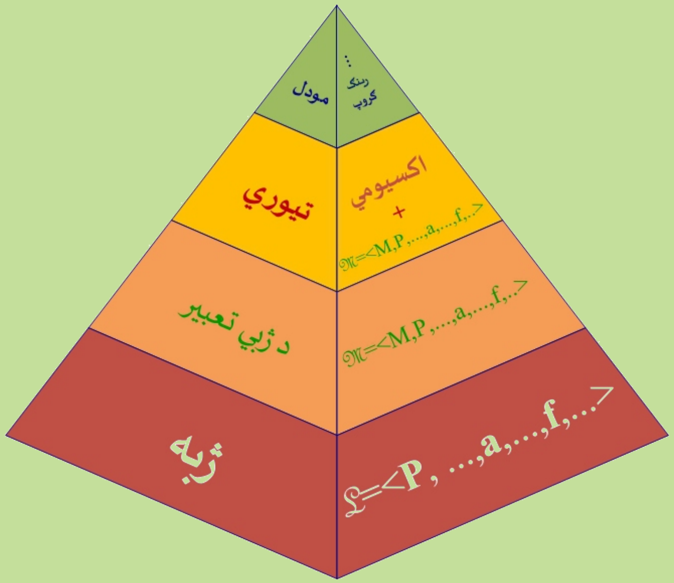
ښوونې او روزنې پوهنځی

د رياضي منطق



سلطان احمد نيازمن

د رياضي منطق

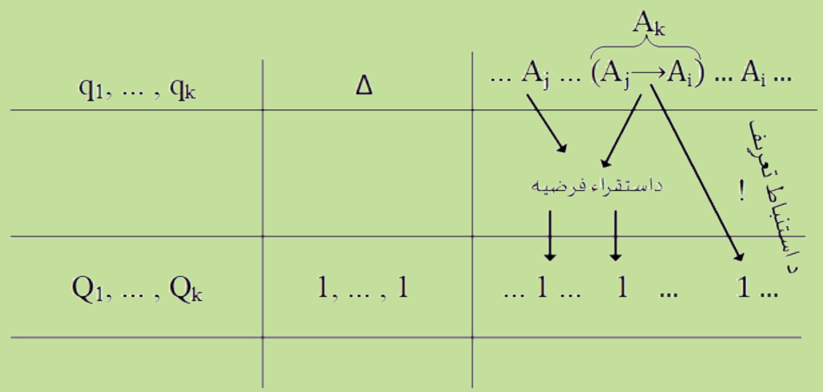
سلطان احمد نيازمن

Education Faculty

Afghanic

Sultan Ahmad Niazman

Mathematical Logic

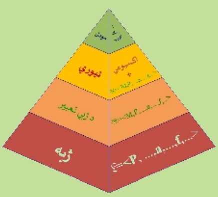


ISBN 978-9936-633-98-8

2022

د رياضي منطق

سلطان احمد نیازمن



Education Faculty

ښوونې او روزنې پوهنځی

Pashto PDF
2022

افغانیک
Afghanic

Mathematical Logic

Sultan Ahmad Niazman

Download:
www.kitabona.com
www.ecampus-afghanistan.org

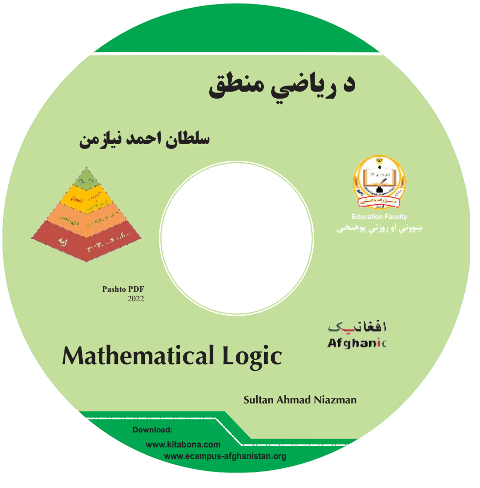
اقرأ باسم ربك الذي خلق

د رياضي منطق

سلطان احمد نيازمن

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ايف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:



د کتاب نوم د رياضي منطق
ليکوال سلطان احمد نيازمن
خپرندوی شيخ زايد پوهنتون، خوست، ښوونې او روزنې پوهنځی
وېب پاڼه www.szu.edu.af
د چاپ کال ۱۴۰۱، لومړی چاپ
چاپ شمېر ۱۰۰۰
مسلسل نمبر ۳۳۰
ډاونلوډ www.ecampus-afghanistan.org
www.kitabona.com

دا کتاب د مېرمن دوکتور ب. ظريف لخوا تمويل شوی دی.
اداري او تخنيکي چارې يې په آلمان کې د افغانيک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او ليکنې مسئوليت د کتاب په ژباړن او اړونده پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبيق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤليت نه لري.

د تدريسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړيکه ونيسئ:
ډاکتر يحيی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کارته ۴، کابل
موبايل ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴
ايمېل textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان ۹۷۸-۹۹۳۶-۶۳۳-۹۸-۸

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمېر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاسرسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

موږ تر اوسه پورې د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل پوهنتون، د کابل طبي پوهنتون او د کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۳٦۵ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالېزم او کرهنې پوهنځیو لپاره چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړوندو پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او موسساتو ته په وړیا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.afghanistan-ecampus.org او www.kitabona.com ویب پاڼې څخه ډانلوډولی شئ.

دا کړنې په داسې حال کې ترسره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کــړو وزارت د (۲۰۱۰ -۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده، چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي، د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دغو امکاناتو پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاسرسی نه شي پیدا کولای."

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هېواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچرنوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره اړینه ده چې د افغانستان پوهنتونونو لپاره هر کال لږ تر لږه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو درنو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، ویې ژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچرنوټونه او چپټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زموږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو ته په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو ټکو په اړه خپل وړاندیزونه او نظریات له موږ سره شریک کړي، چې په ګډه په دې برخه کې اغېزمن ګامونه پورته کړو.

د لیکوالانو او خپروونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، چې د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو پر اساس برابر شي، خو بیا هم کېدای شي د کتاب په محتوا کې ځینې تېروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله لرو چې خپل نظریات او نیوکې لیکوال او یا موږ ته په لیکلې بڼه راولېږي، چې په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

له مېرمن دوکتور ب. ظریف نه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی.

د پوهنتونونو رییسانو، د پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له لیکوال څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو - کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو؛ ښاغلي حکمت الله عزیز او ښاغلي فهیم حبیبي څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک

د لوړو زده کړو وزارت، کابل، اپرېل، ۲۰۲۲

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ایمیل: textbooks@afghanic.org

فهرست

سریزه

کله چي د منطق په هکله ږغیږو ، نو لږترلږه د استنباط دعلم په صفت به د هغه ریښو ته یوه لنډه کتنه وکو. د منطق ریښي تر پخواني هند ، چین او لرغوني یونان پوري رسیږي. پدي هکله د ارسطو اثر ارګانون Organon یو د لمړیو اثارو څخه دي ، چي څه نا څه د لسو پیړیو دپاره په ریاضیاتو او نورو علومو کي منل سوی معیار ؤ.د ارسطو همدغه اثر د عیسوی او اسلامي فیلوسوفانو لکه بوتیوس (د مړني کال 524 م) ، ابن سینا (د مړني کال 1037م) او ویلیم د اوکهام څخه (د مړني کال 1347 م) د منطق د انکشاف دپاره د څیړنو اساس ؤ. په عین حال کي په ریاضي کي د ثبوت لمړي طریقي د میلاد څخه دری سوه کاله مخکي د اقلیدس د ښونځي معیارؤ.داقلیدس اکسیوماتیکه هندسه تر هغه وخته پوری چي غیر اقلیدیسي هندسه نه وه کشف سوی ،په هندسه کي یوازنی اکسیوماتیکي سیستم ؤ. که څه هم ریاضی پوهانو د اقلیدیس د هندسي د اکسیوماتیکي سیټم پنځمی اکسیومی ته د تردید په نظر کتل خو په عین حال کي د ریاضي پوهانو هڅه د تیوري د بشپړتوب او د هغوی د نقض څخه د پاکوالی د مسئلی په هکله په نولسمه پیړۍ کي لمړي څیړني را پیل کیږي.

په اولسمه پیړي کي ګوتفرید ویلهلم لایبنیخ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) لمړنی ریاضي پوه ؤ چي د عمومي ژبی د اختراع په فکر کي ؤ ، چي په هغه کي ټول ریاضیات ارائه او ثبوتونه په صوري بڼه راوړل سي. خو د نولسمي پیړۍ تر نیمایي پوری د لایبنیخ مفکوره یوازي یو خوب او خیال پاته سو. د ارسطو د بیان د منطق لمړي الجبری بڼه د جورج بول G.Bool (1847) او ډی مارګن de Morgan (1858) د څیړنو نتیجه وه. وروسته ګوټلوب فریګه Gottlob Frege (1879) او چارلس ساندرز پییرس Charles Sanders Peirce(1885) د پریدیکات منطق د الجبر په چوکاټ کي راوړل.

زه ډیر خوښ یم چي وطنوالو ته د ریاضي د بنسټیزو د ور پیژندلو په لړ کي یوه بله ډیره مهمه برخه، چي هغه د ریاضي منطق دی ، په مورني ژبه وروپیژنم. کتاب پنځه فصلونه لری. په لمړیو دوو فصلو کي د بیان او د پریدیکات الجبرونه معرفي سویدي. د بیانو د رشتیاوالي تعبیرونه ، دبیان په الجبر کي ثبوت او د هغه پر بنسټ په ریاضي کي د ثبوت طریقي ، د بیان د الجبر نغښتنه او بشپړتوب ، د بیانو نارمله بڼه او د بول الجبرې د لمړی فصل محتوی تشکیلوی. په دوهم فصل کي دبیان تابع، د فارمول تعریف ، د ژبي تعبیر او د تیوری اودمودل په هکله بحث سوی دي. دپریدیکات په الجبر کي ثبوت ، د ثبوت طریقي د متحول د موجودیت په صورت کي ، په لنډ ډول څیړل سوی دي. ددی فصل وروستي موضوع د مساوات د پریدیکات شمولیت په تیوري کي او دهغه خاصیتونه تشریح کوي.

دریم فصل په ریاضیاتو کي مشهوري تابع ګانی ، راستنیدونکي تابع ګانی او د پروګرام د جوړولو او د لمړیو الګوریتمو پیژندنه د تیورینګ د ماشین په بڼه تاسوته در پیژني.

د ریاضي پوهانو هڅه نه یوازی د ریاضیاتو فورمالیزیشن دی بلکه د نورو علومو ، طبیعي پدیدو او د هغوی د قوانینو ارائه د ریاضي په ژبه کي، د هغوی د څیړنو مهم اړخ

تشکیلوی. دنړي د وروستيو کلو پرمختګ ، په ژوند کي د کمپیوټرو د رول اهمیت او بلاخره مصنوعی زیرکتوب هغه موضوعات دي چي د فلسفي مقولو لکه ضرورت او امکان او یا د وخت د مفهوم فورمالیزیشن تحمیلوی. د کتاب څلرم او پنځم فصل په ډیر لنډ ډول و ذکر سو موضوعاتو ته د شرطي منطق او د وخت د منطق په چوکاټ کي یو ډیر سرسري نظر اچوي.

په 1935 کال کي په فرانسه کي یوګروپ فرانسوی ریاضي پوهان سره یوځای سول او د نیکولا بورباکی Nicola Bourbaki تر مستعار نامه لاندی د ریاضیاتو په ټولو برخو کي د کتابو چاپ پیل کړل.ډاکټر صاحب یحیی وردګ د افغانستان پوهنتونونه نه یوازي د ریاضي په کتابو بلکه د طب او نورو ساینسی علوموپه کتابو سامبال کړل. د ډاکټر صاحب وردګ نه ستومانیدونکي هڅي ډیر د قدروړ او نه هېریدونکي دي.
سلطان احمد نیازمن
مارچ ۲۰۲۲

لمړئ فصل

دبیان منطق

دمخه تردي چي بیان او پر بیانو باندي عملیې تعریف کو، یوڅو ډیري ابتدایې مفکوري به وڅېړو .

زموږ کوچنیان چي په لوست شروع وکړي ، نو یا په مسجد کي دسیپاري د لاري د عربی الفباء سره، چي 28 توري لری، اویا د ښوونځي په لمړي ټولګي کي د پښتو ژبي د الفباء سره ، چي 45 توري لری ،معرفي کېږي ، اولین توري (حرفونه) سره جنګوي او د هغوی څخه معنی لرونکی کلمي جوړوي . د بېلګي په توګه آس، بابا، ډوډي، باران، غویي ،... . وروسته له هغه معنی لرونکي کلمي په "معقول" ډول یودبل په څنګ کي سره اوډی او معنی لرونکي جملي ځني جوړوی .د بېلګي په ډول: باران اوری، مځکه لنده ده،توره شپه، .... ځینې جملي دي ، چي په لوستلو یا اوریدلو سره یې سمدلاسه زموږ په ذهن کي د هغه د حقیقت یا درواغ د قضاوت احساس راپارول کېږي او غواړو چي سمدستی دهغي جملي محتوا زموږ د ذهن څخه بهر د عینی نړي سره پرتله او د هغه حقیقت او یا غیر حقیقت ځانته څرګند کو. د بېلګي په توګه که څوک ووایې، چي باران اوری، نو سمدلاسه تر کړکي بهر ګورو، چي آیا دا رشتیا دي او که درواغ.

مخکي مو اشاره وکړه،چي معنی لرونکي کلمي په "معقول " ډول سره اوډی ،دلته معقولیت په هره ژبه کي د هغي ژبي پر ګرامري اصولو(نحو) ولاړ دي .موږ به دلته دهغه دپاره د لاتینی کلمي سنتکس Syntax څخه کاروا‌خلو. په سنتکس کي موږ ته د جملي جوړښت په خپل ذات کي په زړه پوري دي ، د جملي معنی او محتوا ته اهمیت نه ورکوو.هر کله چي د جملي معنی او محتوا راته په زړه پوري سي ، نو هغه وخت د هغي جملي سیمانتیک Semantics څېړو. د جملو د سیمانتیک د څېړلو په وخت کي باید داحتیاط څخه کاروا‌خلو ، داسي نه وي چه د تنقیض (پارادکس) سره مخامخ سو. ښه بېلګه یې د لرغوني یونان د فیلوسوف ایپیمنیدس Epimenides ، چي تر میلاد لږ تر لږه پنځه پېړي مخ کي یې ژوند کړي دي، پارادکس دي. د هغه پارادکس په لاندي ډول دي:

کریټا د لرغوني یونان د جزیرو څخه یوه جزیره ده. یوه ورځ د کریټا د جزیري اوسیدونکي یوی حجري ته چي ډیر نور فیلوسوفان هم پکښی ناست وه،ور داخل سو او ویې ویل چي «د کریټا ټول اوسیدونکي درواغ وایي» . حاضرین ټول حېران پاته سوه چي دغه جمله څه ډول تعبیر کي؟ که دده خبره رشتیا وی ، نو دی هم د کریټا دی ، پدی معنی چي دی هم درواغ وایي، پدي معنی چي جمله یې درواغ ده .که دی درواغ وایي ، نو دغه جمله چي په مجلس کي یې وویله ، رشتیا ده. څرنګه چي دی د کریټا اوسیدونکي دی ، باید تل درواغ ووایي

، بیانو دغه جمله رښتیا نده .دغه جمله په عین وخت کي هم درواغ ده او هم رښتیا .دلته کلام (جمله)او متکلم یې یو دبل پر ضد ولاړدي .

§1.بیان او پرهغه باندي عملیې

اوس به ورو ورو خپل ځانته یوه نوی ژبه جوړه کړو او هغي ته به وروسته پراختیا ورکړو. په اوسني حالت کي زموږ ژبه ، د تورو په صفت ،د لاتینی الفباء کوچني حروف ، یعنی c,b,a...،چي شمېر یې 26 دی ، 0 ، 1، قوسونه () او د ¬,∧,∨,→,↔ نښې په ځان کي لري .په جولیز یا صوري بڼه یې په لاندي ډول لیکم.

$\mathfrak{L}$=< a,b,c,...,0,1,(,), ¬,∧,∨,→,↔ >

اوس به په دغه مصنوعي ژبه کي څو شډلې کلمې جوړی کو. دبېلګی په ډول ¬r→1(q))، bp()0، (a) ، ... او داسي نور .لمړئ خو باید دکلمو د جوړولو دپاره اصول طرح کو، او بیا ددي دپاره چي کلمو ته یوه معنی ورکړو او د هغو کلمو څخه بیا داسي جملی جوړی کو ، چي دهغه په ذریعه افهام او تفهیم هم وکولای سو، نو بشری ژبی ته(زموږ په حالت کي د پښتو ژبې ته) ضرورت دی. دواړه کارونه به څنګ پر څنګ مخ ته یوسو.

لکه چي په مقدمه کي مو اشاره ورته وکړه ، د ځینو جملو په اوریدو او یا لوستلو زموږ په ذهن کي د قضاوت احساس را پارول کېږي او غواړو چي پوه سو چي آیا دا جمله حقیقت لری او که نه؟ هغه ابتدائي مفهوم چي د نوموړو دوو ژبو ترمنځ اړیکه تینګوي "بیان" دي.

تعریف 1.1 . د پښتو ژبي هره ابلاغیه جمله ،چي د هغي په هکله د رښتیا او درواغ قضاوت کولای سو ، د **بیان** Proposition په نامه یادیږي.

بیان په کوچنیو لاتینی حرفو سره څرګندوو .

بیلګي 1.1 .

a- باران اوري.
b- مځکه لنده ده.

p- 1+1=2 .

q- 2+3=1.

د a او b بیانونه د پښتو ژبي ساده جملی دی، چي د هغوی د حقیقت او یا غیر حقیقت په هکله قضاوت کولای سو.د p او q بیانونه اصلاً په حساب او یا اریتمتیک اړه لري. پدی معنی ، چي زموږژبه عمومي بڼه لری ، نه یوازي د ریاضي په ټولوبرخو کی بلکه په نورو علمو کي یې هم د تطبیق امکانات سته .که زموږ د ژبي محتوی ته ځېرسي، نو هلته د "0" او "1" نښي یا سمبولونه شامل ، قصداً یې د سمبولو یا نښو په نامه یادوم ، ځکه چي د یوه او صفر سره لا تر اوسه نه یو معرفي سوي.که بیان حقیقت ولری ، نود هغه په مقابل کي "1" ایږدو او

برعکس که بیان حقیقت ونلري ، یعنی درواغ وي، نو دهغه په مقابل کي "0" ایږدو. موږکولای سوای د "1" او "0" پر ځای د انګلیسي د حرفو (True)"T" او

"F" False څخه کار اخیستئ وای. بیاهم د یادولو وړ بولم ، چي زموږ "1" د نښي په صفت د p د بیان په اړوند د طبیعی عدد 1 سره هیڅ اړیکه نلري. په 1.1 بېلګه کي د p,b,a بیانونه حقیقت لري، خو د q بیان د طبیعي عددو په مودل کي حقیقت نلري، خو که د مودل څخه مو هدف mod_4 وي ، نو دq بیان هم حقیقت لري .وګورئ چي د بیان د تطبیق د عملی کېدوساحه ډیر مهم رول لري.

که د p او q دوه بیانونه راکړه سوي وي، بیانو هغوي په معقول ډول اوډلای سو، دغه معقولیت د عملیو په بڼه تعریفو. هغه بیان چي دوو بیانو د اوډلو په نتیجه کي لاسته راځي ، باید دهغوی د رشتیاوالي یا درواغ والي په هکله هم قضاوت وکولای سو.ددی موخي دپاره یوه بله وسیله ، چي هغه عبارت د حقیقت د جدول Truth Table څخه دي، زموږ د وسایلو په زیرمه کي خوندی کوو.

تعریف 2.1. د p د بیان نفی Negation عبارت د هغه بیان څخه دي چي یوازي او یوازي هغه وخت حقیقت لري، چي د p بیان درواغ وي. د p د بیان نفی په ¬ سره ښیو . د نفی عملیه د لاندني جدول په ذریعه څرګندوو:

p	¬p
1	0
0	1

جدول 1.1

پورتنئ جدول یوازي دوه ستونه او د عملیې د قیمتو دوي کرښې لري.ځکه چي د p بیان یوازي دوه قیمته اخیستلای سی او هغه داچي یا به رشتیاوی یا درواغ (یعني 1-0).
په راتلونکی کی به د نفی عملیه او هغه بیان چی د نفی د عملیی په نتیجه کي لاسته راځی ، د (نه) په حرف سره افاده کوو.

بیلګه 2.1. که د p بیان عبارت له ''تخته توره ده'' وی.
د p¬ بیان عبارت دی له : تخته توره نه ده.
که ووایو چی د p¬ بیان عبارت دی له : تخته سپینه ده ، نو د نفی عملیه به مو غلطه عملی کړی وي (ولي ؟) .

تعریف 3.1. د pاو q دوو بیانو منطقی ضرب Conjunctionیوازي او یوازي هغه وخت رشتیا دی چی په عین حال کي دواړه بیانونه رشتیا وي.

ددوو بیانو د منطقی ضرب عملیه په ریاضی کي په(∧) او د پښتو په ژبه کي د (او) په کلمي سره افاده کوو. یعنی $p\wedge q$ (p او q)ویل کېږي. د تعریف له مخي د p او q د بیانو د منطقی ضرب جدول په لاندي ډول سره دي :

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

جدول 2.1

پاملرنه وکي ، چي دلته زموږ جدول دري ستونه او د عمليي د قيمتو څلور کرښي لري .داځکه چي:

الف) د pاو q دواړه بیانونه به رشتیا وي،نو د هغوی قیمتونه به [1-1] وي.
ب) د p بیان به رشتیا او د q بیان به درواغ وي، یعنی دهغوی قیمتونه به [1-0] وي.
ج) د p بیان به درواغ او د q بیان به رشتیا وي، یعنی دهغوی قیمتونه به[0-1] وي.
د) د pاو q دواړه بیانونه به درواغ وي،نو د هغوی قیمتونه به[0-0] وي.

بېلګه 3.1. د ننګرهارد پوهنتون د طب د پوهنځي په لمړي سمستر کي 150 محصلين درس لولي او آس يو څلور پښي لرونکۍ حيوان دي .دلته د p او q بیانونه عبارت دی له:
p- د ننګرهارد پوهنتون د طب د پوهنځي په لمړي سمستر کي 150 محصلين درس لولي.
q- آس يو څلور پښي لرونکۍ حيوان دي.

طبعاً پوښتنه کېږي، چي د ننګرهار د پوهنتون د طب د پوهنځۍ د لمړي سمستر د محصلينوشمېر د آس د څلورو پښو درلودلو سره څه اړیکه لري؟

پدي ببلګه کي مي غوښتل چي بياهم د بيان پر جولېزه اړخ ټينګار وکم.دلته بياهم يوازي د ترکيبي بيان، چي ددوو بيانو څخه ترکيب سوی دي، د رشتيا او درواغ مسئله مطرح ده. نه دهغوی محتوی او د هغوی ترمنځ اړيکه!

تعریف 4.1. د pاو q دوو بیانومنطقی جمع Disjunction یوازي او یوازي هغه وخت درواغ دي، چي دواړه بیانونه درواغ وي .

ددوو بیانو منطقي جمع په رياضي کي په(V)اود پښتو په ژبه کي د(یا) په کلمه سره افاده کوو، پدي معنی،چي pVq (p یا q) ويل کيږي.ددوو بیانو د منطقي جمع د رشتياوالي جدول په لاندي ډول سره دي:

p	q	pV q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

جدول 3.1

بیلګه 4.1. تورپيکي به سبا کابل ته سفر وکي یا هرات ته سفر وکي.

پدي بېلګه کي:

p- تورپيکی به سبا کابل ته سفر وکي.

q- تورپيکی به سبا هرات ته سفر وکي.

پدي بیان کي pVq په ځانګړي exclusive بڼه ، يعنی په جدول 1.3 کي لمړي کرښه حذف کيږي ،په کار اچول سوی دي.پدی معنی ، چي په ورځني ژوند کي د دوو امکاناتو څخه يې يو ټاکو. موږ به د منطقي جمع څخه د شموليت inclusive په بڼه کارواخلو. يعنی عمليه به د جدول سره مطابق عملی کوو .

تمرين 1.1. په ځانګړي بڼه کي به د منطق د جمع جدول څه ډول وي؟

بېلګه 5.1. طبیعي عدد 7 تر طبيعي 5 کوچنئ دي یا د کابل ښار د افغانستان پلازمینه ده .

پدي بېلګه کي:

p- طبیعی عدد 7 تر طبيعی عدد 5 کوچنئ دي.

q- د کابل ښار د افغانستان پلازمينه ده.

يعني qVp ، چي د (یا) په کلمه سره نښلول سويدي.

دمخه ترږي، چي د راکړه سوي pاو q پر بیانو باندي بله عمليه تعريف کو ، لاندني بیانونه به و څېړو:

الف)که 1+1=2 وي، نو د ډهلی ښار د هند پلازمينه ده.

ب) که 1+1≠2 وي، نو د ډهلی ښار د هند پلازمینه ده.

ج) که 1+1≠2 وي، نو د جاکارتا ښار د هند پلازمينه ده.

د پورتنيو ترکيبي بيانو مفهوم درست واضح ندي. د هغوی څخه هر يو په لمړي نظر نه رشتيا او نه درواغ برېښي، ځکه چي د هغوی څخه په هر يوه بيان کي موږ د يو ډول اړيکی (معمولاً د سبب Causal يا علت او معلول) په لټه کي يو.په هر يوه کي د لمړي برخي حقيت (علت)ددوهمي برخي د حقيت دپاره(معلول) شرط دي.« که p ، نو q ». پر بيانو باندي ددغي علميې تعريف به د يوه تړون په څېر ومنو .

تعريف 5.1. د pاو q دوو بيانواستنباط Implication (p⟶q) يوازي او يوازي هغه وخت درواغ دی، چي اولي بيان يعنی p رشتيا او دوهم بيان يعنی q درواغ وي .

ددووبيانو د استنباط عمليه په رياضي کي په "⟶" اود پښتو په ژبه کي)که ،.... نو ....(باندي افاده کوو، يعنی p⟶q (که p ، نو q) ويل کېږي. د p⟶q افاده د شرطي Conditional جملي په نامه هم يادېږي او وايو ، چي د p څخه q استنباط کېږي. پدي حالت کي لمړئ بيان يعنی p د مقدمي antecedent او دوهم بيان يعنی q د نتيجي consequent په نامه يادوو. ددوو بيانو د استنباط د عمليي د رشتياوالي جدول په لاندي ډول سره دی:

p	q	p⟶q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

جدول 4.1

د استنباط تر تعريف وروسته د الف)، ب) او ج) د ادعاوو د رشتيوالي په هکله هم قضاوت کولای سو. تر ټولو يې د ج) ادعا په زړه پوري ده .پدي معنی که فرضيه صدق ونه کي، نونتيجه که صدق وکي او که نه، د استنباط د عمليې نتيجه رشتيا ده .
دجدول ورستې دوي کرښې وګورئ .کله چي ددو بيانو د استنباط په هکله ږغېږو ، نو د هغوی ترتيب ، يعنی لمړئ او دوهم بيان ، ډير مهم دي. يودبله سره يې نسو تبديلولای.

د يادولو وړ ده ، چي موږ داستنباط څخه په دوه مفهومه کار اخلو ، يوداچي استنباط صرف د منطقي عمليې په صفت ، چي د جدول په ذريعه تعريف سوی دي او د هغه پر بنسټ زموږ د الف)، ب) او ج) بيانونه تثبتولای سو، او بل د حقيقت استنباط د هغه په ريښتني مفهوم سره. په دغه حالت کي استنباط په «د p څخه q استنباط کېږي»، «q د p څخه استنباط کېږي»،«p د q دپاره کافي شرط دی»، «q د p دپاره لازمي شرط دي » افاده کوو .

بېلګه 6.1. که د يوي مربع د ضلع اوږدوالی يو واحد وي، نو د نوموړي مربع د قطر اوږدوالی $\sqrt{2}$ واحده دي.

پدي بېلګه کي p⟶q :

p- د يوي مربع د ضلع اوږدوالی یو واحد دي.

q- د نوموړي مربع د قطر اوږدوالی $\sqrt{2}$ واحده دي.

تعریف 6.1. د p او q دوو بیانو معادل والی Equivalence یوازي او یوازي هغه وخت رشتیا دی، چي دواړه بیانونه په عین حال کي یا رشتیا وي او یا دواړه درواغ وي .
ددو بیانو معادل والی د ریاضي په ژبه کي په ↔ او په پښتو کي (... یوازي او یوازي هغه وخت ،چي...) افاده کوو. پدي معنی ، چي p↔q (p یوازی او یوازی هغه وخت ، چي q) باندي افاده کوو .د معادل والي عملیه پر دوو بیانو باندي د دوه اړخېزه شرطي بیان biconditional په نامه هم یادېږي .دلته هم د استنباط و عملیي ته ورته د ادعا په ریښتني مفهوم سره وایو «p د q دپاره لازم اوکافي شرط دي»، «q د p دپاره لازم اوکافي شرط دي».

د p او q د دوو بیانو د معادل والي د عملیې د رشتیاوالي جدول په لاندي ډول سره دي:

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

جدول 5.1

بېلګه 7.1. دکاندار ته یوازي او یوازي هغه وخت پیسي ورکوي، چي په مقابل کي یې رانیول سوي شئ تاسوته په لاس درکي .
بېلګه 8.1. غیر خالی سیټ یوازي او یوازي هغه وخت د شمېر وړ دي ،چي په لاړ کي واچول سي (په لاړ و پییل سی[1]).
p- غیر خالي سیټ د شمېر وړ دي.

q- غیر خالي سیټ په لاړ پییلای سو.
پدي معنی، چي p↔q دي.
بېلګه 9.1. یو څلور ضلعي یوازي او یوازي هغه وخت مستطیل دي، چي دواړه قطرونه یې سره مساوي او د هغه د قطرو د تقاطع نقطه ، قطرونه پر دوو مساوي برخو ووېشي .

p- یو څلور ضلعی مستطیل دي.

[1]سیټونه او هر څه د هغوي په هکله ،دریم فصل، قضیه 6.1 [3] وګوري.

q- دواړه قطرونه يې يودبل سره مساوی او د قطرو د تقاطع نقطه، قطرونه پر دوو مساوی برخو وېشي.

که د q بيان ته ځير سي، ليدل کېږي چي يو ترکيبي بيان دي. د q بيان به د r او s په ساده بيانو داسي تجزيه کو:

r- د مستطيل قطرونه يو دبل سره مساوی دي.

s- د مستطيل د قطر د تقاطع نقطه، قطرونه پر دوو مساوی برخو وېشي.

څرنګه چي د q په بيان کي د «او» د کلمي څخه کار اخيستل سوی دي، نو د q بيان عبارت دی، له $r\wedge s$ څخه.بلاخره $p\leftrightarrow r\wedge s$ دي.

پدي ډول مو زموږ د ژبي ټوله نښې ، يعنی $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\leftrightarrow$ پر بيانو باندي د منطقي عمليو په صفت تعريف کړي. د هغوی څخه يوازي د $\neg$ عمليه يوه ئېزه عمليه ده او پاتې عمليې ټوله دوه ئېزه عمليې دي .هره کلمه چي د نوموړو عمليو په مرسته جوړه سي، بيا به هم يا رشتيا او يا درواغ وي . د کلمي روستئ قيمت د ساده بيانو په قيمتو او د عمليو په سرته رسولو سره لاسته راوړای سو .

بېلګي 10.1.

الف) د لاندي بيان د رشتياوالي جدول به ترتيب کو:

$((u\leftrightarrow v)\longrightarrow((\neg u)\wedge v)$

u	v	$(\neg u)$	$((\neg u)\wedge v)$	$(u\leftrightarrow v)$	$((u\leftrightarrow v)\longrightarrow((\neg u)\wedge v)$
1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0

جدول 6.1

ب) د لاندي بيان د رشتياوالي جدول به ترتيب کو:

$((\neg(\neg p\wedge q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q))\wedge 1)$

ددي دپاره چي جدول مود صفحي تر پولو وانه وړي ، نود راکړه سوي افادی کينه برخه به په r سره نښاني کو، يعنی:

$$\underbrace{(\neg(\neg p\wedge q)\leftrightarrow(p\wedge\neg q))}_{r}$$

p	q	¬p	¬q	¬p∧q	p∧¬q	¬(¬p∧q)	r	1	r∧1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0

جدول 7.1

د پورتني جدول ، دښئ خوا څخه ، لمړي او دريم ستون ته پاملرنه وکي!

ج)د لاندي بيان د رشتياوالي جدول به ترتيب کو:

$$(((\neg p)\vee q)\longrightarrow r)$$

p	q	r	(¬p)	((¬p)∨q)	(((¬p)∨q)⟶r)
1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0

جدول 8.1

پدي بېلګه کي وينو چي د ساده بيانو شمېر مو دري او پر هغوی د منطقي عمليو شمېر هم دري دي. ځکه نود رشتياوالي جدول يې شپږ ستونه او اته د عمليې کربښي لري. په عمومي توګه که n ساده بيانونه راکړه سوی وي اوپرهغوی باندي m عمليې سرته رسيدلی وي، نودهغوی د رشتياوالي جدول به m+n ستونه او 2^n دعمليې کربښي ولري .

په پورتنيو بېلګو کي موږ ساده بيانونه د منطقي عمليو په مرسته په معقول ډول واوډل، په نتيجه کي يې ترکيب سوی بيان لاسته راغي اود هغه د رشتياوالي جدول مو ترتيب کي.د جدول په وروستي ستون کي د ترکيبي بيان قيمتونه ثبت دي.ساده بيان کله کله د ابتدائي بيان په نامه هم يادوو .

تمرين 2.1.

1-په لاندنیو جملو کي ساده بیانونه بېل او هغوی ته لاتینی حروف وټاکئ ، نوموړې جملې د ترکیبي بیان په صفت د بیان د عملیو په مرسته سره ونښلوئ.

الف) که ښاغلئ رحمان خوشحاله وي، نو مېرمن يې تورپیکې خوشحاله نه وي ، او که ښاغلئ رحمان خوشحاله نه وي، نو مېرمن يې تورپیکي خوشحاله نه وي.

ب) یا به سمیع واده ته راسي او رېدئ به رانسي او یا سمیع به واده ته رانسي او رېدئ به ځانته خوشحاله وي.
پ) ددی دپاره چی د x عدد طاق وي، کافي ده چي x اولیه عدد وي.
ت) د s د لاړ د تقارب لازمي شرط دادي ، چي د s لاړ باید محدود وي.

ټ) د شیخ د نېکمرغئ لازمی او کافی شرط دادی ، چي هغه ته باید شراب، ښځې او پیسی وروړسېږي .

ج) ادریس یوازی هغه وخت سینما ته ځي، چي په سینما کي کومیډي فلم وي .
ح) که د x عدد مثبت وي ، نو د x^2 عدد مثبت دی.
2- د لاندنیو ترکیبي بیانو د رشتیاوالي جدول ترتیب کي.

الف) $((t \longrightarrow r) \vee (\neg t))$,
ب) $((p \longrightarrow (r \longrightarrow s)) \longrightarrow ((p \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow s))$,
پ) $(\neg b \longrightarrow (c \vee \neg a))$,
ت) $((\neg b \longrightarrow (c \vee \neg a))) \wedge 1)$,
ټ) $(((t \longrightarrow r) \vee (\neg t)) \vee 0)$

§2. ترکیبي بیانونه او د هغورشتیاوالی

تراوسه یوازی د ساده بیانو سره بوخت ؤ. که خپل چاپېریال ته ځیر سو او یوازی د طبیعت هره پدیده د بیان په بڼه فورمولبندي او هغوی زموږ دژبي د الفباء په حرفو نښاني کړو ، نو ډیر ژر به د 26 بیانو تر پولو واوړو .ځکه نو باید خپلي ژبي ته پراختیا ورکړو .ددي اسیته له دی نه وروسته به دبیانو د په نښه کولو په موخه:
ـ د لویو لاتینی حرفو څخه هم کار اخلو، یعنی $Z,Y,X,...,C,B,A$.

ـ کوچني او لوی لاتیني حرفوته به د طبیعي عددو په مرسته اندکس ایږدو، یعنی $Z_n,...,Z_1,...,A_m,....,A_1, ..., p_k,...,p_1$ او داسی نور.

ـ د دي دپاره چې درشتيا والي د جدول د لويوالي مخنيوي مو کړی وي، نوځنی ترکيبي بيانونه د يونانی الفباء په ذريعه ، يعنی Φ,φ,Ψ,ϕ ... اوداسی نور په نښه کوو.

دمخه تردی چي بېلګې راوړو ، ستاسو پاملرنه بېرته زموږ په ذريعه تعريف سوی ژبې ته راګرځوم.ځکه چي په «معقول» ډول د بيانو اوډلو ته بايد اصول طرح کو ، پدي موخه بايد بيان په جولېز ډول تعريف کم.پدي معنی ، چی بيان په رياضي کي تعريفوو.دبيان او پر هغه باندي د عمليو څېړنه د بيان د کالکولس Propositional Calculus دنده ده .موږ به ورته د بيان الجبر ووايو. بيا يې هم درپيادوم ، چي ساده يا وروسته له دی ابتدايي بيان د پښتو ژبې ابلاغيه جمله ده ، چي د هغی د رشتياوالي او درواغ په هکله قضاوت کولای سو. دبيان مفهوم به د استقراء (Inductive) [2] په بڼه داسي تعريف کو:

تعريف 1.2.

الف) هر ابتدائی(ساده)بيان، بيان دي،

ب) که A بيان وي ، نو $\neg A$ هم بيان دي،

ج) که A او B بيانونه وي ، نو $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\longrightarrow B)$ او $(A\longleftrightarrow B)$ هم بيانونه دي

.

د ج) شرط په لاندي ډول هم فورمولبندي کولای سو.

ج) که A او B بيانونه وي ، نو $A♣B$ به هم بيان وي ، پداسي حال کي چي د ♣ نښه د دوه ئېزوعمليو $\longleftrightarrow \wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, څخه د يوی عمليې نماينده ګي کوي.

د کار دآساني دپاره معمولاً د ج) شرط په وروستي ډول افاده کوو.

بېلګه 1.2. لاندنې افادې بيانونه دي:

$p_0, p_2, p_1, \neg p_0, (p_2 \vee \neg p_0), \neg p_1, (\neg p_1 \longrightarrow (p_2 \vee \neg p_0))$.

کولای سو ، چي ګام پر ګام خپل ځان باوري کوو:

د کيڼي څخه و ښئ لورته لمړي دري بيانونه ابتدائي بيانونه دي.څلرمه افاده د لمړي بيان څخه د ب) د اصل له مخي لاسته راغلی دي، يعنی د لمړي ابتدائي بيان نفي ده .پنځمه افاده ددوهم بيان او څلرمي افادي منطقي جمع ده ، چي د ج) د اصل له مخي بياهم بيان دي.شپږمه افده د دريم ابتدائي بيان نفی ده، بلاخره اوومه افاده د شپږمي او پنځمي افادی څخه د استنباط د عمليې په نتيجه کي لاسته راغلي ده، پدی معنی چي دغه افاده هم بيان دي .

بېلګه 2.2. اوس به نو بل ډول پوښتنه مطرح کو: آيا لاندنې افاده بيان دي؟

$$\neg((p_2 \wedge \neg p_1) \longrightarrow p_4)$$

---

[2] کله کله په مکرر ډول يا recurrent هم ويلای سو

که خپلي پوښتني ته د مثبت جواب انتظارلرو ، نو باید وښیو ، چي نوموړي افاده د تعریف له مخي د ابتدائي بیانو څخه په مکرر ډول د منطقي عملیو د عملي کیدو په مرسته لاسته راغلي ده .نوموړی بیان باید د بیانو په لاړ کي وروستئ غړی وي.دمخه تردي، چي د بیانو لاړ جوړ کو،باید د منطقي عملیو د ترتیب په هکله ووایم ، چی د نفي عملیه، که موجوده وي،د لمړیتوب حق لري، وروسته بیا د منطقي ضرب او بیا د مطقي جمع عملیه اجراء کولای سو. وروسته تر هغوی د استنباط او معادل والی عملیي اجراء کیدای سي.

د راکړه سوي افادي لاړ په لاندي ډول ترتیبوو:

الف) لمړئ ګورو، چي په افاده کي کم ابتدائي بیانونه شامل دي: $p_4, p_2\ , p_1$.

ب) پر بیانو د عملیو د لمړي توب د حق پر بنسټ $\neg p_1$ ګورو ، چي د ابتدائي بیان p_1 څخه د نفي د عملیي د عملي کېدو په نتیجه کي لاسته راغلي بیان دي.

ج) p_2 ابتدائي بیان دي او $\neg p_1$ د ب) پر بنسټ بیان او $p_2 \wedge \neg p_1$ د بیان دتعریف د ب)د شرط پر بنسټ بیان دي .

پ) $p_4 \longrightarrow (p_2 \wedge \neg p_1)$ بیان د ب) او ج) پر ترکیبي بیانو باندي د استنباط د عملیي د عملي کېدو په نتیجه کي لاسته راغلئ دي.

ت) په پای کي زموږ راکړه سوي افاده، یعنی $\neg((p_2 \wedge \neg p_1) \longrightarrow p_4)$ د پ) پربیان باندي د نفي دعملیي د عملی کېدوپه نتیجه کي لاسته راغلی ده.

زموږد غوښتني لاړ داسي ښه لري:

p_1(الف)$, \neg p_1$(ب)$, p_2$ (الف)$, (p_2 \wedge \neg p_1)$ (ج)$, p_4$ (الف)$,$

$(p_2 \wedge \neg p_1) \longrightarrow p_4$ (پ)$, \neg((p_2 \wedge \neg p_1) \longrightarrow p_4)$ (ت)

بېلګه 3.2. د $((t\longrightarrow r)\vee(\neg t))$ لاړ به ولیکو:

t (الف)$, \neg t$ (ب)$, r$ (الف)$, (t\longrightarrow r)$ (ج)$, (t\longrightarrow r)\vee(\neg t)$ (ج)

پاملرنه وکي ، چي دلته مو د الف، ب او ج څخه هدف د بیان د تعریف اجزاوي دي.

تمرین 1.2. د تمرین 2.1. په دوهم سوال کي د راکړه سوو افادو لاړ ولیکي.

دمخه تردي چي بل مفهوم تعریف کو، د لمړي پاراګراف لمړنیو مفکوروته راګرځم . د $\mathfrak{L}=<$

$a,b,c,...,0,1,(,), \neg,\wedge,\vee,\longrightarrow,\leftrightarrow >$ مصنوعي ژبه مو تعریف کړه، وروسته مو پدي ژبه

کي د کلمو او جملو د جوړولو اصول تعریف او هغه مو په مجموع کي د بیان د الجبر په نامه یاد کی.د بیان په الجبر کي بیانونه دونه ډېر سوه ، چي د ژبي و پراختیا ته ضرورت پیدا سو. د بیان الجبر ته مو پراختیا ورکړه او طبیعي عددونه مو د بیانو د اندکس په صفت په ژبه کي شامل کړه. پدی ډول په ژبه کي د $a,b,c,\ldots p_1,p_2,\ldots p_n\ldots$ نښې شاملی دی. ټوله دغه نښې د بیان د الجبر د الفباء په نامه یادوو.

تعریف 2.2. دبیان په الجبر کي د $A_1, A_2, \ldots, A_n$ د لغاتو لاړ د بیان د منشاء د لاړ Propositional Creating Sequence (د بیان دلاړ سر چینه) په نامه یادیږي که د هغه د هر غړي یا د هر اندکس $i=1,2,\ldots,n$ دپاره د لاندنیو شرطو څخه یو شرط صدق وکي:

الف) A_i ابتدائې بیان دي. یعنی د $a,b,c,\ldots p_1,p_2,\ldots p_n\ldots$ د نښو څخه په یوه نښه ښودل سوی دي.

ب) د $j<i$ اندکس داسی وجود لري، چي $A_i=\neg A_j$ دي، پدي معنی چي A_i د مخکني $(j<i)$ ابتدائي بیانو A_j د نفی په نتیجه کي لاسته راغلی دي.

ج) د $j,k<i$ اندکسونه داسي وجود لري، چي $A_i=A_j\clubsuit A_k$ دي، پداسي حال کي ، چي $\clubsuit$ د $\vee,\wedge$, $\longrightarrow$ $\leftrightarrow$د عملیو څخه د یوي عملیې نماینده ګي کوي.یا په بل عبارت A_i د مخکنیو $(j,k<i)$ بیانو څخه د منطقي دوه ئېزي عملیو د عملی کېدو په نتیجه کي لاسته راغلی دي.

خدای(ج) دی وکي چي موضوع لا تراوسه نه وی درته پېچلي او زما دفکر سیر تعقیبولای سي.

د تعریف 2.2 پر بنسټ د بیان تعریف په لاندي ډول سره فورمولبندی کوو:

تعریف 3.2. د بیان په الجبر کي د A متناهي لغات(کلمه) د بیان په نامه یادوو ، که د A دپاره د $A_1, A_2, \ldots, A_n$ دبیان دمنشاء لاړ داسی وجود ولري، چي $A_n=A$ وي.
که غواړو پوه سو، چي آیا د بیانو یو لاړ د بیان د منشاء لاړ دي ، نو د لاړ د هر غړی و څنګ ته د تعریف 2.2 د الف) ، ب) او یا ج) شرط لیکو. په بېلګه 2.2. کي دغه ډول مخ ته ولاړو.

بېلګه 4.2. د لاندني بیان د منشاء لاړ ولیکئ.

$$(p_1\leftrightarrow((\neg p_2)\vee p_3))\longrightarrow(\neg p_1\longrightarrow p_2)\quad\ldots(2.1)$$

ددی دپاره چي سوء تفاهم رانسي ، نو زه به دغه بېلګه کټ مټ پر تعریف 2.2 باندي عیار کم. موږ تراوسه د مساوات نښه نده تعریف کړي ، ځکه نو د هغه استعمال راته ستونزمن ښکاري. فکر کوم لاندني شرح په کافي اندازه څرګنده ده:

1) د p_1 بیان په A_1 سره ښییم . p_1 ساده بیان دي ، ځکه نو د تعریف د الف) سره مطابقت کوي.

2) د p_2 بیان په A_2 سره ښییم . p_2 ساده بیان دي ، ځکه نو د تعریف د الف) سره مطابقت کوي.

3) د p_3 بیان په A_3 سره ښییم . p_3 ساده بیان دي ، ځکه نو د تعریف د الف) سره مطابقت کوي.

4) $\neg p_2$ په A_4 سره ښییم او د 2) څخه ، یعنی A_2 (4<2)د نفي عملیې د عملې کیدو په نتیجه کي لاسته راغلی دي.د تعریف د ب) جزء دي.

5) $(\neg p_2) \vee p_3$)په A_5 سره ښییم ، د 4) او 3) څخه ، یعنی (3,4<5) د $\vee$ دوه ئېزی عملیې د عملي کېدو په نتیجه کي لاسته راغلی دي. د تعریف د ج) جزء دي.

6) $\neg p_1$ په A_6 سره ښییم او د 2) څخه ، یعنی A_1 (1<6)د نفي عملیې د عملې کیدو په نتیجه کي لاسته راغلی دي. د تعریف د ب) جزء دي.

7) $(\neg p_1 \longrightarrow p_2)$ په A_7 سره ښییم ، د 6) او 2) څخه ، یعنی (2,6<7) ، د دوه ئېزي عملیې $\longrightarrow$ د عملي کیدو په نتیجه کي لاسته راغلی دي. د تعریف د ج) جزء دي.

8) $(p_1 \leftrightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$ په A_8 سره ښییم، د 1) او 5) څخه ، یعنی (1,5<8) ، د دوه ئېزي عملیې $\leftrightarrow$ د عملي کیدو په نتیجه کي لاسته راځي. د تعریف د ج) جزء دي.

9) $(p_1 \leftrightarrow ((\neg p_2) \vee p_3)) \longrightarrow (\neg p_1 \longrightarrow p_2)$ په A_9 سره ښییم، د 7) او 8) څخه ، یعنی (7,8<9) اووه او اته تر نهه مخکي دي، د دوه ئېزي عملیې $\longrightarrow$ د عملي کیدو په نتیجه کي لاسته راغلی دی. د تعریف د ج) جزء دي.

اوس به نو لاسته راغلی لاړ په یوه جدول کي درج کو:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
p_1	p_2	p_3	8	$(\neg p_2) \vee p_3)$	$\neg p_1$	$\neg\ p_1 \longrightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow ((\neg p_2) \vee p_3)$	(2.1)
الف	الف	الف	ب	ج	ب	ج	ج	ج

جدول 1.2

پدي ډول د بيان د الجبر په الفباء کي د $A_9,A_8,A_7,A_6,A_5,A_4,A_3,A_2,A_1$ د کلمو لاړ داسی لاسته راغي، چي د هغه وروستي کلمه په خپله راکړه سوي افاده (2.1) ده .

تمرين 2.2. د پورتني بيان د رشتياوالي جدول ترتيب کي.

تمرين 3.2. د لاندنيو بيانو د منشاء لاړ وليکي.

الف) $(((p_1 \longrightarrow p_2) \longrightarrow p_2) \longrightarrow p_2)$;

ب) $(p_1 \longrightarrow (p_2 \vee p_3)) \vee (p_1 \longrightarrow p_2))$;

ج) $((p_1 \vee (\neg(p_2 \wedge p_3))) \longrightarrow ((p_1 \leftrightarrow p_3) \vee p_2))$.

په راتلونکي تعريف کي د يوه مفهوم څخه کار اخلو، چي ښېله هغه د نن ورځي رياضي نسو تصور کولای . هغه مفهوم عبارت له سيټ څخه دي. ددي مفهوم په هکله د پراخ معلومات دپاره [3] يا [17] ته مراجعه وکي.

تعريف 4.2. وايو چي د A بيان د ابتدائي بيانو $q_k,\dots,q_2,q_1$ څخه تشکيل سوی دی، د $A(q_1,q_2,\dots,q_k)$ په څېر يې ليکو، که دA د بيان د منشاء لاړ داسي وجود ولري، چي د A بيان د هغه وروستئ غړی وي او د منشاء د لاړد غړو سيټ د $\{q_1,q_2,\dots,q_k\}$ د سيټ ، سب سيټ وي.

د 4.2 بېلګي بيان ، يعنی په (2.1) اړېکه کي، که هغه بيان په A سره وښيو ، نو $A(p_0, p_1,p_2,p_3,p_4,\dots,p_n)$ د نوموړو ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوی دي.

تعريف 5.2. وايو چي د p ابتدائي بيان د A په بيان کي شامل دي ، که د p ابتدائي بيان د A د بيان د منشاء په هر لاړ کي شامل وي.

بېلګه 5.2. د $(p_2 \longrightarrow \neg p_6 \wedge p_3))$ بيان په نظر کي نيسو. موږ ويلای سو، چي نوموړي بيان د p_6,p_3,p_2 ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوی دي . موږ هم ويلای سو ،چي نوموړي بيان د p_6,p_4,p_3,p_2, p_1 ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوی دي، خو نسو ويلای چي يوازي د p_3,p_2 ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوی دي. ځکه چي د $(p_2 \longrightarrow \neg p_6 \wedge p_3))$ دبيان هرد منشاء لاړ بايد د p_6 ابتدائي بيان په ځان کي ولري.

د تېر پاراګراف يو واقعيت دلته بيا تکراروم.

فرضوو،چي $A(q_1,q_2,\dots,q_k)$ د $q_k ,\dots,q_2,q_1$ ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوی بيان دي. د $A(q_1,q_2,\dots,q_k)$ د رشتياوالي جدول عبارت دي د هغه جدول څخه چی 2^k د عمليي

کرښې لري. په نومړو کرښو کي د $q_1,q_2,\ldots,q_k$ دبیانو د قیمتو ټوله ممکني اووښتني[3] درج سوی دي. که د $A(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ په ترکیبي بیان کي د بیان دمنطق m عملیې په کار اچول سوی وي ، نو د $A(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ د بیان د رشتیا والي جدول به m+k ستونونه ولري. په ستونو نو کي په ترتیب سره د $A(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ بیان د منشاء د لاړ عنصرونه ځای پر ځای سوی دي او په وروستي ستون کي د $A(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ د بیان د رشتیاوالي قیمت درج دي.

د لته به لږځه مکث وکو او څو بېلګي به وڅېړو.

بېلګه 5.2. د $p\longrightarrow(q\longrightarrow(p\wedge q))$ بیان دپاره به دهغه د منشاء لاړولیکو او دهغه د رشتیاوالي جدول به رسم کړو.

په بېلګه کي دوه ابتدائې بیانونه او دري د بیان د منطق عملیې په کار اچول سوی دي. ځکه نود هغه د رشتیاوالي جدول به 2^2 یعنی 4 کرښې او 3+2 یعنی 5 ستونونه ولري. د نومړې بیان د منشاء لاړ به څوعنصره ولری؟ لمړئ به د هغه د منشاء لاړ ولیکو:

$$p,\ q,\ p\wedge q,\ q\longrightarrow(p\wedge q),\ p\longrightarrow(q\longrightarrow(p\wedge q)) \qquad (2.2)$$

p	q	p∧q	q⟶(p∧q)	p⟶(q⟶(p∧q))
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1

جدول 2.2

بېلګه 6.2. د

$$(p\vee q)\longrightarrow((q\wedge r)\vee\neg p))\ \ldots(2.3)$$

بیان د منشاء لاړ به ولیکو او دهغه د رشتیاوالي جدول به ترتیب کو.

د راکړه سوي بیان د منشاء لاړ عبارت دي له:

$$p,\ q,\ r,\ \neg p,\ (q\wedge r),\ (p\vee q),\ (q\wedge r)\vee\neg p),\ \ (p\vee q)\longrightarrow((q\wedge r)\vee\neg p))$$

[3] د [17] نیازمن :الجبر او د عددونو تیوري لمړې برخه 171 مخ وګوري.

ددي دپاره چی جدول مو د صفحی تر پولو ونه وزي، نو د 2.4 بېلګي په ډول د لاړ عنصرونه د کيڼي خوا څخه په $A_8,A_7,A_6,A_5,A_4,A_3,A_2,A_1$ سره ښيو.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

جدول 3.2

تمرين 4.2. د لاندنيو بيانو د منشاء لاړ وليکئ او د هغوی د رشتياوالې جدول ترتيب کي.

الف) $(\neg p \vee q) \longrightarrow r$

ب) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

ج) $(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$

دوو ټکوته ستاسو پاملرنه راګرځوم:

لمړئ داچي د هر بيان د منشاء لاړ کولای سو داسي و اوډو چي ابتدائي بيانونه چي په هغه بيان کي شامل دي په ترتيب سره د لاړ دلمړيو عنصرو په څېر درج او يا وليکو. موږ. ببله دي چي دغه ټکئ ته په څرګند ډول اشاره وکو، سم له سمنی مو عملی کړئ دي .
دوهم داچي په جدول 2.2 او جدول 2.3 کي يوه کرښه ، چي په هغه کي د بيان د منشاء د لاړ د ټولو ترکيبي بيانوقيمت يو دي ، يعنی د ابتدائي بيانو د قيمتو په دغه ترکيب کي، ټول ترکيبي بيانونه رشتيا دي. دغه ټکي ته تر يوی لنډي تبصری وروسته راګرځم. د 2.4 تمرين په جدولو کي ټوله دغه ډول کرښې په نښه کئ!

تبصره 1.2.

رياضی د مجردو مفهوموسره سرو کار لري. د بېلګي په ډول څرګنده ده چي د « عدد، مربع ، د مربع ضلع ، ... اوداسي نور»مفهومونه په حقيقت کي وجود نلري .
خو هغوی زموږ د ذهن څخه بهر د ځينو عينی موجوداتو تجرد دي. دبېلګي په ډول کله چي پنځه اورو ، نو نظر و حالت ته سمدلاسه د پنځو منو ، پنځو ډوډي، پنځو پسو ، ... تصور زموږ په ذهن کي پيداکيږي، خو پنځه په خپل ذات کي وجود نلري .لاکن دغه مجرد مفهومونه

ځني بنسټيز خاصيتونه لري او رياضي پوه غواړي چي دهغوى نور خاصيتونه هم و پېژني . دا چي د نورو خاصيتو څخه مو هدف څه شي دي، هڅه کوم چي په بېلګو کي يې په دقيق ډول درته څرګند کم .

د لرغونی یونان رياضی د بېلګي په ډول د «نقطي ، مستقيم خط ، سطحي» مجرد مفهومونه منځ ته راوړل ، بيا يې د هغوی تر منځ د « موازی والی ، د عموديت ، يا عمود والی، په يو سطحه کي اوسيدل او يا پر يوه خط باندي اوسيدل ، او داسی نور » مجردی اړيکي تعريف کړي. څرګنده ده چی د هغوی دغه کار د عينيت انعکاس ؤ. خو سمدلاسه يې دهغوی بنسټيز خاصيتونه در په ګوته کول. د بېلګي په ډول « که د p او q دوه مستقيم خطونه موازی وي او د r مستقيم خط د p پر مستقيم خط عمود وي ، نو بيا د r مستقيم خط د q پر مستقيم خط هم عمود دی .» او يا « که د A نقطه د p پر مستقيم خط باندی نه وي پرته ، بيانو يوازی يو مستقيم خط q وجود لری ، چي د A تر نقطي تېريږي او د p د مستقيم خط سره موازی دي.» ... او داسی نور. نوموړي مفهومونه يوازی د مختلفو عينی حالتو څخه اخيستل سوی دي. د p او q د خطونو تر مفهوم لاندي مو کولای سوای چي په عينيت کي دخونی ديوالونه تصور کو ، ددوو پړيو امتداد تصور کو، يا دوی وړانګي تصور کو، ځکه چي هغوی د موازی والی مفهوم ترسيموی .«موازی خطونه» که څه هم په سطحه کي پراته وه ، خو هغوی يو اوبل هيڅکله نه قطع کول، يعنی مشترکه نقطه يې نه درلوده .

نوموړو مفهومو ته ورته رياضی د "عدد" مجرد مفهوم خلق کئ(منځ ته راوړی) .آيا څوک ويلای سی ، چي عدد څه شی دي؟ وروسته د تاريخ په اوږدو کي په تدريج سره ننې مجرد مفهومونه ، لکه طبيعی ، تام ، ناطق او حقيقی عددونه منځ ته راغلل .د مختلطو عددو مفهوم ،حتی په اتلسمه پېړي کی منځ ته راغلی دي. بيا هم رياضی د نوموړو مجردو مفهومو د سرنوشت سره يو لړ بنسټيز خاصيتونه ضميمه کړل، چي هغوی هم دعينيت د غوښتونو څخه منشاء اخيستی وه.

د رياضي د پاره دغه ډول کړنلاره معموله ده: که مجرد مفهوم د ځينو بنسټيزو خاصيتو سره راکړه سوی وی . د نوموړو بنسټيزو خاصيتو څخه د منطق (که غواړی، د منطقی دلايلو) په مرسته د څېړل سوی مفهوم نور خاصيتونه **استنباط** (Deduce)کوو .که يوه عينی پديده ، ماسيوا د هغه مفهوم څخه ، چي موږ يې پدی شيبه کي څېړو، هم دغه بنسټيز خاصيتونه ولري، نو بايد نوموړي عينی پديده، نوموړي استنباط سوی خاصيتونه هم ولري.

بېلګه 7.2. د معمار څخه غوښتنه کيږي، چي په تعمير کی د لفټ دپاره شفټ داسی جوړ کي، چي په هغه کي لفټ ، بېله دي چي وزنګېږي، پورته او کښته سی .پدی ډول د شفټ د جوړولو دپاره اساسی غوښتنې دادی ، چي د شفټ ديوالونه بايد موازی وي. په عين حال کي بايد دونه پراخ وي، چي په هغه کي لفټ و نه زنګيږي يا په بله اصطلاح نوسان و نه کي. معمار د مځکي پر مخ د لفټ قاعده رسموی او دنوموړی رسم سوی شکل پر اساس ديوالونه

پورته کوي . ددیوالو د پورته کولو په وخت کي د شاقول څخه استفاده کوي، څکه چي هغه پر مځکه باندي د دیوال عمودیت تضمینوی .

پاملرنه وکي معمار په خپل کار کي د کم تجرد څخه کار اخیستی دي: که دوه مستقیم خطونه پر یوه سطحه عمود وي ، نو هغوی په خپل منځ کي موازی دي.پدی معنی چي د هغوی ترمنځ «فاصله » د شفټ په ټوله لوړوالی کي مساوی ده. معمار په ضمن کي د دیوالو خاصیتونه د موازی خطو په صفت استنباط کړه.

په راتلونکي کي به زموږ د څېړنو کړنلاره هم همداسی وی، یعنی که د یوه مفهوم ، چي د عینی پدیدي څخه یې منشاء اخیستی ده، څنې خاصیتونه راته معلوم وي ، نو د هغه مفهوم دنورو خاصیتو په لټه کي به یو.

تعریف 6.2. فرضوو چي $\Delta=\{B_1, ..., B_m\}$ د بیانو متناهی سیټ او A بیان دي. فرضوو، چي نوموړې ټوله بیانونه د q_1 ,... q_k ابتدائي بیانو څخه تشکیل سوی دي.وایو چي د A بیان په Δ کی صدق valid کوي، په $\Delta\vDash A$ سره یې ښیو، که د A, B_1, ..., B_m د رشتیاوالي د مشترک جدول په هره کرښه کي چي د Δ د سیټ د بیانو قیمت یو وي ، نو د A د بیان قیمت هم یو دي.

د 2.2 او 3.2 جدولونه وګوری.

A	$\overbrace{B_1 \ldots B_m}^{\Delta}$	$q_1 \ldots q_k$
1!	1 ... 1	$Q_1 \ldots Q_k$

جدول 4.2

د $\vDash$ نښه د بیانو په سیټ کي د یوه بیان د تصدیق یا دصدق د وړتوب نښه ده. Q_1, ... Q_k د q_1, ... q_k ابتدائي بیانوقیمتونه ، یعنی 0 یا 1 ، دي .

تعریف 7.2. د $A(q_1,q_2,...,q_k)$ بیان د تاوتولوجي Tautology په نامه یادوو ، که د نوموړې بیان د رشتیاوالي د جدول په هره کرښه کي د رشتیاوالي قیمت یو وي.

د 5.2 بېلګي بیان تاوتولوجي ده، 2.2 جدول وګورئ.

څرګنده ده، چي د A بیان یوازي او یوازي هغه وخت تاوتولوجي ده، چي د فرضیو په خالي سیټ کي صدق وکي، یعنی $\emptyset \vDash A$.

تمرین 5.2. الف) د تاوتولوجي دپاره 4.2 جدول ته ورته جدول رسم کي.

ب) د لاندنیو بیانو د رشتیاوالي جدول رسم او وګوري، چي آیا تاوتولوجي ده ؟

a) $(((r\longrightarrow s)\longrightarrow s)\longrightarrow s)$ b) $(p\longrightarrow(q\longrightarrow(q\longrightarrow p)))$

c) $(((p\longrightarrow q)\longrightarrow q)\longrightarrow p)$ d) $((p\wedge q)\longrightarrow(p\vee r))$

e) $(((r\longrightarrow s)\longrightarrow r)\longrightarrow r)$ f) $((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow p)))$

g) $(((q\longrightarrow r)\longrightarrow(p\longrightarrow q))\longrightarrow(p\longrightarrow q))$

h) $((p\longrightarrow q)\vee(q\longrightarrow p))$ i) $((\neg(p\longrightarrow q))\longrightarrow p)$

j) $((p\vee(\neg(q\wedge r)))\longrightarrow((p\leftrightarrow r)\vee q))$

قضیه 1.2. فرضوو، چي $\Delta=\{B_1, ..., B_m\}$ او Γ د بیانو متناهي سیټونه او A بیان دي. لاندنې ادعاوي صدق کوي:

الف) که $A\in\Delta$ وي، نو $\Delta\vDash A$.

ب) که $\Delta\vDash A$ او $\Delta\subseteq\Gamma$ وي، نو $\Gamma \vDash A$.

ج) که $\Delta\vDash A$ او $\Gamma\vDash B_1, ..., \Gamma\vDash B_m$ ، نو $\Gamma \vDash A$.

ثبوت. د الف ادعا د صدق د وړتوب د تعریف پر اساس حقیقت لري، ځکه چي د B_m, ..., B_1 د بیانود رشتیاوالي دجدول په یو کرښه کي د هغوی قیمت یو دی، نو A چي یو دهغو بیانو څخه دی ، باید د رشتیاوالي دجدول په کومه کرښه کي د قیمت په صفت یو ولری.

ب) وایې که د A بیان د Δ په سیټ کي صدق وکي او $\Delta \subseteq \Gamma$ وي، نو د A بیان په Γ کي هم صدق کوي. څرگنده ده، ځکه هغه بیانونه ، چي په یوه کرښه کي د A د بیان سره یو لري ، هغوی د Γ په سیټ کي هم شامل دی.

ج) دا چي د A بیان د Δ د بیانو په سیټ کی صدق کوي، یعني د B_1, ..., B_M د بیانو سره د رشتیاوالي دجدول په کومه کرښه کي یو لري او هر یو د B_1, ..., B_M بیانو څخه د Γ په سیټ کي د رشتیاوالی د جدول په کومه کرښه کي یو لري، نو ددي اسیته د A بیان به هم د Γ په سیټ کي د رشتیاوالی د جدول په کومه کرښه کي یو ولری . د څرگندولو دپاره یې لاندنۍ جدول وگورئ:

$q_1 \dots q_k$	Γ	$\overbrace{B_1 \dots B_m}^{\Delta}$	A
$Q_1 \dots Q_k$	1 . . . 1	1! . . . 1!	1!!

جدول 5.2

پاملرنه وکي، چی د ب) ادعا د الف) د ادعا پر بنسټ د ج) د ادعا څخه استنباط کیږي.

q.e.d

که $A(p_1, \dots, p_n)$ بیان وي او $B_1, \dots, B_n$ هم بیانونه وي، نو د

$$A(p_1/B_1, \dots, p_n/B_n)$$

په ذریعه هغه بیان په نښه کوو، چی د A د بیان د ابتدائي بیانو p_i ځخه د B_i ، $i=1,2,...,n$ د تعویض (ونج) (Substitution, Replacement) په نتیجه کي لاس ته راسي. پدی معنی چي د A د بیان هر p_i ابتدائي بیان د B_i د بیان سره تعویضوو(ونجوو).

بېلګه 8.2. که د $A(p_1,p_2)$ بیان $\neg p_2 \longrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ ، د $B_1=\neg p_3$ او $B_2=(p_4 \vee p_1)$ بیانونه وي، نود $A(p_1/B_1, p_2/B_2)$ بیان عبارت دی له:

$$\neg(p_4 \vee p_1) \longrightarrow (\neg p_3 \wedge (p_4 \vee p_1))$$

تمرین 6.2. په پورتني بېلګه کی د $A(p_1,p_2)$ ، B_1 ، B_2 او $A(p_1/B_1, p_2/B_2)$ د بیانو د منشاء لاړونه ولیکي.

اکثرآ به د لاندني قضیي ځخه کار اخلو.

قضیه 2.2. (Substitution, Replacement)

که د $A(p_1, ... , p_n)$ بیان تاوتولوجي او $B_1 , ... , B_n$ بیانونه وي، نو د

$A(p_1/B_1, ... , p_n/B_n)$ بیان به هم تاوتولوجي وي.

ثبوت. فرضوو، چي د $A(p_1, ... , p_n)$ بیان تاوتولوجي ده. لمړئ د $B_1 ,..., B_n$ او A د بیانو د منشاء لاړونه لیکو. د هغوی په مرسته د $A(p_1/B_1, ... , p_n/B_n)$ د منشاء لاړ لیکو او د هغه د رشتیاوالي جدول ترسیموو. په نوموړي جدول کي یوه اختیاري، خو ثابته کرښه ټاکو. فرضوو، چي په نوموړي کرښه کي $Q_1 , ... , Q_n$ د $B_1 , ... , B_n$ د بیانو د رشتیاوالي قیمتونه دي.اوس نو د $A(p_1, ... , p_n)$ د رشتیاوالي جدول ګورو او په هغه کي هغه کرښه چي د A د بیان د ابتدائي بیانو $p_1, ..., p_n$ دپاره قیمتونه د $Q_1 , ... , Q_n$ د قیمتو سره تطابق وکي، ټاکو. د $A(p_1/B_1, ... , p_n/B_n)$ بیان د $B_1 ,..., B_n$ بیانو ځخه په ورته ډول لاسته راغلی دي،لکه د $A(p_1, ... , p_n)$ بیان چي د ابتدائي بیانو $p_1, ..., p_n$ ځخه لاسته راغلی وي. ددی اسیته درشتیاوالي دجدول په دواړو کرښو کي د $A(p_1/B_1, ... , p_n/B_n)$ او د $A(p_1, ... , p_n)$ قیمتونه به یوډول وي.ځرنګه چي د $A(p_1, ... , p_n)$ بیان تاوتولوجي ، یعنی د رشتیاوالي قیمت ئې 1

دي ، نو د $A(p_1/B_1, \dots , p_n/B_n)$ د بیان د رشتیوالي قیمت هم 1 دي.

q.e.d

پورتني قضیه وایي ، که د تاوتولوجي ابتدائي بیانونه د هر ډول بیان سره تعویض کو ، نو بیاهم تاوتولوجی ده.

د بیانو د پرتله کولو او د بیانو د استنباط دپاره دوه مهم تعریفونه راوړو.تر هغه ځایه چي سوء تفاهم رانسي ، نو د $p_1, \dots, p_n$ ابتدائي بیانو د ذکر او تکرار څخه ډډه کوو.

تعریف 8.2. د A او B دوه بیانونه یودبل سره منطقی معادل logically equivalent دي، $A\Leftrightarrow B$ سره ئې ښیو، که د $A\leftrightarrow B$ بیان تاوتولوجي وي.

بېلګه 9.2. د A او $(\neg(\neg A))$ بیانونه منطقی معادل دي، یعنی $(A\Leftrightarrow(\neg(\neg A)))$. د $A\wedge B$ او $B\wedge A$ بیانونه منطقی معادل $(A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A)$ دي.

تعریف 9.2. که A او B دوه بیانونه وي، نو وایو چی د A د بیان څخه د B د بیان منطقی استنباط logically implies کېږي او یا د B بیان د A د بیان نتیجه ده ، په $A\Longrightarrow B$ سره ئې ښیو، که د $A\longrightarrow B$ تاوتولوجي وي.

بېلګه 10.2. که A او B دوه بیانونه وي، نو $A\wedge B \Longrightarrow A$ منطقی استنباط دي. $A\Longrightarrow A\vee B$ او $(A\wedge(A\longrightarrow B)) \Longrightarrow B$ منطقی استنباطونه دي. د رشتیاوالی د جدولو په رسمولو سره خپل قناعت لاسته راوړي.

تمرین 7.2. الف) وګوري، چي د لاندنیو بیانو څخه کم دوه په خپل منځ کي منطقی معادل دي؟

(a $((A\longrightarrow B) \longrightarrow A)$ او A

(b $(A\leftrightarrow B)$ او $((A\longrightarrow B) \wedge(B\longrightarrow A))$

(c $((\neg A) \vee B)$ او $((\neg B) \vee A)$

(d $(\neg(A\leftrightarrow B))$ او $(A\leftrightarrow(\neg B))$

(e $(A\vee(B\leftrightarrow C))$ او $((A\vee B)\leftrightarrow(A\vee C))$

(f $(A\rightarrow(B\leftrightarrow C))$ او $((A\rightarrow B)\leftrightarrow(A\rightarrow C))$

(g $(A\wedge(B\leftrightarrow C))$ او $((A\wedge B)\leftrightarrow(A\wedge C))$

ب) وګورى، چي دلاندنيو بيانو څخه كم يو د $(A\wedge B)$ د بيان څخه منطقی استنباط كيدای سي؟

a) A b) B c) $(A\vee B)$ d) $((\neg A)\vee B)$

e) $((\neg B)\rightarrow A)$ f) $(A\leftrightarrow B)$ g) $(A\rightarrow B)$ h) $(A\wedge(\neg B))$

قضيه 3.2. فرضوو، چي $A(p_1, \dots , p_n)$ بيان دي. فرضوو، چي $B_1 ,\dots, B_n$ او $C_1 ,\dots, C_n$ داسي بيانونه دي، چي:

$$B_1\Leftrightarrow C_1 ,\ B_2\Leftrightarrow C_2, \dots, B_n\Leftrightarrow C_n$$

دي، بيا نو :

$$A(p_1/B_1, \dots , p_n/B_n) \Leftrightarrow A(p_1/C_1, \dots , p_n/C_n)$$

كيږي.

ثبوت. لمړئ خو پاملرنه وكړئ ، كه B, C, E او F داسي بيانونه وي ، چي $B\Leftrightarrow C$ او $E\Leftrightarrow F$ وي ، پدی معنی چي د B او C بيانونه او د E او F بيانونه په خپل منځ كي منطقی معادل وي، نو لاندني بيانونه هم په خپل منځ كي منطقی معادل دي:

$\neg B\Leftrightarrow\neg C$ او $(B♣E)\Leftrightarrow(C♣F)$ پداسي حال كي ، چي $♣=\wedge , \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ، يعنی ♣ د $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$ د عمليو څخه يوه عمليه ده.

اوس به نو راسو د قضيې و ثبوت ته.د ثبوت طريقه مو تراوسه دلته نده معرفی كړي، خو د الجبر څخه د هغه سره هرومرو اشنا ياست. ثبوت د رياضي د استقراء په طريقه سرته رسوو.

فرضوو، چي A_1 ,... ,A_m د A د بیان د منشاء داسي لاړ دي ، چي په هغه کي غیر له q_n, ... , q_1 ابتدائي بیانوڅخه نور ابتدائي بیانونه شامل ندي. د ریاضی د استقراء پر اساس په مستقیم ډول د $i=1,...,m$ دپاره :

$$A_i(q_1/B_1, \dots , q_n/B_n)\Leftrightarrow A_i(q_1/C_1, \dots , q_n/C_n)$$

دي. د $i=m$ د پاره زموږ ادعا ده. q.e.d

3§. د بیانو د رشتیاوالي بل تعبیر

په تېرو دوو پارگرافو کي مي هڅه وکړه ، چي یوازی دهغو وسایلو څخه، چي دمخه می تعریف کړیدي، کار واخلم. دغه ډول کړنلاره منطقی او د مسئلي د درک دپاره واضح برېښي ، خو په عین حال کي د لیدلو ساحه راته تنګوي. ځکه نو په دي پاراګراف د بیان د رشتیاوالي مسئله په بل ډول څېړو او دلته د هغو مفهومو او وسیلو څخه کار اخلو ، چي د هغو د تعریف دپاره به پر [3] ,[17] ,[18] حواله درکړم. هغه مفهومونه عبارت دي له سیټ ،متناهي سیټ ، د شمېر وړ سیټ ، مپینګ ، مرتبه جوړه ، مرتبه n– ئېزه.

په تېرو پاراګرافو کی مو وویل که بیان راکړه سوی وي ، نو هغه به یا رشتیاو ی او یا درواغ. په بله اصطلاح د یوی خوا د 1.2 تعریف سره مطابق د بیانو سیټ راکړه سوی دی، هغه به دلته په Πسره وښیو . د بلی خوا د $M=\{0,1\}$ دو عنصره سیټ راکړه سوی دي. د M د سیټ د عنصرو څخه د ضرورت له مخی(نظر د ابتدائي بیانو و شمېر ته) د دوه ئېزو، دری ئېزو، ...، n- ئېزو سیټ جوړو. د بېلګي په ډول:

$M_2=\{(1,1);(1,0);(0,1);(0,0)\}$

$M_3=\{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1);(0,0,1);(1,0,1);(0,1,0);(0,0,0)\}$

$\vdots$

پاملرنه وکئ، د M_2 او M_3 سیټونه زموږ جدولو ته ورته او د هغوی د عنصرو شمېر نظر د ابتدائي بیانو وشمېر n ته 2^n دي.

د بيان رشتياوالی د Π د سيټ څخه د M په سيټ کي د مپينګ په صفت تعريفو، يعنی :

. $\nu:\Pi\longrightarrow\{0,1\}$ او يا $\nu:\Pi\longrightarrow M$

د Π د سيټ پر عنصرو د $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$ او $\leftrightarrow$ عمليې په ترتيب سره په لاندي ډول تعريفوو:

$$\nu_{\neg}(A)\overset{df}{=}\begin{cases}0 & ;\text{if } \nu(A)=1;\\ 1 & ;\text{if } \nu(A)=0\end{cases}$$

$$\nu_{\wedge}(A,B)\overset{df}{=}\begin{cases}1 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,1)\};\\ 0 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(0,1),(1,0),(0,0)\}.\end{cases}$$

$$\nu_{\vee}(A,B)\overset{df}{=}\begin{cases}1 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,1),(1,0),(0,1)\};\\ 0 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(0,0)\}.\end{cases}$$

$$\nu_{\rightarrow}(A,B)\overset{df}{=}\begin{cases}1 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,1),(0,1),(0,0)\};\\ 0 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,0)\}.\end{cases}$$

$$\nu_{\leftrightarrow}(A,B)\overset{df}{=}\begin{cases}1 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,1),(0,0)\};\\ 0 & ;\text{if } (\nu(A),\nu(B))\in\{(1,0),(0,1)\}.\end{cases}$$

په دغه تعبير کي د A د بيان تصديق د Δ په سيټ کي ګورو.

فرضوو چي $\Delta=\{B_1, \dots, B_m\}$ د متناهي بيانو سيټ دي، وايو چي د $A(q_1, \dots, q_n)$ بيان د Δ په سيټ کي صدق کوی ،په $\Delta\vDash A$ سره يې ښيو، که د صفر او يو يوی n– ئيزي دپاره چي د $\nu(B_1)=\dots=\upsilon(B_m)=1$ وی، $\upsilon(A)=1$ وي. د بېلګي په ډول په 5.2 او 6.2 بېلګو کي هغه کرښه چي رنګه ده ، داسي ليکلای سو. په 5.2 بېلګه کي $A(p,q)=p\longrightarrow(q\longrightarrow(p\wedge q))$ ، $B_1(p,q)=p\wedge q$ ، $B_2(p,q)=q\longrightarrow(p\wedge q)$ ، $\Delta=\{B_1,B_2\}$ دي .

$$\nu(B_1(1,1))= \nu(B_2(1,1))= \nu(A(1,1))=1$$

په 6.2 بېلګه کي $\Delta=\{A_4,A_5,A_6,A_7\}$ د $(0,1,1)$ په دريئېزه کي :

$$\nu(A_4(0,1,1))= \nu(A_5(0,1,1))= \nu(A_6(0,1,1))= \nu(A_7(0,1,1))=1$$

او په عین حال کي $\nu(A_8(0,1,1))=1$ دي.

پدي معنی چي په نوموړو بېلګو کي په ترتیب سره د ابتدائي بیانو سیټ $\Pi=\{p,q\}$ او $\Pi=\{p, q, r\}$ دي. د جدول هره کرښه د $\nu:\Pi \longrightarrow \{0,1\}$ مپینګ دي. $\Delta \vDash A$ یا $\{B_1,B_2\} \vDash A$ پدي معنی ؤ په هغه کرښه کي چي $\nu(B_1(1,1))= \nu(B_2(1,1))=1$ ؤ، نو $\nu(A(1,1))=1$ ؤ. په عمومي بڼه که د $\Delta=\{B_1, \dots , B_m\}$ د سیټ دپاره $\Delta \vDash A$ تعریفوو، نو فرضوو چي زموږ د نظر بیانونه د ابتدائي بیانو د سیټ $\Pi=\{ q_1, \dots ,q_n\}$ د عنصرو څخه منځ ته راغلی دي. که چېري د کوم ابتدائي بیان p موجودیت د $A, B_m, \dots , B_1$ په بیانو کي را ښکاره سي ، نو $p\in\Pi$ دي. پدي صورت کي د $\nu:\Pi \longrightarrow \{0,1\}$ مپینګ د $i=1, \dots, k$ دپاره د $\upsilon(q_i)=Q_i$ د اړېکي په ذریعه د ټولو ابتدائي بیانو دپاره تعریف کېږي. په نتیجه کي 5.2 تعریف داسي هم فورمولبندی کولای سو:

تعریف 1.3. فرضوو چي $\Delta=\{B_1, \dots, B_m\}$ د بیانو متناهی سیټ او A بیان دي. فرضوو، چي نوموړې ټوله بیانونه د $q_1, \dots, q_k$ ابتدائي بیانو څخه تشکیل سوی دي.وایو چي د A بیان په Δ کی صدق valid کوي، په

$$\Delta \vDash A$$

سره یې ښیو، که د $\nu:\Pi \longrightarrow \{0,1\}$ هر مپینګ دپاره په داسي ډول چی دهر $B\in\Delta$ دپاره $\nu(B)=1$ وي، نو $\nu(A)$ هم په یوه سره مساوی وی، یعنی $\nu(A)=1$ وي.

موږ په تېرو برخو کی ډیر ژر ولیدل ، چی د ژبي په تعریف کي د متناهي شمېر حرفونه زموږ د څېړنو د پرمختګ مخنیوی کاوه، پدي معنی چي د هغوی شمېر زموږ د پاره کافي نه ؤ.ځکه نو زموږ په ذریعه تعریف سوي ژبي ته داسي پراختیا ورکړه چي د طبیعی عددو سیټ مو د اندکس د سیټ په صفت ورسره ضمیمه کي. پر هغه سربېره تراوسه زموږ څېړنی او بېلګي متناهي بڼه درلوده. راسی چي د صدق کولو مفهوم $\Delta \vDash A$ په داسي حال کي چي دبیانوسیټ Δ لایتناهي سیټ وي، وڅېړو. دلته به د ټولو بیانو سیټ Δ د شمېر وړسیټ په صفت په نظر کي ونیسو.

د $\Pi=\{p_1,p_2, \ldots ,p_n, \ldots\}$ ټولو ابتدائي بيانو سيټ په نظر کي نيسو. ځرنګه چي ابتدائي بيانونه مو د طبيعي عددو د اندکس په مرسته نښاني کړيدي، نو د ابتدائي بيانو سيټ لايتناهي ، خو د شمېر وړ سيټ دي. د ټولو بيانو سيټ چي د نوموړو ابتدائي بيانو څخه ، يعنی د Π د سيټ د عنصرو څخه تشکيل سوی وي هم د شمېر وړ سيټ دي[4].پدی ډول 1.3. تعريف ته عمومي بڼه ورکو:

تعريف 2.3. فرضوو چي Π د ټولو هغو ابتدائي بيانو سيټ دي چي د Δ په بيانو يا د A په بيان کي را ځرګنديږي، وايو چي د A بيان د Δ د بيانو په سيټ کي صدق کوي ، $\Delta\vDash A$ په ډول يې ليکو، که د $\nu:\Pi \longrightarrow \{0,1\}$ هر مپينګ دپاره، پداسی ډول چي د هر $B\in\Delta$ دپاره $\nu(B)=1$ وي، نو $\nu(A)$ هم په يوه سره مساوی وی، يعنی $\nu(A)=1$ وي.

تعريف 3.3. فرضوو چي Π د ټولو هغو ابتدائي بيانو سيټ دي چي د Δ په بيانو يا د A په بيان کي را ځرګنديږي، وايو چي د A بيان د Δ د بيانو په سيټ کي عملی (Feasible) دی، که د $\nu:\Pi \longrightarrow \{0,1\}$ مپينګ داسي وجود ولري، چي د هر $B\in\Delta$ دپاره $\nu(B)=1$ وي، نو $\nu(A)$ هم په يوه سره مساوی وی، يعنی $\nu(A)=1$ وي.دلته د رشتياوالي د جدول يوه کرښه هدف دي.

په بله ژبه هغه بيان چي د Δ په سيټ کي صدق کوي د Δ په سيټ کي د عملي بيان په نامه يادېږي. اميد دي، چي 2.3. او 3.3. تعريفونه ذهنی اغتشاش رامنځته نه کي. بيانونه په خپل ذات کي پر درو ټولګيو وېشلای سو، هغه داچي يا به تاوتولوجی ، يابه عملي بيان او يا به د بيان ضد وي.[5]

د رشتياوالی د قيمت د تعريف له مخي $\nu(A)=1$ يوازي او يوازي هغه وخت صدق کوي،چي $\nu(\neg A)=0$ وي. پدي معنی چي $\Delta\vDash A$ دی يوازی او يوازی هغه وخت چي $\neg A$ د Δ په سيټ کي غير عملی وي.

---

[4] ددغو مفکورو د تثبيت دپاره په [3] کي 3.4 او 4.4 رسالی ته مراجعه وکئ.
[5] [17] نيازمن. الجبر او دعددونو تيوری لمړي برخه 23 مه صفحه وګوری.

په هغه صورت کي چي د Δ سيټ لايتناهي سيټ وي، نو 1.2.ج) قضيه داسي فورمولبندي کولای سو:

قضيه 1.3. که د هر $B\in\Delta$ دپاره $\Gamma\vDash B$ او $\Delta\vDash A$ وي، نو $\Gamma\vDash A$ دي.

بېلګه 1.3. فرضوو چي $\Delta=\{q_1, q_1\longrightarrow q_2, q_2\longrightarrow q_3, \ldots , q_n\longrightarrow q_{n+1},..\}$ دي. بيانو د هر $n=1,2,\ldots$ دپاره صدق کوي، چي $\Delta\vDash q_n$ دي.ويې آزمويه!

بېلګه 2.3. موږ ته د $\Pi=\{p,q,r\}$ د ابتدائي بيانو سيټ راکړه سوی دي. د $\Delta=\{p,q,r, q\leftrightarrow r, p\wedge(q\leftrightarrow r)\}$ دي. د A ترکيبي بيان عبارت دی له : $(p\wedge q) \leftrightarrow(p\wedge r)$ ، يعنی $A=(p\wedge q) \leftrightarrow(p\wedge r)$ دي. آيا $\Delta\vDash A$ صدق کوی؟

که د Δ سيټ ته ځېر سی، نودرته ښرګنده به سي چي هغه سيټ په اصل کي د $p\wedge(q\leftrightarrow r)$ د بيان د منشاء د لاږ سيټ دي. ښرنګه چي په بيانو کي يوازي دري ابتدائي بيانونه ښرګندېږي، نو د رشتياوالي سيټ ئې د M_3 پر سيټ تعريف کېږي، يعنی $v: M_3 \longrightarrow \{0,1\}$. اوس نو د تعريف له مخي که د $v(p,q,r)$ په يوه قيمت کي چي $p\wedge(q\leftrightarrow r)$ قيمت يو وي او په هغه قيمت کي د A قيمت هم يو وي، نو بی شکه چي $\Delta\vDash A$ دي. نظر د $\leftrightarrow$ و تعريف ته د $q\leftrightarrow r$ بيان يوازي د $M_{3\leftrightarrow}=\{(1,\underline{1},\underline{1});(0,\underline{1},\underline{1});(1,\underline{0},\underline{0});(0,\underline{0},\underline{0})\}\subseteq M_3$ پر سيټ باندي حقيقت لري. وګوري، چي د درئېزي لمړئ جز موږته بی اهميته دي . بيا هم د $\wedge$ د تعريف له مخي زموږ بيان ، يعنی $p\wedge(q\leftrightarrow r)$ يوازي د

$$M_{3\leftrightarrow\wedge}=\{(1,1,1)\}\subseteq M_{3\leftrightarrow}\subseteq M_3$$

پر سيټ حقيقت درلودلای سي. د نوموړي قيمت دپاره د A بيان هم رشتيا دي (خپل ځان پر باوری کړئ!) .ځکه نو $\Delta\vDash A$ صدق کوی.

تمرين 1.3.

الف) په1.1.تمرين کي د منطقي جمع ځانګړي بڼه زموږ د دي برخي د تعبير پر بنسټ تعريف کي.

ب) په لاندنيو بيانو کي د Π او Δ سيټونه وليکي :

a) $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$, $r\vee s\leftrightarrow\neg q$

b) $\neg(\neg q\vee p)$, $p\vee\neg r$, $q\longrightarrow r$

c) $s\longrightarrow q$, $p\vee\neg q$, $\neg(s\wedge p)$, r

ج)په لاندنيو بيانو کي د Π او Δ سيټونه وليکي، وګورى چي $\Delta\vDash A$ صدق کوي؟

a) $((\neg p)\vee q)$; $A=((\neg q)\vee p)$

b) $(\neg(p\leftrightarrow q))$; $A=(p\leftrightarrow(\neg q))$

c) $(p\vee(q\leftrightarrow r))$; $A=((p\vee q)\leftrightarrow(p\vee r))$.

§4. ثبوت د بيان په الجبر کي

دمخه تردي چي د بيان په الجبر کي د ثبوت مفهوم تعريف او تشريح کو ، د تېر پارګراف د څېړنو په امتداد يوه بله بېلګه په نظر کي نيسو.

بېلګه 1.4. که $\Delta=\{p\wedge q, p\longrightarrow r, r\longrightarrow s\}$ وي ، نو آيا $\Delta\vDash s$ صدق کوي؟

ليدل کېږي چي راکړه سوى بيانونه د څلورو ابتدائي بيانو څخه تشکيل سوي دي.د موضوع د روښانولو په موخه دبيانو د رشتياولي په دواړه تعبيرونو کي به يا $16=2^4$ کرښه ئېز جدول ترتيبوو او يا به د M_4 سيټ چي 16 عنصره لرى د کاغذ پر مخ راوړو. زه د کار د آساني او د راتلونکو مطالعاتو په ګټه دوهمي کړنلاره غوره بولم، ځکه نو راسى چى د M_4 سيټ وليکو:

$M_4=\{(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,0,0)\}$.

اوس نو وګورئ چي د $p\wedge q$ بیان د M_4 د سیټ د کومو عنصرو دپاره رشتیا دی، یعنی:
$M_{4\wedge}=\{(\underline{1},\underline{1},1,1)\ ,\ (\underline{1},\underline{1},1,0),\ (\underline{1},\underline{1},0,1)\}$ دي. د $p\longrightarrow r$ دپاره د رشتیاوالي عنصرونه په لاندني سیټ کي درج دي:

$$M_{4p\rightarrow r}=\{\ (\underline{1},1,\underline{1},1)\ ,\ (\underline{1},1,\underline{1},0),\ (\underline{1},0,\underline{1},1),\ (\underline{0},1,\underline{1},1),\ (\underline{0},0,\underline{1},1),\ (\underline{0},1,\underline{1},0),\ (\underline{1},0,\underline{1},0),\ (\underline{0},1,\underline{0},1),\ (\underline{0},1,\underline{0},0),\ (\underline{0},0,\underline{1},0),\ (\underline{0},0,\underline{0},1),\ (\underline{0},0,\underline{0},0)\}.$$

په همدغه ډول د M_4 د سیټ څخه هغه عنصرونه چي د هغوی دپاره د $r\longrightarrow s$ بیان رشتیا دی جدا کوو:

$$M_{4r\rightarrow s}=\{(1,1,\underline{1},\underline{1})\ ,\ (1,1,\underline{0},\underline{1}),\ (1,0,\underline{1},\underline{1}),\ (0,1,\underline{1},\underline{1}),\ (1,1,\underline{0},\underline{0}),\ (1,0,\underline{0},\underline{1}),\ (0,0,\underline{1},\underline{1}),\ (0,1,\underline{0},\underline{1}),\ (1,0,\underline{0},\underline{0}),\ (0,1,\underline{0},\underline{0}),\ (0,0,\underline{0},\underline{1}),\ (0,0,\underline{0},\underline{0})\}$$

لیدل کیږی چی په ټولو سیټو کی د $(1,1,1,1)$ عنصر مشترک دی او په دغه عنصر کي علاوه پر دي چي دΔ د سیټ هر بیان رشتیا دي، $v(s)=1$ دي، یعنی $\Delta\vDash s$ صدق کوي.

په لرغوني یونان کي یې د دغه ډول مسئلو د ثبوت دپاره یې د استنباط د طریقي څخه کار اخیستي. د 2.3 تعریف له مخي ټوله بیانونه چي د Δ په سیټ کي شامل دي ، رشتیا دي. د $p\wedge q$ څخه به یې راشروع کړو. څرنګه چي $p\wedge q$ رشتیا دی ، نو ترهغه لاندی 1 لیکلای سو . پدی حالت کي د تعریف له مخي تر p او q لاندی باید هرومرو 1 وي.کله چي تر p لاندی 1 دي او د $p\longrightarrow r$ تر بیان لاندي 1 دي نو د r تر بیان لاندی باید هرومرو 1 وي، کله چي تر r لاندی1 او د $r\longrightarrow s$ بیان رشتیا دی ، یعنی تر هغه لاندی 1 دي ، نو د s تر بیان لاندي باید هرومرو 1 وي ، یعنی د s بیان به رشتیا وي.پدی ډول مو وښودل چي د رشتیاوالي په جدول کي داسي کرښه وجود لري ، چي په هغه کي د Δ تر ټولو عنصرو لاندي یو دي او په عین حال کي د s تر بیان لاندي هم یو دي، پدي معنی چي $\Delta\vDash s$ صدق کوي.

پورتني بېلګه مو په دوو طریقو حل او ومو لیدل چي د شمېرني طریقه یې اوږده اوپیچلي ده. خو د استنباط طریقه یې لنډه او د استدلال خاصه ښکلا لري. په همدي طریقه لاندني قضیه ثابتوو.

قضیه 1.4. که د A او $A \longrightarrow B$ بیانونه تاوتولوجي وي ، نو د B بیان تاوتولوجي دی.

ثبوت. فرضوو چي د A او $A \longrightarrow B$ بیانونه تاوتولوجي دي. که د کوم قیمت دپاره د B بیان درواغ وي، نو څرنګه چي $A \longrightarrow B$ تاوتولوجي دي ، نو د A د بیان قیمت باید درواغ وي ، خو دغه حالت زموږ د فرضیې ، چي A تاوتولوجي دي، خلاف دي.پدي ډول قضیه ثبوت سوه.

په خاص ډول فیثاغورث د ثبوت په هکله د استنباط په صفت پوه ؤ. د بیان په الجبر کي د ثبوت دقیق تعریف به فورمولبندي او د هغه اړیکې به د ریاضي د ثبوت په اړوند وڅیړو.

تعریف 1.4. که C,B,A بیانونه وي نو هر هغه بیان چي لاندني بڼه ولري د بیان د الجبر د اکسیومي په نامه یادوو:

(A_1) $A \longrightarrow A$

(A_2) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$

(A_3) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$ د استنباط توزیعی قانون

(A_4) $(A \longrightarrow B \longrightarrow ((A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$

(A_5) $A \longrightarrow (B \longrightarrow (A \wedge B))$

(A_6) $(A \wedge B) \longrightarrow (B \wedge A)$

(A_7) $(A \longrightarrow C) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow ((A \vee B) \longrightarrow C))$

(A_8) $(A \vee B) \longrightarrow (B \vee A)$

(A_9) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow A) \longrightarrow (A \leftrightarrow B))$

(A_{10}) $(A \leftrightarrow B) \longrightarrow (B \leftrightarrow A)$

(A_{11}) $A \vee \neg A$ د دریم د طرد قانون

(A_{12}) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow \neg A)$

$(A_{13})\ A\longrightarrow(B\longrightarrow A)$

$(A_{14})\ (A\longrightarrow B)\longrightarrow(\neg B\longrightarrow\neg A)$ د مخالف حالت قانون

$(A_{15})\ (A\wedge B)\longrightarrow A$

$(A_{16})\ A\longrightarrow(A\vee B)$

$(A_{17})\ (A\leftrightarrow B)\longrightarrow(A\longrightarrow B)$

$(A_{18})\ \neg\neg A\leftrightarrow A.$ د دوو نفی قانون

نوټ: پورتنې اکسیومي په خپل ذات کي اکسیومي نه ، بلکه د اکسیومو شیما ده. د هر ترکیبي بیان په بدل کي مشخص او یا ساده بیان راوړلای سو ، ځکه نو د اکسیومو شمېر پدي ډول لایتناهي دي. نوموړې اکسیومي د رایضي په هره تیوري کي عملي کولای سو، ځکه نو وایو چي زموږ کړنلاره د ماوراء یا مافوق ریاضيMetamathematics کړنلاره ده. پدي ډول د ریاضي و بڼونو ته د غره د څوکي څخه نظر اچوو.

لوستونکي کولای سی چي د 2.2 قضیې په مرسته په آساني سره لاندنې قضیه ثابته کي.

قضیه 2.4. د بیان د الجبر هره اکسیومه تاوتولوجي ده.

یو ځل به بېرته زموږ لمړنیو کتونو ته راوګرځو. موږ په لمړي پاراګراف کي یو ه نوي ژبه $\mathfrak{L}$=< a,b,c,...,0,1,(,), ¬,∧,∨,⟶,↔ > جوړه او په هغه ژبه کي مو د کلمو او جملو د جوړولو اصول طرح کړه. وروسته مو ژبي ته د ضرورت له مخي پراختیا ورکړه او په هغه ژبه کي مو د طبیعي عددو څخه د بیانو د اندکس په صفت کاروا خیستي. په نوموړي ژبه کي د داسي بیانو سره مخامخ سوو، چي هغوي تل رشتیا، یا زموږ په اصطلاح تاوتولوجي دي. دغه ډول بیانونه مو د اکسیومو په نامه یادکړل. اوس به نو یو ګام نور هم مخته ولاړ سو، ټوله دغه خاصیتونه به سره یوځای او یو نوم به ورکړو.

تعریف 2.4. دبیانو سیټ Δ د ریاضي د تیوري Mathematical Theory یا په ساده ډول د تیوري په نامه یادوو، که:

1. د Δ په سیټ کی دشمېر وړ نښې راکړه سوی وي. د نښو هر متناهي لاړ د نوموړي سیټ د افادي په نامه یادوو.

2. هر متناهي لاړپه «معقول» ډول اوډل سوی دي نوموړي اوډنه مو په 1.2 تعریف کي مشخص او د بیان په نامه یادکړل.[6]

3. د Δ په سیټ کی د ټولوبیانو د سیټ څخه یو سب سیټ راکړه سوی دي، چي د اکسیومو په نامه مو یادکړل.

4. د Δ په سیټ کی د بیانو ترمنځ د $R_1,...,R_n$ متناهي اړیکو سیټ . دغه سیټ داستنباط د قوانینو د سیټ په نامه یادوو. د بېلګي په توګه یو د هغو څخه د Modus Ponens قانون دي ، چي د A او A⟶B په استناد B حقیقت لري.

نوټ: په څلورم شرط کي د استنباط اړیکه مودوس پوننس، چي د B بیان د A او A⟶B د بیانو د حقیقت په استناد حقیقت لري، په اصل کي پر درو بیانو (A, A⟶B,B) باندي دری ئېزه اړیکه ده.

تعریف 3.4 د Δ په تیوري کي د بیانو لاړ $A_1, A_2, ..., A_n$ د ثبوت Proof په نامه یادیږي، که د لاندنیو شرطو څخه یو شرط صدق وکي:

P_1 - A_i د بیان د الجبر اکسیومه ده،

P_2 - A_i د Δ د تیوري اکسیومه ده،

P_3 - د $k,j < i$ اندکسونه داسي وجودلري، چي د A_k بیان د $A_j \longrightarrow A_i$ بڼه لري.

د P_1 او P_2 شرطونه واضح دي او خاصي تشریح ته ضرورت نلري، خو د P_3 په شرط کي د لاندنیو دوو حالتو څخه یو حالت منځ ته راځي:

---

[6] په نورو کتابو کي د بڼه جوله ئېز فارمول well formed formula په نامه هم یادیږي [16] وګورئ

$$....A_j,...,\underbrace{A_j \to A_i}_{A_k},...,A_i,...$$

یا

$$....\underbrace{A_j \to A_i}_{A_k},...,A_j,...,A_i,...$$

پورتنۍ تعریف داسي هم تعبیرولای سو، چي د ثبوت دپاره پر له پسي خپل دلیلونه راوړو. دلیلونه به دري ډوله وي: هغه داچي یا به منطقي حقیقت (یعنی د بیان د الجبر اکسیومه) وي، یا به د ریاضي حقیقت، یعنی د راکړه سوي تیوري اکسیومه (ښه به داوي چي د ریاضي فرضیه ورته ووایو) وي او یابه د استنباط د اړیکو څخه یوه اړیکه د بېلګي پډول د مودوس پوننس قانون تطبیقولای سو، پدي معنی که د A او A⟶B او یا په معکوس ترتیب A⟶B او A ، په ښه دلایل راکړه سوي وي، نو د هغوی په استناد د B تصدیقولای سو. د بیان د منشاء د لاړ په څېر د ثبوت د هر جزء و څنګ ته به د هغه شرح لیکو.

بېلګه 2.4. پدي بېلګه کي زموږ د ریاضي تیوري Δ څلور ابتدائي بیانونه او د p∧q ، p⟶r او r⟶s بیانونه په ځان کي لري،پدي معنی:

$$\Delta=\{ p\wedge q, p\longrightarrow r, r\longrightarrow s \}$$

لاندي لاړ د Δ په تیوري کي ثبوت دي:

1) $\Delta\vdash (p\wedge q) \longrightarrow p$	P_1; A_{15}
2) $\Delta\vdash p\wedge q$	P_2
3) $\Delta\vdash p$	P_3;2,1
4) $\Delta\vdash p\longrightarrow r$	P_2
5) $\Delta\vdash r$	P_3;3,4
6) $\Delta\vdash r\longrightarrow s$	6. P_2,

$7)\ \Delta\vdash s$ $\quad P_3;5,6$

بیله تشریح څخه د ثبوت لاړ پدي ډول دي:

$(p\wedge q)\longrightarrow p,\ p\wedge q,\ p,\ p\longrightarrow r,\ r,\ r\longrightarrow s,\ s.$

د پورتنې ببلګي څېړنه د 1.4 ببلګي سره پرتله کي. هلته مو ثابته کړه چي:

$$\{\ p\wedge q,\ p\longrightarrow r,\ r\longrightarrow s\ \}\vDash s$$

تعریف 4.4. که د Δ او د A بیان راکړه سوی وي، نو وایو چې د A بیان د Δ په تیوري کي د ثبوت وړدي، او یا A د Δ د تیوري قضیه ده ، $\Delta\vdash A$ لیکو، که د

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ د ثبوت لاړ داسي وجود ولري، چي $A_n=A$ وي.

ببلګه 3.4. فرضوو چي د A او B بیانونه راکړه سوی دي. ثابتوو چي:

$$\{A\vee B,\ \neg A\}\vdash B$$

پدي معنی چي د B بیان په $\{A\vee B,\ \neg A\}$ کي د ثبوت وړ دي. دلته $\Delta=\{A\vee B,\ \neg A\}$ ده.

اوس نو باید دثبوت داسی لاړ و موندو ، چي د B بیان د هغه وروستی غړی وي.

$1)\ \Delta\vdash\neg A$	P_2
$2)\ \Delta\vdash\neg A\longrightarrow(\neg B\longrightarrow\neg A)$	P_1
$3)\ \Delta\vdash\neg B\longrightarrow\neg A$	$P_3;\ 1,2$
$4)\ \Delta\vdash(\neg B\longrightarrow\neg A)\longrightarrow(\neg\neg A\longrightarrow\neg\neg B)$	P_1
$5)\ \Delta\vdash(\neg\neg A\longrightarrow\neg\neg B)$	$P_3;3,4$
$6)\ \Delta\vdash\neg\neg B\leftrightarrow B$	P_1
$7)\ \Delta\vdash(\neg\neg B\leftrightarrow B)\longrightarrow(\neg\neg B\longrightarrow B)$	P_1

8) $\Delta\vdash(\neg\neg B\longrightarrow B)$ P_3; 6,7

9) $\Delta\vdash(\neg\neg A\longrightarrow\neg\neg B)\longrightarrow((\neg\neg B\longrightarrow B)\longrightarrow(\neg\neg A\longrightarrow B))$ P_1

10) $\Delta\vdash(\neg\neg B\longrightarrow B)\longrightarrow(\neg\neg A\longrightarrow B)$ P_3; 5,9

11) $\Delta\vdash\neg\neg A\longrightarrow B$ P_3; 8,10

12) $\Delta\vdash\neg\neg A\leftrightarrow A$ P_1

13) $\Delta\vdash(\neg\neg A\leftrightarrow A)\longrightarrow(A\leftrightarrow\neg\neg A)$ P_1

14) $\Delta\vdash A\leftrightarrow\neg\neg A$ P_3; 12,13

15) $\Delta\vdash(A\leftrightarrow\neg\neg A)\longrightarrow(A\longrightarrow\neg\neg A)$ P_1

16) $\Delta\vdash(A\longrightarrow\neg\neg A)\longrightarrow((\neg\neg A\longrightarrow B)\longrightarrow(A\longrightarrow B))$ P_1

17) $\Delta\vdash A\longrightarrow\neg\neg A$ P_3; 14,15

18) $\Delta\vdash(\neg\neg A\longrightarrow B)\longrightarrow(A\longrightarrow B)$ P_3; 17,16

19) $\Delta\vdash A\longrightarrow B$ P_3; 11,18

20) $\Delta\vdash B\longrightarrow B$ P_1

21) $\Delta\vdash(A\longrightarrow B)\longrightarrow((B\longrightarrow B)\longrightarrow((A\vee B)\longrightarrow B))$ P_1

22) $\Delta\vdash(B\longrightarrow B)\longrightarrow((A\vee B)\longrightarrow B)$ P_3; 19,21

23) $\Delta\vdash(A\vee B)\longrightarrow B$ P_3; 20,22

24) $\Delta\vdash A\vee B$ P_2

25) $\Delta\vdash B$ P_3; 24,23

پاس ډیره ساده بېلګه د بیان په الجبر کي د ثبوت د لاړ د موندلو د هنر خاص مغلق والي ښئي. ددی هنر د زده کړي لار یوازي او یوازی د تمرین د لویو غرنو تر څوکو تېرېږي.

د تیوري په جوړښت کي اکسیومي مهم رول لوبوي، خو که اکسیومي تر حده ډېري وي، نو دهغي تیوري د اهمیت کچه راټیټیږي. ځکه نو هڅه کېږي چي د امکان په صورت کي د اکسیومو شمېر محدود وساتل سي او ځني اکسیومي د قضیو په صفت د نورو اکسیومو څخه ثابت سي . په لاندنې بېلګه کي لمړي اکسیومه د نورو اکسیومو په مرسته ثابتوو.

بېلګه 4.4. که A د Δ په تیوري کي بیان وي ، نو د Δ په تیوري کي $A\longrightarrow A$ ثابتولای سو.په صوري بڼه یې $\Delta\vdash A\longrightarrow A$ لیکو.

د A_3 اکسیومي څخه یې را نښلوو . پدي بېلګه کي په پټه د تعویض د قضیې، 2.2 قضیه ، څخه کار اخلو. د A بیان پر خپل حال پرېږدو د B د بیان په عوض $A\longrightarrow A$ او د C د بیان په عوض هم د A بیان اېږدو. یعنی :

1) $\Delta\vdash (A\longrightarrow((A\longrightarrow A)\longrightarrow A))\longrightarrow((A\longrightarrow(A\longrightarrow A))\longrightarrow(A\longrightarrow A))$ A_3

2) $\Delta\vdash A\longrightarrow((A\longrightarrow A)\longrightarrow A)$ A_{13}

3) $\Delta\vdash (A\longrightarrow(A\longrightarrow A))\longrightarrow(A\longrightarrow A)$ P_3,1,2

4) $\Delta\vdash A\longrightarrow(A\longrightarrow A)$ A_{13}

5) $\Delta\vdash A\longrightarrow A$ P_3, 3,4

تمرین 1.4. لاندنې افادي ثابتی کي:

1) $\vdash(\neg B\longrightarrow B)\longrightarrow B$

2) $\{B\longrightarrow C, C\longrightarrow D\}\vdash B\longrightarrow D$

3) $\{B\longrightarrow(C\longrightarrow D)\}\vdash C\longrightarrow(B\longrightarrow D)$

قضیه 3.4. فرضوو چي Δ او Γ د بیانو سیټونه دي. بیانو لاندي ادعاوی صدق کوي:

الف) که A د بیان د الجبر اکسیومه وي ، نود A بیان د Δ په سیټ کي د ثبوت وړ دی،یعنی $\Delta \vdash A$؛

ب) که $A \in \Delta$ وي ، نو $\Delta \vdash A$ ؛

ج) که $\Delta \subseteq \Gamma$ او $\Delta \vdash A$ **وي**، نو $\Gamma \vdash A$

ثبوت[7]. الف) که A د بیان د الجبر اکسیومه وي ، نو یو عنصره لاړ "A" د A د بیان ثبوت دي او دلته P_1 یې د شرح په صفت و څنګ ته لیکلای سو. پدي معنی چي $\Delta \vdash A$ دي.

ب) که $A \in \Delta$ وي، نو بیا هم د A د بیان د ثبوت لاړ به یوازي یو عنصر "A" ولری او په څنګ کی د شرح په صفت P_2 لیکلای سو، ځکه نو $\Delta \vdash A$ دي.

ج) که $\Delta \vdash A$ وي ، نو د A د بیان ثبوت وجود لري، پدي معنی چي دΔ په سیټ کي د ... $A_n,$ $A_1,$ د بیانو لاړ داسی وجود لري، چي $A_n=A$ دي. د ریاضي د استقراء په طریقه به ثابته کو، چي د هر $i=1,...,n$ دپاره $\Gamma \vdash A_i$ او د $i=n$ دپاره زموږ ادعا لاسته راوړو.

فرضوو،چي د $j<i$ دپاره $\Gamma \vdash A_j$ دي. د ثبوت د تعریف څخه استدلال کولای سو، چي د A_i بیان د P_1-P_3 د شرطو څخه یو شرط پرځای کوی. که د P_1 یا P_2 شرط پر ځای کي نو د P_1 او P_2 د شرطو پر بنسټ $\Gamma \vdash A_i$ دي. فرضوو چي د A_i دپاره د P_3 شرط صدق کوي، پدي معنی، چي د $j,k<i$ داسی وجود لري، چي $A_k=(A_j \longrightarrow A_i)$ دي. باید ثابته کو،چي $\Gamma \vdash A_i$ دی. د استقراء د فرضیې پر بنسټ $\Gamma \vdash A_k$ او $\Gamma \vdash A_j$ دي. پدي معنی چي د A_j دپاره د $B_l,$ $B_1,$ ... ثبوت داسي وجود لري، چي $B_l=A_j$ کیږي او د $C_1, ..., C_t$ ثبوت داسي وجود لري، چي $C_t=A_k=A_j \longrightarrow A_i$ دي. د B_l او $B_l \longrightarrow A_i$ په استناد (مودوس پوننس) A_i د Γ په سیټ کي حقیقت لري، یعنی $\Gamma \vdash A_i$ دي. پدی ډول قضیه ثابته سوه.

q.e.d.

[7] پاملرنه وکي چي دلته د ثبوت کلمه په دوو مختلفو مفهومو په کار اچول کیږي. یو داچي ثبوت د بیانو د لاړ په صفت او بل داچي د قضیې ثبوت په ژبني اصطلاح، یعنی پدی حالت کي د صوری تیوری څخه بهر یو.

کله چي يو تيوري منځ ته راځي يا په بله اصطلاح تعريف کېږي، نو د هغي تيوري څخه ځنې غوښتني لرو. يو داچي تيورى بايد درسته (صحيح) وي ، بل داچي تيوري بايد ضد او نقيض نه وي ، او بل داچي د تيوري د بشپړ توب په هکله قضاوت وکولای سو، پدي معنى چي د تيورى د هرى قضيې دپاره بايد ثبوت وجود ولري. نوموړي خاصيتونه به نژدي وڅېړو.

قضيه 4.4. (د بيان دالجبر د درستوالي (Correctness) په هکله)

که $\Delta\vdash A$ نو $\Delta\vDash A$.

قضيه وايي ، که د A بيان د Δ په تيوري کي د ثبوت وړ وي ، نو هغه د Δ په تيوري کي صدق کوي.

ثبوت. فرضوو چي $\Delta\vdash A$ دي، پدي معنى چي د Δ په تيوري کي $A_1, \ldots, A_n$ د A د بيان ثبوت داسي وجود لري ، چي $A=A_n$ سره دي. د رياضي د استقراء په ذريعه به يې ثابته کو، چي د $i=1,\ldots,n$ دپاره $\Delta\vDash A_i$ دي. په خاص ډول د $i=n$ دپاره $\Delta\vDash A_n=A$ صدق کوي.

فرضوو، چي د هر $j<i$ دپاره $\Delta\vDash A_j$ صدق کوي. غواړو، چي ثابته کو $\Delta\vDash A_i$ دي. څرنګه چي A_i په Δ کي د ثبوت دلاړ غړى دي، نو A_i بايد د P_3-P_1 يو شرط پر ځای کي.

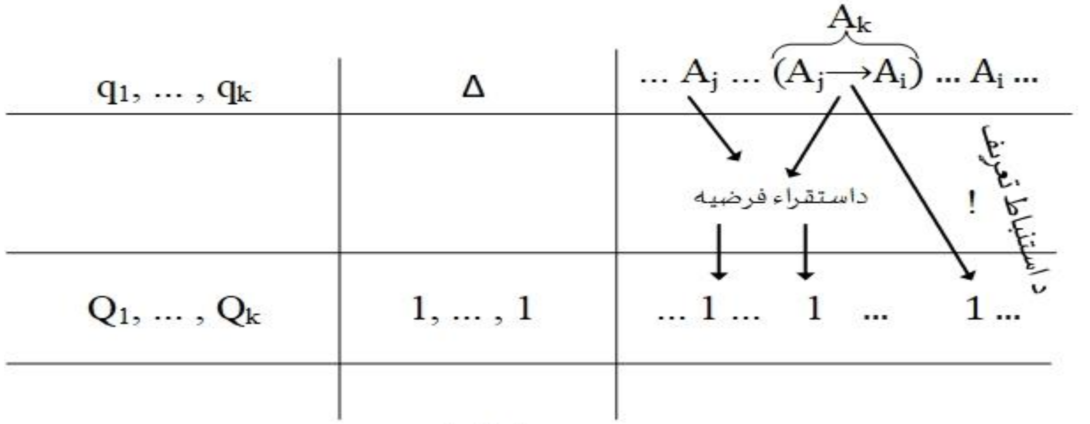
که A_i د P_1 پر شرط برابر وي، نو A_i تاوتولوجي ده ، پدي معنى $\emptyset\vDash A_i$ دي ، ځکه نو $\Delta\vDash A_i$ هم صدق کوي. د 1.2 قضيې دب) جز پر بنسټ. ځکه چي $\emptyset\subseteq\Delta$ دي.

که A_i د P_2 پر شرط برابر وي، نو $A_i\in\Delta$ دی، نو د 1.2 قضيې دالف) جز پر بنسټ $\Delta\vDash A_i$ صدق کوي.

فرضوو، چي A_i د P_3 پر شرط برابردی. بيانو د $j,k<i$ عددونه داسي وجود لري ،چی $A_k=(A_j\longrightarrow A_i)$ دي. د رشتياوالي دجدول هغه کرښه په نظر کي نيسو، چي په هغه کي د Δ د ټولو بيانو قيمت يو(1) دی. د استقراء د فرضيې پر بنسټ $\Delta\vDash A_j$ او $\Delta\vDash A_k$. پدي معنى، چي په دغه کرښه کي د A_j او A_k قيمتونه هم يو(1) دی.د استنباط د عمليې دتعريف له مخي دغه حالت يوازي هغه وخت ممکن دي، چي د A_i قيمت يو (1) وي . پدی ډول قضيه ثابته سوه.

لاندنی جدول د ثبوت شیما ترسیموي.

q.e.d.



جدول 1.4

دمخه تردی چي په عمومويِ ډول په رياضي کي ثبوت وځېږو، د بيان په الجبر کي به داسی فارمول راوړو، چي هغه د بيان په الجبر کي د ثبوت وړ ندی.

بېلګه 5.4. د بيان په الجبر کي د $\neg((A \lor B) \rightarrow ((B \land C) \lor \neg A))$ د ثبوت وړ ندي.

زموږ د ادعا دثبوت دپاره د A_{14} اکسيومه پر 4.4 قضيه باندي تطبيقوو.پدی معنی که د بيان په الجبر کي راکړه سوی بيان صدق ونه کي ، نو نوموړی بيان دبيان په الجبر کی د ثبوت وړ هم ندي. و 6.2 ببلګي ته د پاملرنی په نتيجه کي خپل يقين حاصل کي.

§5. ثبوت په رياضي کي

کله چي رياضي پوه د رياضي د کمي تيوري سره مخامخ سي، نو دهغه دپاره په لمړي ګام کي د $\Delta \vDash A$ حقيقت په زړه پوری دی.پدي معنی چي د رياضي دپاره د ثبوت موجوديت زموږ د تعريف په مفهوم په زړه پوري ندي ، بلکه هغه غواړی چي پوه سي ، آيا ثبوت وجود لري او که نه؟هغه غواړی د Δ په تيوری کی د مشخصی قضيې A د صدق په هکله ځان

متيقين كي. د درستوالی د قضيې پر بنسټ، 4.4 قضيه، کافی ده چي په هغه تيوري کي دA د قضيې دثبوت وړتوب، $\Delta\vdash A$ ،وښودل سي. يعنی بايد وښودل سي، چي آيا د A بيان د Δ په تيوری کی د ثبوت وړ دي او که نه؟ يا په بله اصطلاح آيا د Δ په تيوری کی د A د بيان ثبوت وجود لری او که نه؟ په عمل کي رياضي پوه زموږ د تعريف په مفهوم ثبوت نه ترسيموي، خو ښيي (بېله دي چي صريحاً ورته متوجه سی) ، چي زموږ د تعريف په مفهوم ثبوت وجود لري، يعنی $\Delta\vdash A$ دي. پدی موخه به بل مفهوم دلته تعريف کو.

تعريف 1.5. د Δ په تيوری کی د $A_1, \dots, A_k; A$ د بيانو لاړ د استنباط د قانون په نامه يادوو، په

$$\frac{A_1,\dots,A_k}{A} \qquad (\text{په } \Delta \text{ کي})$$

سره ښيو. که :

$\Delta\vdash A_1$ ، ... ، $\Delta\vdash A_k$ وی ، نو $\Delta\vdash A$ وي.

پدي معنی ،چي د Δ په تيوري که د A_1 ، A_2 ، ... ، A_k د ثبوتوالي په نتيجه کي د A بيان هم د ثبوت وړ وي، نو وايو چي نوموړی لاړ د استنباط قانون دی.

که د $A_1, \dots, A_k; A$ د بيانو لاړ د Δ په هره تيوري کي د استنباط قانون وي ، نو په ساده ډول داسی ليکو:

$$\frac{A_1,\dots,A_k}{A}$$

او محض د استنباط د قانون په نامه يې يادوو.

پورتني تعريف په اول نظر بيګانه برېښي، خو غير شعوری او د احساس له مخي حتي د ښوونځی په رياضي کی د هغه ځخه کار اخلو . که د Δ د تيوری په صفت د حقيقي عددو د اکسيومو سيستم په نظر کی ونيسو ، نو «د مساوات د دواړو خواوو سره يو عدد جمع کولای سو او يا د مساوات دواړی خواوی يوه عدد کي ، ضربولای سو». دلته که زموږ په نظر کي د

مساوات ښئ خوا په m_1 او دمساوات کينه خوا په m_2 او اختياری عدد په a سره وښيو ، نو د Δ په تيوري کي د استنباط نوموړي قوانين په لاندي ډول سره ارائه کولای سو:

$$\frac{m_1 = m_2}{m_1 + a = m_2 + a} \qquad \frac{m_1 = m_2}{m_1 . a = m_2 . a} \quad (\text{د } \Delta \text{ په تيوری کي})$$

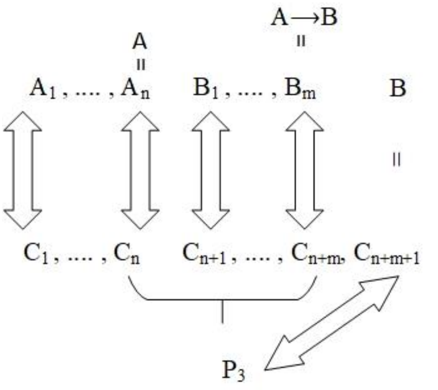
بېلګه 1.5. ډير ساده او په عين حال کي ډير مهم د استنباط قانون د مودوس پوننس (Modus Ponens) قانون دي، چی موږ تراوسه د پراخه لاسه کار څني اخلو.که A او B اختياري بيانونه وي ، نو د مودوس پوننس (په لنډ ډول m.p.) قانون داسي ليکلای سو:

$$\frac{A,\ A \to B}{B} \qquad \text{.... (m.p.)}$$

و به ښيو ، چي نوموړی لاړ د Δ په هره تيوري کي د استنباط قانون دي.

فرضوو، چي $\Delta \vdash A$ او $\Delta \vdash A \longrightarrow B$ ، يعنی د Δ په تيوری کی دA بيان اودA⟶B بيان د ثبوت وړ دي، پدی معنی، چي د Δ په تيوری کی د $A_1, \ldots, A_n$ او $B_1, \ldots., B_m$ لاړونه داسي وجود لري ، چی $A=A_n$ او $(A \longrightarrow B)=B_m$ سره دي. اوس نو بايد د Δ په تيوری کی داسي لاړ ومونډ، چي هغه د B د بيان ثبوت وي. هغه لاړ د راکړه سوو لاړو او د 3.4 تعريف P_3 په مرسته لاسته راځي.

د B د بيان ثبوت د $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots., C_{n+m}, C_{n+m+1}$ لاړ دی، چي په ترتيب سره C_1 څخه تر C_n پوری د A_1 څخه تر A_n پوري منطبق او C_{n+1} څخه تر C_{n+m} پوري د B_1 څخه تر B_m پوري منطبق دي.ځکه نو د C_1 څخه تر C_{n+m} پوری د هغوی دپاره په ترتيب سره د A_1 څخه تر B_m پوري د استنباط دليلونه اقتباسوو. اوس نو پاته سو $C_{n+m+1}=B$. C_{n+m+1} د C_n او C_{n+m} څخه د P_3 پر بنسټ د Δ په تيوری کی د ثبوت وړدي.څرنګه چي وروستی غړی يې د B بيان دي. نو $\Delta \vdash B$ دي. لاندني شيما وګوري:



شيما 1.5

دپورتني پېژندني عموميت ته پاملرنه وکي. موږکولای سو نوموړی قانون په هره تیوري کي په کار واچوو، پدی معنی هغه د ماوراء یا مافوق ریاضي د قوانینو څخه یو قانون دي.

د پورتني قضيې پر بنسټ د 3.4 قضيې نتيجوته داسي پراختيا ورکولای سو.

قضيه 1.5. فرضوو چي Δ او Γ د بيانو سيټونه دي. A بيان دی. که د Δ د سيټ د هر بيان B يعنی $B\in\Delta$ دپاره $\Gamma\vdash B$ او $A\vdash\Delta$ وی ، نو $\Gamma\vdash A$ دي.

ثبوت. فرضوو، چي $A_1, \ldots, A_n$ د Δ په سيټ کي د A د بيان ثبوت دي، يعنی $A=A_n$ دي. د رياضي د استقراء په طريقه به يې ثابت کو، چي د هر $i=1, \ldots, n$ ، $\Gamma\vdash A_i$ دي ، پدي ډول د $i=n$ دپاره زموږ د ادعا ثبوت لاسته راځي.

فرضوو، چي د هر $j<i$ دپاره $\Gamma\vdash A_j$ دي. غواړو، چي ثابت کو $\Gamma\vdash A_i$ دي. څرنګه چي A_i د Δ په سيټ کي د ثبوت د لاړ غړی دي، نو د3.4 تعريف د P_3-P_1 د شرطو څخه يو شرط پر ځای کوي. که A_i د بيان دالجبر د اکسيومو څخه وي، نو د 3.4 قضيې د الف) جز پراساس $\Gamma\vdash A_i$ دي. که $A_i\in\Delta$ وي، نو زموږ د فرضيې له مخي $\Gamma\vdash A_i$ دي. اوس نو پاته سو د P_3 شرط. پدي معنی ، چي د $j,k<i$ عددونه داسي وجود لري، چي $A_k=(A_j\longrightarrow A_i)$ دي. د استقراء د شرط له مخي $\Gamma\vdash A_j$ او $\Gamma\vdash A_k=(A_j\longrightarrow A_i)$ دي. د مودوس پوننس څخه په استفادي سره $\Gamma\vdash A_i$ دي. q.e.d.

بېلګه 2.5. فرضوو، چي B,A او C اختیاري بیانونه دي. دبیان د الجبر د اکسیومو څخه په استفادي سره په آساني سره ښودلای سو، چي د بیانو لاندنی لاړونه د Δ په اختیاري تیوری کی د استنباط قوانین دي. د هر قانون و څنګ ته به د هغه نوم هم ولیکو:

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$ د استنباط انتقالی خاصیت

$$\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$$ د استنباط د ترتیب خاصیت

$$\frac{\neg B \to \neg A}{A \to B}$$ غیر مستقیم ثبوت

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$ د مخالف حالت قانون

$$\frac{A \wedge A}{A}$$ د منطقی ضرب د ځان ځاني قانون Idempotent

$$\frac{A \vee A}{A}$$ د منطقی جمع د ځان ځانی قانون Idempotent

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}, \frac{A \vee B}{B \vee A}$$ د منطقی ضرب او جمع تبدیلي قانون

$$\frac{A, B}{A \wedge B}, \frac{A}{A \vee B}$$ د منطقی ضرب او جمع د شمولیت قانون

$$\frac{A \wedge B}{A}, \frac{A \to C, B \to C}{A \vee B \to C}$$ د منطقی ضرب او جمع د حذف قانون

$$\frac{A \equiv B}{B \equiv A}$$ د منطقی معادلیت تبادلي قانون

$$\frac{A \to B, B \to A}{A \equiv B}$$ د منطقی معادلیت د شمولیت قانون

$$\frac{A \equiv B}{A \to B}$$ د منطقی معادلیت د حذف قانون

$$\frac{A \to B, \neg A \to B}{B}$$ د تحلیل قانون

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$ د نفی نفی د شمولیت قانون

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$ د نفی نفی د حذف قانون

د بېلګي په ډول ثابتوو، چي د استنباط د عمليې انتقالي قانون د استنباط د قوانينو څخه يو قانون دي. فرضوو، چي د Δ د بيانو په سيت کي د B,A او C اختياری بيانونه دي. فرضوو، چي $\Delta \vdash A \longrightarrow B$ او $\Delta \vdash B \longrightarrow C$ دي. غواړو ثابته کو، چي $\Delta \vdash A \longrightarrow C$ دي. د فرضيې له مخي د $A_1, \ldots, A_n$ او $B_1, \ldots, B_m$ په ترتيب سره په Δ کي د $A \longrightarrow B$ او $B \longrightarrow C$ د ثبوت لاړونه دي، چي $A_n = (A \longrightarrow B)$ او $B_m = (B \longrightarrow C)$ دي.زموږ د $A \longrightarrow C$ د ثبوت لاړ به داسي ابسي:

$$A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m, A_n \longrightarrow B_m, B \longrightarrow B, A \longrightarrow (B \longrightarrow C), B \longrightarrow (A \longrightarrow C), A \longrightarrow C$$

په پام کي يې ولري، چي دلته د ځينو اکسيومو لکه $B \longrightarrow B$ او د استنباط په لاړ کي د ځای د اليشولو او بلاخره د مودوس پوننس څخه کار اخيستل سوی دي.

بېلګه 3.5. د استنباط په لاندني قانون به لوستونکئ د تمرين په څېر ځان باوری کي.

$$\frac{(A_1 \vee \ldots \vee A_n), A_1 \to B, \ldots, A_n \to B}{B}$$

د استنباط پورتنی قانون د استنباط د تحليل د قانون عمومي بڼه ده.

بېلګه 4.5. که $\Delta \vdash A$ ، نو $\frac{A_1,...,A_k}{A}$ د Δ په سيټ کي د A_1, ..., A_k اختياري بيانو دپاره داستنباط قانون دي.

په يقين سره، څرنګه چي د بيانو په سيټ Δ کي د A بيان د ثبوت وړدي، نو د 1.5 تعريف شرط په بديهي بنه صدق کوي.

څو شېبي وروسته به وګورو، چي د استنباط قوانين د ثبوت د لاړ د لنډولو دپاره مؤثره وسيله ده. خو د تېري بېلګی د استنباط قانون دغه دنده نه تر سره کوي. لمړی خو بايد موږ ته زموږ هدف څرګند وي. ددی دپاره چي رياضي پوه ثبوت په «چټکتيا » مخ ته يوسی، نو دی ته اړ دي چي داستنباط د قوانينو زيرمه ولري.

تعريف 2.5. د A_1, ..., A_k د بيانو لاړ د Δ په تيوري کي د رياضي ثبوت mathematical proof (mp) په نامه(يا د رياضي د ثبوت په مفهوم) يادوو، که د نوموړي لاړ د هر غړي ، يعنی د $i=1,...,n$ دپاره د لاندنيو شرطو څخه يو شرط صدق وکي:

A_i (mp1 د بيان د الجبر اکسيومه ده.

A_i (mp2 د Δ په تيوري کي قضيه ده.

$j_1<i$ (mp3 د j_k, ... , j_1 عددونه داسي وجود لري، چي $\frac{A_{j_1},...,A_{j_k}}{A}$ د Δ په تيوري کي د استنباط قانون دي.

دبيان په الجبر کي و ثبوت ته ورته درياضي دثبوت د هر غړي و څنګ ته د ثبوت دليل ليکو، څو څرګنده وي، چي د پورتنيو شرطو څخه کم شرط صدق کوي.

بېلګه 5.5. که د $\Delta=\{p_1\wedge p_2 , p_1\longrightarrow p_3 , p_3\longrightarrow p_4\}$ بيانو سيټ راکړه سوي وي ، نو لاندنئ ثبوت ښيي، چي $\Delta \vdash p_4$ (p_4 د Δ په سيټ کي د ثبوت وړ) دي.

1) $p_1\wedge p_2$ (mp1)

2) p_1 په(1) کی د منطق د ضرب د حذف قانون

3) $p_1 \longrightarrow p_3$ (mp_2)

4) $p_3 \longrightarrow p_4$ (mp_2)

5) $p_1 \longrightarrow p_4$ (3) او (4)د استنباط دعمليي انتقالی خاصيت

6) p_4 (2) او (5)مودوس پوننس

بېلګه 6.5. که A او B بيانونه وي ، نو لاندنۍ لاړ د $\Delta=\{A \vee B, \neg A\}$ په سيټ کي د رياضي د ثبوت په مفهوم ، ثبوت دي.

1) $\neg A$ (mp_1)

2) $\neg A \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$ (mp_1)

3) $\neg B \longrightarrow \neg A$ (mp_3) (1) او(2) مودوس پوننس

4) $A \longrightarrow B$ (mp_3) (3) دغير مستقيم د استنباط قانون

5) $B \longrightarrow B$ (mp_1)

6) $(A \vee B) \longrightarrow B$ (mp_3) (4) او(5) د $\vee$ حذف

7) $A \vee B$ (mp_2)

8) B (mp_3) (7) او(6) مودوس پوننس

نوموړی بېلګه د 3.4 بېلګي سره پرتله کي.

قضيه 2.5. که د Δ په تيوری کي ډ $A_1, \dots, A_n$ د رياضی د ثبوت په مفهوم ، ثبوت داسي وجود ولري چي $A_n=A$ وي، نو $\Delta \vdash A$ دي.

ثبوت. فرضوو چي $A_1, \dots, A_n$ د Δ په تيوری کي د رياضی د ثبوت په مفهوم ثبوت دي. د رياضي د استقراء په طريقه يې ثابتوو، چي د هر $i=1, \dots, n$ دپاره $\Delta \vdash A_i$ دي.

فرضوو چي د هر $j<i$ دپاره $\Delta \vdash A_j$ صدق کوي. غواړو ثابته يې کو، چي $\Delta \vdash A_i$, $A_1, \dots, A_n$ هم د Δ په تيوری کي د رياضی د ثبوت په مفهوم ثبوت دي. ځکه نو A_i بايد د رياضي د ثبوت د درو شرطو څخه يو شرط پرځای کي.

که A_i د mp_1 شرط پر ځای کي، نود 3.4 قضيې د الف د شرط پراساس $\Delta \vdash A_i$ دي.

که A_i د mp_2 شرط پر ځای کي، نودتعريف له مخي $\Delta \vdash A_i$ دي.

فرضوو، چي A_i د mp_3 شرط پر ځای کوي. بيانو د تعريف له مخي د $j_1, \dots, j_k<i$ داسی وجود لري، چي :

$$\frac{A_{j_1}, \dots, A_{j_k}}{A_i}$$

د Δ په تيوری کي د استنباط قانون دي. څرنګه چي $j_1, \dots, j_k<i$ ، نو استقراء د فرضيې له مخي هر يو $\Delta \vdash A_{j_1}, \dots, \Delta \vdash A_{j_k}$ دي، ددی ځايه د استنباط د قانون پر اساس $\Delta \vdash A_i$ دي. که $i=n$ سره کښېږدو، نود قضيې ادعا ثابتيږي.

نتيجه 1.5. که $A_1, \dots, A_n=A$ د Δ په تيوری کي د رياضي دثبوت په مفهوم ثبوت وي ، نو $\Delta \vDash A$.

بېلګه 7.5. د پورتني نتيجي پر بنسټ د 6.5 بېلګي په هکله د A او B اختياری بيانو دپاره $\{A \vee B, \neg A\} \vDash B$ صدق کوي.

6§. د ثبوت طریقي

په تېر پارګراف کي چي موږ د ریاضي په مفهوم ثبوت معرفی کي، معمولآد مستقیم ثبوت په نامه یادیږي.خو اضافه تر 2500 کلونو ریاضي پوهانو په خپلو څېړونو کي د ثبوت د نورو طریقو څخه هم کار اخیستي دي. د هغي ساده تریني طریقي څخه به یې راشروع کړو، چي ریاضي پوه غیر آګاهانه کار ځنی اخلي.لمړئ خو به یوتړون وکو، هغه داچي د $\Delta\cup\{A\}\vdash B$ په بدل کي به $\Delta,A\vdash B$ لیکو.

کله چي ریاضي پوه د $A\longrightarrow B$ استنباط ثابتوی، نو وايي چي «فرضوو چي A صدق کوي». پدی معنی چی د A بیان د Δ د تیوري پر بیانو وراضافه کوي. په حقیقت کي د B دبیان ثبوت د $\Delta\cup\{A\}$ تر فرضیې لاندي صورت نیسی. لاندنې قضیه ددغه کار درستوالی تائیدوي. یعنی پدی ډول د Δ په تیوري کي یې د$A\longrightarrow B$ استنباط ($\Delta\vdash A\longrightarrow B$) ثابت کي. لاندنې قصیه د ریاضي په منطق کي ډېره مهمه قضیه ده او د استنباط دقضیې (Deduction Theorem) په نامه یادیږي.

قضیه 1.6. (د استنباط قضیه the deduction theorem). فرضوو چي Δ د بیانو سیټ، A او B بیانونه دي.بیانو $\Delta\vdash A\longrightarrow B$ یوازي او یوازي هغه وخت صدق کوي، چي $\Delta,A\vdash B$ وي.

ثبوت. د ښئ څخه کیڼ لوری ته استنباط ساده دي، پدی معنی چي د $\Delta\vdash A\longrightarrow B$ څخه $\Delta,A\vdash B$ساده ثابتیږي. ځکه چي د $\Delta\vdash A\longrightarrow B$ تر فرضیې لاندي $\Delta,A\vdash A\longrightarrow B$ او $\Delta,A\vdash A$ صدق کوي . اوس نو د استنباط د مودوس پوننس د قانون تر عملی کېدو وروسته $\Delta,A\vdash B$ لاسته راځي.

اوس به نو قضیه د کیڼ څخه و ښئ لوري ته ثابته کو.فرضوو ، چي $\Delta,A\vdash B$ صدق کوي یعنی د $\Delta\cup\{A\}$ په سیټ کي د B بیان دثبوت وړدي. پدی معنی چي په Δ,A کي د B ثبوت یعنی $A_1, \ldots, A_n$ داسي وجود لري، چي $B=A_n$ دي.باید ثابته کو، چي د Δ په سیټ کي $A\longrightarrow B$ ثبوت هم وجود لري. ددی دپاره ثابتو ، چي د $i=1,\ldots,n$ دپاره $\Delta\vdash A\longrightarrow A_i$ صدق کوي ، به

خاص ډول که i=n وی ، نو موږ به خپل هدف ته ورسیږو. ثبوت د ریاضي داستقراء په طریقه سرته رسوو.

فرضوو، چي د j<i دپاره $\Delta\vdash A\longrightarrow A_j$ صدق کوي. غواړو ثابته کو، چي $\Delta\vdash A_i$ دي. څرنګه چي A_i د $\Delta\cup\{A\}$ په سیټ کي د ثبوت د لاړ غړی دي، نو لاندي دری حالته ممکن دي:

الف) A_i د بیان دالجبر اکسیومه ده، $A_i\longrightarrow(A\longrightarrow A_i)$ هم د بیان دالجبر داکسیومو څخه یو اکسیومه ده(تعریف 1.4 ، A_{13}). ددوی دواړو او د مودوس پوننس څخه په استفادی سره $A\longrightarrow A_i$ لاسته راځي. ځکه نو $\Delta\vdash A\longrightarrow A_i$ دي.

ب) که $A_i\in\Delta\cup\{A\}$ وي، نو دلته دوه امکانه وجودلري:

ب۱) $A_i\in\Delta$ دي بیاهم د الف و جزء ته د کتې متې استدلال په نتیجه کي $\Delta\vdash A\longrightarrow A_i$ دي.

ب۲) $A_i\in\{A\}$ دي. بیانو $A=A_i$ سره دي او $A\longrightarrow A$ په Δ کي ثبوت دي، ځکه نو:

. $\Delta\vdash A\longrightarrow A_i$

ج) فرضوو، چي دریم حالت ممکن دي ، یعنی د j,k< i عددونه داسي وجود لري، چي

$A_k=(A_j\longrightarrow A_i)$ دي. د استقراء د فرضیې له مخي $\Delta\vdash A\longrightarrow A_j$ او $\Delta\vdash A\longrightarrow(A_j\longrightarrow A_i)$ صدق کوي. پدي معنی چي د Δ په سیټ کي د $E_1, \ldots, E_k$ او د $F_1, \ldots, F_l$ د ثبوت لاړونه داسي وجود لري چی $E_k=(A\longrightarrow A_j)$ او $F_l=(A\longrightarrow(A_j\longrightarrow A_i))$ دي، بیانو لاندنئ لاړد Δ په سیټ کي ثبوت دي:

E_1

$\vdots$ د اصلی لاړ دلیلونه راوړو

$E_k=A\longrightarrow A_j$

$(A\longrightarrow A_j)\longrightarrow((A\longrightarrow(A_j\longrightarrow A_i))\longrightarrow(A\longrightarrow A_i))$ تعریف 3.4. P_1

$(A\longrightarrow(A_j\longrightarrow A_i))\longrightarrow(A\longrightarrow A_i)$ $k,k+1,P_3$

F_1

$\vdots$ د اصلی لاړ دلیلونه راوړو

$F_l=A\longrightarrow(A_j\longrightarrow A_i)$ دلاړ$k+2+l$جز دي

$A\longrightarrow A_i$ $k+l+2, k+l+1, P_3$

ځکه نو $\Delta\vdash A\longrightarrow A_i$ دي. q.e.d

په لرغوني یونان کي فیثاغورث او دهغه ښوونځي تر میلاددمخه په شپږمه پېړۍ کي د تضاد یا تنقیض په طریقه د ثبوت سره بلد وه. د هغه په مرسته یې په هغه وخت کي ډیره ستونځمنه دعوي ، د مربع د ضلعو په وسیله د مربع د قطر د نه اندازه کیدو (په بله اصطلاح د $\sqrt{2}$ د غیر ناطق والی) ، ثبوت راوړي[8]. نوموړی طریقه وروسته په لاتینی ژبه کي د reductio ad absurdum ، د عقل د نه منلو تر پولو پوری استدلال ته دوام ورکول، په نامه یاده سوه. که څه هم د Absurdum کلمه د مزخرف یا مبتذل په مفهوم ده، خو زموږد ریاضي په متن کي به یې د سالم عقل د نه منلو په مفهوم په کار واچوو. ددی طریقي تیوریکي بنسټ لاندني قضیه ده.

قضیه 2.6. (Reductio ad absurdum). فرضوو چي Δ د بیانو سیټ ، A او B بیانونه دی.

الف) که $\Delta, \neg A\vdash B$ او $\Delta, \neg A\vdash\neg B$ وي، نو $\Delta\vdash A$ دي.

ب) که $\Delta, A\vdash B$ او $\Delta, A\vdash\neg B$ وي، نو $\Delta\vdash\neg A$ دي.

ثبوت.الف) فرضوو، چي $\Delta, \neg A\vdash B$ او $\Delta, \neg A\vdash\neg B$ صدق کوي.دقضیې دثبوت دپاره د استنباط د قوانینو څخه کار اخلو. د نفی نفی د شمولیت د قانون له مخي د لومړي فرضیې څخه $\Delta, \neg A\vdash\neg\neg B$ لاسته راځي. د استنباط دقضیې پر بنسټ $\Delta\vdash\neg A\longrightarrow\neg\neg B$ او په عین حال کي ،نظر و دوهمي فرضیې ته، $\Delta\vdash\neg A\longrightarrow\neg B$ صدق کوي. داستنباط د غیر مستقیم د

---

[8] [17] نیازمن، الجبر او دعددونو تیوری لومړي برخه 30مه صفحه وګوري.

ثبوت د قانون له مخي $\Delta\vdash\neg B\rightarrow A$ او $\Delta\vdash B\rightarrow A$ لاسته راځي. د استنباط د تحليل د قانون پر بنسټ $\Delta\vdash A$ لاسته راځي.

ب) د $\Delta, A\vdash B$ او $\Delta, A\vdash\neg B$ د فرضيو څخه د استنباط د قضيې پر بنسټ $\Delta\vdash A\rightarrow B$ او $\Delta\vdash A\rightarrow\neg B$ لاسته راځي. د استنباط د مخالف حالت د قانون پر بنسټ $\Delta\vdash\neg B\rightarrow\neg A$ او $\Delta\vdash\neg\neg B\rightarrow\neg A$ او داستنباط د تحليل د قانون پر بنسټ $\Delta\vdash\neg A$ لاسته راځي.

q.e.d.

تعريف 1.6. دبيانو جوړه C او $\neg C$ د Δ په تيوري کي د تنقيض يا تضاد په نامه يادوو، که په عين حال کي $\Delta\vdash C$ او $\Delta\vdash\neg C$ وي.

پدي حساب د تنقيض يا تضاد په طريقه د ثبوت هنر پدي کي دي ، چي که وغواړو د Δ د سيټ تر فرضيو لاندی د A بيان ثابت کو، نو د ثبوت په لاړ کي د $\neg A$ بيان وراضافه کوو او تر کم تنقيض پوري ځان رسوو. د مستقيم ثبوت پر خلاف نوموړی طريقه يوه ګټه لري، هغه داچي مخکي له مخکي مشخص هدف ندی راکړه سوي. که د A بيان په مستقيمه توګه ثابتوو، نو مجبوره يو چي د رياضي په مفهوم د ثبوت لاړ داسي ترسيم کو ، چي وروستئ غړی يې د A بيان وي. پدی معنی چي مخکي له مخکي هدف معلوم دي ، خو کله کله دغه هدف ته په مشکله رسيږو. د تنقيض په طريقه ثبوت کي څه نا څه آزادی لرو. زموږ هدف يوازی د کم تنقيض يا تضاد موندل دي. د استنباط د بيان د ثبوت دپاره اکثراً د استنباط قضيه د استنباط د غير مستقيم قانون او يا د تنقيض په طريقه دثبوت سره ترکيب کيږي.

قضيه 3.6. که $\Delta, \neg B\vdash\neg A$ وی ، نو $\Delta\vdash A\rightarrow B$ دي.

ثبوت. د$\Delta, \neg B\vdash\neg A$ فرضيې او د استنباط د قضيې پر بنسټ $\Delta\vdash\neg B\rightarrow\neg A$ لاسته راځي. ددی ځايه د استنباط د غير مستقيم قانون له مخي د قضيې ادعا ، يعنی $\Delta\vdash A\rightarrow B$ لاسته راځي. q.e.d.

قضيه 4.6. که $\Delta, \neg B,A\vdash C$ او $\Delta, \neg B,A\vdash\neg C$ وی ، نو $\Delta\vdash A\rightarrow B$ دي.

ثبوت. د $\Delta, \neg B,A\vdash C$ او $\Delta, \neg B,A\vdash\neg C$ د فرضيو څخه د 2.6. قضيې د ب) د جزء پر بنسټ $\Delta, \neg B\vdash\neg A$ لاسته راځي. اوس نو د استنباط د قضيې $\Delta\vdash\neg B\longrightarrow\neg A$ او د استنباط د غير مستقيم قانون څخه په ګټه اخيستلو سره $\Delta\vdash A\longrightarrow B$ لاسته راځي .

q.e.d.

§7. د بيان د الجبر نغښتنه (Compactness)

مونږ په خپلو مخکنيو څېړنو کي په دقيقه توګه و نه ويل ، چې ايا زمونږ د بيانو سيټ Δ به متناهی او که لايتناهي وي. تراوسه پوري ټوله لاسته راوړنې په هغه صورت کي چې د بيانو سيټ Δ لايتناهي سيټ وی ، هم صدق کوي. لاندني نتيجي به څرګنده کی ، چې د ثبوت وړتوب د مفهوم څخه «د لايتناهي بيانو» په اړوند هم کار اخيستلای سو.

قضيه 1.7. (د نغښتني په هکله Compactness). فرضووچي Δ د بيانو سيټ او A بيان دي. د A بيان د Δ په سيټ کي يوازی او يوازي هغه وخت د ثبوت وړ دي، يعنی $\Delta\vdash A$ ، چي د $\Delta_0\subseteq\Delta$ متناهي سيټ داسي وجود ولري چي $\Delta_0\vdash A$ وي.

ثبوت. فرضوو،چي $\Delta\vdash A$ دي، بيانو د Δ په سيټ کي د $A_1, \ldots, A_n$ د A دبيان ثبوت داسي وجود لري، چي $A=A_n$ دي. د ثبوت په لاړ کي هغه عنصرونه رااخلو، چي د Δ په سيټ اړه لري. پدي معنی:

$$\Delta_0=\{ B\in\Delta; \text{ چي د هغه دپاره } i \text{ داسي وجود لري } i=1,2,\ldots,n; B=A_i\}$$

پدي ډول د $A_1, \ldots, A_n$ لاړ د $\Delta_0\subseteq\Delta$ په سيټ کی هم د A د بيان ثبوت دي. پدي لحاظ $\Delta_0\vdash A$.

برعکس، که د $\Delta_0\subseteq\Delta$ متناهي سيټ داسي وجود ولري،چي $\Delta_0\vdash A$ ، نو د 3.4 ج) قضيې له مخي $\Delta\vdash A$ دي. q.e.d.

که مسئله د محتوا Semantics له مخي و څېړو ، نو ورته ادعا د بيان د رشتيا والي د اړيکي په هکله صدق کوي.

قضیه 2.7.(د نغښتني سیمانتیکی قضیه). فرضووچي Δ د بیانو سیټ او A بیان دي. د A بیان د Δ په سیټ کي یوازی او یوازي هغه وخت صدق کوي،یعنی $\Delta\vDash A$ چي د $\Delta_0\subseteq\Delta$ متناهي سیټ داسي وجود ولري چي $\Delta_0\vDash A$ وي.

د پورتني قضیې ثبوت ډیر پیچلئ دي.په عمومي ډول د قضیې د ثبوت دپاره د سیټ د تیوري ځینو قوی نتیجو ته اړتیا لرو.موږ به قضیه یوازي په هغه صورت کي ثبوت کو ، چي د Δ سیټ د شمېر وړ سیټ وي. د عملی بیان مفهوم می پخوا په 3.3. تعریف کي در وپېژندي . هلته مو وویل، چي د رشتیاوالی د قیمت د تعریف له مخي $\nu(A)=1$ یوازي او یوازي هغه وخت صدق کوي،چي $\nu(\neg A)=0$ وي. پدي معنی چي د A بیان د Δ په سیټ کي صدق کوي، $\Delta\vDash A$ ، یوازی او یوازی هغه وخت چي $\neg A$ د Δ په سیټ کي غیر عملی وي.

د نوموړي معادلیت څخه په اسانی لیدل کیږي، چي د بیان د الجبر د نغښتني قضیه د لاندني قضیې څخه استنباط کیږي.نوموړي قضیه ورسره معادله هم ده.

قضیه 3.7. (د عملی بیان په هکله). د Δ په سیټ کي د A بیان یوازی او یوازی هغه وخت عملی دي، کله چي د A بیان د Δ د سیټ په هر متناهي سب سیټ Δ_0 $(\Delta_0\subseteq\Delta)$ کي عملی وي.

ثبوت. که د Δ په سیټ کي د A بیان عملی وي، نو بدیهي ده ،چي د A بیان د Δ د سیټ په هر متناهي سب سیټ Δ_0 $(\Delta_0\subseteq\Delta)$ کي عملی دی. پدي معنی چي د ښئ څخه و کیڼ لوری ته استنباط بدیهی دي. د کیڼ لوري څخه و ښئ لورته استنباط به په هغه صورت کي چي د Δ سیټ د شمېر وړ سیټ وي ، وڅیړو.

فرضوو، چي $\Delta=\{B_0, B_1, \ldots ,B_n, \ldots\}$ د بیانو د شمېر وړ سیټ دي. یعنی د Δ په سیټ کي لایتناهي ، خو د شمېر وړ بیانونه دي. فرضوو، چي د Π_n سیټ د ابتدائي بیانو پر بنسټ داسي تعریف سوي دي:

$\Pi_n=\{p$ ابتدائي بیان دي : د p بیان د $B_0, \ldots ,B_n,A$ په کم بیان کي څرګندیږي$\}$

څرګنده ده ، چي د هر n دپاره $\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1}$ دی (ولی؟). $\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n$ سره اېږدو. د هر n دپاره V_n داسي په نښه کوو:

$$V_n = \{ \nu: \Pi_n \longrightarrow \{0,1\} \; ; \; \nu(B_0) = \nu(B_1) = ... = \nu(B_n) = \nu(A) = 1 \}$$

پدي معنی چي د هر n دپاره د رشتياوالي په جدول کي هغه کرښه را اخلو ، چي په هغه کی د ټولو بيانو قيمت يو دي ، يعنی ټول بيانونه رشتيا دي. دغه کار کولای سو، ځکه چي د A بيان د فرضيې له مخي د Δ د سيټ په هر متناهي سب سيټ کي عملی دي. اوس به دغه ډول ټوله جدولونه سره يوځای کو. پدی معنی چي $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ سره اېږدو. د فرضيې له مخي د هر n دپاره د V_n سيټ غير خالی دي. اوس نو دوه امکانه لرو ، هغه داچی د Π سيټ به يا متناهي وی او يا لايتناهي.

لمړئ به هغه حالت وڅېړو، چي د Π سيټ متناهي وي. بيانو n_0 داسي وجود لري ، چي د هر $n>n_0$ دپاره $\Pi_n = \Pi_{n_0} = \Pi$ دي. بيانو د $n \geqq n_0$ دپاره [9]:

$$V_n \subseteq {}^{\Pi_n}\{0,1\} = {}^{\Pi}\{0,1\}$$

څرګنده ده ، چي د $n \geqq n_0$ دپاره $V_{n+1} \subseteq V_n$ دي. څرنګه چي د ${}^{\Pi}\{0,1\}$ (د Π د سيټ څخه د $\{0,1\}$په سيټ کي د ټولو مپينګو سيټ) سيټ متناهي دي، نو $n_1 \geqq n_0$ داسي وجود لري ، چي د $n>n_1$ دپاره $V_n = V_{n_1}$ دي. څرنګه چي $V_{n_1} \neq \varnothing$ دي نو $\nu \in V_{n_1}$ وجود لري ، بيانو د هر $B \in \Delta$ دپاره $\nu(B)=1$ او $\nu(A)=1$ صدق کوي . خو دغه مو غوښتل چي ثابته يې کو.

اوس به نو هغه حالت وڅېړو ، چي د Π سيټ لايتناهي وي.فرضوو چي د Π سيټ لايتناهي دي. که $\upsilon, \omega \in {}^{\Pi}\{0,1\}$ وي، نو $\upsilon \sqsubseteq \omega$ پدی مفهوم دي ، چي د هر $B \in \mathbf{D}(\upsilon)$ دپاره

9 د لاندنيو نښو دپاره به پر [3] بوکوفسکي : سيټونه او هرڅه د هغوی په هکله ؛ د نيازمن ژباړه 30 صفحه ، حواله درکړم.

که $\mathbf{D}(\upsilon)\subseteq\mathbf{D}(\omega)$ وی،نو $\upsilon(B)=\omega(B)$ دي.دلته $\mathbf{D}(\upsilon)$ او $\mathbf{D}(\omega)$ په ترتیب سره د υ او ω دمپینګ د تعریف ساحه ده.

په یاد یې ولری ، که $\omega\in V$ وی، او $\upsilon\sqsubseteq\omega$ وي، نو $\upsilon\in V$ دي.

د $n=0,1, ...,n, ...$ دپاره د $\upsilon_n\in V_n$ لاړ داسي ترسیمو، چي د هر n دپاره $\upsilon_n\sqsubseteq\upsilon_{n+1}$ وي.
د $\upsilon\in V_n$ دپاره $W_\upsilon=\{\omega\in V;\ \upsilon\sqsubseteq\omega\}$ په نښه کوو. په آساني سره باور کولای سي، چي د نوموړې سیټ په هکله لاندني اړیکه صدق کوي:

که $\upsilon\in V_n$ وي، بیانو $W_\upsilon=\bigcup\{W_\omega;\ \omega\in V_{n+1},\ \upsilon\sqsubseteq\omega\}$ دی ....(*)

علاوه پر دي $V=\bigcup_{\upsilon\in V_0}W_\upsilon$ دی. اوس به نو د $n\in\mathbb{N}$ دپاره په ساده ډول د υ_n لاړ ترسیم کو.
څرنګه چي د V سیټ لایتناهي سیټ دي ، د V_0 سیټ متناهي دي، بیانو $\upsilon_0\in V_0$ داسي وجود لري، چي د W_{υ_0} سیټ لایتناهی دي. کله چی په دغه ډول مو د $\upsilon_n\in V_n$ داسي ترسیم کي، چي د W_n سیټ لایتناهي وي، بیانو د (*) اړیکي پر بنسټ $\upsilon_{n+1}\in V_{n+1}$ داسي وجود لري، چي $\upsilon_n\sqsubseteq\upsilon_{n+1}$ وي او د $W_{\upsilon_{n+1}}$ سیټ به لایتناهي وي. په هغه صورت کي لاندني مپینګ :

$$\mu:\ \Pi\longrightarrow\{0,1\}\qquad;\ \mu(q)=\upsilon_n(q) \text{ که } q\in\Pi_n\subseteq\Pi \text{ وي}$$

د «جدول هغه کرښه» ده ، چي د Δ سیټ او د A بیان پکښي صدق کوي.

q.e.d.

§8. د بیان د الجبر بشپړتوب (Completeness)

د یوی تیوري د مهمو خصوصیاتو څخه د هغي بشپړتوب دي. لاندنې قضیه مورته راښیي ، چي د ثبوت وسیله په کافي اندازه پراخه او قوي ده ، چي د بیان د حقیقت د تثبیت دپاره په کار واچول سي.لاندني قضیه د بیان د الجبر صوري syntactical او دهغه د مودل یا عملي

semantical ساحي، زموږ په څېړنو کي تر اوسه د هغو د حقیقت په هکله د جدول په ذریعه قضاوت کاوه، اړیکه ارائه کوي.

قضیه 1.8. (د بشپړتوب په هکله Completeness). فرضوو چي Δ د بیانو سیټ او A بیان دی :

که $\Delta \vDash A$ وي ، نو $\Delta \vdash A$ دي.

پدي معنی ، که د A بیان د Δ په سیټ کي صدق کوي ، نو بیا په همدغه سیټ کی د ثبوت وړ دي.

ثبوت. زموږ د ادعا ثبوت به حقیقت کي په درو برخو ویشل کیږي: لمړئ په هغه حالت کي ، چي د $\Delta=\emptyset$ (یعنی د Δ سیټ خالي وي) . په دوهم حالت کي فرضوو، چی د Δ سیټ متناهي دي.بلاخره د بیان دالجبر د نغښتني د سیمانتیکي قضیې (2.7. قضیه) څخه په استفاده سره دریم حالت ، چي په هغه کي د Δ سیټ لایتناهي (د شمېر وړ) دي، ثابتوو.

د درو سرو حالتو څخه نسبتآ پیچلي یې لمړئ حالت دي. د ثبوت دپاره یې مرستندویه قضیه ثابتوو. دهغه تر مخه ځینو نښو اینښو دنو ته ستاسو پاملرنه راګرځوم.که Q د A د بیان د ریشتیاوالي ممکن قیمت (پدي معنی 1 یا 0) وي ، نو په $Q(A)$ سره د A د بیاه هغه حالت په نښه کوو چي $Q=1$ وي ، یعني د A بیان حقیقت لري او په $\neg A$ سره د $Q=0$ حالت په نښه کوو. پدي معنی که د A بیان درواغ وي ، نو $\neg A$ به حقیقت ولري.

قضیه 2.8. (د چرچ لیما Church's Lemma[10]).فرضوو چي د A بیان د $q_1 , \ldots , q_n$ ابتدائې بیانو څخه تشکیل سوی دي. فرضوو،چي Q د A دبیان درشتیاوالي د جدول هغه کرښه ده ، چي په هغه کي د $q_1 , \ldots , q_n$ د بیانو قیمتونه یعنی په ترتیب سره $Q_1 , \ldots , Q_n$ د رشتیاوالي قیمتونه دي، بیانو :

$$(Q_1)q_1, \ldots ,(Q_n)q_n \vdash (Q)A$$

[10] الونزو چرچ (Alonzo Church 1903-1995) نامتو امریکایي ریاضي پوه او د ریاضي د منطق متخصص ؤ چي په ریاضیاتو په خاص ډول د ریاضي په منطق کي مهمي علمي لاسته راوړني لري.

صدق کوي.

یادونه: زموږ د پخوانیو تړونو سره یو رنګ $Q=\nu(A)$ او $Q_1=\nu(q_1), ..., Q_n=\nu(q_n)$ دي، پدې معنی، چې د A د بیان د رشتیاوالي په جدول کې دقیقاً هغه کرښه زموږ هدف ده ، چې په هغه کې د ابتدائي بیانو قیمت د A د بیان دقیمت سره جوخت مساوي په یو دی.

بېلګه 1.8. د چرچ ادعا به د $A=(q_2\longrightarrow(q_1\vee\neg q_2))$ پر بېلګه باندې تشریح کړم.

د A بیان د دوو ابتدائي بیانو یعنی q_1 او q_2 بیانو څخه تشکیل سوی دي. د نوموړي بیان د رشتیاوالي د جدول ترسیم هم څه ستونزه نده. جدول یې رسم او زموږ د لاندنی استدلال سره یې پرتله کې.

که $Q_1=Q_2=0$ وي ،نو $Q=1$ دي. بیانو زموږ د نښې اېښودلو سره سم $(Q_1)q_1=\neg q_1$ ، $(Q_2)q_2=\neg q_2$ او $(Q)A=A$ دي. ځکه نو د چرچ د لیما ادعا په لاندې ډول ارائه کېږي:

$$\neg q_1, \neg q_2 \vdash A$$

که $Q_1=0$ او $Q_2=1$ وي، نو $Q=0$ دي. پدې حالت کې د چرچ د لیما ادعا په لاندې ډول ارائه کېږي:

$$\neg q_1, q_2 \vdash \neg A$$

اوس به نو بېرته د 2.8 قضیې و ثبوت ته راوګرځو:

د قضیې ثبوت: د ثبوت په ټول بهیر کې $Q_1 , ... , Q_n$ د $q_1 , ... , q_n$ بیانو اختیاري، خو ثابت ټاکل سوي د رشتیاوالي قیمتونه دي. پدې معنی که درشتیاوالي د جدولو په ژبه سره وړغېږو ، نو د اختیاري ، خو ثابت ټاکل سوي کرښې په هکله استدلال کوو. د اسانتیا په وجه

$$\Delta_0=\{(Q_1)q_1, ... ,(Q_n)q_n\}$$

سره په نښه کوو. پدې حساب Δ_0 غیر له د جدول د یو معینی کرښې څخه بل شی نه دي.

فرضوو، چي Γ د بیانو سیټ او $A_1, \ldots, A_m$ د A د بیان د منشاء لاړ دي. کولای سو فرض کړو ، چي د منشاء په لاړ کي غیر له $q_1, \ldots, q_n$ ابتدائي بیانو ځخه نور بیانونه ګډون نلري. فرضوو، چي $R_1, \ldots, R_m$ په ترتیب سره د $A_1, \ldots, A_m$ بیانو د رشتیاوالي په جدول په هغه کرښه کي درشتیاوالي قیمتونه دي، چي د $q_1, \ldots, q_n$ ابتدائي بیانونه د $Q_1, \ldots, Q_n$ قیمتونه لري. پدي معنی، چي د $j=1, \ldots, m$ دپاره $R_j=\nu(A_j)$ دي پداسي حال کي،چي د $i=1, \ldots, n$ دپاره $\nu(q_i)=Q_i$ دي. نظر و m ته د ریاضي د استقراء په طریقه ثابتوو، چي د هر $i=1,\ldots,m$ دپاره :

$$\Gamma\vdash(R_i)A_i$$

دی ، او د $i=m$ دپاره زموږ ادعا ثابتیږي.

فرضوو، چي د هر $j<i$ دپاره $\Gamma\vdash(R_j)A_j$ صدق کوي. غواړوو چي $\Gamma\vdash(R_i)A_i$ ثابته کو. ځرنګه چي A_i د A د بیان د منشاء د لاړ جزء دي، نو دري امکانه وجود لري، هغه داچي:

الف) A_i ابتدائي بیان دی.

ب) د $j<i$ اندکس داسي وجود لري، چي $A_i=\neg A_j$ دي.

ج) د $j,k<i$ اندکسونه داسي وجود لري، چي $A_i=(A_j\blacksquare A_k)$ دي ، پداسي حال کي چي $\blacksquare=\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ ($\blacksquare$ د ذکرسوو منطقي عملیو ځخه یوه عملیه ده) دي. اوس نو باید 19 مختلف حالتونه وڅیړو.هغه عبارت دي له: د الف) په حالت کي 1 حالت څیړو. د ب) په حالت کي نظر و دي ته چي آیا R_i رشتیا دي او که درواغ ، یعنی 0 یا 1 دي، دوه امکانه لرو او بلاخره د ج) په حالت کي ددوو بیانو A_k,A_j او یوي عملیې $\blacksquare$ دپاره څلور امکانه لرو(ځکه چي د رشتیاوالي جدول یې څلور کرښې لری). ځرنګه چي څلور عملیې او دهری عملیې دپاره څلور امکانه لرو ، نو په مجموع کی د 16 امکاناتو سره بوخت یو.

د الف) ځخه به یې را شروع کو.نظر و فرضیې ته A_i د $q_1, \ldots, q_n$ ابتدائي بیانو ځخه یو بیان دی، ځکه نو باید $l\leqq n$ ذاسي وجود ولري ، چي $A_i=q_l$ دي.ځکه نو $R_i=Q_l$ او $(R_i)A_i=(Q_l)q_l\in\Gamma$ دي . ددی اسیته $\Gamma\vdash(R_i)A_i$ دي.

ب) به وشيږو، پدي معنی ، چي د $j<i$ دپاره $A_i=\neg A_j$ دي. که $R_j=0$ وي، بیانو $R_i=1$ کيږي. د بلی خوا $(R_i)A_i=A_i=\neg A_j=(R_j)A_j$ دي. د استقراء د فرضيي له مخي $\Gamma\vdash(R_j)A_j=R_i(A_i)$ دي، ځکه نو $\Gamma\vdash(R_i)A_i$ صدق کوي. که $R_j=1$ وي، نو $R_i=0$ او $(R_i)A_i=\neg\neg A_j$ دي. د استقراء د فرضيي له مخي $\Gamma\vdash A_j$ صدق کوي . داستنباط د دوو نفي د قانون له مخي $\Gamma\vdash\neg\neg A_j$ صدق کوي . ددی اسیته $\Gamma\vdash(R_i)A_i$ صدق کوي.

فرضوو، چي ج) صدق کوي. دلته به د 16 حالتو څخه یوازي د څلوروحالتو ثبوت راوړو. ددي دپاره چي موضوع بالکل مجرده پاته نسي، د رشتیاوالي جدول یې وګوری.

A_j	A_k	$\neg A_j$	$\neg A_k$	$A_j\wedge A_k$	$A_j\vee A_k$	$A_j\longrightarrow A_k$	$A_j\longleftrightarrow A_k$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

جدول 1.8

فرضوو، چي $\wedge=\blacksquare$ ، $R_j=1$ او $R_k=0$ دي. بیانو $A_i=(A_j\wedge A_k)$ او $R_i=0$ دي. د استقراء د فرضيي پر بنسټ $\Gamma\vdash A_j , \Gamma\vdash\neg A_k$ دي. څرنګه چي $A_i=0$ دي ، نو باید ثابته کو، چي $\Gamma\vdash\neg A_i$ دی. د ثبوت د غير مستقيم طريقي څخه دلته کار اخلو.لاندنۍ لاړ :

1) $A_j\wedge A_k$ — mp_2

2) $A_k\wedge A_j$ — mp_3, د∧ تبديلي قانون

3) A_k — mp_3, د ∧ د حذف قانون

په Γ,A_i کي د A_k ثبوت دي. یعني $\Gamma,A_i\vdash A_k$ دي. د استقراء په فرضيه کي مو $\Gamma,A_i\vdash\neg A_k$ درلوده. اوس نو د 2.6 ب) قضيي پر بنسټ $\Gamma\vdash\neg A_i$ دي.

فرضوو، چی $\blacksquare=\vee$ ، $R_j=0$ او $R_k=0$ دي. بیانو $A_i=(A_j\vee A_k)$ او$R_i=0$ دي.د استقراء د فرضيې له مخي $\Gamma\vdash\neg A_j, \Gamma\vdash\neg A_k$ دي. غواړو چي $\Gamma\vdash\neg A_i$ ثابته کو. لاندنۍ لاړ په Γ کي د $\neg A_i$ د ثبوت لاړ دي :

1) $A_j\longrightarrow A_j$ mp_1
2) $\neg A_k\longrightarrow(\neg A_j\longrightarrow\neg A_k)$ mp_1
3) $\neg A_k$ mp_2
4) $\neg A_j\longrightarrow\neg A_k$ 2,3 مودوس پوننس
5) $A_k\longrightarrow A_j$ 4, د استنباط د غير مستقيم قانون له مخي
6) $(A_j\vee A_k)\longrightarrow A_j$ 5, دتحليل او تجزيې قانون
7) $\neg A_j\longrightarrow\neg(A_j\vee A_k)$ 6, د تضاد قانون
8) $\neg A_j$ mp_2, فرضيه
9) $\neg(A_j\vee A_k)$ 8,7 مودوس پوننس

فرضوو، چی $\blacksquare=\longrightarrow$ ، $R_j=0$ او $R_k=0$ دي. بیانو $A_i=(A_j\longrightarrow A_k)$ او$R_i=1$ دي. د $R_j=0$ او $R_k=0$ له مخي د استقراء فرضيه وايي ، چي $\Gamma\vdash\neg A_j, \Gamma\vdash\neg A_k$ دي. غواړو، چي په Γ کي $A_j\longrightarrow A_k$ ثابته کو، يعنی $\Gamma\vdash(A_j\longrightarrow A_k)$. بیاهم لاندنۍ لاړ ثبوت دي:

1) $\neg A_j\longrightarrow(\neg A_k\longrightarrow\neg A_j)$ mp_1
2) $\neg A_j$ فرضيه
3) $\neg A_k\longrightarrow\neg A_j$ 2,1 مودوس پوننس
4) $A_j\longrightarrow A_k$ 3, د استنباط د غير مستقيم قانون له مخي

بلاخره د $\blacksquare=\longleftrightarrow$ ، $R_j=1$ او $R_k=0$ حالت څېړو.بیانو $A_i=(A_j\longleftrightarrow A_k)$ او$R_i=0$ دي.

د $R_j=1$ او $R_k=0$ له مخي د استقراء فرضيه وايي ، چي $\Gamma\vdash A_j, \Gamma\vdash\neg A_k$ دي.غوهړو، چي په Γ کي د $\Gamma\vdash\neg(A_j\leftrightarrow A_k)$ ثبوت ومونډو. دلته هم د ثبوت د تنقيض د طريقي څخه کار اخلو. لاندنۍ لاړ په نظر کي نيسو:

1) $A_j\leftrightarrow A_k$ mp_2 , فرضيه

2) $(A_j\leftrightarrow A_k) \to(A_j\to A_k)$ mp_1

3) $A_j\to A_k$ 2,1 مودوس پوننس

4) A_j mp_2, فرضيه

5) A_k 4,3 مودوس پوننس

پورتنۍ لاړپه $\Gamma, (A_j\leftrightarrow A_k)$ کي د A_k ثبوت دي. پدي معنی، چي $\Gamma, (A_j\leftrightarrow A_k) \vdash A_k$. خو د استقراء ددوهمي فرضيې پر بنسټ $\Gamma, (A_j\leftrightarrow A_k) \vdash\neg A_k$ دي، ځکه نو د2.6. ب) قضيې پر بنسټ $\Gamma\vdash\neg(A_j\leftrightarrow A_k)$ دي.

پاته 12 حالتونه په ورته ډول ثابتيږي.

q.e.d.

د راتلونکي قضيې د ثبوت مفکوره به لمړي د هغه پر يوه خصوصي بنه باندي تشريح کو.

بېلګه 2.8. فرضوو چي د A بيان تاوتولوجي دی او د دوو ابتدايي بيانو q_2, q_1 څخه تشکيل سوی دي. څرنګه چي د A بيان تاوتولوجي دي، نو د q_2, q_1 ابتدائي بيانو رشتيا والي د هر قيمت Q_2, Q_1 دپاره د A د بيان قيمت $Q=1$ دي. د چرچ د ليما پر بنسټ

$$q_1 , q_2 \vdash A,$$

$$q_1 , \neg q_2 \vdash A,$$

$$\neg q_1 , q_2 \vdash A,$$

$$\neg q_1 , \neg q_2 \vdash A.$$

صدق کوي، خو د استنباط د قضيې له مخي :

$$q_1 \vdash q_2 \longrightarrow A,$$

$$q_1 \vdash \neg q_2 \longrightarrow A,$$

$$\neg q_1 \vdash q_2 \longrightarrow A,$$

$$\neg q_1 \vdash \neg q_2 \longrightarrow A.$$

لاسته راځي. د استنباط د تحليل او تجزيې د قانون پر بنسټ د پورتنيو لمړيو دوو کرښو څخه

$$q_1 \vdash A$$

لاسته راځي او د وروستيو دوو کرښو څخه

$$\neg q_1 \vdash A$$

لاسته راځي. بياهم د استنباط دقضيې پر بنسټ په ترتيب سره :

$$\emptyset \vdash q_1 \longrightarrow A \ , \ \emptyset \vdash \neg q_1 \longrightarrow A$$

موندلای سو. بلاخره د استنباط دتحليل او تجزيې د قانون د عملی کېدو په نتيجه کي

$$\emptyset \vdash A$$

لاسته راځي.

لاندني قضيه ، په خپل ذات کي ډېره مهمه، په عين ډول لکه پورتني بېلګه، ثابتيدلای سي.

قضيه 3.8. (د تاوتولوجي د ثبوت په هکله د پوست Post[11] قضيه)

که د A بيان تاوتولوجي وي، نو $\emptyset \vdash A$.

---

[11] Emil Leon Post پولنډي-امريکايي رياضي پوه او د رياضي د منطق پوه ؤ (1897-1954)

په بل عبارت که د A بیان تاوتولوجي وي، نو د A بیان د بیانو د خالي سیټ څخه ثابتیدلای سي.

ثبوت. فرضوو، چي د A بیان د $q_1, ..., q_n$ ابتدایي بیانو څخه تشکیل سوي دي. څرنګه چي د A بیان تاوتولوجي دي، نود ابتدایي بیانو $q_1, ..., q_n$ د اختیاري قیمتو $Q_n,$ ..., Q_1 دپاره د A د بیان قیمت یعنی $Q=1$ دي.ځکه نو د چرچ د لیما پر بنسټ د $Q_1, ..., Q_n$ اختیاري قیمتو دپاره :

$$(Q_1)q_1, \dots , (Q_n)q_n \vdash A$$

صدق کوي. په خاصه توګه د $Q_1, ..., Q_{n-1}$ اختیاري قیمتو او $Q_n=0$ دپاره :

$$(Q_1)q_1, \dots , (Q_{n-1})q_{n-1}, \neg\, q_n \ \vdash A$$

ولرو او د $Q_1, ..., Q_{n-1}$ اختیاري قیمتو او $Q_n=1$ دپاره به:

$$(Q_1)q_1, \dots , (Q_{n-1})q_{n-1}, q_n \ \vdash A$$

ولرو. بیانود استنباط د قضیې (قضیه 1.6) پر بنسټ:

$$(Q_1)q_1, \dots , (Q_{n-1})q_{n-1} \vdash \neg\, q_n \ \longrightarrow A \text{ , } (Q_1)q_1, \dots , (Q_{n-1})q_{n-1} \vdash q_n \longrightarrow A$$

لاسته راځي. اوس نو که د استنباط د تحلیل او تجزیې قانون عملی کو، نو د اختیاري Q_{n-} $_1$, ..., Q_1 قیمتو دپاره به :

$$(Q_1)q_1, \dots , (Q_{n-1})q_{n-1} \vdash A$$

را پاته سي. که خپل استدلال ته په همدي ډول n-1 ځلې دوام ورکړو، نو په پای کي به د Q_1 اختیاري قیمت دپاره:

$$(Q_1)q_1 \vdash A$$

لاسته راسي. بیاهم د Q_1 د تشخیص په نتیجه کي ، پدی معنی چي Q_1 به یا 1 او یا 0 وي :

$$\neg\, q_1 \vdash A, \qquad\qquad q_1 \vdash A$$

لاسته راځي. اوس نو بیاهم د استنباط د قضیې پر بنسټ:

$$\emptyset\vdash \neg q_1 \longrightarrow A\,, \qquad \emptyset\vdash q_1 \longrightarrow A$$

حاصلیږي. ددی ځایه بیا هم داستنباط د تحلیل او تجزیې د قانون د عملی کېدو په نتیجه کي خپل هدف ته ، یعنی : $\emptyset\vdash A$ رسیږو.

q.e.d.

دمخه تردي چی د بشپړتوب د قضیې ثبوت مو تکمیل کړی وي، لمړی به لاندنۍ کومکي ادعا په ثبوت ورسوو.

قضیه 4.8. (د استنباط د قضیې سیمانتیکی تعبیر).

فرضوو، چي Γ د بیانو سیټ ، A او B بیانونه دي. که $\Gamma,B\vDash A$ وي ، نو $\Gamma\vDash B\longrightarrow A$ دي.

په بله اصطلاح ویلای سو ، که د B د بیان په شمول د Γ په سیټ کي د A بیان صدق وکي ، نو د بیانو په سیټ Γ کي د $B\longrightarrow A$ بیان صدق کوي.

ثبوت. فرضوو، چي $\Gamma,B\vDash A$ صدق کوي. د Γ د سیټ د ټولو بیانو او د A او B د بیانو د رشتیاوالي مشترک جدول په نظر کی نیسو. پدي جدول کی اوس نو هغه کرښه په نظر کي نیسو، چي په هغه کي د Γ د سیټ تر بیانو لاندي قیمتونه یو وي. د B بیان څېړو. دوه امکانه وجود لری، هغه داچي د B تر بیان لاندي به یو وی، نظر و فرضیې ته د A تر بیان لاندي هم یو دي . پدی حالت کی د $B\longrightarrow A$ تر بیان لاندي هم یو دي.

دوهم امکان دادی، چی د B تر بیان لاندي به صفر وي، نو پدی حالت کي هم د $B\longrightarrow A$ تر بیان لاندي هم یو وي. نوموړئ حقیقت په جدول کي ترسیم کئ.

q.e.d

نتیجه 1.8. که $\{B_1, \ldots ,B_m\}\vDash A$ وي، نو :

$$B_1\longrightarrow (B_2\longrightarrow(\ldots(B_m\longrightarrow A)\ldots))$$

تاوتولوجي ده.

اوس نو بيرته د بشپړتوب د قضيي و ثبوت ته راګرځو.

د بشپړتوب د قضيي ثبوت: فرضوو،چی $\Delta\vDash A$ وي ، يعنی د Δ د بيانو په سيټ کي د A بيان صدق کوي. اوس نو بايد د Δ په سيټ کي د A د بيان ثبوت وموندو او يا لږ تر لږه د A د بيان د ثبوت موجوديت ثابت کو.

د نغښتني سيمانتيکی قضييي ، قضيه 2.7. ، پر بنسټ د $\Delta_0 \subseteq \Delta$ متناهي سيټ داسي وجود لري، چي $\Delta_0\vDash A$ دي. فرضوو $\Delta_0 =\{B_1, \dots , B_m\}$ دي. نظر و تېري نتيجي ته :

$$B_1\longrightarrow (B_2\longrightarrow(\dots(B_m\longrightarrow A)\dots))$$

تاوتولوجي ده. نظر د پوست و قضيي (قضيه 3.8.) ته :

$$\emptyset\vdash B_1\longrightarrow (B_2\longrightarrow(\dots(B_m\longrightarrow A)\dots))$$

صدق کوي. د مودوس پوننس د قانون له مخي :

$$\frac{B_1, B_1 \to (B_2 \to (B_3 \to (\dots(B_m \to A)\dots)))}{B_2 \to (B_3 \to (\dots(B_m \to A)\dots))}$$

حقثقت لري او د استنباط د قضيي پر بنسټ :

$$\{ B_1\}\vdash B_2\longrightarrow(B_3\longrightarrow (\dots(B_m\longrightarrow A)\dots))$$

صدق کوي. همدا ډول خپل استدلال ته m ځلې ادامه ورکوو.

$$\{ B_1, B_2\}\vdash (B_3\longrightarrow (\dots(B_m\longrightarrow A)\dots))$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta_0=\{ B_1, B_2, \dots, B_m\}\vdash A$$

حاصليږي. ځکه نو $\Delta\vdash A$ هم صدق کوي. q.e.d.

بېلګه 3.8. د پوست قضیه د تاوتولوجي د ثبوت دوړتوب په هکله موږ ته د تاوتولوجي د موندلو دپاره عملی وسیله راکوي. تاسو ثبوتولای سي، چی لاندنې بیانونه تاوتولوجي دي. پدي معنی چي هغوی د فرضیو د خالي سیټ څخه ثابتیدلای سي.

$$(A\to C)\to((B\to C)\to((A\wedge B)\to(C\wedge D))),$$

$$(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to(C\vee D))),$$

$$(A\to(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)),$$

$$((A\wedge B)\to C)\to(A\to((B\to C)).$$

د پورتنیو تاوتولوجیو څخه په استفاده سره ثابت کی، چي لاندنې افادي د استنباط قوانین دي:

$$\frac{A\to C, B\to D}{(A\wedge B)\to(C\wedge D)},\qquad \frac{A\to C, B\to D}{(A\vee B)\to(C\vee D)}$$

$$\frac{A\to(B\to C)}{(A\wedge B)\to C},\qquad \frac{(A\wedge B)\to C}{A\to(B\to C)}$$

د پورتنیو تاوتولوجیو ثبوت لوستونکي ته د تمرین په ډول توصیه کوم.

9§. د بیانو نورماله بڼه

ددوو مسئلو د تشریح او څرګندولو دپاره یو ځل شا ته ګورو. په لومړي پاراګراف کي مو د بیان الجبر د ژبی « دمصنوعي ژبي» په دخول پیل کي. د مصنوعي ژبي مفکوره نوی نه ده . جرمني فیلوسوف او ریاضي پوه ګوتفرید ویلهلم لایبنیخ[12] څه ناڅه دري پېړۍ پخوا طرح کړي وه. هغه پدي ارمان ؤ ، چی داسي یوه عمومي مصنوعي ژبه ، فلسفي ژبه lingua philosiphica یا characteristica universalis ، اختراع کړی، څو په هغه کي خپلي مفکورو ته داسی انعکاس ورکي ، چي په هغه کي د انسانی ژبي ابهام او سوء تفاهم وجود

[12] ګوتفرید ویلهلم لایبنیخ (Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716

ونلري[13]. هغه پدی متيقين ؤ كه دغه ډول ژبه وجود ولری نود تفكر او افهام او تفهيم ترمنځ به ډېره لويه اساني راولي، حتي په دغه سويه چي يو ماشين به وجودولري ، چي هر بيان هغه ته ورداخل كو، نو د رشتياوالي او دوراغ والي نتيجه به يې ډير ژر موږ ته په لاس راكي. پدی معنی چي موږ به د هر بيان د رشتياوالي په هكله بيله شک او ترديد څخه فيصله وكولای سو. نن ورځ دكمپيوټر پروګرام ليكلای سو، چي هغه د هر بيان د رشتيا والي جدول رسم او نتيجه يې موږته په لاس راكي.

اوس به نو راسم دوهمي مسئلي ته، هغه داچي موږ تر اوسه په څرګند ډول د بيانو رشتياوالی د جدول په ذريعه ارائه كول. موږ وويل ، كه يو راكړه سوی بيان د n ابتدائې بيانو څخه تشكيل سوی وي او په هغه كي m د بيان عمليې كارول سوي وي، نو د هغه جدول به 2^n كربښي او $m+n$ ستونونه ولری. كه يوه راكړه سوي بيان د 10 مختلفوابتدايې بيانوڅخه تشكيل سوی وي، نو جدول به يې $2^{10}=1024$ كربښي ولری. ممكن دتصور ظرفيت مو پدي اندازه وي ، چي يو جدول د 1024 كربښو سره تصور كړای سو.خو دهغه ارزيابی او دهغه د رشتياوالی په هكله فيصله يوازي د قلم او كاغذ په وسيله به ستونزمن كار وي. يو ګام به نور هم مخ ته ولاړ سو، فرضوو چی داسي بيان راكړه سوی دي ، چي هغه د 20 ابتدايي بيانو څخه تشكيل سوی دي. دلته به د نوموړي بيان د رشتياوالی جدول $1024.1024 = 2^{10}.2^{10} = 2^{20}$ يعنی اضافه تر يو ميليون كربښي ولري. ليدل كېږي چی د ابتدايې بيانو د ډير والي په نتيجه كی د بيان د صدق كولو په هكله فيصله ستونزمنه كېږي. په حقيقت كي كه يو راكړه سوی بيان د 64 ابتدايې بيانو څخه تشكيل سوی وی ، نو د نوموړی بيان د رشتياوالي د جدول د كربښو شمېر به په تقريبي ډول $2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16\cdot(2^{10})^6 \approx 16\cdot(10^3)^6 = 16\cdot10^{18}$ وي. كه فرض كوچي كمپيوټر په يوثانيه كی $16.10^3=16000$ كربښی ارزيابي كړای سي ، او يوه پېړي 3.153.600.000 ثانيې وي ، نو كمپيوټر به په يوه پېړي كي $50.457.6x10^8$ كربښي ارزيابې كړای سی. په تقريبي ډول كه ووايو ، چي كمپيوټر په يوه پېړي كي 16.10^{13} كربښي ارزيابي كړای سي ،

[13] د كتاب په پيل كی د ايپيمند يس پارادكس وګورئ.

نوکمپيوټر $\frac{16\cdot10^{18}}{16\cdot10^{13}}=10^{5}$ پېړيو ته ضرورت لري چي د راکړه سوی بيان د صدق کولو په هکله فيصله وکي.

ځکه نو د اغېزمنو او عينی طريقو د موندلو هڅې په طبيعی ډول را پاروول کېږي. ددغه موخي دپاره به بيانونه په يوه نورم يا قالب کي راوړو. و به ښيو ، چي په حقيقت کي يوه يوه ئېزه او دوي دوه ئېزي عمليي زموږ د څېړنو دپاره بسنه کوي او نوري عمليي ددغو عمليو په ذريعه ارائه کولای سو.

تعريف 1.9. د $A_1\vee \dots \vee A_n$ بيان د منطقي ابتدائي جمع (په راتلونکي کي به يوازي ابتدائي جمع ورته وايو) elementary disjunction په نامه يادوو، که دهر $i=1, \dots, n$ دپاره د A_i بيان يا ابتدائي بيان او يا د ابتدائي بيان نفي وي. غير له $q\vee\neg q$ څخه ، بل هيڅ ابتدائي بيان په دغه افاده کي دوه ځلي نه څرګندېږي.

بېلګه 1.9. د $q_1\vee(q_2\longrightarrow q_3)\vee q_2$ د بيان ابتدائي جمع عبارت ده له:

$$q_1\vee\neg q_2\vee q_3\vee q_2$$

تعريف 2.9. د $A_1\wedge \dots \wedge A_n$ بيان د منطقي ابتدائي ضرب (په راتلونکي کي به يوازي ابتدائي ضرب ورته وايو) elementary conjunction په نامه يادوو، که د هر $i=1, \dots, n$ دپاره د A_i بيان يا ابتدائي بيان او يا د ابتدائي بيان نفي وي. غير له $q\wedge\neg q$ څخه هيڅ ابتدائي په دغه افاده کي دوه ځلي نه څرګندېږي.

بېلګه 2.9. د $q_1\wedge\neg(q_2\longrightarrow q_3)\wedge q_3$ د بيان ابتدائي ضرب عبارت دي له:

$$q_1\wedge q_2\wedge\neg q_3\wedge q_3$$

يکړ ابتدائي بيان او يا دهغه نفي په عين حال کي د ابتدائي جمع او ابتدائي ضرب په څېر منو. په دی صورت کي ، په پورتنيو تعريفو کي دواړي افادي يوازي يو غړی لري.

تعريف 3.9. که د $B_1, \dots, B_m$ بيانونه ابتدائي جمع وي ، نو وايو چي د $B_1\wedge \dots \wedge B_m$ بيان د ضرب نورماله بڼه conjunctive normal form(cnf) لري.

تعریف 4.9. که د $B_1, ..., B_m$ بیانونه ابتدائي ضرب وي ، نو اویو چي د $B_1 \vee ... \vee B_m$ بیان د جمع نورماله بڼه disjunctive normal form(dnf) لري.

لکه مخکي چي مو یادونه وکړ، دلته هم که m=1 وي، نو یو عنصره بیان که دابتدائي جمع په څېر یې ومنو ، نو هغه د ضرب نورماله بڼه لرى او که یې د ابتدائي ضرب په صفت ومنو ، نو د جمع نورماله بڼه لري.

تعریف 5.9. که د بیان د جمع (ضرب) په نورماله بڼه کي د هغه بیان په اړوند ټوله ابتدائي بیانونه څرګند سي، نو وایو چی د نوموړي بیان دجمع (ضرب) بشپړ نارمله بڼه full normal form راکړه سوی ده.

که بیان د جمع نورمال بڼه ولري،پدي معنی چي د منطق د جمع د علامو ترمنځ بیانونه د ابتدائي بیانو د ضرب په حالت کي دي، نو دهغه د رشتیاوالي جدول په ساده ډول رسمیږي. ځکه چي د بیانو ضرب یوازي او یوازي هغه وخت رشتیا دي ، چی په هغه کي هر ابتدائي بیان رشتیا وي. که بیان د جمع بشپړه بڼه ولري ، نو دهغه هره ابتدائي ضرب یوازی دجدول په یوه کرښه کي رشتیا دي.

بېلګه 3.9. فرضوو چي لاندنئ بیان د جمع په بشپړه نارمله بڼه راکړه سوی دي:

$$(q_1 \wedge \neg q_2 \wedge q_3) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \qquad ... (9.1)$$

پورتنئ بیان هغه وخت رشتیا دي ، چي په هغه کي شامل یو د ابتدائي ضربو څخه رشتیا وي. څرنګه چي پورتنئ بیان ټول هغه ابتدائي بیانونه چي دهغه څخه دغه بیان تشکیل سوی دي، په ځان کي لري ، نو هرابتدائي ضرب یوازی د جدول په یوه کرښه کي رشتیادي. ځکه نو د (9.1) بیان د جدول په لاندنیو دروکرښو کي رشتیا دي[14]:

[14] پاملرنه وکي، چي دلته مو د بیانو د رشتیاوالي جدول په لنډ شکل راوړي دي. ځکه چي ددرو ابتدایي بیانو او لسو عملیو دپاره باید جدول اته کرښي او دیارلس ستونونه ولري ، خو موږ یوازي څلور ستونونه راوړي دي.

q_1	q_2	q_3	$(q_1 \wedge \neg q_2 \wedge q_3) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3)$
1	0	1	1
1	1	1	1
0	1	1	1

جدول1.9

د جدول په نورو کرښو کي بیان درواغ دي، یعنی قیمت یې صفر دي.

بېلګه 4.9. فرضوو چي لاندنئ بیان د جمع په بشپړه نارمله بڼه راکړه سوی دي:

$$(q_1 \wedge \neg q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2) \qquad ...(9.2)$$

که څه هم نوموړي بیان د لاندنی جدول له مخي په دوو کرښو کی رښتیا دي:

q_1	q_2	q_3	$(q_1 \wedge \neg q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2)$
1		0	1
0	1		1

جدول 2.9

خو که د جدول په خالي حجرو کي د q_2 او q_3 ممکن قیمتونه ور پوره کړو، نو لاندي جدول به لاسته راسي:

q_1	q_2	q_3	$(q_1 \wedge \neg q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2)$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1

جدول 3.9

پدي معنی ، چي نوموړي بیان د دوو کرښو پر ځای په څلورو کرښو کی رشتیا دي. د جدول په پوره کولو کی باید داحتیاط څخه کار واخیستل سي. په لاندني بېلګه کي د قیمتو تر تکمیلولو وروسته لیدل کېږي چي دوی کرښي سره مساوي دي.

بېلګه 5.9. فرضوو چي لاندنئ بیان د جمع په بشپړه نارمله بڼه راکړه سوی دي:

$$(q_1 \wedge \neg q_3) \vee (q_1 \wedge \neg q_2)$$

q_1	q_2	q_3	$(q_1 \wedge \neg q_3) \vee (q_1 \wedge \neg q_2)$
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1

جدول 4.9

د جدول دوهمه او څلرمه کرښه عیني قیمتونه لري. پدي معنی چي راکړه سوي بیان يوازي د جدول په درو کرښو کي رشتيا دي.

د ډمارګن د اصل $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ او $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ پر بنسټ هر بیان چي د جمع په بشپړ نارمله بڼه راکړه سوی وي ، د نفي د عملي په مرسته يي د ضرب په بشپړه نارمله بڼه اړولای سو او برعکس. پدي هکله لاندني قضیه ډېر مهم رول لوبوي.

قضیه 1.9. د هر بیان دپاره د هغه معادل بیان د جمع په بشپړه نارمله بڼه او د هغه معادل بیان د ضرب په بشپړه نارمله بڼه وجود لري.

ثبوت. فرضوو $A(q_1, \ldots ,q_n)$ بیان دي. د نوموړي بیان دپاره د جمع بشپړه نارمل بڼه ایز معادل بیان د جوړیدو نسخه به په لنډه توګه ترسیموو. لمړي د A د بیان د رشتیاوالي جدول رسموو. که د نوموړي جدول په هیڅ کرښه کي د رشتیاوالي قیمت 1 وجود ونلري، نو د A بیان د $q_1 \wedge \neg q_1$ د بیان سره معادل دي. دغه بیان د جمع بشپړ نارمله بڼه لري.

فرضوو،چي د A د بيان قيمت د رشتياوالي په جدول کی لږ ترلږه په يوه کرښه کي يو دي. د A د بيان د رشتيا والي په جدول کي ، چي دهغه قيمت يو وي، د q_1, ... ,q_n د ابتدايي بيانو قيمتونه په ترتيب سره Q_1 , ... ,Q_n دي. دنوموړو قيمتو څخه ابتدايي ضرب $(Q_n)q_n$, ... , $(Q_1)q_1$ جوړوو. فرضوو، چي د B بيان د ابتدايي ضربو هغه جمع ده، چي د رشتياوالي په جدول کي د A د بيان قيمت يودي. په اساني سره ليدل کيږي، چي د B بيان د جمع په بشپړه نارمله بڼه دي . څرنګه چي د A او B د بيانو د رشتياوالي جدولونه سره مساوي دي ، ځکه نو هغوی يودبل سره معادل دي.

بلاخره که د C بيان د جمع په نارمله بڼه د $A\neg$ د بيان معادل وي، نو د C د بيان نفي په اساني سره د ضرب په نارمله بڼه داسي اړولای سو ، چي د A د بيان سره معادل وي.

که د A بيان د B د بيان سره چي د جمع په نارمله بڼه دي ، معادل وي، نو وايو چي د B بيان د A د بيان د جمع نارمله بڼه ده.

بېلګه 6.9. لاندني بيان ته د هغه معادل بيان د جمع په نارمله بڼه پيداکوو.

$$(q_1 \vee \neg q_2) \longrightarrow (q_2 \wedge q_3) \qquad (9.3)$$

لمړئ به د نوموړي بيان د رشتياوالي جدول رسم کو: (جدول 5.9 ↓)

q_1	q_2	q_3	$(q_1 \vee \neg q_2) \longrightarrow (q_2 \wedge q_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

د لمړي ، پنځمي او شپږمي کرښي دپاره ابتدايي ضربونه جوړوو او بيا هغوی سره جمع کو :

$$(q_1\wedge q_2\wedge q_3)\vee(\neg q_1\wedge q_2\wedge q_3)\vee(\neg q_1\wedge q_2\wedge\neg q_3) \qquad (9.4)$$

پورتنۍ بيان د جمع په بشپړه نارمله بڼه دي او د (9.3) د بيان سره معادل دي.په اساني سره موندلای سو، چی د :

$$(\neg q_1\wedge q_2)\vee(q_2\wedge q_3) \qquad (9.5)$$

بيان هم د (9.3) بيان د جمع نارمله بڼه ده ، خو بشپړه نارمله بڼه نده (ولی ؟).

نوټ. په تېرو څلورو بېلګو کي مو د بيانو د رشتياوالي جدولونه په لنډ شکل راوړل. که لږ څه شا ته ، دريم پاراګراف وګوري، نظر واچوو، نو په پورتني بېلګو کي موږ د M_3 د سيټ، هغه سب سيټونه رااخيستي دي، چي په هغوی کي په ترتيب سره پورتني بيانونه رشتيا دي.

که بيان د جمع په نارمله بڼه راکړه سوي وي، نوموږ کولای سو چي هغه په اسانی سره داسي سمبال کو، چي هغه د جمع بشپړه نارمله بڼه ولري. که د A_1, ... A_n, بيانو په ابتدايي ضرب کي، يعنی $A_1\wedge...\wedge A_n$ ، کم ابتدايي بيان ناسوب وي، نو نوموړي ضرب دهغه سره په معادل جمع اړولای سو. پد ی معنی :

$$(A_1\wedge...\wedge A_n\wedge q)\vee(A_1\wedge...\wedge A_n\wedge\neg q)$$

پدی ډول تر هغه وخته ادامه ورکوو، څو د نوموړي ضرب بشپړه نارمله بڼه لاسته راسي. که به دغه پروسه کي د تکراري ابتدايي ضرب سره مخامخ سو ، نو د هغه څخه صرفنظر کوو. د ضرب د نارملي بڼي سره هم دغه ډول سلوک کوو.

بېلګه 10.9. په تېره بېلګه کي د (9.5) بيان به ګام پر ګام داسي سامبال کو، چي هغه د جمع بشپړه نارملي بڼي ته راواوړي.

$$(\neg q_1\wedge q_2)\vee(q_2\wedge q_3)$$

وګوري، چي د کيڼ لوري څخه په لمړي قوس کي q_3 او په دوهم قوس کي q_1 ناسوب دي.

$((\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge \neg q_3)) \vee ((q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3))$

په وروستۍ افاده کې د کيڼ لوري څخه لمړئ او څلرم ضرب تکرار دي، ځکه نو يو به يې حذف کړو.

$$(\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \vee (\neg q_1 \wedge q_2 \wedge \neg q_3) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3)$$

پدې ډول مو (9.5) بيان داسې سمبال کې څو (9.4) بيان د جمع په بشپړه نارمله بڼه لاسته راسي.

ددی برخې په پېل کې مو د رشتياولي د جدول په اړوند ستونځو ته ګوته ونيوله .ځکه نو د بيان د جمع يا ضرب بشپړه نارملي بڼې د لاسته راوړلو دپاره د نور طريقو د موندلو هڅه پوره طبيعي ده. د بيان د جمع يا ضرب بشپړه نارملي بڼې د لاسته راوړلو دپاره د لاندنيو منطقي معادليتو څخه کار اخلو[15]:

(e_1) $(A \longrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(e_2) $(A \equiv B) \Leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$

(e_3) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(e_4) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(e_5) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

(e_6) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

(e_7) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

(e_8) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

(e_9) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

[15] نيازمن، الجبر او دعددونو تيوری لمړي برخه §III ورسره پرتله کئ.

$(e_{10})\quad (A\vee A)\Leftrightarrow A$

$(e_{11})\quad (A\wedge A)\Leftrightarrow A$

$(e_{12})\quad (A\vee B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$

$(e_{13})\quad (A\wedge B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$

لاندني کړنلاره د بیان د جمع د بشپړ نارملي بڼي د لاسته راوړلو نسخه راکوي:

1. د (e_1) او (e_2) په مرسته د استنباط او معادلیت عملیې د جمع ، ضرب او نفي په مرسته تعویضوو.

2. د (e_3) او (e_4) په مرسته د نفي عملیه تر ابتدایي بیانو پوري راوړو.

3. په (e_5) باندې تکراری نفي حذفوو.

4. (e_6) او (e_7) په خپل ذات کي د ضرب دعملیې نظر د جمع عملیې ته او برعکس د جمع د عملیې نظر د ضرب وعملیې ته توزیعي قوانین دي. د هغوی په مرسته ضرب (جمع) داسی سمبالو ، څو په قوسو کي یوازي د ابتدایي بیانو ضرب (جمع) او یا دهغوی نفي لاسته راسي.

5. د (e_{10}) او (e_{11}) په مرسته تکراری ابتدایي بیانونه حذفوو.

6. که چیری دسمبالولو په پروسه کي د ابتدایي بیانو ضرب او د هغوی نفي په مخه راسي ،نو د قوسو څخه صرفنظر کوو. که ټوله قوسونه په دغه بڼه وي ، نو ټوله بیان د $q\wedge\neg q$ سره معادل دي.

بېلګه 11.9. د لاندني بیان د جمع نارمله بڼه پیدا کوو:

$$\neg((p\longrightarrow\neg q)\vee(q\equiv r)).$$

$\neg((\neg p\vee\neg q)\vee((\neg q\vee r)\wedge((\neg r\vee q))),\qquad (e_1); (e_2)$

$\neg(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg((\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q)),\qquad (e_3)$

$(\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\wedge\neg(\neg q\vee r)\vee\neg(\neg r\vee q)$, $(e_3), (e_4)$

$(\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\wedge((\neg\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg\neg r\wedge\neg q))$, (e_3)

$(p\wedge q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q))$, (e_5)

$((p\wedge q)\wedge(q\wedge\neg r))\vee((p\wedge q)\wedge(r\wedge\neg q))$, $(e_6),(e_{11})$

$(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r\wedge\neg q)$, (6)

$(p\wedge q\wedge\neg r)$.

بېلګه 12.9. تراوسه مو د راکړه سوی بیان دپاره د رشتیاوالي جدول رسموي. پدي بېلګه کي به معکوسه کړنلاره غوره کو. پدي معنی که د رشتیاوالي جدول راکړه سوي وي، نو زموږ باید هغه بیان و موندو. 6.9. جدول په لاندي ډول سره راکړه سوی دي:

q_1	q_2	A
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

جدول 6.9

د جدول هره کرښه د ابتدایي بیانو د ضرب په څېر او دجدول ټوله کرښي د بیان د جمع په څېر افاده کوو. ځکه نو د A بیان عبارت دي له :

$$(q_1\wedge q_2)\vee(\neg q_1\wedge q_2)\vee(q_1\wedge\neg q_2)\vee(\neg q_1\wedge\neg q_2)$$

هر ضرب د یوي کرښی جواب ورکونکی دي. څرنګه چي د $q_1\wedge q_2$ د رشتیاوالي قیمت صفر دي (لمړي کرښه!) ، نو کولای سو چي صرفنظر ورڅخه وکو. پدی حساب زموږ لټول سوی بیان $(\neg q_1\wedge q_2)\vee(q_1\wedge\neg q_2)\vee(\neg q_1\wedge\neg q_2)$ دي. ■

د (e_1) ، (e_2) ، (e_{12}) او (e_{13}) په مرسته کیدای سی، چي د هر بیان دپاره د هغه معادل بیان داسي لاسته راوړو، چي یوازي د نفي او جمع $(\neg, \vee)$ او یا نفي او ضرب $(\wedge, \neg)$ عملیې په ځان کي ولري. پدي معنی چي د بیان په الجبر کي دوي عملیې پوره کفایت کوي. طبعاً پوښتنه کیږي ، چي آیا یوازی پر یوه عملیه باندي د بیان الجبر دریدلای سي. جواب یې مثبت دي ، هغه عملیه عبارت ده له «د انکار بدیل» (alternative denial) یا د شیفر د کرښي «|» (Sheffer stroke) ځخه. د انکار بدیل یا د شیفر کرښه د لاندني معادلیت په مرسته تعریف کیږي:

$$A|B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B),$$

دلته $\neg A$ د $A|A$ او $A \vee B$ د $(A|A)|(B|B)$ سره معادل دي.

تمرین 1.9.

الف) د $(q_1 \wedge q_2) \vee \neg q_1$ او $\neg(q_1 \longrightarrow q_2) \vee (\neg q_1 \wedge q_3)$ بیانو دپاره د هغوی معادل بشپړه د جمع نارمله او بشپړه د ضرب نارمله بڼه ولیکي.

ب) د لاندنیو بیانو دپاره دهغوی معادل بشپړه د جمع نارمله او د ضرب نارمله بڼه ولیکي.

a) $(q_1 \vee q_2) \wedge (\neg q_2 \vee q_3)$ b) $(q_1 \wedge \neg q_2) \vee (q_1 \wedge q_3)$

c) $\neg q_1 \vee (q_2 \longrightarrow \neg q_3)$ d) $(q_1 \vee q_2) \leftrightarrow \neg q_3$

ج) په لاندنې جدول کي ابتدایي بیانونه او د هغوی قیمتونه راکړه سوی دي. د C,B,A او D بیانونه ولیکي.

q_1	q_2	q_3	A	B	C	D
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1

جدول 7.9

§10. د بول[16] الجبرې Boolean Algebras

موږ په تېر پاراګراف کې دلايبنيځ و مفکوروته اشاره وکړه او ومو ويل چې هغه د يونى ورسال Universal يا عمومي ژبې په لټه کې ؤ، څو رياضي د فارمولو په صوري قالب کې واچوي. تر هغه وروسته نورو رياضي پوهانو د لايبنيځ مفکوري تعقيب کړي. د هغوی څخه يو هم انګليسی رياضي پوه جورج بول ؤ.

د بول ژبه د يوه سيټ ، يوه يوه ئېزه عمليې ، دوی دوه ئېزي عمليې او دوو ثابتو عنصروڅخه تشکيله سوی ده.

تعريف 1.10. که د B پر سيټ باندي يوه يوه ئېزه عمليه $\neg$ ، دوی دوه ئېزي عمليې $\vee,\wedge$ او دوه مخصوص عنصرونه $1,0\in B$ راکړه سوی وي ، نو د $\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ ساختمان د بول د الجبر په نامه يادېږي، که لاندي خاصيتونه صدق وکي:

الف) د $\vee,\wedge$ عمليې تبديلي commutative، اتحادي associative او ځان ځاني idempotence خاصيتونه لري. يعني په ترتيب سره:

$$x\wedge y=y\wedge x \qquad x\vee y=y\vee x$$

$$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z \qquad x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$$

$$x\wedge x=x \qquad x\vee x=x$$

ب) توزيعي قانون صدق کوي، يعنی:

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \qquad x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

[16] جورج بول (1815-1864) GOERGE BOOLE د انګلستان رياضي پوه او فيلوسوف.

ج) د ډي-مارګن قوانين صدق کوي، يعنی:

$\neg(x\wedge y)=(\neg x)\vee(\neg y)$ $\neg(x\vee y)=(\neg x)\wedge(\neg y)$

د) د عينيت Identity قانون صدق کوي:

$x\vee 0=x$ $x\wedge 1=x$

ه) د انهدام Annihilator قانون صدق کوي:

$x\vee 1=1$ $x\wedge 0=0$

ی) د نفي نفي قانون صدق کوي :

$\neg\neg x=x$ $\neg 0=1$

پدي ډول ټوله هغه ساختمانونه چي د نومووړو عمليو او د هغو خصوصياتو ته ورته عمليې او خاصيتونه ولري، د بول د الجبر د نمونی په څېر څېړلای سو. دلمړيو دوو عمليو د نومولو دپاره به دلته فعلاً د عربی اصطلاحاتو څخه کار واخلم او په ترتيب سره به د **اتصال** ∧ ، **انفصال** ∨ په نامه به يې ونوموم . د ¬ عمليه د **بشپړتوب** عمليه ده . په راتلونکي ببلګو کي به يې وګورو چي نوموړي عمليې نظر د هغه و مودل ته په نورو نومو ياديږي. خو دلته اتصال ، انفصال او بشپړتوب عمومي او تر مشخصی تيوری ماوراء مفهومونه دي ، چي په مشخص حالت کي د هغوی سره مطابق نومونه ځانته غوره کوی.

د بول الجبره کولای سو، چي د ≤ اړېکي په ذريعه، نيمګړي و اوډو Partially Ordered (نيمګړي ترتيب کو). او هغه هم داسي:

$x\leq y \equiv x\vee y=y.$

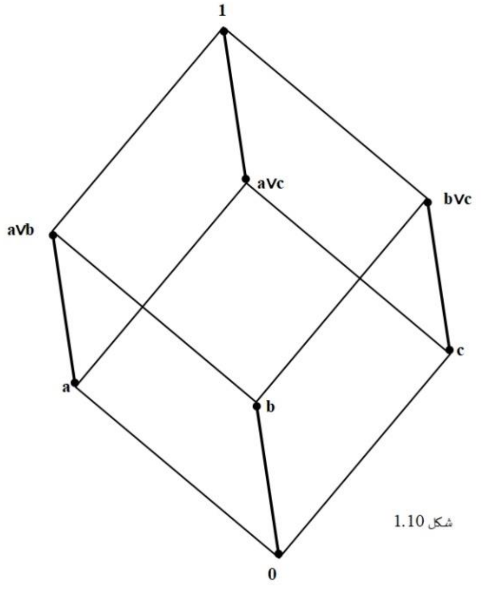
$x<y$ پدي معنی دي ، چي $x\leq y\wedge x\neq y$ دي. پدي اړېکه کي د 1 عنصر د B د سيټ لويترين او د 0 عنصرد B د سيټ کوچنۍ ترين عنصر دي. پاملرنه وکي ، چي زه دلته د صفر او يوه په هکله نه ږغېږم ، ځکه چي هغوی عددونه دي او د طبيعي عددو په سيټ کي ځانته مشخصی وظيفي اجراء کوي. زموږ هڅه داده چي د تفکر سير بايد عمومي بڼه ولري او په لمړي ګام کي په کم مشخص مودل تړلئ نه وي.

د بول الجبر کیدای سي ، چي د ترتیب سوی سیټ $B, \leq$ په صفت تعریف کو[17]. پداسي ډول چي د هغه کوچنیترین او لویترین عنصرونه 0 او 1 دي. د هغه هر دوه عنصره سیټ $\{x,y\}\subseteq B$ سپریمم (Supremum) $x\vee y$ او انفیمم (Infimum) $x\wedge y$ لري، توزیعي قانون صدق کوي او د $x\in B$ هر عنصر دپاره د هغه بشپړونکي، یعنی $y\in B$ داسي وجود لري ، چي $x\vee y=1$ او $x\wedge y=0$ دي.

د بول ساده ترین الجبر دوه عنصره $\{0,1\}$ سیټ دي. پر نوموړي سیټ باندي د انفصال عملیه د $x\vee y=\max=\{0,1\}$ ، د اتصال عملیه د $x\wedge y=\{0,1\}$ په ذریعه او $\neg 0=1$ تعریف کیدای سي.

بېلګه 1.10. فرضوو، چي X غیر خالي خو ثابت سیټ راکړه سوی دي. که $B=\mathcal{P}(X)$ د X د سیټ د ټولو سب سیټو سیټ وي، نو $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \setminus, \emptyset, X \rangle$ د بول الجبر دي.

بېلګه 2.10. اته عنصره د بول الجبر د لاندنی هسسه[18] ډیاګرام په ذریعه راکړه سوی دی.



شکل 1.10

[17] د نیازمن ژباړه . سیټونه او هر څه د هغوی په هکله ، مراجعه وکي.
[18] Helmut Hasse(1898-1979) المانی ریاضی پوه . همدا ډول [3] 60 مه صفحه وګوری.

بېلګه 3.10. د $\mathfrak{L}(q_1, \dots, q_n)$ په ذریعه د ټولو هغه بیانو سیټ په نظر کي نیسو، چي د $q_1,q_2, \dots, q_n$ راکړه سوو ابتدایي بیانو په مرسته تشکیل سوی وي. دوه معادل بیانونه به د عین بیان یا یوه بیان په صفت په نظر کي نیسو. دلته د دوو بیانو ضرب د اتصال د عملیې ، ددوو بیانو جمع د انفصال د عملیې او د بیان نفي د بشپړتوب د عملیې جواب ورکونکی ده. پدي صورت کي $\mathfrak{L}(q_1, \dots, q_n)$ (دقیقآ د بیانو د معادلیت ټولګي ، یعنی ټوله هغه بیانونه چي دیوه بیان سره معادل وي، په یوه ټولګي کي سره یوځای کوو) د بول الجبر دي . د هغه لوی ترین عنصر تاوتولوجي او کوچنی ترین عنصر یې د تاوتولوجي نفی ده. دغه ډول د بول الجبر به څو عنصره ولري؟ د 1.9 قضیې له مخي هر بیان د هغه د جمع د بشپړ نارمل سره ، چي په هغه کی د $q_1,q_2, \dots, q_n$ ابتدائي بیانونه څرګندیږي، معادل دي. پدي ډول د نوموړو ابتدائي بیانو 2^n ابتدائي ضربونه وجود لري. که بیان د تاوتولوجي نفي وي، نو د هغه د نارمل بڼي پر ځاي مو $q_1\wedge\neg q_1$ وټاکي. هر بل بیان د صفر څخه خلاف د معین شمېر ابتدائي ضربو جمع ده. ځکه نو د هغوی د بشپړ نارمل جمع (د لمړئ جمع په شمول) 2^{2^n} دي. راسي دغه موضوع بل ډول تعبیر کړو. که موږ د $q_1,q_2, \dots, q_n$ ابتدایې بیانو د رشتیاوالي جدول رسم کړو ، نو هغه به 2^n کرښي ولري. که هره کرښه د معین شمېر ابتدائي ضربو دپاره په نظر کي ونیسو، نو په مجموع کی د ټولو ضربو بشپړه نارمله جمع به 2^{2^n} وي.■

د بول دالجبر عنصر $x\in B$ د اټم Atom په نامه یادوو ، که $x\neq 0$ وي او بل داسي عنصر $y\in B$ وجود ونلري ، چي $0<y<x$ وي. پدي معنی، چی اټم د $B\setminus\{0\}$ د سیټ کوچنئ ترین عنصر دي. په 2.10. بېلګه کي د b,a او c عنصرونه اټمونه دي. د بول الجبر B دبول اټمي الجبر Boolean atomic algebra په نامه یادوو ، که د هر $x\in B\setminus\{0\}$ دپاره $y\leqq x$ اټم وجود ولري. د کوچني ترین عنصر د پرنسب له مخي په اساني سره لیدل کیږي، چي د بول هر متناهي الجبر اټمي الجبر دي. که $\langle B,\wedge,\vee,\neg,0,1\rangle$ د بول متناهي الجبراو X د هغه د اټمو سیټ وي ، نو د B الجبر د $\langle\ \mathcal{P}(X), \cap,\cup, \setminus, \emptyset, X\rangle$ سره آیزومورف Isomorph (هم جوله) دي.

بېلګه 4.10. هغه ابتدائي ضرب ،چي د $q_n, \ldots, q_2, q_1$ بیانونه او یا د هغوی نفي په ځان کي ولري، نو نوموړي ضرب د $\mathfrak{L}(q_1, \ldots, q_n)$ د بول دالجبر اټم دي او بر عکس د نوموړي بول الجبر هر اټم د بیانو ابتدائي ضرب دی. د اټمو جمع د نوموړي بول الجبر عنصرونه دي او هر عنصر یې (که د تاوتولوجي د نفي په عوض کي د خالي جمع څخه کار واخلو) د اټمو د جمع په څېر راوړلای سو.

پدي ډول ددی فصل ، چي دبیان د الجبر په نامه مو یادکي، پای ته راورسیدی. اکثرآ دلته راوړل سوی تشریح د بیان د کلاسیک الجبر په نامه هم یادیږي. دلته غواړم چي پر هغه واقعیت بیا هم ټینګار وکم ، چي بیانونه ،پر بیانو باندي عملیې او د هغوی د رشتیاوالي جدول په هغه ډول چی دلته تشریح سوه په خاص ډول د ثبوت مفهوم ، د بیان د الجبر اکسیومي او مودوس پوننس د استنباط طریقه ددی برخي د ملا تیر تشکیلوي. نور په اصطلاح غیر کلاسیک د بیان الجبري هم وجود لري ، چي د بیان د کلاسیک الجبر څخه یې تفاوت د رشتیاوالي د جدولو په قیمتو کي ، نورو ثبوتو او کله کله هم نورو عملیو کي دی. ښه بېلګه یې د بیان څو قیمته الجبر دي . پدي معنی ، چي بیان نه یوازي د رشتیا او درواغ قیمت لري ، بلکه $n>2$ قیمتونه ولري. پولینډي ریاضي پوه لو کاښیې ویچ (ŁUKASIEWICZ(1920 د اوس څخه پوره یوه پېړي مخ کي د بیان الجبر د $n=3$ قیمتو سره څېړلي او بل پولنډي ریاضي پوه ایمیل پوست (Emil POST(1921 د اختیاري n د پاره څېړلی دي. د بیان کلاسیک الجبر د بول د نورو الجبرو خصوصي حالت دي.

دوهم فصل
د پریدیکات الجبر

زه دلته بیاهم د ګوتفرید لایبنیخ مفکوري ته راګرځم. هغه د بشري ژبي ماوراء داسي ژبه غوښتل چي په هغه کي د ریاضي ټولی افادي بی له سوء تفاهم څخه فورمولبندي کړای سي. اوس نو د تېر فصل د وروستي پاراګراف د اټم د الجبر تعریف ته په دقت سره بیا هم ځیر سئ. هلته د « او بل داسی عنصر وجود ونلري» په کار اچول سوی دي . اټومیک الجبر مو داسی تعریف کي ، چي د« هر عنصر دپاره اټم و جودولری» . د «هر» او «موجود» هغه کلمی دی ، چي د بیان د الجبر په ژبه کی نسی افاده کیدلای.

د بلی خوا که ووایو چي «محصل کتاب لولي» ، که څه هم دغه جمله په لمړي نظر داسي بریښی لکه چي بیان وي ، خو د هغه د رشتیاوالي په هکله قضاوت نسو کولای. کم محصل ؟ او یا کم کتاب؟ د «ریدی د رحمن بابا دیوان لولی» جمله مشخصه برېښي. ویلای سو ، چي آیا دابه رشتیا وي او که دروغ. که ووایو چي «فلانکی د جهانی د شعرو یو کتاب لولی» ، نو بیاهم د رشتیاوالي په هکله هغه وخت قضاوت کولای سو ، چي د فلانکی پر ځای یو مشخص شخص ونوموواو د جهانی د شعرو د یو کتاب پر ځاي مشخص د « کوه تور» یا «رازونیاز» ... او نور و یادوو. دلته «فلانکی» او «یو کتاب» متحولونه دي . تر څو چي دنومونړو متحولو په بدل کي مشخص نومونه رانه وړو ، د جملي د رشتیلوالی یا درواغ والي په هکله قضاوت نسو کولای. دا هغه جملي دي، چي دلته یو شخص اویا یو کتاب د هغه وړونکي (په عربي کي محمول یا مسند او په انګریزي کي Predicate ورته وایې) دي.

11§. د بیان تابع

په مقدمه کي مو پاس څو بېلګي راوړي.دلته به یې بیا هم په یوه بېلګه راشروع کو. پدي موخه به د «د x.y عدد مثبت دي» جمله و څېړو. نوموړي جمله په لنډ ډول "x·y >0" لیکلای سو. ددی دپاره چي د راکړه سوی جملی څخه بیان جوړسي، نو مجبوره یو چي د x او y په

بدل کي مشخص حقيقي عددونه وضع کو. دغه ډول جملو ته د **بيان تابع** Propositional Function وايو. پدي ډول د بيان تابع هغه جمله ده ، چي متحول پکښي وجود ولري. په هغه صورت کي چی د متحول په عوض کي <u>مشخص مجاز شئ</u> وضع کو، نو بيان لاسته راځي. لمړئ به د " مجاز" صفت تشريح کو. په يقين سره ويلای سو ، چي په لمړي بېلګه کي ، چي په مقدمه کي مو ذکر کي ، د محصل په عوض کي يو عدد نسو ايښودلای. يعني په ذکرسوی جمله کی د محصل کلمه د عدد سره تعويضول مجاز ندی.همداډول د کتاب په بدل کي " مهاتما ګاندی" هم نسو راوړلای. که څه هم دواړه شيان ، هدف مي دلته Object ابجکټ(شئ) دی، مشخص دي ، خو مجاز ندي. د محصل کلمه موږ.ته څرګندوی ، چی بايد د هغه په بدل کی دهغه چا نوم راوړو ، چي کوم چيرته تحصيل کوي. همداډول د کتاب په عوض کي هم بايد په کافی اندازه مشخص معلومات راوړو. زموږ په وروستئ بېلګه کي هم د x او y په عوض کی د شخص او يا کتاب نوم نسو راوړلای. بلکه يوازي مشخص حقيقي عددونه ايښودلای سو.

د بيان تابع چي د $x_1, \dots x_n$ متحولونه په ځان کي ولري، د بېلګي په توګه په $\upsilon(x_1, \dots x_n)$ سره ښيو. وايو چي د بيان تابع $\upsilon(x_1, \dots x_n)$ د $x_1, \dots x_n$ په متحولونو پوري تړلی ده. که په عين وخت کي د بيان څو تابع ګانې په نظر کي ولرو ، نود هغوی د څېړني د آسانتيا دپاره به ښه وي ، چي هغوی عين متحولونه ولري. په دغه ډول حالت کي د بيانو تابع ته د هغو متحولو په شمېر چي دټولو تابع ګانو دپاره مشترک ندي پراختيا ورکوو. نوموړي متحولونه د خيالي متحولو په نامه يادوو. د بېلګي په ډول که $\upsilon(x)$ د بيان يوه تابع وي او $\upsilon(y)$ د بيان بله تابع وي ، نو موږ کولای سو ، چي د هغوی په عوض کي د $\upsilon(x,y)$ تابع وڅېړو.موږ کولای سو حتی د z متحول هم ور اضافه کو ، يعنی $\upsilon(x,y,z)$ و څېړو.په عمومي ډول که د بيان تابع υ د $x_1, \dots x_n$ په متحولو پوري تړلي وي يعنی $\upsilon(x_1, \dots x_n)$ وی، او $y_1, \dots y_m$ نور متحولونه وي ، نو کولای سو چي $\upsilon(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m)$ وليکو.

بېلګه1.11. د پاراګراف په شروع کي مو د "$x \cdot y>0$" د بيان د تابع بېلګه راوړه، د بيان نوموړي تابع کولای سوچي په $\upsilon(x,y)$ سره وښيو. يعنی:

$$\upsilon(x,y): x \cdot y >0$$

اوس نو که د بیان په نوموړي تابع کی د z خیالي متحول وراضافه کو ، یعنی $\upsilon(x,y,z)$ ولیکو ، د بیان په تابع کي کوم تغیر نه راځي. پدي معنی موږ کولای سو، چي :

$$\upsilon(x,y,z): x \cdot y > 0$$

ولیکو.

پر بیانو باندی د عملیو په مرسته موږ کولای سوای چی نوی بیان جوړ کو.همدا ډول د بیان د تابع ګانو څخه هم د بیان د عملیو په مرسته د بیان نوی تابع جوړولای سو. پدي معنی که د $\upsilon_1(x_1, \dots, x_n)$ او $\upsilon_2(x_1, \dots, x_n)$ د بیان تابع ګانې راکړه سوی وي، نو بیا کولای سو چي د هغوی څخه په لاندي ډول نوی د بیان تابع ګانې جوړي کو:

$$\upsilon_1(x_1, \dots, x_n) \vee \upsilon_2(x_1, \dots, x_n), \qquad \upsilon_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \upsilon_2(x_1, \dots, x_n),$$

$$\upsilon_1(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \upsilon_2(x_1, \dots, x_n), \qquad \upsilon_1(x_1, \dots, x_n) \equiv \upsilon_2(x_1, \dots, x_n),$$

نوې تشکیل سوې بیانونه و بیانو ته ورته په ترتیب سره د بیان د تابع د جمع، ضرب ، استنباط او معادلیت په نامه یادوو. څرګنده ده ، چي د بیان د تابع نفي $\neg\, \upsilon(x_1, \dots, x_n)$ هم جوړولای سو.د قوسو په په کاراچولو کي ورته ترونونه لکه د بیانو په هکله صدق کوي.

ددی فصل په مقدمه کي مودتېر فصل د وروستئ بېلګي یادونه وکړه، ومو ویل چي ذکر سوي افادی د بیان په الجبر کي نسو ارائه کولای. په الجبر کي د واقعیت سره ، چي 2 جفت عدد دی، 4 جفت عدد دی، 6 جفت عدد دی، ... او داسي نور ، هرومرو مخامخ سوی یاست. نوري بېلګي :

– ټول طبیعی عددونه مثبت دي.

– ټول طبیعی عددونه منفي دي.

– هر انسان مري.

دي. په پورتنیو ټولو بیلګو کي زموږ شئ (ابجکت) یو خصوصیت لري. که زموږ شئ x او دهغه خصوصیت په υ سره وښیو ، نو دغه واقعیت چي د x شئ د υ خصوصیت لري په $\upsilon(x)$ سره ښیو او د $\forall x\, \upsilon(x)$ په ذریعه " هر x د υ خصوصیت لری" افاده کوو. د "$\forall$" نښه د عمومي کوانتیفیکاتور universal quantifier په نامه یادیږي او "$\forall x$" د هر x دپاره، ویل

کیږي. د کوانتیفیکاتور کلمه د لاتیني کلمی quantum چي د " څو یا څونه" په معنی ده، اخیستل سوی ده.

زموږ په پورتني څېړنو کي ، که $\upsilon(x, y_1, \dots, y_n)$ د بیان تابع نو د عمومي کوانتیفیکاتور په مرسته د :

$$(\forall x)\ \upsilon(x, y_1, \dots, y_n) \qquad \dots(1)$$

د بیان تابع جوړولای سو. او وایو چي " د هر x دپاره $\upsilon(x, y_1, \dots, y_n)$ صدق کوي". پاملرنه وکي چي نوموړي د بیان تابع بیا په x پوري نده تړلي.د بیان همدغه تابع " د هر u دپاره $\upsilon(u, y_1, \dots, y_n)$ صدق کوي" هم ارائه کولای سو. په (1) اړېکه کي د $y_1, \dots, y_n$ پر ځای قیمتونه وضع کولای سو، خو د x په عوض قیمت نسو وضع کولای.

اوس به لاندي بېلګو ته ځیر سو:

– د طبیعی عددو 11,9,6,4 څخه یو عدد یې یوازي پر خپل ځان او پر یوه د وېش وړ دي.

– یو طبیعی عدد x داسي دي چي $x > 0$ دي.

– مېړنی تل ژوندي وي.

د ذکر سوو بېلګو خصوصیت دادي ، چی یو شئ(ابجکت) د مشخص خصوصیت سره وجود لري. نو دغه حقیقت ، چي د x شئ د υ د خصوصیت سره وجود لری په $(\exists x)\upsilon(x)$ سره ښیو. د "$\exists$" نښه د موجودیت د کوانتیفیکاتور existential quantifier په نامه یادیږي. په ورته ډول د :

$$(\exists x)\ \upsilon(x, y_1, \dots, y_n) \qquad \dots(2)$$

د بیان تابع جوړولای سو. وایو چي " داسي x وجود لري، چی $\upsilon(x, y_1, \dots, y_n)$ صدق کوي" . نوموړی د بیان تابع هم نور په x پوري نده تړلي. دلته هم د x په بدل کي کوم قیمت نسو وضع کولای. ریاضي پوهان اکثراً قوسونه سپموي او کوانتیفیکاتور په قوس کي نه نیسي. تر هغه ځایه چي سوء تفاهم رانسي، نو (1) او (2) به په لاندي ډول لیکو:

$$\forall x : \upsilon(x, y_1, \dots, y_n), \qquad \exists x : \upsilon(x, y_1, \dots, y_n)$$

تعريف 1.11. د $\upsilon(x, y_1, \ldots , y_n)$ د بیان په تابع کي د x متحول د تړلي متحول dependent variable په نامه یادیږي، که نوموړی متحول په عمومي $\forall x$ یا موجودي $\exists x$ کوانتیفیکاتور پوري تړلی وي. غیر له هغه متحول د آزاد متحول Indepedent variable په نامه یادوو.

د موضوع د ښه څرګندوني دپاره لاندنیو بېلګو ته ځیر سي.

بېلګه 2.11. لاندني عددی سلسله په نظر کي نیسو:

$$\sum_{i=n}^{m} i^2 \qquad \ldots (3)$$

پورتني افاده د n او m په عددو پوري تړلی ده. د i د توری په بدل کی کولای سو " هر شئ" وټاکو، پدی معنی چي لاندني افادې هم عین واقعیت افاده کوي:

$$\sum_{i=n}^{m} i^2 = \sum_{j=n}^{m} j^2 = \sum_{\clubsuit=n}^{m} \clubsuit^2 = \sum_{\heartsuit=n}^{m} \heartsuit^2$$

علاوه پردي د m او n د متحولو په بدل کي کولای سو ، چی طبیعی عدد(یا تام عدد) وضع کو، خو د i یا j او یا .. په عوض کم عدد نسو وضع کولای. نوموړي افاده ، یعني (3) کولای سو ، چی حتی بېله i د توری دذکر څخه ارائه کو او هغه هم « د (3) افاده د n څخه تر m پوري د عددونو د مربع جمع ده».

بېلګه 3.11. په لاندني افاده کي د x توری و تېري بېلګي ته ورته د i په ډول دي:

$$\int_a^b x^2 dx$$

په 2.11 او 3.11 بېلګو کي د i او x توري تړلي متحولونه دي.

په ورته ډول هغه متحول چی د بیان په تابع کي بلافاصله تر کوانتیفیکاتور وروسته څرګندیږي،دراکړه سوی بیان په تابع کي تړلی متحول دي. هغه متحولونه چي د بیان په تابع څرګند سي او د کوانتیفیکاتور په قید کي نه وي ، آزاد متحولونه دي. کوانتیفیکاتورونه دي، چی آزاد متحولونه په تړلی متحولو اړوی. به یاد یې ولري ، چي د بیان تابع د ازادو متحولو تابع ده نه د تړلو متحولو!ځکه نو که تړلی متحول د بیان په تابع کي د هغي په ټولو څرګندونو کی د

یوه بل متحول سره ، چی هغه د بیان په تابع کي حضور ونلري، عوض کو ، نو د بیان په تابع کم تغیر نه راځي (د 2.11 بېلګي ته ورته).

بېلګه 4.11. په لاندنیو افادو کي که د x د متحول په بدل کي z وضع کو، په افادو کم تغیر نه راځي. ځکه چي د x متحول تړلئ دي او هغه ته موږ هر نوم ورکولای سو.

$$\int_0^1 x^2 dx, \quad \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{x^2}, \quad (\forall x)x^2 \geq 0, \quad (\forall x)(\exists y)x + y = a$$

$$\int_0^1 z^2 dz, \quad \sum_{z=0}^{n} \frac{1}{z^2}, \quad (\forall z)z^2 \geq 0, \quad (\forall z)(\exists y)z + y = a$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y), \quad \lim_{z\to 0} f(z,y).$$

برعکس، که موږ په تړلو متحولو کي مشخص شئ (ابجکټ) وضع کو ، نو بی معنی افاده به لاسته راسي.

$$\int_0^1 7^2 d7, \quad \sum_{3=0}^{n} \frac{1}{3^2}, \quad (\forall l)l^2 \geq 0, \quad (\forall 0)(\exists y)0 + y = a$$

$$\lim_{5\to 0} f(5,y),$$

په وروستي افاده کي د y متحول آزاد متحول دي، ځکه نو د هغه په بدل کي مشخص شئ (ابجکت) وضع کولای سو.یعنی $\lim_{x\to 0} f(x,3)$ درسته ده.

بېلګه 5.11. د بیان لاندنې تابع ګانې راکړه سوی دي:

$$x^2 > 3, \quad (\forall x)(\exists y)(x + y < z)$$

د هغوی منطقي ضرب، چي بیا هم د بیان یوه نوی تابع ده، عبارت دی له:

$$x^2 > 3 \wedge (\forall x)(\exists y)(x + y < z) \qquad ...(4)$$

په (4) افاده کي د x متحول په دوه ډوله څرګندېږي. د انفصال تر نښي ∧ دمخه د x متحول آزاد متحول دي اوتر هغه وروسته د x متحول، تړلئ متحول دي. دلته د سوء تفاهم د رامنځ ته کېدو امکان ډېردي، ځکه نو پورتنئ افاده ببله دي چي د متحولو تر منځ تکر راسي، داسي ارائه کولای سو:

$$x^2 > 3 \wedge (\forall u)(\exists y)(u + y < z)$$

بیا هم یادونه کوم، چي د تړلی متحول نوم ته تغیر ورکولای سو!

عمومي کوانتیفیکاتور ($\forall x$) د پښتو په ژبه کي ، د " د هر x دپاره " ، " د اختیاري x دپاره"، " دټولو x دپاره" په ذریعه افاده کوو. که جمله د نفی په مفهوم وی، نو په پښتو کي " د هیڅ x دپاره" د افاده کولو امکان لرو. عمومي کوانتیفیکاتور ته لوی کوانتیفیکاتور هم ویل کیږي.

موجودي کوانتیفیکاتور ($\exists x$) د پښتو په ژبه کي د " داسي x وجود لري" ، " د کم x دپاره"، "لږترلږه د یوه x دپاره"، "داسي x موندلای سو،چي" په ذریعه افاده کولای سو. موجودي کوانتیفیکاتورته کوچنۍ کوانتیفیکاتور هم ویل کیږي.

که د بیان تابع په پر له پسي ډول په یوه یا څو لویو کوانتیفیکاتورو باند پیل سي ، نومعمولآ د هغوی دیادولو څخه صرفنظر کیږي، د بېلګي په ډول په ریاضي کي "د هر y,x او z دپاره، که $x<y$ او $y<z$ وي، نو $x<z$ دي." د " که $x<y$ او $y<z$ وي، نو $x<z$ دي" په ذریعه افاده کوو. دغه ډول افاده کېدو ته عمومي تعبیر وایو. ورته ډول د بیان د تابع ګانو د استنباط او معادلیت په صورت کي عمل کوو. پدي معنی د" $(\forall x)(\upsilon(x)\longrightarrow\omega(x))$ د بیان تابع حقیقت لری" په عوض کي وایو " $\upsilon(x)\longrightarrow\omega(x)$ صدق کوي" . د معادلیت په صورت کي هم همدا ډول مخ ته ځو. که د بیان په تابع کي کوچنی کوانتیفیکاتور وجود ولری، نو کیدای سي چی سوء تفاهم رامنځته سي. ځکه نو د کوچنی کوانتیفیکاتور د موجودیت په صورت کي باید د احتیاطه څخه کار واخیستل سي.

په ریاضي کي اکثرآ لوی کوانتیفیکاتور د شرط سره په کار اچول کیږي. دبیان تابع:

$$(\forall x, \upsilon(x))\ \omega(x,y_1, \dots ,y_k)$$

دبیان د لاندني تابع لنډه بڼه ده:

$$(\forall x)\ (\upsilon(x)\longrightarrow \omega(x,y_1, \dots ,y_k))$$

او کوچنۍ کوانتیفیکاتور :

$$(\exists x, \upsilon(x))\ \omega(x,y_1, \dots ,y_k)$$

دبیان د لاندني تابع لنډه بڼه ده:

$$(\exists x)\ (\upsilon(x)\wedge \omega(x,y_1, \dots ,y_k))$$

بېلګه 6.11. د رياضي په انالايز کې د لاړ (ترادف) د لميټ د تعريف سره آشنا ياست:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ که $(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\to(\exists n_0)(\forall n)(n>n_0\to|a_n-a|<\varepsilon))$.

د پورتنيو لنډونو په نتيجه کې د لميټ تعريف په لاندي ډول سره فارمولبندی کولای سو:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ که $(\forall\varepsilon,\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n,n>n_0)(|a_n-a|<\varepsilon))$.

بلاخره لاندنې افاده عين حقيقت په لنډ دول بيانوی:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ که $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n>n_0)(|a_n-a|<\varepsilon)$.

د بيان په برخه کې ددا سي بيانو سره مخامخ سوو، چې هغوی تل رشتيا وه او هغوی مو د تاوتولوجي په نامه يادکړل. همداډول د بيان تابع ګانې وجود لري، چې د خپلي بنې له مخې د هغوی د متحولو د هر قيمت دپاره تل رشتيا وي. د دغه ډول دبيان د تابع ګانو ساده بېلګي هغه د بيان تابع دي، چې د تاوتولوجي بيانو څخه په وجود راغلی وي. د بېلګي په ډول:

$(\upsilon_1(x)\to\upsilon_3(x))\to(\upsilon_2(x)\to\upsilon_3(x))\to((\upsilon_1(x)\vee\upsilon_2(x))\to\upsilon_3(x)))$.

د بيان نوري تابع ګانې هم وجود لري، چې تل حقيقت لري. د بېلګي په ډول:

$(\forall x)\upsilon(x)\to\upsilon(y)$, $\neg(\forall x)\upsilon(x)\equiv(\exists x)\neg\upsilon(x)$, $\neg(\exists x)\upsilon(x)\equiv(\forall x)\neg\upsilon(x)$.

د بيان هغه تابع ګانې چې تل حقيقت لري، د منطق له مخې په حقيقي بيانوlogically truth باندی نوموو. ورته ډول وايو چې د $\upsilon(x)$ او $\omega(x)$ د بيان دوي تابع ګانې په خپل منځ کې معادل دي، که د بيان تابع $\upsilon(x)\equiv\omega(x)$ د منطق له مخې حقيقت ولري.

د $\neg(\forall x)\upsilon(x,y_1,...,y_k)$ د بيان د تابع نفي، يعنی $(\forall x)\upsilon(x,y_1,...,y_k)$ د بيان د تابع سره معادل دي. $(\exists x)\neg\upsilon(x,y_1,...,y_k)$

همدا ډول د $\neg(\exists x)\upsilon(x,y_1,...,y_k)$ د بيان دتابع نفي ، يعنی $(\exists x)\upsilon(x,y_1,...,y_k)$ د بيان د تابع سره معادل دي. $(\forall x)\neg\upsilon(x,y_1,...,y_k)$

دبېلګي په ډول د$(\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall v)\upsilon(x,y,u,v)$ د بيان د تابع نفي ، يعنی $\neg(\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall v)\upsilon(x,y,u,v)$ د $(\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)\neg\upsilon(x,y,u,v)$ سره معادل دي.

په اسانې سره ثابتيدلای سي، چې د شرط سره کوانتيفيکاتورونه :

$(\forall x, \upsilon(x))\ \omega(x,y_1, \dots ,y_k)$ او $(\exists x, \upsilon(x))\ \omega(x,y_1, \dots ,y_k)$

په ترتیب سره په لاندی ډول نفي کېږي:

$(\exists x, \upsilon(x))\ \neg\omega(x,y_1, \dots ,y_k)$ او $(\forall x, \upsilon(x))\ \neg\omega(x,y_1, \dots ,y_k)$

د بېلګي په ډول د بیان تابع $(\forall x, \upsilon(x))\ \omega(x,y_1, \dots ,y_k)$ د

$$(\forall x)\ (\upsilon(x)\longrightarrow \omega(x,y_1, \dots ,y_k))$$

سره معادل دي. دنوموړي دبیان دتابع نفي $(\exists x)\neg(\ \upsilon(x)\longrightarrow \omega(x,y_1, \dots ,y_k))$ عبارت دي له $(\exists x)(\ \upsilon(x)\wedge \neg\omega(x,y_1, \dots ,y_k))$ څخه. د وروستي افادی لنډه بڼه :

$(\exists x, \upsilon(x))\ \neg\omega(x,y_1, \dots ,y_k)$

ده. په ورته ډول زموږ د ادعا دوهمه برخه ثابتیدلای سي.

بېلګه 7.11. د $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ د بیان دتابع نفي ، یعنی $\neg\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ عبارت دي له:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0)(\exists n > n_0)(|a_n - a| \ge \varepsilon).$$

ددی دپاره چي د کوانتیفیکاتورو سره بلد سی، دلته بیا هم یوه ساده د ریاضي او ورځني ژوند، زموږ په حالت کي د پښتوژبي، ترمنځ یو څو جملې ژباړو.

بېلګه 8.11. بری به په b او زده کونکی به په Z سره وښیو. منډی وهل به په M سره وښیو. اوس نو "بری منډي وهي" په M(b) سره افاده کولای سو. لاندنیو جملو ته ځېر سي:

1. بری منډي وهي $\qquad M(b)$
2. هر زده کونکی منډي وهي $\qquad \forall x(Z(x) \longrightarrow M(x))$
3. کم زده کونکی منډی وهي $\qquad \exists x(Z(x)\wedge M(x))$
4. هیڅ زده کونکی منډي نه وهي $\qquad \neg\exists x(Z(x)\wedge M(x))$
5. کم څوک منډي وهي $\qquad \exists x(M(x))$
6. هیڅ څوک منډی نه وهي $\qquad \forall x(\neg M(x))$ او یا $\neg\exists x(M(x))$

نوټ. د پریدیکات الجبر د بیان د الجبر پراخونه ده. ویلای سو چي د بیان الجبر دپریدیکات د الجبر سب سیټ دي. دواړه الجبری تر ډېره حده سره ورته دي . ځکه نو د ځینو مفهومو په اړوند باید د احتیاط څخه کار واخیستل سي او یو دبل سره عوض نسي. په خاص ډول د متحول مفهوم اکثراً د سوء تفاهم لومه ده.د متحول مفهوم په دواړو الجبرو کي په مختلفو

معناوو سره په کار اچول کیږي. د $P(x)$ په پریدیکات کي د x متحول یو ځایساتي Placeholder دي، چي د هغه په بدل کي د یوه بنسټیز سیټ او یا مشخص سیټ اختیاري عنصر a وضع کولای سو،څو د هغه په نتیجه کي $P(a)$ په بیان تبدیل سي. روسته له هغه څخه د $P(a)$ د رشتیاوالي یا درواغ والي په هکله قضاوت کولای سو.

د بیان په الجبر کي ابتدایي بیانونه د متحولو په مفهوم کارول کیږي. ابتدایي بیانو ته د 0– ئېزه پریدیکات په سترګه کتلای سو، نه د پریدیکات د متحول په سترګه.

تمرین 1.11.

1. لاندني جملي د بیان د تابع په ژبه وژباړي:

الف) هر څوک چي هوډ وکي د ریاضي منطق زده کولای سي.

ب) هیڅ سیاستمدار صادق نه دي.

ج) هر مرغه نسي الوتلای.

د) هرڅوک چي ګلبشره ووینی پر میین سي.

ه) هر جفت عدد پر 2 د وېش وړ دي.

ی)داسی سلمان سته ، چي دهر هغه شخص ږیره ور خریي ، چي هغه پخپله خپله ږیره نه خریي.

2. لاندني جملي په پښتو ولیکی:

الف) $(\forall x)(N(x) \wedge (\forall y)\neg W(x,y) \rightarrow B(x))$ پداسي حال کي، چي $N(x)$ "x نارینه دي"، $W(x,y)$ " x د y سره واده کړی دي" او $B(x)$ "x بدمرغه دی".

ب) $(\forall x)(V(x) \wedge P(x) \longrightarrow A(x,b)$ پداسي حال کي، چي $V(x)$ "x تام عدد دي"، $P(x)$ "x تام اولیه عدد دي"، $A(x,y)$ د $x=y$ په معنی دي او b د 2 نماینده ګي کوي.

ج) $\neg(\exists y)(I(y) \wedge (\forall x)(I(x) \longrightarrow L(x,y)))$ پداسي حال کي، چي $I(y)$ "y تام عدد دی"،او $L(x,y)$ د $x \leq y$ په معنی دي.

§12. فارمول Formula

په تېر فصل کي ددی دپاره چي د بیان دالجبر په هکله بنستیزې نتیجې لاسته راوړو، باید د بیان مفهوم مو په صوري ډول معرفي کړی وای،تعریف 1.2 وګورئ. ابتدایې بیان مو معرفي کي او یوازي د ابتدایې بیانو څخه موږ بیان باندي دعملیو په نتیجه کي ترکیبي بیانونه جوړکړه. په ورته ډول د بیان د تابع په هکله ګامونه پورته کوو. خو د بیانو د تابع ګانو په حالت کي ساختمانونه تر پخوا ډېر پیچلې دي.

دبیان په تابع کي متحولونه وجود لري، چي دهغوی په بدل کي مجاز شیان "ابجکت" اېښودلای سو. په اساني سره کولای سو، چي د راکړه سوی بیان د تابع ټول متحولونه د عینی شي سره تعویض کو، پدی معنی ،چي مجاز شیان د ټولو متحولو دپاره مشترک دي. معمولاً سیټ راکړه سوی دي او د سیټ عنصرونه زموږ د ضرورت وړ یا مجازشیان دي. دبېلګي په ډول که د بیان تابع د طبیعي عددو تابع وي، نو زموږ مجاز شیان "ابجکتز" طبیعی عددونه یا د $\mathbb{N}$ د سیټ عنصرونه دي. او که دبیان تابع دحقیقي عددو په هکله وي ، نو زموږ شیان حقیقي عددونه $\mathbb{R}$ دي. وروسته به بیا د تعریف د ساحي په هکله ږغېږو. که دبیان تابع "زده کونکی کتاب لولي" په نظر کي ونیسو، نو دلته دوه متحوله څرګندېږي . "زده کونکی" او "کتاب" . پدي حالت کي د ټولو کتابو سیټ او د ټولو زده کونکو سیټ را اخلو.ددي دپاره چي سوءتفاهم رانسي او جمله معنی ولري، لمړی به د زده کونکی نوم او بیا به د کتاب نوم وضع کوو.د بېلګي په ډول " زده کونکی ریدی د رحمن بابا دیوان لولي" یودرست بیان دي.خو برعکس ، د بېلګي په ډول "د رحمن بابا دیوان زده کونکی ریدی لولي" غیر حقیقي بیان دي. پدي معنی چي د معنی او معقولیت اصل د پښتو ژبي پر ګرامر ولاړ دي.

همداډول لکه چي د بیان د عملیو په مرسته مو د ابتدایې بیانو څخه، ترکیبي بیانونه جوړ کړل، د بیان د عملیو او کوانتیفیکاتورو په مرسته د بیان د ابتدایي تابعګانو څخه د بیان تابع جوړوو. که د بیان د تابع ګانو ځینو ساده ساختمانوته د طبیعي یا حقیقي عددو پر سیټو باندي نظر واچوو، نو لیدل کېږي، چي د بیان د ابتدایې تابع ګانو رول ، دبیان تابع لکه $t_1=t_2$ او $t_1<t_2$ ، پداسي حال کي چي t_1 او t_2 عددی افادې وي، لوبوی.د بېلګي په ډول د بیان تابع "n اولیه عدد دي" داسي لیکو:

$(\forall m)(((\exists k)\ k\cdot m=n)\rightarrow(m=1 \vee m=n)).$

د بیان تابع "که $x>y>0$ وی، نو $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ دي" په لاندي ډول لیکلای سو:

$((x>y \wedge y>0)\longrightarrow(\forall u)(\forall v)((u>0 \wedge v>0 \wedge u^2=x \wedge v^2=y)\longrightarrow(u>v).$

دبیان په تابع ګانو کي دلته عددي افادي $v^2, u^2, v, u, 0, y, x, k\cdot m, l, n, m$ شاملي دي. څه ډول مو عددي افادي جوړي کړي؟ د متحولو او یا مشخصو حقیقي(طبیعی) عددو څخه مو راپیل کړه او په ترتیب سره مو د جمع، ضرب او نوري عملیې سرته ورسولي. د جذر عملیه ستونځمنه ده، ځکه چي جذر یوازي د غیر منفي حقیقي عددو دپاره تعریف کیدای سي. همدا دلیل ۋ چي دوهمه بېلګه مو بیله جذر څخه ارائه کړه.

لیدل کیږي چي نوموړې افادي د ابتدایي بیانو د ساختمانو ځانګړتیا ښیي . پدي معنی چي دبیان د تابع د متحول په بدل کي مشخصه "عددی افاده" وضع کوو . دغه مقدماتی څېړنه د بیان د تابع ګانو صوری یا د فورمالیزیشن بنسټ تشکیلوي. نوموړي تیوري د پریدیکات د الجبر په نامه یا دقیقاً لمړي درجه د پریدیکات د الجبرپه نامه یادوو. په نورو کتابو کي د پریدیکات د کالکولس Predicate Calculus په نامه هم یادیږي، خو زه به دلته خپلي ترمینولوژی ته وفادار پاته سم. لمړی درجه ، ځکه چي د پریدیکات لوړه درجه الجبرې هم وجود لري.

لمړئ خو به د پریدیکات د الجبر ژبه دروپېژنم:

$$\mathfrak{L}=\langle P,Q,R,\ldots,a,b,c,\ldots f,g,h,\ldots,x_1,x_2,x_3,\ldots,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\forall,\exists,(,)\rangle$$

$P,Q,R,\ldots$	پردیکاتونه دي
$a,b,c,\ldots$	خصوصي ثابتونه دي
$f,g,h,\ldots$	د عملیو نومونه دي
$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$	متحولونه دي
$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\equiv$	منطقي اتصال دي
$\forall, \exists$	کوانتیفیکاتورونه دي
(,)	قوسونه دي

دهرپریدیکات او عملیې دنامه سره به د "ئېزه" کلمه ضمیمه وي .پدی معنی چي د هغو د ځایو شمېربه راته ښی،چي موږ یې تعویضولای سو. د یوه ئېزي، دوه ئېزي ، n،... ئېزي عملیو د نومونو سره بلد یاست. په مشخص حالت کي به ژبه زموږ د څېړنو پر شرایطو عیاروو.د ژبي د نښو په راجستر کي وروستي څلور کرښې حتمی دي. پدي معنی، چي متحولونه،منطقي اتصال، کوانتیفیکاتورونه اوقوسونه به په هره ژبه کي هرومروموجود لری ، یعنی د هغوی موجودیت ضروري دي او د صریح یادوني څخه یې صرفنظر کوو. ځکه نو راکړه سوی ژبه به په لاندي ډول ښیو:

$$\mathfrak{L}=\langle P ,Q,R,..., a,b,c,..., f,g,h,...\rangle$$

فرضوو به چي په هره ژبه کي لږتر لږه د بیان یوه تابع یا پریدیکات وجود لري.د څېړنو په لړ کی به ژبې ولرو چی هغوی هیڅ خصوصي ثابتونه اویا د عملیونومونه اویا دواړه نلري. پدي معنی چي په ځینو حالتو کي به راکړه سوی ژبه یوازي د بیان تابع ګانې ولري. پاملرنه وکي چي د متحولو شمېر تل لایتناهي ډېر دي.خود ژبي نور عنصرونه حتمی نده چی لایتناهي ډېر وي. حتی په ډېرو حالتو کي به د هغوی شمېر ډېر لږوي او پر ګوتو به یې وشمېرلای سو. کله کله به د ساده والي له اسیته متحولونه بېله اندکس څخه په ساده ډول په x,y,z,u,v,... سره ښیو.

د بیان د تابع د الجبر نښې ، چي پاس مو ذکر کړي، یو شئ په نښه کوي، هغه به تاسوته دلته در په ګوته کم. متحولونه د M د سیټ مجاز عنصرونه په نښه کوي، خو نژدي نه پو هېږم چي کم عنصر. د بیان تابع یا پریدیکات د M پر سیټ باندي د مجازو عنصرو ترمنځ د اړیکي د تعریفولو(جوړولو) وسیله ده. "ئېزه" د بیان د تابع د متحولو شمېر ټاکي. خصوصي ثابتونه د مجازو عنصرو څخه مشخص نومولي عنصرونه په نښه کوي. بلاخره د k ئېزي عملیې نوم د M پر سیټ k ئېزه عملیه په نښه کوي ، پدي معنی چي د M پر سیټ k ئېزه عملیه د M^k څخه د M په سیټ کي مپینګ دی.

لکه پخوا چي مو وویل ، موږ دلته د ریاضي ماوراء Metamathematics عمومي تیوري څېړو، عملی او مشخصي بېلګې به یې د ریاضي په نورو څانګو کي لټوو.لاندنې بېلګه د الجبر څخه رااخلو.

بېلګه 1.12. د رینګ د تیوري $\mathfrak{L}_{\text{ring}}$ ژبه[19] علاوه پر ضروری نښو دوه ئېز پریدیکات $\underset{=}{=}$ ، دوه خصوصي ثابتونه **0** , **1** او دری دوه ئېزي عملیې $\underset{\cdot}{\cdot}$,$\underset{-}{-}$,$\underset{+}{+}$ احتوا کوي. یعني:

$$\mathfrak{L}_{\text{ring}}=\langle \underset{=}{=}, 0,1, \underset{+}{+}, \underset{-}{-}, \underset{\cdot}{\cdot} \rangle$$

د ګروپ د تیوري ژبه یوازې یو پریدیکات $\underset{=}{=}$ ، یو خصوصي عنصر e او یو د دوه ئېزي عملیې نوم $\underset{\circ}{\circ}$ احتوا کوي. یعنی:

$$\mathfrak{L}_{\text{group}}=\langle \underset{=}{=}, \underset{\circ}{\circ}, e \rangle$$

د ګراف د تیوری ژبه دوه دوه ئېزه پریدیکاته H , $\underset{=}{=}$ ، خو هیڅ خصوصي ثابت او هیڅ د عملیې نوم نه احتوا کوي.

پاملرنه وکي چي د دواړو ژبو په ښودلو کي د مساوات د نښي څخه کار اخیستل کیږي، لمړی مساوات = د ماوراء یا مافوق ریاضي په ژبه کي دي او دوهم مساوات $\underset{=}{=}$ د ریاضی په جوړښت (ساختمان)کي ، مشخص په الجبري مفهوم دي.

د بیان و الجبر ته ورته د پریدیکات د الجبر ابتدایي مفهومونه به تعریف کو.زموږ لاندنئ مفهوم کولای سوپه اصطلاح لکه "عددی افاده" تصورکو. خوزه به دلته بیا کلمه ورته ووایم . همدا ډول لکه د تېر فصل په شروع کي مي وویل د الفباء دحروفو څخه "په معقول ډول" کلمې جوړوو.

تعریف1.12. د کلمي Term د مفهوم تعریف به د استقراء په بڼه وکو:

t_1) هر متحول کلمه Term ده،

t_2) هر خصوصي ثابت کلمه ده،

t_3) که $t_k,..., t_2,t_1$ کلمې او f د k– ئېزې عملیې نوم وي ، نو $f(t_1,t_2, ... ,t_k)$ کلمه ده.

نوټ . څرنګه چي د تیوری په ژبه کي تورې راکړه سوی دي ، یعنی د ضروري عنصرو د ډلي څخه دي، او هغه هم ممکن لایتناهي ډېر وي او مشخص د تورو "جنګول" کلمه منځ ته راوړي، دغه د تورو "جنګول" د k– ئېزي عملیې په مرسته صورت نیسي. کله چي وایو "هر متحول کلمه ده" هدف مو "هر توری دی" .د پښتو ژبي ته ځیر سي ، ددی پر ځای

[19] [17,18] نیازمن: الجبر او د عددونو تیوري لمړي او دوهمه برخه وګورئ.

چي ووايم "ا" کلمه ده ، "ب" کلمه ده ، ... اوداسي نور، نو ټوله د متحول په صفت منم او وایم چي هرمتحول کلمه ده.

په 2.2 تعریف کي مو د بیان د منشاء لاړ تعریف کي. په عین ډول د کلمي د منشاء لاړ تعریفولای سو.

تعریف 2.12. د پریدیکات په الجبر کي د $t_1, t_2, \ldots, t_n$ د کلمو لاړ د کلمي د منشاء د لاړ Predicate Creating Sequence (PCS) په نامه یادوو، که د هغه د هر غړیا هر اندکس$n, \ldots, i=1,2$ دپاره د لاندنیو شرطو څخه یو شرط صدق وکي:

الف) t_i د 2.12 د تعریف سره مطابق کلمه ده.

ب) د $j<i$ اندکسداسي وجود لري ، چي $t_i=\neg t_j$ دي، پدي معنی د t_i کلمه د مخکني t_j د کلمي د نفي په نتیجه کي لاسته راغلي ده.

پ) د $j,k<i$ اندکسونه داسي وجود لري ، چي د $t_i=t_j♣t_k$ ده. پداسي حال کي چي ♣ د $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ د منطقي اتصالوڅخه د یوه اتصال نماینده ګي کوي.پدي معنی چي د t_i کلمه د t_j او t_k د کلمو د اتصال په نتیجه کي لاسته راغلي ده.

ج) د $j<i$ اندکسداسي وجود لري ، چي $t_i=(\forall x)t_j$ دي. x متحول دي.

د) د $j<i$ اندکس داسي وجود لري ، چي $t_i=(\exists x)t_j$ دي. x متحول دي.

تعریف 3.12. د پریدیکات د الجبر په ژبه کي د t لغات Word د هغی کلمي څخه عبارت دي، چي د $t_1, t_2, \ldots, t_n$ د کلمي د منشاء لاړ داسي وجود ولري ، چي وروستی غړی یې همدغه کلمه وي، یعني $t_n=t$ وي.

کلمه د هغو متحولو تابع ده چي موږ د هغی کلمي دجوړښت دپاره کار ورڅني اخیستی دي. لاندي بېلګه به دغه مفکوره څرګنده کړي.

بېلګه 2.12. که د رینګ د تیوری په ژبه $\mathfrak{L}_{ring}$ کي د t_1, t_2 کلمې راکړه سوی وي، نو د $\underset{\smile}{+}(t_1, t_2)$, $\underset{\smile}{=}(t_1, t_2)$ او $\underset{\smile}{\cdot}(t_1, t_2)$ کلمې به په ترتیب سره $(t_1 \underset{\smile}{+} t_2)$, $(t_1 \underset{\smile}{=} t_2)$ او $(t_1 \underset{\smile}{\cdot} t_2)$ لیکو.معمولاً د دباندنیو قوسود لیکلو څخه صرفنظر کوو . همدا ډول په نورو ورته ژبو کي هم مخ ته ځو. په نوموړي ژبه کي لاندنې لغاتونه د هغي ژبي کلمي دي:

$$(x \underset{\smile}{\cdot} x) \underset{\smile}{+} (y \underset{\smile}{\cdot} y),\ ((1 \underset{\smile}{+} 1) \underset{\smile}{\cdot} x) \underset{\smile}{+} z,\ ((x \underset{\smile}{\cdot} x) \underset{\smile}{=} ((1 \underset{\smile}{+} 1) \underset{\smile}{\cdot} (x \underset{\smile}{\cdot} y))) \underset{\smile}{+} (y \underset{\smile}{\cdot} y)$$

د هغوی د منشاء لاړونه په ترتیب سره په لاندی ډول دي:

$x,\ x \cdot x,\ y,\ y \cdot y,\ (x \cdot x) + (y \cdot y);$

$x,\ z,\ 1, 1+1,\ (1+1) \cdot x,\ ((1+1) \cdot x) + z;$

$x,\ x \cdot x,\ y,\ 1,\ 1+1,\ x \cdot y,\ (1+1) \cdot (x \cdot y),\ (x \cdot x) = ((1+1) \cdot (x \cdot y)),$

$y \cdot y,\ ((x \cdot x) = ((1+1) \cdot (x \cdot y))) + (y \cdot y).$

لمړي او دریمه کلمه د x او y د متحولو تابع او دوهمه کلمه د x او z د متحولو تابع ده.

اوس نو کولای سو چي د پریدیکات د الجبر یو د ډیرو مهمو مفهومو څخه ، چي هغه عبارت د فارمول د مفهوم څخه دي ، تعریف کو.

تعریف 4.12. که $t_1, t_2, \ldots, t_k$ کلمې او P د بیان k– ئېزه تابع وي، بیا نو$P(t_1, \ldots, t_k)$ د اټمي فارمول Atomic Formula په نامه یادوو.

تعریف 5.12. د فارمول مفهوم د استقراء په طریقه په لاندي ډول سره تعریفوو:

f_1) هر اټمي فارمول ، فارمول دي.

f_2) که φ فارمول وي، نو $\neg\varphi$ هم فارمول دي.

f_3) که φ_1 او φ_2 فارمولونه وي، نو $(\varphi_1 ♣ \varphi_2)$ هم فارمول دي ، پداسي حال کي چي ♣ د $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ د منطقي اتصالوڅخه د یوه اتصال نماینده ګي کوي.

f_4) که φ فارمول وي ، نو $(Qx)\varphi$ هم فارمول دي ، پداسي حالت کي چي Q یو د عمومي $\forall$ یا موجودي $\exists$ کوانتیفیکاتورو څخه او x متحول دي.

فارمول په خپل ذات کي د "بیان د تابع" صوري بڼه formalization ده.

په راکړه سوي فارمول کي د تړلي اوازاد متحول د کړکیچن تعریف څخه دلته صرفنظر کوو. په لنډ ډول ویلای سو چي اټمي فارمولونه آزاد متحولونه لري، نوموړي متحولونه دهغو کلمو جز دي چی په راکړه سوی اټمي فارمول کي را څرګندیږي. کوانتیفیکاتورونه ، لکه په تېر پاراګراف کي چي مو اشاره ورته وکړه، آزاد متحول په تړلي متحول بدلوی. پدي معنی چي متحول د کوانتیفیکاتور په قید کي راځي. په تابع ګانو هم فارمولو ته په ورته ډول د ازادو او تړلو متحولو د مفهومو حدس وهلای سي.

بېلګه 3.12. که د رینګ د تیوری په ژبه $\mathfrak{L}_{ring}$ کي د t_2,t_1 کلمې راکړه سوی وي، نو د $=(t_1,t_2)$ اټمي فارمول به په $(t_1=t_2)$ سره ښیو. بهرنۍ قوسونه معمولاً نه لیکو. د رینګ د تیوري و ژبي ته ورته په نورو ژبو کي هم همدا ډول کړنلاره غوره کوو.

لاندني لغاتونه د رینګ په ژبه کي فارمولونه دي:

$$((x \dot{\cdot} x) \underset{\smile}{+} (y \dot{\cdot} y)) \equiv (1 \underset{\smile}{+} 1)\ ,\ (((x \dot{\cdot} x) = ((1 \underset{\smile}{+} 1) \dot{\cdot} (x \dot{\cdot} y))) \underset{\smile}{+} (y \dot{\cdot} y) \equiv 0\ .$$

پورتنۍ اټمي فارمولونه د x او y آزادو متحولو درلودونکي دي. لاندنی لغات هم د نوموړي ژبي فارمول دي:

$$(\exists x)(((x \dot{\cdot} x) \underset{\smile}{+} (y \dot{\cdot} y)) \equiv (1 \underset{\smile}{+} 1)).$$

په پورتني فارمول کي د x متحول تړلی متحول دي او د y متحول آزاد متحول دي. ■

که φ فارمول وي، نو د $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ لیکنه پدي مفهوم ده ، چي د φ فارمول بیله $x_n, \ldots, x_1$ نور آزاد متحولونه په ځان کی نلري. د خیالي متحولو په هکله قرارداد د بیان و تابع ته ورته دي ، 11§ وګوری.

تعریف 6.12. هر فارمول چي هیڅ آزاد متحول په ځان کي ونلري د تړلي فارمول Closed Formula په نامه یادیږي.

که د φ فارمول یوازي او یوازي د $x_n, \ldots, x_1$ آزاد متحولونه په ځان کي ولري او بل هیڅ متحول ونلري، نو د :

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

فارمول به په ساده ډول $(\forall x_1, \ldots, x_n)\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یا $(\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi$ سره لیکو. او د φ د فارمول د عمومي پایلي Universal Closure of Formula په نامه به یې یادوو. د φ د فارمول عمومي پایله تړلي فارمول دي.

فرضوو، چي په هره ژبه $\mathfrak{L}$ کي لږ تر لږه یو پریدیکات وجود لري. فرضوو چي P - k ئیز پریدیکات دي، بیا نو :

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)\ P(x_1, \ldots, x_k)$$

د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي، تړلی فارمول دي. پدی معنی چي په هره ژبه کي لږ تر لږه یو تړلی فارمول وجود لري.

همدا ډول لکه د بیان د تابع دپاره د فارمول دپاره هم شرطي کوانتيفيکاتور داسي تعريفوو.

تعريف 7.12. که $\psi(x)$ او φ د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي داسي فارمولونه وي،چي د φ فارمول د x متحول په ځان و نلري، نو د

$$(\forall x)\ (\psi(x)\rightarrow \varphi\ )\quad ,\ (\exists x)\ (\psi(x)\wedge \varphi\ )$$

او يا په لنډ ډول :

$$(\forall x, \psi(x))\ \varphi\ ,\ \ (\exists x, \psi(x))\ \varphi$$

د شرطي کوانتيفيکاتورو سره د فارمولو په نامه يادوو.

بېلګه 4.12. په الجبر کي د لاندنيو فارمولو سره مخامخ سوی ياست:

الف) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

نوموړی فارمول به په $\psi(x,y)$ سره ونوموو، پدي معنی چي :

$$\psi(x,y):(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

د $\psi(x,y)$ فارمول تړلی فارمول دي ، ځکه نو ويلای سو $\forall x\forall y\ \psi(x,y)$ صدق کوي. اوس نو که د y,x ځايساتو په بدل کي هر حقيقی عدد وضع کو ، نو د (الف مساوات په ابتدايي بيان اوړي او د رشتيا والي په هکله يې قضاوت کولای سو، يعنی يو رشتيا بيان دي.

ب) $x^2 + 6 = -5x$

نوموړی فارمول ته به د $\varphi(x)$ نوم ورکړو. يعنی $\varphi(x): x^2 + 6 = -5x$. د $\varphi(x)$ فارمول شرطي فارمول دي او هغه وخت په رشتيا بيان اوړي ، چي $x=-2$ يا $x=-3$ وي. ■

د شرطی کوانتيفيکاتورو د په کار اچولو په وخت کي هم بايد د احتياط څخه کار واخيستل سي. د $\forall x\ \psi\longrightarrow\varphi$ او د $\forall x(\psi\longrightarrow\varphi)$ افادې په عمومي ډول مطابقت نه کوي ، يعنی $\forall x$ $\psi\longrightarrow\varphi\neq\forall x(\psi\longrightarrow\varphi)$. ځکه نو په تعريف کي د φ فارمول بايد د x متحول ونلري.

بېلګې 5.12.

1. په لاندنيو جملو کي د a_1 او a_2 متحولونه آزاد متحولونه دي:

الف) a_2 د a_1 مور ده.

ب) $a_1 > a_2$.

2. د "a_1 مور لرى" جمله داسي ليکلای سو: $\exists x$ ، x د a_1 مور ده.

3. د "هر څوک د a_1 مور ده " جمله داسي ليکلای سو: $\forall x$ ، x د a_1 مور ده.

4. د " هر څوک يوه مور لري" جمله داسي ليکلای سو: $\forall x\ \exists m\ R(m,x)$ پداسي حال کي چي $R(m,x)$ د انسانانو پر سيټ د موروالي اړيکه ده، يعنى "m د x مور ده" په معنى ده. پدي بېلګه کي د m او x دواړه متحولونه ترلی دي.پاملرنه وکي ، دلته د مور کلمه پريديکات دی، او هغه هم دوه ئېزپريديکات يا د بيان تابع ، چي د ټولو انسانانو پر سيټ تعريف او ځني د هغوی څخه د نوموړي نوم وړونکي دي.

5. که په $S(x)$ ، x زده کونکی دي، په نښه کو او په $W(x)$ ، x ځغلي (منډي وهي) ، په نښه کو ، نو زده کونکی او ځغاسته دوه يو ئېز برېديکاتونه يا د بيان تابعګاني دي. a زده کونکی دی ، يعنى $S(a)$ اتمي فارمول دي.همدا ډول b ځغلی ، يعنى $W(b)$ اتمي فارمول دي.

6. د تېري بېلګی نښي بياهم په نظر کي نيسو. څرنګه چي $S(a)$ او $W(a)$ اتمي فارمولونه دی نو د فارمول د تعريف له مخی $S(a)\rightarrow W(a)$ هم پريديکات دی ، کولای سو چي داسي تعبير کو: که a زده کونکی وي نو a ځغلي. د $\forall x\ (S(x)\rightarrow W(x))$ افاده هم فارمول دی او کولای سو چی داسی تعبير کو: د هر x دپاره که x زده کونکی وی ، نو x ځغلي.

7. راسی چي شپږم او څلرم جز سره ګډ کړواو نوی فارمول لاسته راوړو. هر زده کونکی ځغلي او هر زده کونکی مور لري: $\forall x\ (S(x)\rightarrow W(x))\wedge\forall x\exists y(R(y,x))$.

تمرين 1.12.

1. که $M(x,y)$ ،" x د y سره مينه لري"، په نښه کي ، نو لاندني جملی د فارمول په ژبه کي ارائه کي:

الف) ټوله خلک يو دبل سره مينه لري.

ب) ځني خلک يودبل سره مينه لری

ج) هر څوک د يو چا سره مينه لري.

د) د يو چا سره هر څوک مينه لري.

ه) د هر چا سره يو څوک مينه لري.

ی) داسي يو څوک سته چی د هر چا سره مينه لري.

2. $N(a)$ ، "a نجلي ده " په نښه کوي او $P(a)$ " a ښکلی ده" په نښه کوي. لاندني جملي د فارمول په ژبه کي ارائه کي:

الف) هره نجلي ښکلي ده.

ب) ځني نجوني ښکلي دي.

3. په 2 کي $\forall x(N(x) \wedge P(x))$ د (الف) د تعبيردپاره غلط دي (ولی؟) . همدا ډول $\exists x(N(x) \rightarrow P(x))$ د (ب) د تعبيردپاره غلط دي (ولی؟).

§13. د ژبي تعبير Interpretation of Language

په تېرو دوو پاراګرافو کي د پريديکات د الجبر د صوري اړخ يا فارمولیزيشن سره بوخت ؤ. اوس به نو راسو د فارموليزيشن برعکس څېړنه به مخ ته يوسو. د پريديکات د الجبر ژبه مو په لاندي ډول وښودله:

$$\mathfrak{L}=\langle \mathbf{P},\ldots, \mathbf{a},\ldots, \mathbf{f},\ldots\rangle$$

تعريف 1.13. د

$$\mathfrak{M}=\langle M, P, \ldots., a, \ldots,f, \ldots\rangle$$

ساختمان[20] د $\mathfrak{L}$ د ژبي د تعبير په نامه يادېږي، که لاندني شرطونه صدق وکي:

1) M غير خالي سيټ دي،

2) که **P** k– ئېزه پريديکات وي، نو P د M پر سيټ باندي k– ئېزه اړيکه ده، پدي معنی چي $P \subseteq M^k$ دي.

3) $a \in M$ دي،

[20] د ساختمان Structure کلمه مو نده تعريف کړي، په لنډ ډول د راکړه سوو شيانو Objects لاړ دي.

4) که **f** د k– ئېزي عمليي نوم وي، نوf د M پر سيټ باندي k– ئېزه عمليه ده. يعنی $f:M^k \longrightarrow M$ ده. ■

په بل عبارت متحولونه د M د سيټ څخه قيمتونه اخلي، د **P** پريديکات د بيان په ابتدايي تابع اوړی $[x_1, \ldots ,x_n] \in P$ ، خصوصي ثابتونه د M د سيټ ثابت عنصرونه دي، بلاخره f د k– ئېزي عمليې $f:M^k \longrightarrow M$ نوم دي .

بېلګه 1.13. د $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, =, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ ساختمان د رينګ دژبي $\mathfrak{L}_{\text{ring}}$ تعبير دي. د همدي ژبي نور تعبيرونه عبارت دي له :

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, =, 0, 1, +, -, \cdot \rangle \text{ او } \mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}, =, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$$

پورتني تعبيرونه د رينګ د ژبي طبيعي تعبيرونه دي . موږ کولای سو چی د نوموړي ژبي غير طبيعی تعبير هم وکړو، د بېلګي په ډول :

$$\mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}, =, 0, 1, \cdot, +, - \rangle$$

د رينګ د ژبي بل تعبير په الجبر کي در پيژندل سوی دي[21]:

که $p>1$ ثابت طبيعی عدد وي، نو د :

$$\mathfrak{I}_p = \langle \mathbb{Z}, \equiv \bmod p, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$$

ساختمان د رينګ د ژبي تعبير دي.

د ګروپ ژبه $\mathfrak{L}_{\text{group}}$ د بېلګي په ډول لاندنې تعبيرونه لري:

$$\mathfrak{G}_1 = \langle \mathbb{R}, =, +, 0 \rangle \qquad \mathfrak{G}_2 = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, =, \cdot, 1 \rangle$$

$$\mathfrak{G}_3 = \langle \mathbb{Z}, \equiv \bmod p, +, 0 \rangle \qquad \mathfrak{G}_4 = \langle \{1, \ldots, p\}, \equiv \bmod p, \cdot, 1 \rangle$$

لکه چي مخکي مو وويل په تعبير کي فارمول د پريديکات په تابع بدليږي. اوس نو بايد په تعبير کي د کلمي ځای ولټوو.

فرضوو، چي $\text{Var}=\{x_1, x_2, \ldots ,x_n, \ldots\}$ د پريديکات د الجبر د ژبي د متحولو سيټ دي. فرضوو، چي :

---

21 [18]نيازمن: الجبر او دعددونو تيوري دوهمه برخه، څلرم فصل

$$\mathfrak{M}=\langle M, P, ..., a, ..., f, ...\rangle$$

د پریدیکات د الجبر :

$$\mathfrak{L}=\langle \mathbf{P},..., \mathbf{a},..., \mathbf{f},...\rangle$$

د ژبې تعبیر دي او v:Var ⟶ M متحولو ته د M په سیټ کي، قیمت ورکول valuation دي. د $\mathfrak{L}$ د ژبي د هر ي کلمي $\mathbf{t}$ دپاره $v(\mathbf{t})\in M$ د استقراء په طریقه داسي تعریفوو:

- که x متحول وي ، نو v(x) د قیمت ورکولو په ذریعه تعریف سوی دي.
- که **a** خصوصي ثابت وي، نو $v(\mathbf{a})$=a سره ایږدو.
- که د $\mathbf{t}_1$, ... ,$\mathbf{t}_k$ کلمو دپاره، چي د هغوی قیمت ایښودنه $v(\mathbf{t}_1)$, ... , $v(\mathbf{t}_k)$ ټاکل سوي وي ، $\mathbf{t}=\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, ... ,\mathbf{t}_k)$ وي او f د k– ئېزي عملیې نوم وي، نو $v(\mathbf{t})=v(\mathbf{f}(\mathbf{t}_1, ... ,\mathbf{t}_k))=f(v(\mathbf{t}_1), ... , v(\mathbf{t}_k))$ سره ایږدو.

پاملرنه وکي چي $v(\mathbf{t})$ یوازي د قیمت د ټاکلو (یعنی د M د سیټ) تابع نده ، بلکه په مجموع کي د ټول تعبیر $\mathfrak{M}$ تابع ده. دغه حقیقت د $v(\mathbf{t})$ د تعریف څخه نه څرګندیږي.

بېلګه 2.13. که $\mathfrak{Q}=\langle \mathbb{Q},=,0,1,+,-,\cdot\rangle$ د $\mathfrak{L}_{\text{ring}}$ تعبیر وي اود v:Var⟶$\mathbb{Q}$ داسي قیمت ایښودنه وي ، چي $v(\mathbf{x})=4$, $v(\mathbf{y})=-3$ او $v(\mathbf{z})=2$ وي . نو د لاندنې کلمي :

$$\mathbf{t}=\mathbf{x}\,\underset{\smile}{+}\,(\mathbf{y}\,\underset{\smile}{\cdot}\,(\mathbf{z}\,\underset{\smile}{+}\,1))$$

قیمت $v(\mathbf{t})=v(\,\mathbf{x}\,\underset{\smile}{+}\,(\mathbf{y}\,\underset{\smile}{\cdot}\,(\mathbf{z}\,\underset{\smile}{+}\,\mathbf{1}))\,)=4+(-3\cdot(2+1))=-5$ کېږي، دلته په ژبه کي د عملیو نومونه په لاندي ډول تعبیر سوي دي:

$$\underset{\smile}{+}\ \to\ +$$
$$\underset{\smile}{\cdot}\ \to\ \cdot$$

خو که د :

$$\mathfrak{R}^*=\langle \mathbb{R},=,0,1,\cdot,+,-\rangle$$

په تعبیر کي د نوموړي کلمي قیمتونه په داسي حال کي کښېږدو، چي v:Var⟶$\mathbb{R}$ ، د **y**,**x** او **z** متحولونه عین قیمتونه غوره کي ، نو د عیني کلمي قیمت به :

$$v(\mathbf{t})=v(\,\mathbf{x}\,\underset{\smile}{+}\,(\mathbf{y}\,\underset{\smile}{\cdot}\,(\mathbf{z}\,\underset{\smile}{+}\,\mathbf{1}))\,)=4\cdot(-3-(2\cdot 1))=-20$$

وي. دا ځکه چي دلته په ژبه کي د عمليو نومونه په لاندي ډول تعبير سوي دي:

$$\underset{\smile}{+} \to \cdot$$
$$\dot{\smile} \to -$$

په راتلونکي ، بېله دي چي په صريح ډول يې وليکو ، د ژبي څخه به مو مقصد د پريديکات د الجبر ژبه وي. دلته د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي راکړه سوی فارمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ په راکړه سوی تعبير $\mathfrak{M}$ کي د بيان په تابع اوړي . د يو څو شېبو د پاره به يې په ناخنک قوسو کي و ليکو، ځکه چي د نوموړی افادي څخه وروسته په بل مفهوم کار اخيستل کېږي.

$$\text{"}\mathfrak{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)\text{"} \qquad \dots(13.1)$$

د ټاکلي قيمت ايښودنو په نتيجه کي د بيان نوموړي تابع په بيان تبديليږي، چي د رشتياوالي يا درواغ والي په هکله يې قضاوت کولای سو.

بېلګه 3.13. د $\mathfrak{L}$ د ژبي د $\mathfrak{M}=\langle \mathbb{N}, \widehat{P}, \widehat{R}, 2, 3 \rangle$ په تعبير کي $\mathbb{N}$ د طبيعی عددو سيټ ، د $\widehat{P}$ يوئېز پريديکات وايي :

$\widehat{P}(a)$: a جفت عدد دي

د $\widehat{R}$ دوه ئېز پريديکات وايي :

$$\widehat{R}(a,b) : a > b$$

2 او 3 زموږ په تعبير کي خصوصي ثابتونه دي.و ګورئ $\widehat{P}(a)$ د بيان يوه متحوله تابع ده او $\widehat{P}(2)$ رشتيا بيان دي، يعنی د بيان قيمت 1دی. ځکه نو ليکلای سو "$\mathfrak{M} \models \widehat{P}(2)$" ، يعنی د $\mathfrak{M}$ په تعبير کي $\widehat{P}(2)$ صدق کوي(د $\widehat{P}(3)$ په هکله خپل دليلونه راوړي!).

$\widehat{R}(a,b)$ د بيان دوه متحوله تابع ده او $\widehat{R}(2,3)$ وايي چي 3>2 دي. خو دغه بيان رشتيا ندی، يعنی د بيان قيمت 0 دي. ځکه نو ليکلای سو "$\mathfrak{M} \not\models \widehat{R}(2,3)$" پدي معنی چي د $\mathfrak{M}$ په تعبير کي $\widehat{R}(2,3)$ صدق نه کوي. ■

د $\mathfrak{L}$ ژبه، د هغه تعبير $\mathfrak{M}$ او د v:VAR ⟶ M قيمت ايښودنه valuation څېړو. د رياضي د استقراء په طريقه د $\mathfrak{M}$ په تعبير کي د صدق کولو اړيکه:

$$\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi(x_1, \dots ,x_n)$$

تعريفوو.

تعريف 2.13. فرضوو، چې **P** n– ئېز پريديکات او $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ کلمې دي.بيانو :

$\mathfrak{M}\vDash_{v}\mathbf{P}(\mathbf{t}_1, \dots ,\mathbf{t}_n)$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې $[v(\mathbf{t}_1), \dots ,v(\mathbf{t}_n)]\in P$ وي.

تعريف 3.13. که $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ فارمولونه وي ، نو د پريديکات د الجبر عمليې د $\mathfrak{M}$ په تعبير او د v په قيمت ايښودنو کې داسې تعريفوو:

الف) $\mathfrak{M}\vDash_{v}\neg\varphi$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi$ صدق و نه کې، يعنې $\mathfrak{M}\nvDash_{v}\varphi$.

ب) $\mathfrak{M}\vDash_{v}(\varphi_1\wedge\varphi_2)$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_1$ او $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_2$ وي.

ج) $\mathfrak{M}\vDash_{v}(\varphi_1\vee\varphi_2)$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_1$ يا $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_2$ وي.

د) $\mathfrak{M}\vDash_{v}(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې د $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_1$ څخه $\mathfrak{M}\vDash_{v}\varphi_2$ استنباط کېږي.

په ورته ډول د معادل والي عمليه تعريفولای سو. د کوانتيفيکاتوروتعريف لږ څه کړکيچن دي.

ه) $\mathfrak{M}\vDash_{v}(\forall\mathbf{x})\varphi$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې د **x** څخه خلاف د هر متحول **y** د <u>هر</u> قيمت ايښودنې w دپاره ، پداسې ډول چې $w(\mathbf{y})=v(\mathbf{y})$ وي $\mathfrak{M}\vDash_{w}\varphi$ صدق وکې.

ی) $\mathfrak{M}\vDash_{v}(\exists\mathbf{x})\varphi$ يوازې او يوازې هغه وخت صدق کوي، چې د **x** څخه خلاف د هر متحول **y** داسې قيمت ايښودنه w **<u>وجود ولري</u>**، چې $w(\mathbf{y})=v(\mathbf{y})$ وي ، او $\mathfrak{M}\vDash_{w}\varphi$ صدق وکې.

د تعريف وروستی شرط (ی) داسی هم ارائه کولای سو:

$\mathfrak{M}\vDash_v(\exists\mathbf{x})\varphi$ يوازي او يوازي هغه وخت صدق كوي، چي داسي $x\in M$ كي وجود ولري، چي $\mathfrak{M}\vDash_w\varphi$ صدق وكي ، پداسي حال كي، چي د w قيمت ايښودنه غير له $w(\mathbf{x})=x$ څخه د v د قيمت ايښودني سره مطابقت لري.

بېلګه 4.13. د $\mathfrak{L}_{\text{ring}}$ ژبه ، د هغه تعبير $\mathfrak{R}$ او د v قيمت ايښودنه داسي په نظر كي نيسو، چي $\mathfrak{R}\vDash_v(\exists\mathbf{x})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$ يوازي او يوازي هغه وخت صدق كوي، چي $v(\mathbf{x})^2=v(\mathbf{y})$ وي. كه $v(\mathbf{y})\geq 0$ وي، نو :

$$\mathfrak{R}\vDash_v(\exists\mathbf{x})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$$

صدق كوي. دلته كافي ده چي د $\mathbf{z}$ خلاف د $\mathbf{x}$ دپاره $w(\mathbf{z})=v(\mathbf{z})$ سره كښېږدو او $w(\mathbf{x})=\sqrt{v(\mathbf{y})}$ دي.

كه د $\mathfrak{Q}$ تعبير او د v قيمت ايښودنه داسي په نظر كی ونيسو، چي $v(\mathbf{y})=2$ ، نو بايد $\mathfrak{Q}\vDash_v(\exists\mathbf{x})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$ وی. د تعريف له مخي بايد د متحولو داسي قيمت ايښودنه w وجود ولري، چي $w(\mathbf{y})=v(\mathbf{y})=2$ او $(w(\mathbf{x}))^2=v(\mathbf{y})=2$ وي. د w قيمتونه بايد ناطق عددونه وي، خو دغه ډول قيمت ايښودنه وجود نلري ، ځكه نو $\mathfrak{Q}\vDash_v\neg(\exists\mathbf{x})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$ يا په بل عبارت $\mathfrak{Q}\nvDash_v(\exists\mathbf{x})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv\mathbf{y}$ لاسته راځي. ■

فرضوو، چي $\varphi(x_1, \ldots ,x_n)$ داسي فارمول دي، چي يوازي په نښه سوی ازاد متحولونه په ځان كي ولري. كه په احتياط سره عميق ورته ځير سو نو د

$$\mathfrak{M}\vDash_v\varphi(x_1, \ldots ,x_n)$$

اړېكي د صدق په هكله ويلای سو چي نوموړی فارمول يوازي د $x_1, \ldots ,x_n$ د متحولو تابع دی. په بل عبارت كه w داسي قيمت ايښودنه وي، چي $w(\mathbf{x}_1)=v(\mathbf{x}_1), \ldots , w(\mathbf{x}_n)=v(\mathbf{x}_n)$ وي ، نو $\mathfrak{M}\vDash_v\varphi(x_1, \ldots ,x_n)$ يوازي او يوازي هغه وخت صدق كوي، چي $\mathfrak{M}\vDash_w\varphi(x_1, \ldots ,x_n)$ صدق وكي. په خاص ډول كه φ تړلی فارمول وي ، نو د $\mathfrak{M}\vDash_v\varphi$ اړېكه د v د قيمت ايښودني تابع نده. پدي معنی چي نوموړی اړېكه به يا د هرډول قيمت ايښودونو v دپاره صدق كوی او يابه صدق نه كوي. په لمړي حالت كي به په ساده ډول

$$\mathfrak{M}\vDash\varphi$$

ليکو.او وايو به چي د φ فارمول د $\mathfrak{M}$ په تعبير کي صدق کوي.د کوانتيفيکاتورو د حذف د مخکنيو قراردادو سره مطابق ، په هغه صورت کي چي د φ فارمول تړلی نه وي :

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi$$

ليکو، که :

$$\mathfrak{M} \vDash (\forall \ldots)\varphi$$

وي. ځکه نو د (13.1) اړيکه مو په ناخنک قوسو کي ليکله .

فرضوو چي د $A(q_1, \ldots ,q_n)$ بيان د ابتدائي بيانو $q_1, \ldots q_n$ څخه تشکيل سوی دي او $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي فارمولونه دي. فرضوو چي $\mathfrak{M}$ د $\mathfrak{L}$ د ژبي تعبير او v د متحولو قيمت ايښودنه ده.د $\vDash_v$ د اړيکي د تعريف څخه د رياضي د استقراء په طريقه د A دبيان د منشاء د لاړ دپاره په مستقيم ډول لاندنی اړيکه استنباط کيږي:

$$\mathfrak{M} \vDash_v A(q_1/\varphi_1, \ldots , q_n/\varphi_n)$$

يوازي او يوازي هغه وخت صدق کوي ، چي د :

$$A(q_1/\mathfrak{M}\vDash_v\varphi_1, \ldots , q_n/\mathfrak{M}\vDash_v\varphi_n)$$

بيان صدق وکي. په خاص حالت کي که د A بيان تاوتولوجي وي، بيانو د v د هر قيمت ايښودنو دپاره .

$$A(q_1/\mathfrak{M}\vDash_v\varphi_1, \ldots , q_n/\mathfrak{M}\vDash_v\varphi_n)$$

صدق کوي. پدي معنی چي د $\mathfrak{L}$ د ژبي په هر تعبير M کي:

$$\mathfrak{M} \vDash A(q_1/\varphi_1, \ldots , q_n/\varphi_n)$$

صدق کوي.

بېلګه 5.13. د $A(p,q) = (p\longrightarrow (q\longrightarrow(p\wedge q)))$ بيان تاوتولوجي دي. که φ او ψ د $\mathfrak{L}$ د ژبي اختياري فارمولونه وي ، نو د $A(p/\varphi,q/\psi)= (\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow(\varphi \wedge \psi)))$ د $\mathfrak{L}$ د ژبي فارمول دي . فرضوو چي $\mathfrak{M}$ د $\mathfrak{L}$ د ژبي تعبير او v د متحولو قيمت ايښودنه ده، بيانود $A(p/\mathfrak{M}\vDash_v\varphi, q/\mathfrak{M}\vDash_v\psi)$ بيان لاندنی بيان ارائه کوي:

$$\mathfrak{M}\vDash_v\varphi \Longrightarrow(\mathfrak{M}\vDash_v\psi\Longrightarrow(\mathfrak{M}\vDash_v\varphi \& \mathfrak{M}\vDash_v\psi)$$

پاملرنه وکي چې د استنباط او د منطقي ضرب د عمليو دپاره نوري نبني و ټاکلي ، ځکه چې وروستي افاده د د $\mathfrak{L}$ د ژبي د تعبير او v د متحولو قيمت ايښودني په چوکاټ کي ده. نوموړی بيان تاوتولوجي ده، ځکه نو :

$$\mathfrak{M}\vDash(\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow(\varphi \wedge \psi))$$

د $\mathfrak{M}$ په تعبير کي نوموړی فارمول صدق کوي. ■

تمرين 1.13.

1. د $\mathfrak{L}$ د ژبي د $\mathfrak{M}=\langle \mathbb{N},\widehat{P},\widehat{R},\widehat{Q}\rangle$ په تعبير کي $\mathbb{N}$ د طبيعی عددو سيټ ، د $\widehat{P}$ يوئيز پريديکات وايي :

$\widehat{P}(a)$: a جفت عدد دي

د $\widehat{Q}$ يوئيز پريديکات وايي :

$\widehat{Q}(a)$: a طاق عدد دي

د $\widehat{R}$ دوه ئيز پريديکات وايي :

$$\widehat{R}(a,b):a>b$$

د لاندنيو جملو څخه کمه يوه درسته او کمه يوه درسته نده؟

$\mathfrak{M}\vDash\widehat{P}(2)$; $\mathfrak{M}\vDash\widehat{P}(5)$; $\mathfrak{M}\vDash\widehat{Q}(5)$; $\mathfrak{M}\vDash\widehat{Q}(2)$;

$\mathfrak{M}\vDash\exists x[\widehat{P}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\forall x[\widehat{P}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\exists x[\widehat{Q}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\forall x[\widehat{Q}(x)]$;

$\mathfrak{M}\vDash\exists x[\widehat{P}(x)]\rightarrow\exists x[\widehat{Q}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\exists x[\widehat{P}(x)]\rightarrow\forall x[\widehat{Q}(x)]$;

$\mathfrak{M}\vDash\forall x[\widehat{P}(x)]\rightarrow\exists x[\widehat{Q}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\forall x[\widehat{P}(x)]\rightarrow\forall x[\widehat{Q}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\forall x\exists y\widehat{R}(x,y)$;

$\mathfrak{M}\vDash\exists x\forall y\widehat{R}(x,y)$; $\mathfrak{M}\vDash\exists x[\widehat{P}(x)\rightarrow\widehat{Q}(x)]$; $\mathfrak{M}\vDash\forall x[\widehat{P}(x)\rightarrow\widehat{Q}(x)]$.

14§. تيوري او مودل Theory and Model

تر اوسه مو د پريديکات د الجبر ژبه د عمومي ژبي په صفت و څېړله ، ددي ژبي دځينو تعبيرو بېلګي مو راوړي. په رياضي کي مو د عمومي استنباط طريقي او کړنلاري و ښودلي. دلته به يو ګام بل مخته ولاړ سو اود پرديکاتو او عمليو دپاره ځني خاص خصوصيات چي په "عام ډول صدق کوي" ور اضافه کو. نومو ړي خصوصيات به د اکسيومو په نامه ياد کو.د ژبي تعبير او اکسيومي به الان په شډل ډول د تيوري په نامه ونومو. پاملرنه وکي ، چي موږ د دوه ډوله اکسيومو سره په تماس کي يو هغه عبارت دی له:

– د تيوري اکسيومي (proper axioms) چي د شي د خصوصياتو په اړوند موږ ته معلومات راکوي او نوموړي شي ته په تيوري کي يوه خاصه جوله ورکوي. دغه ډول اکسيومي يوازي په هغه تيوري چي زموږ تر بحث لاندي وي ، اړه لري. د بېلګي په ډول د پئانو د اريتمتيک د تيوري اکسيومي د طبيعي عددو ځانګړي خاصيتونه ارائه کوي او د "+" او " ." عمليوته هغه مفهوم وربخښي ، چي موږ او تاسي د وړکتوب څخه ورسره بلد يو. همدا ډول د څرملو-فرنکل د سيټ اکسيوماتيکي سيستم د سيټونو او پر سيټو باندي دعمليو خاصيتونه ارائه کوي.

– منطقي اکسيومي (logical axioms) د رياضي د منطق هغه وسيلي چي د استنباط او استدلال دپاره ضرور دي، په بر کي نيسي. د تيوريو په څېړنوکي اکثراً پاملرنه نه ورته کوو او جوته يې ګڼو. د بيان دالجبر د اکسيومو سره په 4§ کي معرفي سواست. د پريديکات د الجبر اکسيومې به په راتلونکي پارګراف کي در وپيژنم.

تعريف 1.14. فرضوو،چي $\mathfrak{L}$ د پريديکات د الجبر ژبه ده. د $\mathfrak{L}$ د ژبي د تړلو فارمولو سيټ(متناهي يا غير متناهي) T د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي د تيوري يا درياضي د تيوري او يا صوري تيوري په نامه يادوو.

په رياضي کي معمولاً داسي قرارداد هم کيږي،چي د φ فارمول ، پداسي حال کي چي کوانتيفيکاتور په ځان کی ونلري، د T د تيوري اکسيومه ده، که φ(... ∀) د T د تيوري

اکسیومه وي. نوموړي ارائه د لوی کواتیفیکاتور د حذف د قرارداد سره مطابقت لري.

بېلګه 1.14. د $\mathfrak{L}_{ring}$ په ژبه کي د لاندنیو فارمولو سیټ T_{ring} د رینګ[22] تیوري جوړوي:

$$x \equiv x \qquad x \equiv y \to y \equiv x \qquad x \equiv y \to (y \equiv z \to x \equiv z)$$

پورتني اکسیومي د رینګ په تیوري کي د مساوات د اړېکي خاصیتونه تشریح کوي.

$$(x \equiv u \wedge y \equiv v) \to (x \dotplus y \equiv u \dotplus v); (x \equiv u \wedge y \equiv v) \to (x \dot{-} y \equiv u \dot{-} v);$$
$$(x \equiv u \wedge y \equiv v) \to (x \cdot y \equiv u \cdot v)$$

پورتني اکسیومي د رینګ په تیوري کي د مساوات د اړېکي خاصیتونه د جمع ، تفریق او ضرب د عملیو په اړوند تشریح کوي.

$$x \dotplus y \equiv y \dotplus x \qquad x \cdot y \equiv y \cdot x$$
$$x \dotplus (y \dotplus z) \equiv (x \dotplus y) \dotplus z \qquad x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot (y \dotplus z) \equiv (x \cdot y) \dotplus (x \cdot z) \qquad x \dotplus (y \dot{-} x) \equiv y$$

پورتني اکسیومي د رینګ په تیوري کي د جمع او ضرب تبدیلي او اتحادي خاصیتونه همدا ډول نظر د جمع و عملیي ته د ضرب د عملیې توزیعي خاصیت او د جمع او تفریق د عملیوترمنځ اړیکه څرګندوي. پاته سوه د مخصوصو ثابتو یعنی 0 او 1 خاصیتونه، چي په لاندي ډول ارائه کیږي:

$$\neg 0 \equiv 1; \; x \dotplus 0 \equiv x; \; x \cdot 0 \equiv 0; \; x \cdot 1 \equiv x .$$

د فیلډ تیوري T_{Field} اضافه پر پورتنیو اکسیومو، لاندي اکسیومه په ځان کي لري:

$$(\forall x \not\equiv 0)(\exists y) x \cdot y \equiv 1$$

ورته ډول د انتګرال دومین Integral Domain تیوري T_{IntD} تعریفولای سو. په نوموړي تیوري کي د رینګ د تیوري پر اکسیومو باندي یوازي لاندني اکسیومه اضافه کیږي:

$$(\forall x, y)(x \cdot y \equiv 0 \to (x \equiv 0) \vee (y \equiv 0)) \qquad \ldots(1.14)$$

پاملرنه وکي، چي پاس مو دري مختلفي تیوري معرفي کړي ، خو ټوله د رینګ په ژبه $\mathfrak{L}_{ring}$ کي تعریف سوي دي. پدی معنی چي داکسیومو په مرسته تیوري جوړیږي.

---

[22] [17] نیازمن : الجبر او د عددنو تیوري لمړي برخه دوهم فصل §III وګورئ.

بېلګه 2.14. د $\mathfrak{L}_{group}$ په ژبه کي د ګروپ تیوري T_{group} لاندني اکسیومي احتوا کوي:

$$x \doteq x \qquad x \doteq y \rightarrow y \doteq x \qquad x \doteq y \rightarrow (y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$$

$$(x \doteq u \wedge y \doteq v) \rightarrow (x \circ y \doteq u \circ v);\ x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z$$

$$x \circ e \doteq x\ ;\ e \circ x \doteq x;\ (\forall x)(\exists y) x \circ y \doteq e$$

تعریف 2.14. فرضوو چي T د $\mathfrak{L}$ د ژبې تیوري ده. د $\mathfrak{L}$ د ژبې تعبیر $\mathfrak{M}$ د T د تیوري د مودل Model په نامه یادوو که د T د تیوري هره اکسیومه د $\mathfrak{M}$ په تعبیر کي صدق وکي.په بله اصطلاح د $\mathfrak{L}$ د ژبي تعبیر $\mathfrak{M}$ د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي د T د تیوري مودل دي، که :

$$(\forall \varphi \in T)(\mathfrak{M} \vDash \varphi)$$

حقیقت ولري.

در پیاد یې کي چي په الجبر کي د رینګ تعریف نژدي پدي ډول دي: فرضوو چي د M پر سیټ د مساوات اړیکه "=" ، دري دوه ئېزي عملیې " + ، − ، · " او دوه ثابت عنصرونه 1,0 راکړه سوی دي. که لاندني شرطونه صدق وکي :

$$x=x\ ; \qquad x=y \rightarrow y=x\ ; \qquad x=y \rightarrow (y=z \rightarrow x=z);$$

$$(x=u \wedge y=v) \rightarrow (x+y=u+v); \qquad (x=u \wedge y=v) \rightarrow (x-y=u-v);$$

$$(x=u \wedge y=v) \rightarrow (x \cdot y=u \cdot v); \qquad x+(y+z)=(x+y)+z;\ x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z;$$

$$x+y=y+x; \quad x \cdot y=y \cdot x; \quad x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z); \quad x+(y-x)=y;$$

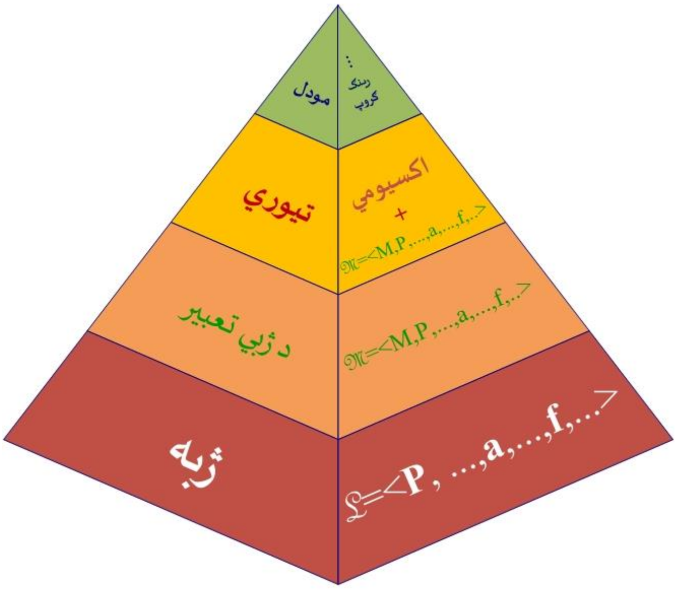
$$\neg 0=1; \qquad x+0=x; \qquad x \cdot 0=0; \qquad x \cdot 1=x.$$

نو د $\langle M,=,+,-,\cdot,0,1 \rangle$ الجبري ساختمان د رینګ په نامه یادیږي[23]. د " فرضوو چي د M پر سیټ د مساوات اړیکه "=" ، دري دوه ئېزي عملیې " + ، − ، · " او دوه ثابت عنصرونه 1,0 راکړه سوی دي" جمله د لاندني ادعا سره معادله ده:

[23] په [17] کي لمړی د ګروپ مفهوم او بیا د رینګ مفهوم تعریف سوی دي، که ددواړو تعریفونه سره یو ځای کي، عین خاصیتونه لاسته راځي.

د $\langle M,=,+,-,\cdot,0,1\rangle$ ساختمان د $\mathfrak{L}_{ring}$ د ژبې تعبیر دي او د ذکر سوو شرطو تصدیق وايي چي نوموړی تعبیر د رینګ دتیوري T_{ring} مودل دي. پدي معنی چي مشخص رینګ د رینګ د تیوري T_{ring} مودل دي.

که په الجبر کي د فیلډ، انتګرال دومین او ګروپ تعریفونه در پیاد کي، نو په اساني سره به دی حقیقت ته ځیر سي ، چی فیلډ ، انتګرال دومین او ګروپ په ترتیب سره د T_{field} ، T_{IntDom} او T_{group} مودلونه دي. لاندنی شکل د ژبې څخه تر مودل پوري زموږ مفکورې ترسیموي:



شکل1.14.

بېلګه 3.14. د الجبر د زده کړو څخه پوهېږو ، چي د تېر پاراګراف په 1.13 او 2.13 بېلګو کي د $\mathfrak{R}$ او $\mathfrak{Q}$ ساختمانونه د T_{field} ، T_{IntDom} او T_{group} مودلونه دي . د هر طبیعي عدد $p>1$ دپاره د $\mathfrak{Z}_p$ تعبیر د رینګ د تیوري T_{ring} مودل دي . علاوه پردي که p اولیه عدد وي، نو نوموړی تعبیر د فیلډ د تیوري T_{field} او انتګرال دومین د تیوري T_{IntDom} مودل دي. د $\mathfrak{N}$ او $\mathfrak{R}^*$ تعبیرونه د ذکر سوی تیوریو د هیڅ یوي مودل هم ندي (ولی؟) .

د $\mathfrak{L}_{group}$ د ژبې تعبیرونه $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ او $\mathcal{G}_3$ د ګروپ د تیوري T_{group} مودلونه دي.د $\mathcal{G}_4$ تعبیر یوازي او یوازي هغه وخت د ګروپ د تیوري T_{group} مودل دي ، چي p اولیه عددوي.

تعریف 3.14. فرضوو چي T د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي د رياضي تيوري او φ په نوموړي ژبه کي فارمول دي. وايو چي د T په تيوري کي د φ فارمول صدق کوي ، $T\vDash\varphi$ ليکو ، که د φ فارمول د T د تيوري په هر مودل $\mathfrak{M}$ کي صدق وکي، يعنى $\mathfrak{M}\vDash\varphi$.

بېلګه 4.14. که φ د T د تيوري اکسيومه وي، نو $T\vDash\varphi$. په رشتيا هم د 2.14. د تعريف له مخي که $\mathfrak{M}$ د T د تيوري اکسيومه وي، نو $\mathfrak{M}\vDash\varphi$ صدق کوي.

اوسنی حالت به د بيان د الجبر سره پرتله کو.په رسمي بڼه د $A(q_1, \dots ,q_n)$ بيان د $q_1 , \dots , q_n$ ابتدائې بيانو څخه تشکيل سوی ؤ. که مو غوښتي وای چي د نوموړي بيان د رشتياوالي يا درواغ والي په هکله قضاوت وکړو، نو په اول ګام کي مجبوره يو ، چي د $q_1 , \dots , q_n$ ابتدائي بيانو، چي د A بيان ورڅخه تشکيل سوی دي، وڅېړو.د بيان د الجبر د بنسټيزو اکسيومو په نظر کي نيولوسره ، کافي وه چي د $q_1 , \dots , q_n$ ابتدائې بيانو د رشتياوالي قيمتونه راته معلوم وای. هغه هم د رشتياوالي دجدول هغه کرښه وه چي په کي د $q_1 , \dots , q_n$ تر بيانو لاندي د $Q_1, \dots, Q_n$ قيمتونه پراته دي ، پدی معنی چي د جدول نوموړی کرښه د پرديکات په الجبر کي د ژبي د تعبير جواب ورکونکی ده. کولای سو چي همدا ډول د پريديکات د الجبر مفهومونه د بيان د الجبر د مفهومو سره پرتله کو. فرضوو، چي Δ د بيانو سيټ دي. د جدول هغه کرښه چي د Δ د سيټ تر هر بيان لاندي درشتياوالي قيمت 1 وي، د Δ د تيوري د مودل په نامه يادوو. بيانو د $\Delta\vDash A$ اړيکه زموږپه ژبه کي " د Δ په هر مودل کي د A بيان صدق کوی" بڼه اخلي.

که $\emptyset\vDash A$ اړيکه حقيقت ولري ، نو د $A(q_1, \dots ,q_n)$ بيان مو د تاوتولوجي په نامه يادکي . تاوتولوجي هغه ډول بيان دي چي د $q_1 , \dots , q_n$ ابتدائې بيانو د قيمتو څخه ازاد وو، پدي معنی بی تفاوته ده چي د $q_1 , \dots , q_n$ ابتدائي بيانونه څه ډول قيمتونه اخلي ، د A بيان تل رشتيا دي. که نوموړي مفکوره اوس د پريديکات په الجبر کي و فارمول ته ور نقل کو، نو که د φ د فارمول دپاره د $\emptyset\vDash\varphi$ اړيکه صدق وکي ، پدي معنی ده ، چي د φ فارمول په هر تعبير کي صدق کوي. دغه واقعيت مو د منطقي حقيقت په نامه يادکي.

د 13§ په پای کي د څېړنو پر بنسټ لاندني قضيه لاسته راځي.

قضيه 1.14. که د $A(q_1, \dots ,q_n)$ بيان تاوتولوجي او $\varphi_1, \dots ,\varphi_n$ فارمولونه وي، نود

$$\emptyset \models A(q_1/\varphi_1, \dots, q_n/\varphi_n)$$

اړیکه صدق کوي.

که د T_1 او T_2 تیوري داسي راکړه سوي وي، چي $T_1 \subseteq T_2$ وي، نو هره اکسیومه د T_1 په تیوري کي په عین حال کي د T_2 په تیوري کي اکسیومه ده. پدي ډول د T_2 د تیوري هر مودل د T_1 د تیوري مودل هم دي. البته دلته باید دواړه تیورۍ پر یوه ژبه باندي استوار وي. که داسي نه وي او د T_1 د تیوري ژبه د T_2 د تیوري دژبي سب سیټ وي ، نو د هغو مفهومو د "تعبیر" څخه چي د T_1 په ژبه کي نه څرګندیږي ، صرفنظر کوو.

بېلګه 5.14. که د ګروپ پر تیوري T_{group} د

$$(\forall x)(\forall y)(x \circ y \equiv y \circ x)$$

اکسیومه وراضافه کو، نود تبدیلي ګروپ تیوري لاسته راځي. د تبدیلي ګروپ په تیوري کي معمولاً په ګروپ کي عملیه د $\circ$ په عوض کي په $+$ سره او اختصاصي ثابت عنصر د e په عوض کي په 0 سره ښودل کېږي. فرضوو ، چي $T_{comgroup}$ د تبدیلي ګروپ Commutative Group تیوري د ګروپ د تیوري T_{group} څخه د نوموړي اکسیومي د اضافه کیدو په نتیجه کي لاسته راغلي وي.په نوموړي تیوري کي د عملیې نوم د $\circ$ څخه په $+$ او اختصاصي ثابت د e څخه په 0 اړوو. اوس نو ویلای سو، چي $T_{comgroup} \subseteq T_{ring}$ دي . پدی معنی چي د تبدیلي ګروپو تیوري د رینګ د تیوري ، زموږ د اړوونو په نتیجه کي!، سب سیټ دي. راسي د نوموړو تیوریو ژبو ته یو نظر واچوو. د تبدیلي ګروپ ژبه $\mathfrak{L}_{comgroup} = \langle \equiv, 0, + \rangle$ او د رینګ د تیوري ژبه $\mathfrak{L}_{ring} = \langle \equiv, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ ده.لیدل کېږي چي د تبدیلي ګروپ د تیوري ژبه د رینګ د تیوري د ژبي سب سیټ دي. که :

$$\mathfrak{M} = \langle M, =, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$$

رینګ وي ، پدي معنی چي د T_{ring} د تیوري مودل دي. نو د $\cdot, -$ دعملیو د نومونو او د اختصاصي ثابت 1 د تعبیر څخه د صرفنظر کولو په نتیجه کي د

$$\langle M, =, 0, + \rangle$$

مودل لاسته راځي . نوموړی مودل د تبدیلي ګروپ د تیوري $T_{comgroup}$ مودل دي. ■

بېلګه 6.14. په الجبر کي د " فيلډ انتګرال دومين دي" ادعا معروفه ده. د نوموړی ادعا په ارائه کی پرعمومي کوانتيفيکاتور باندي خوله پټه سوی ده. اصلاً بايد ووايو چي " هر فيلډ د انتيګرال دومين دي" . راسي دغه ادعا تحليل کو او ويې څېړو چي څه وايې او پر څه شي باندی بايد ځان باوري کو؟

فيلډ د فيلډ د تيوري مودل دي. انتګرال دومين د انتګرال دومين د تيوري مودل دي. زموږ ادعا وايي، چي د فيلډ د تيوري T_{field} په هر مودل کي د انتګرال دومين د تيوري T_{IntDom} ټوله اکسيومې صدق کوي. غير له (1.14) اړېکي څخه ، 1.14. بېلګي ته مراجعه وکی، د انتګرال دومين د تيوري T_{IntDom} هره اکسيومه د فيلډ د تيوري T_{field} اکسيومه ده .ځکه نو کفايت کوي چي په فيلډ کي د (1.14) اړېکي تصديق ثبوت کو. پدي معنی ، بايد ثابته کو، چي:

په هر فيلډ کي د (1.14) اکسيومه صدق کوي

لفظآ، بايد هر فيلډ راواخلو او ويې ګورو چي نوموړي اکسيومه صدق کوي او که نه. خو د ټولو فيلډو په هکله معلومات نلرو. ټوله فيلډونه را معلوم دی؟ يو د منفي پيژندګلويو څخه دغه واقعيت دي چي لايتناهي فيلډونه وجود لري، ځکه چي د هر اوليه عدد $p>1$ دپاره $\mathfrak{I}_p$ فيلډ دي. پدي معنی دلته په هر فيلډ کي د (1.14) اړېکي د تصديق په هکله ځان باوري کول "لايتناهي" پروسه ده. څرګنده ده چي په الجبر کي مو هم هر فيلډ جلا جلا ندی آزمويلئ .هلته مو کړنلاره داسي وه، چي د فيلډ په تيوري T_{field} کي مو د (1.14) فارمول ثابت کي، او بيا د ثبوت او صدق کولو ترمنځ د اړيکي څخه استفاده وکړه. دبيان د الجبر د درستوالي په هکله قضيه ، 4.4 قضيه، درپياد کي. هغه قضيه وايې که کم بيان د Δ په سيټ کي د ثبوت وړ وي ، نو د Δ د سيټ د بيانو تر فرضيو لاندي نوموړی بيان د Δ په سيټ کي صدق کوي، يعنی رشتيا دي.

په ورته ډول د پريديکات په الجبر کي هم مخته ځو.

تمرين 1.14.

1. د $\mathfrak{M}=\langle M,R,f\rangle$ تعبير راکړه سوی دي. پدي تعبير کي M د تامو عددو سيټ ، R د M پر سيټ باندي د دوه ئيزه پريديکات " =" نوم دي، f د M پر سيټ باندي د دوه ئيزې عمليې " · " نوم دي. لاندنی فارمول کم واقعيت ارائه کوي؟

$$[(\exists u)(R(f(x,u),y)]\wedge[(\exists v)(R(f(x,v),z)]$$

2. د $\mathfrak{M}=\langle M,R,f_1,f_2,a\rangle$ په تعبير کي د M سيټ د غير منفي تامو عددو سيټ دي ، R د M پر سيټ باندي د دوه ئېزه پريديکات " =" نوم دي، f_1 د M پر سيټ باندي د دوه ئېزي عمليې " + " نوم ، f_2 د M پر سيټ باندي د دوه ئېزې عمليې " · " نوم او a د M پر سيټ باندي د خصوصي ثابت " 0 " نوم دي. لاندنی فارمولونه کم واقعيت ارائه کوي؟

(i) $[(\exists z)(\neg R(z,a) \wedge R(f_1(x,z),y))]$

(ii) $(\exists y)(R(x, f_2(y,y))$

3. لاندنی فارمول کم واقعيت ارائه کوي، پداسي حال کي چي د تېر سوال په شرطو کي يوازي د M سيټ د مثبتو تامو عددو سيټ دي.پدي معنی چي صفر حذفوو.

(iii) $(\exists z)(R(f_2(x,z),y))$

4. د $\mathfrak{M}=\langle M,R,f_1,a\rangle$ په تعبير کي د M سيټ د مثبتو تامو عددو سيټ دي ، R د M پر سيټ باندي د دوه ئېزه پريديکات " =" نوم دي، f_1 د M پر سيټ باندي د دوه ئېزې عمليې " · " نوم او a د M په سيټ کي د خصوصي ثابت " 1 " نوم دي. لاندنی فارمول کم واقعيت ارائه کوي؟

$(\forall x_3)(\exists x_4)(R(f_1(x_4,x_3),x_1) \wedge (\exists x_4)(R(f_1(x_4,x_3),x_2) \rightarrow R(x_3,a)$

5. د $\mathfrak{M}=\langle M,R,f_1,f_2,a_1,a_2\rangle$ په تعبير کي د M سيټ د غير منفي تامو عددو سيټ دي ، Rد M پر سيټ باندي د دوه ئېزه پريديکات " =" نوم دي، f_1 د M پر سيټ باندي د دوه ئېزي عمليې " + " نوم ، f_2 د M پر سيټ باندي د دوه ئېزې عمليې " · " نوم ، a_1 د M پر سيټ باندي د خصوصي ثابت " 0 " او a_2 د M په سيټ کي د خصوصي ثابت "1 " نوم دي. لاندنی فارمولونه کم واقعيت ارائه کوي؟

(i) $(\forall x)(\exists y)(R(x,f_1(y,y)) \vee R(x,f_1(f_1(y,y),a_2));$

(ii) $(\forall x) (\forall y)(R(f_2(x,y),a_1) \longrightarrow R(x,a_1) \vee R(y,a_1);$

(iii) $(\exists y)R(f_1(y,y),a_2).$

6. د 5. تمرين په تعبير کي د M سيټ د تامو عددو سيټ دي، لاندنی فارمولونه کم واقعيت ارائه کوي؟

(i) $(\forall x)\,(\forall y)R(f_1(x,y),f_1(y,x))$;

(ii) $(\forall x)\,(\forall y)(\forall z)R(f_1(x, f_1(y,z)),\, f_1(f_1(x,y),z))$;

(iii) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)R(f_1(x,z),y)$.

7. د 5 –م تمرین تعبیر ته د M پر سیټ باندي د f_3 دوه ئېزي عملیې x^y باندي پراختیا ورکوو، پدي معنی چی نوموړي عملیه وراضافه کوو. دلته د M سیټ د تامو مثبتو عددو سیټ دي. لاندنی فارمولونه کم واقعیت ارائه کوي؟ د فارمولو د رشتیاوالی قیمت وټاکئ.

(i) $(\forall x)\,(\forall y)R(f_3(x,y),f_3(y,x))$;

(ii) $(\forall x)\,(\forall y)(\forall z)R(f_3(x, f_3(y,z)),\, f_3(f_3(x,y),z))$;

(iii) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)R(f_3(x,z),y)$.

8. د $\mathfrak{M}=\langle M,P,R,f,g,a\rangle$ په تعبیر کي د M سیټ د ناطقو عددو د سیټ نماینده ګي کوي، P او R په ترتیب سره د M پر سیټ باندي د دوه ئېز پریدیکاتو "=" , "<" نومونه دي. f د M پر سیټ باندي د دوه ئېزي عملیې "·" ، g د M پر سیټ باندي د یوه ئېزي عملیې "x+1" نوم او a د خصوصي ثابت "0" نوم دي . لاندنی فارمولونه کم واقعیت ارائه کوي؟ د فارمولو د رشتیاوالی قیمت وټاکئ

(i) $(\exists x)P(f(x,x),g(g(a)))$;

(ii) $(\forall x)\,(\forall y)R(x,y)\longrightarrow(\exists z)(R(x,z)\wedge R(z,y)))$;

(iii) $(\forall x)(\neg P(x,a)\longrightarrow(\exists y)P(f(x,y),g(a)))$.

9. د $\mathfrak{M}=\langle M,P,R,f\rangle$ په تعبیر کي د M سیټ د تامو غیر منفي عددو د سیټ نماینده ګي کوي، د P پریدیکات دریئېز داسي پریدیکات دي چي د f دوه ئېزي عملیي تابع دي ، یعنی $P(x,y,z)$ ، $f(x,y)=z$ ارائه کوي f د دوه ئېزي عملیې "+" نوم دي، د R دوه ئېز پریدیکات "$\leq$" ارائه کوي . لاندنی فارمولونه کم واقعیت ارائه کوي؟ د فارمولو د رشتیاوالی قیمت وټاکئ.

(i) $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)(P(x,y,z)\longrightarrow P(y,x,z))$;

(ii) $(\forall x)\,(\forall y)(P(x,x,y)\longrightarrow R(x,y))$;

(iii) $(\forall x)\,(\forall y)R(x,y)\longrightarrow P(x,x,y)$;

(iv) $(\exists x)\,(\forall y)P(x,y,y)$;

(v) $(\exists y)\,(\forall x)R(x,y)$;

(vi) $(\forall x)\,(\forall y)(R(x,y)\leftrightarrow (\exists z)P(x,z,y))$.

10. د 2-هم تمرين په تعبير کي د M سيټ د طبيعي عددو د سيټ نماينده ګي کوي، لاندني افاده د تېرو تمرينو په څېر وڅېړي.

$(\forall x)\,(\exists y)\,(\exists z)R(x,f_1(f_2(y,y),\,f_2(z,z)))$

15§. ثبوت د پريديکات په الجبر کي

د بيان و الجبر ته ورته د ثبوت مفهوم تعريفوو.

تعريف 1.15. د فارمولو لاړ $\varphi_1\,,\,...\,,\varphi_n$ د T په تيوري کي د ثبوت په نامه يادوو، که د لاړ هر غړی ، يعنی د هر $i=1,...,n$ دپاره د لاندنيو شرطو څخه يو شرط صدق وکي:

(P₁) φ_i د پريديکات د الجبر اکسيومه ده؛

(P₂) φ_i د T د تيوري اکسيومه ده؛

(P₃) د $k,j<i$ اندکسونه داسي وجود لري ، چي φ_k د $\varphi_j\to\varphi_i$ بڼه لري. پدي معنی چي د φ_i فارمول د مخکنيو فارمولو څخه استنباط سوی دي؛

(P₄) د $j<i$ اندکس او د $\psi,\,\varphi$ فارمولونه داسي وجود لري، چي د ψ فارمول دx متحول په ځان کي نلري ، پداسي ډول چي φ_j د $\psi\to\varphi(x,....)$ د فارمول بڼه ولري او φ_i د $\psi\to(\forall x)\varphi(x,....)$ د فارمول بڼه ولري؛

(P₅) د $j<i$ اندکس او د $\psi,\,\varphi$ فارمولونه داسي وجود لري، چي د ψ فارمول دx متحول په ځان کي نلري ، پداسي ډول چي φ_j د $\varphi(x,....)\to\psi$ د فارمول بڼه ولري او φ_i د $(\exists x)\varphi(x,....)\to\psi$ د فارمول بڼه ولري.

د لوستونکی اعتراض به پر حق وي کهووايي چي د پريديکات اکسيومی کمي دي. اوس به يې دلته راوړم ، خو لمړی باید ووایم چي د پریدیکات په الجبر کي به د اکسیومو دري ګروپه ولرو، لمړي ګروپ يې د بيان د الجبر اکسیومې دي. دلیل يې ځرګند دي.

که σ,ψ,φ فارمولونه وي ، نو لاندني اکسیومې د پريديکات دالجبر اکسیومې دي :

$$\varphi\to \varphi; \qquad \varphi\to(\psi\to \varphi);$$

$$(\varphi\to \psi)\to((\psi\to \sigma)\to(\varphi\to \sigma)); \quad (\varphi\to \psi)\to(\neg \psi\to \neg\varphi);$$

$$(\varphi\to \psi)\to((\varphi\to (\psi\to \sigma))\to(\varphi\to \sigma));$$

$$\varphi\to(\psi\to (\varphi\wedge \psi)); \quad (\varphi\wedge \psi)\to \varphi; \quad (\varphi\wedge \psi)\to(\psi\wedge \varphi);$$

$$(\varphi\to \sigma)\to((\psi\to \sigma)\to((\varphi\vee \psi)\to \sigma)); \quad \varphi\to(\varphi\vee \psi);$$

$$(\varphi\vee \psi)\to(\psi\vee \varphi);$$

$$(\varphi\to \psi)\to((\psi\to \varphi)\to(\varphi\equiv \psi)); \quad (\varphi\equiv \psi)\to(\varphi\to \psi)$$

$$(\varphi\equiv \psi)\to(\psi\equiv \varphi);$$

$$\varphi\vee\neg \varphi; \qquad \neg\neg\varphi\equiv\varphi;$$

$$(\varphi\to \psi)\to((\varphi\to \neg\psi)\to\neg\varphi).$$

د اکسیومو پورتنئ ګروپ کیدای سي ، چي داسي هم ارائه کوو: که $D(p,q,r)$ د بیان دالجبر اکسیومه $(A=p,\ B=q,\ C=r)$ وي او σ,ψ,φ فارمولونه وي، نو $D(p/\varphi,q/\psi,r/\sigma)$ د پریدیکات د الجبر اکسیومه ده. پدي معنی که د بیان د الجبر په اکسیومه کي د بیانو پر ځای د پریدیکات په ژبه کي فارمولونه راوړو ، نو د پریدیکات د الجبر اکسیومه ځني جوړیږي.

د اکسیومو دوهم ګروپ د عمومي کوانتیفیکاتور د حذف او د موجودي کوانتیفیکاتور د دخول په نتیجه کي لاسته راځی. که $\varphi(x,\ldots)$ فارمول وي، t داسي کلمه وي، چي د x متحول په ځان کي ونلري، بیانو لاندني فارمولونه د پریدیکات د الجبر اکسیومي دي:

$$(\forall x)\,\varphi(x,\ldots)\to\varphi(t,\ldots),$$

$$\varphi(t,\ldots)\to(\exists x)\,\varphi(x,\ldots).$$

لمړي اکسیومه د عمومي کوانتیفیکاتور د حذف او دوهمه اکسیومه د موجودي کوانتیفیکاتور ددخول په نامه یادیږي.

د پریدیکات دالجبر داکسیومو دریم گروپ د کوانتیفیکاتورود نفي دپاره د ډي-مارگن قوانین ارائه کوي. که φ فارمول وی، نو لاندنې فارمولونه د پریدیکات د الجبر اکسیومې دي:

$$\neg(\forall x)\varphi\equiv(\exists x)\neg\varphi, \qquad \neg(\exists x)\varphi\equiv(\forall x)\neg\varphi.$$

بیاهم د پریدیکات په الجبر کي د ثبوت و تعریف ته راګرځم، د P_3 شرط موږ ته د پخوا څخه رامعرفي سوي د مودوس پوننس د استنباط قانون را په گوته کوي . د P_4 او P_5 شرطونه د استنباط لاندنې قوانین پدي شرط ارائه کوی، چي د ψ فارمول د x متحول په ځان کي ونلري:

$$\frac{\psi\to\varphi(x,....)}{\psi\to(\forall x)\varphi(x,....)} \qquad \text{د}\forall \text{ دخول}$$

$$\frac{\varphi(x,....)\to\psi}{(\exists x)\varphi(x,....)\to\psi} \qquad \text{د } \exists \text{ حذف}$$

تعریف 2.15. وایو چي دT په تیوري کي د φ فارمول د ثبوت وړدي، که د T په تیوري کي د φ_1 , ... ,φ_n ثبوت داسي وجود ولري، چي $\varphi_n=\varphi$ وي.

ومووېل چي ثبوت د فارمولو لاړدي. اوس نو که د هغه وروستی غړی د φ فارمول وي ، نو وایو چي د φ فارمول د T په تیوري کي د ثبوت وړدي او $T\vdash\varphi$ په ذریعه یې ښرگندوو.

قضیه 1.15. که د φ فارمول د پریدیکات د الجبر اکسیومه وي ، نو $\emptyset\models\varphi$.

ثبوت. فرضوو چي د φ فارمول د پریدیکات د الجبر اکسیومه وي. څرنګه چي د پریدیکات د الجبر اکسیومې مو پر درو گروپو وویشلي ، نو د هر گروپ دپاره باید استدلال وکو. د لمړي گروپ دپاره استدلال د 1.14 قضیې څخه استنباط کیږي. ځکه چي د بیان د الجبر هره اکسیومه تاوتولوجي ده .

د موجودي کوانتیفیکاتور د دخول دپاره به یې ثبوت کو. فرضوو چي د φ فارمول د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي راکړه سوی دي ، t په نوموړي ژبه کي کلمه او $\mathfrak{M}$ د نوموړي ژبې اختیاري تعبیر دي.فرضوو چي v د متحولو قیمت ایښودنه ده. فرضوو چي $\mathfrak{M}\models_v \varphi(t, ...)$ ، یعنی د φ فارمول د v په قیمت ایښودنه کي د $\mathfrak{M}$ په تعبیر او د t د کلمي د تعویض په نتیجه کي صدق کوي.فرضوو، چي w د متحولو داسي قیمت ایښودنه ده ، چي د هر $y\neq x$ دپاره $w(y)=v(y)$

او $w(\mathrm{x})=v(\mathrm{t})$ ، پدي معنى چي غير له x څخه په ټولو نورو متحولو کي د هغوي قيمت اېښودنه سره مساوی ده او یوازي د x د متحول قيمت اېښودنه د t د کلمي د تعويض په نتيجه کي ارائه سوی ده. بیانو $\mathfrak{M}\vDash_w(\exists)\varphi(\mathrm{x}, \ldots)$ صدق کوي.ځکه نو:

$$\emptyset\vDash \varphi(\mathrm{t}, \ldots)\longrightarrow(\exists \mathrm{x})\ \varphi(\mathrm{x}, \ldots).$$

پاتي حالتونه و لوستونکو ته د تمرين په څېرپرېږدم. q.e.d.

د بيان و الجبر ته ورته بياهم د پريديکات د الجبر د درستوالي او بشپړتوب مسئله رامنځته کېږي. لاندني دوي قضيې و نوموړي مسئلي ته مثبت جواب ورکوي.

قضيه 2.15. (دپريديکات دالجبر د درستوالي (Correctness) په هکله)

که T تيوري، φ د نوموړي تيوري په ژبه کي داسي فارمول وي، چي $\mathrm{T}\vdash\varphi$ (يعني د φ فارمول د T په تيوري کي د ثبوت وړدي)، بیانو $\mathrm{T}\vDash \varphi$ (يعنى د φ فارمول د T په تيوري کي صدق کوي).

ثبوت. فرضوو چی د T د تيوري په ژبه کی د φ فارمول د T په تيوري کي د ثبوت وړدي، يعنى د T په تيوري کي د φ د فارمول $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ثبوت داسي وجود لري چی $\varphi_n=\varphi$ دي. که ثابته کو چي هر يو د $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ د فارمولو څخه د T په تيوري کي صدق کوي، نو قضيه به ثابته کړی وي. د رياضي داستقراء په طريقه به يې ثابته کو، چي دهر $i=1,\ldots,n$ دپاره $\mathrm{T}\vDash \varphi_i$ صدق کوي.فرضوو، چي د هر $j<i$ دپاره $\mathrm{T}\vDash \varphi_j$ صدق کوي. څرنګه چي φ_i د T په تيوري کي د ثبوت د لاړ غړی دي ، نو د ثبوت دتعريف پر بنسټ د P_1 څخه تر P_5 پوری يو د شرطوڅخه صدق کوي. که φ_i د P_1 او P_2 پر شرطو برابر وي ، نو د هغوی دصدق کولو مسئله د 4.14 بېلګي او د 1.15 قضيي څخه استنباط کېږي. د P_3 ، P_4 او P_5 څخه به د بېلګي په ډول به د P_5 ثبوت راوړو.

فرضوو $j<i$ او د φ او ψ فارمولونه داسي وجود لري،چي د ψ فارمول x د متحول په صفت په ځان کي ونلري ، φ_j ،د $\varphi(\mathrm{x}, \ldots)\longrightarrow\psi$ په بنه وي او φ_i د $(\exists \mathrm{x})\varphi(\mathrm{x}, \ldots) \longrightarrow\psi$ فارمول دي. کله چي د صدق کولو په هکله بړ غېږو، نو بايد د مودل په اوړند يې وڅېړو. ځکه نو فرضوو چي $\mathfrak{M}$ د T د تيوري تعبير او v د متحولو قيمت اېښودنه ده. فرضوو،چي:

$$\mathfrak{M}\vDash_v (\exists \mathrm{x})\ \varphi(\mathrm{x}, \ldots).$$

پدي معنی چي د w د متحولو قيمت ايښودنه داسي وجود لري چي غير له x څخه د هر بل متحول y دپاره $w(y)=v(y)$ دي او $\mathfrak{M}\models_w \varphi(x, ...)$ صدق کوي. د استقراء د فرضيې پر بنسټ $T\models\varphi_j$ حقيقت لري. ددی اسيته $\mathfrak{M}\models_w \varphi_j$ دي، پدي معنی چي $\mathfrak{M}\models_w \varphi(x, ...) \longrightarrow \psi$.
داستنباط دپاره د $\models_w$ د اړيکي د تعريف له مخي $\mathfrak{M}\models_w\psi$ صدق کوي. څرنګه چي د ψ فارمول د x متحول په ځان کي نلري، ځکه نو $\mathfrak{M}\models_v\psi$ صدق کوي. داستنباط دپاره د $\models_v$ د اړيکي د تعريف له مخي $\mathfrak{M}\models_v(\exists x)\ \varphi(x, ...) \longrightarrow \psi$ لاسته راځي.

معکوسه ادعا هم صدق کوي، خو ثبوت يې ډير پيچلی دی، ځکه نو صرفنظر ځني کوو. پاملرنه وکي، چي د بيان د الجبر د بشپړتوب د قضيې ثبوت څونه پيچلی ؤ. دپريديکات په الجبر کی کوانتيفيکاتورونه اضافه سوی دي.

قضيه 3.15. (د پريديکات د الجبر د بشپړتوب په هکله د ګدل Gödel قضيه)

که T تيوري، φ د نوموړي تيوري په ژبه کي فارمول او $T\models\varphi$ وي ، نو $T\vdash\varphi$ دي.
قضيه وايي که د T د تيوري په ژبه کي فارمول په T کي صدق وکي ، نو بيا هغه د T په تيوري کي د ثبوت وړدي، يعنی د هغه دپاره ثبوت وجود لري.

همدا ډول لکه په 5ـام پاراګراف کي چي دبيان په الجبر کي مو د استنباط قوانين را شامل کړل، دلته د T په تيوري کي د استنباط د قوانينو يادونه کوو.

د ثبوت د تعريف P_5-P_3 شرطونه اصلاً په خپل ذات کي د مودوس پوننس قانون، د عمومي کوانتيفيکاتور د شموليت اود موجودي کوانتيفيکاتور د حذف قوانين دي. که د بيان د الجبر د استنباط په قوانينوکي (هغوی د Δ په اختياري سيټ کي صدق کوي) د بيان پر ځای د بيان تابع راوړو، نو هغوی په تيوري کي د استنباط په قوانينو اوړي(چي بيا هم په اختياري تيوري کي صدق کوي) . د بېلګي په ډول که په 2.5. بېلګه کي د C,B,A په عوض کي د σ,ψ,φ فارمولونه راوړو ، نو لاندني د استنباط قوانين به لاسته راسي:

د استنباط د ترتيب قانون $\dfrac{\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\sigma)}{\psi\rightarrow(\varphi\rightarrow\sigma)}$ د استنباط انتقالي قانون $\dfrac{\varphi\rightarrow\psi,\psi\rightarrow\sigma}{\varphi\rightarrow\sigma}$

ثبوت د نقض په طريقه $\dfrac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$ غير مستقيم ثبوت $\dfrac{\neg\psi\rightarrow\neg\varphi}{\varphi\rightarrow\psi}$

د منطقي ضرب تبديلي قانون $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$ د منطقي ضرب د ځان ځاني قانون $\dfrac{\varphi}{\varphi \wedge \varphi}$

د منطقي ضرب د حذف قانون $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ د منطقي ضرب د دخول قانون $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

د منطقي جمع تبديلي قانون $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$ د منطقي جمع د ځان ځاني قانون $\dfrac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}$

د منطقي جمع حذف $\dfrac{\varphi \to \sigma, \psi \to \sigma}{\varphi \vee \psi \to \sigma}$ د منطقي جمع د دخول قانون $\dfrac{\varphi}{\psi \vee \varphi}$

د معادليت دخول $\dfrac{\varphi \to \psi, \psi \to \varphi}{\varphi \equiv \psi}$ د معادليت تبديلي قانون $\dfrac{\varphi \equiv \psi}{\psi \equiv \varphi}$

د تحليل او تجزيې قانون $\dfrac{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi}{\psi}$ د معادليت حذف $\dfrac{\varphi \equiv \psi}{\varphi \to \psi}$

د نفي دحذف قانون $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$ د نفي د دخول قانون $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$

همدا ډول پر 3.8. بېلګي باندي د عملي کېدو په نتيجه کي د استنباط لاندنې قوانين لاسته راوړ لای سو:

$$\frac{\varphi \to \sigma, \psi \to \rho}{(\varphi \vee \psi) \to (\sigma \vee \rho)} \qquad \frac{\varphi \to \sigma, \psi \to \rho}{(\varphi \wedge \psi) \to (\sigma \wedge \rho)}$$

$$\frac{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}{\varphi \to (\psi \to \sigma)} \qquad \frac{\varphi \to (\psi \to \sigma)}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}$$

تعريف3.15. د T په تيوري کي د φ فارمول د T د تيوري د قضيې په نامه يادوو ، که $T \vdash \varphi$ وي.

پدي معنی د T د تيوري هر فارمول چي د T په تيوري کی دثبوت وړوي ، د T د تيوري د قضيې په نامه يادېږي. همدا ډول د T په تيوري کي د رياضي ثبوت تعريفوو.

تعریف 4.15. د T په تیوري کي د $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ د فارمولو لاړ د T په تیوري کي درياضي ثبوت mathematical proof په نامه ياديږي که دهر $i=1, \ldots, n$ دپاره د لاندنيو شرطو څخه يو شرط صدق وکي:

MP_1) φ_i د پريديکات د الجبر اکسيومه ده،

MP_2) φ_i د T په تیوري کي قضيه ده،

MP_3) د $j_1, \ldots, j_k < i$ عددونه داسي وجود لري ، چي :

$$\frac{\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}}{\varphi_i}$$

د T په تیوري کی د استنباط قانون وي.

د پريديکات په الجبر کي هم و 2.5 قضيې ورته قضيه صدق کوي.

قضيه 4.15. که د T په تیوري کي د $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ د فارمولو لاړ د رياضي ثبوت وي، نو $T \vdash \varphi_n$ دي.

د لوستونکي پاملرنه و دي حقيقت ته رااړوم، چي د پريديکات د الجبر هر د استنباط قانون حتمي نده چي د بيان د الجبر څخه لاسته راسي، دا ځکه چي د بيان په الجبر کي کوانتيفيکاتورونه وجود نلري. پدي معنی هغه د استنباط قوانين چي د کوانتيفيکاتورو په اړوند ارائه کيږي، يوازي د پرديکات په الجبر پوري اړه لري.

بېلګه 1.15. فرضوو چي $\varphi(x,\ldots)$ فارمول او t داسي کلمه ده چي د x متحول په ځان کي ونلري. بيانو لاندنې افادي د استنباط قوانين دي:

د $\exists$ دخول $\dfrac{\varphi(t,\ldots)}{(\exists x)\varphi(x,\ldots)}$ د $\forall$ حذف $\dfrac{(\forall x)\varphi(x,\ldots)}{\varphi(t,\ldots)}$

د عموميت قانون $\dfrac{\varphi(x,\ldots)}{(\forall x)\varphi(x,\ldots)}$ د متحولو تعويض $\dfrac{(\forall x)\varphi(x,\ldots)}{(\forall y)\varphi(y,\ldots)}$

داستنباط لمړي دوه قوانين د پريديکات دالجبر ددوهم ګروپ اکسيومو څخه استنباط کيدای سي. ددوهمي کرښي پر لمړی قانون به خپل ځان باوري کو. فرضوو چی T تيوري او $T \vdash (\forall x)\varphi(x,\ldots)$ صدق کوي. فرضوو چي σ د T په تيوري کي اختياري تړلي فارمول دی

، چي د x او y متحولونه په ځان کي نلري. بيانو د $\sigma=(\psi\longrightarrow\psi)$ فارمول د پريديکات دالجبر اکسيومه ده. لاندنۍ لاړ د T په تيوري کي د رياضي ثبوت دي:

$(\forall x)\varphi(x, ...)$ فرضيه ; $(\forall x)\varphi(x, ...)\longrightarrow\varphi(y, ...)$ د پريديکات د الجبر اکسيومه ;

$\varphi(y, ...) \longrightarrow(\psi\longrightarrow \varphi(y, ...));\quad \varphi(y, ...);\quad \psi\longrightarrow \varphi(y, ...);$

$\psi\longrightarrow (\forall y)\varphi(y, ...);\quad \psi;\quad (\forall y)\varphi(y, ...).$

ځرګنده ده چي د لاړ تر دوهم غړی وروسته د استدلال ځايونه لوستونکی ته خالي پري ايښي دي.

همدا ډول فرضوو،چي $T\vdash\varphi(x,....)$ او ψ پاس ترسيم سوی فارمول دي. بيانو بياهم لاندنۍ لاړ د T په تيوري کي د رياضي ثبوت دي:

$\varphi(x,....),\quad \varphi(x, ...) \longrightarrow(\psi\longrightarrow \varphi(x, ...)),\quad \psi\longrightarrow \varphi(x, ...),$

$\psi\longrightarrow (\forall x)\varphi(x, ...),\ \psi,\quad (\forall x)\varphi(x, ...).$

د استنباط د قانون د وروستي فارمول ثبوت د معادل والي لاندنۍ ډيره مهمه نتيجه را په ګوته کوي:

نتيجه 1.15. د T په تيوري کي د φ فارمول يوازي او يوازي هغه وخت د ثبوت وړدی ، يعنی $T\vdash\varphi$ ، چي $T\vdash(\forall...)\varphi$ وي.

§16. د ثبوت طريقې

داستنباط قضيه د بيان د الجبر په ډول دلته هم صدق کوي.

قضيه 1.16. (د استنباط په هکله). فرضوو چی T تيوري، φ او ψ د نوموړي تيوري په ژبه کي تړلي فارمولونه دي. که $T,\psi\vdash\varphi$ وي ، نو $T\vdash\psi\longrightarrow\varphi$ دي.

ثبوت. فرضوو، چي $\varphi_1, ..., \varphi_n$ په $T\cup\{\psi\}$ د φ د فارمول ثبوت دي پداسي حال کي چي $\varphi_n=\varphi$ دي. د رياضي د استقراء په طريقه د هر $i=1,...,n$ دپاره به $T\vdash\psi\longrightarrow\varphi_i$ ثابت کو. فرضوو، چي د $j<i$ دپاره $T\vdash\psi\longrightarrow\varphi_j$ صدق کوي ، بايد ثابت کو،چي $T\vdash$ $\psi\longrightarrow\varphi_i$ دي. ځرنګه چي φ_i په $T\cup\{\psi\}$ کي د ثبوت د لاړ غړی دي، نو د P_5-P_1 يو شرط صدق کوي. د P_3-P_1 پوري په عين ډول لکه په 1.6 قضيه کي استدلال کوو. پاته کيږي يوازي د عمومي او موجودی کوانتيفيکاتورو شرطونه .

فرضوو چي د P_4 شرط صدق کوي، پدي معنی چي $j<i$ او د σ,ρ فارمولونه داسي وجود لري، چي د σ فارمول د x متحول په ځان کي نلري ، د φ_j فارمول $\rho \longrightarrow \sigma$ دي او د φ_i فارمول $(\forall x)\rho \longrightarrow \sigma$ دي. د استقراء د فرضيې پر بنسټ :

$$T\vdash \psi \longrightarrow (\sigma \longrightarrow \rho)$$

صدق کوي. بيانو لاندنۍ لاړ د T په تيوري کي د رياضي ثبوت دي:

$$\psi \longrightarrow (\sigma \longrightarrow \rho),\ \rho \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma),\ (\forall x)\rho \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma),\ \psi \longrightarrow ((\forall x)\rho \longrightarrow \sigma))$$

پدي معنی چي $T\vdash \psi \longrightarrow \varphi_i$ دي.

که د P_5 شرط صدق وکي، نو $j<i$ او د σ,ρ فارمولونه داسي وجود لري، چي د σ فارمول د x متحول په ځان کي نلري ، د φ_j فارمول $\sigma \longrightarrow \rho$ دي او د φ_i فارمول $(\exists x)\rho \longrightarrow \sigma$ دي. د استقراء د فرضيې پر بنسټ :

$$T\vdash \psi \longrightarrow \varphi_j$$

بيانو بيا هم لاندنۍ لاړ د T په تيوري کي د رياضي ثبوت دي:

$$\psi \longrightarrow (\rho \longrightarrow \sigma),\ \rho \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma),\ (\exists x)\rho \longrightarrow (\psi \longrightarrow \sigma),\ \psi \longrightarrow ((\exists x)\rho \longrightarrow \sigma).$$

q.e.d

د 2.6. قضيې ورته قضيه د پريديکات په الجبر کی هم صدق کوي.

قضيه 2.16. (Reductio ad absurdum) فرضوو چي T تيوري، φ او ψ د نوموړي تيوري په ژبه کي تړلې فارمولونه دي.

الف) که $T, \neg\varphi \vdash \psi$ او $T, \neg\varphi \vdash \neg\psi$ وي ، نو $T\vdash\varphi$ دي.

ب) که $T, \varphi \vdash \psi$ او $T, \varphi \vdash \neg\psi$ وي ، نو $T\vdash\neg\varphi$ دي.

په عين ډول د استنباط ډوله فارمولو دپاره په مختلفو ترکيبو کي ادعاوې فورمولبندی کولای سو.

د هغو ادعاؤ د ثبوت دپاره چي کولنتيفيکاتورونه په ځان کي ولري ، نوري طريقي ضروري دي.موږ به دلته د هغو څخه دوي مهمي طريقي راوړو.

قضيه 3.16. (د مرستندوی ثابت طريقه). فرضوو، چي T د رياضي تيوري ده، $\varphi(x,...)$ ، $\psi(x,...)$ د نوموړي تيوري په ژبه کي فارمولونه دي، فرضوو، چی c داسي خصوصي ثابت دي چي د T د تيوري په هيڅ اکسيومه کي نه څرګنديږي. که :

$$T,\varphi(c,....) \vdash \psi(c,...),$$

وي، نو $T\vdash(\forall x)(\varphi(x,...) \longrightarrow \psi(x,...))$ دي.

ثبوت. فرضوو، چي $T,\varphi(c,....) \vdash \psi(c,...)$ صدق کوي.پدي معنی لکه د ددي پاراګراف په نورو څېړنو کي د T په تيوري کي د $\varphi(c,....)$ د فارمول په شمول، يا په $T\cup\{\varphi(c,....)\}$ په سيټ کي د T د تيوري د اکسيومو په شمول د $\psi(c,...)$ د فارمول ثبوت وجود لري. بيانو د استنباط د قضيي (1.16 قضيه) پر بنسټ $T\vdash(\varphi(c,...) \longrightarrow \psi(c,...))$ صدق کوي. پدي معنی چي د T په تيوري کي د

$$\varphi_1(c,....), ..., \varphi_n(c,...) \qquad (1.16)$$

ثبوت داسي وجود لري، چي :

$$\varphi_n(c,....)= (\varphi(c,...) \longrightarrow \psi(c,...))$$[24]

فرضوو، چی z داسي متحول دي، چي د ثبوت د لاړ د غړو په هيڅ فارمول کي نه څرګنديږي.پدي معنی چی د ثبوت د لاړ ټول فارمولونه د z د متحول څخه خلاص دي.ادعا کوم، چي د:

$$\varphi_1(z,...), ..., \varphi_n(z, ...) \qquad (2.16)$$

لاړ د T په تيوري کي ثبوت دي.د ادعا د ثبوت دپاره بايد د (1.16) دلاړ هر فارمول د T په تيوري کي د ثبوت د تعريف د P_5-P_1 د شرطو څخه يو شرط پر ځای کي.

که $\varphi_i(c,...)$ د پريديکات د الجبر اکسيومه وي ، بيانو $\varphi_i(z,...)$ هم د پريديکات د الجبر اکسيومه ده. که $\varphi_i(c,...)$ د T د تيوري اکسيوموه وي ، نو څرنګه چی د c خصوصي ثابت د T د تيوري په اکسيومو کي ګډون نلري(د فرضيې له مخي) ، نو $\varphi_i(c,...)= \varphi_i(z,...)$ دي.که په (1.16) کي د P_3 شرط صدق وکي ، نو د (2.16) لاړ هم د P_3 شرطونه پرځای کوي.

اوس نو پاته سوه P_4 او P_5 . دلته به د P_4 ثبوت راوړو، پدي معنی که $\varphi_i(c,...)$ د P_4 پر شرط برابر وي، بيانو نظر د P_4 و شرط ته د j<i او د φ او ψ فارمولونه داسي وجود لري ، چي د ψ فارمول د x متحول په ځان کي نلري او د $\varphi_j(x,...)$ فارمول د $\psi\rightarrow\varphi(x,...)$ دي

[24] پاملرنه وکي چي دلته د خيالي متحول د قرارداد څخه ، §11 وګورئ، کار اخلو ، پدي معنی چي د c خصوصي ثابت امکان لري چي په نوموړو فارمولو کي عملاً هيڅ ګډون ونلري.

او د $\varphi_i(x,...)$ فارمول $\psi\rightarrow(\forall x)\varphi(x,...)$ دي.څرنګه چی د z متحول د (1.16) په ثبوت کي ګډون نلري، نو د z د متحول په هکله د P_4 شرط صدق کوي. پدي معنی چي زموږ ادعا د $\varphi_i(z,...)$ په هکله په (2.16) کي صدق کوي.

همدا ډول د P_5 په هکله استدلال کولای سو. q.e.d

رياضي پوهان د قضيو په ثبوت کي اکثراً د مرستندوی ثابت د طريقي څخه کار اخلي. که غواړو چي د $(\forall x)\ (v(x,...)\rightarrow w(x,...))$ استنباط ثابت کو ، نو خپل ثبوت د " فرضوو چي x داسي اختياري خو ثابت متحول دي ، چي $v(x,...)$ صدق کوي" په جمله پيل کوو. پدي معنی چي د رياضي پر فرضيو مو يوه بله د$v(x,...)$ فرضيه ور اضافه کړه. په بل عبارت د راکړه سوي رياضي د تيوري پر اکسيومو باندي يوه بله اکسيومه وراضافه کړه. هغه هم پداسي ډول چي د x متحول مو را منحصر کي. د "اختياري" کلمه هغه حقيقت ارائه کوي ، چي د x د متحول څخه غير له د$v(x,...)$ شرط څخه د بل شرط د تحقق غوښتنه نه لرو. "خو ثابت" کلمه زموږ پاملرنه دي واقعيت ته را څرمه کوي ، چي د ثبوت په جريان کي نوموړي x متحول ته تغير نسو ورکولای. پدي معنی هغه x چي موږ "اختياري" وټاکي ، بايد زموږ سره د ثبوت تر پايه ملګرتيا وکي، او د ثبوت په جريان کي هغه ته عمومي کوانتيفيکاتورنسواچونولای.پدي حالت کی نوموړي متحول د خصوصي ثابت په څېرعمل کوي. خو دغه خصوصي ثابت بايد په هيڅ صورت د T د تيوري په اکسيوموکي راڅرګند نسي!!

د 3.16 قضيې مشخصه بېلګه د رياضي په انالايز کي ليدلای سو. هلته غواړي چي :

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow ....)$$

ثبوت کئ. خپل ثبوت تل د " فرضوو چي ε اختياري مثبت عدد دي" پيل کوي. او د استدلا په جريان کي د ε په اړوند n_0 يا δ لټوی...

د مرستندوی ثابت د قضيې څخه په مستقيم ډول بله نتيجه استنباط کېږي چي هغه هم په رياضي کي اکثراً کار ورڅخه اخيستل کېږي. ددي طريقي څخه هغه و خت کار اخلو ، چي پوهيږو داسي x وجود لري چي $v(x,...)$ صدق کوي. پدي حالت کي وايو " فرضوو x داسي دي، چي $v(x,...)$ صدق کوي". پدي معنی چي دغه ډول استدلال هم د لاندني قضيې پر بنسټ خپل حقانيت تائيدولای سي.

قضیه 4.16. (پداسي ډول وجود لرى)

فرضوو، چي T د رياضي تيوري ده، $\varphi(x,...)$ ، ψ د نوموړي تيوري په ژبه كي فارمولونه دي،د ψ فارمول د x متحول په ځان كي نلري. فرضوو، چی c داسي خصوصي ثابت دي چي د T د تيوري په هيڅ اكسيومه كي نه ځرګنديږي. كه :

$$T,\varphi(c,....) \vdash \psi,$$

نو:

$$T\vdash(\exists x)\varphi(x, ...) \longrightarrow \psi.$$

ثبوت. د تېري قضيي يعنی 3.16 پر بنسټ $T\vdash(\forall x)(\varphi(x) \longrightarrow\psi)$ صدق كوي، ځكه نو: $T\vdash(\forall x)(\neg\varphi(x) \vee\psi)$ صدق كوي.ځرنګه چي د ψ فارمول د x متحول په ځان كي نلري، نو $T\vdash((\forall x)(\neg\varphi(x)) \vee\psi$ ليكلاى سو. وروستې افاده د $T\vdash(\exists x)(\varphi(x) \longrightarrow\psi)$ سره معادله ده.

q.e.d.

د استنباط ډير قوانين په مشخصه تيوري پوري تړلې دي. د بېلګي په ډول لاندنې بېلګي ته پاملرنه وكي.

بېلګه 1.16. فرضوو چي د رينګ په ژبه $\mathfrak{L}_{ring}$ د t_4,t_3,t_2,t_1 كلمې راكړه سوي دي.بيا نو لاندنې افادي د رينګ په تيوري كي داستنباط قوانين دي:

$$\frac{t_1 \equiv t_2 \quad t_3 \equiv t_4}{t_1 \mathbin{\underset{\smile}{+}} t_3 \equiv t_3 \mathbin{\underset{\smile}{+}} t_4} \qquad\qquad \frac{t_1 \equiv t_2 \quad t_3 \equiv t_4}{t_1 \mathbin{\underset{\smile}{\cdot}} t_3 \equiv t_3 \mathbin{\underset{\smile}{\cdot}} t_4}$$

باور لرم چي لوستونكئ د پورتنيو استنباط د قوانينو سره آشنا دي . په لنډ ډول يې داسي افاده كوو چی دوه مساواتونه طرف په طرف يو دبل سره جمع يا ضربولاى سو. پورتنې د استنباط قوانين د T_{ring} ، T_{field} او T_{IntDom} كي صدق كوي. پر نوموړو د استنباط پر قوانينو خپل ځان داسي باوري كولاى سو.

فرضوو، چی $T_{ring}\vdash t_1 \equiv t_2$ او $T_{ring}\vdash t_3 \equiv t_4$ دي. بيانو ځلور ځلې د $\forall$ د حذف د اكسيومي او د رينګ د تيوري T_{ring} د ځلرمي اكسيومي د په كار اچولو په نتيجه كي :

$$T_{ring}\vdash t_1 \mathbin{\underset{\smile}{+}} t_3 \equiv t_3 \mathbin{\underset{\smile}{+}} t_4$$

لاسته راځي. په ورته ډول د ضرب دپاره د استنباط قانون هم ثابتولایسو.

17§. مساوات ، تعريف، عدم تناقض او مودل

د تېر پاراګراف 1.16 بېلګه ددې پاراګراف د څېړنې سر ایږدي. هڅه به وکو چی په رياضي کی ډیرو معمولی کړنلارو او مفهومو ته د هغه علمي چپنه ور پر اوړو کو. پدي معنی چي مساوات اويا تعريف څه شي دي؟ دلته به يې لنډ وڅېړو.

ځيرک لوستونکئ به هرومرو متوجه سوي وي ، چی د T_{group} او T_{ring} لمړې دري اکسيومي يو دبل سره تطابق لري. د څلرمي څخه تر شپږمي اکسيومو پوري د T_{group} او T_{ring} په تيوريو کي يودبل سره ورته والی سته. دبلي خوا که د سيټ د تيوري او د حقيقي عددو د تيوري اکسيومو ته پاملرنه وکي هغوی هم سره ورته دي. آيا تصادف دي او که کمه قانونمندی وجود لري؟ تصادف ندي، په رياضي کي يو د اساسي پريديکاتو څخه د مساوات پرديکات دي چي بايد يو لړشرطونه پر ځای کي. هغه شرطونه عبارت د انعکاسي ، تناظری او انتقالي خاصيتو څخه دي، چي دنوموړو تيوريو لمړي دري اکسيومې ارائه کوي. علاوه پر هغه د معاوضي اجازه بايد ولرو.پدي معنی چي په عمليو او پريديکاتو کي د مساوي کلمود تعويض په نتيجه کي بايد عيني نتيجې لاسته راسي. ځکه نو رياضی پوهان د پريديکات الجبر د مساوات سره څېړي. حتي د نوموړي تيوري اکسيومي په بديهي بنه مني.

فرضوو، چي د:

$$\mathfrak{L}=\langle \equiv, P, \ldots, a, \ldots, f, \ldots \rangle$$

ژبه د مساوات $\equiv$ پريديکات احتوا کوي. د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي د پرديکات الجبر د مساوات Equality سره د پريديکات د الجبر پر اکسيومو بر سيره لاندني اکسيومي احتوا کوي:

$x \equiv x$ (Eq$_1$ ، $x \equiv y \to y \equiv x$ ، $x \equiv y \to (y \equiv z \to x \equiv z)$.

(Eq$_2$ که P د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي (يعنی $P \in \mathfrak{L}$) k– ئېز پريديکات وي، نو لاندني فارمول :

$$(x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_k=y_k) \longrightarrow (P(x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow P(y_1, \ldots, y_k)),$$

اکسيومه ده.

(Eq_3) که f د $\mathfrak{L}$ په ژبه کې $(f\in\mathfrak{L})$ د k– ئېزي عمليي نوم وي، نو لاندنی فارمول:

$$(x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_k=y_k) \longrightarrow f(x_1, \ldots , x_k) \equiv f(y_1, \ldots ,y_k)$$

اکسیومه ده.

اوس به نو راسو د تعریف و مسئلي ته. تعریف څه شی دي؟ په رياضي کې ډېر شيان دی چې تعريفيږي ، دلته قصداً د "شې" يا "شيان" کلمه راوړم . تعريف په لمړي قدم کې لنډيز يا لنډونه ده. اوس نو بايد د مفهوم يا مشخص شي او د عمليې تعريف يو له بل څخه بېل کو. د رياضي په انالايز کې ددی پر ځای :

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta)(\forall x)(|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\ )$$

وايو، چې د f تابع د a په نقطه کې متمادي ده.دغه د متماديت تعريف دي. د منطق له نقطهٔ نظره څه پيښه سوه؟ د حقيقي عددو او تابع ګانو و ژبې ته نوی وړونکی يا پريديکات " تابع په نقطه کې متمادي ده" وراضافه کې. په تيوري کې مو لاندني نوي اکسيومه وراضافه کړه:

$f \equiv(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta)(\forall x)(|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\ ).$ دa په نقطه کې متمادي ده

نوموړي کړنلاري ته به عموميت ورکړو او په رياضي کې د مفهوم د تعريف، تعريف به فارمولبندي کو:

تعريف 1.17. که د T تيوري د $\mathfrak{L}$ په ژبه کې راکړه سوي وي او R داسي k– ئېز پريديکات وي، چې د T د تيوري په ژبه $\mathfrak{L}$ پوري اړه ونلري، يعني $R\notin\mathfrak{L}$ ، $\varphi(x_1, \ldots , x_k)$ د $\mathfrak{L}$ په ژبه کې فارمول وي، بيانو $R(x_1, \ldots , x_k)$ دنوی مفهوم تعريف دي که د T په تيوري کې د

$$R(x_1, \ldots , x_k)\equiv \varphi(x_1, \ldots , x_k)$$

اکسيومه وراضافه کو.

اوس به نو راسو د عمليې تعريف ته. د عمليي د تعريف دپاره د پريديکات الجبر د مساوات سره ضرورت لرو.

تعريف2.17. فرضوو، چی T د مساوات سره د پريديکات په الجبر کې تيوري ده. $\varphi(y,x_1, \ldots ,x_k)$ د T په تيوري کې داسي فارمول دي، چې د T په تيوري کې :

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists y)\ \varphi(x_1, \ldots , x_k,y), \qquad (1.17)$$

$$(\forall x_1)...(\forall x_k)(\forall y)(\forall z)((\varphi(x_1, ..., x_k,y)\wedge \varphi(x_1, ..., x_k,z))\longrightarrow y\equiv z \qquad (2.17)$$

د ثبوت وړدي، بیانو که د T په تیوري کي د :

$$g(x_1, ..., x_k) \equiv y\equiv \varphi(x_1, ..., x_k,y)$$

اکسیومه وراضافه کو، نو د g ، k– ئېزه عملیه مو تعریف کړیده.

په 2.17 تعریف کي د (1.17) او (2.17) فارمولونه په لاندی ډول په یوه فارمول کي خلاصه کیدای سي:

$$(\forall x_1)...(\forall x_k)(\exists! y)\ \varphi(x_1, ..., x_k,y)$$

د (∃!) سمبول د یکړ عنصر د موجودیت مفهوم ارائه کوي. یعنی "فقط یو عنصر وجود لري" ویل کېږي.

که په تیوري کي تناقض ثابت کړای سو، نو هغه تیوري د متناقضي contradictory تیوري په نامه یادیږي.

تعریف 3.17. که د T تیوري د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي راکړه سوي وي او φ د T په تیوري کي داسي تړلی فارمول وي ، چي $T\vdash \varphi$ او په عین حال کي $T\vdash\neg\varphi$ صدق وکي ، نو نوموړي تیوري د متناقضي تیوري په نامه یادوو.

په لنډ ډول ویلای سو که په تیوري کي داسی تړلي فارمول وجود ولري چي په هغه کي هغه فارمول پخپله او د هغه فارمول نفي ثابت کړای سو، نو وایو چي نوموړی تیوري متناقضه ده. هغه تیوري چي متناقضه نه وي، نو هغه د غیر متناقضي تیوري په نامه یادوو. د تناقض په طریقه ثبوت در پیاد کي . هغه ثبوت داسي هم فارمولبندي کولای سو. که د $T\cup\{\neg\varphi\}$ تیوري متناقضه وي ، نو $T\vdash \varphi$.

په اساني سره لیدلای سو چي د عدم تناقض اړیکه د تیوري پر سب سیټ باندی هم تآثیر بښندي .پدي معنی که $T_1\subseteq T_2$ وي او د T_2 تیوري غیرمتناقضه وي ، نو د T_1 تیوري هم غیر متناقضه ده.

قضیه 1.17. د T تیوري یوازي او یوازي هغه وخت غیرمتناقضه ده ، چي د φ فارمول داسي وجود ولري ، چي $T\nvdash\varphi$.

ثبوت. فرضوو چي φ د T د تيوري په ژبه کي اختياري تړلی فارمول دي.ځرنګه چي د T تيوري غيرمتناقضه ده او φ په نوموړي تيوري کي تړلي فارمول دي، نو لږترلږه φ يا $\neg\varphi$ د T په تيوري کي د ثبوت وړ ندي.

برعکس که د T تيوري متناقضه وي، نو د T په تيوري کي داسي تړلي فارمول د ψ وجود لري، چي د T په تيوري کي ψ او د هغه نفي $\neg\psi$ د ثبوت وړدي يعنی $T\vdash\psi$ او $T\vdash\neg\psi$ صدق کوي. فرضوو چی φ د T د تيوري اختياري فارمول دي، بيانو $T\vdash\neg\varphi\to\psi$ او $T\vdash\neg\varphi\to\neg\psi$ صدق کوي. د پريديکاتد الجبر د لمړي ګروپ د وروستی اکسيومي څخه د په کاراچولو په نتيجه کي :

$$(\neg\varphi\to \psi)\to((\neg\varphi\to\neg \psi)\to\neg\neg\varphi)$$

$T\vdash\varphi$ لاسته راځي. پدي معنی چی د T په تيوري کي هر فارمول د ثبوت وړ دي. دغه حالت زموږ د فرضيې پر خلاف دي.

د بشپړتوب د قضيي څخه په اساني سره لاندنې نتيجه لاسته راځي.

قضيه 2.17. د T تيوري يوازي او يوازي هغه وخت غيرمتناقضه ده ، چي د نوموړي تيوري مودل وجود ولري.

ثبوت. فرضوو چي د T تيوري غيرمتناقضه ده، فرضوو چي φ د نوموړي تيوري په ژبه کي اختياري تړلی فارمول دي. بيانو د بېلګي په ډول $T\nvdash\varphi$ صدق کوي. بيانو د بشپړتوب د قضيې 3.15. پر بنسټ د T د تيوري مودل $\mathfrak{M}$ داسي وجودلري، چي $\mathfrak{M}\nvDash\varphi$ پدي معنی چي د نوموړي تيوری مودل وجود لري.

برعکس فرضوو چي د T د تيوري مودل $\mathfrak{M}$ وجودلري. که فرضاً د T په تيوري کي داسی فارمول وجود ولري،چي $T\vdash\varphi$ او $T\vdash\neg\varphi$ صدق کوي.بيانو د درستوالي د قضيې پر اساس $\mathfrak{M}\vDash\varphi$ او $\mathfrak{M}\vDash\neg\varphi$ لاسته راځي. خو دغه حالت د صدق کولو اړيکي $\vDash$ د تعريف سره مغايرت لري. q.e.d.

قضيه 3.17. (د ځای ټاکنې په هکله localization). فرضوو، چی T تيوري او φ د نوموړي تيوري په ژبه کي فارمول دي. که د φ فارمول د T په تيوري کي د ثبوت وړ يعني $T\vdash\varphi$ وي، نو د $T_0\subseteq T$ متناهي سب سيټ داسي وجود لري ، چي $T_0\vdash\varphi$.

ثبوت. د قضيي ثبوت د بيان په الجبر کي د قضيي و ثبوت ته ورته دي. پدي معنی که $T\vdash\varphi$ وي، نو د T په تيوري کي د φ د فارمول ثبوت $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ داسي وجود لري ، چي $\varphi_n=\varphi$ سره دي. فرضوو چي :

$$T_0=\{\psi\in T;\ \text{د}\ \psi\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n\ \text{دثبوت غړی دي}\}$$

دي. بيانو $T_0\subseteq T$ متناهي سيټ او $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ د T_0 په تيوري کي ثبوت دي. ددی اسيته $T_0\vdash\varphi$ صدق کوي. q.e.d.

قضيه 4.17. (دنغښتني په هکله Compactness).د T تيوري يوازي او يوازي هغه وخت غيرمتناقضه ده، که د T د تيوري هره متناهي سب تيوري $T_0\subseteq T$ غيرمتناقضه وي.

ثبوت. که يوه تيوري غيرمتناقضه وي ، نو په بديهي ډول د هغه هره سب تيوري هم غيرمتناقضه ده.

برعکس فرضوو، چي د T تيوري متناقضه ده. پدي معنی چي د φ تړلی فارمول داسي وجود لري، چي $T\vdash\varphi$ او $T\vdash\neg\varphi$ صدق کوي.بيانو د ځای ټاکني قضيې پر بنسټ د $T_1\subseteq T$ او $T_2\subseteq T$ متناهي سب تيوري داسي وجود لري، چي $T_1\vdash\varphi$ او $T_2\vdash\neg\varphi$. بيانو د $T_0=T_1\cup T_2$ متناهي تيوري متناقضه ده. q.e.d.

د تناقض او عدم تناقض د مفهومودپاره د رياضي د منطق په ځينو کلاسيکو ليکونو کي د هغوی معادل د سازګار Consistent يا غير سازګار د کلمو څخه هم کار اخيستل کيږي.

د تېري قضيي د معکوس حالت په اړوند پوښتنه کيږي.که چيري د T تيوري او د φ تړلي فارمول داسي راکړه سوي ، چي $T\nvdash\neg\varphi$ صدق وکي او موږ نوموړي تيوري ته د φ فارمول وراضافه کو ، يعنی $T_1=T\cup\{\varphi\}$ ، T_1 تيوري د T د تيوري د پراختيا په نتيجه کي لاسته راسي ، نو آيا د T_1 د تيوري د تناقض يا عدم تناقض په هکله څه ويلای سو؟ پدي هکله لاندني ليماصدق کوي.

ليما 1.17. که د T دتيوري په ژبه کي د φ تړلی فارمول داسي راکړه سوي وي، چي د T په تيوري کي $\neg\varphi$ د ثبوت وړ نه وي، يعنی $T\nvdash\neg\varphi$ صدق وکي، او د T_1 تيوري د T د تيوري څخه ده φ د فارمول، د نوی اکسيومي په صفت، په اضافه کيدو سره لاسته راسي، بيا نو د T_1 تيوري غير متناقضه ده.

ثبوت. د ليما ثبوت په غير مستقيم ډول سره سرته رسوو. فرضوو چي د ليما فرضيې صدق كوي او د T_1 تيوري متناقضه ده. بيانو د تناقض د تعريف له مخي د كم فارمول ψ دپاره صدق كوي

$$T_1 \vdash \psi \qquad (1)$$

او

$$T_1 \vdash \neg\psi \qquad (2)$$

څرنګه چي د φ فارمول د T_1 د تيوري فارمول او د $\psi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ فارمول تاوتولوجي ده ، يعنی

$$T_1 \vdash \psi \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \qquad (3)$$

صدق كوي.

پر (1) او (3) باندي د مودوس پوننس د قانون د تطبيق په نتيجه كي .

$$T_1 \vdash \neg\psi \to \neg\varphi \qquad (4)$$

پر (2) او پر (4) باندی بياهم د مودوس پوننس د قانون په نتيجه كي $T_1 \vdash \neg\varphi$ استنباط كيږي. څرنګه چي د φ فارمول مو د T_1 په تيوري كي د اكسيومي په صفت ور اضافه كړيده ، نو د هغي څخه د T په تيوري كي فرضيې په صفت كار اخيستلای سو، پدي معنی $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ صدق كوي، ددي ځايه د استنباط دقضيې له مخي $T \vdash \varphi \to \neg\varphi$ دي. $T \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ تاوتولوجي ده. پر وروستنيو دوو فارمولو باندي دمودوس پوننس د قانون د عملي كيدو په نتيجه كي زموږد فرضيې ضد حالت $T \vdash \neg\varphi$ لاسته راځي. q.e.d.

دمخه تردي چي د پريديكات د الجبر د ژبي د بوج په هكله څه ووايو، ستاسو پاملرنه بياهم په [3] كي د شمېر وړسيټ و تعريف ته راګرځوم. په لنډ ډول ويلای سو چي د $\mathfrak{L}$ سيټ د شمېر وړدي ، كه په لاړ و پيېل سي ، يعنی د $\mathfrak{L}$ د سيټ څخه د طبيعي عددو په سيټ كي مپينګ وجود ولري.لاندنې ليما د پريديكات د الجبر د بوج په هكله موږ ته معلومات راكوي. په ليما كي ثبوت ډير په زړه پوري دي او په راتلونكي فصل كي به د عددي تابع ګانو په اړوند د نوموړي ثبوت وكړنلاري ته اشاره وكو. په 12§ كي مو د پريديكات د الجبر ژبه په لاندي ډول وښودله:

$$\mathfrak{L}=\langle P,Q,R,...,a,b,c,...,f,g,h,...,x_1,x_2,x_3,...,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\equiv,\forall,\exists,(,)\rangle$$

لیما 2.17. د پریدیکات د الجبر په ژبه $\mathfrak{L}$ کي د افادو سیټ د شمېر وړ دي. همدا ډول په نوموړي ژبه کي د کلمو سیټ ، د فارمولو سیټ او د تړلي فارمولو سیټ د شمېر وړ دی.

ثبوت. د کیڼ لاس څخه به یې را پیل کو او هری نښي ته به یو قیمت کښېږدو. دغه قیمت ایښودنه یا تابع د پریدیکات د ژبي څخه دباندي په (ماوراء یا مافوق Metalanguage) پوري اړه لري. د g تابع د $\mathfrak{L}$ د سیټ څخه د طبیعي عددو په سیټ $\mathbb{N}$ کي داسي تعریفوو:

$$g:\mathfrak{L}\longrightarrow\mathbb{N}$$

$g(\,(\,)=3$ ، $g(\,)\,)=5$ ، $g(\,,\,)=7$ ، $g(\neg)=9$ ، $g(\wedge)=11$ ، $g(\forall)=13$ ، $g(a_k)=7+8k$ ، $g(x_k)=13+8k$. پدي ډول ابتدايي نښو ، د منطق عملیو ، د منطق ثابتو او د منطق متحولو ته قیمتونه ورکړه. په 9§ کي مو وښودل چي د نفي او دمنطقي ضرب په ذریعه کولای سو چي د منطق نوري عملیې ارائه کو. عمومي کوانتیفیکاتور ته مو هم قیمت ورکړي ، موجودي کوانتیفیکاتور د نفي د عملیې په مرسته د عمومي کوانتیفیکاتور څخه لاسته راوړلای سو. اوس نو که f_k د پردیکات په ژبه کي د n متحوله ، k –یمي تابع نوم وي، نو دهغه قیمت $g(f_k)=1+8(2^n3^k)$ سره ابرېدو. که P_k د پریدیکات په ژبه کي n –ئېز ، k –ام پریدیکات وي، نو $g(P_k)=3+8(2^n3^k)$ د نوموړي پریدیکات قیمت دي. د پریدیکات په ژبه کي وافادو ته د اولیه عددو په مرسته قیمت داسي ایږدو: که $u_0u_1\ ...\ u_r$ د پریدیکات په ژبه افاده وي ، نو دهغه قیمت $2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}...p_r^{g(u_r)}$ دي ، پداسي حال کي چي p_r ، r –ام اولیه عدد دي. د بېلګي په ډول که د P_1 یوئېز پریدیکات ، x_2 د متحول په صفت په ځان کي ولري، یعنی $P_1(x_2)$ ، نو د هغه قیمت به زموږ په تعریف کي $2^{51}3^{3}5^{29}7^{5}$ وي. ځکه چی نوموړي افاده څلور غړي ، یعني په ترتیب سره "P_1" ، "(" ، "x_2" ،")" ، لري. پدي ډول لمړیو څلورو اولیه عددو 5,3,2 او 7 ته ضرورت لرو. دهغوي طاقتونه د هر غړي ، یعنی $g(P_1)=51$ ، $g(\,(\,)=3$ ، $g(x_2)=29,\ g(\,)\,)=5$ قیمت دي.پدي ډول د پریدیکات په الجبر کي و هري افادي ته یو طبیعي عدد تخصیص ورکولای سو. د طبیعی عددو سیټ د شمېر وړ سیټ دي. ځکه نو د پریدیکات په الجبر کي د افادو سیټ هم د شمېروړدي. که دوي مختلفي افادي راکړه سوي وي ، نو د هغوی قیمتونه به هم مختلف طبیعی عددونه وي. q.e.d.

که موږ په اغېزمن ډول سره وویلای سو، چی کمه نښه د $\mathfrak{L}$ په ژبه اړه لري، نو همداسي په اغیزمن ډول سره و هغه ته قیمت هم ایښودلای سو. په عین حال کي د عدد په هکله په اغیزمنه توګه فیصله کولای سو، چي آیا راکړه سوی عدد د $\mathfrak{L}$ په ژبه کي د کمي افادي عدد دي او که نه. د کلمو ، فارمولو او تړلو فارمولو په هکله هم دغه ادعا صدق کوي. خو په عین حال کي داسي تیورۍ هم وجود لري، چی په هغه کی تیوري د تړلي فارمول په هکله مخکي له مخکي موږ قضاوت نه سو کولای چي آیا نوموړي فارمول د تیوري د قضیو په لست کي راځي او که نه. وایو چي د T تیوري بشپړه complete ده ، که په نوموړي تیوري کي د هر تړلي فارمول φ په هکله $T\vdash\varphi$ یا $T\vdash\neg\varphi$ صدق وکي . پدي معنی چي د T د تیوري هر تړلي فارمول φ یا پخپله په دغه تیوري کي او یا د فارمول نفي $\neg\varphi$ ثبوت کړای سو.

دریم فصل

راستنېدونکې تابع ګانېRecursive Functions- د تیورینګ ماشینونه

د ریاضي د منطق په کلاسیکو معتبرو لیکونو کي د بیاراستنیدونکي تابع ګانو په هکله څېرکي د عددنو دتیوري په معرفي کېدوسره شروع او د پئانو پیژندل سوي اکسیومي اوډل کېږي. هدف څه دي؟ بیاهم د 9§ و مقدمي ته ستاسو پاملرنه راګرځوم. د ریاضي په تاریخ کي لمړني اکسیوماتیکي تیوري د اقلیدس هندسه او وروسته د عددنو د تیوري د پئانو اکسیوماتیکي سیستم دي چي د ریاضي بنسټیزې په صوري چوکاټ کي راولي، څو د ریاضي د هري ادعا د صدق یا غیر صدق په هکله په څرګند ډول فیصله وکولای سو. بیله شکه(اړنګ څخه) د ریاضي د منطق په چوکاټ کي د پئانو د اکسیومو اوډل او د هغه د خاصیتو ثبوتونه ځانته خاصه ښکلا لري ، خو زه دلته د نهایی هدف ، چي د موضوع عملي اړخ او د زده کړي د چوکاټ محدودیت دی، په دلیل ځني تېرېږم او پر [17] [25] حواله درکوم.که څوک یې و جزئیاتو ته ډیر تږي وي ، نو [16] [26] دي وګوري.

موږ تراوسه مختلف مفهومونه ، دبېلګي په ډول د فارمول تعریف، د استقراء په طریقه فارمولبندي کړه. دمخه تردي چي بیاستنیدونکي تابع تعریف کو د عددونو د تیوري د تابع مفهوم ته به وګورو . د عددنو د تیوري تابع ګانې هغه تابع ګانې دي چي متحولونه او قیمتونه یې د طبیعی عددو پر سیټ باندي تعریف سوی وی، یعنی :

$$f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad , g:\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ldots$$

بیاهم دلته یې په تکرار سره بېلګې راوړم. د تالي عملیه د طبیعي عددو پر سیټ باندي د یوه ئېزي عملیې بېلګه او د جمع او ضرب عملیې د طبیعی عددو پر سیټ دوه ئېزي عملیې دي چي عددي تابع ګانې معرفی کوي. د عددونو د تیوري د اړېکو څخه مو هدف هغه اړېکي دي، چي متحولونه یې طبیعی عددونه دي. د طبیعي عددو پر سیټ د مساوات = او > اړېکي د طبیعی عددو پر سیټ د دوه ئېزو اړېکو بېلګې دي. $x+y<z$ پداسي حال کي چی y,x او z د طبیعي عددو پر سیټ متحولونه وي، د دریئېزي عددي اړېکي بېلګه ده.

---

[25] نیازمن: الجبر او دعددنو تیوري لمړي برخه ،دوهم فصل، II§ وګوری.
[26] منډلسن: د ریاضي و منطق ته مقدمه ، دریم فصل وګوری.

§18. ابتدايي راستنېدونکي او راستنېدونکي تابع ګاني

د عددنو دتیوري تابع ګاني د رياضي په منطق او کمپيوټر په برخه کي ډېر مهم رول لوبوي. ددی دپاره چي سوء تفاهم رانسي، نو د ابتدايي راستنيدونکي تابع څخه مي هدف primitive recursive function او د راستنيدونکي تابع څخه مي recursive function دی.

تعريف 1.18. لاندني تابع ګانو ته پيلوځي initial تابع ګاني وايو:

(I) صفرې تابع Zero Function ، $z(x)=0$ د هر x دپاره.

(II) د تالي تابع Successor Function ، $s(x)=x+1$ د هر x دپاره.

(III) که $p(x_1, \ldots ,x_n)$ ، n متحوله عددي تابع وي، نو د ارتسام تابع Projection Function عبارت ده له: $p_i(x_1, \ldots ,x_n)=x_i$ د ټولو $x_n, \ldots,x_2,x_1$ دپاره.

تعريف 2.18. د راکړه سوي تابع ګانو څخه د لاندنيو قاعدو يا اصولو په مرسته نوي تابع ګاني لاسته راوړلای سو:

(I) تعويض Substitution :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n))$$

وايو، چي د $f(x_1,\ldots,x_n)$ تابع د $g(y_1,\ldots,y_m)$ په تابع کي د $h_1(x_1,\ldots,x_n)$ ، ...، $h_m(x_1,\ldots,x_n)$ د تابع ګانو د تعويض په نتيجه کي لاسته راغلي ده.

(II) راستنيدل Recursion :

$$f(x_1,\ldots,x_n,0) = g(x_1,\ldots,x_n);$$

$$f(x_1,\ldots,x_n,y+1) = h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)).$$

دلته $n=0$ سره هم قبلوو.کله چی $n=0$ وي، نو د x متحول هيڅ وجود نلری او يوازي نظر د y و متحول ته د راستنيدلو قاعده به داسي وي:

$f(0)=k$ پداسي حال کي چي k ثابت طبيعي عدد دي

$f(y+1)=h(y,f(y))$

پدي حالت کي وايو، چی د f تابع د g او h د تابع ګانو څخه (یا په هغه حالت کي چي n=0 وي، یوازي د h د تابع څخه) د راستنیدو په نتیجه کي لاسته راغلي ده. $x_1,...,x_n$ د راستنېدو د ارزښتو Parameters په نامه یادوو.

پاملرنه وکي چي زموږ تعریف درست دي.ځکه چي $f(x_1,...,x_n,0)$ د لمړي مساوات په ذریعه راکړه سوي او هرکله چي موږته د $f(x_1,...,x_n,y)$ معلومه وي، نو کولای سو د دوهم مساوات څخه $f(x_1,...,x_n,y+1)$ لاسته راوړو. یعني د تابعګانو جوړښت تدریجي دي. د g تابع n متحوله ، د f تابع n+1 متحوله او د h تابع n+2 متحوله ده. که د راستنېدو اصل ته پراختیا ورکړو، نو لاندني تابعګاني به لاسته راسي:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,...,x_n,0)=g(x_1,...,x_n)\\
&f(x_1,...,x_n,1)=h(x_1,...,x_n,0,f(x_1,...,x_n,0))=h(x_1,...,x_n,0,g(x_1,...,x_n))\\
&f(x_1,...,x_n,2)=h(x_1,...,x_n,1,f(x_1,...,x_n,1))=h(x_1,...,x_n,1,h(x_1,...,x_n,0,g(x_1,...,x_n))\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&f(x_1,...,x_n,y+1)=h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y))
\end{aligned}
$$

د راستنېدونکي تابع دډېري ساده بېلګي سره درياضي په انالايز او الجبر کي هرومرومعرفي سوی یاست، هغه عبارت ده له: $f(n)=n!$. دلته $f(n+1)=(n+1)!=(n+1)n!=h(n+1,f(n))$.

(III) μ– ایسارونکی (Restricted μ-Operator) :

فرضوو، چي د $g(x_1,...,x_n,y)$ داسي تابع ده ، چي د هر $x_1,...,x_n$ دپاره لږ تر لږه یو y داسي وجود ولري، چي $g(x_1,...,x_n,y)=0$ وي. د $\mu y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$ پذریعه هغه کوچنیترین y په نښه کوو ، چي دهغه دپاره $g(x_1,...,x_n,y)=0$ وي. په عمومي ډول د هری اړیکي $R(x_1,...,x_n,y)$ دپاره $\mu y(R(x_1,...,x_n,y))$ هغه کوچنۍ ترین y دي، چی دهغه دپاره د $R(x_1,...,x_n,y)$ اړیکه صدق وکي. په هغه صورت کي چي دغه ډول y وجود ولري. فرضوو چي $f(x_1,...,x_n)=\mu y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$ دي. پدي حالت کي وایو چي د $f(x_1,...,x_n)$ تابع د $g(x_1,...,x_n,y)$ د تابع څخه د μ د ایسار ولو په نتیجه کي په لاس

راغلی ده. پدې شرط چې د g تابع د μ– ایسارونکی انګېرنه (فرضیه) پر ځای کړي.پدې معنی چې د هر $x_1,...,x_n$ دپاره لږترلږه یو داسې y وجود لري، چې $g(x_1,...,x_n,y)=0$ وي.

تعریف 3.18. د f تابع د ابتدايي راستنیدونکي primitive recursive تابع په نامه يادووکه د $f_0, ..., f_n$ د تابع ګانو لاړ داسې وجود ولري چې د لاړ هر غړی ، د هر $0 \le i \le n$ دپاره يو د لاندنيو شرطو څخه صدق وکي :

R₁) f_i د پېلوځو تابع ګانو څخه ده يا

R₂) $k_1,k_2,...,k_r < i$ داسې وجود لري چې f_i د $f_{k_1},f_{k_2},...,f_{k_r}$ څخه د (I) تعويض يا د (II) راستنېدو د اصل د عملي کيدو په نتيجه کي لاسته راغلي وي ،

او $f_n=f$ وي.

د **R₂** شرط په ساده ډول داسې هم فارمولبندی کولای سوچې د f_i تابع د لاړ د مخکنيو غړو څخه د تعويض يا راستنېدود اصل د عملي کېدو په نتجه کي لاسته راغلی وي.

تعریف 4.18. د f تابع د را ستنیدونکي recursiv تابع په نامه يادووکه د $f_0, ..., f_n$ د تابع ګانو لاړ داسې وجود ولري چې د لاړ هر غړی ، د هر $0 \le i \le n$ دپاره يو د لاندنيو شرطو څخه صدق وکي :

R₁) f_i د پېلوځو تابع ګانو څخه ده يا

R₂) $k_1,k_2,...,k_r < i$ داسې وجود لري چې f_i د $f_{k_1},f_{k_2},...,f_{k_r}$ څخه د (I) تعويض يا د (II) راستنېدو او يا د (III) μ– ایسارونکي اصل د عملي کيدو په نتيجه کي لاسته راغلي وي ،

او $f_n=f$ وي.

3.18 او 4.18 تعریفونه نور کټ مټ يو ډول دي ، خود را ستنېدونکی تابع په تعريف کي د μ–ایسارونکي اصل د ممکن عملی کېدو شرط اضافه سوی دي، ځکه نو ويلای سو چې هره ابتدايي را ستنېدونکي تابع په خپل ذات کي را ستنېدونکي تابع هم ده ، خو برعکس صدق نه کوي. په ځينو ليکونو کي را ستنېدونکي تابع ګاني د عمومي را ستنېدونکو general recursive تابع ګانو په نامه هم يادوي.

دمخه تردي چې د خيالي متحولو په هکله مخ په وړاندي ولاړ سو، يو قرارداد به وکو. هغه داچې تر هغه ځايه چې سوء تفاهم رامنځ ته نسي او زموږ د څېړني وړ موضوع د ابتدايي

راستنیدونکي او راستنیدونکي تابع ګانو ، یعنی د دواړو دپاره صدق کوي، نو یوازي د راستنېدونکي تابع نوم به راوړو او هدف به مو دواړه تابع ګاني وي. هغه خاصیتونه چي یوازي د یو ډول راستنېدونکي تابع دپاره صدق کوي ، نو په ځرګنده به ورته اشاره کوم.که څه هم مخکي مو یادونه وکړه چي هر د ابتدایي راستنېدونکی تابع هر خاصیت د راستنېدونکي تابع دپاره هم صدق کوي. ځکه نو په هغه وخت کی چي کم خاصیت د ابتدایي راستنېدونکي تابع دپاره صدق نه کوي ، زه به په ځرګنده سره ورته اشاره وکم.

د خیالي متحولو په هکله په 11§ کي وړغیدو. همدا ډول په راستنېدونکو تابعګانو کي هم خیالي متحولونه اضافه کولای سو. پدي معنی که په راستنېدونکي تابع کی خیالي متحولونه ، یا د هغوی اوښتون Permutation او یا د متحولو انطباق Identifying ، اضافه کو ، نو په نتیجه کي لاسته راغلی تابع به هم راستنېدونکي تابع وي. وروسته به یي ببلګي ووینو.

قضیه 1.18. فرضوو چي $g(y_1,...,y_k)$ راستنېدونکي تابع ده. فرضوو چي $x_1,...,x_n$ په خپل منځ کي مختلف متحولونه اودهر $1\leq i\leq k$ دپاره z_i یو د $x_1,...,x_n$ څخه وي. بیانو د $f(x_1,...,x_n)=g(z_1,...,z_k)$ تابع ، راستنېدونکي تابع ده.

ثبوت. ثبوت یې ساده دي ، د $g(y_1,...,y_k)$ تابع نظر و فرضیې ته راستنېدونکي تابع ده، د $f(x_1,...,x_n)$ تابع د $g(y_1,...,y_k)$د تابع څخه د ارتسام د تابع او د تعویض د اصل د تطبیق په نتیجه کي داسي لاسته راوړو:

فرضوو چي $z_i=x_{j_i}$ دي، پداسي حال کي چي $1\leq j_i\leq n$دي. بیانو $z_i=p_{j_i}(x_1,...,x_n)$ اېږدو.په نتیجه کي د $g(y_1,...,y_k)$ د تابع هر متحول د ارتسام د تابع سره تعویضوو، یعنی:

$$f(x_1,...,x_n)=g(z_1,...,z_k)=g(p_{j_1}(x_1,...,x_n),....,p_{j_k}(x_1,...,x_n))$$

څرنګه چي د $f(x_1,...,x_n)$ تابع د راستنېدونکي تابع $g(y_1,...,y_k)$څخه د ارتسام د n متحوله تابع $p_{j_1}(x_1,...,x_n)$ د تعویض په نتیجه کي لاسته راځي ، ځکه نو د $f(x_1,...,x_n)$تابع هم راستنېدونکي تابع ده.

q.e.d.

بېلګه1.18.

1) که $g(x_1,x_3)$ ابتدايي راستنېدونکي تابع او $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_3)$ وي، نو د $f(x_1,x_2,x_3)$ تابع هم ابتدايي راستنېدونکی ده. دلته د تېري قضيې سره مطابق $z_1=x_1$ او $z_2=x_3$ سره اېښودلای سو. د x_2 نوی متحول "خيالي متحول " دی او د $g(x_1,x_3)$ تابع پر قيمتو کم تآثير نه ښندي.

2) د متحولو اوښتون. که $g(x_1,x_2,x_3)$ ابتدايي راستنېدونکی تابع وي او $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_3,x_1,x_2)$ ، نو د $f(x_1,x_2,x_3)$ تابع هم ابتدايي راستنېدونکي ده. په تېره قضيه کی $z_2=x_1, z_1=x_3$ او $z_3=x_2$ ايږدو.

3) د متحولو انطباق. که $g(x_1,x_2,x_3)$ ابتدايي راستنېدونکی تابع وي، او $f(x_1,x_2)=g(x_3,x_1,x_2)$ وي، نو د $f(x_1,x_2)$ تابع هم ابتدايي راستنېدونکي ده. په تېره قضيه کي n=2 ، $z_1=z_3=x_1$ او $z_2=x_2$سره ايږدو.

نتيجه 1.18

الف) n متحوله صفري تابع ، يعنی $z(x_1,...,x_n)=0$ ابتدايي راستنېدونکی تابع ده.

ب) n متحوله ثابته تابع ، يعنی $c(x_1,...,x_n)=k$ ، پداسي حال کي چي k ثابت طبيعي عدد دي، ابتدايي راستنېدونکی تابع ده.

ج) د تعويض په قاعده (اصل) کي کيدای سي چي د h_i تابع ته په ځينو ، بلکه نه په ټولو متحولو پراختيا ورکړو. همدا ډول د راستنېدو په قاعده کي د g تابع حتمی نده چي د ټوله د $y, x_n,...,x_1$ متحولونه يا ټوله $f(x_1,...,x_n,y)$ تابع په ځان کی ولري او هم د h تابع حتمی نده چي د ټوله د $y, x_n,...,x_1$ متحولونه او يا ټولي $f(x_1,...,x_n,y)$ تابعګاني په ځان کی ولري.

ثبوت.

الف) د يو متحوله صفري تابع $z(x_1)=0$ څخه به يې راشروع کو. نوموړي تابع د تعريف له مخي پيلوځي تابع ، يعني ابتدايي راستنېدونکي تابع ده. د تېري قضيي پر بنسټ د خيالي متحولو د دخول اجازه لرو، پدي معنی چي $z(x_1,x_2,...,x_n)=0$ هم ابتدايي راستنېدونکي تابع ده.

ب) $c(x_1,...,x_n)=k$ نظر و k ته د رياضي د استقراء په طريقه ثابتوو. که $k=0$ وي ، نو $c_0(x_1,...,x_n)=0$ د الف) د ثبوت له مخي ابتدايي راستنېدونکي ده. فرضووچي د $c_k(x_1,...,x_n)=k$ تابع ابتدايي راستنېدونکي ده. بايد ثابته کو چي $c_{k+1}(x_1,...,x_n)=k+1$ ابتدايي راستنېدونکی تابع ده. خو $c_{k+1}(x_1,...,x_n)=k+1= c_k(x_1,...,x_n)+1=s(c_k(x_1,...,x_n))$ ده او $s(c_k(x_1,...,x_n))$ د تالي د تابع په صفت د پيلوځو تابع ګانو څخه ، يعني ابتدايي راستنېدونکی تابع ده.

ج) د تېري قضيي پر بنسټ هغه متحولونه چي په تابع کی وجود ونلري ، د خيالي متحولو په څېر وراضافه کو ، ځکه نو حتمي نده چي ټوله متحولونه په تابع کي څرګند وي. د بېلګي په ډول که د $g(x_1,x_3)$ ابتدايي راستنېدونکي تابع وي نو د :

$$g_1(x_1,x_2,x_3)= g(x_1,x_3)=g(p_1(x_1,x_2,x_3), p_3(x_1,x_2,x_3))$$

تابع هم ابتدايي راستنېدونکي تابع ده. q.e.d.

قضيه2.18. لاندني تابع ګاني ابتدايي راستنېدونکي تابع ګاني دي:

a) $f(x,y)=x+y;$

b) $f(x,y)=x\cdot y;$

c) $f(x,y)=x^y;$

d) $pd(x)=\begin{cases} x-1 & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$ د$pd(x)$ تابع دسلفpredecessor تابع ده

e) $x \dot{-} y=\begin{cases} x-y & \text{if } x\ge y \\ 0 & \text{if } x<y \end{cases}$

f) $|x-y|=\begin{cases} x-y & \text{if } x\ge y \\ y-x & \text{if } x<y \end{cases}$

g) $sg(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x=0\\ 1 & \text{if } x\neq 0\end{cases}$

h) $\overline{sg}(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x=0\\ 0 & \text{if } x\neq 0\end{cases}$

i) $f(x)=x!$;

j) $f(x,y)=\min(x,y)$

k) $f(x_1,...,x_n)=\min(x_1,...,x_n)$

l) $f(x,y)=\max(x,y)$

m) $f(x_1,...,x_n)=\max(x_1,...,x_n)$

n) rm(x,y)[reminder] د باقي تابع د وېش د y باندی د x پر

o) qt(x,y)[quotient] د ضریب تابع د وېش د y باندی د x پر

ثبوت. د ابتدايي راستنېدونکي تابع د تعريف له مخي بايد ټولو ذکر سووتابع ګانو ته د تابع ګانو لاړ داسي ومومندو ، چي دلاړ هر غړی د تعريف شرطونه پر ځای کي . يا په بل عبارت هڅه کوو چی راکړه سوي تابع ګاني د پيلوځو تابع ګانو او د هغوي د ترکيب په بڼه ارائه کو.زه به دلته يوازي د (a) ثبوت په جزئياتو سره راوړم او هر ګام ته به دليل وليکم. پاته به يی لوستونکوته پرېږدم.

a)

بيا يی هم درپيادوم چي ټوله تابع ګانی عددي تابع ګانې دي ، پدي معنی چي د هغوی د تعريف ساحه د طبيعی عددو سيټ دي.

د راستنېدو د قاعدي له مخي: $f(x,0)=x=p(x)$

دلته د راستنېدو د قاعدي سره موافق زموږ د g(x) تابع د ارتسام p(x) تابع ده چی د پيلوځو تابع ګانو څخه ده. د راستنېدو د قاعدي دوهم جزء :

$$f(x,y+1)=s(f(x,y))$$

د تالي د تابع، چي هغه هم د پيلوځو تابع ګانو څخه ده، په مرسته لاسته راځي.پدي ډول مو د دوو عددو د جمع تابع د پيلوځو تابع ګانو يعنی ارتسام او د تالي تابع په مرسته ارائه کړه.

b) $f(x,y)=x\cdot y$

$f(x,0)=0=z(x)$

$f(x,y+1)=x\cdot(y+1)=x\cdot y+x=h(f(x,y),x)$

پداسي حال کي چي $h(f(x,y),x)$ د جمع تابع ده.په a) کي مو ثابته کړه چي د جمع تابع راستنېدونکی تابع ده، ددي اسیته د ضرب تابع هم راستنېدونکي تابع ده.

c) $f(x,y)=x^y$

$f(x,0)=1$ د ب) جزء ، نتیجه 1.18

$f(x,y+1)=x^{y+1}=x^y\cdot x=h(f(x,y),x)$

پاملرنه وکي چي د $h(f(x,y),x)$ تابع دلته د ضرب تابع ده!!

d) $pd(x)=\begin{cases} x-1 & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$

$pd(0)=0=z(x)$

$pd(x+1)=x=p(x)$

e) $f(x,y)=x\dot{-}y=\begin{cases} x-y & \text{if } x\geq y \\ 0 & \text{if } x<y \end{cases}$

$f(x,0)=0=z(x)$

$f(x,y+1)=pd(x\dot{-}y)$

f) $|x-y|=\begin{cases} x-y & \text{if } x\geq y \\ y-x & \text{if } x<y \end{cases}$

دلته د تعویض د قاعدي څخه تر استفادي وروسته ثبوت د e) وحالت ته راجع کیږي.

$|x-y|=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)$

g) $sg(x)=x\dot{-}pd(x)$

دلته هم د تعویض د قاعدی څخه تر استفادي وروسته ثبوت د e) وحالت ته راجع کیږي.د تمرین په شکل یې جزئیات ولیکي.

h) $\overline{sg}(x)=1-sg(x)$

i) $f(n)=n!$

$f(0)=1$ د ب) جزء ، نتیجه 1.18

$f(y+1)=(y+1)!=(y+1)\cdot y!=(y+1)\cdot f(y)=s(y)\cdot f(y)$

$f(y+1)=h(s(y),f(y))$

د h تابع څه ډول تابع ده؟

j) $\min(x,y)=x\dot{-}(x\dot{-}y)$

k) $\min(x_1,x_2,...,x_n)$

ددوو عنصرو کوچنۍ ترین عنصر مسئله و j) ته راجع کوي. فرضوو چی په تریب سره مو د n عنصرو د کوچني ترین عنصر د راستنېدو مسئله ثابته کړه، بیانو :

$\min(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})=\min(\min(x_1,x_2,...,x_n), x_{n+1})$.

l) $\max(x,y)=y+(x\dot{-}y)$

m) $\max(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})=\max(\max(x_1,x_2,...,x_n), x_{n+1})$.

n) $rm(x,0)=0$

$rm(x,y+1)=s(rm(x,y))\cdot sg(|x-s(rm(x,y))|)$

o) $qt(x,0)=0$

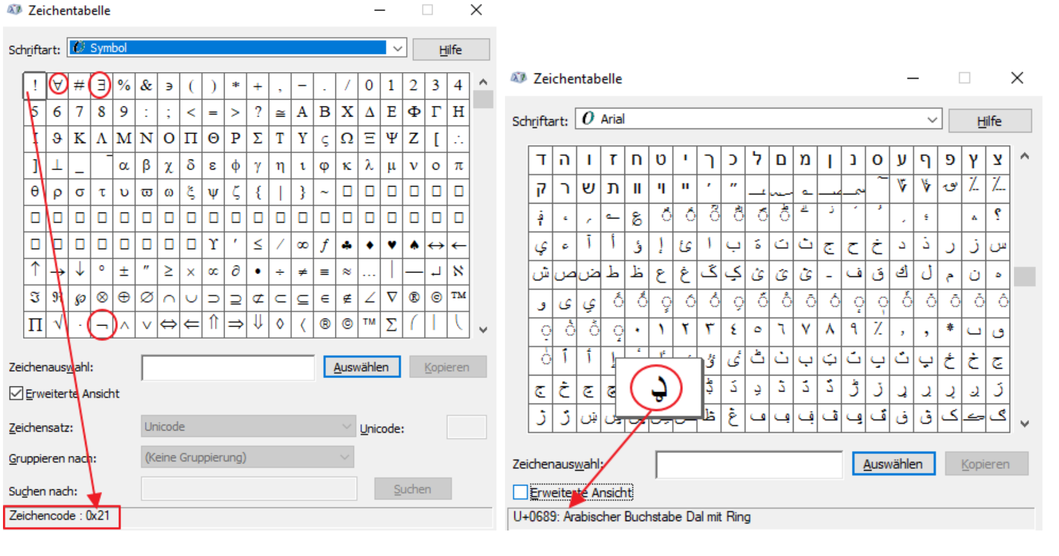
$qt(x,y+1)=qt(x,y)+\overline{sg}(|x-s(rm(x,y))|)$

د n) او o) د ثبوت په پروسه کي پاملرنه وکي، چي که q او r په ترتیب سره پر x باندي د y د وېش په نتیجه کي لاسته راغلی ضریب او باقیمانده وي ، نو $y=qx+r$ او $0\leq r<x$ دي. ځکه نو $y+1=qx+(r+1)$ دی. اوس نو که $r+1<x$ وي(پدي معنی که $|x-s(r(x,y))|>0$ وي) بیا نو د$y+1$ د وېش په نتیجه کي لاسته راغلي $qt(x,y+1)$ ضریب او باقیمانده $rm(x,y+1)$ عبارت دي له q او $r+1$ څخه. که $r+1=x$ وي (پدي معنی که $|x-s(rm(x,y))|=0$ وي) نو $y+1=(q+1)\cdot x$ دي پدي معنی چي $qt(x,y+1)=q+1$ او $rm(x,y+1)=0$ دي.

q.e.d.

د راستنېدونکي تابع ګانو ټولګي د ریاضي په منطق او په خاص ډول د کمپیوټري علومو په برخه کي ډیر مهم رولو لوبوي. د هغوي څېړنه د تېري پېړي په سر کي د اطریشي منطق پوه

کورټ ګدل Kurt Gödel (1906-1978) له خوا د پئانو د عددونو د تیوري د نه بشپړتوب د قضیې د ثبوت په موخه ، چې نن ورځ د ګدل د نه بشپړتوب د قضیو په نامه یادېږي، را پیل سوي دي. د پریدیکات د الجبر پر بنسټ د عددونو تیوري ته فورمالیزیشن یا صوري بڼه ورکړه سوی ده. د ګدل د تیوري د نه بشپړتوب قضیه وايي، چې د $\mathcal{L}$ د ژبې هر فارمول چې په کم مودل کې صدق وکي یعنی رشتیاوی ، نو حتمی نده چې هغه دي د پئانو په اریتمتیک کې د ثبوت وړ هم وي، حتی که د پئانو اریتمتیک ته داسي پراختیا ورکړو ، چې نوموړي فارمول وراضافه کو ، که څه هم پراخه سوی تیوري به تناقض ونلري ، خو د فارمول او دهغه د نفي د ثبوت موجودیت څوک نسي تضمینولای، پدي حالت کې د تیوري د نه فیصله کیدلو Undecidability په هکله ږغیږو . ګدل د پریدیکات الجبر او دهغه پر بنسټ د پئانو د عددنو تیوري د عددنو د شفر په ذریعه ارائه کړه ، د بېلګي په ډول د 2.17 لیما ثبوت وګوري، د هري نبني څخه نیولي تر اکسیومو او فارمولو پوري ټولو ته عددي شفر کښېښودي. د شفر اېښودل د فارمول د شمیرني سره مطابقت کوي پدي معنی کله چې موږ د تیوري سنتکس یا جوله د شمیرني په چوکاټ کې راوړو، نود هر فارمول په مقابل کې باید یوازي او یوازي یو عدد کښېښودل سي.دغه عملیې ته و فارمول ته عدد اېښودل یا Numbering وایو. ددي دپاره چې د موضوع تصور وکولای سي نو په کمپیوټر کې د مایکروسافټ په ویندوز کې د نښو و جدول ته چې د لوازمو accessories په جعبه(دوسیه؟) کې پروت دي، پاملرنه وکي.



دلته هري نښي ته د هغه د 16 پر بنسټ عدد اينودل سوی دي. د بېلګي په ډول د ∀ قيمت 0x22 او د ∃ قيمت 0x24 دي.

د OS X په سيستم کي د بېلګي په ډول د ∃xx=x دپاره کله چي لاندني امر (قومانده) ورکړی:

```
echo –n "∃xx=x" | iconv –t UTF-16 | hexdump
```

لاندی قيمت به درته درکړي:

$$\underbrace{\text{FE}\quad\text{FF}}_{\text{Header}}\ \ \underbrace{\text{24 00}}_{\exists}\ \underbrace{\text{00 78}}_{x}\ \ \underbrace{\text{00 78}}_{x}\ \ \underbrace{\text{00 3D}}_{=}\ \ \underbrace{\text{00 78}}_{x}$$

د پورتنيو موضوعاتو د جزئياتو په هکله ستاسو پاملرنه و [8],[10], [11], [16] را ګرځوم.

§19. د تيورينګ ماشينونه Turing Machines.

دمخه تر دي چي د تيورينګ د ماشينو د زېږېدني او د هغه د خاصيتو او وظيفو په هکله وړ.غېږو، لمړی به هڅه وکم چي په پښتو کي د يوه مفهوم په هکله د سوء تفاهم مخه ونيسم. هغه د "شمېرووړCountable" او د" شمېرنې وړComputable" مفهومونه دي. د "شمېر وړ" د مفهوم څخه مي د سيټ په تيوري کي کار اخيستي دی، اود هر سيټ دپاره چي د طبيعي عددو د سيټ څخه پر نوموړي سيټ باندي مپينګ وجود ودرلودی ، نو هغه سيټ به مو د شمېر وړ باله. د "شمېرنې وړ" د مفهوم څخه د ماشين په اړوند کاراخلم.پدي معنی کله چي وايم ، فارمول د شمېرنې وړ دي، نو موخه مي الګوريتمي ده. کله چي وايم فارمول د شمېرنې وړ دي نو موخه مي د الګوريتم، کمپيوټري پروګرام ، نسخي او يا کړنلاري موجوديت دی، چي د هغه د تعقيب په نتيجه کي د راکړه سوی فارمول "حل" لاسته راځي. د بېلګي په ډول کله چي وايم 2+3=5 کېږي ، نو يوه لار يې دغه ده چي دوی ګوتې او دري ګوتې په نښه کوم چي دهغوی د يو ځای کېدو په نتيجه کي 5 لاسته راځي. ځکه نو وايم چي نوموړي افاده د شمېرنې وړده. ياته دي نه وي چي د شمېرنې وړ مفهوم د رياضي په منطق کي د کمپيوټر تر اختراع او تکامل څخه ډېر مخکي وجود درلودی .فکر کوم بې ځايه به نه وي چي د الګوريتم کلمي ته يو لنډ نظر

واچوو. د الګوریتم کلمه اصلاً د محمد ابن موسی الخوارزمي څخه اخیستل سویده . په نهمه عیسوی پېړي کي الخوارزمي لمړنی ریاضي پوه ؤ چي د هند د ریاضیاتو پر بنسټ یې په حساب Arithmetics کي د معادلو د حل دپاره، په خپل کتاب الجبر المقابله کي ، طریقي لیکلی وي. کله چي د هغه کتاب د امویانو په وخت کي اروپا ته راغي نو هغه طریقي د الخوارزمي د طریقو په نامه ویادیدي. د وخت په تېریدو سره د الخوارزمي د کلمي څخه الګوریتم Algorithmجوړ سو.

موږ دلته د الګوریتم مفهوم د هر پرابلم د شمېرني یا حل د کړنلاري په صفت تعریفوو. منتهی باید ددی حقیقت یادونه هم وکم چي د کړنلاری د طرحي په نتیجه کي حتمی نده چي هر پرابلم دی حل او یا د هغه د شمېرني یا نه شمېرنی پوښتني ته دي جواب ورکړه سي. د بله پلوه که د شمېرني کمه کړنلاره طرح سي نو دهغه مغلق والی Complexity په لمړي ګام کي موږ ته په زړه پوري ندي. د الګوریتمو د مغلق والي پالنه د نورو تیوری ګانو دنده ده.

لکه مخکي چي مو اشاره ورته وکړه د تامو عددو د شمېرني د عملیو، یعنی جمع ، تفریق، ضرب او وېش د ساده الګوریتمو ښي بېلګي دي.د ریاضي په منطق کي د جدول په ذریعه د بیان د تاوتولوجي د موندلو پروسه هم د الګوریتم یوه بېلګه ده.د ریاضي د مسئلو په حل کي اکثراً په اساني سره لیدل کېږي ، چي آیا مشخصه پروسه یا کړنلاره په رشتیا هم د غوښتني وړ الګوریتم دی اوکه نه ؟ ځکه چي د د ریاضي د مسئلو په تولګې کی داسي مسئلي هم سته چي هغوی الګورتمي بڼه نلري، د بېلګي په ډول :

الف) هغه قضیې چي په غېر مستقیم ډول ثابتېږي: آیا د پریدیکات د الجبر راکړه سوي فارمول صدق کوي ؟ یا د عددنو په تیوري کي راکړه سوی فارمول حقیقت لري؟

ب) آیا د عددنو د تیوري راکړه سوي فارمول د عددنو په تیوري کي د ثبوت وړ دی اوکه نه؟

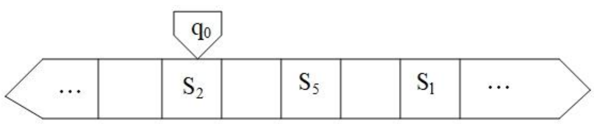
ج) آیا د تامو عددو پر سیټ باندي راکړه سوی پولینوم $f(x_1,...,x_n)$ چي ضریبونه یي تام عددونه وي، د تام عدد جذر لري او که نه ؟ نوموړي مسئله د هلبرت David Hilbert(1862-1943) د لسم پرابلم په نامه هم یادیږي.

ددي دپاره چي د کومي مسئلي په هکله د الګوریتم عدم موجودیت ثابت کو، نولمړی لازمه دي چي د الګوریتم مفهوم په دقیقه توګه تعریف کو. پدي اړوند یو دبل څخه بېل د هغه وخت درياضي د منطق د تکړه څېړونکو ، امریکایې ریاضي پوه الونزو چرچ Alonzo

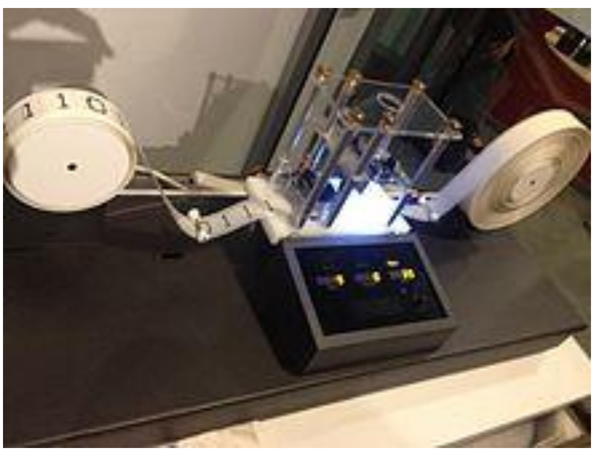
(1903-1995) Church ، پولینډي/ امریکایي ریاضي پوه ایمیل پوست (1897-1954) Emil Post او انګلیسي ریاضي پوه الان تیورینګ Alan Turing(1912-1954) د خپلو څېړنو نتیجې و نشر ته وسپارلې. د درو سرو تعریف د الګوریتم په هکله او دهغه په اړوند د نورو نتیجو معادلیت وروسته ثابت سوی دی.

لکه چې د موضوع د عنوان څخه څرګنده ده ، موږ به دلته د تیورینګ کړنلاره وټاکو.

لمړی به د ریاضي د منطق په مفهوم د الګوریتم د دقیق تعریف دپاره هغه شیان او وسایل چې په لاس کې لرو معرفی کو. د الګوریتم د پاره د متناهي الفباء نښې $A=\{S_0, S_1, ..., S_n\}$ رااخلو، چې ماشین یې چاپولای سي.د $q_0,q_1, ... ,q_m$ د نښوښخه د ماشین د داخلي حالت Internal State د ارائې دپاره کاراخلو. ښی او کیڼ لورته لایتناهي پټه(پیته) Tape لرو چې په مربع شکله حجرو باندي وېشل سوي ده:



شکل 1.19.



شکل 2.19 د تیورینګ د ماشین مودل[27]

هره حجره یوازی او یوازی په یوه وخت کې یوه نښه احتوا کولای سي. پاملرنه وکې چې، که څه هم موږ لایتناهي پټه په اختیار کې لرو ، خوپه معین وخت کې د شمېرنې د پاره د پټی

[27] مآخذ. https://en.wikipedia.org/wiki/Turing_machine

متناهی ټوټه په لاس کي لرو. لايتناهي پدي معنی دی ، چي موږ هروخت کولای سو د ضرورت له مخي حجرې په ښي او کيڼ لور کي اضافه کړو. علاوه پر الفباء او پټۍ ماشين يوه وسيله (نوک ، سر) لري چي په حجره کي دنښو د لوستلو، ليکلو استعداد لري او په يوه شېبه کي د حجري ښئ لور R(Right) يا د حجری کيڼ لور L(Left) خوځيدلای سي .

د A د نښو يا الفباء لاړ په A کي د لغات په نامه يادوو. خالی لغات هغه لغات دی، چي هيڅ نښه ونلری . که PQ زموږ په ژبه کي لغات وی، نو د Q لغات د P د لغات و ښي لورته موقعيت لری. د هر تام عدد k دپاره P^k پدي معنی دی چی د P لغات k– ځلې ځنګ پر ځنګ ليکل سوی دی. د پټۍ حجره امکان لری چي خالی هم وي. د موقعيت يا حالت او وخت پر مفهومو باندي بياهم ټينګار کوم او زموږ د کار په پروسه کي ډير مهم رول لوبوي. د خالي حجري محتوی په S_0 سره ښيو. پدی ډول د S_0 دنده مشخصه ده. وروسته به يې په B(Blank) په توری هم ارائه کو، پدي معنی چي د S_0 او B ځځه په عين مفهوم کاراخلو.

تعريف 1.19. د تيورينګ د ماشين افاده د $q_0,q_1,q_2,....;S_0,S_1,S_2, ...;R,L$ د نښو لاړ دی. د تيورينګ د ماشين افاده ممکن خالی لاړ هم وي، يعنی هيڅ نښه په ځان کي ونلری.

د پټۍ حالت په ټاکلي وخت کي دتيورينګ د ماشين د افادی په ذريعه تعينيږي. د بېلګي په ډول په 1.19 شکل کي پټه د $q_0S_2S_0S_5S_0S_1$ په حالت کي ده. زموږ په څېړنو کي د يو بعدی پټۍ ځخه کار اخيستل پدي مفهوم ندي چي موږ د دوه بعدي پټۍ ځخه کار نسو اخيستلای.

نوټ. د دوو مسئلو و څرګندولو ته دلته اشاره کوم. لمړی داچي زموږ الفباء کيدای سي متناهي نه وي ، يعنی لايتناهي $\{S_0,S_1,...\}$ خو د شمېر وړ وي. په هغه حالت کي و الفباء ته د $\{b,*\}$ الفباء ته داسي رجعت ورکوو ، چی د زړي الفباء د S_n نماينده ګی به $b^*...*$ کوي پداسي حال کي د ستوروشمېر به تر b وروسته پوره n وي.

دوهم د يو بعدي او دوه بعدی پټۍ مسئله ده . موږ کولای سو عملاً د طبيعی عددو او د طبيعی عددو د جوړو ترمنځ يو په يو اړيکه ټينګه کو، ځکه نو ښېله کومي ستونځي ځخه خپلي څېړنی و دوه بعدی پټۍ ته پراختيا ورکولای سو.

زموږ د شمېرني وسيله (آله) چي په راتلونکي کي به يې د تيورينګ د ماشين په نامه يادکو، داسي کار کوي. ماشين په ځانګړی شيبه کي کارکوی. پدي معنی چي ماشين متوصل کار نه کوي(متواتر کارکوي خو متوصل نه) . لکه مخکی چي مو اشاره ورته وکړه ، ماشين

د لوستلو نوک یا سر لري چي په راکړه سوی شېبه کي د پټۍ د یوی حجري محتوی لمس (ځېر) کولای سي او وروسته له هغه د لاندنیو څلورو عملیو څخه یوه عملیه سرته رسولای سي:

1. د حجري مخکنی محتوی پاکوی او نوي نښه پکښي لیکي.

2. د ښي لاس و ګاونډی حجری ته خوځېږي.

3. د کیڼ لاس و ګاونډي حجري ته خو ځېږي.

4. دربېږي (stop) .

پاملرنه وکي چي ماشین ګام پر ګام کار کوي، خو ټوپ نه وهي. د ماشین د شمېرني پروسه یوازي د حجري په لمس (ځېر ولو) اړه نلري، بلکه په راکړه سوي شېبه کي د هغه په داخلي حالت (internal state) او د ماشین په ساختمان هم اړه لري،چي هغه د شمېرنې د مخکني ګام او قوماندی یا امر تابع دي. فرضوو چي ماشین یوازي متناهی داخلی حالتونه لري، چي په $\{q_0,q_1,...,q_m\}$ سره یې ښیو . د ماشین پیلوځي حالت initial state په q_0 سره ښیو.

په شمېرنه کي هر ګام د څلوریزی[28]په بڼه افاده کېږي، چی د لاندنیو درو بڼو څخه به یوه بڼه لري:

$$\begin{cases} 1)\ \ q_j S_i S_k q_r \\ 2)\ \ q_j S_i R q_r \\ 3)\ \ q_j S_i L q_r \end{cases} \qquad (1.19)$$

په درو سره حالتو کي q_j حاضر داخلی حالت ښیې، S_i په حاضر حالت کي لمس سوي نښه او q_r تر عملیې وروسته دننئ حالت دی. د څلوریزي په لمړي بڼه کي ماشین د S_i نښه پاکوي او پر ځای یې د S_k نښه لیکي. په دو همه بڼه کی د ماشین نوک د S_i نښه لمسوي او و ښئ حجري ته خوځېږي او په دریمه بڼه کي د ماشین نوک د S_i نښه لمسوي او وکیڼي حجري ته خوځېږي. پدي هکله چي ماشین څه وخت دریږي ، وروسته به وږ غېږو.

اوس نو کولای سو، چی د تیورینګ ماشین په دقیق ډول تعریف کو.

تعریف 2.19. د A د الفباء په سیټ کي پر پیته باندي د $\{S_0,S_1, ... , S_n\}$ نښې او د $\{q_0,q_1, ... ,q_m\}$ دنني حالتونه راکړه سوی دي.

---

[28] د څلوریزي څخه مي هدف د نښو څلوررقمه افاده ده ، نه شعري څلوریزه یا رباعی!

د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د (1.19) په ځير د ځلوريزو داسي متناهي سيټ دي چي په هغه کي دهيڅ دوو ځلوريزو لمړي دوی نښي تطابق نه کوي.

د دوو لمړيو نښوعدم تطابق موږ ته د ماشين د ضد او نقيضو عمليو د نه عملی کولو ژمنه راکوي. يا په بله اصطلاح موږ ته د شمېرني عدم تناقض تضمينوي.

بېلګه 1.19. لاندني دوي ځلوريزې د تيورينګ د ماشين يوه بېلګه ده:

$$q_0\ S_1\ L\ q_1$$

$$q_1\ S_0\ S_1\ q_2$$

ماشين په پيلوځي حالت q_0 کي د S_1 نښه لمس کوي (ځېري) ، د لوستلو نوک و کينې حجري ته خوځوي او داخلي حالت و q_1 ته اړوي. ځرنګه چي د q_1 په حالت کي حجره خالی ده، نو ددوهمي ځلوريزي د قوماندی پر بنسټ په خالی حجره کي د S_1 نښه ليکي او د ماشين داخلي حالت و q_2 اوړي.ځرنګه چي د q_2 په حالت کي بله قومانده يا امر وجود نلري، نو ماشين دربېږي. څه فکر کوي ، په نتيجه کي به د ماشين پر پټی څو داني S_1 ولرو؟

بېلګه 2.19. که په تېره بېلګه پوهيدلي ياست ، نو د تيورينګ لاندنی ماشين څه کوی؟

$$q_0\ S_1\ L\ q_1$$

$$q_1\ S_0\ S_1\ q_0$$

د تيورينګ پورتنی ماشين څه وخت دربېږي؟

د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ په پرله پسي ډول په سيټ کي راکړه سوي ځلوريزي عملی کوي. ددي دپاره چي د تيورينګ د ماشين په هکله زموږ په تصور کي د ولاړ يا غير متحرک تصوير په متحرک تصوير واړوو ، نو بايد د تيورينګ د ماشين افاده موږته لاندني معلومات راکړي:

الف) پر پټی باندی افاده.

ب) داخلی حالت.

ج) هغه حجره چي ځېروی يې.

تعريف 3.19. د i په شېبه کي د تيورينګ د ماشين شېبوي ارائه instantaneous description د تيورينګ د ماشين داسي افاده ده ، چي هيڅ R او L په ځان کي نلري(يعنی

د خوځېدو قومانده نلرى) او يوازي او يوازي يو q_i به پداسي ډول په ځان كي لرى چي هغه د كيڼي خوا څخه د افادي وروستي نښه نه وي.

د تيورينګ د ماشين شېبوي ارائه به په يوناني الفباء ، يعني $\alpha,\beta,\gamma,...$ سره ښيو.

تعريف 4.19. هره افاده چي يوازي د S_i د نښي څخه تشكيله سوى وي، د پټى د افادي په نامه ياديږي.

تعريف 5.19. فرضوو چي$\mathcal{T}$ د تيورينګ ماشين او α د تيورينګ د ماشين شېبوي ارائه ده ، پداسي حال كي چي q_i يې داخلي حالت او S_j د پټي پر مخ هغه نښه ده چي بلافاصله د q_i و ښي لاس ته ځاى پر ځاى وي. په دغه حالت كي q_i د α په شېبوي ارائه كي د تيورينګ د ماشين$\mathcal{T}$ د شېبوي حالت په نامه يادوو.او وايو چي د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ په α كي د S_j نښه ځېروى. د پټى افاده چي د α څخه د q_i د ليرى كېدو په نتيجه كي لاسته راځي ،پر پټى باندى په α كي د تيورينګ د ماشين$\mathcal{T}$ د افادي په نامه يادوو.

لاندنۍ تعريف دتيورينګ د ماشين شېبوي ارائه چي دهغي په تعقيب شېبوي ارائي ، پدي معنى چي د $i+1$ په شېبه كي، باندى تعويض كېږي، په دقيق ډول فورمولبندي كوي.په تعريف كي د P او Q افادي امكان لري، چي خالي افادي هم وي.

تعريف 6.19. فرضوو چي د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ راكړه سوى دي، α او β د نوموړي ماشين شېبوي ارائې دي. بيانو $\alpha\rightarrow\beta(\mathcal{T})$ (كه سوء تفاهم رانسي ،نو نيغ $\alpha\rightarrow\beta$) ليكو، بداسي حالت كي چي د لاندنيو حالتو څخه يو حالت رامنځ ته سي:

(1)د P او Q افادي داسي وجود لري، چي :

$\alpha: \quad Pq_iS_jQ$

$\beta: \quad Pq_lS_kQ$

او د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د $q_iS_jS_kq_l$ افاده په ځان كي لري.

(2)د P او Q افادي داسي وجود لري، چي :

$\alpha: \quad Pq_iS_jS_kQ$

$\beta: \quad PS_jq_lS_kQ$

او د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د $q_iS_jRq_l$ افاده په ځان كي لري.

(3)د P افاده داسي وجود لري، چي :

α: Pq_iS_j

β: $PS_jq_lS_0$

او د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د $q_iS_jRq_l$ افاده په ځان کي لري.

(4)د P او Q افادي داسي وجود لري، چي :

α: $PS_kq_iS_jQ$

β: $Pq_lS_kS_jQ$

او د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د $q_iS_jLq_l$ افاده په ځان کي لري.

(5)د Q افاده داسي وجود لري، چي :

α: q_iS_jQ

β: $q_lS_0S_jQ$

او د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ د $q_iS_jLq_l$ افاده په ځان کي لري.

بياهم يادونه کوم چي په تعريف کي د P او Q افادي امکان لرى چي دواړه خالي او يا يوه دهغو څخه خالی افاده وي. د 6.19 د تعريف څخه مستقيم لاندنی قضيي استنباط کيږي.

قضيه 1.19. که $\alpha\to\beta(\mathcal{T})$ او $\alpha\to\gamma(\mathcal{T})$ وي ، نو $\beta=\gamma$ ده.

قضيه 2.19. که$\mathcal{T}$ او$\mathcal{T}'$ دوه داسي د تيورينګ ماشينونه وي، چی$\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$ وي ، بيانو د $\alpha\to\beta(\mathcal{T})$ څخه $\alpha\to\beta(\mathcal{T}')$ استنباط کيږي.

تعريف 7.19. د α شېبوي ارائه نظر د تيورينګ و ماشين$\mathcal{T}$ ته د وروستني Terminal ارائي په نامه ياديږي، که د β داسي ارائه وجود ونلري، چي $\alpha\to\beta(\mathcal{T})$ وي.

تعريف 8.19. د تيورينګ د ماشين$\mathcal{T}$ شمېرنه Computation د تيورينګ د ماشين د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ شېبوي ارائو د لاړ څخه عبارت دي، پداسي ډول چي د هر i ، $1\leqq i<p$ دپاره $\alpha_i\to\alpha_{i+1}(\mathcal{T})$ او α_p د تيورينګ د ماشين وروستني ارائه ده. پدي حالت کي $\alpha_p=Res_{\mathcal{T}}(\alpha_1)$ ليکو او وايو چي α_p د تيورينګ د ماشين$\mathcal{T}$ د شمېرني نتيجه Resultant ده.

بېلګه 3.19. د تيورينګ ماشين$\mathcal{T}$ په لاندی ډول سره راکړه سوی دي:

$\mathcal{T}$: $q_1S_0Rq_1$

$q_1S_2\ Rq_1$

$q_1S_5\ Rq_1$

$q_1S_3\ S_5q_2$

$q_2S_5\ Lq_3$

$q_2S_0\ S_5q_3$

$q_3S_2\ S_5q_3$

$q_3S_3\ S_5q_3$

د تیورینګ راکړه سوي ماشین د q_1, q_2, q_3 داخلي حالتونه او د S_0, S_2, S_3, S_5 پر الفباء باندي تعریف سوی دي. پر پټه باندي د $S_2q_1S_0S_5S_3$ افاده راکړه سوی ده ، چي باید وشمېرل سي. یعنی $Res(S_2q_1S_0S_5S_3)=?$. څرنګه چي په موضوع کي سوء تفاهم نه راځي، نو د $\mathscr{T}$ د لیکلو څخه تېرېږو.زموږ د مسئلي پیلوځي حالت $S_2q_1S_0S_5S_3$ دی.

د لمړی قوماندي پر بنسټ د ماشین نوک باید یو حجره و ښي لاس ته و خوځېږي او خپل داخلي حالت ته تغیر ورنه کړي، پدي معنی : $S_2q_1S_0S_5S_3 \rightarrow S_2S_0q_1S_5S_3$

د لمړي عملیې په نتیجه کي د ماشین نوک د S_5 نښه څېروي او ددریمي قوماندي له مخي باید بیاهم یو حجره و ښي لورته و خو ځېږي، چي په نتیجه کي یې د $S_2S_0S_5q_1S_3$ لاسته راځي. د څلرمي قوماندي له مخي که د q_1 په داخلي حالت کي د ماشین نوک پر S_3 برابر سي ، نو S_3 باید پاک، پر ځای یې په هغه حجره کي S_5 ولیکي او خپل داخلی حالت د q_1 و q_2 واړوي. په نتیجه کي د $S_2S_0S_5q_2S_5$ افاده لاسته راځي. نور استدلال یې د تمرین په څېر تعقیب کي. زه به یې دلته د شروع څخه لاړ په ښه راوړم:

$$
\begin{aligned}
S_2q_1S_0S_5S_3 &\rightarrow S_2S_0q_1S_5S_3\\
&\rightarrow S_2S_0S_5q_1S_3\\
&\rightarrow S_2S_0S_5q_2S_5\\
&\rightarrow S_2S_0q_3S_5S_5
\end{aligned}
$$

څرنګه چي زموږ د قوماندو په سیټ کي د q_3S_5 دپاره کمه قومانده وجود نلري، نو ماشین درېږي. پدي ډول : $Res(S_2q_1S_0S_5S_3)= S_2S_0q_3S_5S_5$ ■

په همدي بېلګه کې که پېلوځي حالت q_1S_3 وي ، نو د تيورينګ د ماشين شمېرنه به په لاندي ډول وي:

$$q_1S_3 \rightarrow q_2S_5$$
$$\rightarrow q_3S_0S_5$$
$$\rightarrow q_3S_5S_5$$

پدی معنی ، چي $Res(q_1S_3)= q_3S_5S_5$ دی. ■

څه فکر کوي ، که د 3.19 بېلګي د تيورينګ په ماشين کي پېلوځي حالت $\alpha_1=S_2q_1S_0S_5S_2$ وي ، نود تيورينګ د ماشين شمېرنه به څه ډول بڼه ولري ؟ د خپلو څېړنو نتيجه د 2.19 بېلګي سره پرتله کئ.

راسي يوه بله لوبه وکو. زموږ الفباء يوازي دوي نښي لري،هغه عبارت دي له B د خالی حجري دپاره اوعمودی کرښه | د عدد د ارائې دپاره ، يعنی {|,B}. پدي ډول د تيورينګ ماشين په هره حجره کي يو عمودي کرښه رسموي . په دغه الفباء کي هر طبيعي عدد k د k+1 ځلې د | د ليکلو په ذريعه ارائه کوو. k+1 ځلې ځکه چي صفر هم په نظر کي نيسو. د تيورينګ د ماشين داخلي حالت د پخوا په شان په q_3,q_2,q_1,q_0... باندي ښيو. نظر زموږ و قرارداد ته | =0 ، || =1 ، ||| =2 او داسي نور . اوس نو د 1.19 بېلګي د تيورينګ ماشين زموږ په نوي ژبه کي ژباړو.

بېلګه 4.19. لاندنۍ د تيورينګ ماشين په نظر کي نيسو:

q_0 | L q_1

q_1 B | q_2

شکل2.19.

دراکړه سوی د تيورينګ ماشين پېلوځي حالت پر لمړني عمودي کرښه ولاړ دي. د لمړی قوماندي پر بنسټ بايد ماشين و کيڼې حجري ته و خوځېږي او خپل داخلی حالت د q_0 څخه و

q_1 ته واړوي. د q_1 په حالت کي باید په خالی حجره کي عمودي کرښه رسم او داخلي حالت و q_2 ته واړوي. څرنګه چي د q_2 د حالت دپاره قومانده نلرو ، نو ماشین دریږي. پدي ډول مو د نوموړي ماشین په ذریعه دتالی $s(x)=x+1$ پیلوځي تابع (1.18 تعریف وګوری) وشمېرله.

بېلګه 5.19. صفري تابع چی د پیلوځو تابع ګانو څخه ده د لاندنې ماشین په ذریعه شمېرل کېدای سي:

$q_0|Bq_1$

q_1BRq_0

$q_0B|q_2$

په §§18-19 کی تاسوته ځیني بنسټیزې وسیلې او مفهومونه در وپېژندل سول. ددی دپاره چي ذکر سوي مفهومونه او وسیلې مجردي پاته نسی، غواړم په لنډ ډ ول ستاسو پاملرنه د هغوی و عملی اړخ ته راګرځوم. د موضوع ژوره څېړنه ددی کتاب د چوکاټ څخه وزي.

د الونزو چرچ او الان تیورینګ فرضیه د پردیکات د الجبر په هکله نه فیصله کېدونکي ده. پدي معنی چی داسي پروسه(الګوریتم، پروګرام) وجود نلري چي د پردیکات په الجبر کي دهري ادعا د صدق کولو (د ثبوت د ورتوب) په هکله دي فیصله وکي. د ادعا د صدق کولو اود ادعا د ثبوت د ورتوب مسئله د ستنیدونکو تابعګانو د شمېر ورتوب او دشمېرني دپاره يې د تیورینګ د ماشین موجودیت او دهغه په ذریعه د هغوی شمېرني ته راجع کېږي. د کلینی د کتاب [9] په دیرشمه قضیه کي وایي چي د ابتدائي ستنېدونکې تابع ګانو او د شمېر وړ تابع ګانو ټولګي سره مساوی دي، پدي معنی چي دواړه ټولګي عیني تابع ګانی احتوا کوي. پدي معنی هغه نتیجې چي د ستنېدونکي تابع ګانو په ذریعه لا سته راوړلای سو ، دهغوی دپاره هم د تیورینګ ماشین وجود لري ، چی هغوی شمېرلای سي.

تیورینګ په خپلو څېړنو کي (1936) بل ګام هم مخ ته ولاړي او د عمومی ماشین Universal Turing Machine طرح يې وړاندي کړه. پدي طرحه کي ماشینونه یوازي شمېرني نه کوي ، بلکه د تیورینګ نور ماشینونه تحلیلولای سي.که M د تیورینګ د ماشینو څخه یو ماشین وي ، U د تیورینګ عمومي یا یونیورسال ماشین وي بیانو که M د U په ماشین کي د ابینودلو (دخولي) قیمت په صفت ورځرمه کو، نو د U ماشین کټ مټ د M د ماشین په

ځېر عمل کوي او په پای کي ، که ماشين ودرېږي، هغه نتيجه چي لاسته راځي د M د ماشين دعمليو نتيجه به وي. په بله اصطلاح د هغي تابع قيمت به وي چي د M ماشين يې شمېري.

تمرين 1.19.

الف) د تيورينګ لاندنی ماشين د $f(x_1,x_2,x_3)$ څه ډول تابع شمېري؟

$q_0||q_1$, $q_1|Bq_0$, q_0BRq_1 , q_1BRq_2 ,

$q_2|Rq_2$, q_2BRq_3 , $q_3|Bq_4$, q_4BRq_3

ب) د تيورينګ لاندنی ماشين د $f(x)$ څه ډول تابع شمېري؟

$q_0|Bq_1$, q_1BRq_2 , $q_2B|q_2$

ج) د پېلوځي تابع $p_2(x_1,x_2)=x_2$ (د ارتسام دوه متحوله تابع) دپاره د تيورينګ ماشين وليکی.

د) دتيورينګ لاندنی ماشين تحليل کي.

$q_0||q_1$, $q_1|Bq_0$, q_0BRq_1 , q_1BRq_2 ,

$q_2|Rq_2$, q_2BRq_3 , $q_3|Bq_4$, q_1BRq_3

ځلرم فصل

شرطي یا وجهي منطق Modal Logic

لمړي فصل مو د بیان په مفهوم راشروع پر بیانو باندي عملیې او د هغه خاصیتونه مو و څېړل. ژر ځرګنده سوه چي د عمومي او موجودي کوانتیفیکاتور د نشته والي په نتیجه کي د ریاضي ډېري قضیې او د ورځني ژوند ډېري جملي نسو فورمولبندي کولای. دعلومو پرمخ تګ او په عین حال کي د فلسفي او ریاضي موازي څېړنو په ریاضي کي د فلسفي مقولو یا کته ګوریو، لکه ضرورت او امکان، علت او معلول، کمیت او کیفیت، ... اوداسي نورو د ارائې د ضرورت جبر تائید کی.

د بېلګي په ډول "ناممکنه ده، چی ژوندی مخلوقات دي اور تحمل کړای سي"، " امکان لری، چي ننګرهار به د افغانستان پلازمینه وي"، " کابل هرومرو د افغانستان پلازمینه ده"، "ضرور دی ، چي هر شئ د خپل ځان سره برابر دي"، " ریدی پو هېږي، چي ماسکو د روسیې پلازمینه ده" ، " اتل باور لري، چی د ډیري ښی مېرمني د ژوند ملګری دی"، " ضرور دی، چي دترافیک سري اشاری ته ودرېږي"، "ریدی غواړي تل د توريپیکې سره مینه ولري.". په نوموړو بیانو کي حالت یا وضعیت د هغه بیان وځنګ ته چي موږ په لمړي فصل کي ورسره بوخت وو، افاده سوی دي.

مودال Modal ، شرطي یا وجهي بیان هغه افاده ده ، چي په هغه کي د ضرورت او امکان کته ګورې Categories او یا د هغوی معادل را ځرګندېږي.پدي معنی د هغو بیانو د رشتیاوالي یا درواغوالي په هکله قضاوت کوو ، چي په هغه کی د ضرورت او امکان مفهومونه را ځرګند سي.په دقیق ډول ویلای سو، چي په شرطي منطق Modal Logic کي د "دا ضرور دی، چي..." ، " دا امکان لري، چي ..." ډوله افادو د استنباط طریقي څېړو.

شرطي منطق، د بېلګي په ډول، په مصنوعي ځیرکتوب Artificial Intelegance ، د پروګرامو په منطق Logics of Programms او د خپاره سوو یا تیت سوو سیستمو په تحلیل او تجزیه کي Analysis of Distributed Systems په کار اچول کېږي.

20§. د شرطي بيان الجبر

د بيان د الجبر په ژبه کي مو $\mathfrak{L}=< a,b,c,...,0,1,(,), \neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow >$ د بيانو د په نښه کولو دپاره حروف يا توري درلوده، "0" او "1" د ثابت په څېر د رشتيا او درواغ دپاره ټاکلي وه، قوسونه د بيانود ترکيب په موخه وه او بلاخره پر بيانو باندي د عمليو نښي راکړه سوی وي. د بيان د الجبر د ژبي د پراختيا په نتيجه کي:

$$\mathfrak{L}=\langle P,Q,R,...,a,b,c,...f,g,h,...,x_1,x_2,x_3,...,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\forall,\exists,(,)\rangle$$

د پريديکات د الجبر ژبه در وپيژندله. د نښو د تعبير دپاره بيرته دوهم فصل ته مراجعه وکي. نوموړي ژبي ته دوي نښي ور اضافه کوو، هغه عبارت دي له □ او ◊ ، يعنی:

$$\mathfrak{L}=\langle P,Q,R,...,a,b,c,...f,g,h,...,x_1,x_2,x_3,...,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\forall,\exists,(,),\Box,\Diamond\rangle$$

ممکن اټکل يې وکړای سي، چي نوي نښې د ضرورت او امکان د مفهومونمايندە ګي کوي. که A بيان وي، نو A □ په لاندي ډول لوستل کېږي:

د A بيان ضروردی چي رشتيا به وي.

د A بيان ارومرو رشتيا دی.

د A بيان تل رشتيا دي.

د A بيان معلومه ده چي رشتيا دي.

باور لرو چي د A بيان رشتيا دي.

که A بيان وي ، نود ◊A افاده داسي لوستلای سو:

امکان لري چی د A بيان به رشتيا وي.

د A بيان کله کله به رشتيا وي.

نامعلومه ده چي د A بيان به رشتيا وي.

باور نلرم چي د A بيان به رشتيا وي.

دلته وضعي يا شرطي عمليې ، بيان په معين وضعيت اويا معين حالت کي ارائه کوي.

موږ به دلته يوازي د شرطي منطق د بيان د الجبر په بنسټېزو بسنه وکو.ددی دپاره د بيان د الجبر ژبه به راواخلو او په هغه کي به د 0 او 1 ثابتونه په false او true سره ارائه او د ضرورت او امکان په يوه ئېزو عمليو به پراختيا ورکړو، پدي معنی چي:

$$\mathfrak{L}=\langle a,b,c,...,false,true,(,), \neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\Box,\Diamond\rangle$$

زموږ څېړنه د پراخه لاسه ده. په اکثرو کتابو کي په :

$$\mathfrak{L}=\langle a,b,c,...,false,(,), \neg,\wedge,,\Diamond\rangle$$

بسنه کوي، ځکه چي حذف سوی عمليې او ثابت د راکړه سوو عمليو او ثابت په مرسته تعريفولای سو. د بېلګي په ډول ¬false ، true دي. يعنی د درواغو نفي رشتيا ده.

اوس به نو د بيان د الجبر هغه تعريفو ته چي ضروردي، پراختيا ورکړو.

تعریف 1.20. د شرطي بیان په الجبر کي د $t_1,t_2, ..., t_n$ د بیانو لاړ د بیان د منشاء د لاړ Propositional Creating Sequence (PCS) په نامه یادوو، که د هغه د هر غړی یا هر اندکس $i=1,2, ..., n$ دپاره د لاندنیو شرطو څخه یو شرط صدق وکي:

الف) t_i د 2.2 د تعریف سره مطابق ابتدائي بیان دی.

ب) د $j<i$ اندکس داسي وجود لري ، چي $t_i=\neg t_j$ دي، پدي معنی د t_i بیان د مخکني t_j د بیان د نفي په نتیجه کي لاسته راغلي ده.

پ) د $j,k<i$ اندکسونه داسي وجود لري ، چي د $t_i=t_j♣t_k$ ده. پداسي حال کي چي ♣ د $\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ د منطقي اتصالوڅخه د یوه اتصال نماینده ګي کوي.پدي معنی چي د t_i بیان د t_j او t_k د بیانو د اتصال په نتیجه کي لاسته راغلي ده.

ج) د $j<i$ اندکس داسي وجود لري ، چي $t_i=\Box t_j$ دي.

تعریف 2.20. د شرطي بیان دالجبر په ژبه کي د t بیان د هغه بیان څخه عبارت دي، چي د $t_1,t_2, ..., t_n$ د بیانو د منشاء لاړ داسي وجود ولري ، چي وروستی غړی یې همدغه بیان وي، یعني $t_n=t$ وي.

د فارمول مفهوم مو په 12§ کي تشریح کي ، دلته ښله دي چی هغه مفهومونه تکرار کړم تاسوته پر 4.12 او 5.12 تعریفو باندي حواله درکوم. دهغو تعریفو سره په مطابقت کي هره کلمه Term اتمي فارمول دی(پدی حالت کي $k=0$ یعنی k– ئېزه تابع ، 0- ئېزه تابع ده). ځکه نو تر دی وروسته به د ساده او ترکیبی بیانو په عوض یوازي د فارمول عمومی مفهوم په کاراچوو.

څرنګه چی د شرطي بیان الجبر د بیان د الجبر د پراختیا په نتیجه کي لاسته راځی، نو د بیان د الجبر اکسیومي او د استنباط قوانین دلته هم صدق کوی. علاوه پر دی د ضرورت او امکان د یوه ئېزو عملیو په اړوند اکسیومي اود استنباط قوانین باید طرحه کو.د څېړنو په بهیر کي د شرطي منطق مختلف سیستمونه منځ ته راغلی دي.لمړنۍ او ضعیف سیستم د K[29] د شرطي بیان د منطق سیستم دي ، چي د :

---

[29] Saul Aaron Kripke(13.11.1940) امریکایي فیلوسوف او منطق پوه دي . چي دشرطي منطق دغه سیستم دده په وياړ نومول سوی دي.لمړی ځل د هغه له خوا څېړل سوی دی.

$\Box(A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A\rightarrow\Box B)$ توضیعی اکسیومه

$\dfrac{A}{\Box A}$ داستنباط قانون

توضیعی اکسیومه موږته د استنباط په عملیه کي د ضرورت د عملیې د داخلیدو خاصیت بیانوي او د استنباط قانون وایي که د A بیان د بیان په شرطي منطق کی د ثبوت وړ وي، نو $\Box A$ هم د بیان په شرطي منطق کي د ثبوت وړ دی، یا په بله اصطلاح که دA بیان د K د سیستم قضیه وي ، نو $\Box A$ هم د K د سیستم قضیه ده. د نوموړي سیستم ضعف پدي کي دی، چي په هغه سیستم کي د بېلګي په ډول $\Box A\rightarrow A$ نسو ثابتولای.اوس نو که نوموړی اړېکه په T سره وښیو اود اکسیومي په ډول د K و سیستم ته وراضافه کو، نو په اصطلاح د KT سیستم لاسته راځي. یعنی :

$$T: \Box A\rightarrow A$$

خو د نوموړو اکسیومو څخه :

$$\Box A\rightarrow\Box\Box A \qquad (4)$$

نسو ثابتولای ، ځکه نو که پورتنۍ اکسیومه د KT پر سیستم ور اضافه کوو او لاسته راغلی سیستم په S4 سره ښیو. د S4 سیستم ته دلاندني اکسیومي په ذریعه پراختیا ورکوو:

$$E: \Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A$$

په نتیجه کي لاسته راغلی سیستم په KT4E سره ښیو.

(4) اکسیومه د مثبت ځان لید positive introspection او د (E) اکسیومه د منفی ځان لید negative introspection په نامه یادېږي. (4) اکسیومه وایي : که زه پوهېږم چي د A بیان رشتیا دی ، نو زه پوهېږم چي زه پوهېږم چي د A بیان رشتیا دي.

د (E) اکسیومه د A د نفي به مرسته ارائه کوو. یعنی که زه نه پوهېږم چي د $\neg A$ بیان رشتیا دی ، بیانو زه پوهېږم چي نه پوهېږم چي د $\neg A$ بیان رشتیا دی.

تعریف 3.20. د K, KT, KT4=S4, KT4E=S5 شرطی بیان د منطق د سیستمو څخه هر یو په K سره ښیو.

که مو مقصد د هغوی څخه ځانګړی سیستم وی ، نو نوم یې په صراحت ذکر کوو. یعنی د K پر ځای KT ، KT4 ، .. وایو.

تعریف 4.20. $\Diamond A \overset{def}{=} \neg\Box\neg A$.

پاملرنه وکی ، چي پورتنئ تعریف د امکان عملیه د ضرورت د عمليې په مرسته تعریفوي.

تبصره1.20. $\Box\neg A$ او یا د هغه معادل $\neg\Diamond A$ چي وايې ضروردی چي د A بیان رشتیا ندي ، یعنی $\neg A$ ضرور رشتیادی او یا دهغه معادل د A رشتیاوالی ناممکن دی. دلته باید د نفی عملیې ته جدی پاملرنه وسي. په $\Box\neg A$ کي د A بیان نفی سوی دی، خو په $\neg\Box A$ یا دهغه معادل $\Diamond\neg A$ "A ضرور ندی" او د هغه معادل "$\neg A$ ممکن دی". دلته د نفی عملیه د ضرورت پر یوه ئېزي عملیی $\Box$ باندی عملی سوی ده.

دلته هم د تېرو فصلو په څېر د دباندنیو قوسو څخه صرفنظر کوو. د عملیو ترتیب د ښئ څخه و کینې لور ته د لمړی توب حق لری:

$$\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \Box$$

پدي معنی چي د بېلګي په ډول $\Box A\wedge B\rightarrow C$ ، د $((\Box A)\wedge B)\rightarrow C$ په معنی دی.

تعریف 5.20. (د شرطی بیان په الحبر کي ثبوت). فرضوو چي د K په تیوري کي $A_n, ..., A_2,A_1$ او B د شرطی بیان د منطق فارمولونه دی. د K په تیوري کي د B د فارمول استنباط د $A_n, ..., A_2,A_1$ څخه عبارت د $C_l, ... ,C_2,C_1$ فارمولو د متناهي لاړ څخه دی، پداسي ډول چي د لاړ وروستی غړی د B فارمول ، یعنی $B=C_l$ او د لاړ د هر غړی C_i دپاره د لاندنیو شرطو څخه یو شرط صدق وکي:

P_1- C_i د شرطی بیان د منطق اکسیومه ده.

P_2- C_i د K د تیوری اکسیومه ده.

P_3- د C_i د $A_n, ..., A_2,A_1$ د فارمولو څخه یو فارمول دی.

P_4- د $k,j<i$ اندکسونه داسی وجود لري، چي د C_k بیان د $C_j\rightarrow C_i$ بنه لري.

تعریف 6.20. د B فارمول د K په تیوري کي د $A_n, ..., A_2,A_1$ د استنباط وړ دی ، که د K په تیوري کي د $A_n, ..., A_2,A_1$ د B د فارمول استنباط وجود ولری.دغه واقعیت په لاندی ډول ارائه کوو:

$$A_n, ..., A_2,A_1 \vdash_K B$$

که $n=0$ ، یعنی د $A_1,A_2, ..., A_n$ فرضیې وجود ونلري، نو په لنډ ډول وایو چې د B فارمول د K په تیوري کې د ثبوت وړدی او $\vdash_K B$ لیکو. څرګنده ده که د K تیوري مشخصه وي ، نو د K د لیکلو څخه صرفنظر او $\vdash B$ لیکو.

پورتني دوه تعریفونه د 3.4 او 4.4 تعریفو سره پرتله کې.

بېلګه 1.20. د KT په تیوري کې $A\to\Diamond A$ او $\Box A\to\Diamond A$ د ثبوت وړ دي ، یعنی :

a) $\vdash A\to\Diamond A$

b) $\vdash\Box A\to\Diamond A$

ثبوت: a)

1) $\Box\neg A\to\neg A$ دKT اکسیومه ده

2)$(\Box\neg A\to\neg A)\to(\neg\neg A\to\neg\Box\neg A)$ د مخالف حالت قانون[30]

پر 1) او 2) د مودوسپوننس د استنباط قانون عملی کوو:

3) $\neg\neg A\to\neg\Box\neg A$

4) $A\to\Diamond A$ د 4.20 تعریف له مخې

q.e.d.

b)

1) $\Box A\to A$ د T اکسیومه

2) $(\Box A\to A)\to((A\to\Diamond A)\to (\Box A\to\Diamond A))$ تعریف1.4. (A_2)

3) $(A\to\Diamond A)\to (\Box A\to\Diamond A)$ 1) او 2) مودوسپوننس

4) $\Box A\to\Diamond A$ 4) a) او 3) مودوس پوننس

q.e.d

تمرین 1.20.

1) په پورتني بیلګو کې د استنباط لاړ ولیکئ.

2) وښیاست چې په S5 کې $A\to\Box\Diamond A$ او $\neg\Box A\to\Box\neg\Box A$ د ثبوت وړ دي. یعنی:

a) $\vdash A\to\Box\Diamond A$

---

[30] 1.4. تعریف (A_{14}) تطبیق سوی دي.

b) $\vdash \neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$

پنځم فصل

د وخت منطق Temporal Logics

دمخه تر دي چي اصلي موضوع در سره شریکه کم. د امستردام د پوهنتون د منطق، ژبی او شمېرني د انستیتوت د پروفیسر وینیما Yde Venema ځنی مفکوری د وخت په هکله به ستاسو سره شریکی کم [22] .

وخت یو له ضد او نقیض ترینو مفهومو څخه دي چي په خپل فکر کي ورسره مصروف یو . د عیسویانو راهب سانکت اوګوستینوس، (354-430) م، په خپل کتاب "اقرار" کي د وخت په هکله داسی لیکي.

"وخت څه شي دي؟ که هیڅوک زما څخه پوښتنه ونه کي، نو زه پوهېږم چي وخت څه شي دی ؛خو که زه و هغه شخص ته ، چي زما څخه یې د وخت په هکله یې پوښتنه کړیده ، تشریح کم، نو ورته وبه وایم ، چي نه پوهېږم."

د وخت یود ډ یروحیرانونکي اړخو څخه د هغه موجودی Ontological حالت دی. پدی معنی چي هغه وجود لری!دبلی خوا وخت ذهني او نسبی مفهوم دي، چي زموږ پرشعوری تجربو او د پېښوپر تسلسل باندي ولاړ دی ؛دبلې خوا زموږ د تمدن او تکنالوجي بنسټ د مطلق وخت د موجودیت د عینیت پر مفهوم ولاړ دی. د وخت د موجودیت تضاد ځینی فیلوسوفان تردی حده رسولی دی ، چي ووایي ، چي وخت غیر واقعی دی او نور بیا د مطلق وخت موجودیت مني او په سر کي یې د دهغه د جوړښت فکرونه ګرځي ، چي آیا وخت خطي دی او که دایروی، ایا وخت محدود دی او که غیر محدود ایا وخت ګڼ dense دی او که منفرد discrete .

خو په هر صورت که موږ یې تر میتافزیکی (ماوراء فزیکی) بحث تېر سو، نو څرګنده ده چي وخت زموږ په ذهن کي دونه بنسټیز رول لوبوی، چي ددغي پدیدی په هکله دقیق استدلال ته ضرورت پیدا کېږي. لکه څنګه چي موږ یې په فزیک ، ژبپوهني، کمپیوټری علومو Computer Science او مصنوعی ځیرکتوب Artificial Intelligence کي شاهدان یو. که څه هم په ټولو نوموړو برخو کي د وخت مفهوم په یوه ډول په کارنه اچول کېږي، خو ټوله کولای سو چي د وخت د منطق تر عنوان لاندي منسجم کو.

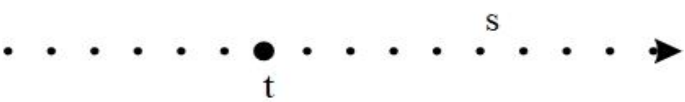
په تېرفصل کي مو د بیان الجبر ته د دوو فلسفي مقولو ضرورت او امکان په ذریعه پراختیا ورکړه او د شرطي بیان الجبرمو لنډ در وپېژندی. زموږ هدف فلسفي نه بلکه عملی اړخ لری. لکه څنګه چی د تېر فصل په شروع کی مو یادونه وکړه د شرطي بیان د منطق څخه ، غیر له نورو ساحو په مصنوعي ځیرکتوب کي کار اخیستل کېږي.

د تکنالوجي او دمعاصر ژوند د پرمختګ په نتیجه کی د کار او ژوند پروسې اصلاح او د عملی کېدو وختونه یې د امکان په صورت کي رالنډ او اوتوماتیکي بنه غوره کوي. دلته د شمېرني په پروسه کي وخت ډېر مهم رول لوبوي. د شمېرني تحلیل او تجزیه ، څه په صوري او یا څه په عملی بڼه ، د وخت په چوکاټ کي صورت نیسي . که څه هم د ځینو سیستمو په ټولګیو کي ، لکه functional programms ، د وخت مفهوم په صراحت سره نه ذکر کېږي ، خو د پروسو او د هغوی متقابل عمل د چاپېریال سره په طبیعی بڼه د وخت په چوکاټ کي صورت نیسي. ځکه نو دلته د وخت د مفهوم څخه صرفنظر نسو کولای او د هغو بیانو تحلیل او تجزیې ته چي د وخت مفهوم پکښې څرګندېږي، خاص ضرورت احساس کېږي. که څه هم د وخت په هکله فلسفي بحثونه په لرغوني یونان کي ، د ارسطو په استدلال کي چي " آیا سبا به سمندری جګړه وی؟" لیدل کېږي ، خود تېري پېړي په لمړی نیمایې کي جرمنی فیلوسوف غایخنباخ (H.Reichenbach(1891-1953 ، د جنوبی افریقا فیلوسوف فاینډلی J. Findlay(1903-1987) ، پولنډی فیلوسوف او ریاضي پوه اوکاښیېویچ J. Łukasiewicz (1878-1956) او پولنډی فیلوسوف او ریاضي پوه وښ (J. Łoś (1955-1998 د وخت د منطق معاصر بنسټونه کښېښودل.

د کمپیوټر ساینس اسرائیلي متخصص او ریاضی پوه پینیولي (A.Pnueli (1941-2009 د وخت د منطق څخه د وسیلی په څېر د کمپیوټر د موازی پروګرامو د صحیح والي د آزموینې concurent programs verification په اړوند کار واخیست. د پینیولي په طریقه د موازی پروګرام د درستوالي د آزموینې دپاره ، لمړی باید هغه پروګرام د وخت د منطق په ژبه ارائه او بیا ثابته سی چی د پروګرام ځني خصوصیتونه د وخت د منطق په چوکاټ کي صدق کوي.

§21. د وخت بهير Flows of Time

په تېر فصل کی د مختلفو اکسیومو د تطبیق پر بنسټ د مختلفو شرطي بیانو د منطق سره معرفی سوو. دمخه تردی چي د وخت د منطق مختلف ډولونه، او یا د وخت د منطق د ډولو څخه یو ډول معرفی کو، ضروردی چي لمړی د وخت د مفهوم په اړوند د ریاضي له نظره یو نظر واچوو. کله چي په مجرد ډول د وخت په اړوند فکر کوو، نو اکثرآ یو خط تصور کوو. دغه تصور تر ډېره حده د خلکو په ذهن کي د وخت د مفهوم په صفت ځای نیولی دی.
د وخت د مفهوم د ریاضي تصویر د نقطو د سیټ او پر نوموړی سیټ د ترتیب د اړېکي سره او یاهم شاید د دوو نقطو ترمنځ د فاصلي په بڼه، تړلی دی. وروسته به د وخت پر نقطهٔ تصور اعتراضونه او بدیلونه وڅېړو. فعلاً به وخت د یوه چوکاټ په بڼه ، یعنی ساختمان ($\mathfrak{T}=(T,<)$ ، پداسي ډول چي د > دوه ئېزه اړېکه د وخت پر سیټ ، د وړاندی والي(تقدم precednce) اړېکه ده، معرفی کو. د T د سیټ عنصرونه د وخت نقطې (شېبې به ورته ووایو) دي. که د (s,t) مرتبه جوړه د > په اړېکي اړه ولري، نو وایو چي د s شېبه د t د شېبې څخه مخکي ده.د وخت په هکله د احساس په درلودلو سره به د > پر اړېکه ځني شرطونه کښېږدوځو د وخت دغه ډول مودل خپل معقولیت تثبیت کړای سی. زموږ ژبه د پریدیکات د الجبر ژبه ده، هغه هم پداسي ډول چي یوازنۍ پریدیکات R د ">" په ذریعه تمثیلیږي.
څرګنده ده، چي د وخت هر چوکاټ چي پر احساس باندی ولاړ وي د وخت د پېژندني دپاره منلی چوکاټ نسی کیدلای. لږ ترلږه باید د > اړېکي څخه د غیر انعکاسي او انتقالي خاصیتو د درلودلو انتظار ولرو.هر چوکاټ چي دغه خاصیتونه ولری د وخت د بهیر په نامه به یې ویادوو. د ریاضي له نقطهٔ نظره د وخت بهیر دقیق strict نسبی (نیمګړئ) partial ترتیب (اوډل) سوی سیټ دی. دغه ترتیب به د بشری ژبي په چوکاټ کي داسی وژباړو:
$s>t$ په دی معنی دي چی د s شېبه د t تر شېبي وروسته ده . $s\leq t$ به پدي معنی وي، چي، یا $s=t$ دی او یا $s<t$ یعنی د t شېبه د s تر شېبي ورسته ده. اوس نو که د $\{s\in T;\ t<s\}$ سیټ راکړه سوی وی ، نوموړئ سیټ به د ټولو هغه شېبو سیټ وي ، چي د t تر شېبي وروسته راغلی وي، یعنی د t راتلونکي ده.



شکل1.21.

همدا ډول که ووایو ، چې t د s ماضی ده، هم به درسته وي.

ددغه ډول سیټو مشهوری بېلګې $\mathcal{N}=(\mathbb{N},<)$ د طبیعی عددو سیټ، $\mathcal{Z}=(\mathbb{Z},<)$ د تامو عددو سیټ ، $\mathcal{Q}=(\mathbb{Q},<)$ د ناطقو عددو سیټ او $\mathcal{R}=(\mathbb{R},<)$ د حقیقی عددو سیټ دی. هغه بېلګه چې لږ شهرت لری د دوه ئېزو ونی[31] binary tree سیټ $\mathcal{B}=(\mathbb{B},\prec)$ دي.دلته د $\mathbb{B}$ سیټ د صفرونو 0s او یو 1s لاړ دي ، په داسي حال کي چې $s\prec t$ هغه وخت صدق کوي ، چې s د t پیلوځي ټوټه initial segment وي. بله په زړه پوری بېلګه د منکوسکي[32] څلور بعدی فضاء ، چې د منکوسکي د وخت د فضاء په نامه هم یادېږي، ده. د منکوسکی فضاء $\mathcal{S}=(\mathbb{R}^4,\lhd)$ ، Minkowski spacetime ، ده. دلته د $\lhd$ اړېکه داسي تعریف کېږي:

$(x_0, x_1, x_2, t) \lhd (x_0', x_1', x_2', t')$ په څلورئېزو کي نه یوازی د وخت محور یو تر بل کوچنۍ ، یعنی $(t<t')$ دی، بلکه پر متعلقومحورو ددوو نقطو تر منځ فضائي فاصله د وړانګی تر سرعت په کمه ووهل سی . پدی معنی چي د بېلګي په ډول د x_0 او x_0' ترمنځ فاصله باید د وړانګي تر سرعت په کمه ووهل سی.

پاملرنه وکی ،چې زموږ تعریف دایروی وخت منع کوی. پدی معنی که چیري t_n, ...,t_2,t_1 د وختو داسي لاړ وجود ولری ، چې $t_1<t_2<\ldots<t_n<t_1$ وی، بیانو د انتقالی قانون پر بنسټ $t_1<t_1$ دی او دغه حالت د غیر انعکاسی والی سره مغایرت ښئي .

د بلی خوا د وخت د بهیر د کرښه ئېز د خاصیت کمښت احساسیږي.وایو چي ،د R په اړېکه دقیق نیمګړی ترتیب (اوډل) سوی سیټ خطي (کرښه ئېز) اوډل سوی دی، که د نوموړی سیټ د هر دوو عنصروx اوy په هکله قضاوت وکړای سو، چي یا Rxy یا x=y او یا Ryx دی. پدي معنی چي د پریدیکات په الجبر کي $\forall xy(Rxy \lor x=y \lor Ryx)$ صدق کوي.

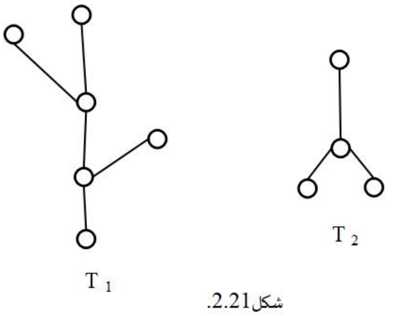
آیا د طبیعی عددو سیټ نظر و > اړېکي ته کرښه ئېز اوډل سوی دي ؟ پاس ذکر سوو نورو بېلګو په هکله څه فکر کوی؟

د وخت دغه ډول دورنما په ساینس کی تر ډېره حده تبارز کوی.دا ځکه چي ،د اکثره خلکو په فکر کي د وخت معیاری تصور دی. په هر حال د $\mathcal{B}$ او $\mathcal{S}$ په څېر ساختمانونه په اصطلاح د څانګور وخت branching-time ساختمانونه تر ډیره حده د وخت د منطق د عالمانو پاملرنه ځانته را اړولی ده. یو سیسټم نظر و راتلونکی ته څانګور branching دي، که په سیسټم کي داسي نقطي وجود ولري، چي دوی یو دبل څخه مستقلي راتلونکي نقطي ولری.که دغه ډول نقطي وجود ونلری، نو سیسټم د غیر څانګور سیسټم په نامه یادېږي. پدی حالت کي د هری

[31] په [3] کی 160 صفحه وګوری

[32] Hermann Minkowski(1864-1909) جرمنی ریاضی پوه او فزیک پوه د البرت اینشتاین استاد ؤ .

نقطې راتلونکی خطي ترتیب سوی دي.همدا ډول یو سیستم نظر و ماضی ته څانګوردی ، که په سیستم کی داسي نقطه وجود ولری، چې په ماضي کې يودبل څخه مستقلې دوی نقطی ولری.



شکل2.21.

په پورتني شکل کي هغه نقطې چې دوی راتلونکي یا دوه ماضی ولری تعین کي.

د وخت بهیر غیر څانګور دی که نه وراتلونکی او نه وماضی ته څانګور وی. پاملرنه وکی، چې د وخت د بهیر په خطی ترتیب کي مو "موازی" وخت نه درلودی ، خو په څانګور بهیر کي د "موازی" وخت ممانعت نسته. په څېړنو کي د وخت بهير په راتلونکی کي څانګور او په ماضی کي غیر څانګور څېړل کېږي. دا ځکه چې ماضی تعین سوی ده ، خو راتلونکي نا معلومه ده. د وخت څانګور بهیر د شرطی منطق د ضرورت او امکان د مقولو تمثيلونکی دی.

د وخت د محدودیت یا نه محدودیت مسئلی د پېړيو راهیسی فیلوسوفان، مذهب پوهان او فزیک پوهان مصروف کړی دي، خو د منطق پوهانو دپاره دغه مسئله دونه په زړه پوری نه ده. راسی چې د راتلونکی په اړوند تعریف وګورو:

د $\mathcal{T}$ سیستم لمړې (د پيداينښت یا ایجاد) نقطه لری، که $\exists x\forall y(Rxy \lor x=y)$ صدق وکي.

نوموړی سیستم ښئ لاړيز right-serial دی ، که هره نقطه غیر خالی راتلونکی ولري.

که د شکل .1.21. ته ښه ځير سئ او تر هغه وروسته بېلګو په اړوند يې و څېړي ، نو وبه وایاست چې نوموړئ شکل د $\mathcal{N}$ او $\mathcal{Z}$ سیستمو دپاره صدق کوي، پدي معنی چې د وخت بهير مو د طبیعی او تامو عددو په سیستمو کي په نظر کي نیولی دي. دلته وخت یا شیبه منفرده ده ، خو د ناطقو عددو په سیستم $\mathcal{Q}$ کي وخت ګڼ دی، یعنی د هرو دوو شېبو په منځ کي بله شېبه موندلای سو. پدي معنی چې د $\mathcal{Q}$ په سیستم کي $\forall xy(Rxy\rightarrow\exists z(Rxz\land Rzy))$ صدق کوي. د وخت د بهیر دغه ډول تصور د حرکت مودل تمثیلولای سي، خو د کمپیوټر د پوهانو او اقتصاد پوهانو دپاره وخت منفرد دی. پدی معنی چې د هغوی تصور د وخت د بهیر په هکله زموږ د شکل سره توافق کوي.

دوخت بهیر او د هغه د مختلفو خصوصیاتو د څېړني په نتیجه کي د وخت د منطق مختلف سیستمونه منځ راغلی دی. ځکه نو د وخت د منطق د سیستم د پېژندنی دپاره د یوه سیستم ټاکنه ساده مسئله نه ده. زه به دلته د نیوزیلانډ د منطق پوه Arthur Norman Prior (1914-1969) د وخت د منطق سیستم په ډير لنډ ډول راوړم.

22§. د وخت د بیان الجبر

دمخه تردی، چی د وخت د منطق د الجبر د جملو د جوړښت او د هغو د محتوی په هکله وړغیږو،یو ځل بیرته د لمړی فصل و لمړیو کرښو ته راګرځو. هلته مو پر بیان او دهغه پر رشتیاوالي باندی بحث وکړ. ددی دپاره چي بحث بی ځایه اوږد نسی، نو د ابتدائي بیان څخه نه بلکه مستقیماً د ترکیبي بیان او یا په عمومي بڼه د بیان پر فارمول به وړغیږو. د بیان فارمول که رشتیا ؤ نو هغه ته مو د 1 قیمت کښېښودی او برعکس یی قیمت 0 ؤ. د بیان د قیمت ایښودلو دپاره مو د جدول څخه کار اخیستي.

هلته مو د ابتدایي بیان بېلګه "باران اوری" راوړه. اوس نو دنوموړئ بیان د رشتیاوالی قیمت نظر ووخت ته تغیر کوی . امکان لری په دغه شېبه کي رشتیا هم باران واوری ، خو څو شېبي وروسته ممکن باران ونه اوری.

د وخت د منطق بنسټېزه مفکوره و بیان ته د وخت په اړوند قیمت ورکول دي.په 3§ کي د بیان د رشتیاوالی بل تعبیر د v: $\Pi\longrightarrow\{0,1\}$ تابع وه، په داسي حال کي چي Π د ټولو بیانو سیټ ؤ. اوس نو که بیان د وخت په اړوند څېړو ، نو د وخت بهیر $\mathcal{T}=(T,<)$ باید په څېړنو کی راسره شریک کو. پدي معنی چي د بیان رشتیاوالی د t په مشخصه شېبه کي ارزیابي کوو.زموږ د قیمت ایښودلو مپینګ π به داسي بڼه ولری: $\pi:(T\longrightarrow(\Pi\longrightarrow\{0,1\}))$

دلته مودل $\mathcal{M}=(\mathcal{T},\pi)$ د وخت د بهیر او د قیمت ایښودلو د تابع مرتبه دوه ئېزه ده.
پدي حالت کي د بېلګي په ډول د $p\wedge\neg q$ فارمول د t په شېبه کی یوازي هغه وخت رشتیا دی چي $\pi(t)(p)=1$ او $\pi(t)(q)=0$ وي.

د پرایر Prior د وخت د منطق په سیسټم کي د بیان د الجبر د ژبي او عملیو پرته څلور عاملونه تعریف کیږي. د هغو څلورو څخه دوه یي د ضعیفو عاملو او دوه یي د ثقیلو عاملو په نامه یادیږي. د پرایر عاملونه په لاندی ډول دي:

F یو وخت په راتلونکي کي .....

P یو وخت په پخوا (ماضی) کي ....

G تل په راتلونکی کي .....

H تل په پخوا (ماضی) کي .....

د **G** او **H** عاملونه د ثقیلو عاملو په نامه یادیږي او د شرطی بیان د الجبر و عاملو ته ورته دي.
د **F** او **P** عاملونه د ضعیفو عاملو په نامه یادیږي.

که $\varphi\in\Pi$ د بیان د الجبر فارمول وي، نو **F**φ وایي ، چی د φ فارمول به په راتلونکي یو وخت صدق کوي. همداډول **P**φ وایي، چي د φ فارمول په پخوا (ماضی) کي یووخت صدق کاوه.د ثقیلو او ضعیفو عاملو ترمنځ اړیکه په لاندی ډول ده:

$\mathbf{P}\varphi\equiv\neg\mathbf{H}\neg\varphi,\ \mathbf{H}\varphi\equiv\neg\mathbf{P}\neg\varphi,\ \mathbf{F}\varphi\equiv\neg\mathbf{G}\neg\varphi$ او $G\varphi=\neg\mathbf{F}\neg\varphi$ ...(22.1)

Hφ تر دی وروسته φ henceforth او

Gφ تر اوسه φ hitherto، لوستل کیږي.

نوټ. دلته د یوه حقیقت یادونه ضرورګنم، هغه داچي د راتلونکي د مطلق والي په هکله په پوره ډاډګېرنه سره استدلال یوازی په هغه صورت کي کولای سو چي زموږ د څېړني وړ بیانونه تاوتولوجي وي، خو دغه ډول کړنلاره دومره په زړه پوري نه ده. بیاهم دثبوت په پروسه کي هڅه کیږي ، چي مسئله یا د تاوتولوجیو په مرسته او یاهغه څه چي په ماضي کی ثابت سوی وي ، راجع سي.ځکه نو د (22.1) اړیکه ډیره مهمه ده.

د ژبي نوري نښي مو د بیان د الجبر د نښو او د هغوی د مفهوم سره مطابقت کوي، خو د رشتیا او درواغ دپاره د 1 او 0 یا T(True) او F(False) په بدل کي د ⊺ او ⊥ څخه کاراخلو. پدي ډول د وخت د بیان د الجبر ژبه :

$\mathfrak{L}=\langle$ a,b,c,...,⊥,⊺ ,(,), ¬,∧,∨,⟶,⟷,**H**,**G**,**F**, **P**$\rangle$

ده.

تعریف 1.22. د وخت د منطق د $\mathcal{M}=(T,<,\pi)$ په مودل کي د φ د فارمول رشتیاوالی د t په شېبه کي د استقراء به ذریعه په لاندی ډول تعریفوو:

الف) که q ابتدایي بیان وی ، نو د $\mathcal{M}$ په مودل کي د t په شېبه کی د q بیان هغه وخت صدق کوی ، یا رشتیا دي $\mathcal{M}$,t⊨q چي π(t)(q)=1 وی.

ب) که φ د بیان د الجبر فارمول وي، نو $\mathcal{M}$,t⊨¬φ هغه وخت رشتیا دی ، چي د $\mathcal{M}$ په مودل کي د t په شېبه کی د φ فارمول رشتیا نه وي ، یعنی $\mathcal{M}$,t⊭φ .

پ) که φ اوψ د بیان د الجبر فارمولونه وي، نو $\mathcal{M}$,t⊨φ∧ψ هغه وخت رشتیا دی ، چي د $\mathcal{M}$ په مودل کي د t په شېبه کی د φ او ψ فارمولونه په عین حال کي رشتیا وي، یعنی $\mathcal{M}$,t⊨φ او $\mathcal{M}$,t⊨ψ .

ج) که φ د بیان د الجبر فارمول وي، نو د $\mathcal{M}$ په مودل کي د t په شېبه کی د **G**φ بیان هغه وخت صدق کوی ، یا رشتیا دي $\mathcal{M}$,t⊨**G**φ چي د t د شېبي د ټولو راتلونکو شېبو s دپاره د φ فارمول صدق وکي، یعنی $\mathcal{M}$,s⊨φ د ټولو t<s دپاره.

ح) که φ د بیان د الجبر فارمول وي، نو د $\mathcal{M}$ په مودل کي د t په شېبه کی د **H**φ بیان هغه وخت صدق کوی ، یا رشتیا دي $\mathcal{M}$,t⊨**H**φ چي د t د شېبي د ټولو مخکي شېبو s دپاره د φ فارمول صدق وکي، یعنی $\mathcal{M}$,s⊨φ د ټولو t>s دپاره.

بېلګه 1.22. فرضوو چي زموږ مودل د طبیعی عددو پر سیټ $\mathcal{N}$ استوار دی . د q پریدیکات په لاندی ډول سره راکړه سوی دي:

q: n>1000

د q پریدیکات په طبیعي عددو کي د هغوعددو دپاره په رشتیا بیان اوړي ، چي n تر 1000 اضافه وي.پدي معنی ، چي د τ د رشتیاوالی د قیمت ایښودلو په مپینګ کي د q راکړه سوی بیان د ټولو طبیعي عددودپاره چي تر 1000 لوی وی ، رشتیا دي. دبېلګي په ډول:

$\mathcal{N}$,1001 ⊨q

اوس نو پوښتنه کیږي چي **FG**q څه وخت صدق کوی ؟

د q پر پریدیکات باندي دوه عامله اثر ښندي ، نو لمړی به $\mathbf{G}$q به په ψ سره کښېږدو.په نتیجه کي $\mathbf{F}$ψ لاسته راځي. د بلی خوا که زموږ په پریدیکات کي داسی طبیعي عدد ، چی تر 1000 کوچنی یا مساوي وي کښېږدو، نو د q پریدیکات په غیر حقیقي بیان اوړي. یعنی د q د پریدیکات نفي q¬ صدق کوي، یعني:

$\neg q{:}n\leqq 1000$

د بېلګي په ډول $\mathcal{N},0\vDash\neg q$.

د (22.1) اړیکي پر بنسټ $\mathbf{F}\psi=\neg\mathbf{G}\neg\psi$ دي. ددي ځایه:

$\mathbf{FG}q=\neg\mathbf{G}\neg(\mathbf{G}q)=\neg\mathbf{G}\neg\mathbf{G}\neg q$

$\mathbf{G}$ وایې تل په راتلونکي کي، $\mathbf{G}$¬ یو وخت په ماضي کي q¬ صدق کوي ، یعنی $\mathbf{FG}$q د بېلګي په ډول په صفر کي صدق کوي، $\mathcal{N},0\vDash\mathbf{FG}q$.

بېلګه 2.22. فرضوو چي زموږ مودل د طبیعی عددو پر سیټ $\mathcal{N}$ استوار دی . د r پریدیکات په لاندی ډول سره راکړه سوی دي:

r: د n طبیعي عدد پر 2 د وېش وړ دی.

د r پریدیکات د صفر په شمول د جفتو طبیعي عددو دپاره رشتیا دي.

$\mathbf{FG}$r او $\mathbf{GF}$r و څېړی.

د بېلګي په ډول $\mathcal{N},0\nvDash\mathbf{FG}r$ ، خو $\mathbf{GF}$r پر ټوله $\mathcal{N}$ صدق کوي.

د وخت د منطق پوهانو ته په عمومي ډول په راکړه سوی مودل کي د فارمولو رشتیاوالي یا درواغ والي دونه په زړه پوري نه دي، بلکه د وخت په بهیر کي، د فارمول د ابتدائي بیانو د هر ډول قیمت د اخیستلو په نتیجه کي، د هغوی د قیمت د ثابت پاته کېدو مسئله ډېره مهمه ده. په خاص ډول هغه فامولونه چي د وخت په بهیر رشتیا پاته سي. احساسیږي ، چی دغه ډول فارمولونه د وخت د بهیر د ساختمان په اړوند بنسټیز معلومات ارائه کوي.

تعریف 2.22. وایو چی د φ فارمول د $\mathcal{T}$ د وخت په بهیر کي صدق کوي، $\mathcal{T}\vDash\varphi$ ، که پر $\mathcal{T}$ باندی د π په هر ډول قیمت ایښودلو او د $\mathcal{T}$ په هره نقطه کي د φ فارمول صدق وکي $(\mathcal{T},\pi),t\vDash\varphi$.

د φ فارمول د وخت د بهیرو په ټولګي کي هغه وخت صدق کوي، چي د φ فارمول د وخت د بهیرو د ټولګي په هر غړی کی صدق وکي.

تعریف 3.22. وایو چی د φ فارمول د $\mathcal{T}$ د وخت په بهیر کي د منلو وړ satisfiable دي، که د هغه فارمول نفی یعنی φ¬ د وخت په بهیر کي صدق ونه کي.

همدا ډول د φ فارمول د وخت د بهیرو په ټولګي کي هغه وخت د منلو وړ دی، چي د φ فارمول د وخت د بهیرو د ټولګي په هر غړی کی دمنلووړ وي.

بېلګه 3.22. د $Fq\longrightarrow FFq$ فارمول په خطي ګڼ ترتیب په ټولګیو کي صدق کوي.
فرضوو، چي $\mathcal{T}$ خطي ګڼ د وخت بهیردي. ددي دپاره چي د راکړه سوی فارمول تصدیق ثابت کو، باید پر $\mathcal{T}$ باندي د π اختیاری قیمت ایښودنه او په $\mathcal{T}$ کي د وخت اختیاری شېبه t داسي په نظر کي ونیسو، چي $(\mathcal{T},\pi),t\vDash Fq$ صدق وکي.
نوټ: که د هوا حالات داسي پیش بینی سوی وي ، چي سبا تر غرمي وروسته باران اوري، نو د باران د اورښت شروع د نوموړي بیان "سبا تر غرمي وروسته باران اوری" په اړوند د t د شیبو څخه یوه شېبه ده.
پدی معنی چي د $\mathcal{T}$ د وخت د بهیر د π د قیمت ایښودني د t په شېبه کي د Fq فارمول صدق کوي.د Fq فارمول وایي ، چی د q فارمول په راتلونکي کي یو وخت صدق کوي. پدي معنی چي د s شېبه t<s داسي وجود لري، چي د q فارمول صدق کوي.
څرنګه چي زموږ د وخت د بهیر سیټ ګڼ سیټ دي ، نو د ګڼ سیټ د تعریف له مخي د t او s د شېبو په منځ کی دu شېبه t<u<s داسي وجود لري، چي د q فارمول د u په شېبه کي صدق کوي.څرنګه چي t<u ده، نو فرضولای سو چي د t په شېبه کي FFq صدق کوي.
تر هغه ځایه چی د t شېبه او د π قیمت ایښودنه اختیاري وه ، نو کافي ده چي داسي اکسیوماتیکي سیستم ولرو ، چي په هغه کي $\mathcal{T}\vDash Fq\longrightarrow FFq$ صدق وکي.
د بلي خوا که د وخت بهیر د تامو عددو پر سیټ راکړه سوی وي، پدي معنی پر داسي سیټ چي ګڼ نه وي، نو د $Fq\longrightarrow FFq$ فارمول به صدق و نه کي. د 0 او 1 شېبي په نظر کي نیسو او فرضوو د π قیمت ایښودنه داسي راکړه سوی ده ، چی د q فارمول یوازي د 1 په قیمت کی صدق کوي. څرګنده ده چی د 0 په شېبه کي Fq صدق کوي، خو FFq صدق نسي کولای. نو پدي حساب که داسي اکسیوماتیکي سیستم راکړه سوی وی ، چي په هغه کي $Fq\longrightarrow FFq$ صدق هم وکي ، خو د استنباط د تعریف له مخي زموږ په حالت کي $Fq\longrightarrow FFq$ صدق نه کوی ، یعنی: $\mathcal{Z}\nvDash Fq\longrightarrow FFq$.■
د پورتني بېلګي پر بنسټ د پرایر د فارمول په ذریعه دوخت د بهیر د ټولګي تعریف فورمولبندی کولای سو.
تعریف 4.22. د K په ټولګي کي د پرایر د فارمول φ په ذریعه د وخت د بهیر ټولګي C هغه وخت تعریف سوی ده ، چي د K د ټولګي د وخت په هر بهیر $\mathcal{T}$ کي چي د φ فارمول صدق وکي ، یعنی $\mathcal{T}\vDash\varphi$ ، نو $\mathcal{T}$ د C په ټولګي کي شامله وي.
په لمړی نظر پورتنۍ تعریف پیچلۍ معلومیږي، خو په ساده ډول یې داسی تعبیرولای سو. د وخت د بهیرد ټولګیو K څخه هغه ټولګی C را جلا کوو، چي په هغه کي د φ فارمول صدق کوي. د بېلګي په ډول ټوله هغه ټولګي ، چي په هغه کي $Fq\longrightarrow FFq$ فارمول صدق وکي ، د ګڼ د خصوصیت د صدق کولو ټولګي ده.

که بیاهم د وخت د بهیر خطی ترتیب ته ځیر سو، د وخت د منطق د پرایر په ژبه کي د وخت د بهیرد په زړه پوري خاصیتوسره به مخامخ سو.لاندني دوه مطابقته د شرطي منطق او د وخت د منطق ترمنځ ، د وخت د خطي بهیر پر بنسټ، اړیکه ارائه کوي:

$$\Diamond\varphi \equiv \mathbf{P}\varphi \vee \varphi \vee \mathbf{F}\varphi \quad (22.2)$$

$$\Box\varphi \equiv \mathbf{G}\varphi \wedge \varphi \wedge \mathbf{H}\varphi \quad (22.3)$$

په شرطي منطق کي $\Diamond\varphi$ ، امکان لري چی د φ فارمول صدق وکي. د وخت په منطق کي یي تعبیر: د φ فارمول یا پخوا صدق کاوه $\mathbf{P}\varphi$ ، یا به اوس صدق کوي او یا به په راتلونکي صدق کوي $\mathbf{F}\varphi$.

په همدا ډول $\Box\varphi$ په شرطي منطق کی ارومرو یا تل φ صدق کوي. د وخت په منطق کي یي تعبیر: د φ فارمول تراوسه صدق کاوه $\mathbf{G}\varphi$ او اوس صدق کوی او د ددغی شیبي څخه وروسته به هم صدق کوي $\mathbf{H}\varphi$.

لاندني اکسیومي د وخت دخطي بهیر دپاره صدق کوي:

$\mathbf{H}\bot \vee \mathbf{PH}\bot$	د مبداء د نقطي موجودیت	(A1)
$\mathbf{P}\top$	و کيڼ لاس ته تسلسل	(A2)
$\mathbf{G}\bot \vee \mathbf{FG}\bot$	د نهایي یا وروستي نقطي موجودیت	(A3)
$\mathbf{F}\top$	و ښي لاس ته تسلسل	(A4)
$(\mathbf{F}\top \wedge q \wedge \mathbf{H}q) \rightarrow \mathbf{FH}q$	Discreteness منفرد والی	(A5)
$\mathbf{F}q \rightarrow \mathbf{FF}q$	Density ګڼوالی	(A6)

$$(\mathbf{F}q \wedge \Diamond\neg q \wedge \Box(q \rightarrow \mathbf{H}q)) \rightarrow \Diamond((q \wedge \mathbf{G}\neg q) \vee (\neg q \wedge \mathbf{H}q)) \quad (A7)$$

(A7) متمادیت continuity ارائه کوي.

$$\mathbf{G}(\mathbf{G}q \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{FG}q \rightarrow \mathbf{G}q) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{H}q \rightarrow q) \rightarrow (\mathbf{PH}q \rightarrow \mathbf{H}q) \quad (A8)$$

(A8) د متناهي انتروال موجودیت ارائه کوي.

د وخت د منطق د عاملو او د شرطي منطق د عملیو د تعریفو په نظر کي نیولو سره هڅه وکي چي پورتني اکسیومې د پښتو په ژبه کي ارائه کی.

د وروستیو دوو فصلو څخه مي هدف د شرطي منطق او د وخت د منطق د بنسټیزو مفهومو سره ستاسو پېژندګلوي وه. د منطق دواړي برخې د اوسني تکنالوژي په پرمختګ کي مهم رول لوبوي او د هغوی د جزئیاتو څېړنه ددی کتاب تر چوکاټ وزي. د علاقي په صورت کي په مآخذ راوړل سوي کتابو ته مراجعه کولای سي.

اندکس

مآخذ

1.Abadi, Martin;Temporal-Logic Theorem Proving,

Dissertation,Stanford University 1987, CA

2. Achakzai, Ahmad Wali, Qamosona.com, 2020

3.BUKOVSKÝ, L:Sets and All That About Them, Nangahar Science Faculty, 2020, Afghanistan
د نیازمن ژباړه؛ سیټونه او هرڅه د هغوی په هکله

4. BUKOVSKÝ, L.:Úvod do Matematickej Logiky, Katedra matematickej informatiky, PF UPJŠ, Košice 2001

5.Davis, Martin:Computibility and Unsolvability: Dover Publications, 1982, New York

6. Gerard O´Regan: Guide to Discrete Mathematics, An Accessible Introduction to the History, Theory, Logic and Applications, Springer International Publishing Switzerland 2016

7. Goldblatt, R: Logics of Time and Computation, 2ndEd, CSLI, 1992, USA

8. Harrie de Swart: Philosophical and Mathematical Logic, Springer Nature Switzerland AG 2018.

9. Grzegorczyk, A: An outline of mathematical Logic, PWN, 1974 Warszawa, Poland.

10. Hoffman, Dirk W:Grenzen der Mathematik, Spektrum Verlag 2011, Heidelberg, Germany

11. KLEENE, STEPHEN COLE: Introduction to Metamathematics, ISHI Press, 2009, New York, USA

12. KLEENE, STEPHEN COLE: Mathematical Logic Dover Publications, 2002, New York, USA

13. Kossak, Roman; Mathematical Logic On Numbers, Sets, Structures and Symmetry, Springer Int. Publ. AG, 2018, Switzerland.

14.Krüger, Fred; Temporal Logic of Programs; Springer Verlag, 1987, Berlin.

15. Мальцев,А.И.: АЛГОРИТМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ, Наука,1986, Москва

16. Mendelson, E: Introduction to Mathematical Logic, 4th. Ed. 1997 Chapmann & Hall, London, UK

17. Niazman, S.A.:Algebra and theory of Numbers Part I , Nangahar Science Faculty 2015, Afghanistan.

18. Niazman, S.A.:Algebra and theory of Numbers Part II , Nangahar Science Faculty 2017, Afghanistan.

19. Sacks G.E.: Saturated Model Theory , W.A.Benjamin, Inc, 1972, MIT, USA

20. Shoenfield, J.R.:Mathematical Logic, CRC Press, 2010, London, UK.

21.Stanford Encyclopedia of Philosophy.

https://plato.stanford.edu/entries/logic-temporal/

22.Venema,Yede: TemporalLogic, in: L Goble (editor), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, Malden, USA, 2001, pp 203 - 223.

سلطان احمد نیازمن د ۱۹۵۷ کال د جنوري پر ۱۷ نیټه د کندهار د عمران په کوڅه کي زیږېدلي دي. په ۱۹۷۴ کال کی د کندهار د میرویس نیکه د لیسې څخه فارغ او د کابل په پوهنتون کي د تحصیلي بورس څخه په استفاده سره خپلي لوړې زده کړې د ریاضي په څانګه کي د پخواني چکوسلواکیا د کوشیڅه د ښار د پاول یوزف ښافاریک په پوهنتون کي د RNDr په درجه سرته رسولی دي. د پوهنتون د فراغت څخه وروسته یې څه ناڅه پنځه کاله د کابل د پیداګوژي انستیتوت د ریاضي د دیپارتمنت د آمر په صفت وظیفه اجراء کړیده. په تېرو دیرشو کلو کي یې د کمپیوټري علومو ، خصوصاً د کمپیوټرو د جال په برخه کي کار کړی دي.

د اوولسو کلو راهیسی د جرمنی د المپیک او سپورت د کنفدراسیون د کمپیوټري جال او د هغه د مصئونیت دنده پر غاړه لري.

RNDr. Sultan Ahmad Niazman

Certified Network Manager (CNM)

Microsoft CERTIFIED IT Professional

Enterprise Administrator
Server Administrator

Abstract

Mathematical logic is an important part of the fundamentals of mathematics. This book intends to provide the basic notions of mathematical logic for the students of mathematics at Afghan universities.

This book includes five chapters. The first two chapters introduce the elements of the first order logic as the propositional and the predicate calculi. The first chapter deals with the propositions, the operations on the propositions, and the interpretation of truth. Based on the truth table, the student will meet the model theory. One of the important functions of logic is saying "what follows from what", so the introduction of proof in the propositional calculus, proof in the mathematics and different methods of proof are elements of proof theory in this chapter. The question about compactness and completeness of propositional calculus round this chapter.

The second chapter deals with the predicate calculus. It starts with the notion of propositional function, introducing formula and interpretation of language. This chapter explicitly introduces the notions of model and theory. Similar to the first chapter here we will discuss the elements of proof theory in connection with the predicate calculus.

The second chapter will be rounded by the notion of contradictions in the theory and predicate calculus with equality.

Under consideration of countably infinite sets of mathematical or logical questions, they each call for a "yes" or "no" answer. Is there a method or procedure by which we can answer any question of the class in a finite number of steps? These questions are the content of the third chapter, which deals with computability and decidability. This chapter introduces recursive functions and Turing Machines.

The development of computer sciences, knowledge management, and artificial intelligence force the philosophical categories as "possibility", "necessity" and time-based categories "always", "future" and "past" in the logic. The last two chapters are a brief introduction to the modal logic and temporal logic.

غیر طبي چاپ شوي کتابونه (زراعت، انجنيري، اقتصاد، ښوونې او روزنې، ساينس او ژورناليزم) ۲۰۲۱-۲۰۱۵

1	عمومي رياضيات	پوهنوال گل محمد جنت زی	خوست	2	د عالي رياضياتو عمومي کورس	پوهندوی محب الرحمن جنتي	ننگرهار
3	عالي کلکولس I، A 434 رياضي	پوهندوی حميدالله يار	ننگرهار	4	عالي کلکولس II	پوهندوی نظر محمد	ننگرهار
5	د نفوسو جغرافيه	پوهنوال لطف الله صافي	ننگرهار	6	فزيکی کيميا II، الکتروليتی محلولونه او الکتروکيميا	پوهاند دوکتور خير محمد ماموند	ننگرهار
7	فزيکی کيميا III، کيمياوی کنتک او کتلسس، کروماتوگرافي او اسپکتروسکوپي	پوهاند دوکتور خير محمد ماموند	ننگرهار	8	د ژويو فزيولوژي	پوهاند غنچه گل حبيب صافی	ننگرهار
9	د ودانيو د تودولو تخنيک، لومړی برخه، د سون تخنيک	داکتر غلام فاروق مير احمدی	ننگرهار	10	د متيورولوژی مبادی	پوهنوال عبدالغياث صافی	ننگرهار
11	معيار های جديد اعمار ساختمان	داکتر انجنير محمد عمر تيموری	ننگرهار	12	چگونگی مصرف انرژی در ساختمان های رهايشی	داکتر انجنير محمد عمر تيموری	ننگرهار
13	الجبر او د عددونو تيوری، لومړی برخه	سطان احمد نيازمن	ننگرهار	14	د ژوند چاپيريال	پوهاند عارف الله مندوزی	ننگرهار
15	د اوسپیز کانکريټي عناصرو د لومړی صنفي کار متوديکي لارښود	پوهندوی انجنير عبادالرحمن مومند	ننگرهار	16	جامداتو ميخانيک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
17	عضوی کيميا،کړيوال ترکيبونه	پوهاند دوکتور محمد غوث حکيمی	ننگرهار	18	د ودانيو د جوړولو مهندسي اساسات، لومړی ټوک	ديپلوم انجينبر اسدالله ملکزی	ننگرهار
19	د ودانيو د جوړولو مهندسي اساسات، دويم ټوک	ديپلوم انجينبر اسدالله ملکزی	ننگرهار	20	کيميايي عنصرونه، لومړی ټوک	محمد طاهر کاڼي	ننگرهار
21	کيميايي عنصرونه دويم ټوک	محمد طاهر کاڼي	ننگرهار	22	د اقتصاد او تجارت اصطلاحات (انگليسی-پښتو تشريحی قاموس)	پوهنيار عبدالله عادل او امان الله ورين	ننگرهار
23	خطي الجبر	داکتر عبدالله مهمند	ننگرهار	24	روانشناسی و ضرورت آن در جامعۀ افغانستان	داکتر اعظم دادفر	کابل پوهنتون
25	مبادی اقتصاد زراعتی	پوهاند ولی محمد فائز	بلخ	26	اساسات هندسه ترسيمی مسطح	پوهنوال سيد يوسف مانووال	بلخ
27	تأسيسات و تجهيزات تخنيکی ساختمان	داکتر انجنير محمد عمر تيموری	پولی تخنيک کابل	28	د راديويي خپرونو توليد	پوهنوال دوکتور ماسټر واحدي	خوست
29	د خاورې تخريب او د چاپيريال ککړتيا	پوهنيار محمد حنيف هاشمي	خوست	30	تيوری و سياست بودجه عامه	پوهنوال داکتر سيد محمد تينگار	کابل
31	حيوانات مفصليه	پروفيسور داکتر ديپلوم علی آقا نحيف	هرات	32	عضوي کيميا، د اروماتيک او هيتروسيکليک برخه	پوهنوال دوکتور گل حسن وليزی	کابل
33	د پروژې تحليل او مديريت	پوهاند محمد بشير دويال	ننگرهار	34	د انجنيری ميخانيک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
35	کلکولس او تحليلي هندسه، لومړی برخه	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار	36	کلکولس او تحليلي هندسه، دوهمه برخه	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار
37	د کرنيزو محصولاتو بازار موندنه	پوهاند محمد طيب	ننگرهار	38	کارتو گرافی با اساسات توپوگرافی	پوهنوال دوکتور محمد طاهر عنايت	ننگرهار
39	انرژي سمپا کوونکي ودانۍ	انجنير اسد الله ملکزی	ننگرهار	40	د موادو مقاومت	پوهنمل بهرام اميری	خوست
41	فزيکی کيميا گازونه او کيمياوی ترموديناميک	پوهاند خير محمد ماموند	ننگرهار	42	اطلاعاتو ته د لاسرسي لارې چارې	دانش کروخيل	ننگرهار
43	حياتي جغرافيه	پوهاند لطف الله صافي	ننگرهار	44	د فاصله اوبو انجنيري	پوهاند انجنير زلمی خالقی	ننگرهار
45	د رياضي په هکله خبرې اترې	سلطان احمد نيازمن	ننگرهار	46	اقتصادي جيولوجي (کانپوهنه-فلزي کانونه)	پوهاند دوکتور شريف الله سهاک	ننگرهار
47	گروه های اجتماعی بسته (مطالعه جامعه شناختی سکتها)	داکتر احمد سير مهجور	کابل پوهنتون	48	گرم شدن کره زمين	محمد نعيم نسين	بلخ
49	الجبر او د عددونو تيوري دوهمه برخه	سلطان احمد نيازمن	ننگرهار	50	اعمار ساختمانها (اساسات، مواد و سيستم ها)	پوهندوی انجنير امان الله فقيری	کابل پوليتخنيک

51	په سیول انجنیري کې د اټوکې استعمال	پوهنوال میا پاچا میاخیل	ننگرهار	52	وترینري عمومي پتالوژي	پوهندوی محمد طاهر کاکړ	ننگرهار
53	انجنیري جیودوزی (سروې)	پوهندی گل حکیم شاه سیدی	ننگرهار	54	جیومورفولوژي	پوهنوال عزت الله	ننگرهار
55	د تلویزیوني خپرونو تولید	پوهنوال داکتر ماستر واحدی	خوست	56	اوسپنیز کانکریټي عناصر ، لومړی برخه	پوهنوال دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
57	زولوجی فقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار	58	زولوجی غیرفقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار
59	د تهداب انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقی	ننگرهار	60	الجبر معاصر	داکتر عبدالله مهمند	بلخ
61	رهنمود موثریت حفظ انرژی در تعمیرات	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	کابل	62	معاصر الجبر	داکتر عبدالله مهمند	خوست
63	آلماني د افغانانو لپاره	داکتر یحیی وردک	بهلابهل	64	د افغانستان د پوهنتونونو د درسی کتابونو چاپول	داکتر یحیی وردک	ټولو ته
65	آلمانی برای افغانها به دری	داکتر یحیی وردک	بهلابهل	66	د پروژې مدیریت په عمل کې	محمد داود علم او یو اف . گهل	ننگرهار
67	صنعتي اقتصاد	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	68	نباتي فزیولوژي لومړی جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست
69	نباتي فزیولوژي دوهم جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست	70	د ساختمانونو تحلیل (لومړی برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار
71	د ساختمانونو تحلیل (دویمه برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار	72	د مهندسانو د پاره ساختماني ستاتیک زده کړه	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار
73	د ساختمان د جوړلو طریقې (لومړی برخه)	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار	74	د ساختمان د جوړلو طریقې (دوهمه برخه)	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار
75	سیټونه او هرڅه د هغوی په هکله	لیف بوکوفسکی/ سلطان احمد نیاز من	ننگرهار	76	د لوبو لارو د هندسي عناصرو ډیزاین	پوهنیار انجنیر م. شاکر فاروقي	ننگرهار
77	د سرخلاصو کانالونو هایدرولیک	پوهنوال میاپاچا میاخیل	ننگرهار	78	د جوړښتونو تحلیل (لومړی برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
79	د جوړښتونو تحلیل (دوهمه برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	80	د ریاضي منطق	سطان احمد نیازمن	ننگرهار
81	۴۵ انجنیري درسي کتابونه	ټول پوهنتونونه	ننگرهار	82	د اوبو رسولو انجنیري	پروفیسور انجنیر محمد عیسی تنها	ننگرهار
83	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین (دویمه برخه، لومړی ټوک)	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار	84	اوسپنیز کانکریټي عناصر ډیزاین (دویمه برخه، دوهم ټوک)	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
85	د انجنیری اساسی ریاضی (دوهمه برخه)	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننگرهار	86	د انجنیری اساسی ریاضی (لومړی برخه)	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننگرهار
87	د اقتصادي پرمختیا تیوري	پوهاند محمد بشیر دویال	ننگرهار	88	د تحلیلی هندسه لومړی برخه	سید شیر اقا سیدی	ننگرهار
89	عمومي تخنیکي رسم	پوهیالی فضل اکبر	ننگرهار	90	کید او گرافیک	پوهنوال دیپلوم انجنیر بهاوالدین جلالي	ننگرهار
91	د اقتصاد د علم اساسات	شیرخان حساس	ننگرهار	92	نړیوالې ټولنې	احسان الله آرینزی	ننگرهار
93	اقلیم پوهنه	پوهاند عزت الله سایل	ننگرهار	94	د طبیعي علومو انگلیسي-پښتو قاموس	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی ځدران	ننگرهار
95	پیداگوژي	پوهنیار راز محمد فیضي	ننگرهار	96	د جوړښتونو تحلیل (دریم برخه)	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
97	د اوبو لگولو انجنیری	پوهندوی دېپلوم انجنیر اصغر غفورزی	ننگرهار	98	د انسان فزیولوژي او اناټومي	عبدالملک پرهیز	ننگرهار
99	نیماتولوژي	پوهنوال حسین آرمان	ننگرهار	100	د کورنیو الوتنکو د روزنې اساسات	پوهاند میر حالم نیازی	ننگرهار
101	د سازماني اړیکو مدیریت	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	102	د کرنې تشریحي قاموس	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار
103	حیواني تغذیه لومړی برخه	پوهندوی روزي خان صارق	ننگرهار	104	حیواني تغذیه دوهمه برخه	پوهندوی روزي خان صارق	ننگرهار
105	وترېنري داخله	پوهندوی پیر محمد ستانکزی	ننگرهار	۱۰۶	وترنري فارمکولوژي	پوهنوال محمد بایر درمل	ننگرهار
107	کوانتم میخانیک	پوهنیار اکرام الله وقار	ننگرهار	۱۰۸	د جرمني ژبې اسانه زده کړه، له اساساتو نه تر ادبیاتو پورې	داکتر اکرم ملکزی	ننگرهار

109	رهبري له تیوري تر عمله	پوهنیار محمد عرفان قریشي	ننگرهار	۱۱۰	عامه اقتصاد	پوهندوی ریحان الله رحیمي	ننگرهار
111	د څېړنې مېتودولوژي	پوهنیار نثار احمد مصلح	ننگرهار	۱۱۲	د بشري سرچینو مدیریت	پوهنمل مصور فقیرزی	ننگرهار
113	مرکزي بانک او پرمختللې پولي سیاستونه	پوهاند دوکتور عبدالقیوم عارف	خوست				

تطبیق کوونکی: ډاکتر یحیی وردگ، د لوړو زده کړو وزارت ، څلورمه کارته، کابل افغانستان، مارچ ۲۰۲۲

موبایل:۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۷۳۲۰۸۴۴، ایمیل: www.mohe.gov.af ,info@ecampus-afghanistan.org

ټول کتابونه له دې ویبپاڼو څخه ډونلوډولای شئ: www.ecampus-afghanistan.org

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine .
For this reason, we have published 365 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism, and Agriculture from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic, and Kabul Medical universities. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org & www.kitabona.com.
The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states: *"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit "*.
We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Dr. B. Sarif, who has provided fund for this book.

I would like to cordially thank Chancellor of Universities, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project .

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally, I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz and Fahim Habibi in the office for publishing and distributing the textbooks.

Dr. Yahya Wardak

Ministry of Higher Education, Kabul, Afghanistan, April, 2022

Mobile: 0706320844, 0780232310

Email: textbooks@afghanic.org

Book Name Mathematical Logic
Author Sultan Ahmad Niazman
Publisher Shaikh Zayed University, Khost, Education Faculty
Website www.szu.edu.af
Published 2022, First Edition
Copies 1000
Serial No 330
Download www.ecampus-afghanistan.org
www.kitabona.com

This publication was financed by **Dr. B. Sarif**.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning translator and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Karte – 4, Kabul
Office 0780232310, 0706320844
Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2022

ISBN 978-9936-633-98-8