريب لپاره فورمولونه وليكئ؟

7. دكيفيت له مخې د $E < V_0$ لپاره پوتنشيل بيريروڅيړئ.

8. ديوبعدي هارمونيک اسيلاتورلپاره دشروډينګردثابت حالت معادله وليكئ. عينې معادله حل كړئ؟ ترڅووښايي چې دانرژي دايګن قيمتونه په دې ډول دي

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

9. ديوبعدي اسيلاتورلمړی څلورايګن تابع ګانې رسم كړئ؟

10. دیوبعدي هارمونیک اسیلاتورپه حالت کې کلاسیکي اوکوانټم میخانیکي مطابقت تشریح کړئ؟

(C) ناحله پوښتنې:

1. دالکترونونودیوشان انرژۍ ګیډۍ چې هریوېې $0,08eV$ انرژي لري په $0,04eV$ اوچتوالي د پوتنشیل په سټپ واردیږي، دپوتنشیلي دیوال څخه دانعکاس احتمال محاسبه کړئ؟

ځواب: ($0,027$)

2. یوه ذره دټینګودیوالونوترمنځ چې دa په فاصله یودبل څخه قرارلري، راګیرشوې ده. ددې احتمال پیداکړئ؟ چې ذره به دچپ دیوال څخه په $\frac{a}{3}$, $\frac{2a}{3}$ فاصلوکې پیداشي.

ځواب: (تقریباً 60%)

3. په کلاسیکي لیمټ کې دهارمونیک اسیلاتوردپیداکېدو احتمال محاسبه کړئ؟ کله چې په عادي حالت کې وي.(84%)

4. دساده هارمونیک اسیلاتوردلمړي هیجاني شوي حالت تابع په کارونې، وښایاست! چې دانرژي دایګن قیمت $\frac{3}{2}\hbar\omega$ دی.

5. دهارمونیک اسیلاتوردعادي حالت انرژي محاسبه کړئ؟ چې دیوګرام په کتلې فنرپورې وصل، او دیوسانتي مترپه فاصله دیونیوټن قوې پواسطه دx محورپه اوږدو کې کش کیږي.

6. په 1Mev انرژي پروتون لپاره دتیریدنې احتمال محاسبه کړئ؟ چې پروتون دپوتنشیل دبیریر په 4Mev لوړوالي اوپه $0,01A^{\circ}$ عرض تیرشوی وي.

ځواب: ($1,5.10^{-3}$)

7. هغه احتمال محاسبه کړئ؟ چې د **a** په عرض یوه ذره په یو بعدي ټینګ بکس کې د **x=0** او $x = \frac{a}{n}$ ترمنځ پیدا شي، کله چې ذره په **n** ام حالت کې وي.

ځواب: $\left(\frac{1}{n}\right)$

8. په نامحدوده پوتنشیلي څاه کې دیوې ذرې موج تابع داسې ورکول شوې ده

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \quad 0 < x < a$$

$<x^2>$ پیدا کړئ؟

ځواب: $\frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$

9. دهغه نیوترون ترټولو ټیټه ممکنه انرژي پیدا کړئ؟ چې $10^{-14}\,m$ په اندازه دیوې هستې په واسطه راګیر شوی وي. دنیوترون کتله $1{,}67.10^{-27}\,kg$ ده.

ځواب: $(2{,}05\text{Mev})$

10. دهغه الکترون ترټولو ټیټه انرژي پیدا کړئ؟ چې دیو مکعبي بکس په واسطه راګیر شوی وي په داسې حال کې چې هره ضلع یې 1A° وي.

ځواب: $(18{,}03.10^{-18}\,\text{j})$

کروي متناظرپوتنشیلونه

پېژندنه:

مونږولیدل، چې کوانټم میخانیک څنګه کارول ، چې په یوبعدي سیستم کې حرکت تشریح کړي. مونږولیدل چې یوبعدي حرکت دسیستم دانرژي دکوانټایزیشن په شان اساسي خواص تشریح کوي. په اتومي فزیک کې دتطبیقاتولپاره، جامدحالت فزیک اوهستوي فزیک زمونږ ضروري طرزالعمل دی،هغه دری بعدي اوکروي قطبي کواردیناتوسیستم کې دی، په دې فصل کې،به مونږ شروډینګرمعادله په کروي قطبي کواردیناتوسیستم کې مطالعه کړو. همدارنګه مونږبه دادکروي متناظرپوتنشیل لپاره تطبیقوواودانرژي کوانټایزیشن به مطالعه کوو.د هایدروجن اتوم مشکل به په کیفي طریقه بحث شي ځکه دهغه ساده توب له وجې،هایدروجن اتوم ګټه لري او هغه دا،چې دده خواص په دقیقه توګه اوبغیردتخمین نه محاسبه کېدای شي کوم چې د کوانټم میخانیک څخه دمختلفوفزیکي تیوریولپاره دپیشګویي اوتجربې ترمنځ مجازمقایسه لري.

4.1 په کروي قطبي کواردیناتوکې دشروډینګرمعادله

دشروډینګرمعادله دکوارتیزین کواردیناتوپه سیستم کې داسې ورکول کیږي

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E-V]\psi = 0$$

چیرته چې $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{dz^2}$ دلاپلاس اوپراتوردی.

دمعادلوانتقال دقایمومختصاتوڅخه کروي قطبي مختصاتوسیستم ته په دې ډول دی

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

دې انتقال سره دلاپلاس اوپراتورمنځ ته راځي،

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

کروي قطبي کواردیناتوپه سیستم کې دشروډینګرمعادله عبارت ده له

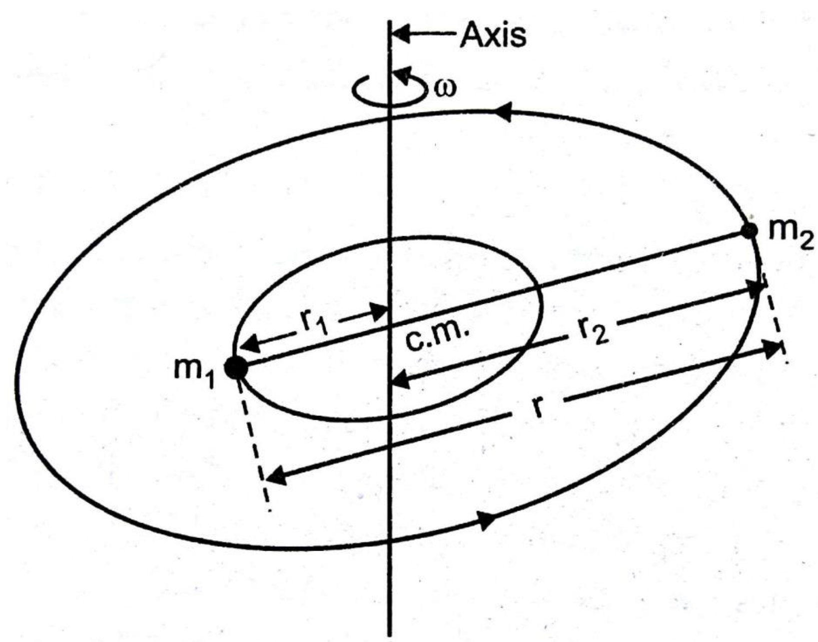
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E-V]\psi = 0........(4.1)$$

چیرته چې $\psi = \psi(r,\theta,\phi)$, $V = V(r,\theta,\phi)$ دی

4.2 کلک څرخیدونکی

د ازادمحورکلک څرخیدونکی

کلک څرخیدونکی، یو سیستم دی چې ددوه ذروڅخه چې یوبل سره دیوې سپکې کلکې میلې پواسطه اړیکه لري. ددوه ذروترمنځ فاصله همیشه ثابته وي،(4.1)شکل د m_1 او m_2 کتلویو کلک څرخونکی ښايي چې یودبل څخه د r فاصلې په واسطه جدا شوي دي.



4.1 شکل: یو کلک ټینګ څرخونکی

ددوران محور، چې د کلک څرخونکي دثقل مرکزڅخه تيريږي دميلې په اوږدوالي عمود دی.
په فضا کې ددوران دمحورټاکنه دهرجهت په اوږدو کې کېدای شي، ځکه نودې ته دازادې ذرې کلک څرخونکی وايي.

ديومحوردعطالت مومنټ چې دثقل مرکزڅخه تيريږي اوپه هغه خط عمودوي چې m_1 او m_2 کتلې سره تړي عبارت دی له

$$I = m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.2)$$

دلته r_1 او r_2 د m_1 او m_2 کتلوڅخه نظرثقل مرکزته فاصلې دي. ددې لپاره چې دثقل مرکزڅخه کتلې توزيع شوي وي، مونږلروچې،

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

او $r = r_1 + r_2$

$$\therefore \qquad r_1 = \frac{m_2}{m_1} r_2$$

او

$$r = \frac{m_2}{m_1} r_2 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2$$

يا

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

په مشابه ډول،

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

په (4.2) معادله کې د r_1 او r_2 قيمتونوپه کارونې مونږحاصلوو

$$I = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

دسیستم کمه شوې کتله عبارت ده له

$$\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2} ....(4.3)$$

دازادمحورباره کې دسیستم دعطالت مومنټ عبارت دی له

$$I = \mu.r^2 ....(4.4)$$

(4-4) معادله څرګندوي چې دکلک څرخونکي دوران، ددوران دمحورڅخه د **r** په عمودي فاصله د μ په کتله دځانګړې ذرې ددوران سره معادل دی.

په کلاسیکي توګه دوراني حرکي انرژي عبارت ده له :

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2$$

چیرته چې ω زاویوي سرعت دی. څرنګه چې زاویوي مومنټم $L = I\omega$ دی نولیکلای شو چې:

$$E = \frac{L^2}{2I} ....(4.5)$$

کلک څرخونکی کولای شي دصفراولایتناهي ترمنځ هرقیمت واخیستلای شي. نوځکه ، د انرژي طیف مسلسل دی.

اوس به مونږمشکلات په کوانټم میخانیکي توګه حلوو. په کروي قطبي کواردیناتوکې دوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله عبارت ده له :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V]\psi = 0$$

په **r^2** کې ضربوو مونږحاصلوو :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu.r^2}{\hbar^2}[E - V]\psi = 0$$

څرنګه چې کلک څرخونکی په هره مستوي کې ازاد دوران کوي اوهیڅ قوې په هغه باندې عمل نه وي کړی،نودهغه پوتنشیل انرژي صفر $V = 0$ ده . بناپردې،

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2\mu.r^2E}{\hbar^2}\psi = 0$$

مګر **r** ثابت دی، ددې لپاره،دپورته معادلې ښي خوالمړی حد $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) = 0$ دی. په نتیجه کې مونږحاصلووچې

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2\mu.r^2E}{\hbar^2}\psi = 0 ....(4.6)$$

څرنګه چې $I = \mu.r^2$ دی،مونږحاصلوو

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2IE}{\hbar^2}\psi = 0 ....(4.7)$$

(4.7) معادله دمتحولینودجداکېدوپه میتود حلیدای شي.

$$\psi(\theta,\phi) = F(\theta)G(\phi) = FG ....(4.8)$$

داپه(4.6)معادله کې کاروو ،مونږحاصلوو

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial FG}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 FG}{\partial\phi^2} + \frac{2IE}{\hbar^2}FG = 0$$

فرضووچې،

$$\lambda = \frac{2IE}{\hbar^2} ....(4.9)$$

نوپه دې اساس،

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial FG}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 FG}{\partial\phi^2} + \lambda FG = 0$$

$$\frac{G}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial F}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{F}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2} + \lambda FG = 0$$

پورتنۍ معادله په $\sin^2\theta$ کې ضرب او په FG باندې يې ويشو، مونږ حاصلوو

$$\frac{\sin\theta}{F}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2}+\lambda\sin^2\theta=0$$

يا

$$\frac{\sin\theta}{F}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2}\text{.............}(4.10)$$

دمعادلې چپ خوا يوازې θ پورې تړلې ده او ښي خوا يوازې په ϕ پورې تړلې ده، دا يوازې هغه وخت ممکن دی، چې کله دمعادلې دواړه خوا يو ثابت m_l^2 سره مساوي شي ددې لپاره، مونږ حاصلوو

$$\frac{\sin\theta}{F}\frac{dF}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2\theta=m_l^2\text{......................}(4.11)$$

او

$$-\frac{1}{G}\frac{d^2G}{d\phi^2}=m_l^2\text{...................}(4.12)$$

(4.12) معادله داسې هم ليکلای شو

$$\frac{d^2G}{d^2\phi}+m_l^2G=0\text{...........................}(4.13)$$

د(4.13) معادلې عمومي حل داسې ليکلای شو

$$G(\phi)=Ae^{im_l\phi}\text{.............................}(4.14)$$

چيرته چې m_l کېدای شي مثبت او کېدای شي منفي تام عدد وي د ϕ رنج دصفر څخه تر 2π پورې دی. A ثابت، دساده کېدنې دشرط په واسطه لاسته راتلای شي

$$\int_0^{2\pi} G^* G d\phi = 1$$

$$\therefore \qquad \int_0^{2\pi} A^* e^{-im_l\phi} A e^{im_l\phi} d\phi = 1$$

$$|A|^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

يا

$$|A|^2 . 2\pi = 1$$

دا ورکوي، $|A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\therefore \qquad G(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im_l\phi} \text{ ....(4.15)}$$

دموجي تابع په شان (4.15) بايد دقبلولو وړحل وي مثلآيو قيمته اومسلسل وي. نو مونږ بايد ولرو، چې $G(\phi) = G(\phi + 2\pi)$. ځکه د ϕ ، 2π دوران په واسطه، مونږدوباره په يوشان نقطه کې يو.

$$\therefore \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im_l\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l(\phi+2\pi)}$$

يا

$$e^{i2\pi m_l} = 1$$

$$\therefore \qquad \cos(2\pi m_l) + i\sin(2\pi m_l) = 1$$

دا راکوي چې

$$\cos(2\pi m_l) = 1$$

او

$$\sin(2\pi m_l) = 0$$

دایوازې هغه وخت ممکن دی کله چې

$$2\pi m_l = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, ...$$
$$\therefore \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \qquad ....(4.16)$$

(4.11) معادله داسې هم لیکلای شو

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m_l^2}{\sin 2\theta}\right)F = 0............(4.17)$$

دامعادله دلاندې تعویض پواسطه حلیدای شي.

$$\cos\theta = x, \qquad -\sin\theta d\theta = dx$$

یا $$-\frac{d}{dx} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

$$\therefore \qquad \sin\theta\frac{dF}{d\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\frac{dF}{d\theta} = -(1-x^2)\frac{dF}{dx}$$

په (4.17) معادله ددې په کارونه،مونږ حاصلوو

$$-\frac{d}{dx}\left(-(1-x^2)\frac{dF}{dx}\right)+\left[\lambda-\frac{m_l^2}{(1-x^2)}\right] = 0$$

یا

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}-2x\frac{dF}{dx}+\left[\lambda-\frac{m_l^2}{(1-x^2)}\right] = 0................(4.18)$$

دادلیجنډر دمعادلې سره ترلې ده. د m_l دورکړل شوي قیمت لپاره،دادقبلولووړحل یوازې هغه وخت لري، کله چې $\lambda = l(l+1)$ شي،چیرته چې l یومثبت تام عدد داسې ورکړ شوی وي

$$l = |m_l|, |m_l|+1, |m_l|+2, |m_l|+3, ...$$

د(4.16)معادلې سره،مونږ حاصلوو

$$l = 0,1,2,3,4,......................(4.19)$$

بناپردې،مونږ(4.18)معادله داسې لیکلای شو

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2} - 2x\frac{dF}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m_l^2}{(1-x^2)}\right] = 0$$

دپورته معادلې عمومي حل دلیجنډري پولینومل $p_l^{ml}(x)$ پورې تړاولري چې داسې ورکول کیږي

$$p_l^{ml}(x) = (1-x^2)^{\frac{|ml|}{2}} \frac{d^{|ml|}}{dx^{|ml|}} p_l(x)$$

چیرته چې $p_l(x)$ دلیجنډرپولینوم دی.

په نتیجه کې، د(4.17)معادلې عمومي حل عبارت دی له

$$F_l^{m_l}(\theta) = B.p_l^{m_l}\cos\theta..........................(4.20)$$

دلته B دساده کیدنې ثابت دی اوداسې ورکول کیږي

$$B = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{2(l+|m_l|)!}}$$

نوځکه، ټولیزه موجي تابع عبارت ده له

$$\psi(\theta,\phi) = F_l^{ml}(\theta)Gm_l(\phi)$$

$$\psi(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m_l|)!}{(l+|m_l|)!}}p_l^{ml}\cos\theta.e^{im_l\phi}................(4.21)$$

د(4.9)معادلې څخه مونږلرو

$$\lambda = \frac{2IE}{\hbar^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{2IE}{\hbar^2} = (l(l+1)$$

نودايګن مطابق قيمت عبارت دی له

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \quad \text{..........................(4.22)}$$

کله چې،

$$l=0 \quad , \quad E_0 = 0$$

$$l=1 \quad , \quad E_1 = 2\frac{\hbar}{2I} = 2B$$

$$l=2 \quad , \quad E_1 = 6\frac{\hbar}{2I} = 6B$$

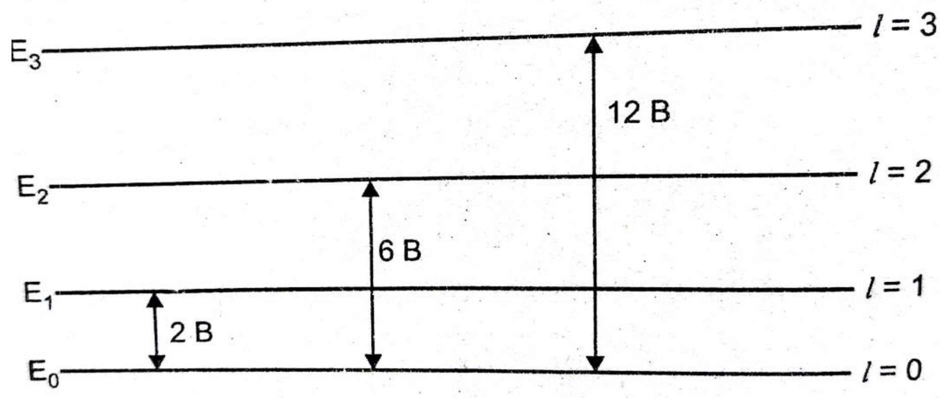
$$l=3 \quad , \quad E_1 = 12\frac{\hbar}{2I} = 12B$$

اوهمداسې نور.

دلته، $B = \frac{\hbar}{2I}$

E_0 انرژي ليول دکلک تاويدونکي دانرژي دعادي ليول په نوم يادیږي.راتلونکي ليولې $E_{1,} E_2, E_3,...$ داول،دويم،دريم دانرژي ليولوپه نوم يادیږي.

دانرژي دليولودياګرام په 4.2 شکل کې ښودل شوی دی

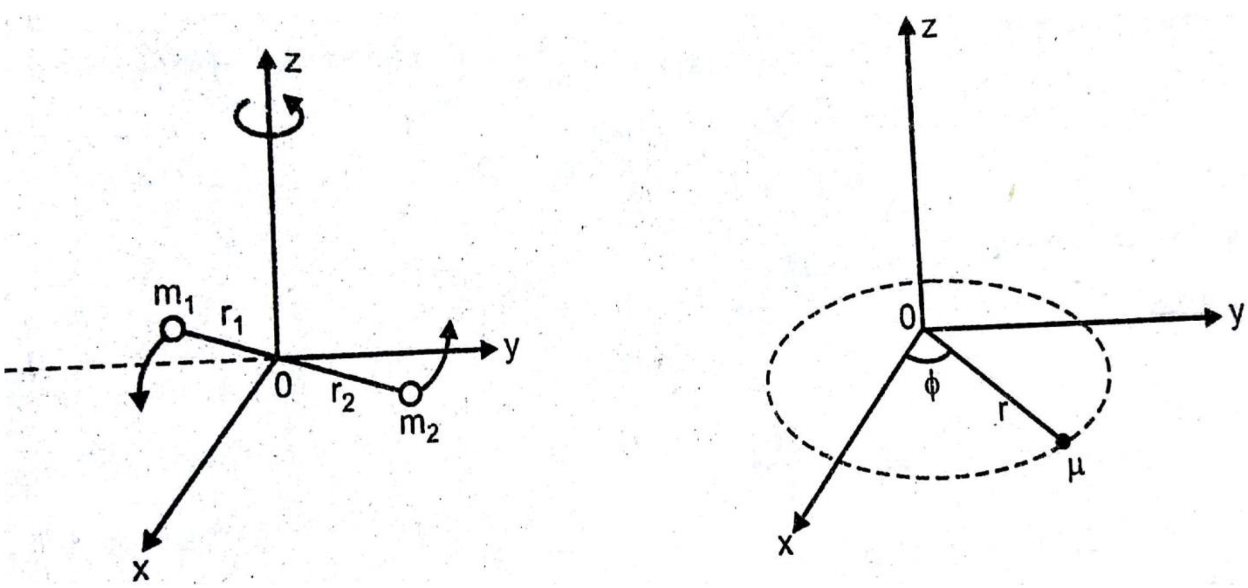


4.2 شکل

داليدل کيږي چې دپرله پسې انرژي ليولوترمنځ فرق د l په زياتېدوسره زياتيږي. همدارنګه طيف منفصل دی، دانرژي دليول جداکېدل په تجربوي توګه تاييد شوی دی.

دثابت محورکلک دوران کوونکی

فرضوو، چې يوکلک دوران کوونکی دثقل مرکزسره په مبداء کې د **XY** په مستوي کې دوران کوي اود دوران محورد **z** محورپه اوږدوکې لکه څنګه چې په 4.3 شکل کې ښودل شوی، دی.



(a) ثابت محوردوران کوونکی

(b) معادل سيستم

4.3 شکل

دسیستم کمه شوې کتله عبارت ده له:

$$\mu = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} ....(4.3)$$

دوران دمحورپه شاوخوادسیستم دعطالت مومنټ عبارت دی له

$$I = \mu . r^2 ....(4.4)$$

دایګن تابع اودایګن دقمیتونولاسته راوړلولپاره، مونږبه دشروډینګر، دوخت څخه مستقله معادله په کروي قطبي کواردیناتوکې تطبیقوو،

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V]\psi = 0$$

دواړه په r^2 کې ضربوو، مونږحاصلوو

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu . r^2}{\hbar^2}[E - V]\psi = 0$$

څرنګه چې ټینګ دوران کوونکی په هره مستوي کې ازاد دوران کوي اوپه هغه باندې هیڅ قوه عمل نکوي.دهغه پوتنشیل انرژي **v=0** دی. بناپردې،

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu . r^2 E}{\hbar^2}\psi = 0......................(4.21)$$

مګر**r=constant**، ددې لپاره، په پورته معادله کې په بنې خوالمړی حد $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$. همدارنګه دوران کوونکی په **XY** مستوي کې دوارن کوي. هغه زاویه چې r۔ او z محورترمنځ جوړیږي $\theta = 90^\circ$ ده.

له همدې امله مونږدویم حد حاصلوو :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) = 0$$

بناپردي،(4.21) معادله داسې کيږي

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{2\mu r^2 E}{\hbar^2}\psi=0...............(4.22)$$

څرنګه چې $I=\mu r^2$ او $\sin\theta=1$ ،مونږحاصلوو

$$\frac{d^2\psi}{d\phi^2}+\frac{2EI}{\hbar^2}\psi=0.............................(4.23)$$

فرضووچې،

$$m_l^2=\frac{2IE}{\hbar^2}..................(4.24)$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2\psi}{d\phi^2}+m_l^2\psi=0..................(4.25)$$

ددې معادلې عمومي حل عبارت دی له :

$$\psi(\phi)=Ae^{im_l\phi}.................(4.25)$$

چیرته چې m_l مثبت یامنفي تام عدد دی د ϕ رنج دصفرڅخه تر 2π پورې دی اودA ثابت دساده کېدنې شرط څخه لاسته راځي اوداسې ورکول کيږي

$$|A|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore \qquad \psi(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\phi}.................(4.26)$$

(4.26) معادله دموجي تابع په شان بایددقبلولووړحل ولري مثلاًیوقیمته اوپرله پسې به وي. نو بایدولروچې $G(\phi)=G(\phi+2\pi)$. ځکه ϕ ، 2π دوران کوي،مونږ دوباره په عینې نقطه کې یو.

$$\therefore \qquad e^{im_l\phi} = e^{im_l(\phi+2\pi)}$$

یا

$$e^{i2\pi m_l} = 1$$

$$\therefore \qquad \cos(2\pi m_l) + i\sin(2\pi m_l) = 0$$

داورکوي چې

$$\cos(2\pi m_l) = 1 \quad and \quad \sin(2\pi m_l) = 0$$

دایوازې هغه وخت ممکن دی کله چې

$$2\pi m_l = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, 6\pi, ...$$

$$\therefore \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... (4.27)$$

(4.24) معادلې څخه مونږلرو

$$E = \frac{m_l^2 \hbar^2}{2I} .... (4-28)$$

(4.28) معادله دثابت محورکلک دوارن کوونکي لپاره دانرژي دایګن قیمت ورکوي.

4.3 هایدروجن اتوم(کیفي مباحثه)

هایدروجن اتوم داسې یوسیستم دی، چې یوالکترون اوپروتون(هسته) لري چې دکولمب د الکتروستاتیکي جذب قوې په واسطه ګیرشوی دی. دکولمب دجذب قوه عبارت ده له :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z.e^2}{r^2}$$

اوهمدارنګه پوتنشیل انرژي عبارت ده له :

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z.e^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.29)$$

چيرته چې Ze دهستې چارج دی (دهايدروجن اتوم لپاره $Ze = 1$ دی)

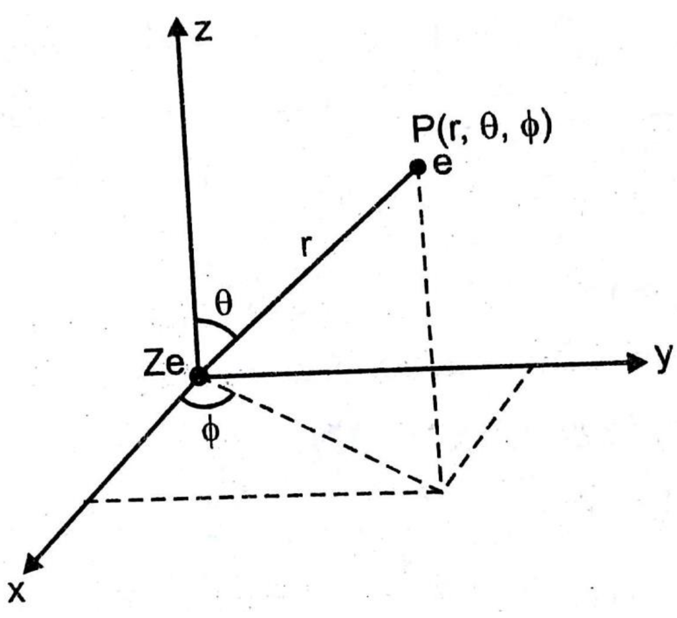
e – دالكترون چارج دی

ε_0 دازادې فضادنفوذپذيرې ضريب دی

$$\therefore \qquad V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.30)$$

فرضووچې M دهستې كتله او m په ترتيب سره دالكترون كتله په پام كې ونيسو. دسيستم كمه شوې كتله عبارت ده له:

$$\mu = \frac{M.m}{M+m}$$



4-4 شكل

V پوتنشيل انرژي د r تابع ده مثلا پوتنشيل كروي متناظردی. مونږبه دشرودينګركروي قطبي كوارديناتومعادله تطبيقوواوداپه دې ډول وركول شوې ده

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-V(r)]\psi=0.........(4.31)$$

(4.31)معادله کې د $\psi(r,\theta,\phi)=R(r)F(\theta)G(\phi)$ په کارونې اودمتحولینوجداکیدومیتود په واسطه حلوو،مونږدرې معادلې حاصلوو:

1. شعاعي معادله:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0.........................(4.32)$$

2. θ برخې معادله:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right)F=0..........................(4.33)$$

3. (ϕ)برخې معادله:

$$\frac{d^2G}{d\phi^2}+m_l^2G=0...............................(4.34)$$

د ϕ برخې معادلې حل داسې ورکول کیږي

$$G(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\phi}..................(4.35)$$

د m_l ثابت باید خامخا مثبت یامنفي تام عدد وي دا ځکه چې G او دهغې مشتق باید په $0\le\phi\le 2\pi$ دومین کې مسلسل اویو قیمته وي.

مونږلروچې:

$$m_l=0,\pm1,\pm2,\pm3,.................................(4.36)$$

m_l دمقناطیسي کوانتم نمبرپه شکل پیژندل شوی دی.

لکه څنګه چې مونږ پوهیږو ،چې (4.33) معادله دلیجنډر معادلې سره ترلې ده،دهغه حل عبارت دی له،

$$F_l^{m_l}(\theta) = B.p_l^{m_l} \cos\theta ....(4.37)$$

چیرته چې $p_l^{m_l} \cos\theta$ دلیجنډر معادلې سره ترلی دی او B دساده کېدنې ثابت دی B دساده کیدنې شرط په اساس د $0 \le \theta \le \pi$ په ساحه کې لاسته راتلای شي او داسې ورکول کیږي.

$$B = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m_l|)!}{(l+|m_l|)!}} ....(4.38)$$

او l مثبت تام عدد په لاندې ډول دی:

$$l = |m_l|, |m_l|+1, |m_l|+2, |m_l|+3, \quad ....(4.39)$$

(4.30) معادله په (4.32) معادله کې وضع کوو او حاصلوو چې:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0 \quad ....(4.40)$$

موثرپوتنشیل عبارت دی له:

$$V_{eff} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}$$

د l په ورکړشوي قیمت سره،داپیدا کیږي، چې د(4.40) معادلې لپاره دمحدود حالت حلونه وجود لري کوم چې دقبلولووړ یوقیمته،مسلسله اومحدودحلونه دي یوازې هغه وخت چې ټولیزه انرژي د E_n دقیمتونو څخه یوازې یوقیمت ولري، چیرته

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} ....(4.41)$$

دلته n تام عدد دی اودا قیمتونه لرلای شي

$$n = l+1, l+2, l+3, \ldots\ldots\ldots\ldots (4.42)$$

د(4.39) معادلې څخه د l او د(4.36) معادلې څخه د m_l قيمت سره مونږ حاصلوو

$$n = 1,2,3,4, \ldots\ldots\ldots\ldots (4.43)$$

د(4-40) شعاعي معادلې دمنلووړحل ډيرپه ساده توګه داسې ليکل کيږي :

$$R_{nl}(r) = Ce^{-\alpha r}(\alpha r)^l L(\alpha r) \ldots\ldots\ldots\ldots (4.49)$$

چيرته چې $L(\alpha r)$ د (αr) پولينومل دی.

$\alpha = \dfrac{1}{na_0}$ دی. چيرته چې a_0 دبورشعاع ده اودې رابطې $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ څخه لاسته راځي.

C د ساده کېدنې ثابت دی، نوځکه، دهايدروجن اتوم عمومي دايګن تابع داسې ده چې:

$$\psi(r,\theta,\phi) = Ne^{-\alpha r}(\alpha r)^l L(\alpha r) p_l^{m_l}(\cos\theta) e^{im_l\phi} \ldots\ldots\ldots\ldots (4.50)$$

دلته **N** دساده کېدنې ثابت دی اوپه دې ډول ورکول کيږي.

$$N = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}} \cdot \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{2(l+|m_l|)!}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

دايګن بعضې تابع ګانې په 4.2 جدول کې لست شويدي

n	l	m_l	$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\phi)$	
1	0	0	$\psi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-\frac{r}{a_0}}$	عادي حالت
2	0	0	$\psi_{200}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}(2-\frac{r}{a_0})e^{-\frac{r}{2a_0}}$	لمړی هیجاني حالت
2	1	0	$\psi_{210}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}(\frac{r}{a_0})e^{-\frac{r}{2a_0}}\cos\theta$	
2	1	±1	$\psi_{21\pm1}=\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}}(\frac{r}{a_0})e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$	
3	0	0	$\psi_{300}=\frac{1}{81\sqrt{3\pi a_0^3}}(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2})e^{-\frac{r}{2a_0}}$	دويم هیجاني حالت
3	1	0	$\psi_{310}=\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi a_0^3}}(6-\frac{r}{a_0})\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\cos\theta$	
3	1	±1	$\psi_{31\pm1}=\frac{1}{81\sqrt{\pi a_0^3}}(6-\frac{r}{a_0})\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$	

4.2 جدول

دايګن قيمتونه:

دهايدروجن اتوم دشعاعي برخې حل ښايي، چې دمحدود حالت دټوليزې انرژي په نظركې نيول شوي قيمتونه عبارت دي له

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} = -\frac{13{,}6}{n^2}\,\mathrm{eV}$$

كوم چې دبوردپيشګويي شوې تيوري سره يوشان دي. كوانټم ميخانيكي پيشګويانې اودبور پيشګويانې دتجربوي نتايجوسره دقيقاً سمون لري.

كوانټم نمبرونه:

دانرژي دايګن قيمتونه يوازې **n** نمبرپورې تړلي دي مګردايګن تابع ګانې درې كوانټم نمبرونو (n, l, m_l) پورې څرنګه چې دوې درې تابع ګانې $R_{nl}(r), F_l^{ml}(\theta), G_{ml}(\phi)$ توليدوي تړلي دي. دغه درې كوانټم نمبرونه ځكه راپيدا كيږي چې دشروډينګردوخت څخه مستقله معادله درې متحولين(r, θ, ϕ) لري،يوله دوې دفضاكوارديناتولپاره دی.

د(4.36)او(4.39)او(4.42)معادلوڅخه،ددرې كوانټم نمبرونولپاره شرطونه داسې دي چې

$$m_l = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$
$$l = |m_l|, |m_l| + 1, |m_l| + 3, \ldots$$

او $n = l + 1, l + 2, l + 3, \ldots.$

دغه شرطونه په ډيرساده توګه داسې ليكلای شو:

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$$

او $m_l = -l, -l+1, -l+2, \ldots, -1, 0, +1 \ldots l+1, l$

د **n** نقش دایګن دانرژي قیمت مشخصوي، لکه څنګه چې په (4.41) معادله کې ورکول شوي دی، دې ته اصلي کوانټم نمبرویل کیږي. په همدې ډول مداري زاویوي مومنټم نمبر lکوانټم نمبر پورې تړلی دی،چې دې ته هم مداري کوانټم نمبرویل کیږي. که چیرې یواتوم په خارجي مقناطیسي ساحه کې کېښودل شي،دهغه انرژي l m_l پورې تړلې ده، په ساده توګه m_l ته مقناطیسي کوانټم نمبرهم ویلی شو.

نوځکه، دورکړشوي n لپاره lداسې قیمت اخلي $0,1,2,...,(n-1)$اودورکړشوي lلپاره m_l داسې قیمتونه اخلي $-l,-l+1,-l+2,...,-1,0,+1...l+1,l$.

بل سپین کوانټم نمبردی، دا دجهت ټاکنې دوه ممکنه قیمتونه لري $m_s=\pm\frac{1}{2}$.

کمیدنه :

د **n** اصلي کوانټم دورکړشوي قیمت لپاره،داتومي لیول انرژي داسې ټاکل کیږي، لکه څنګه چې د بور دنظریې په اساس پیشنهادشوې ده، مګرد **n** دورکړشوي قیمت لپاره د lزیات مختلف قیمتونه شتون لري اودهر lلپاره د m_l مختلف قیمتونه موجود دي، لکه څنګه چې دایګن قیمتونه په n,l,m_l متکي دي،مونږیوشمیرممکنه دایګن تابع ګانې لرو،چې دایګن دانرژي دورکړ شوو قیمتونوسره مطابق دي. داتوم خصوصیت دایګن تابع ګانوپه واسطه تشریح کیږي، نواتوم مختلف حالتونه لري چې دایګن د انرژي دقیمتونوسره دورکړشوي **n** لپاره په مکمله توګه مختلف حالتونه لري،چې دادلیول ټیټیدنې ته حواله کیږي،اودایګن تابع ګانې یوشان انرژ ي سره مطابقت کوي، چې دې ته **ډیجنرسي** وایي.

لکه څنګه چې m_l دغه قیمتونه $-l,-l+1,-l+2,...,-1,0,+1...l+1,l$ اخلي، نو دا $(2l+1)$ قیمتونه دي. هر lدغه قیمتونه $0,1,2,...,(n-1)$ اخلي. ځکه نو،دهر**n** لپاره به دایګن دازادو او مستقلو تابع ګانو شمیربه

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=2\sum_{l=0}^{n-1}l+\sum_{l=0}^{n-1}1=n^2$$

په نتیجه کې، د هر n لپاره n^2 سره مطابق د ټیټېدو د ایګن تابع ګانې شتون لري.

که چیرې مونږ د سپین کوانټم (s) شمیر واخلو، کوم چې د جهت ښودنې دوه ممکنه قیمتونه $m_s=\pm\frac{1}{2}$ لري نو دلته $2n^2$ د ټیټېدو حالتونه د ایګن د انرژي E_n د هر قیمت سره مطابق موجود دي.

(4.3) جدول د $n=1,2,3$ لپاره د کوانټم نمبرونو ممکنه شمیر او د ایګن د تابع ګانو ټیټېدل ښایي.

n	1	2		3		
l	0	0	1	0	1	2
m_l	0	0	-1,0,+1	0	-1,0,+1	**-2,-1,0,+1,+2**
د هر یو l لپاره د ایګن د تابع ګانو شمیر	1	1	3	1	3	5
د هر یو n لپاره د ایګن د تابع ګانو شمیر	1	4		9		

4.3 جدول

تشريحي مثالونه

4.1 مثال: دکوبالت CO دماليکول دعطالت مومنټ $1,46.10^{-46}\,kg.m^2$ دی. دکوبالت دماليکول ترټولوټيټ ليول کې دوراني انرژي اوزاويوي سرعت محاسبه کړئ.

حل: ديوليول دوراني انرژي داسې ورکول کيږي

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

ترټولوټيټ ليول انرژي لپاره $l=1$ دی،بناپردې،

$$E_1 = \frac{2\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{I}$$

$$\hbar = 1,055.10^{-34}\ \text{j.s} \quad , I = 1,46.10^{-46}\ \text{kg.m}^2$$

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{1,055.10^{-34}\ \text{j.s}}{1,46.10^{-46}\ \text{kg.m}^2} = 7,62.10^{-23}\ j$$

$$E_1 = 7,62.10^{-23}\ j$$

يا

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{7,62.10^{-23}}{1,6.10^{-19}}\ \text{ev}$$

$$= 4,763.10^{-4}\ \text{ev}$$

مونږلروچې

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\therefore \qquad \omega = \sqrt{\frac{2E}{I}} = \sqrt{\frac{2.7,62.10^{-23}}{1,46.10^{-46}}}$$

$$= 3,23.10^{11}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4.2 مثال: دهایدروجن اتوم په عادي حالت کې د **r** متوسط قیمت محاسبه کړئ؟ همدارنګه په دې حالت کې د **r** هغه زیات احتمالي قیمت هم محاسبه کړئ؟ چې ورکوي

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

چیرته چې a_0 دبور شعاع ده.

حل: (a) د **r** متوسط قیمت داسې ورکول کیږي

$$< r >= \int_0^\infty r \left|\psi_{100}\right|^2 d\tau$$

دلته $d\tau$ حجمي عنصر دی او دکروي متناظر سیستم لپاره $d\tau = 4\pi r^2 dr$

$$\therefore \qquad < r >= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr$$

مونږ عمومي انتیګرال لرو چې

$$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x} dx = \frac{n!}{(\beta)^{n+1}}$$

$$\therefore \qquad < r >= \frac{4}{a_0^3} \frac{3!}{(\frac{2}{a_0})^4}$$

$$\therefore \qquad < r >= \frac{3}{2} a_0$$

(b) زیاته احتمالي فاصله د احتمالي کثافت ډیفرنسیال نېولو په واسطه لاسته راتلای شي،

شعاعي احتمالي کثافت د اسې ورکول کیږي

$$p(r) = 4\pi r^2 |\psi 100|^2$$

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{4}{a_0^3}\left[-\frac{2}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 + 2re^{-\frac{2r}{a_0}}\right]$$

$$= \frac{4}{a_0^3} 2r\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

د زیات احتمالي فاصلې لپاره، $\frac{dp}{dr} = 0$

$$\therefore \qquad \frac{4}{a_0^3} 2r\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

یا $1 - \frac{r}{a_0} = 0$

یا $r = a_0$

دا په شعاعي احتمالي کثافت کې اعظمي موقیعت دی.

4.3 مثال: دهایدورجن اتوم په عادي حالت کې د پوتنشیل انرژي متوسط قیمت محاسبه کړئ.

حل: دهایدروجن اتوم عادي حالت په دې ډول ورکول کیږي

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

دهایدروجن اتوم پوتنشیل انرژي

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

د پوتنشیل انرژي متوسط قیمت داسې ورکول کیږي

$$< V >= \int_0^\infty V|\psi_{100}|^2 d\tau$$

دلته $d\tau$ حجمي عنصردی او د کروي متناظرسیستم لپاره $d\tau = 4\pi r^2 dr$

$$< V >= \int_0^\infty \left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

$$= -\frac{4}{a_0}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a_0}} dr$$

مونږ عمومي انتګرال لرو

$$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x} dx = \frac{n!}{(\beta)^{n+1}}$$

$$\therefore \qquad <V>= -\frac{4}{{a_0}^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1!}{(\frac{2}{{a_0}^2})}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0}$$

$$\because \qquad a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$$

$$\therefore \qquad <V>= -\frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}$$

4.4مثال: دهایدروجن اتوم عادي حالت لپاره دشعاعي برخې حل داسې ورکول کیږي

$$R_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi {a_0}^3}}e^{-\frac{r}{a0}}$$

وښایاست! چې ددې دعادي حالت انرژي $-\frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2}$ ده.

حل: دهایدروجن اتوم شعاعي برخې معادله داسې ده

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

دعادي حالت لپاره $R(r)=R_{10}(r)$ او $l=0$ دی.

$$\therefore \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{10}}{dr}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]R_{10}=0$$

یا

$$\frac{d^2R_{10}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_{10}}{dr}+\frac{2\mu}{\hbar 2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]R_{10}=0..............(i)$$

مونږلروچې

$$R_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi {a_0}^3}}e^{-\frac{r}{a0}}$$

$$\therefore \qquad \frac{dR_{10}}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} \frac{1}{a_0} e^{-\frac{r}{a0}}$$

او

$$\frac{d^2 R_{10}}{dr^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} \frac{1}{a_0{}^2} e^{-\frac{r}{a0}}$$

په (i) معادله کې ددې په کارونې مونږ حاصلوو:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} \frac{1}{a_0{}^2} e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{2}{r} \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} \frac{1}{a_0} e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right] \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{a_0{}^2} - \frac{2}{ra_0} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right] = 0$$

یا

$$\frac{1}{a_0{}^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 r} + \frac{2}{ra_0}$$

په پورته معادله کې $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$ په کارونې مونږ حاصلوو:

$$\frac{\mu^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^4} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 r} + \frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 r}$$

$$\frac{\mu^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = 0$$

ثبوت شوه چې $E = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2}$

داغوښتونکې نتیجه ده.

4.5مثال: نسبت $\frac{a_0}{2}$ فاصلې ته څومره ، یوالکترون په عادي حالت دهایدروجن په یواتوم کې د هستې څخه د a_0 په فاصله موجودیدای شي.

حل: دهایدروجن اتوم دعادي حالت موجي تابع په دې ډول ده

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a0}}$$

شعاعي کثافت احتمال داسې دی چې:

$$p(r) = 4\pi r^2 |\psi_{100}|^2 = \frac{4}{a_0^3} r^2 . e^{-\frac{2r}{a0}}$$

$$\therefore \qquad \frac{p(r_1)}{p(r_2)} = \frac{r_1^2 . e^{-\frac{2r_1}{a0}}}{r_2^2 . e^{-\frac{2r_2}{a0}}}$$

دلته $r_1 = a_0$ او $r_2 = \frac{a_0}{2}$ دی

$$\frac{p(a_0)}{p(\frac{a_0}{2})} = \frac{(a_0)^2 e^{-2}}{(\frac{a_0}{2})^2 e^{-1}} = \frac{4}{e} = 1,470$$

$$p(a_0) = 1,470 \, p(\frac{a_0}{2})$$

په نتیجه کې الکترون 47% زیات احتمال لري چې په a_0 کې نسبت $\frac{a_0}{2}$ ته موجود شي.

4.6 مثال : $n=5$ سره دهایدروجن اتوم څومره حالتونه شته دی؟ اوڅنګه دوې دفرعي مدارونو تر منځ ویشل کیږي.

حل: دهر **n** لپاره **n^2** فرعي لیولونه شته دی.ځکه نو، **n=5** لپاره **25** فرعي لیولونه وجودلري.

دوې په دې ډول په لاس راتلای شي.

l داسې قیمت اخیستلای شي $0,1,2,...,(n-1)$

دهر l لپاره m_l د $-l$ څخه تر $+l$ پورې قیمتونه اخلي مثلآ دا $(2l+1)$ قیمتونه.

د $n=5$ لپاره

l	0	1	2	3	4
m_l	0	**-1,0,+1**	**-2,-1,0,+1,+2**	**-3,-2,-1,0,+1,+2,+3**	**-4,-3,-2,-1,+1,+2,+3,+4**
دفرعي مدارنوشمیر	1	3	5	7	9
	2s	5p	5d	5f	5g

4.7 مثال: د**HCl** مالیکول لپاره، که چیرې داخل هستوي فاصله $1,29.10^{-8}\,\text{cm}$، او $m_{Cl}=35m_H\,,m_H=1,68.10^{-24}\,\text{gr}$ وي. په انفراریډساحه کې دخطونوجداوالی محاسبه کړئ.

حل: د **HCl** لپاره دکتلې کموالي فورمول داسې دی

$$\mu=\frac{m_{Cl}.m_H}{m_{Cl}+m_H}$$

$$\mu=\frac{35m_H.m_H}{36m_H}=\frac{35}{36}m_H=\frac{35}{36}.1,68.10^{-24}\,\text{gr}$$

$$I=\mu r^2=\frac{35}{36}.1,68.10^{-24}\,gr(1,29.10^{-8}\,\text{cm})^2$$

دخطونوترمنځ بیلوالی په دې ډول ورکول کیږی

$$B = \frac{h}{4\pi^2 I.c}$$

$$= \frac{6,625.10^{-34}.36}{4.(3,14)^2.35.1,68.10^{-24}.(1,29.10^{-8})^2.310^{10}}$$

$$= \frac{20,68}{cm}$$

خــلاصـه

1. دکروي قطبي کواردیناتوپه سیستم کې دشرودینګرمعادله په لاندې ډول ده:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-V]\psi=0$$

2. کلک دوران کوونکی، ددوه ذروچې دیوې سپکې میلې په واسطه وصل دي،یو سیستم دی (دذروترمنځ فاصله ثابت ده).

دازادمحوردوران کوونکي حالت کې،دانرژي دایګن قیمت ،

$$E_l=\frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

3. دکلک دوران کوونکي لپاره دانرژي دایګن قیمت،

$$E=\frac{m_l{}^2\hbar^2}{2I}$$

4. دهایدروجن اتوم حالت کې، مونږدرې معادلې لرو:

(a) شعاعي معادله:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}R\right]=0$$

(b) θ برخې معادله

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right)F=0$$

(c) ϕبرخې معادله

$$\frac{d^2G}{d\phi^2}+m_l^2G=0$$

5. کوانټم نمبرونه!

I. اصلي کوانټم نمبر n

II. مداري کوانټم نمبر l

III. مقناطیسي کوانټم نمبر m_l

IV. سپن کوانټم نمبر m_s

تمرینونه

(A) لنډځوابه ډوله پوښتنې:

١. دکروي قطبي کواردیناتوپه سیستم کې دوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله ولیکئ؟
٢. کلک دوران کوونکی تعریف کړئ؟
٣. دازادمحوردوران کوونکي دانرژي دیاګرام رسم کړئ؟
۴. کوانټم نمبرونه تشریح کړئ؟
۵. ډیجینرسي تعریف کړئ؟

(B) اوږدځوابه ډوله پوښتنې:

1. دازادمحوردوران کوونکي لپاره دشروډینګرمعادله لاسته راوړئ؟ اوددې لپاره یې حل کړئ چې دایګن قیمتونه اودایګن تابع ګانې لاسته راوړئ.

2 . دثابت محوردوران کوونکي لپاره دشروډینګرمعادله لاسته راوړئ اوحل یې کړئ ترڅودایګن قیمتونه اودایګن تابع ګانې لاسته راوړئ؟

3. دهایدروجن اتوم لپاره په کیفي توګه دشروډینګرمعادله وڅیړئ.

4 . دلیول دډیجینرسي څخه مومقصد څه دی؟ دهایدروجن اتوم په حالت کې تشریح کړئ.

5 . کوانټم نمبرونه تشریح کړئ اوددوې اهمیت څه دی؟

(C) ناحله پوښتنې:

١ . د HCl مالیکول دعطالت مومنټ $2,7.10^{-40}\,\text{gr}-\text{cm}^2$ دی. د $l=0$ او $l=1$ انرژي لیولوترمنځ به جدایي څومره وي؟

ځواب: ($4,05.10^{-15}\,\text{erg}$)

۲ . د OH راډیکل $1{,}48.10^{-40}\,\mathrm{gr-cm^2}$ عطالت مومنټ لري. $l=5$ حالت کې زاویوي سرعت پیدا کړئ؟

ځواب: ($3{,}9.10^{13}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$)

۳ . دهایدروجن اتوم دټولو هغو حالتونو لپاره کوانټم نمبرونه ولیکئ؟ چې د $n=4$ او $l=3$ اسره ارتباط لري.

ځواب: ($\frac{1}{a_0}$)

۴. دهایدروجن اتوم په عادي حالت کې $\frac{1}{r}$ لپاره متوسط قیمت محاسبه کړئ؟

۵. دهایدروجن اتوم عادي حالت لپاره، د $1a_0$ او د $1{,}01a_0$ په شعاع دکروترمنځ دالکترون دپیدا کیدو دکثافت احتمال محاسبه کړئ؟

۶. دهایدروجن اتوم په عادي حالت کې د r^2 متوسط قیمت پیدا کړئ؟

ځواب: ($3a_0^{\,2}$)

په کوانټم میخانیک کې اوپراتورونه

پېژندنه:

په مخکې فصل کې مو مطالعه کړه، چې اوپراتور،دایګن قیمتونه او دفزیکي متحول متوسط قیمت څه معنی لري. په دې فصل کې به مونږ د اوپراتورونو ځینې نور خواص مطالعه کړو همدارنګه، مونږ به دهغه قوسونو د بدلونې مفهوم وپېژنو،چې په کوانټم میخانیک کې استعمالیږي. دبدلونې په رابطو کې موقیعت او دمومنټم کواړډینات په کوانټم میخانیک کې اساسي اهمیت لري دغه رابطې به لاسته راوړل شي.

5.1 هرمیشن اوپراتور

که چیرې $\hat{A}$ دیوټاکلي مشاهدې وړکمیت مطابق اوپراتور او ψ دسیستم موجي تابع وي نو بیا متوسط قیمت په دې ډول ورکول کیږي

$$< A >= \int_{\tau} \psi^* \hat{A} \psi d\tau$$

$< A >$ یو حقیقي عدد دی، په نتیجوي توګه، $\hat{A}$ بایدلاندې شرط صدق کړي:

$$\int_{\tau} \psi^* \hat{A} \psi d\tau = \int_{\tau} (\psi^* \hat{A} \psi)^* d\tau = \int_{\tau} (\hat{A} \psi)^* \psi d\tau ....(5.1)$$

دهر ψ لپاره چې داتطبیق شوی وي نو هغه اوپراتورچې د پورتني شرط څخه پیروي کوي دهرمیشن اوپراتورپه نوم یادیږي. دالیدل کیږي چې دهرمیشن اوپراتور، دایګن قیمتونه ټول حقیقي دي.

5.1 مثال: ثابت کړئ ! چې دهرمیشن اوپراتوردایګن قیمتونه حقیقي دي.

حل: دایګن دقیمت معادله دهر $\hat{A}$ اوپراتورلپاره لاندې شکل لري:

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

چیرته چې λ د ψ موجي تابع مطابق د $\hat{A}$ اوپراتوردایګن قیمت دی نوبیا،

$$\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi d\tau = \int_\tau \psi^* (\lambda\psi) d\tau = \lambda \int_\tau \psi^* \psi d\tau$$

که چیرې دایګن تابع ساده شوې وي $\int_\tau \psi^* \psi d\tau = 1$ دی.نوبیا،

$$\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi d\tau = \lambda$$

همدارنګه،

$$\int_\tau (\hat{A}\psi)^* \psi d\tau = \int_\tau (\lambda^* \psi^*)\psi d\tau = \lambda^* \int_\tau \psi^* \psi d\tau = \lambda^*$$

چیرته چې λ^* د λ پیچلې جوړه ده.

دهرمیشن اوپراتورلپاره، مونږلرو

$$\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi d\tau = \int_\tau (\hat{A}\psi)^* \psi d\tau$$

$$\therefore \qquad \lambda = \lambda^*$$

دایوازې هغه وخت ممکن دی چې λ حقیقي وي. په نتیجه کې، دهرمیشن اوپراتوردایګن قیمت حقیقي دی.

5.2مثال: وښایاست! چې دمومنټم اوپراتور $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ هرمیشن اوپراتوردی. دمومنټم اوپراتورلپاره دایګن تابع لاسته راوړئ.

حل: دهرمیشن اوپراتورلپاره، مونږلرو

$$\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi d\tau = \int_\tau (\hat{A}\psi)^* \psi d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

که چیرې دمومنټم اوپراتورهرمیشن اوپراتوروي، بایدلاندې شرط صدق کړي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^* \psi dx$$

یا

$$-i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

انتګرال په پام کې نیسو

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} dx \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

په حصه اي طریقه ددې انتګرال،انتګرال نیونه عبارت ده له

$$\int_a^b u(x)\frac{dV(x)}{dx} dx = [u(x)V(x)]_a^b - \int_a^b \frac{du(x)}{dx} V(x) dx$$

بناپردې،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = [\psi\psi^*]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi dx$$

په لایتناهي کې ψ او ψ^* دواړه صفرته تقرب کوي $0 \to \psi\psi^*$. له دې وجې نه،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi dx$$

د (iii) معادلې په ښي خواکې دپورته معادلې په کارونې مونږ حاصلوو

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) \psi dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^* \psi dx$$

یا

$$\int_{\tau} \psi^* \hat{p}_x \psi d\tau = \int_{\tau} (\hat{p}_x \psi)^* \psi d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$$

د (i) معادلې سره د (iv) معادلې مقایسې څخه، مونږ پیداکووچې دمومنټم اوپراتو هرمیشن اوپراتور دی. فرضوو، چې λ دمومنټم $\hat{p}_x$ داوپراتوردایګن قیمت دی نوبیا،

$$\hat{p}_x \psi = \lambda \psi$$
$$\therefore \qquad -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = \lambda \psi$$

یا $-i\hbar \dfrac{\partial \psi}{dx} = \lambda \psi$

$$\therefore \qquad \frac{d\psi}{\psi} = i\frac{\lambda}{\hbar} dx$$

که چیرې مونږددې معادلې انتګرال ونیسو ،مونږ حاصلوو

$$\psi = Ce^{(\frac{i\lambda}{\hbar})x}$$

چیرته چې C ثابت دی، بناپردې پورته معادله د P_x دایګن تابع ورکوي.

5.2 همزمان دایګن تابع ګانې: بدلونکي

که چیرې $\hat{A}$ او $\hat{B}$ دوه اوپراتورونه وي،او ψ داسې تابع وي چې لاندې معادلې صدق کړي:

$$\hat{A}\psi = a\psi ....(5.2)$$

$$\hat{B}\psi = b\psi ....(5.3)$$

نو ψ تابع ته د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ داوپراتورونودایګن همزمان تابع وایي، چې د a او b دایګن دقیمتونوپورې مربوطه ده.

(5.2) او (5.3)معادلې استنباطوي، چې

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}(a\psi) = a\hat{B}\psi = ab\psi$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}(b\psi) = b\hat{A}\psi = ba\psi$$

لکه څنګه چې a او b سکالردي ،مونږلرو، چې ab=ba

په نتیجه کې، دپورته دوه معادلوتفریق په واسطه مونږحاصلوو،

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi = 0......................(5.4)$$

دا معادله راښایي، چې ψ د $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ اوپراتورهم دایګن تابع ده، ددې پورې دایګن قیمت صفردی. (5.4) شرط ضروري دی ،چې ψ د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ داوپراتورونودایګن همزمان تابع وي.

په (5.4)معادله کې او پراتور د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ دبدلونکي په نوم یادیږي، دساده توب لپاره داسې لیکل کیږي:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.........................(5.5)$$

$[\hat{A}, \hat{B}]$ ته بدلوونکی قوس وایي.

که چیرې $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ وي،نوبیا $\hat{A}$ او $\hat{B}$ دواړه اوپراتورونوته بدلون وایي.

$[\hat{A},\hat{B}]$بدلونکی لاندې قوانین صدق کوي

1. $[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$

2. $[\hat{A},\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

3. $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}]$

4. $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]$

5. $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{B}[\hat{C},\hat{A}]] + \hat{C}[\hat{A},\hat{B}] = 0$

6. $[x\hat{A},\hat{B}] = x[\hat{A},\hat{B}] and [\hat{A}, y\hat{B}]$

دلته x او y سکالر دي.

5.3 په کوانټم میخانیک اساسي اوپراتورونه

په کوانټم میخانیک کې اساسي اوپراتورونه د موقیعت، مومنټم ،هملتون، او زاویوي مومنټم اوپراتورونه دي. دلته د حرف په سر (^) نښه اوپراتور تشریح کوي.

د x,y,z مطابق د p^ مومنټم اوپراتورونه عبارت دي له

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$
$$p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$$

$$p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

فرضوو ! چې د $[x, p_x]$ بدلونکي عمل په $\psi(x,y,z)$ اختیاري موجي تابع باندې پام کې ونیسو

$$
\begin{aligned}
[x, p_x]\psi &= \left[x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi)\right) \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi\right) \\
&= i\hbar\psi
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad [x, p_x] = i\hbar \text{................}(5.6)$$

په ورته توګه،

$$[y, p_y] = i\hbar \qquad ,[z, p_z] = i\hbar$$

دا داسې په پام کې نېول کیږي، چې دموقیعت دکواردیناتوبدلونکی(فرضآ **x**) اودهغې مربوطه مومنټم اوپراتور(p_x) دمنځه نه تلونکي دي او $i\hbar$ قیمت لري.

راځئ! اوپراتورپه پام کې ونیسو:

$$
\begin{aligned}
[x, p_y]\psi &= \left[x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left[x, \frac{\partial}{\partial y}\right]\psi \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}x\right)\psi \\
&= -i\hbar\left(x\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi)\right)
\end{aligned}
$$

$$= -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$
$$= 0$$
$$\therefore \quad [x, p_y] = 0$$

په مشابه ډول،

$$[y, p_x] = 0 \quad ;[z, p_y] = 0$$
$$[y, p_z] = 0 \quad ;[z, p_x] = 0$$
$$[x, p_z] = 0$$

په نتیجه کې، دموقیعت دکواردیناتوبدلونکی اودمومنټم هغه جز،چې دې سره مطابقت نکوي، همیشه دصفرسره مساوي وي.

دمنځه تلونکي اودمنځه نه تلونکي بدلوونکي، چې (X,Y,Z)او (p_x, p_y, p_z)پکې شامل دي د یو ځانګړې رابطې په شکل چې x_1, x_2, x_3 د (X,Y,Z)لپاره او (p_1, p_2, p_3) د (p_x, p_y, p_z)لپاره کاریږي، لیکل کیږي.

دا رابطه عبارت ده له

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta ij, i, j = 1,2,3,...$$

دلته دکرونیکردلتاتابع δij لاندې لاندې خصوصیاتو څخه پیروي کوي:

$$\delta ij = 1 \quad , i = j$$
$$= 0 \quad , i \neq j$$

په ساده توګه ددې یادونه کیدای شي چې د $[x, p_x] = i\hbar$ بدلونکي رابطه دغیریقین والي داصل یومتبادل شکل وي لکه $\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$. دفزیکي کمیتونومطابق ددوه اوپراتورونوبدلونکی کوم ،چې په اختیاري دقت سره په همزمان نه شي اندازه کېدای ،دمنځه نه تلونکي دی. مونږپوهیږو، چې x او p_x په اختیاري دقت سره اندازه کېدای نه شي.

که چیرې داوپراتورونوبدلونکی ددوه فزیکي کمیتونودورکیدوسره مطابق وي،نوپه دې صورت کې دغه فزیکي کمیتونه په اختیاري دقت سره اندازه کېدای شي مثلاً د x اندازه کېدنه د p_y په اندازه کېدنه هیڅ تاثیرنه اچوي، بناپردې، x, p_y په اختیاري دقت سره همزمان توګه اندازه کېدای شي.په نتیجوي توګه، $[x, p_y] = 0$.

دشروډینګرموجي معادله عبارت ده له:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\psi = E\psi$$

دلته $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]$ دسیستم دکلي انرژي سره مطابق اوپراتوردی او دې ته دهملتون اوپراتور وایي.

بناپردې،

$$\hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]................(1)$$

په کلاسیکي توګه، هملتون ټولیزه انرژي تشریح کوي:

$$E = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]$$

$$\therefore \qquad \hat{H} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]...................(2)$$

د(1)او(2)رابطې مقایسې څخه مونږحاصلوو،

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

5.4 د بدلونکي الجبره

د $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ اوپراتورته د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ بدلونکی اوپراتوروايي. دمثال په توګه د $\frac{d}{dx}$ بدلونکی او **x** په لاندې طريقه کېدای شي پيداشي:

$$\left[\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right]f(x) = f(x)\text{.............................}(1)$$

د خاصيت څخه، $\{\because \quad (\frac{d}{dx}x)f(x) = \frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}\}$

څرنګه چې د(1) معادلې $f(x)$ په اختياري توګه استنباطوي چې $(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx})$ اوپراتور معادل دی چې ديوسره ضرب شي، بناپردې،بدلونکی ديوسره مساوی دی.

$$(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}) = 1$$

په ورته توګه،د(5.6)معادلې څخه دموقيعت داوپراتور $\hat{x}$ اومومنتم اوپراتور $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ داسې دی:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

د $[\hat{A}, \hat{B}]$ اوپراتورټول هغه قوانينو څخه پيروي کوي، چې په (5.2) برخه کې مطالعه شوي دي.

رائځ چې دبدلونکي الجبري څه قوانین ثبوت کړو:

(1) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \\
&= -(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}) \\
&= -[\hat{B}, \hat{A}]
\end{aligned}
$$

(2) $[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$

ثبوت: مونږ لرو،

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] &= \hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) - (\hat{B}+\hat{C})\hat{A} \\
&= \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{A} - \hat{C}\hat{A} \\
&= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} \\
&= [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad [\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

په نتیجه کې، بدلونکي دتوزیعي قانون څخه پیروي کوي.

(3) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

ثبوت: مونږ لرو،

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) - (\hat{B}\hat{C})\hat{A} \\
&= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}
\end{aligned}
$$

دپورته معادلې په ښي خوا کې د $\hat{B}\hat{A}\hat{C}$ په جمع کولو او تفریقولو سره مونږ حاصلوو:

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$
$$=(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\hat{C}+\hat{B}(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})$$
$$=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$
$$\therefore\qquad [\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0 \qquad (4)$$

ثبوت: مونږلرو،

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]=[\hat{A},\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B}]$$
$$=\hat{A}(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})-(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})\hat{A}$$
$$=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{C}\hat{B}\hat{A}$$

په ورته توګه،

$$[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]=\hat{B}\hat{C}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}$$

او

$$[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=\hat{C}\hat{A}\hat{B}-\hat{C}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$

$$\therefore\qquad [\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]$$

$$=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{C}\hat{B}\hat{A}+\hat{B}\hat{C}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$
$$-\hat{C}\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}+\hat{C}\hat{A}\hat{B}-\hat{C}\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$

$$\therefore\qquad [\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}^{-1}] = \hat{B}^{-1} [\hat{B}, \hat{A}] \hat{B}^{-1} \quad (5)$$

ثبوت: ښي خوا په پام کې نیسو:

$$\hat{B}^{-1} [\hat{B}, \hat{A}] \hat{B}^{-1} = \hat{B}^{-1} (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}) \hat{B}^{-1}$$
$$= \hat{B}^{-1} (\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1} - \hat{A}\hat{B}\hat{B}^{-1})$$
$$= \hat{B}^{-1} \hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1} - \hat{B}^{-1} \hat{A}\hat{B}\hat{B}^{-1}$$
$$= \hat{A}\hat{B}^{-1} - \hat{B}^{-1} \hat{A} \qquad (\because \hat{B}^{-1}\hat{B} = \hat{B}\hat{B}^{-1} = 1)$$
$$= [\hat{A}, \hat{B}^{-1}]$$
$$\therefore \qquad [\hat{A}, \hat{B}^{-1}] = \hat{B}^{-1} [\hat{B}, \hat{A}] \hat{B}^{-1}$$

5.5 دزاویوي مومنتم دبدلوني رابطې

په کلاسیک میخانیک کې، دیوې ذرې زاویوي مومنتم دکواردیناتو دیوتڼاکلي سیستم اصل پورې تړلی دی چې په وکتوري شکل داسې دی!

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

دلته $\vec{r}$ دموقیعت وکتوراو $\vec{P}$ دخطي مومنتم وکتوردی. مونږلروچې:

$$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$$
$$\vec{p} = \hat{i}\,p_x + \hat{j}\,p_y + \hat{k}\,p_z$$

$$\vec{L} = (\hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z) \times (\hat{i}\,p_x + \hat{j}\,p_y + \hat{k}\,p_z)$$

یا

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(yp_z - zp_y) - \hat{j}(xp_z - zp_x) + \hat{k}(xp_y - yp_x)$$

$$\because \quad \vec{L} = \hat{i}\,L_x + \hat{j}\,L_y + \hat{k}\,L_z$$

$$\therefore \quad L_x = (yp_z - zp_y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.7)$$

$$L_y = -(xp_z - zp_x) = (zp_x - xp_z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.8)$$

$$L_z = (xp_y - yp_x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.9)$$

په کوانټم میخانیک کې دزاویوي مومنټم دډینامیکي مقدار دمطالعې څخه علاوه،مونږ به مربوطه اوپراتورونه جوړوو ، دا دمومنټم داجزاوپه کارونه کیږي، اوپراتورونه دادي:

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad , p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \quad , p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

ددغه اوپراتورونوسره، دزاویوي مومنټم داجزاومعادلې(5-7)،(5-8)،(5-9) داوپراتورپه شکل داسې لیکلای شو:

$$L_x = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.10)$$

$$L_y = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.11)$$

$$L_z = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.12)$$

دموقیعت سره دمداري زاویوي مومنتم داجزاو دبدلونې قوانین

د L_x او **x** لپاره دبدلونې قانون په پام کې نیسو !

$$[L_x, x]\psi = \left[i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right), x\right]\psi$$

$$= i\hbar\left[\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right), x\right]\psi$$

$$= i\hbar\left((z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z})x - x(z\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z})\right)\psi$$

$$= i\hbar\left(z\frac{\partial x\psi}{\partial y} - y\frac{\partial x\psi}{\partial z} - xz\frac{\partial\psi}{\partial y} + yx\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= i\hbar\left(zx\frac{\partial\psi}{\partial y} - yx\frac{\partial\psi}{\partial z} - xz\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= 0$$

$$\therefore \qquad [L_x, x] = 0$$

په ورته توګه ،

$$[L_y, y] = 0$$

$$[L_z, z] = 0$$

دبدلونې قانون د L_x او y لپاره په پام کې نیسو :

$$[L_x, y]\psi = \left[i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right), y\right]\psi$$

$$= i\hbar\left[\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right), y\right]\psi$$

$$= i\hbar\left(\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)y - y\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\psi$$

$$= i\hbar\left(z\frac{\partial(y\psi)}{\partial y} - y\frac{\partial(y\psi)}{\partial z} - yz\frac{\partial\psi}{\partial y} + y^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= i\hbar\left(zy\frac{\partial\psi}{\partial y} + z\psi - y^2\frac{\partial\psi}{\partial z} - xz\frac{\partial\psi}{\partial y} + y^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= i\hbar z\psi$$

$$\therefore \quad [L_x, y]\psi = i\hbar z\psi \qquad (5.13)$$

په مشابه توګه، مونږ ثبوتولای شو چې:

$$[L_y, z] = i\hbar x$$
$$[L_z, x] = i\hbar y$$
$$[Lx, z] = -i\hbar y$$
$$[Lz, y] = -i\hbar x$$

دمداري زاويوي مومنتم دمختلفو اجزاو لپاره دبدلونې قوانين

دبدلونې رابطه د L_x او L_y ترمنځ په پام کې نيسو

$$[L_x, L_y] = L_xL_y - L_yL_x$$

راځئ! چې په ښې خوا کې لمړی حد په پام کې ونيسو:

$$L_xLy = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$$

$$= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right) + y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)$$

په ورته توګه،

$$L_yL_x = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= -\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= -\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$
$$= -\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial}{\partial y}\right) + z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$
$$= -\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial y} + zy\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$\therefore \quad L_xL_y - L_yL_x = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)$$
$$+\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial y} + zy\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)$$
$$\therefore \quad L_xL_y - L_yL_x = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\times i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar L_z$$

نو په دې اساس،

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad\text{................}(5.14)$$

په دوراني بشپړبدلون سره مونږلاسته راوړلای شو:

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$
$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$
$$[L_z, L_y] = -i\hbar L_x$$
$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$$

د L_x, L_y او L_z اجزاو سره د L^2 د بدلونې رابطه

مونږ لرو، $L = L_x{}^2 + L_y{}^2 + L_z{}^2$

راځئ! چې $[L^2, L_x]$ په پام کې ونیسو،

$$[L^2, L_x] = [L_x{}^2 + L_y{}^2 + L_z{}^2, Lx]$$
$$= [L_x{}^2, L_x] + [L_y{}^2, L_x] + [L_z{}^2, L_x]$$
$$= [L_x L_x, L_x]$$

څرنګه چې مونږ لرو:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$$

ددې ځای لیکو چې:

$$[L^2, L_x] = L_x[L_x, L_x] + [L_x, L_x]L_x + [L_x, L_x]L_x + L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z$$
$$= L_x \times 0 + 0 \times L_x + L_y(-i\hbar L_z) + (-i\hbar L_z)L_y + L_z(i\hbar L_y) + (i\hbar L_y)L_z$$
$$= 0$$

په ورته توګه، $[L^2, L_y] = 0$

او $[L^2, L_z] = 0$

په دې ډول، دزاویوي مومنټم داوپراتورونو ددې درې واړو اجزاو سره L^2 بدلون کوي.

5.6 زینه ای اوپراتورونه

زینه ای اوپراتورونه داسې تعریفیږي

$$L_+ = L_x + iL_y$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

1. راځئ! چې د L_+ سره د L_z کمیوټیشن(بدلون) په پام کې ونیسو،

$$[L_z, L_+] = [L_z, L_x + iL_y]$$
$$= [L_z, L_x] + [L_z, iL_y]$$
$$= [L_z, L_x] + i[L_z, L_y]$$
$$= i\hbar L_y + i(-i\hbar L_x)$$
$$= i\hbar L_y + \hbar L_x$$
$$= \hbar(L_x + iL_y)$$
$$\therefore \quad [L_z, L_+] = \hbar L_+ \quad \text{.....................(5.15)}$$

2. راځئ چې د L_- سره د L_z کمیوټیشن په پام کې ونیسو

$$[L_z, L_-] = [L_z, L_x - iL_y]$$
$$= [L_z, L_x] - [L_z, iL_y]$$
$$= [L_z, L_x] - i[L_z, L_y]$$
$$= i\hbar L_y - i(-i\hbar L_x)$$
$$= i\hbar L_y - \hbar L_x$$
$$= -\hbar(L_x - iL_y)$$
$$\therefore \quad [L_z, L_-] = -\hbar L_- \quad \text{.....................(5.16)}$$

۳. راځئ! چې د L_- سره د L_+ کمیوټیشن په پام کې ونېسو،

$$[L_+, L_-] = [[L_x + iL_y, L_x - iL_y]$$
$$= [L_x, L_x] - i[L_x, L_y] + i[L_y, L_x] - i^2[L_y, L_y]$$
$$= [L_x, L_x] - i[L_x, L_y] + i[L_y, L_x] + [L_y, L_y]$$
$$= 0 - i(i\hbar L_z) + i(-i\hbar L_z) + 0$$
$$\therefore \quad [L_+, L_-] = 2\hbar\, L_z \text{...................................(5.17)}$$

په کروي قطبي کواردیناتوکې دزاویوي مومنټم اوپراتورونه:

په کارتیزین کواردیناتوکې دزاویوي مومنټم اوپراتورونه د(5.10) او(5.11) او(5.12) معادلو په واسطه ورکول کیږي.

مونږکولای شو،چې دانتقال درابطوپه کومک دغه رابطې کروي قطبي کواردیناتوته بدل کړو:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r.\cos\theta
\end{aligned}
$$

دانتقال دې معادلوسره مونږلرو

$$
\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

د L_z دایګن تابع اودایګن قیمت:

مونږاوس کوشش کووچې د L_z دایګن قیمت پیداکړو

$$L_z\psi = \lambda\psi$$

چیرته چې $\psi = \psi(r,\theta,\phi)$ او λ دایګن قیمت دی.

راځئ! چې ولیکو:

$$\psi(r,\theta,\phi) = F(r,\theta)G(\phi)$$

مونږلروچې

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\therefore \qquad -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} = \lambda \psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial FG}{\partial \phi} = \lambda FG$$

$$\therefore \qquad -i\hbar \frac{\partial G}{\partial \phi} = \lambda G$$

یا

$$\frac{dG}{G} = \frac{i\lambda}{\hbar} d\phi$$

په انتګرال نیوني مونږ حاصلوو

$$G = e^{\frac{i\lambda\phi}{\hbar}}$$

$$\therefore \qquad \psi = F(r,\theta).e^{\frac{i\lambda\phi}{\hbar}}$$

اوس باید ψ د (x,y,z) یو قیمته تابع وي. په دې حالت کې، د 2π په اندازه د ϕ زیاتیدل باید په تابع کې تغیر رانه وړي، داسې چې:

$$F(r,\theta)e^{\frac{i\lambda\phi}{\hbar}} = F(r,\theta)e^{\frac{i\lambda(\phi+2\pi)}{\hbar}}$$

$$e^{\frac{i\lambda 2\pi}{\hbar}} = 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) = 1$$

داورکوي چې:

$$\sin\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\lambda}{\hbar}\right) = 1$$

ددې ځایه،

$$\frac{2\pi\lambda}{\hbar} = 2m\pi$$

دلته m تام عدد دی

$$\therefore \qquad \lambda = m\hbar$$

دلته $$m = 0,1,2,....$$

په نتیجه کې د L_z اوپراتور دایګن قیمت $m\hbar$ دی.

دزاویوي مومنتم داوپراتور جګیدل او ټیټدل:

فرضوو ،چې ψ_m د $m\hbar$ سره د L_z اوپراتور دایګن تابع ده، راځئ! چې $L_+ = L_x + iL_y$ اوپراتور په پام کې ونیسو داسې چې، L_z په $(L_x + iL_y)\psi_m$ باندې عمل کوي.

$$\begin{aligned} L_z(L_x + iL_y)\psi_m &= (L_zL_x + iL_zL_y)\psi_m \\ &= L_zL_x\psi_m + iL_zL_y\psi_m \text{.....................}(5.18) \end{aligned}$$

مونږ لرو چې:

$$\begin{aligned} L_zL_x - L_xL_z &= i\hbar L_y \\ L_zL_y - L_yL_z &= -i\hbar L_x \\ L_zL_x &= L_xL_z + i\hbar L_y \\ L_zL_y &= L_yL_z - i\hbar L_x \end{aligned}$$

په (5.18) معادله کې ددغه معادلو په کارونې، مونږ حاصلو و :

$$\begin{aligned}
L_z(L_x+iL_y)\psi_m &= (L_xL_z+i\hbar L_y)\psi_m+i(L_yL_z-i\hbar L_x)\psi_m\\
&=(L_xL_z+i\hbar L_y)\psi_m+\hbar(L_x+iL_y)\psi_m\\
&=(L_x+iL_y)L_z\psi_m+\hbar(L_x+iL_y)\psi_m\\
&=(L_x+iL_y)(L_z\psi_m+\hbar\psi_m)\\
&=(L_x+iL_y)(m\hbar\psi_m+\hbar\psi_m)\\
&=(L_x+iL_y)(m+1)\hbar\psi_m
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad L_z(L_x+iL_y)\psi_m=(m+1)\hbar((L_x+iL_y)\psi_m \text{..............................}(5.19)$$

پە نتیجە کې، کلە چې (L_x+iL_y) د ψ_m ایګن پە تابع عمل کوي، د L_z ایګن قیمت د $\hbar$ پواسطە زیاتیږي. پدې حالت کې، L_+ اوپراتور تە جګیدونکی اوپراتوروایي.

پە مشابە ډول، مونږ ښودلای شو چې:

$$L_z(L_x-iL_y)\psi_m=(m-1)\hbar(L_x-iL_y)\psi_m$$

د L_z دایګن قیمت د $\hbar$ پواسطە کمیږي، کلە چې (L_x-iL_y) د ψ_m ایګن پە تابع عمل وکړي، نو L_- تە ټیټیدونکی اوپراتوروایي.

5.7 جوړه اودجوړې اوپراتور

کە چیرې مونږ $f(x)$ تابع ولرو ،داسې چې:

$$f(x)=f(-x)$$

مثلاکە چیرې دمتحول جهت معکوس شي او دتابع پە اشارە کې تغیرنە وي، نوتابع جفتە جوړه لري.

$$f(x)=-f(x)$$

مثلاکە چیرې دمتحول جهت معکوس شي او دتابع پە اشارە کې تغیر وي، نوتابع طاقە جوړه لري.

دمثال پە توګە،

.1
$$f(x) = x^3$$
$$\therefore \quad f(-x) = -x^3$$

تابع طاقه جوړه لري.

.2
$$f(x) = x^2 + 2$$
$$\therefore \quad f(-x) = x^2 + 2$$

تابع جفته جوړه لري.

$\sin x$ تابع طاقه جوړه لري مګر $\cos x$ تابع جفته جوړه لري.

که چیرې مونږ تابع ولرو ،

$$f_1(x) = A\sin x$$
$$f_2(x) = B\cos x$$

د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ تابع ګانو جوړه څه شی دی؟

$\sin x$ تابع طاقه جوړه لري او $\cos x$ تابع جفته جوړه لري.بناپردې، $f_1(x)$ طاقه جوړه او $f_2(x)$ جفته جوړه لري.

عموماً،فرضوو ،چې $\psi(x)$ دایګن تابع ده داسې چې!

$$p\psi(x) = \varepsilon\psi(-x)$$

چیرته چې p دجوړې اوپراتوراو ε دایګن قیمت دی.

که چیرې $\varepsilon = +1$ وي، $\psi(x)$ تابع جفته جوړه لري.

که چیرې $\varepsilon = -1$ وي نو $\psi(x)$ تابع طاقه جوړه لري.

په کوانټم میخانیک کې دجوړې مفهوم ډیرمهم دی، ټولې ایګن تابع ګانې کوم چې د $V(x)$ پوتنشیل لپاره دشروډینګردثابت حالت دمعادلې دمحدودحالت حلونه دي،معینې جوړې لري. د

ایګن تابع ګانې دطاقواوجفتوجوړوڅخه یوجوړه لري. دلیل یې دادی چې $\psi\psi^*$ احتمالي کثافت د (x, y, z) پشان $(-x,-y,-z)$ عینې قیمت لري کوم چې دهغه حقیقت ضرورت دی چې پوتنشیل په یوه نقطه کې عینې قیمت لري.

رائځ! چې دوخت څخه مستقله دشروډینګرمعادله په پام کې ونیسو

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

که چیرې x مونږ x- ته تغیرکړو ،معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(-x)}{dx^2}+V(-x)\psi(-x)=E\psi(-x)$$

که چیرې $V(x)$ په $x=0$ کې متناظره وي نوبیا $V(x)=V(-x)$ دی.بناپردې، دپورته دوه معادلوڅخه مونږ $\psi(x)$ او $\psi(-x)$ دوه دایګن تابع ګانې لروچې یوشان انرژي لري. که دغه دوه تابع ګانې خطآ مستقل نه وي، نوددوې فرق باید دیوضربي ثابت په واسطه وشي.

$$\psi(x)=\varepsilon\psi(-x)\text{.............................}(5.20)$$

که چیرې په دې معادله کې x په x− تغیرشي نومونږلروچې:

$$\psi(-x)=\varepsilon\psi(x)\text{.............................}(5.21)$$

(5.21) معادله په (5.20) معادله کې کاروو مونږحاصلوو

$$\psi(x)=\varepsilon\varepsilon\psi(x)=\varepsilon^2\psi(x)$$

لدې وجې نه،

$$\varepsilon^2=1$$
$$\varepsilon=+1\quad,\quad\varepsilon=-1$$

په دې اساس لروچې،

$$\psi(x) = \psi(-x) \quad , \quad \varepsilon = +1$$
$$\psi(x) = -\psi(x) \quad , \quad \varepsilon = -1$$

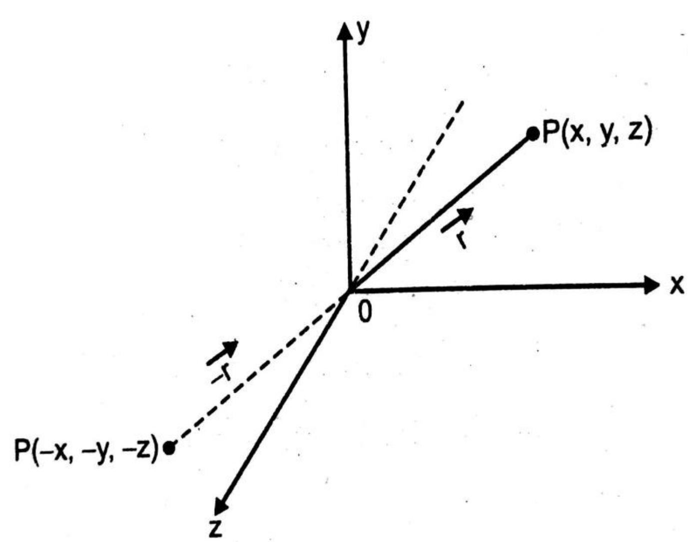
که $\varepsilon = +1$ وي نو $\psi(x)$ تابع جفته جوړه لري او که $\varepsilon = -1$ وي نو $\psi(x)$ تابع طاقه جوړه لري.

دجوړې مفهوم په درې بعدي حالت کې:

راځئ داسې تابع ګڼې په پام کې ونیسو کوم چې عموماً (x, y, z) درې متحولینو پورې تړلې دي.

$$x \to -x$$
$$y \to -y$$
$$z \to -z$$
$$\vec{r} \to -\vec{r}$$

دغه انتقال ته دفضا اړونه وايي او په (5.1) شکل کې ښودل شوی دی.



5.1 شکل

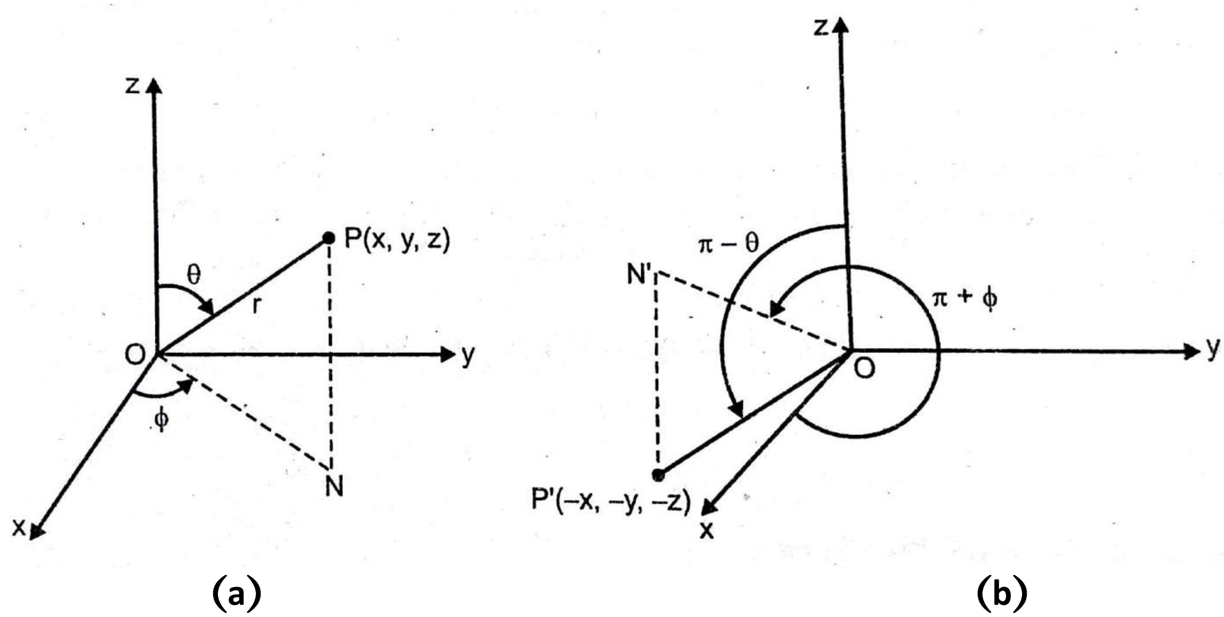
که چیرې، $\psi(x,y,z)=\psi(-x,-y,-z)$ مثلاً $\psi(\vec{r})=\psi(-\vec{r})$ ،تابع جفته جوړه لري.

که چیرې، $\psi(x,y,z)=-\psi(-x,-y,-z)$ مثلاً $\psi(\vec{r})=-\psi(-\vec{r})$ ،تابع طاقه جوړه لري.

په کروي قطبي کواردیناتوکې جوړه:

اکثره وخت مونږمجبوریو،چې (r,θ,ϕ)کروي قطبي کواردینات وکاروو، راځئ! چې ونښایوچې څنګه د $\psi(r,\theta,\phi)$موجي تابع جوړه تشریح کوو. د $\vec{r}\rightarrow-\vec{r}$ انتقال دې پورې تړل کیږي، چې د p څخه p' ته ځي لکه څنګه چې (5.2) شکل کې ښودل شوی دی. (5.2) شکل ښایي چې دجوړې په عملیات کې د p د نقطې دوضعیه کمیاتو اشاره بدلیږي، د p' دنوې نقطې وضعیه کمیات دانتقال په واسطه لاسته راځي.

$$r\rightarrow r\ \ ,\theta\rightarrow\pi-\theta\ ,\ \phi\rightarrow\pi+\phi$$



5.2 شکل

که چیرې، $\psi(r,\theta,\phi)=\psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi)$ ،موجي تابع جفته جوړه لري.

او که چیرې، $\psi(r,\theta,\phi)=-\psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi)$ ،موجي تابع طاقه جوړه لري.

5.3 مثال: دلاندې تابع ګانو جوړه تعین کړئ؟

$$e^{-\alpha r} \quad , \quad \cos\theta . e^{-\alpha r} \qquad\qquad \cos\theta . e^{-\alpha r} e^{i\phi}$$

حل:

(1) $\psi(r) = e^{-\alpha r}$

د تابع جوړه (طاق یا جفت) ، د انتقال پورې اړه لري. $\phi \to \pi + \phi$, $\theta \to \pi$, $r \to r$

په ښکاره توګه تابع جفته جوړه لري.

(2) $\psi(r,\theta,\phi) = \cos\theta . e^{-\alpha r}$

$$\therefore \quad \psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi) = \cos(\pi-\theta)e^{-\alpha r}$$
$$= -\cos\theta . e^{-\alpha r}$$
$$(\because \ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta)$$
$$\therefore \quad \psi(r,\theta,\phi) = -\psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi)$$

بناپردې، تابع طاقه جوړه لري.

(3) $\psi(r,\theta,\phi) = \cos\theta . e^{-\alpha r} e^{i\phi}$

$$\psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi) = \cos(\pi-\theta) . e^{-\alpha r} e^{i(\pi+\phi)}$$
$$= \cos(\pi-\theta) . e^{-\alpha r} e^{i\pi} . e^{i\pi}$$
$$(\because \ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \quad , \quad e^{i\pi} = -1)$$
$$\therefore \quad \psi(r,\theta,\phi) = \psi(r,\pi-\theta,\pi+\phi)$$

بناپردې، تابع جفته جوړه لري.

5.4 مثال: په ریاضیکي استقراء سره وښایاست! چې:

$$[x, p^n] = i\hbar . n . p^{n-1}$$

حل: دریاضیکي استقراء اصل بیانوي چې که چیرې یوه رابطه د n=1,2 لپاره سمه وي نو فرضوو، چې دغه رابطه د n=k لپاره هم سمه ده، که چیرې مونږ په دې وتوانیدو چې ثبوت کړو، چې دا د n=k+1 لپاره درسته ده،نو بیا عموماً دا دهرتام مثبت عدد لپاره سمه ده.

د n=1 لپاره، $[x,p]=i\hbar$

د n=2 لپاره،

$$\begin{aligned}[x,p^2]=[x,pp]&=p[x,p]+[x,p]p\\&=pi\hbar+i\hbar p\\&=2i\hbar p\end{aligned}$$

رابطه د n=k لپاره سمه ده، مثلاً

$$[x,p^k]=i\hbar kp^{k-1}$$

اوس، به مونږ وښایو چې رابطه د n=k+1 لپاره سمه ده

$$\begin{aligned}[x,p^{k+1}]&=[x,pp^k]\\&=p[x,p^k]+[x,p]p^k\\&=pi\hbar kp^{k-1}+i\hbar p^k\\&=(k+1)i\hbar p^{k+1}\end{aligned}$$

ځکه نتیجه د n=k+1 لپاره سمه ده، همدارنګه عموماً دغه رابطه دهرتام مثبت عدد لپارسمه ده.

$$\therefore \qquad [x,p^n]=i\hbar n.p^{n-1}$$

5.5 مثال: دریاضي داستقراء په واسطه وښایاست! چې:

$$[x^n,p]=i\hbar nx^{n-1}$$

حل: درياضيکي استقراء اصل بيانوي، چې که چيرې يوه رابطه دn=1,2 لپاره سمه وي نوفرضوو، چې دغه رابطه دn=k لپاره هم سمه ده، که چيرې مونږپه دې وتوانېدوچې ثبوت کړو، چې دا دn=k+1 لپاره سمه ده ، نوبيا عموماً دا دهرتام مثبت عدد لپاره سمه ده.

دn=1 لپاره، $[x, p] = i\hbar$

دn=2 لپاره،

$$\begin{aligned}[x^2, p] &= [xx, p] = x[x, p] + [x, p]x \\ &= xi\hbar + i\hbar x \\ &= 2i\hbar x\end{aligned}$$

رابطه دn=k لپاره سمه ده

$$[x^k, p] = i\hbar n x^{k-1}$$

اوس به داوښايوچې رابطه دn=k+1 لپاره سمه ده.

$$\begin{aligned}[x^{k+1}, p] &= [xx^k, p] \\ &= x[x^k, p] + [x, p]x^k \\ &= xi\hbar k x^{k-1} + i\hbar x^k \\ &= (k+1)i\hbar x^{k+1}\end{aligned}$$

څرنګه چې نتيجه دn=k+1 لپاره سمه ده نو عموماً دغه رابطه دتام مثبت عدد لپاره هم سمه ده.

$$[x^n, p] = i\hbar n x^{n-1}$$

5.6 مثال: وښاياست! چې وخت پورې تړلې دډيناميکي متحول متوسط قيمت داسې ښودل کيږي.

$$\frac{d<A>}{dt} = <\frac{\partial A}{\partial t}> + \frac{i}{\hbar}<[H, \hat{A}]>$$

چيرته چې H دهملتون اوپراتوراو $\hat{A}$ دA پورې تړلی اوپراتوردی.

حل: د A متوسط قیمت عبارت دی له

$$< A >= \int \Psi^*(x,t)\,\hat{A}\Psi(x,t)dx$$

$$\frac{d< A >}{dx} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int \Psi^*(x,t)\,\hat{A}\Psi(x,t)dx\right]$$

$$= \int\left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\hat{A}\Psi + \Psi^*\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\Psi + \Psi^*\hat{A}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right]dx$$

$$= \int \Psi^*\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\Psi dx + \int\left[\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\hat{A}\Psi + \Psi^*\hat{A}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right]dx.................(i)$$

وخت پورې تړلې د شروډینګر معادله عبارت ده له:

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

یا

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}H\Psi = -\frac{i}{\hbar}H\Psi$$

د پورته معادلې مختلط مزدوج عبارت دی له :

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = (\frac{1}{i\hbar}H\Psi^*) = -\frac{1}{i\hbar}\Psi^* H = \frac{i}{\hbar}\Psi^* H$$

په (i) رابطه کې د $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ او د $\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$ قیمتونو په کارونې مونږ حاصلوو

$$\frac{d<A>}{dx} = \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\Psi dx + \int\left[\frac{i}{\hbar}\Psi^* H\hat{A}\Psi + \Psi^*\hat{A}(-\frac{i}{\hbar})H\Psi\right]dx$$

$$= \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\Psi dx + \frac{i}{\hbar}\int\left[\Psi^* H\hat{A}\Psi - \Psi^*\hat{A}H\Psi\right]dx$$

$$= <\frac{\partial A}{\partial t}> + \frac{i}{\hbar}\int \Psi^*[H\hat{A} - \hat{A}H]\Psi dx$$

$$= <\frac{\partial A}{\partial t}> + \frac{i}{\hbar}\int \Psi^*[H,\hat{A}]\Psi dx$$

$$\therefore \quad \frac{d<A>}{dx} = <\frac{\partial A}{\partial t}> + \frac{i}{\hbar}<[H,\hat{A}]>$$

5.7 مثال: که چیرې $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ وي وښایاست! چې :

$$(i) \qquad xH - Hx = +\frac{i\hbar}{m}p$$

$$(ii) \qquad pH - Hp = -i\hbar m w^2 x$$

حل:

$$(i) \qquad xH - Hx = [x,H] = \left[x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2m}[x,p^2] + \frac{1}{2}mw^2[x,x^2]$$

$$= \frac{1}{2m}.2i\hbar p + 0$$

$$= \frac{i\hbar}{m}p$$

$$(ii) \qquad pH - Hp = [p,H] = \left[p, \frac{p^2}{2m}\right] + \left[p, \frac{1}{2}mw^2x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[p,p^2] + \frac{1}{2}mw^2[p,x^2]$$

$$= 0 + \frac{1}{2}mw^2(-2i\hbar x)$$

$$= -i\hbar m w^2 x$$

5.8 مثال: که چیرې $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ وي نو بیا وښایاست! چې :

$$[x,[x,H]]=-\frac{\hbar^2}{m}$$

حل: مونږ لرو چې،

$$\begin{aligned}[x,H]&=\left[x,\frac{p^2}{2m}\right]+[x,V(x)]\\&=\frac{1}{2m}[x,p^2]+0\\&=\frac{1}{2m}2i\hbar p\\&=\frac{i\hbar}{m}p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad [x,[x,H]]&=\left[x,\frac{i\hbar p}{m}\right]\\&=\frac{i\hbar}{m}[x,p]\\&=\frac{i\hbar}{m}.i\hbar\\&=-\frac{\hbar^2}{m}\end{aligned}$$

خــلاصه

1. هرمیشن اوپراتوردد ې شرط څخه پیروي کوي:

$$\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi d\tau = \int_\tau (\hat{A}\psi)^* \psi d\tau$$

2. دهرمیشن اوپراتوردایګن قیمتونه حقیقي دي.

3. $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ دبدلونکی قوس دی

4. دمومنټم ،موقیعت اوانرژي اوپراتورونه په کوانټم میخانیک کې اساسي اوپراتورونه دي.

$$[x, p_x] = i\hbar = [y, p_y] = [z, p_z]$$
$$[x, p_y] = 0 = [y, p_x] = [y, p_z] = [z, p_y] = [z, p_x]$$

5. زاویوي مومنټم

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

6.

$$[L_x, x] = 0 = [L_y, y] = [L_z, z]$$
$$[L_x, y] = i\hbar z$$
$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

7. زینه اي اوپراتورونه داسې تعریفیږي:

جګیدونکی زینه اي اوپراتور، $L_+ = L_x + iL_y$

ټیټیدونکی زینه اي اوپراتور، $L_- = L_x - iL_y$

8. که $f(x) = f(-x)$ وي، تابع جفته جوړه لري او که چیرې $f(x) = -f(x)$ وي،تابع طاقه جوړه لري.

$\cos x$ تابع جفته جوړه او $\sin x$ تابع طاقه جوړه لري.

تمرینـــونه

(A) لنډځوابه ډوله پوښتني

۱. اوپراتورتعریف کړئ؟
۲. هرمیشن اوپراتورتعریف کړئ؟
۳. کموټیټورتعریف کړئ؟
۴. زاویوي مومنټم تعریف کړئ؟
۵. جګیدونکی او ټیټیدونکی اوپراتورتعریف کړئ؟
۶. جوړه اودجوړې اوپراتورتعریف کړئ؟

(B) اوږدځوابه ډوله پوښتني

1. وښایاست! چې دهرمیشن اوپراتوردایګن قیمتونه حقیقي دي.

2. وښایاست! چې دمومنټم اوپراتور $(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})$ هرمیشن اوپراتوردی.

3. وښایاست! چې $[x, p_x] = i\hbar$ دی.

4. ثبوت کړئ ؟چې $[x, p^n] = i\hbar np^{n-1}$

5. ثبوت کړئ ؟چې $[x^n, p] = -i\hbar nx^{n-1}$

6. د L_y , L_x او L_z دکارتیزین اجزاء وکاروئ اوثبوت کړئ؟ چې:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$
$$[L^2, L_x] = 0$$

7. ثبوت کړئ؟ چې $[L_z, y] = -i\hbar x$

8. وښایاست! چې $[A, B^{-1}] = B^{-1}[B, A]B^{-1}$

9. ثبوت کړئ ؟چې $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0$

10. وښایاست !چې د L_z اوپراتوردایګن قیمت دانتګرال ضرب $\hbar$ سره مساوي دی.

11. جګیدونکي اوټیټیدونکي اوپراتورونو باره کې څه یاداشت ولیکئ؟

12. وښایاست! چې L_+ زینه اي اوپراتورد $\hbar$ پواسطه د L_z اوپراتوردایګن قیمت زیاتوي.

13. دجوړې مفهوم تشریح کړئ؟ او وښایاست! چې دجوړې اوپراتوردایګن قیمتونه $+1$ او -1 دي.

اپریل 2012

1. کوشش وکړئ لاندې ټول سوالونه حل کړئ(هریو، یوه نمره لري): (10)

(a) الکترونونه مجازدي تر څو د هغه کرستال څخه تیر شي چې د شبکې ثابت یې $1A^{\circ}$ دی. د هغه په سرعت کې غیریقین والی تعین کړئ ($h = 6{,}63.10^{-34}$ j.s , $m = 9{,}1.10^{-31}$kg)

ځواب. د 35 صفحې 1.11 مثال ته مراجعه وکړئ.

(b) دیوذرې د پاره چې p مومنتم لری ثبوت کړئ چې $\lambda = \dfrac{h}{p}$

ځواب. د 8 نه تر 10 صفحو پورې (A)1.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(c) د موجي تابع د پاره د ساده کیدنې شرط توضیح کړئ.

ځواب. د 42 او 43 صفحو 2.1 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(d) په کوانټم میخانیک کې اوپراتور تعریف کړئ.

ځواب. په 57 صفحه کې 2.6 موضوع وګورئ.

(e) د تونلنګ اثر دوه د استعمال ځایونه توضیح کړئ.

ځواب. د 116 نه تر 123 صفحو پورې 3.5 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(f) د ډیجینریټ حالت مفهوم څه دی؟

ځواب. 161 صفحه کې د خلاصې څلورمې شمارې ته مراجعه وکړئ.

(g) د وخت څخه مستقله د شروډینګر معادله ولیکئ.

ځواب. 47 څخه تر 50 صفحو کې 2.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(h) کوانټم نمبرونه توضیح کړئ.

ځواب. 180 صفحه کې 4.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(i) ثبوت کړئ چې $[x, p_y] = 0$

ځواب. د 205 څخه تر 209 صفحو کې 5.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(j) د طاق او جفت جوړې مفهوم څه دی؟

ځواب. د 222 څخه تر 227 صفحو پورې 5.7 موضوع ته مراجعه وکړئ.

2. کوشش وکړئ چې دلاندې سوالونو څخه هر دوه حل کړئ (هر یو پنځه نمرې لري): (10)

(a) ثبوت کړئ چې $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0$

ځواب. 210 صفحه کې (3) 5.4 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) دهایدروجن اتوم په عادي حالت کې د پوتنشیل انرژي متوسط قیمت محاسبه کړئ، که چیرې

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} e^{\frac{-r}{a0}}$$

ځواب. 192 صفحه کې 4.3 مثال ته مراجعه وکړئ.

(c) $1\mu gr$ په کتله یو کوچنی جسم محصور دی تر څو دوه کلکو دیوالونو ترمنځ چې $1mm$ په فاصله سره جدا شوي دي، حرکت وکړي. د جسم اصغري تیزي محاسبه کړئ.

ځواب. 144 صفحه کې 3.3 مثال ته مراجعه وکړئ.

3 . کوشش وکړئ چې دلاندې سوالونو څخه هر دوه حل کړئ (هر یو پنځه نمرې لري): (10)

(a) د $\Delta L.\Delta\theta \geq \hbar$ غیریقین والي رابطه ثبوت کړئ.

ځواب. د 93 څخه تر 99 صفحو کې 3.2 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) $\psi(x)=\dfrac{1+ix}{1\pm ix^2}$ موجي تابع ساده کړئ که د x رنج $(-\infty,+\infty)$ وي

ځواب. 71 صفحه کې 2.2مثال ته مراجعه وکړئ.

(c) که e^{2x} د $\dfrac{d^2}{dx^2}$ اوپراتوردايګن تابع وي نودايګن قيمت يې تعين کړئ.

ځواب. د 217 څخه تر218 صفحوپورې 5.6 موضوع ته مراجعه وکړئ.

4. (A) کوشش وکړئ دلاندې سوالونو څخه يو حل کړئ(هريواته نمرې لري): (8)

(a) دپوتنشيل بيريرلپاره،

$$\begin{aligned} V &= 0 & x &< 0 \\ V &= V_0 & 0 \le x &\le a \\ V &= 0 & x &> 0 \end{aligned}$$

دې پوتنشيل سره د $E>V_0$ لپاره دشروډينګرمعادله تطبيق کړئ او وښاياست چې ددې لپاره $R+T=1$ دی.

ځواب. 116 څخه تر123 صفحوکې 3.5 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) دمتماديت معادله لاسته راوړئ او دهغې فزيکي اهميت څه دی؟

ځواب. د53 څخه تر56 صفحوکې 2.5 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(B) کوشش وکړئ لاندې سوالونو څخه يو حل کړئ(هريودوه نمرې لري): (2)

(a) وښاياست چې $V_g=V_p-\lambda\dfrac{dV_p}{d\lambda}$

(b) دموجي تابع ضرورت توضيح کړئ چې دشروډينګروخت څخه مستقلې معادلې قابل قبول حلونه وي.

ځواب. د50څخه تر52صفحوکې 2.4 موضوع ته مراجعه وکړئ.

اکتوبر 2012

1. کوشش وکړئ لاندې ټول سوالونه حل کړئ(هريو، يوه نمره لري): (10)

(a) ډی بروګلي قضيې توضيح کړئ.

ځواب. د 8 صفحې (A)1.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) موجي پاکټ څه شی دی؟

ځواب. د 17 صفحې 1.4 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(c) دايګن قيمت تعريف کړئ.

ځواب. د 57 صفحې 2.6 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(d) دمتمايت معادله توضيح کړئ.

ځواب. د 53 او56صفحو کې 2.5 موضوع وګورئ.

(e) دتونلنګ اثر څه شی دی.

ځواب. د 161 صفحې دخلاصې اوومې شمارې ته مراجعه وکړئ.

(f) دازادې ذرې دانرژي دطيف ماهيت څه ډول دی؟

ځواب. 90صفحه کې 3.1 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(g) کلک دوران کوونکی څه شی دی؟

ځواب. 168صفحه کې 4.2 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(h) ډيجينرسي تعريف کړئ.

ځواب. 187صفحه کې 4.3 موضوع (ډيجينرسي) ته مراجعه وکړئ.

(i) ثبوت کړئ چې $[\hat{A},\hat{B}]=-[\hat{B},\hat{A}]$

ځواب. په 210 صفحه کې د 5.4 موضوع 1 مثال ته مراجعه وکړئ.

(j) که چیرې $H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2x^2$ ، نو بیا وښایاست چې $xH-Hx=\frac{i\hbar}{m}p$ ؟

ځواب. 232 صفحه کې د 5.7 مثال (i) ته مراجعه وکړئ.

2. کوشش وکړئ چې دلاندې سوالونو څخه هر دوه حل کړئ (هریو پنځه نمرې لري): (10)

(a) ثبوت کړئ چې د هرمیشن اوپراتور د ایګن قیمتونه حقیقي دي.

ځواب. په 57 صفحه کې 2.6 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) دنیوترون دډی بروګلي طول موج پیدا کړئ، دکوم چې انرژي $1ev$ ده. دنیوترون کتله $1{,}67.10^{-27}\,kg$

ځواب. 13 صفحه کې 1.5 مثال ته مراجعه وکړئ.

(c). ددوه اتومي مالیکول $10^3\,\frac{j}{m^3}$ ، داتوم دداخلي فضا داهتزازونو لپاره دارتجاعي قوې ثابت k دی. که چیرې دمالیکول کتله $4{,}9.10^{-26}\,kg$ وي، داسیلاتور دصفري نقطې انرژي تخمین کړئ.

ځواب. 153 صفحه کې 3.9 مثال ته مراجعه وکړئ.

3 . کوشش وکړئ چې دلاندې سوالونو څخه هردوه حل کړئ(هریو پنځه نمرې لري): (10)

(a) ثبوت کړئ چې $[L^2, L_x]=0$.

ځواب. په 212 صفحه کې 5.5 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) وښایاست چې په یوبعدي پوتنشیلي څاه کې ذره به دانرژي جدا حالتونه لري.

ځواب. د 93 څخه تر 99 صفحو کې 3.2 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(c) دجریان کثافت پیدا کړئ که چیرې موجي تابع $\psi(x) = Ae^{ikx}$ وي.

ځواب. په 77 صفحه کې 2.6 مثال ته مراجعه وکړئ.

4. (A) کوشش وکړئ دلاندې سوالونو څخه یو حل کړئ(هریواته نمرې لري): (8)

(a) دشروډینګردثابت حالت معادلې په کارونې،په دری بعدي کلک بکس کې دذرې دایګن قیمتونه په لاس راوړئ.

ځواب. د 99 څخه تر 107 صفحو کې 3.3 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(b) دوخت پورې تړلې دشروډینګرمعادله په لاس راوړئ ؟

ځواب. په 44 صفحه کې 2.2 موضوع ته مراجعه وکړئ.

(B) کوشش وکړئ لاندې سوالونو څخه یو حل کړئ(هریودوه نمرې لري): (2)

(a) که چېرې $V_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ وي، ګروپ سرعت تشریح کړئ.

(b) دایرینفسټ قضیې توضیح کړئ.

ځواب. په 61 صفحه کې 2.7 موضوع ته مراجعه وکړئ.

Refereces Books

1. Quantum Mechanics of Atoms, Molecules, Solid, Nuclei and Partices.

-By R.Eisberg and R.Resnik Publish by Wiley.

2. Quantum Mechanics.

- By Gupta, Kumar and Sharma Published by J.Prakash Nath and Co.Meeral

3. Concepts of Modern Physics.

-By A.Beiser Published by Mc.Grawthill.Chepter 2,3,5,6

4. Introduction to Quantum Mechanics.

-By D.Griffiths Published by Prentice Hall.

- 5. Quantum Mechanics.

- By Ghatah and Lokanathan Published by Mc.Millan.

6. Quantum Mechanics.

- By L.I.Schiff.

7. Quantum Mechanics.

- By Powell and Crasemann,Addison-Wesley Publication Co.

داستادلنډه پیژندنه

محترم استاد پوهنیاراکرام الله وقارد امرالله زوی د روداتوولسوالۍ دزینوکلي اوسیدونکی دی، په ۱۳۶۷ هـ ش کال کې یې دهجرت په دیارپاکستان،کوهاټ کې دهجرت په شپواوورځوکې دې دنیاته سترګې غړولي دي. لمړنې زده کړې یې په کوهاټ کې د مهاجروپه مکتب کې کړیدي.کله چې داتم ټولګي څخه فارغ شو،نومکتب یې پریښود او د قران شریف حفظ ته یې ملاوتړله.

په دریوکالونوکې دالله دعظیم نعمت څخه برخمن یعنې حافظ شو. دخپل شوق اوذوق په اساس بیاپه مکتب کې شامل اودلیسې دوره یې په شهاب الدین غوري لیسه کې سرته ورسوله اوپه ۱۳۸۵ هـ ش کال کې فارغ اودکانکورله لارې دننګرهارپوهنتون دښوونې او روزنې دپوهنځي په ریاضي. فزیک څانګه کې شامل اوپه ۱۳۹۰هـ ش کال له نوموړي پوهنځي څخه په اعلی درجه فارغ شواودهمدې کال په اخرکې دازادرقابت له لارې د ننګرهارپوهنتون دساینس پوهنځي دفزیک په څانګه کې داستاد په صفت مقررشو. په ۱۳۹۷ هـ کال کې دازاد رقابت له لارې دهندوستان هیواددماسترۍ بورس ته کامیاب شو اودګوا پوهنتون څخه دماسترۍ سندترلاسه کولووروسته ګران هیواد ته راستون شوچې فعلا ننګرهارپوهنتون ساینس پوهنځي فزیک دیپارتمنت کې دتدریس چارې مخکې بوځي.

محترم استاد ته داوږدژوند غوښتونکی یم اودالله له درباره ورته ښه صحت غواړم.

Abstract

This is a quantum mechanics textbook for the third semester of B.Sc. of Pune University, India, written by four authors. The main purpose of the book is to provide a foundation as well as a comprehensive background in quantum mechanics. The subject matter has been arranged systematically and methodically. The language used is very simple for the students to understand the subject easily. Throughout the book, the mathematics has been kept as simple as possible. Many simple problems of all types and grades have been included. Each chapter consists of a sample set of problems with detailed solutions, and a further set of problems with answers for practice. Every attempt has been made to maintain accuracy in theory as well as in numerical problems.

This textbook has five chapters. In the first chapter, the historical background and initial development of quantum mechanics are discussed; blackbody radiation and photoelectric effect (discussion without derivation); Wave particle duality, wave packets, phase velocity, and group velocity Discussion on the uncertainty principle with thought experiments Various types of uncertainty relations In chapter 2, physical interpretation of the wave function, requirements of the wave function The Schrodinger wave equation (time dependent and time independent, examples in one, two, and three dimensions), probability density and probability current density equation of continuity, operators in quantum mechanics, the Hamiltonian operator, energy Eigen values and Eigen functions, expectation values, and Ehrenfest theorems. In chapter 3, the hermicity of operators corresponding to observables in quantum mechanics, position, linear momentum, Hamiltonian, angular momentum operators, commutator brackets involving positions, linear momentum and angular momentum operators, raising and lowering operators, In Chapter 4, application of the time independent Schrodinger wave equation to: a free particle, step potential, potential barrier, particle in a rigid box (one, two, or three dimensions), finite one dimensional potential well one-dimensional harmonic oscillator with a high degree of excitation that corresponds to classical results. In chapter 5, energy eigen functions and eigen values for a rigid rotator with a free axis and with a fixed axis, separation of the solution to the Schrodinger equation for a spherically symmetric potential are discussed. The radial and angular parts of the bound state energy Eigen functions for the hydrogen atom degeneracy quantum numbers n, l, ml, and ms are discussed qualitatively.

غیر طبي چاپ شوي کتابونه (زراعت، انجنيري، اقتصاد، ښوونې او روزنې، ساینس او ژورنالیزم) ۲۰۱۵-۲۰۲۱

1	عمومي رياضيات	پوهنوال گل محمد جنت زی	خوست	2	د عالي رياضياتو عمومي کورس	پوهندوی محب الرحمن جنتي	ننگرهار
3	عالي کلکولس I، A 434 رياضي	پوهندوی حمیدالله یار	ننگرهار	4	عالي کلکولس II	پوهندوی نظر محمد	ننگرهار
5	د نفوسو جغرافیه	پوهنوال لطف الله صافي	ننگرهار	6	فزیکی کیمیا II، الکترولیتی محلولونه او الکتروکیمیا	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننگرهار
7	فزیکی کیمیا III، کیمیاوی کنتک او کتلسس، کروماتوگرافي او اسپکتروسکوپي	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننگرهار	8	د ژویو فزیولوژي	پوهاند غنچه گل حبیب صافی	ننگرهار
9	د ودانیو د تودولو تخنیک، لومړی برخه، د سون تخنیک	داکتر غلام فاروق میر احمدی	ننگرهار	10	د متیورولوژی مبادی	پوهنوال عبدالغیاث صافی	ننگرهار
11	معیار های جدید اعمار ساختمان	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	ننگرهار	12	چگونگی مصرف انرژی در ساختمان های رهایشی	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	ننگرهار
13	الجبر او د عددونو تیوری، لومړی برخه	سطان احمد نیازمن	ننگرهار	14	د ژوند چاپیریال	پوهاند عارف الله مندوزی	ننگرهار
15	د اوسپیز کانکریټي عناصرو د لومړی صنفي کار متودیکي لارښود	پوهندوی انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار	16	جامداتو میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
17	عضوی کیمیا،کړیوال ترکیبونه	پوهاند دوکتور محمد غوث حکیمي	ننگرهار	18	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات، لومړی ټوک	ډیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار
19	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات، دویم ټوک	ډیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار	20	کیمیايي عنصرونه، لومړی ټوک	محمد طاهر کاڼی	ننگرهار
21	کیمیايي عنصرونه دویم ټوک	محمد طاهر کاڼی	ننگرهار	22	د اقتصاد او تجارت اصطلاحات (انگلیسی-پښتو تشریحی قاموس)	پوهنیار عبدالله عادل او امان الله ورین	ننگرهار
23	خطي الجبر	داکتر عبدالله مهمند	ننگرهار	24	روانشناسی و ضرورت آن در جامعهٔ افغانستان	داکتر اعظم دادفر	کابل پوهنتون
25	مبادی اقتصاد زراعتی	پوهاند ولی محمد فائز	بلخ	26	اساسات هندسه ترسیمی مسطح	پوهنوال سید یوسف مانووال	بلخ
27	تأسیسات و تجهیزات تخنیکی ساختمان	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	پولی تخنیک کابل	28	د رادیويي خپرونو تولید	پوهنوال دوکتور ماسټر واحدي	خوست
29	د خاورې تخریب او د چاپیریال ککړتیا	پوهنیار محمد حنیف هاشمي	خوست	30	تیوری و سیاست بودجه عامه	پوهنوال داکتر سید محمد تینگار	کابل
31	حیوانات مفصلیه	پروفیسور داکتر دیپلوم علی آقا نحیف	هرات	32	عضوي کیمیا، د اروماتیک او هیتروسیکلیک برخه	پوهنوال دوکتور گل حسن ولیزی	کابل
33	د پروژې تحلیل او مدیریت	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	34	د انجنیری میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
35	کلکولس او تحلیلي هندسه، لومړی برخه	پوهندوی سید شیر آقا سیدي	ننگرهار	36	کلکولس او تحلیلي هندسه، دوهمه برخه	پوهندوی سید شیر آقا سیدي	ننگرهار
37	د کرنیزو محصولاتو بازار موندنه	پوهاند محمد طیب	ننگرهار	38	کارتو گرافی با اساسات توپوگرافی	پوهنوال دوکتور محمد طاهر عنایت	ننگرهار
39	انرژي سمپا کوونکي ودانۍ	انجنیر اسد الله ملکزی	ننگرهار	40	د موادو مقاومت	پوهنمل بهرام امیری	خوست
41	فزیکی کیمیا گازونه او کیمیاوی ترمودینامیک	پوهاند خیر محمد ماموند	ننگرهار	42	اطلاعاتو ته د لاسرسي لارې چارې	دانش کروخیل	ننگرهار
43	حیاتي جغرافیه	پوهاند لطف الله صافي	ننگرهار	44	د فاصله اوبو انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقی	ننگرهار
45	د ریاضي په هکله خبرې اترې	سلطان احمد نیازمن	ننگرهار	46	اقتصادي جیولوجي (کانپوهنه- فلزي کانونه)	پوهاند دوکتور شریف الله سهاک	ننگرهار
47	گروه های اجتماعی بسته (مطالعه جامعه شناختی سکتها)	داکتر احمد سیر مهجور	کابل پوهنتون	48	گرم شدن کره زمین	محمد نعیم نسین	بلخ
49	الجبر او د عددونو تیوري دوهمه برخه	سلطان احمد نیازمن	ننگرهار	50	اعمار ساختمانها (اساسات، مواد و سیستم ها)	پوهندوی انجنیر امان الله فقیری	کابل پولیتخنیک

51	په سیول انجنیري کې د اټوکډ استعمال	پوهنوال میا پاچا میاخیل	ننگرهار	52	وترینری عمومي پتالوژي	پوهندوی محمد طاهر کاکړ	ننگرهار
53	انجنیري جیودوزي (سروې)	پوهندی گل حکیم شاه سیدی	ننگرهار	54	جیومورفولوژي	پوهنوال عزت الله	ننگرهار
55	د تلویزیوني خپرونو تولید	پوهنوال داکتر ماستر واحدی	خوست	56	اوسپنیز کانکریټي عناصر ، لومړی برخه	پوهنوال دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
57	زولوجي فقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار	58	زولوجي غیرفقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار
59	د تهداب انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقی	ننگرهار	60	الجبر معاصر	داکتر عبدالله مهمند	بلخ
61	رهنمود موثریت حفظ انرژی در تعمیرات	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	کابل	62	معاصر الجبر	داکتر عبدالله مهمند	خوست
63	آلماني د افغانانو لپاره	داکتر یحیی وردک	ېبلاېبل	64	د افغانستان د پوهنتونونو د درسی کتابونو چاپول	داکتر یحیی وردک	ټولو ته
65	آلمانی برای افغانها به دری	داکتر یحیی وردک	ېبلاېبل	66	د پروژې مدیریت په عمل کې	محمد داود علم او یو اف . گهل	ننگرهار
67	صنعتي اقتصاد	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	68	نباتي فزیولوژي لومړی جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست
69	نباتي فزیولوژي دوهم جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست	70	د ساختمانونو تحلیل (لومړی برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار
71	د ساختمانونو تحلیل (دویمه برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار	72	د مهندسانو د پاره ساختماني ستاتیک زده کړه	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار
73	د ساختمان د جوړلو طریقې (لومړی برخه)	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار	74	د ساختمان د جوړلو طریقې (دوهمه برخه)	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار
75	سیټونه او هرڅه د هغوی په هکله	لیف بوکوفسکی/ سلطان احمد نیاز من	ننگرهار	76	د لویو لارو د هندسي عناصرو ډیزاین	پوهنیار انجنیر م. شاکر فاروقي	ننگرهار
77	د سرخلاصو کانالونو هایدرولیک	پوهنوال میاپاچا میاخیل	ننگرهار	78	د جوړښتونو تحلیل (لومړی برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
79	د جوړښتونو تحلیل (دوهمه برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	80	د ریاضي منطق	سطان احمد نیازمن	ننگرهار
81	۴۵ انجنیري درسي کتابونه	ټول پوهنتونونه	ننگرهار	82	د اوبو رسولو انجنیري	پروفیسور انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار
83	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین (دویمه برخه، لومړی ټوک)	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار	84	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین (دویمه برخه، دوهم ټوک)	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
85	د انجنیری اساسی ریاضی (دوهمه برخه)	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننگرهار	86	د انجنیری اساسی ریاضی (لومړی برخه)	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننگرهار
87	د اقتصادي پرمختیا تیوري	پوهاند محمد بشیر دویال	ننگرهار	88	د تحلیلی هندسه لومړی برخه	سید شیر اقا سیدی	ننگرهار
89	عمومي تخنیکي رسم	پوهیالی فضل اکبر	ننگرهار	90	کید او گرافیک	پوهنوال دیپلوم انجنیر بهاوالدین جلالي	ننگرهار
91	د اقتصاد د علم اساسات	شیرخان حساس	ننگرهار	92	نړیوالې ټولنې	احسان الله آرینزی	ننگرهار
93	اقلیم پوهنه	پوهاند عزت الله سایل	ننگرهار	94	د طبیعي علومو انگلیسي-پښتو قاموس	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی څدران	ننگرهار
95	پیداگوژي	پوهنیار راز محمد فیضي	ننگرهار	96	د جوړښتونو تحلیل (دریم برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
97	د اوبو لگولو انجنیری	پوهندوی دېپلوم انجنیر اصغر غفورزی	ننگرهار	98	د انسان فزیولوژي او اناټومي	عبدالملک پرهېز	ننگرهار
99	نیماتولوژدي	پوهنوال حسین آرمان	ننگرهار	100	د کورنیو الوتونکو د روزنې اساسات	پوهاند میر حالم نیازی	ننگرهار
101	د سازماني اړیکو مدیریت	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	102	د کرنې تشریحي قاموس	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار
103	حیواني تغذیه لومړی برخه	پوهندوی روزي خان صارق	ننگرهار	104	حیواني تغذیه دوهمه برخه	پوهندوی روزي خان صارق	ننگرهار
105	وترېنري داخله	پوهندوی پیر محمد ستانکزی	ننگرهار	۱۰۶	وترنري فارمکولوژي	پوهنوال محمد بایر درمل	ننگرهار
107	کوانتم میخانیک	پوهنیار اکرام الله وقار	ننگرهار	۱۰۸	د جرمني ژبې اسانه زده کړه، له اساساتو نه تر ادبیاتو پورې	داکتر اکرم ملکزی	ننگرهار

109	رهبري له تيوري تر عمله	پوهنيار محمد عرفان قريشي	ننگرهار	۱۱۰	عامه اقتصاد	پوهندوی ريحان الله رحيمي	ننگرهار
111	د ځيرنې ميتودولوژي	پوهنيار نثار احمد مصلح	ننگرهار	۱۱۲	د بشري سرچينو مديريت	پوهنمل مصور فقيرزى	ننگرهار
113	مرکزي بانگ او پرمختللې پولي سياستونه	پوهاند دوکتور عبدالقيوم عارف	خوست				

تطبيق كوونكى: ډاکټر يحيى وردگ، د لوړو زده کړو وزارت ، څلورمه کارته، کابل افغانستان، مارچ ۲۰۲۲
موبايل:۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۷۳۲۰۸۴۴، ايميل: info@ecampus-afghanistan.org, www.mohe.gov.af
ټول کتابونه له دې ويبپاڼو څخه ډونلوډولای شئ: www.ecampus-afghanistan.org

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine.

For this reason, we have published 365 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism, and Agriculture from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic, and Kabul Medical universities. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 230 medical and non-medical textbooks so far.

I would like to cordially thank Chancellor of Universities, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally, I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz and Fahim Habibi in the office for publishing and distributing the textbooks.

Dr. Yahya Wardak

Ministry of Higher Education, Kabul, Afghanistan, May, 2022

Mobile: 0706320844, 0780232310

Email: info@ecampus-afghanistan.org

Book Name	Quantum Mechanics
Translator	Teach Assist Ikramullah Waqar
Publisher	Nangarhar University, Faculty of Science
Website	www.nu.edu.af
Published	2022, First Edition
Copies	1000
Serial No	361
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning translator and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Karte – 4, Kabul
Office 0780232310, 0706320844
Email info@ecampus-afghanistan.org

Printed in Afghanistan 2022

ISBN 978-9936-633-95-7