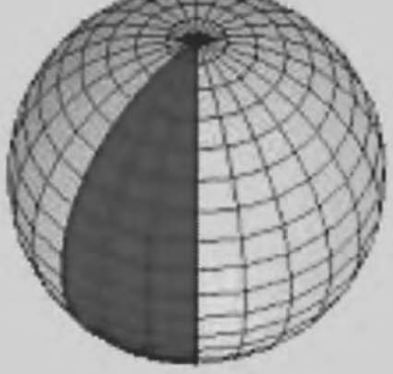
ننګرهار ښوونې او روزنې پوهنځی

کلکولس او تحلیلي هندسه
(دوهم ټوک)



پوهندوی سید شیر آقا سیدي

۱۳۹٦

کلکولس او تحلیلي هندسه (دوهم ټوک)

Calculus & Analytic Geometry II

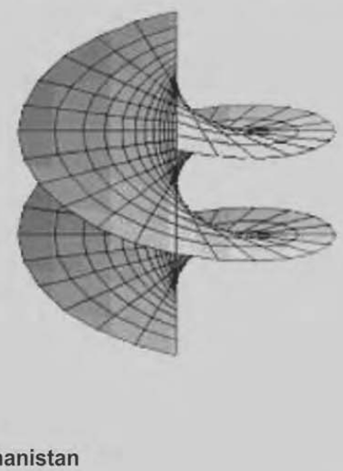
پوهندوی سید شیر آقا سیدي ۱۳۹٦

Nangarhar Education Faculty

Afghan

Assist Prof Sayd Sher Aqa Sayedy

Calculus & Analytic Geometry II



Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

ISBN 978-9936-620-40-7

Not for Sale

2017

کلکولس او تحلیلي هندسه

(دوهم ټوک)

پوهندوی سید شیر آقا سیدي

افغانیک
Afghanic

Pashto PDF
2017

Nangarhar Education Faculty

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Calculus & Analytic Geometry II

Assist Prof Sayd Sher Aqa Sayedy

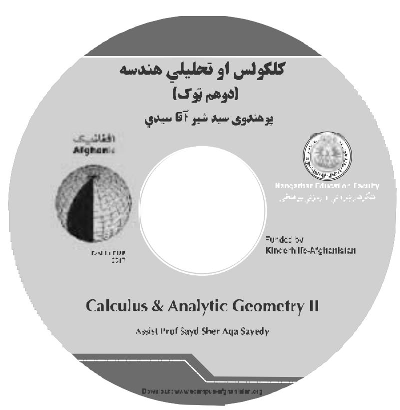
بسم الله الرحمن الرحیم

کلکولس او تحلیلي هندسه
(دوهم ټوک)

پوهندوی سید شیر آقا سیدي

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ایف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:



د کتاب نوم   کلکولس او تحلیلي هندسه (دوهم ټوک)
لیکوال   پروفېسور ضیاؤ الحق
ژباړن   پوهندوی سید شیر آقا سیدي
خپرندوی   ننگرهار پوهنتون، ښوونې او روزنې پوهنځی
وېب پاڼه   www.nu.edu.af
د چاپ کال   ۱۳۹۶، لومړی چاپ
چاپ شمېر   ۱۰۰۰
مسلسل نمبر   ۲۳٦
ډاونلوډ   www.ecampus-afghanistan.org
چاپ ځای   سهر مطبعه، کابل، افغانستان

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې په آلمان کې د افغانیک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسئولیت د کتاب په لیکوال او اړونده پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کابل
تېلیفون   ۰۷۵٦۰۱٤٦٤۰
ایمېل   textbooks@afghanic.de

ای اس بي ان   ۹۷۸-۹۹۳٦-٦۲۰-۴۰-۷

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تـاریخ پـه مختلفـو دورو کـې کتـاب د علـم او پـوهې پـه لاسته راوړلـو، سـاتلو او خپرولـو کـې ډیـر مهـم رول لوبـولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جـوړوي چـې د زده کـړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې املـه د نړیوالـو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولـو سره بایـد نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه لـه کـومې منـنـه کـوم چـې دوامـداره زیـار یـې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړونـدو څـانګو کـې درسي کتابونـه تـألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کـړی دی او د پـوهې موتـور یـې پـه حرکـت راوسـتی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تـر څـو پـه خپلـو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مـواد برابـر او چـاپ کـړي، چـې لـه چـاپ وروسته د ګرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کـړو د کیفیـت پـه لوړولـو او د علمي پروسې په پرمختګ کې یې نېک ګام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپلـه دنـده بـولي چـې د ګرانـو محصـلینو د علمـي سـطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسي مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کې د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او زموږ همکار ډاکـتر یحیـی وردک څخه مننه کوم چې د دی کتاب د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چې نوموړې ګټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومـومي تـر څـو پـه نیـږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو سرپرست وزیره

کابل، ۱۳۹٦

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمیر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

تر اوسه پورې موږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل، کابل طبي پوهنتون او کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۲۵۰ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالیزم او زراعت پوهنځیو (۹٦ طبي د آلمان د علمي همکاریو ټولنې DAAD، ۱۴۰ طبي او غیر طبي د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې Kinderhilfe-Afghanistan، ٦ کتابونه د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې DAUG، ۲ کتابونه په مزار شریف کې د آلمان فدرال جمهوري جنرال کنسولګري، ۱ کتاب د Afghanistan-Schulen، ۱ د صافی بنسټ لخوا، ۱ د سلواک ایډ او ۳ نور کتابونه د کانراد ادناور بنسټ) په مالي مرسته چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړونده پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او مؤسساتو ته په وړیا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.afghanistan-ecampus.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کولای شئ.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان نشي کولای عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پیدا کړي."

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هیواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړینه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او چپټرونه ایډیټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زمونږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یاد شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د مؤلفینو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مؤلف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

له افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکټر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی، دوی تر دې مهاله د ننګرهار پوهنتون د ۱۴۰ عنوانه طبي او غیرطبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه اخیستی دی.

په ځانګړې توګه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او CIM (Center for International Migration & Development) څخه، چې زما لپاره یې له ۲۰۱۰ نه تر ۲۰۱٦ پورې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړي وو، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو له وزیرې پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنمل دیپلوم انجنیر عبدالتواب بالاکرزی، مالي او اداري رئیس احمد طارق صدیقي، د ننګرهار پوهنتون رئیس، د پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مؤلف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو-کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، فهیم حبیبي او فضل الرحیم بریالځخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، مې ۲۰۱۷

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵٦۰۱۴٦۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.de

مخکني خبرې

سبحانک لاعلم لنا الاماعلمتنا

الحمدلله رب العالمین وصلوة واسلام علی خیر الناصرین محمدواله واصحابه اجمعین.

زمونږ په هیواد کې په ملي ژبو د علمي کتابونو تالیف او ژباړونه تر ټولو زیاته اړتیا لیدل کیږي ځکه په تېر وخت کې په ملي ژبو په ځانګړې توګه په پښتو ژبه علمي کتابونه دعلماو اوپوهانو له خوا لیکل شوي ندي که لیکل شوي هم دي له هغو سره د چاپولوامکان موجودنه وه.

دا چې نن له یوې خوا تخنیکي او الکترونیکي(کمپیوټري سیستم)وسایلو انکشاف موندلی دی او له بلې خوا د معارف په انکشاف کې درسي او مرستندویه درسي کتابونو ته تر ټولو زیاته اړتیا لیدل کیږي نو لدی امله د درسي کتابونو تالیف او ژباړه ترټولو مهمو اړتیاو څخه شمېرل کیږي او دا نیمګړتیا او تیشه زمونږ په ټاټوبي کې دپخوانه شتون لري. لدې سببه د درسي کتابونو تالیف او ژباړلوته په علمي ترفیعاتو کې هم ځای ورکړ شوی او یو ځانته، ارزښت لري ترڅو چې په دې ډول له یوې خوا درسي پروسه چټکه، پیاوړې او اغیزمنده شي اوله بلې خوا نه استادان ورڅخه په علمي ترفیعاتو کې د اصلی اثارو په توګه ګټه واخلي.

د دغو ټکو په پام کې نیولو سره ماته دښوونې او روزنې پوهنځي د ریاضي څانګې په ۱۳۳ / ۱۳۸۶/۸/۲۱ ګڼه غونډه کې د پوهنمل علمي رتبې څخه پوهندوی علمي رتبې ته د ارتقا په موخه د یو درسي کتاب ژباړه د Calculs and Analytic Geometry په نوم چې د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department,Geverment Shalimar college, Baghbanpure –Lahor - Pakistan له خوا تالیف او د ch.Ahmad Najib له خوا په 2006 زیږیز کال کې چاپ شوی دی د ژباړې دپاره راکړشو، ترڅو چې دا کتاب د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد پوهاند دوکتورسید قیوم شاه (باور) ترلارښوونې لاندې په پښتو ژبه وژباړم.

ما د ریاضي څانګې دغه پریکړه ومنله اوهغه مې سرته ورسوله، اودا کتاب چې(۱۲) څپرکي لري او (۶۴۷) مخونو کې لیکل شویدي په پوره امانت داری سره د نوموړي استاد په مشوره او لارښوونه وژباړه. دا واقعیت دی چې له یوې خوا ژباړه یو ستونزمند کاردی اوله بلې خوا نه د انګریزی ژبې د ځینو اصطلاحاتو او مفاهیمو دپاره په پښتو ژبه کې ډیر کم اصطلاحات پیدا کیږي چې په ریاضیاتوکې مروج او خلک ورسره اشناوي ما زیار ایستلي دی چې تروسه وسه پورې د مفاهیمو لپاره پښتو کلیمات او مفاهیم راوړم او هغه په مناسب ځای کې ځای پر ځای کړم او پدې برخه کې

مي د خپل لاربنود استاد څخه برسيره د څانګي د غړو استادانو نه مشوره اونظر هم اخيستى دى ما پدى ژباړه کې ډير څه زده کړل، څه مي له کتاب څخه او څه مي د لاربنود استاد څخه. په ربنتيا سره زما لاربنود استاد له ماسره سختې ستونزى وګاللي او ماته يې ډير شيان لکه په محتوا کې د کليماتو ځاى پر ځاى کول او د معلوماتونو زياتول او داسې نور رازده کړل. زه د خپل لاربنود بناغلي پوهان دوکتور سيد قيوم شاه (باور) د کابل پوهنتون د طبعى علومو پوهنځي رياضي څانګې استاد څخه چې له ما سره يې زياتې ستونزې ګاللي او نيکې لاربنووني يې راته کړيدي د زړه له کومي قدرداني او مننه کوم او دده دا لاربنووني به د تل لپاره د ځان سره وساتم او ده ته د لوى څښتن څخه لابرياليتوبونه اوبنه روغتيا غواړم. همدارنګه دبناغلو پوهاند ديپلوم انجنير عبدالحق(ايمل) او پوهنوال ديپلوم انجنيرمحمد همايون(ناصري) دکابل پوهنتون طبعى علومو پوهنځي رياضي څانګې استادانو څخه چې د کتاب په ترتيب، تنظيمم او اصلاح، اوهم دمفاهيمو په زياتولو، کمولو او ځاى پرځاى کولو کې يې له ماسره ډيره مرسته کړيده خپله خوبني څرګندوم او دوى ته د سپيڅلي او مهربانه ذات څخه د بنه ژوند د خوشحالي غوښتوونکي يم.

پدى ډول د خپل ميتوديک استاد پوهاند محمدظاهر(اميري)د ننګرهار پوهنتون دښووني او روزنې پوهنځي د بيولوژي څانګې استاد څخه هم يوه نړى مننه کوم.

پدى برخه کې د پښتو ژبې اوادبياتو څانګې استاد بناغلي پوهنوال شاه ولي خان څخه چې ددې کتاب د پښتو کليمو او جملو په سمون اوپرځاى ليکلو کې پوره مرسته کړيده د زړه له کومي قدرداني او مننه کوم.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کميټې (Kinderhilfe-Afghanistan) او د هغه له مشر ډاکټر ايروس څخه مننه کوم چې زما د کتاب د چاپ مالي لګښت يې پر غاړه واخيست. همداراز له بناغلي ډاکټر يحيى وردګ څخه هم مننه کوم چې د دې کتاب د چاپ لپاره يې زمينه برابره کړېده.

په اخرکې د پوهنيارسيد ذاکرحسين فرهاد(سيدي) د کابل پوليتخنيک پوهنتون د الکتروتخنيک پوهنځي استاد، پوهيالى سيدلمسون(سيدي) د پکتيا پوهنتون د ښووني او روزنې پوهنځي رياضي څانګې استاد، سيد سمون ساحل(سيدي) د ننګرهار پوهنتون د انجنيري پوهنځي زده کړيالى او وصلت(ربنتياني) د حربي پوهنتون د اکادمى پوهنځى د لومړي کال زده کړيالي څخه چې ددې ژباړې په ليکلو، ترتيبولو او د شکلونو په رسمولو کې نه هيريدونکې هلې ځلې کړيدي له زړه نه خوبني بنکاره کوم او دوى ته په دواړه کونينو کې له لوى څښتن تعالى څخه خوشحالي او برياليتوبونه غواړم.

په خورا درنښت

ژباړونکې: سيد شيراقا (سيدي)

تقریظ

زمونږ په هیواد کې په ملي ژبو د علمی کتابونو تالیف او ترجمو ته یوه ستره اړتیا ده، ځکه چې له یوې خوا له تېر وخت څخه په ملي ژبو علمي کتابونه ندي راپاتې شوي او له بلې خوانه په روان حالت کې په ملي ژبو باندې د علمي کتابو لیکنې او ژباړنې ته ځوک زړه نه ښه کوي. نو لدې امله د درسي کتابو تالیف او ترجمه د ډیرو سترو اړتیاوو څخه ګڼل کیږي او دا نیمګړتیا زمونږ په ګران هیواد کې په دوامداره توګه شتون لري، نو ځکه د درسي کتابونو تالیف او ژباړلو ته په علمي ترفیعاتو کې هم یو ځانګړی امتیاز ورکړشویدی تر څو چې په دې توګه درسي پروسه چټکه،پیاوړی او اغیزمنده شي او هم استادان ورځینی په علمي ترفیعاتو کې د اصلي اثارو په توګه ګټه واخلي.

پدې لړکې پوهنمل سیدشیراقا(سیدي)د ننګرهار پوهنتون د ښووني او روزني پوهنځی د ریاضي څانګې استاد ته دنده وسپارل شوه چې یو درسي کتاب

Calculs and Analytic Geometry for B.A/ B.Sc

په نوم چې د Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college, Baghbanpura-Lahor-Pakistan

له خوا تالیف دی اود ch.Ahmad Najib له خوا په 2006 زیږدیز کال کې چاپ شویدی د ژباړی لپاره وسپارل شو، تر څو له یوې خوا یو درسي کتاب وژباړل شي اوله بلی خوا نوموړي استاد دا ژباړه د پوهندوی علمي رتبې لپاره د اصلي اثر په توګه وکاروي.

دا کتاب دننګرهار پوهنتون د ښووني او روزني پوهنځی د I انالیز، II انالیزاوIII انالیز له مفرداتو سره او هم د تحلیلي هندسی له مفرداتو سره سمون لري.

دا کتاب (۱۲) څپرکي لري په لومړی څپرکي کې حقیقي عددونه، حدونه او متمادیت په دوهم څپرکي کې مشتقونه په دریم څپرکي کې د منحني (وسطي) قیمت دعوی په څلورم څپرکي کې دمستوي لومړي ترتیب منحني ګانې په پنځم څپرکي کې د مستوی دویم ترتیب منحني ګانې په شپږم څپرکي کې د مشتق معکوس (انتیګرال نیولو تخنیکونه) په اوم څپرکي کې معین انتیګرالونه په اتم څپرکي کې دقوسونو اوږدوالی او دمستوي سطحو، حجمونو او د دوراني سطحو تاکل په نهم څپرکي کې دوه بعدیزه هندسه په لسم څپرکي کې اوله دری بعدیزه هندسه (خطونه او مستوی ګانې) په یوولسم څپرکي کې دری بعدیزه هندسه II (دویمه درجه سطوح) او په دولسم څپرکي کې دڅو متحولینو محاسبه شامل دي. پدی لړکې یادونه کوم چې هر څپرکي حل شوي مثالونه او پوښتنې یا نا حل شوي تمرینات او د پوښتنو ځوابونه هم لري.

نوموړې دا کتاب په ښه امانت دارۍ او په روانه ژبه په پښتو ژبه ژباړلی دی او هڅه یې کړېده چې د ژباړې ټول نورمونه پکښې مراعات او وساتي.

زه د پوهنمل سید شیراقا (سیدي) دا علمي کار، پوهندوی علمی رتبې ته د ترفیع کولو لپاره د اصلي اثر په توګه کاملا کافي ګڼم او لوړو مقاماتو ته یې د منلو سپارښتنه کوم.

پوهنمل سیدشیراقا (سیدي) ته پدی لاره کې لازیات بریالیتوبونه غواړم تر څو زموږ دهیواد لوړې زده کړې په همدې توګه نور هم پسې غني شي.

دبریالیتوبونو په هیله

پوهاند دوکتور سید قیوم شاه (باور)

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تقريظ

دا یو روڼ حقیقت دی چی زمونږ په ګران هیواد کی ه یوی خوا کوم علمي کتابونه چی په ملي ژبو باندی په تیرو وختونو کی لیکل شوی وه هغه یا له منځه تللي یا خو د استفادی وړندي، او بلی خوا د کتابونو تالیف اوژباړل یو ستونزمن کار دی. نو لدی امله په ګران هیواد کی په ملي ژبو باندی دکتابونو تالیف او ژباړی ته په ځانګړی توګه په پوهنتونونو کی په ملي ژبو باندی د درسي کتابونو تالیف او ژباړلو ته خورا زیاته اړتیا لیدل کیږي نو ځکه د درسي کتابونو تالیف او ژباړل په علمي ترفیعاتو کی ځانته ارزښت لري. تر څو چی له یوی خوا درسي پروسه چټکه او اغیزمنده شي اوله بلی خوا نه استادان په علمي ترفیعاتو کی له هغې نه داصلي علمي اثر په توګه ګټه واخلي.

پدی لړکی د ننګرهار پوهنتون دښوونی او روزني پوهنځی ریاضي څانګی استاد د پوهنمل سید شیراقا(سیدی) د Calculs and Analytic Geometry نومی کتاب چی په (۱۲) څپرکو کی د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college,

له خوا په 2006 زیږدیز کال کی په انګریزی ژبه لیکل شوی په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی ترڅو چی د ننګرهار پوهنتون د ښوونی او روزني پوهنځی اړتیا وریاندی رفع شي.

نوموړي دا کتاب په پښتو ملي ژبه ډیره ساده او روانه توګه په پوره امانت داری سره د متن په مطابق ژباړلی دی او هم دلیکني نورمونه یی مرعات او په پام کی نیولي دي زه دده دا علمي کار تائیدوم او د پوهندوی علمي رتبی ته د ترفیع کولو لپاره یی کافي بولم او لوړو مقاماتو ته یی د منلو غوښتنه کوم په درنښت.

پوهاند عبدالحق ایمل

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تقریظ

بېدې پوهېږو چې په ګران هیواد کې په ملي ژبو باندې د کتابونو تالیف او ژباړې ته ستره اړتیا ده، په ځانګړې توګه په علمی تحصیلي موسساتو او پوهنتونونو کې په ملي ژبو باندې د درسي کتابونو نه شتون ددې امل دی چې درسي پروسه په چټکې سره په مخ تللی نشي او اغیزه یې کمه ده، نو ددې دپاره چې درسي پروسه په چټکی سره په مخ لاړه شي، پیاوړې او اغیزمنده شي نو باید په ملي ژبو باندې درسي کتابونه تالیف او وژباړل شي چې له یوې خوا د زده کړیالیو ستونزه حل او له بلې خوا نه استادان ورڅخه په علمي ترفیعاتو کې د اصلي اثارو په توګه ګټه واخلي. نو پدې بنسټ دننګرهار پوهنتون د ښووني او روزني پوهنځي ریاضي څانګي استاد پوهنمل سیدشیراقا (سیدي) دCalculs and Analytic Geometry نومی کتاب چې په (۱۲) څپرکو کې د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college

له خوا په 2006 زیږدیز کال کې لیکل شوی په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی تر څو چې د اړونده څانګي اړتیا ورباندی رفع شي.

نوموړی کتاب استاد سیدشیراقا په پوره امانت داری سره د متن په مطابق په پښتو ملي ژبه په ډیرو ساده کلماتو او روانو جملو سره ژباړلی دی او برسیره پدې نوموړي د لیکني نورمونه مراعات او په پام کې نیولي دي.

زه د استاد دا علمي کار تائیدوم او دپوهندوی علمي رتبې ته د ترفیع کولو لپاره یې کافي بولم او لوړو مقاماتو ته یې دمنلو وړاندیز کو په درنښت.

پوهنوال محمد همایون (ناصري)

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

دپښتوژبې تائيدي تقريظ

د ښووني اوروزني پوهنځي محترم رياست ته !

د پوهنمل سيدشيراقا (سيدي) د کلکولس اوتحليلي هندسي (Calculus and Analytic Geometry) ترسرليک لاندې درسي کتاب چې په (۱۲)څپرکواو(۷۲۴)مخونوکې دپوهندوې علمي رتبې ته دترفع کولولپاره په روانه خوږه پښتوژبه په پوره امانت داری سره داصل کتاب په مطابق ژباړل شوې، ليک، ټبنې داړتياسره سمې کارولي، هغه اصطلاحات اوکړنې چې په پښتو ژبه کې شتون لري کارولي دي. نوموړي اثرترپاکتنې وروسته چې دکومو تيروتنو د سمون وړانديز يې شوی وو، سمون پکې راوستل شوی اوس اثر د ژبني لحاظه په بشپړډول اصلاح شوی. دپښتو ژبې د ادبياتو له پلوه نوموړی ژباړل شوی اثر له پوهنمل علمي رتبې څخه پوهندوی علمي رتبې ته دلوړيدو لپاره کافي بولم او مقاماتو ته يې وړانديز کوم.

په درنښت

پوهنوال شاولي خان

د ادبياتوپوهنځي استاد

لړليک

ګڼه	عـنــوان	مخ
	اوم څپرکی	
	معين انتيګرالونه	
۱.	معين انتيګرال د يوی مجموعی ليمټ په توګه	2
	۷. ۲ پوښتني	11
۲.	د انتيګرال نيولو اساسي دعوی	12
۳.	د معين انتيګرالونو خانګړتياوی	13
	۷. ۳ پوښتني	22
۴.	داسانه کيدني يا تبديلونی فورمول (Reduction Formula)	23
	۷. ۴ پوښتني	40
۵.	عددي انتيګرال نيول	42
۶.	ذوذنقه يي قاعده	44
۷.	دسيمپسون قاعده	47
	۷. ۴ الف پوښتني	52
۸.	ناځرګنده (نا مناسب) انتيګرالونه	56
	۷. ۵ پوښتني	61
۹.الف.	بيتا او ګاما تابعګاني	62
۱۰.ی.	دوه ګونی يا دوه برابرولو فورمول (Duplication Formula)	68
	۷. ۵الف پوښتني	74
	۷. ببلابيلي پوښتني	75

اتم څپرکي

دقوسونو اوږدوالی او د مستوي سطحو، حجمونو او د دوراني سطحو تاکل
(Rectification and Quadratur Volumes and Surfaces of Revolution)

نهم څپرکي

دوه بعديزه هندسه

دولسم څپرکی

د څو متحویلینو محاسبه

(Calculus of Several Variable)

اوم څپرکی
معین انتیګرال

۱,۱,۷ سریزه

په ریاضي او ساینس کې خورا زیات مفهومونه شتون لري، د بېلګې په ډول لکه اوږدوالی، حجم، کثافت، کار او نور، د کومو ځانګړتیاوې چې د د مساحت له ځانګړتیاوو سره ورته دي. مونږ پدې برخه کې دیو معین انتیګرال مفهوم معرفي کوو کوم چې دغو مفکورو سره تړاو لري. هر کله چې د $\int f(x)dx$ نامعین انتیګرال وټاکل شي نو د $\int_a^b f(x)dx$ معین انتیګرال قیمت کولی شو په یو ځل لاسته راوړو. په ډیرو حالتونو کې، خوبیا هم ، د معین انتیګرال قیمت کولی شو چې بی له نامعین انتیګرال نیولونه ثابت کړو او هم کله دا ثبوت کېدلی نشي.

په هندسي او نورو انتیګرالي محاسبو پکارولو کی، ځینې وخت، مونږ باید د f(x) یوې تابع یو انتیګرال د قیمتونو توپیر د x مستقل متحول دوه مختلفو قیمتونو لپاره پیداکړو. دغه توپیر ته په $[a,b]$ کې د f(x) معین انتیګرال وایي او د $\int_a^b f(x)dx$ په بڼه ښودل کیږي. پدی ډول که چیرې $\int f(x)dx = \phi(x)$ وي، نو

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی حد او b ته پاسنی حد وایي یعنې:

$$\int_2^4 xdn = \left|\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 6$$

۱,۲,۷ تعریف

د $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ عددونو ټاکلي سټ ته د $[a,b]$ انتروال یو وېش یا فرعي وېش یا تجزیه وایي که چیرې

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

مونږ د $[a,b]$ دغه وېش یا برخه په P سره ښیو او لیکو:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

د $[a,b]$ فرعي وېش په n شمېرفرعي تړلو انتروالونو باندې بیا وېشو

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

د $[x_{r-1}, x_r]$ ، r- ام فرعي انتروال دی او د ده اوږدوالی $x_r - x_{r-1}$ د Δx_r پواسطه ښودل کیږي.

د P ټاکلي اندازه د $|P|$ پواسطه ښودل کیږي د

$$|P| = Max\ \Delta x_r, \qquad 1 \leq r \leq n$$

رابطې پواسطه تعریفیږي.

۲,۲,۷ معین انتیګرال دیوې مجموعې دلیمت په توګه

تعریف: فرض کړی f(x) د یو حقیقي قیمت محدوده شوې تابع ده چې د $[a,b]$ په یوه ټاکلي تړلي انتروال باندې تعریف شویده او $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ د $[a,b]$ یو وېش (پارتیشن) وي. که چیرې c_r د $[x_{r-1}, x_r]$ $r = 1,2,3,\ldots n,$ کومه نقطه وي د

$$(x_1 - x_0) f(c_1) + (x_2 - x_1) f(c_2) + \ldots + (x_r, x_{r-1}) f(c_r) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f_{(n)} =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} (x_r - x_{r-1}) f(c_r) = \sum_{r=1}^{n} \Delta x_r f(c_r)$$

افادې ته د$[a,b]$ د P د وېش په مطابق د f(x) ریمان (Riemaun) مجموعه وایي.

مونږ دغه مجموعه د S(P,f) پواسطه ښیو. د S(P,f) لیمټ ته، که چیرې دا په فرعي انتروال کې لکه n عدد چې لایتناهي ته نږدې کیږي او $|P|$ صفر ته نږدې کیږي شتون ولري، په $[a,b]$ کې د f(x) معین انتیګرال وایي او په سمبولیک ډول لکه $\int_a^b f(x)dx$ لیکل کیږي.

۳,۲,۷ تعریف

فرضوو چې:

۱. f(x) په $[a,b]$ کې متمادي او محدوده ده،

۲. P د $[a,b]$ یو ویش (پارتیشن) ده،

۳. په $[x_{r-1}, x_r]$ باندي د f(x) پورتني او لانديني پولي(سدونه) په ترتيب سره M_r او m_r وي نوپه هغه صورت کي دغو دوه مجموعوته چي د

$$U(P,f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_r(x_r - x_{r-1}) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$
$$= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_r \Delta x_r + \ldots + M_n \Delta x_n$$
$$= \sum_{r=1}^{n} M_r \Delta x_r$$

او

$$L(P,f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_r(x_r - x_{r-1}) + \ldots\ldots$$
$$+ m_n(x_n - x_{n-1}) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_r\Delta x_r + \ldots + m_n\Delta x_n$$
$$= \sum_{r=1}^{n} m_r \Delta r_r$$

پواسطه ښودل کيږي، په ترتيب سره د ريمان پورتني او لاندني مجموعي وايي. مونږ ليکو

$$\lim_{n \to \infty} L(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

او

$$\lim_{n \to \infty} U(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

د(f(x يوي تابع ته په $[a,b]$ کي د ريمان انتيګرال نيولوور يا په $[a,b]$ کي انتيګرال نيولوور وايي که چيري f(x) په $[a,b]$ کي محدوده وي او

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

که چيري f(x) په $[a,b]$ کي د انتيګرال نيولو وړ وي، د(f(x معين انتيګرال (ريمان انتيګرال) له a نه تر b پوري دارنګه ليکل کيږي.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_a^b x^2dx$ انتيګرال دتعريف په بنسټ و ټاکئ.

حل: د$[a,b]$ د P يوپارتېشن $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ سره د n په مساوي اوږدوالي فرعي انتروالونه په پام کې ونيسئ، فرعي انتروالونه

$$[a,\ a+\Delta x],[a+\Delta x,\ a+2\Delta x],\ldots,[a+\overline{n-1}\Delta x,\ a+n\Delta x]$$

دي. د هر فرعي انتروال د کيڼي خوا وروستنۍ نقطه لکه c_r په پام کې نيولو سره مونږ لرو چې:

$$
\begin{aligned}
S(\mathrm{P},\mathrm{f}) &= S(\mathrm{P},x^2)=\sum_{r=1}^{n}\Delta x_r\,\mathrm{f}(C_r)=\Delta x\sum_{1}^{n}\mathrm{f}(C_r)\\
&=\Delta x\left\{a^2+(a+\Delta x)^2+\ldots..+(a+\overline{n-1}\Delta x)^2\right\}\\
&=\Delta x\left\{na^2+2a\Delta x(1+2+3+\ldots..+\overline{n-1})+\Delta x^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+\overline{n-1^2}\right\}\\
&=\Delta x\left\{na^2+2a\Delta x\frac{(n-1)n}{2}+\Delta x^2\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\\
&=\frac{b-a}{n}\left\{na^2+2a\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\\
&=(b-a)a^2+a\frac{(b-a)^2}{n^2}(n-1)n+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

اوس

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2dx &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} S(\mathrm{P},\mathrm{f})=\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{(b-a)a^2+a\frac{(b-a)^2}{n}(n-1)+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{(b-a)a^2+a(b-a)^2(1-\frac{1}{n})+\frac{(b-a)^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})\right\}\\
&=(b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^3}{6}\cdot 2\\
&=(b-a)\left\{a^2+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{3}\left\{3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2\right\} \\
&= \frac{b-a}{3}\left(3a^2 + 3ab - 3a^2 + b^2 - 2ab + a^2\right) \\
&= \frac{b-a}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right) = \frac{b^3 - a^3}{3}
\end{aligned}
$$

۴,۲,۷ د يوې مجموعې لېمټ ټاکل

ددې ثبوت لپاره

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots. + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} = \int_0^1 f(x)dx
$$

چېرې چې f(x) په (0,1) کې يوه متمادي تابع ده.

دمساوي اوږدوالي $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ په لرلو په n فرعي انتروالونو د[0,1] د P وېش په پام کې نيسو. پدې ډول فرعي انتروالونه

$$
\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \ldots\ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]
$$

دي. c_r دهر فرعي انتروال لپاره چې د ښي لور وروستنی (پای) نقطه ده ټاکو، نو.

$$
\begin{aligned}
S(P, f) &= \sum_{r=1}^{n} \Delta x_r \, f(c_r) \\
&= \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots.. + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]
\end{aligned}
$$

اوس

$$
\lim_{n \to \infty} S(P, f) = \int_0^1 f(x)dx
$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+.......+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)\,dx$$

۵,۲,۷ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int_a^b x^k dx$ انتیګرال قیمت دتعریف په بنسټ وټاکئ، $k \neq -1$.

حل: دمساوي اوږدوالي $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ په لرلو په n فرعي انتروالونو د$[a,b]$ د P یو وېش په پام کې نیسو. فرعي انتروالونه

$$[a,\ a+\Delta x],[a+\Delta x,\ a+2\Delta x],....,[a+(n-1)\Delta x,\ a+n\Delta x=b]$$

دي. د هر فرعي انتروال کیڼي خوا وروستۍ نقطه لکه c_r په پام کې نیولو سره مونږ لرو:

$$\begin{aligned} S(P,f)=S(P,x^k)&=\sum_{r=1}^{n}\Delta x_r f(c_r) \\ &=\Delta x\left\{a^k+(a+\Delta x)^k+.....+(a+\overline{n-1}\,\Delta x)^k\right\} \end{aligned}$$

اوس مونږ پوهیږو چې

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{k+1}-x^{k+1}}{\Delta x}=(k+1)x^k$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{k+1}-x^{k+1}}{\Delta x\cdot x^k}=k+1$$

پدې ځای کې په پرله پسې دول $x=a,a+\Delta x,........+a+\overline{n-1}\Delta x$ په اېښودلو مونږ لاس ته راوړو.

$$\begin{aligned} k+1&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^{k+1}-a^{k+1}}{\Delta x\cdot a^k} \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+2\Delta x)^{k+1}-(a+\Delta x)^{k+1}}{\Delta x(a+\Delta x)^k} \\ &= - \quad - \quad - \quad - \\ &= - \quad - \quad - \quad - \\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+n\Delta x)^{k+1}-(a+\overline{n-1}\,\Delta x)^{k+1}}{\Delta x(a+\overline{n-1}\,\Delta x)^k} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{n \text{ شمېر دکسر صورتونو مجموعه}}{\text{مخرجونومجموعه}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+n\Delta x)^{k+1} - a^{k-1}}{\Delta x\left[a^k + (a+\Delta x)^k + \ldots\ldots + (a+\overline{n-1}\,\Delta x)^k\right]}$$

لدې امله

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x\left[a^k + (a+\Delta x)^k + \ldots\ldots + (a+\overline{n-1}\,\Delta x)^k\right]$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+n\Delta x)^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

ځرنګه چې $(b = a + n\Delta x)$, نو

$$= \frac{b^{k-1} - a^{k-1}}{k+1}$$

لدې امله

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

۲. مثال: د $\int_2^1 x\,dx$ انتیګرال د تعریف په بنسټ وټاکئ.

حل: دمساوي اوږدوالي $\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$ په لرلو په n فرعي انتروالونو د$[2,4]$ د P یو وېش په پام کې نیسو. فرعي انتروالونه

$$\left[2,\ 2+\frac{2}{n}\right], \left[2+\frac{2}{n},\ 2-\frac{4}{n}\right], \ldots\ldots\ldots, \left[2+\frac{2(n-1)}{n},\ 2\frac{2n}{n}\right]$$

دي. د هر فرعي انتروال د ښي خوا وروستنی نقطه c_r غوندې په پام کې نیونو سره

په پایله کې

$$
\begin{aligned}
S(P,f) = S(P,x) &= \sum_{r=1}^{n} \Delta x_r f(c_r) \\
&= \frac{2}{n}\left[f\left(2+\frac{2}{n}\right) + f\left(2+\frac{4}{n}\right) + \dots\dots\dots + f\left(2+\frac{2n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[2+\frac{2}{n} + 2+\frac{4}{n} + \dots\dots\dots + 2+\frac{2n}{n}\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[2n + \frac{2}{n}(1+2+3+\dots\dots\dots\dots\dots+n)\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[2n + \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{2}{n}[2n+n+1] = \frac{2}{n}(3n+1) \\
&= 6+\frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

اوس

$$\int_2^4 xdx = \lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right) = 6$$

۳. مثال: د $\int_a^b Sinxdx$ انتیګرال دتعریف په بنسټ وټاکئ.

حل: دمساوي اوږدوالي $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ په لرلو په n فرعي انتروالونو د$[a,b]$ د P یو وېش په پام کې نیسو.

فرعي انتروالونه

$$[a,\ a+\Delta x],\ [a+\Delta x,\ a+2\Delta x], \dots, [a+\overline{n-1}\Delta x,\ a+n\Delta x = b]$$

دي. د هر فرعي انتروال کېڼي خوا وروستنۍ نقطه c_r په شان په پام کې نیولو سره مونږ لرو چې

$$S(P, f) = S(P, \sin x) = \Delta x \left\{\sin a + \sin(a + \Delta x) + \ldots\ldots + \sin(a + \overline{n-1})\Delta x\right\}$$

$$= \Delta x \frac{\sin\left(a + \frac{n-1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n\Delta\Delta}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\frac{\left\{\cos\left(a - \frac{\Delta x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}\Delta x\right)\right\}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}$$

دوارو خواوو ته په نیمت نیولو کله چي $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$ مونږ لاس ته راوړو

$$\int_a^b \sin x\, dx = \lim_{\Delta x \to \infty}\left\{\cos\left(a - \frac{\Lambda x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right\}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Lambda x}{2}}$$

$$= \{\cos a - \cos(a + b - a)\}\cdot 1$$

$$= \cos a - \cos b$$

۴. مثال: د $\int_a^b e^x dx$ انتیګرال دتعریف په بنسټ وټاکئ.

حل: دمساوي اوږدوالي $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ په ډرلو په n فرعي انټروالونو د$[a,b]$ د P یو وېش په پام کي نیسو. د n فرعي انټروالونه عبارت دي:

$$[a, a + \Lambda x], [a + \Lambda x, a + 2\Lambda x], \ldots, [a + \overline{n-1}\Lambda x, a + n\Lambda x = b]$$

c_r د هر فرعي انټروال د کیڼي خوا وروستني نقطه په شان په پام کي نیولو سره، مونږ لاس ته راوړوچي:

$$S(P, f) = S(P, e^x)$$

$$= \Delta x\left\{e^a + e^{a+\Delta x} + e^{a+2\Delta x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{\overline{n-1}\Delta x}\right\}$$

$$= \Delta x \cdot e^a\left\{1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{\overline{n-1}\Delta x}\right\}$$

$$= \Delta x \cdot e^a\frac{1 - e^{n\Lambda\Lambda}}{1 - e^{\Delta x}} = e^a\left(1 - e^{n\Delta x}\right)\frac{\Delta x}{1 - e^{\Delta x}}$$

$$= e^a\left(1 - e^{b-a}\right)\frac{\Delta x}{1 - e^{\Delta x}} = \left(e^a - e^b\right)\frac{\Delta x}{1 - e^{\Delta x}}$$

کله چې $\infty \rightarrow n, 0 \rightarrow \wedge x$ په لېمټ نيولو مونږ لرو

$$\int_a^b e^x dx = (e^a - e^b) n \lim_{n\to\infty} \frac{\wedge x}{1-e^{\wedge x}}$$

$$\int_a^b e^x dx = \left(e^a - e^b\right)\left(-1\right) = e^b - e^a$$

۵. مثال: د $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+.........+\frac{1}{n-n}$ مجموعې لېمټ څرګند کړئ کله چې $n \rightarrow \infty$.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+.........+\frac{1}{n+n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+.........+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln\left(1+x\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln\frac{2}{1} = \ln 2$$

۶. مثال: لاندې لېمټ وټاكئ:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)......................\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

حل: فرض کړي چې

$$y=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)......................\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

$$\therefore \quad \ln y = \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+.........+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\ln y = \int_0^1 \ln\left(1+x\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|x\ln(1-x)\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \\
&= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
&= \ln 2 - \left|x - \lim(1+x)\right|_0^1 \\
&= \ln 2 - \{1 - \ln 2\} = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 \\
&= \ln \frac{4}{e}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} y = e^{\ln 4/e} = \frac{4}{e}$$

۲,۷ پوښتنې

لاندې پوښتنې د تعریف په بنسټ وټاکئ.

1.	$\int_1^5 (6x+5)dx$	6.	$\int_a^b \cos x\, dx$
2.	$\int_a^b x^2 dx$	7.	$\int_a^b \cosh x\, dx$
3.	$\int_1^2 (3x^2+1)dx$	8.	$\int_a^b \sin^2 x\, dx$
4.	$\int_a^b \frac{1}{x} dx$	9.	$\int_a^b \cos^2 x\, dx$
5.	$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$	10.	$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

د لاندې سلسلو د مجموعې لیمټ کله چې $n \to \infty$ وټاکئ

11. $\dfrac{1}{n^{10}}\left\{1^9+2^9+3^9+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^9\right\}$

12. $\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2-2^2}+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}$

13. $\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\dfrac{n}{(n+3)^2}+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{n}{(n+n)^2}$

14. $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{3^2}{n^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

15. $\dfrac{1}{1^2+n^2}+\dfrac{2}{2^2+n^2}+\dfrac{3}{3^2+n^2}+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$

۱,۳,۷ د انتيګرال نيوني اساسي دعوې

دعوې: که چېرې f(x) په $[a,b]$ کې يوه متمادي تابع وي او په $[a,b]$ کې د F(x) مشتق ور تابع شتون ولري پدې ډول چې $F'(x)=f(x)$ ، نو پدې صـــورت کې $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

ثبوت: د $[a,b]$ د $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,n_n\}$ يو وېش په پام کې نيسو. ځرنګه چې په $[a,b]$ کې $F'(x)$ شتون لري، F(x) په $[a,b]$ کې متمادي ده. پدې ځرګندونو سره F(x) د $[x_{r-1},x_r]$ ، $r = 1,2,3,\ldots,n$ په هر فرعي انتروال کې متمادي ده او $F'(x)$ په هغه کې شتون لري. لدې امله د منځني(وسطي) قيمت قضيې پواسطه مونږ د $r=1,2,3,\ldots,n$ لپاره لرو چې:

$$F(x_r)-F(x_{r-1})=F'(C_r)(x_r-x_{r-1}),\quad C_r\in(x_{r-1},x_r)$$

يا

$$\sum_{r=1}^{n}\{F(x_r)-F(x_{r-1})\}=\sum_{r=1}^{n}F'(c_r)\Delta x_r$$

ددغې معادلې کيڼي خوا غړی F(b)-F(a) دی. د فرضيې له مخې، $F'(x)=f(x)$ نو همدارنګه $F'(c_r)=f(c_r)$ ، $r=1,2,3,\ldots\ldots,n$ ، لدې سببه $F(b)-F(a)=\sum_{r=1}^{n}f(c_r)\Delta x = S(P,f)$ په لېمټ نيولو

کله چې $n \to \infty$ او $|P| \to 0$، $S(P, f) \to \int_a^b f(x)\,dx$. څرنګه چې f(x) په $[a,b]$ کې متمادي ده څکه نو $\int_a^b f(x)dx$ شتون لري. لدې امله مونږ لروچې

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

۲,۳,۷ د معین انتیګرالونو ځانګړتیاوې

۱. ځانګړتیا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

ثبوت: که چیرې $\int f(x)dx = F(x)$ نو په څرګند ډول

$$\int f(t)dt = F(t)$$

اوس

$$\int_a^b f(x)dx = \left|F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

او

$$\int_a^b f(t)dt = \left|F(t)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

لدې سببه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

۲. ځانګړتیا:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت: فرضوو چي $\int f(x)dx = F(x)$ ، نو

$$\int_a^b f(x)dx = \left|F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

او

$$-\int_a^b f(x)dx = -\left|F(x)\right|_a^b = -\left(F(a) - F(b)\right) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$$

لدي امله

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

۳. ځانګړتیا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

چېرې چې $a < c < b$.

ثبوت: فرضوو چي $\int f(x)dx = f(x)$ ، نو

$$\int_a^b f(x)dx = \left|F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

او

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \left|F(x)\right|_a^c + \left|F(x)\right|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$
$$= F(b) - F(a)$$

لدي سببه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

په عمومي ډول که چېرې $a < c_1 < c_2 < c_3 ...... < c_n < b$ ، نو

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

۴. **خانګړتیا:**

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

ثبوت: فرض کړئ چې $a-x=t$، نو $dx=-dt$ پدې صورت کې که چېرې $x = 0$، نو $t = a$ او که $x = a$ نو $t = 0$ کېږي، نو لرو چې

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

لدې سببه

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a (a-x)dx$$

۵. **خانګړتیا:** که چېرې $f(x)$ یوه جفت تابع وي ،
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

که چېرې $f(x)$ یوه تاق تابع وي ،
$$= 0$$

ثبوت:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

د ښي لورپه اولنی انټیګرال کې $x=-t$ په ایښودلو، یعنې $dx=-dt$

اوس که چېرې $x=-a$، نو $t=a$ او که چېرې $x=0$ نو $t=0$

$$\therefore \quad \int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx \quad \ldots\ldots(2)$$

د (2) په مرستې سره، مونږ به (1) د

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

په شکل ولیکو.

۱. **حالت:** کله چې $f(x)$ یوه جفت تابع وي

$\therefore \quad f(-x)=f(x)$

نو (3) د

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

سره کيږي.

۲. حالت: که چېرې **f(x)** يو تاق تابع وي

$\therefore \quad f(-x)=-f(x)$

نو (3) د

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

سره کيږي.

۶. خانګړتيا:

که چېرې $f(2a-x)=f(x)$

$$\int_{-a}^{2a} f(x)dx=2\int_{0}^{a}(x)dx \ ,$$

$=0$ ، **که چېرې** $f(2a-x)=-f(x)$

ثبوت: مونږ لروچي

$$\int_{0}^{2a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{2a} f(x)dx \qquad \text{..........} \quad (1)$$

دښي لاس خواته په دويم انتيګرال کي $x=2a-t$ په ايښودلو يعني $dx=-dt$

اوس، کله چي $x=a$ ، نو $t=a$ او کله چي $x=2a$ ، نو $t=0$.

$$\therefore \quad \int_a^{2a} f(x)dx = -\int_a^0 f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-t)dt$$

$$= \int_0^a f(2a-x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

پدې ډول د (2) په مرستې سره مونږ (1) دارنګه لیکو:

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اوس، ۱. **حالت**، کله چې $f(2a-x)=f(x)$، نو (3) څخه لاس ته راځي چې:

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

او، ۲. **حالت**، کله چې $f(2a-x)=-f(x)$، نو (3) څخه لاس ته راځي چې:

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = 0$$

۷. **خانګړتیا:** که چیرې $f(a-x)=f(x)$، نو

$$\int_0^a x\, f(x)dx = \frac{1}{2}a\int_0^a f(x)dx$$

ثبوت: څرنګه چې $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$، مونږ لیکلی شو چې:

$$\int_0^a x\, f(x)dx = \int_0^a (a-x)f(a-x)dx$$

څرنګه چې $f(a-x) = f(x)$، نو

$$= \int_0^a f(a-x)f(x)dx$$

$$= \int_0^a a\, f(x)dx - \int_0^a x\, f(x)dx$$

$$\therefore \quad 2\int_0^a x\, f(x)dx = \int_0^a a\, f(x)dx = a\int_0^a f(x)dx$$

لدي امله

$$\int_0^a x f(x)dx = \frac{1}{2}a\int_0^a f(x)dx$$

۴,۳,۷ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int_{-1}^{5}|x-2|dx$ انتیګرال وټاکئ.

حل: څنګه چې $|x-2| = |2-x| = -(x-2)$، که چیرې $x<2$ او $|x-2| = x-2$، که چیرې $x\geq 2$.

مونږ لیکو چې:

$$\int_{-1}^{5}|x-2|dx = \int_{-1}^{2}|x-2|dx + \int_{2}^{5}|x-2|dx$$

$$= \int_{-1}^{2}(-x+2)dx + \int_{2}^{5}(x-2)dx$$

$$= \left|-\frac{x^2}{2}+2x\right|_{-1}^{2} + \left|\frac{x^2}{2}-2x\right|_{2}^{5}$$

$$= \left\{-2+4-\left(-\frac{1}{2}-2\right)\right\} + \left\{\frac{25}{2}-10-(2-4)\right\}$$

$$= 4+\frac{1}{2}+\frac{25}{2}-8 = 9$$

۲. مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

حل: فرضوو چې

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx \qquad \text{............} (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$$

پدې دول

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx \qquad \text{............}(2)$$

د (1) او (2) په جمع کولو

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cdot \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \{\ln(\sin 2x) - \ln 2\}dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2dx$$

په وروستني انتيګرال کې $2x = t$, $dx = \frac{1}{2}dt$ په اېښودلو.

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\therefore \quad 2I = I - \frac{\pi}{2}(\ln 2) \qquad \therefore \quad I = -\frac{\pi}{2}(\ln 2)$$

لدی سببه

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

۳. مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi}{4}$$

حل: فرض کړئ چې

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx \qquad \text{.............}(1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \qquad \text{............}(2)$$

د(1) او (2) په جمع کولو موږ لاس ته راوړو چې

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\pi/2} dx = |x|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

لدې سببه $I = \frac{\pi}{4}$ یعنې،

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi}{4}$$

۴. **مثال:** ثبوت کړئ چې $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)dx = 0$.

حل:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\ln(\sin x) - \ln(\cos x)]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx - \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] - \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx - \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$$

$$= 0$$

۵. **مثال:** $\int_0^1 \arctan\frac{2x-1}{1+x-x^2}\,dx$ وټاکئ.

حل: فرض کړئ چې

$$I = \int_0^1 arc\tan\frac{2x-1}{1+x-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 arc\tan\frac{2(1-x)-1}{1+1+x-(1-x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 arc\tan\frac{1-2x}{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\int_0^1 arc\tan\frac{2x-1}{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -I$$

$\therefore \; 2I = 0$ یا $I = 0$

لدي سببه

$$\int_0^1 arc\tan\frac{2x-1}{1+x-x^2}dx=0$$

۳,۷ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

$(i)\quad \int_{-2}^{2}|x|\,dx \qquad (ii)\quad \int_0^{3\pi/2}|\cos x|\,dx$

(iii) $\int_0^6 f(x)\,dx$ ، $x\le 2$ کله چې ، $f(x)=x^2$ (که چیرې

او $-3x-2$ ، کله چې $x\ge 2$)

۲. وښایاست چې

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ln(\tan x)dx=0$$

۳. وښایاست چې

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{4}$$

۴. ثبوت کړئ چې

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx-\frac{\pi}{8}\ln 2$$

۵. د $\int_0^{\pi}\frac{x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$ انتیګرال و ټاکئ.

۶. څرګند کړئ چې

$$\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\cos x}dx=\frac{\pi^2}{4}$$

۷. د $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$ انتیګرال وټاکئ.

۸. ثبوت کړئ چې

$$\int_0^1 x(1-x)^{26}\,dx=\frac{1}{756}$$

۹. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

$$(i)\quad \int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\sin x}\qquad\qquad (ii)\quad \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

۱۰. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

$$(i)\quad \int_0^{\pi}\cos^{2n+1}x\,dx\qquad\qquad (ii)\quad \int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3\cos x}dx$$

۱۱. څرګند کړئ چې $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cdot\cos x}\,dx=0$

۱۲. څرګند کړئ چې $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+\sin x\cdot\cos x}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

۱۳. ثبوت کړي چې

$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cot x}=\frac{\pi}{4}\qquad\qquad (ii)\quad \int_0^{a}\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}$$

۱۴. ثبوت کړي چې $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x+\cot x)\,dx=\pi\ln 2$

۱۵. ثبوت کړي چې $\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)\,dx=\frac{\pi^2}{2}\ln\frac{1}{2}$

۱۶. وښایاست چې $\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx=\pi\ln 2$

۱,۴,۷ د اسانه کیدنې (تبدیلونې) فارمول (Reduction Formula)

خورا زیاتو تابعګانو سره مخامخ کیږو چې دهغوی انتیګرال د ستندردو حالتونو یو یا بل حالت ته په مستقیم ډول دبدلونې وړتیا نلري او دهغوي انتیګرالونه په مستقیمه توګه لاس ته نه راځي. په ځینو حالتونو کې، سره لدې هم دارنګه انتیګرالونه البته په خطي ډول د ځینو الجبري فارمولونو پواسطه د نورو افادو له انتیګرال سره اړیکه ورکول کیږي، کومه چې ګوندې په خپله په ګړندې ډول دانتیګرال نیولووړ وي یا په کوم قیمت سره دهغې نظر اصلي تابع ته په اسانې سره انتیګرال نیول کیږي. دارنګه الجبري اړیکو ته د اسانه کیدنې(تبدیلونې) فارمول وایي.

۲،۴،۷ د $\sec^n x, \tan^n x, \sin^n x$ لپاره داسانه کېدنی فارمول

۱. فرض کړئ چې

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x dx \\
&= \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx \\
&= \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int \left[(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x(-\cos x)\right] dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \left[\sin^{n-2} x(\cos^2 x)\right] dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \left[\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\right] dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \sin^n x\, dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad I_n + (n-1)I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$

یا

$$nI_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

په ورته ډول

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

۲. فرض کړئ چې

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \tan^n x\, dx \\
&= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

په ورته ډول

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}}{n-1}\int \cot^{n-2} x\,dx$$

۳. فرض کړئ چې

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^n x\,dx \\ &= \int \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x\,dx \end{aligned}$$

دپارت کولو په واسطه په انتیګرال نیولو

$$\begin{aligned} &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \cdot \tan^2 x\,dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx \end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n(1+n-2) = \sec^{n-2} x \cdot \tan x + (n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore\quad I_n = \frac{\sec^{n-2} x \cdot \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

په ورته ډول

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \cdot \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

۱. **مثال:** د $\int \sin^5 x\,dx$ انتیګرال وټاکئ.

حل: مونږ د بدلوني فارمول په کارولو سره

$$I_n = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$\therefore\quad \int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx$$

او

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx$$

اوس

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

لدي امله

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^4 x}{5} - \frac{4\cos x \cdot \sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\cos x$$

۳،۴،۷ د $\int x^n e^{ax} dx$ لپاره د اسانه کيدني (بدلوني) فارمول

فرض کړئ چي

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx$$

د پارت کولو د میتود په مرسته په انتیګرال نیولو

$$= x^n \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} n x^{n-1} dx$$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

يعني، $I_n = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a} I_{n-1}$

دا د تبديلوني فارمول دی.

مثال: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ وټاکئ.

حل: فرض کړي چي

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &= \left|-x^n e^{-x}\right|_0^\infty - \int_0^\infty n x^{n-1} \left(-e^{-x}\right) dx \\ &= n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\therefore \quad I_n = n I_{n-1}, \quad I_{n-1} = (n-1) I_{n-2}, \quad I_{n-2} = (n-2) I_{n-3}, \ldots$$

نومونږ لاس ته راوړوچي

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n(n-1)(n-2)(n-3)........3.2.1$$

$$= n!$$

۴,۴,۷ د $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ لپاره د اسانه کيدنې(بدلونې) فارمول

دا انتيګرال کيداى شي چې د لاندېنيو شپږو انتيګرالونو څخه کوم يوه پورې تړلى وي (اړه ولري).

1. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1} dx$ 4. $\int x^{m+n}\left(a+bx^n\right)^p dx$
2. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p+1} dx$ 5. $\int x^{m-n}\left(a+bx^n\right)^{p+1} dx$
3. $\int x^{m-n}\left(a+bx^n\right)^p dx$ 6. $\int x^{m+n}\left(a+bx^n\right)^{p-1} dx$

ددې لپاره مونږ لاندېنې کړنلارې کاروو:

(a) مونږ $P = x^{\lambda+1}\left(a+bx^n\right)^{\mu+1}$ په پام کې نيسو، چېرې چې λ او μ په ترتيب سره د x او $a+bx^n$ خورا کوچنی طاقتونه په اړونده دواړو انتيګرالونو کې دي.

(b) $\frac{dP}{dx}$ پيداکوو او دا دوه انتيګرالونه ديوخطي ترکيب په څير چې يو د بل پورې تړلي دي بيا ترتيب وو.

(c) دواړه خواوو څخه انتيګرال نيسو او د غوښتل شوي اسانه کيدنې(تبديلونې) فارمول د لاس ته راوړلو لپاره حدونه سره يوې او بلې خواته اړوو.

مثال: د $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ انتيګرال د $\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1} dx$ انتيګرال پورې تړو.

حل: فرضوو چې $P = x^{m+1}\left(a+bx^n\right)^p$

په مشتق نيولو، مونږ لاس ته راوړو چې:

$$\frac{dP}{dx}=(m+1)x^m\left(a+bx^n\right)^p+x^{m+1}p\left(a+bx^n\right)^{p-1}nbx^{n-1}$$
$$=(m+1)x^m\left(a+bx^n\right)^p+npx^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}bx^n$$
$$=(m+1)x^m\left(a+bx^n\right)^p+npx^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}\left(a+bx^n-a\right)$$
$$=(m+1)x^m\left(a+bx^n\right)^p+npx^m\left(a+bx^n\right)^p-napx^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}$$
$$=(m+1+np)x^m\left(a+bx^n\right)^p-napx^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}$$
$$P=(m+1+np)\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx-nap\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}dx$$

يا

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)dx=\frac{x^{m+1}\left(a+bx^n\right)^p}{m+1+np}+\frac{nap}{m+1+np}\int x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}dx$$

غوښتل شوی فارمول دی.

۵,۴,۷ د $\int\sin^p x\cdot\cos^q x\,dx$ لپاره د اسانه کيدنې(بدلونې) فارمول

دا انتيګرال ښايي چې د لاندينيو شپږو انتيګرالونو هر يوه سره اړيکه ولري.

1. $\int\sin^{p-2}x\cdot\cos^q x\,dx$ 4. $\int\sin^p x\cdot\cos^{q-2}x\,dx$
2. $\int\sin^{p-2}x\cdot\cos^q x\,dx$ 5. $\int\sin^p x\cdot\cos^{q+2}x\,dx$
3. $\int\sin^{p-2}x\cdot\cos^{q+2}x\,dx$ 6. $\int\sin^{p+2}x\cdot\cos^{q-2}x\,dx$

ددې لپاره مونږ کړنلاره کاروو چې په مخکنې برخه کې $P=\sin^{A+1}x\cdot\cos^{B+1}x$ پواسطه تشريح شويده.

مثال: يوفارمول پيداکړئ چې $\int\sin^p x\cdot\cos^q x\,dx$ د $\int\sin^{p-2}x\cdot\cos^{q-2}x\,dx$ سره اړيکه(ارتباط)ورکوي.

حل: فرضوو چې

$$P=\sin^{p-1}x\cos^{q-1}xdx$$

$$\therefore\quad \frac{dP}{dx}=(p+1)\sin^p x\cdot\cos x\cdot\cos^{q-1}x+(q-1)\sin^{p+1}x\cdot\cos^{q-2}x(-\sin x)$$

$$=(p+1)\sin^p x\cdot\cos^q x-(q-1)\sin^{p+2}x\cdot\cos^{q-2}x$$

$$=(p+1)\sin^p x\cdot\cos^q x-(q-1)\sin^p x\cdot\cos^{q-2}x(1-\cos^2 x)$$

$$=(p+1)\sin^p x\cdot\cos^q x-(q-1)\sin^p x\cdot\cos^{q-2}x+(q-1)\sin^p x\cdot\cos^q x$$

$$=(p+q)\sin^p x\cdot\cos^q x-(q-1)\sin^p x\cdot\cos^{q-2}x$$

په انټیګرال نیولو

$$P=(p+q)\int\sin^p x\cdot\cos^q dx-(q-1)\int\sin^p x\cdot\cos^{q-2}dx$$

یا

$$\int\sin^p x\cdot\cos^q dx=\frac{\sin^{p+1}x\cdot\cos^{q-1}dx}{p+q}+\frac{q-1}{p+q}\int\sin^p x\cdot\cos^{q-2}dx$$

۶.۴.۷ د انټیګرالونو اټکل کول

د $S_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ او $C_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ ، چیرې چې n یو مثبت تام عدد دی.

راځي چې مونږ د $\int\sin^n x$ انټیګرال ته د $\int\sin^{n-2}x\,dx$ انټیګرال سره اړیکه ورکړو

∴ په قانون سره سم $P=\sin^{n-1}x\cdot\cos x$ ، نو پدې صورت کې:

$$\frac{dP}{dx}=(n-1)\sin^{n-2}\cos^2 x-\sin^n x$$

$$=(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)-\sin^n x$$

$$=(n-1)\sin^{n-2}x-(n-1)\sin^n x-\sin^n x$$

$$=(n-1)\sin^{n-2}x-n\sin^n x$$

$$\therefore\quad \int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

اوس، $\sin^{n-1}x\cdot\cos x$ کله چې x یو تام عدد او له 2 څخه کوچنی نه وي له منځه ځي ، کله چې $x=0$ ، او همدارنګه کله چې $x=\frac{\pi}{2}$ ، مونږ لرو چې

∴ مونږ لرو

$$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot S_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot S_{n-4}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot S_{n-6}=\ldots\ldots$$

که چېرې n جفت وي

$$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1dx$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

سره کيږي. که چېرې n تاق وي ،مونږ لاس ته راوړو چې

$$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$$

او ځرنګه چې

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\left|-\cos x\right|_0^{\pi/2}=1$$

مونږ لرو چې

$$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

په يوې ورته کړنلارې سره دا به ځرګند شي چې

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$ ، (که چېرې n جفت وي)

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$ ، (که چېرې n تاق وي)

مثال: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10} dx=\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{63}{512}\pi$ او $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 dx=\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{128}{315}$

يادونه: د S_n او C_n انتيګرالونه په ترتيب سره د واليس د Sine او Cosine فارمولونو په توګه پېژندل کيږي.

۷,۴,۷ د $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx$ لپاره اتکل کول، چېرې چې p او q مثبت عددونه دي

راځي چې $\int \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx$ د $\int \sin^{p-2} x \cdot \cos^q x\,dx$ سره په اړیکه کې کړو.

په قانون سره سم $p = \sin^{p-1} x \cos^{q+1} x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= (p-1)\sin^{p-2} x \cdot \cos^{q+2} - (q+1)\sin^p x \cdot \cos^q x \\
&= (p-1)\sin^{p-2} x \cdot \cos^q x\left(1-\sin^2 x\right) - (q+1)\sin^p x \cdot \cos^q x \\
&= (p-1)\sin^{p-2} x \cdot \cos^q x - (p+q)\sin^p x \cos^q x
\end{aligned}$$

په انتیګرال نیولو اوپه بیا ترتیبولو، مونږ لاس ته راوړو:

$$\int \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cdot \cos^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cdot \cos^q x\,dx$$

لدې امله

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx &= \left| -\frac{\sin^{p-1} x \cdot \cos^{q+1} x}{p+q} \right|_0^{\pi/2} + \frac{p-1}{p+q}\int_0^{\pi/2} \sin^{p-2} x \cdot \cos^q x\,dx \\
&= \frac{p-1}{p+q}\int_0^{\pi/2} \sin^{p-2} x \cdot \cos^q x\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots(1)
\end{aligned}$$

په p-2 باندې د p په ونج کولو مونږ لاس ته راوړوچې:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-2} x \cdot \cos x dx = \frac{p-3}{p+q-2}\int_0^{\pi/2} \sin^{p-4} x \cdot \cos^q x dx$$

په (1) کې ددې قیمت په ونج کولو،مونږلاس ته راوړوچې:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx &= \frac{(p-1)(p-3)}{(p+q)(p+q-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-4} x \cdot \cos^q x\,dx \\
&= \frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{(p-q)(p-q-2)(p+q-4)}\int_0^{\pi/2} \sin^{p-6} x \cdot \cos^q x\,dx
\end{aligned}$$

۱. **حالت:** کله چې p تاق وي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\, dx = \frac{(p-1)(p-3).....2}{(p+q)(p+q-2).....(q+3)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\ x \cdot \cos^q x\, dx$$

(د $(p-1)$, $(p-3)$ ... یادشوي فکتورونه ټول جفت دي او وروستنی فکتور کله چې $P = 3$ وي 2 ده، نو دغه قیمت لپاره مونږ په مخرج کې د وروستني قیمت په شان $q + 3$ لاس ته راوړو).

$$= \frac{(p-1)(p-3).....2}{(p+q)(p+q-2).....(q+3)} \left| -\frac{\cos^{q+1} x}{q+1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

لدې امله کله چې p تاق وي، مونږ لرو چې:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\, dx = \frac{(p-1)(p-3).....2}{(p+q)(p+q-2).....(q+3)} \cdot \frac{1}{q+1}$$

۲. **حالت:** کله چې p جفت وي مونږ لرو چې:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\, dx = \frac{(p-1)(p-3).....1}{(p+q)(p+q-2).....(q-2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q x\, dx$$

اوس (۱). کله چې q تاق وي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q x\, dx = \frac{(q-1)(q-3).....2}{q(q+2).....3}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q dx = \frac{(p-1)(p-3).....2}{(p+q)(p+q-2).....(q+2)} \frac{(q-1)(q-3).....2}{q(q-2)......3}.$$

او (۲). کله چې q جفت وي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q x\, dx = \frac{(q-1)(q-3).....1}{q(q-2).....2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q dx = \frac{(p-1)(p-3).....1}{(p+q)(p+q-2).....(q+2)} \cdot \frac{(q-1)(q-3).....1}{q(q-2)......2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

په پایله کې مونږ لاندې پایلې لرو

۱. کله چې p تاق وي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = \frac{p-1}{p+q} \cdot \frac{p-3}{p+q-2} \cdots\cdots \frac{2}{q+3} \cdot \frac{1}{q+1}$$

(۲). کله چې p جفت وي، q تاق وي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = \frac{p-1}{p+q} \cdot \frac{p-3}{p+q-2} \cdots\cdots \frac{1}{q+2} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{q-3}{q-2} \cdots \frac{2}{3}$$

(۳). کله چې p جفت وي او q هم جفت وي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = \frac{p-1}{p+q} \cdot \frac{p-3}{p+q-2} \cdots\cdots \frac{1}{q+2} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{q-3}{q-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

دا درې پایلې کولی شو چې په لاندې ډول یې لنډې(خلص) کړو:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = \frac{(p-1)(p-3)\ldots\ldots(q-1)(q-3)\ldots\ldots}{(p+q)(p+q-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \frac{\pi}{2}$$

چیرې چې $\frac{\pi}{2}$ یوا ځې لیکل شوی دی هغه وخت P او q دواړه جفت وي او د فکتورنو درې سلسلې تر هغه پورې چې فکتورونه په هره سلسله کې مثبت وي متمادي دي.

دګاما تابع په مرستې سره ، مونږ لیکلی شو چې

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

چیرې چې ګاما تابع په لاندې ډول تعریف شویده

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad , \quad \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cdot \cos^4 x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5+4+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(3)\left(\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{2\cdot 1\cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{8}{315}$$

۸,۴,۷ $\frac{\pi}{2}$ لپاره د والیس (Wallis) د ضرب فارمول

فرضوو چې n يو مثبت تام عدد دی، نو

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

څکه 2n جفت دی او

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}$$

څکه 2n+1 تاق دی.

له دغو معادلو څخه مونږ لاس ته راوړوچي

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2n(2n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots\ldots 5\cdot 3\cdot 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx \qquad \ldots\ldots\ldots(A)$$

او

$$1 = \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots 7.5.3}{2n(2n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots 6.4.2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx \qquad \ldots\ldots\ldots(B)$$

په B باندې د A په ویشلو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots\ldots\ldots(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots\ldots\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx} \qquad \ldots\ldots\ldots(C)$$

اوس د $0\le x\le\frac{\pi}{2}$، لپاره مونږ لرو $0\le\sin x\le 1$ او سربیره پدې

$$0\le\sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x\le 1$$

او

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots(D)$$

همدارنګه د بدلوني له فارمول څخه، مونږ لرو

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots(E)$$

∴ له (D) او (E) څخه مونږ لرو:

$$1\le\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx}\le 1+\frac{1}{2n}$$

لدې سببه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx}=1$$

له (C) څخه، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots\ldots(2n)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)}$$

کوم چې $\frac{\pi}{2}$ لپاره د والیس ضرب فارمول په شان پیژندل کیږي.

۹,۴,۷ حل شوي مثالونه

۱. مثال: لاندي انتيګرالونه وټاکئ:

$$1. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx \qquad 2. \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\, dx$$

حل: (1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

(2).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\, dx$$

فرضوو چې $3x = z$, $dx = \frac{dz}{3}$

کله چې $x = 0$, $z = 0$

او کله چې $x = \frac{\pi}{6}$, $z = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z\, dz$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{96}$$

۲. مثال: د $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$ انتيګرال وټاکئ.

حل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

۳. مثال: د $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$ لپاره بدلوني يو فارمول پيداکړئ.

وروسته لدې ثبوت کړئ چې $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^5} = \frac{35}{256}\pi$.

حل: راځئ چې مونږ $\int \frac{x^0 dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$ ته د $\int \frac{x^0 dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}$ سره اړيکه ورکړو.

لدې امله

$$\therefore \quad P = x\left(a^2 + x^2\right)^{-n+1}$$

$$\frac{dP}{dx} = \left(a^2 + x^2\right)^{-n+1} + x(-n+1)\left(a^2 + x^2\right)^{-n} 2x$$

$$= \left(a^2 + x^2\right)^{-n+1} + 2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n}\left(a^2 + x^2 - a^2\right)$$

$$= \left(a^2 + x^2\right)^{-n+1} + 2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n-1} - 2a^2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n}$$

$$= (1+2-2n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n+1} - 2a^2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n}$$

$$= (3-2n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n+1} - 2a^2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{-n}$$

په انتیګرال نیولو

$$\frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}} = (3-2n)\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}} - 2a^2(1-n)\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n}}$$

$$\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n}} = \frac{-x}{2a^2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}} - \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\int \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}}$$

د بدلوني غوښتل شوی فارمول دی.

اوس

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n}} = \left|\frac{-x}{2a^2(1-n)\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}}\right|_0^{\infty} + \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^{n-1}}$$

یعني

$$I_n = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} \cdot I_{n-1}$$

$a = 1$ ، $n = 5,4,3,2,$ په اېښودلو مونږ لاس ته راوړو

$$I_5 = \frac{7}{8} I_4 \quad , \quad I_4 = \frac{5}{6} I_3 \quad , \quad I_3 = \frac{3}{4} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left|\tan^{-1} x\right|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad I_5 = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^5} = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$$

۴. مثال: ثبوت کړئ چې

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

وروسته لدې څخه

$$(i) \quad \int x^m (\ln x)^3 dx \qquad (ii) \quad \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$$

$$(iii) \quad \int_0^1 x^4 (\ln x)^3 dx$$

پیداکړئ.

حل: د پارټ کولو (حصوي)د انتیګرال نیوني په بنسټ

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (\ln x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} .n(\ln)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln)^{n-1} dx \qquad ....(1)$$

دا غوښتل شوې پایله ده.

په (1) کې $n = 3$ په اینودلو

.(i)

$$\int x^m (\ln x)^3 dx = \frac{x^{m+1}(\ln)^3}{m+1} - \frac{3}{m+1}\int x^m (\ln x)^2 dx$$

په (1) کې د $n = 2$ لپاره

$$\int x^m (\ln x)^2 dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^2}{m+1} - \frac{2}{m+1}\int x^m \ln x \cdot dx$$

او د $n=1$ لپاره

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{n^{m+1} \ln x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^m \, dx$$

او

$$\int x^m \, dx = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

ددغو قېمتونو په عوض کولو موږ لاس ته راوړو چې:

$$\int x^m (\ln x)^3 \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^3}{m+1} - \frac{3x^{m+1} (\ln x)^2}{(m+1)^2} + \frac{6x^{m+1} \cdot \ln x}{(m+1)^3} - \frac{6}{(m+1)^4} x^{m+1}$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (\ln x)^3 - \frac{3(\ln x)^2}{m+1} + \frac{6 \ln x}{(m+1)^2} - \frac{6}{(m+1)^3} \right\}$$

(ii) : له (i) څخه لرو چې

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \left| \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} \right|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$$
$$= -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

د n پرځای د $(n-1)$, $(n-2)$,........, 2 , 1 په وضع کولو

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx = -\frac{n-1}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-2} \, dx$$
$$\int_0^1 x^m (\ln x)^{n-2} \, dx = -\frac{n-2}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-3} \, dx$$
$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2 \, dx = \frac{2}{m+1} \int_0^1 x^m \ln x \, dx$$
$$\int_0^1 x^m \ln x dx = -\frac{1}{m+1} \int_0^1 x^m \, dx$$

او

$$\int_0^1 x^m dx = \left|\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

ددغو قیمتونو په ونج کولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$\int_0^1 x^m (\ln)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n-1}}$$

(iii) $n = 3,\ m = 4$ لپاره

$$\int_0^1 x^4 (\ln x)^3 dx = \frac{(-1)^3 3!}{(4+1)^4} = -\frac{6}{625}$$

۴,۷ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1. $\int \sin^6 x\,dx$ 2. $\int \tan^7 x\,dx$ 3. $\int \operatorname{cosec}^8 x\,dx$

۲. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1. $\int \sin^2 x \cdot \cos^6 x\,dx$ 2. $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 dx$

3. $\int \sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^3 x\,dx$

۳. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2x\,dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x\,dx$

۴. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^7 x\,dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^6 x\,dx$

۵. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

$$1.\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx \qquad\qquad 2.\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$$

۶. ثبوت کړي چې.

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{\sec^{2n-1} x \tan x}{2n} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\int \sec^{2n-1} x\,dx$$

۷. د $\int\left(a^2+x^2\right)^{\frac{n}{2}}dx$ لپاره د یو فارمول پیداکړئ او وروسته لدې $\int\left(a^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}dx$ پیداکړئ.

۸. که چیرې $I_n=\int_0^1 x^p\left(1-x^q\right)^n dx$، کوم چې q ,p او n مثبت دي، ثبوت کړئ چې $(nq+p+1)I_n = nqI_{n-1}$,
I_n وټاکئ کله چې n یو مثبت تام عدد وي.

۹. د $\int_0^a \frac{x^m}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ لپاره د بدلوني یو فارمول پیداکړئ او وروسته لدې $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}dx$ وټاکي.

۱۰. که چیرې $I_n=\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ وي، ثبوت کړئ چې

$$I_n = -\frac{x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2}a^2 I_{n-2}$$

وروسته $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ وټاکئ.

۱۱. $\int x^n e^{ax}dx$ لپاره بدلوني فارمول پیداکړئ اوبیا $\int x^3 e^{ax}dx$ وټاکئ. څرګند کړئ چې $\int_0^\infty x^n e^{ax}dx = n!$, کله
چې n یو مثبت تام عدد وي.

۱۲. ثبوت کړئ چې $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{32}$.

۱۳. ثبوت کړئ چې

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\,dx = \frac{1}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x\sin(n-1)x\,dx$$

او وروسته $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\cdot\sin 3x\,dx$ وټاکئ.

۱۴. که چیرې $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ وي، ثبوت کړئ چې

1. $n\{f(n-1)+f(n+1)\}=1$
2. $(n-1)\{f(n)+f(n-2)\}=1$

۱۵. که چېرې $U_n=\int x^n\sqrt{a-x}\,dx$ وي، ثبوت کړئ چې

$$(2n+3)U_n=2anU_{n-1}-2x^n(a-x)^{3/2}$$

وروسته ددې پایه بلی طریقې سره $\int_0^a x^2\sqrt{ax-x^2}\,dx$ وټاکئ.

۱۶. ثبوت کړئ چې

$$\int\frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx=\frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{\sin^m x}{\cos^{n-2}x}dx$$

۱۷. $\int_0^{2a}x^m\sqrt{2ax-x^2}\,dx$ وټاکئ، m یو مثبت تام عدد دی، وروسته له دې یا په بل ډول د لاندې انتیګرالونو قیمتونه لاسته راوړئ.

1. $\int_0^{2a}x\,\sqrt{2ax-x^2}\,dx$ 2. $\int_0^{2a}x^4\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

۱۸. ثبوت کړي چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4 x\cos^7 x\,dx=\frac{32}{1155}$$

۹,۴,۷ الف. عددي انتیګرال نیونه

د یو معین انتیګرال دټاکلو لپاره میتود (قاعده) د یوې انتیګرالي تابع د مشتق معکوس د پیداکولواودانتیګرال دپګړولو لومړني بنسټیزې دعوې په څیر چې په ۷,۲,۱ برخه کې شرح شویده دی. که چېرې یو معکوس مشتق پیداکیدلی نشي، نو په هغه صورت کې انتیګرالي قیمت کولی شود اټکلي کاربدونکي میتود پواسطه چې په همدې برخه کې به ولوستل شي په لاس راوړو.

د ساده اټکل لپاره مونږ د ریمان مجموعه چې په ۷,۱,۳ برخه کې شرح شوېده کاروو. هماغه برخه کې مونږ روښانه کړي وه چې.

$$(x_1 - x_0)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(c_2) + \ldots\ldots + (x_r - x_{r-1})f(c_r) + \ldots\ldots$$
$$+ (x_n - x_{n-1})f(c_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{n}(x_r - x_{r-1})f(c_r) = \sum_{r=1}^{n}\Delta x_r f(c_r)$$

لکه د f(x) ریمان مجموعه د (a,b) د $P = \{x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n\}$ وېشنې پورې اړه لري.

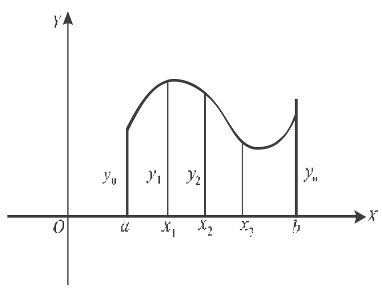
که چېرې مونږ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، او C_r ونیسو، r - ام فرعي انټروال د (x_r, x_{r-1}) یوه نقطه په پام کې ونیسو، مونږ لیکلی شو چې

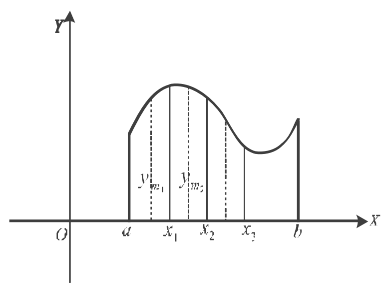
$$\int_0^b f(x)dx = \Delta x\left[f(c_1) + f(c_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(c_n)\right]$$

که چېرې مونږ د f(x) قیمتونه د فرعي انټروالونو پای نقطو کې د

$y_0 = f(a), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ldots, \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \quad y_n = f(x_n)$ پواسطه

او د f(x) قیمتونه د فرعي انټروالونو په منځنیو نقطو کې د $y_{m_1}, y_{m_2}, y_{m_3}, \ldots\ldots\ldots, y_{m_n}$ پواسطه وښیو.





پدې ښودنې سره د کیڼې خوا ځوکې نقطه، د ښي خوا ځوکې نقطه او منځنې نقطې اټکلونه دا رنګه لیکلی شو:

۱. دکیڼې خوا د ځوکې نقطې اټکل

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_0 + y_1 + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}\right]$$

۲. دښي خوا د ځوکې یا وروستنی نقطی اټکل

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_n\right]$$

۳. د منځني نقطې اټکل

$$\int_0^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[y_{m_1} + y_{m_2} + \ldots\ldots\ldots + y_{m_n}\right]$$

دغه اټکل ته مستطيلي قانون هم وايي.

د کيڼې خوا او ښي خوا اټکلونه په عمل کې په نادره(په خوراکمه) توګه کارول کېږي، خو بيا هم، که چېرې مونږ د کيڼې خوا او ښي خوا دځوکو د اټکلونو منځني نقطه په پام کې ونيسو ، مونږ يوه پاېله په لاس راوړو، چې ذوذنقه يي اټکل ورته وايي کوم چې په عمومي ډول سره کارول کېږي.

۹,۴,۷ ب. ذوذنقه يي قاعده

د کيڼې خوا او د ښي خوا منځنی اټکل څخه پاېله لاس ته راځي که چېرې $h = \frac{b-a}{n}$،

$$T = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots - 2y_{n-1} + y_n\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2y_{n-1} - y_n\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

که چېرې په $[a,b]$ کې $f(x) \geq 0$، $\int_a^b f(x)dx$ د $f(x)$ لاندې د$[a,b]$ پورته مساحت ښيي. (1) په هندسي ډول د ذوذنقه اي مساحتونو چې په مخکنې شکل کې ښودل شويدي مجموعه ښيي. ددغه دليل په بنسټ دغه فارمول ته ذوذنقه اي قاعده وايي.

۱. مثال: د ذوذنقه اي قاعدې په کارولوسره د $n = 4$ په پرتله والي د $\int_1^2 x^2 dx$ اټکلي قيمت وټاکئ. اوبيا اټکلي قيمت د انتيګرال له حقيقي قيمت سره پرتله کړئ.

حل: د ذوذنقه اي اټکل د پيداکولو لپاره، مونږ انتيګرالي انتروال په مساوي اوږدوالي په څلورو فرعي انتروالونو باندې وېشو او د $y = x^2$ قيمتونه د ځوکو په نقطو کې اود وېش په نقطو کې لسټ کوو او

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

x	1	$5/4$	$6/4$	$7/4$	2
$y = x^2$	1	$25/16$	$36/16$	$49/16$	4

د (1) دکارولو پواسطه مونږ لاس ته راوړوچي

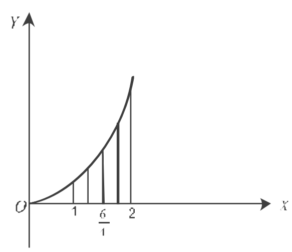
$$T = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[1 + \frac{50}{16} + \frac{72}{16} + \frac{98}{16} + 4\right] = \frac{75}{32} = 2.3475$$

د انتیگرال حقیقي قیمت په لاندې ډول دی

$$\int_1^2 x^2 dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3} = 2.33333$$

تقریبا اټکل یو لږ څه لوړ دی.

هره ذوذنقه په لږ اندازه له اړونده تړانګي څخه چې له منحني لاندې ده زیاته ده.



۹،۴،۷ ج. په ذوذنقه اي اټکل کې د تېروتنې (خطا) مخه نیول

له پورتني شکل څخه څرګندېږي چې د تېروتنې د ارزښت اندازه

$$E_T = \int_a^b f(x)dx - T$$

په ذوذنقه اي اټکل کې دکمښت ټاکل قدم په قدم د h د اندازې د کمښت په شان دي. څکه ذوذنقې ددوی د عدد د ډېرښت په شان منحني په ښه توګه وي. يوه مسئله د پرمختللي کلکولس څخه موږ ښايو چې دا به هغه حالت وي که چېرې f(x) يو متمادي دویم مشتق ولري. فرض ووچې $f''(x)$ متمادي ده او M په $[a,b]$ کې د $f''(x)$ قیمتونو لپاره ګومه پاسني پوله(بند) وي نو

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2 M \text{ يا } |E_T| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

سره لدې چې مونږ ته عمومي اصول څرګندوي چې هلته به همیش د M یو خورا کوچنی دادمن (باوري) قیمت وي. په عمل کې مونږ په زحمت سره دا هیڅ پیداکولی نشو. په عوض کې مونږ خورا ښه قیمت پیدا کوو مونږ کولی شو او او ادامه ورکولی شو چې له دوی څخه د $|E_T|$ ارزښت وټاکو. دیو راکړ شوي M لپاره د $|E_T|$ د کوچني کولو په موخه مونږ h کوچني کوو.

۲. **مثال:** (1). د $\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$ انتیګرال n = 4 لپاره ارزښت وټاکئ او د $|E_T|$ لپاره یوه پاسنی پوله (بند) پیدا کړئ.

(2). انتیګرال په مستقیم ډول وټاکئ او حقیقي تیروتنه پیداکړئ.

(3). $|E_T|$ د انتیګرال د حقیقي قیمت د یوې سلنې غوندې څرګند کړئ.

حل:

$$(1) \qquad h=\frac{b-a}{n}=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y=x^2+1$	2	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2

$$\begin{aligned}T=\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx&=\frac{h}{2}\left[y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4\right]\\&=\frac{1}{4}\left[2+2\left(\frac{5}{4}\right)+2(1)+2\left(\frac{5}{4}\right)+2\right]\\&=\frac{11}{4}=2.75\end{aligned}$$

اوس د $f(x)=x^2+1$ څخه $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, مونږ کولای شو چې 2 = M په پام کې ونیسو

$$\therefore \quad |E_T|\le\frac{b-a}{12}h^2M=\frac{1+1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2=\frac{1}{12}=0.0833$$

$$(2)\quad \int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \left|\frac{x^3}{3}+x\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+1-\left(\frac{-1}{3}-1\right)$$

$$= \frac{2}{3}+2 = \frac{8}{3} = 2.6667$$

$\therefore$ حقيقي خطا $|E_r| = 2.75 - 2.6667 = 0.083$

(3). همدارنګه $|E_T|$ د انتیګرال حقیقي قیمت د سلنې په شان

$$= \frac{0.0833}{2.6667}\cdot 100 = 3.1237 = 3\%$$

۷.۴.۹. د د سیمپسون قاعده

په ذوزنقه اي قاعده کې مونږ کوښښ کوو چې انتیګرال نیونه د تابع د اټکلوني پواسطه ساده کړو ځوچې د مستقیم خطونو ټوټو (قطعاتو) د یوې سلسلې پواسطه انتیګرال ونیول شي. د سیمپسون په قاعده کې مونږ کوښښ کووچې د پارابولیک قطعاتو د یوې سلسلې پواسطه اټکل وکړو، پدې هیله چې پارابولا به خورا زیات د f(x) یو راکړ شوي منحني ته نژدې ورته والی ولري نسبت په ذوزنقوي قاعدې کې د مستقیم خط ټاکنی ته. دا د سیمپسون قاعدې ترشا مفکوره ده کوم چې د

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

ډول پارابولیک منحني ګڼي کارول کیږي چې د y = f(x) منحني برخې اټکل کړي.

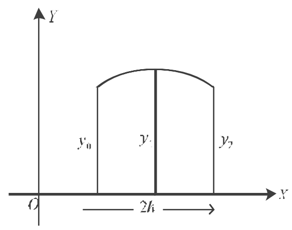
ددې لپاره چې دسیمپسون قاعدې څرګندونه ساده کړومونږ په $[a,b]$ کې $f(x)\geq 0$ په پام کې نیسو پدې ډول مونږ کولی شوچې $\int_a^b f(x)dx$ لکه یو مساحت تعبیر کړو. که څه هم، دا میتود بې له کومې انګیرنې (پفرضیې) څخه قانوني ده. د سیمپسون قاعدې اصلي موخه د

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

فارمول دی، کوم چې د

$$y = ax^2 + bx + c$$

منحني لاندې د یوه اختیاري انتروال د پاسه د 2h پراخوالی راکوي. پدې فارمول کې y_0, y_1 او y_2 د y قیمتونه د کیڼې خوا دڅوکې په نقطه کې، د m په منحني نقطې کې او د انتروال دښې خوا دڅوکې په نقطه کې ښيي.



د (2) مشتق نیولو ښاره په پام کې ونیسئ چې د کیڼ لاس د څوکې د نقطې انټروال m – h دی او د ښي لاس د څوکې د نقطې انټروالm + h دی، دارنګه د A مساحت د $y = ax^2 + bx + c$ لاندې او دهمدغه انټروال دپاسه دی:

$$A = \int_{m-h}^{m+h} (ax^2 + bx + c)dx = \left| \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right|_{m-h}^{m+h}$$

$$= \frac{a}{3}\left[(m+h)^3 - (\boldsymbol{m}-h)^3\right] + \frac{b}{2}\left[(\boldsymbol{m}+h)^2 - (\boldsymbol{m}-h)^2\right] + \boldsymbol{c}\left[(\boldsymbol{m}+h) - (\boldsymbol{m}-h)\right]$$

$$= \frac{a}{3}(6m^2h + 2h^3) + \frac{b}{2}(4mh) + c(2h)$$

$$A = \frac{h}{3}\left[a(6m^2 + 2h^2) + b(6m) + c(2h) + 6c\right] \qquad ....(3)$$

خود $y = ax^2 + bx + c$ منحني قېمتونه د کیڼې خوا د څوکې په نقطه کې، په مېنځنی نقطه کې او د ښې خوا د څوکې په نقطه کې په ترتیب سره

$$y_0 = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{m}-h)^2 + b(\boldsymbol{m}-h) + c$$

$$y_1 = am^2 + bm + c$$

$$y_2 = a(m+h)^2 + b(m+h) + c$$

دي له دوې څخه د اڅرګندېږي چې

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = a(6m^2 + 2h^2) + b(6m) + 6c \qquad .... \ (4)$$

نو مونږ لیکلی شو چې:

$$A = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

د سیمپسون فارمول د $[a,b]$ انتروال دفرعی انتروالونو د h په مساوي پراخوالي سره د یو جفت عدد د وېشلو نه لاسته راځي او (2) فارمول پکارولو سره د $y = f(x)$ منحني د لاندې د پرله پسې فرعي انتروالونو جوړو دپاسه مساحت اټکل کوو. ددغو اټکلونو مجموعه په پایله کې د $\int_a^b f(x)dx$ یوارزښت دټاکلو په شان کاروركوي.

د زیاتو روښانولو لپاره ، که چیرې $[a,b]$ د $h=\dfrac{b-a}{n}$ په مساوي پراخوالی په n فرعي انتروالونو باندې (n جفت دی) وویشواوفرض وو چې $y_0, y_1, y_2,.......,y_n$ دفرعي انتروال دڅوکو په نقطو $a = x_0, x_1, x_2,......,x_n = b$ کې د $y = f(x)$ قیمتونه دي.

د (2) پواسطه د $y = f(x)$ لاندې او دلومړنیو دوو فرعي انتروالونو دپاسه مساحت په اټکلي ډول :

$$\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

او د فرعي انتروالونو د دویمو جوړو دپاسه مساحت په اټکلي ډول:

$$\frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

او د فرعي انتروالونو د وروستنیو جوړو دپاسه مساحت په اټکلي ډول:

$$\frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

دی.

د ټولو اټکلونو په جمع کولو د مقدارونو په محاسبه کولو او د h پرځای د $\dfrac{b-a}{n}$ په عوض کولو د سیمپسون فارمول لاسته راځي.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ...+ 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

مونږ به د سیمپسون د اټکلوني(تقریبي)فورمول د n فرعي انتروالونو لپاره د S پواسطه ښیو، او څرګنده به کړو چې تیروتنه یې د اټکل کې.

$$E_s = \int_a^b f(x)dx - s$$

دی.

۷,۴,۹.ه   د سېمپسون فارمول لپاره د تېروتنې مخه نیول

د سېمپسون په فارمول کې د تېروتنې د ارزښت ټاکلو اندازه

$$E_s = \int_a^b f(x)dx - s$$

قدم په قدم هغه شانتې کمېږي ، څنګه چې مونږ د خیلي تجربې څخه په ذوذنقه اي قاعده کې هیله (توقع) لرله.د سېمپسون قاعدې د تېروتنې د کنټرول لپاره نا مساوات، سره لدې پدې پام کې نیولو سره چې f(x) یو متمادي څلورم مشتق ته مازې (فقط) په تعویض کولو یو متمادي دویم مشتق لري. په پرمختللي کلکولس کې د یو فارمول وړاندیز په لاندې ډول شوی شوی دی:

د سېمپسون قاعدې لپاره د تېروتنې ارزښت ټاکل:

که چېرې $f^{IV}(x)$ متمادي او M د $[a,b]$ په انټروال باندې د $|f^{IV}(x)|$ قیمتونو لپاره کومه پاسنی پوله (بند) وي، نو

$$|E_s| \le \frac{b-a}{180} h^4 M$$

څرنګه چې په ذوذنقه اي قاعدې سره، مونږ په اټکلي ډول هیڅکله نشو کولی چې د M یوشونې کوچنی قیمت وټاکو. مونږ یو مناسب ښه قیمت د لاس ته راوړلو لپاره، کولی شو چې لدې ځایه څخه په تللو تللو د $|E_s|$ لپاره ارزښت وټاکو.

۳. مثال: د سېمپسون د قاعدې په کارولو سره $n = 4$ ته د $\int_0^1 5x^4 dx$ اټکلي قیمت پیدا کړئ او پدې اټکل کې د تېروتنې ارزښت وټاکئ.

حل: د سېمپسون په اټکل $n = 4$ ته په لاس ته راوړو چې

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}, \qquad y = f(x) = 5x^4$$

x	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1
y	0	$5/256$	$80/256$	$405/256$	5

$$S=\int_0^1 5x^4dx=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right]$$
$$=\frac{1}{12}\left[0+4\left(\frac{5}{256}\right)+2\left(\frac{80}{256}\right)+4\left(\frac{405}{256}\right)+5\right]$$
$$=\frac{1}{12}\left[\frac{5}{64}+\frac{40}{64}+\frac{405}{64}+5\right]$$
$$=\frac{1}{12}\left(\frac{770}{64}\right)=\frac{770}{768}=1.0026$$

د تېروتنې د ارزښت اټکولو لپاره، موږ لومړی یوه پاسنی پوله (حد) M د $[0,1]$ په انټروال کې د $f(x)=5x^4$ د څلورم مشتق اندازه لاس ته راوړو. څرنګه چې څلورم مشتق 120 ثابت قیمت لري، موږ ممکن په اسانۍ سره $M=120$ په پام کې ونیسو. په $b-a=1$ او $h=\frac{1}{4}$ سره، موږ لرو چې

$$\left|E_s\right|\le\frac{b-a}{180}h^4\cdot M=\frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4(120)=\frac{1}{384}$$
$$\therefore\quad \left|E_s\right|\le 0.0026$$

۴. مثال: سیمپسون قاعدې پکارولو:

1. په $n=4$ مرحلو سره د $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ انټیګرال ارزښت اټکل کړئ او د $|E_s|$ لپاره یوه پاسنی پوله(بند) پیداکړئ.

2. په مستقیم ډول انټیګرال وټاکې او $|E_s|$ پیداکړئ.

حل:

$$1.\quad n=4,\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$$

x	1	$5/4$	$6/4$	$7/4$	2
y	1	$16/25$	$16/36$	$16/49$	$1/4$

$$S=\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\frac{h}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3-y_4\}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{1+4\left(\frac{16}{25}\right)+2\left(\frac{16}{36}\right)+4\left(\frac{16}{49}\right)+\frac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}(1+2.56+0.8889+1.3061+0.25)$$

$$=\frac{1}{12}(6.0050)=0.5004$$

د تېروتنې د ارزښت د ټاکنې لپاره، موږ لومړی د M پاسنی پوله(بند) د $[1,2]$ په انټروال کې د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ څلورم مشتق اندازه یا پراخوالې لاس ته راوړو. څرنګه چې د f(x) څلورم مشتق $120x^{-5}$ ده، موږ ممکن چې M = 120 په پام کې ونیسو. په $b-a=2-1=1$ او $h=\frac{1}{4}$ سره، موږ لرو چې:

$$|E_s|\le\frac{b-a}{180}h^4\cdot M=\frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot120=\frac{1}{384}$$

$$\therefore\quad |E_s|\le 0.0026$$

$$(2)\quad \int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\int_1^2 x^{-2}dx=\left|-\frac{1}{x}\right|_1^2=-\frac{1}{2}+1=0.5$$

$$E_s=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-s=0.5-0.5004=-0.0004$$

$$|E_s|=0.0004$$

۴,۷ پوښتنې

له 1 نه تر 4 پوښتنو پورې د n = 4 فرعي وېش د کارولو د انټیګرال اټکلي قېمت لاس ته راوړئ. الف. د ذوذنقه اي قاعدې پواسطه ; ب. د سیمپسون قاعدې پواسطه.

1. $\int_1^2 x\,dx$ $\quad\left(Ans: 1.5, 1.5\right)$

2. $\int_0^2 \left(x^3 + x\right)dx$ $\quad\left(Ans: 6.25, 6.0\right)$

3. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ $\quad\left(Ans: 1.8961, 2.0045\right)$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad\left(Ans: 0.7828, 0.7854\right)$

5. له 1 نه تر 4 پوښتنو پورې د $\left|E_T\right|$ او $\left|E_s\right|$ لپاره یوه پاسنۍ پوله پیداکړئ.

$$\left(Ans: 0,0;\ 0.5,0;\ 0.161, 0.0066\right)$$

6. د $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ د سیمپسون د قاعدې پواسطه (1). $n = 4$,(2). $n = 8$ په پام کې نیولو سره وټاکئ. تېروتنه د انتیګرال نیونې د مستقیم میتود پواسطه وټاکئ.

$$\left(Ans: 1.09995, 1.0986, 0.00001\right)$$

7. د ذوذنقه اي قانون په کارولو سره د راکړشویو معلوماتو له مخې د $\int_0^1 y\,dx$ انتیګرال وټاکئ.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1.0	0.99	0.961	0.914	0.852	0.779	0.697	0.613	0.527	0.445	0.369

$$\left(Ans: 0.7462\right)$$

8. د $n = 6$ لپاره د ذوذنقه اي قاعدې په کارولوسره $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}dx$ انتیګرال وټاکی. $\left(Ans: 0.2052\right)$

9. د $n = 4$ لپاره د سیمپسون قاعدې پکارولو لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+10x^2}$ $\quad\left(Ans: 0.39987\right)$

2. $\int_0^{10} \frac{dx}{1+10x^2}$ $\quad\left(Ans: 0.4867\right)$

10. د $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ انتیګرال د ذوذنقه ای قاعدې اود سیمپسون د قاعدې پکارولو د $n = 4$ لپاره وټاکئ او خپل ځوابونه له حقیقي ځواب سره پرتله کړئ.

$$\left(Ans: 0.69702, 0.693148, 0.6931\right)$$

په 11 او 12 پوښتنو کې، د انتیګرالي تابع جدول شوي قېمتونه د انتیګرال د اټکلولوليپاره (a) ذوذنقه ای قاعدې څخه او (b) سیمپسون قاعدې څخه په n = 8 مرحلو کې کټه واخلئ او بیا (c) د انتیګرال حقیقي قېمت او د اټکل تېروتنې E_T او E_S پیداکړئ.

11. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361

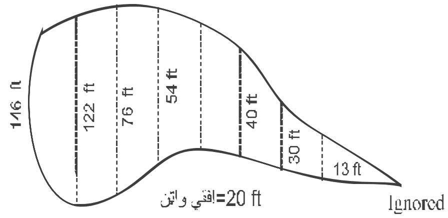
$$\left(Ans:(a)\;0.31929,\;(b)\;0.32812,\;(c)\;\frac{1}{3},\;0.01404, 0.00521 \right)$$

12. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2-\sin t)^2}\,dt$

t	$(3\cos t/(2+\sin t)^2$
-1.57080	0
-1.17810	0.99138
-0.78540	1.26906
-0.39270	1.05961
0	0.75
0.3927	0.48821
0.7854	0.28946
1.1781	0.13429
1.5708	0

$(Ans:(a)\;1.95643,\;(b)\;2.200421,\;(c)\;2,\;0.04357,\;-0.00421)$

13. یو ښارګوټی غواړي یوه کوچنی چټله اوناوې جبه وچه او ډکه کړي (لاندې شکل وګورئ) د جبې مېنځنی ژوروالی 5ft دی. پدی برخه کې څومره یارډ مکعبه چټلي به د چټلې سیمی د یکبدلو لپاره راوایستل شي چې وروسته جبه وچه شي.



$$\left(Ans: 1500\, yd^3\right)$$

14. د $\int_0^{\pi} t \sin t\, dt$ د ذوزنقه ای قاعدې په کارولو د $n = 4$ لپاره وټاکئ.

$$\left(Ans: 2.9784\right)$$

15. په لاندې جدول کې چټکتیا د یو راکټ د ازمون په مختلفو وختونو کې چې د ځمکې له سطحې څخه پورته خواته توغول کېږي په $\frac{miles}{second}$ راکړل شوې ده. دغو قیمتونونه کاروا‌خلې چې دلومړنیو 80 ثانیوپه موده کې دسفر وهل شوې مېلونه (وهل شوی واټن) اټکل کړئ. د ټاسو ځیل ځواب د یو میل لسمې برخې ته نژدې وګرځوئ. (کومک: $\int_0^{180} V(t)dt$ = وهل شوی واټن).

Time t(sec)	0	30	60	90	120	150	180
$Speed\ \ V\left(\frac{Mile}{sec}\right)$	0.00	0.03	0.08	0.16	0.27	0.42	0.65

$$\left(Ans: 37.9 miles\right)$$

16. یو منحني د لاندې راکړشوې جدول د نقطو پواسطه راکړشویده:

X	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Y	23	19	14	11	12.5	6	19	20	20

د سېمپسون د قاعدې پواسطه هغه مساحت حساب کړئ چې د منحني، x محور او بې نهایت اوردینټونو یا عرضونو(د x له محور سره عمودي فاصله) پواسطه چاپېر شوی وي.

$$\left(Ans: 59.66\right)$$

17. د $\int_3^7 x^2 \ln x\, dx$ قیمت د سېمپسون د قاعدې پواسطه د $n = 4$ لپاره پیداکړئ.

$(Ans: 177.48)$

له 18 څخه تر 21 پوښتنې پورې فرعي انټروالونو اصغري شمېر چې د انټیګرالونو اټکلولو ته ضروري ګڼل کېږي چې تېروتنه یې له $^{-4}10$ نه لږه وي. (a). ذوذنقه اي قاعدې او (b). سېمپسون قاعدې پواسطه وټاکئ.

18. $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1) dx$ $(Ans: (a)\ 16,\ (b)\ 2)$

19. $\int_{0}^{2} (t^3 + t) dt$ $(Ans: 282, 2)$

20. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$ $(Ans: 71, 10)$

21. $\int_{0}^{3} \sqrt{x+1} dx$ $(Ans: 76, 2)$

22. $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ وټاکئ:

(i). $h = 0.2$ نیاره د ذوذنقه ای قاعدې پواسطه. $(Ans: 0.94505)$

(ii). $h = 0.5$ ته د سېمپسون قاعدې پواسطه. $(Ans: 0.4461)$

۱.۵.۷ ناڅرګنده (نا مناسب) انټیګرالونه

تر اوسه پورې مونږ یواځې او تنها یواځې د $\int_{a}^{b} f(x) dx$ معین انټیګرال په اړوند بحث درلود که چېرې

(a) د انټیګرال نیولود a او b دواړه حدونه ټاکلی وي (b) د f(x) انټیګرالي تابع په $[a,b]$ کې محدوده کړشوې وي. دارنګه معین انټیګرال د یوخاص ناڅرګند (مناسب) انټیګرال په شان پېژندل کېږي.

د $\int_{a}^{b} f(x) dx$ معین انټیګرال ته یو نا خاص (نامناسب ناڅرګند) انټیګرال وایي که چېرې

(i). د f(x) انټیګرالي تابع په $a \le x \le b$ انټروال کې د نامتمادیت یوه یا زیاتې نقطې ولري یا

(ii). کم ترکم د انټیګرال نیوني د حدونو څخه یو نامعین (ناټاکلی) وي.

نامناسب انټیګرالونو ته تعمیم شوي یا نا ټاکلي انټیګرالونه هم وایي.

په ځانګړي ډول ،لاندې راز راز حالتونه تر بحث لاندې نیول شویدي.

I. هغه انټیګرالونه په کومو کې چې د انټیګرال نیولو پاسنی پوله(حد) ټاکلی نه وي.

فرض کړئ چي f(x) په (a,∞) کي متمادي ده. د $\int_a^\infty f(x)dx$ نامناسب انتیګرال دارنګه تعریفیږي:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$$

پدې شرط چې لیمټ شتون ولري. پدې حالت کی ویل کیږي چی د $\int_a^\infty f(x)dx$ انتیګرال متقارب دی او د لیمټ قیمت دانتیګرال قیمت دی. که چیرې لیمټ شتون ونه لري، انتیګرال ته متباعد وایي او کوم قیمت د انتیګرال لپاره په پام کي نه نیول کیږي.

II. هغه انتیګرالونه په کومو کي چي د انتیګرال نیوني لاندینی حد ټاکلی (معین) نه وي.

د (I) حالت په شان مونږ $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ په هغه ډول تعریف کوو:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{m\to-\infty}\int_m^b f(x)dx$$

که چیرې دا لیمټ شتون ولري.

یادونه: د $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ نامناسب انتیګرال لکه

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$$

تعریفیږي. لدې ځخه لاسته راځي چي د ښي خوا دواړه ګومارل شوي انتیګرالونه متقارب دي.

III. هغه انتیګرالونه په کومو کی چی د f(x) انتیګرالي تابع په $c\in(a,b)$ کي نا ټاکلي کیږي. پدې حاَلت د کی $\int_a^b f(x)dx$ نامناسب انتیګرال دارنګه تعریف کیږي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ددې ځخه لاسته راځي چي د ښي خوا دواړه ګومارل شوي انتیګرالونه متقارب دي.

IV. هغه انتیګرالونه په کومو کي چي انتیګرالي تابع په a کي ناټاکلي کیږي.

که چیرې f(x) په (a, b) کي متمادي وي خو کله چي $x\to a$، $f(x)\to\infty$ یا $f(x)\to-\infty$، نو د $\int_a^b f(x)dx$ نامناسب انتیګرال که چیرې لیمټ شتون ولري دارنګه تعریفیږي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to a+0}\int_m^b f(x)dx$$

7. هغه انتیګرالونه په کومو کې چې انتیګرالي تابع په b کې ناټاکلي کېږي:

که چېرې $f(x)$ په (a,b) کې متمادي وي خو کله چې $x \to b$، $f(x) \to \infty$ یا $f(x) \to -\infty$، نو د $\int_a^b f(x)dx$ نامناسب انتیګرال که چېرې لیمټ شتون ولري پدی ډول تعریفیږي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{M \to b-0} \int_a^M f(x)dx$$

د انتیګرال نیوني پروسه یاعملیه د لاندې ښیو حل شوو مثالونو پواسطه شرح شویده.

۲,۵,۷ حل شوي مثالونه

۱. مثال: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ارزښت وټاکئ:

حل: دا ښکاره ده چې $\frac{1}{1+x^2}$ د $x \geq 1$ لپاره تعریف شویده او په $[1, M]$ کې دانتیګرال نیولو وړ ده.

$$\therefore \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M \to \infty} \tan^{-1} x \Big|_1^M = \lim_{M \to \infty} \left[\tan^{-1} M - \tan^{-1} 1\right]$$

$$= \tan^{-1} \infty - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

لدې امله انتیګرال متقارب دی او له $\frac{\pi}{4}$ سره مساوي دی.

۲.مثال: $\int_{-\infty}^{2} e^{2x} dx$ قیمت وټاکئ:

حل: موږ لرو

$$\int_{-\infty}^{2} e^{2x} dx = \lim_{m \to -\infty} \int_m^2 e^{2x} dx = \lim_{m \to -\infty} \left|\frac{1}{2} e^{2x}\right|_m^2$$

$$= \lim_{m \to -\infty} \left[\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^m\right] = \frac{1}{2} e^4$$

که چېرې $m \to -\infty$ په همدې ډول $e^m \to 0$

۳. مثال: ثرګند کړئ چې ایا $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ انتیګرال متقارب دی.

حل:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}+\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$$

اوس

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{m\to-\infty}\left|\sqrt{x^2+2}\right|_{m}^{0}$$
$$=\lim_{m\to-\infty}\left[\sqrt{2}-\sqrt{m^2+2}\right]=-\infty$$

په ورته ډول $\int_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ نا ټاکلی دی.

لدې امله $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$ متقارب ندی.

۴. مثال: څرګند کړئ چې ایا $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ انتیګرال متقارب دی:

حل:

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{M\to1-0}\int_{0}^{M}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{M\to1-0}\left|\sin^{-1}x\right|_{0}^{M}$$
$$=\lim_{M\to1-0}\left\{\sin^{-1}M-\sin^{-1}0\right\}=\lim_{M\to1-0}\sin^{-1}M=\sin^{-1}1$$

لدې امله انتیګرال متقارب دی او له $\frac{\pi}{2}$ سره مساوي دی.

۵. مثال: وښیاست چې ایا $\int_{1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ انتیګرال متقارب دی.

حل: مونږلروچې

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

ځکه $\frac{1}{x^2}$ په $x = 0$ کې ناټاکلی دی.

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{M\to 0-0}\int_{-1}^{M}\frac{dx}{x^2}+\lim_{m\to 0+0}\int_{m}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{M\to 0-0}\left|-\frac{1}{x}\right|_{-1}^{M}+\lim_{m\to 0-0}\left|-\frac{1}{x}\right|_{m}^{1}$$

$$=\lim_{M\to 0-0}\left\{-\frac{1}{M}-1\right\}+\lim_{m\to 0+0}\left\{-1+\frac{1}{m}\right\}$$

$$=\infty$$

لدې سببه انتیګرال متباعد دی.

۶. مثال: د $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/3}}$ ارزښت وټاکئ

حل: دلته f(x) په x = 1 کې تعریف وړ نده

$$\therefore\ \int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/3}}=\lim_{M\to 1-0}\int_0^M\frac{dx}{(1-x)^{1/3}}=\lim_{M\to 1-0}\left|-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\right|_0^M$$

$$=\lim_{M\to 1-0}\left\{-\frac{3}{2}(1-M)^{2/3}+\frac{3}{2}\right\}=0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

په پایله کې انتیګرال متقارب او دهغه قیمت $\frac{3}{2}$ دی.

۵,۷ پوښتنې

د لاندېنيو انتيګرالونو تقارب او تباعد وڅېړئ. دانتيګرالونو ارزښت وټاکئ کوم چې متقارب دي:

1.	$\int_{0}^{\infty}\frac{2x\,dx}{1+x^4}$	2.	$\int_0^{\infty}e^{-x}dx$
3.	$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$	4.	$\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$
5.	$\int_0^{\infty}e^{-2x}\cos 2x\,dx$	6.	$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^{3/2}}$
7.	$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(2x-1)^3}$	8.	$\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x+1}$
9.	$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$	10.	$\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$
11.	$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$	12.	$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
13.	$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x dx}{1+e^2}$	14.	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(2x+5)^{1/3}}$
15.	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$	16.	$\int_{-\infty}^{\infty}x^3dx$
17.	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{x^4+1}$	18.	$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx$
19.	$\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{dx}{x^2+6x+12}$	**20.**	$\int_0^1\frac{dx}{x}$
21.	$\int_0^a\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$	22.	$\int_0^e x^2dx$
23.	$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x}$	24.	$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{x^{1/3}}$
25.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$		

۲,۵,۷ الف. بیتا او گاما تابعګانې

د $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ او $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ انتیګرالونو ته کله ناکله د ایولر (Eulerian)لومړی او دویم انتیګرالونه وایي. همدارنګه دوی په ترتیب سره لکه د بیتا او ګاما تابعګانو په شان هم پیژندل کیږي. دغو انتیګرالونو په معین انتیګرالونو کې یوخورا مهم ځای نیولی دی او په میخانیک، ستاستیک فزیک او په نورو تطبیقي اړخونو د ساینس کې د پام وړ استعمال ځایونه لري.

۲,۵,۷ ب. د بیتا تابع

د بیتا تابع، د $B(m,n)$ پواسطه ښودل کیږي او د

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

انتیګرال پواسطه د m او n مثبتو قیمتونو لپاره تعریفیږي. د $m>0$ او $n>0$ لپاره انتیګرال متقارب دی.
$x=1-y$ په اینښودلو مونږ لرو چې

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\int_1^0 (1-y)^{m-1}\,y^{n-1}(-dy)\\&=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy\\&=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dy=B(n,m)\end{aligned}$$

لدې امله

$$B(m,n)=B(n,m) \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

۲,۵,۷ ج. د بیتا تابع نورې بڼې یا شکلونه

په (1) کې د $x=\frac{y}{1+y}$ په اینښودلو مونږ لاس ته راوړو:

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy\\&=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{m+n}}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ (3)\end{aligned}$$

په (1) کې $x = Sin^2\theta$ په وضع کولو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

۲,۵,۷ د. د ګاما تابع

د ګاما تابع د$\Gamma(n)$ پواسطه ښودل کیږي او د لاندې نامناسب یا نا څرګند انتیګرال پواسطه تعریفیږي

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

کوم چې د $n > 0$ لپاره متقارب دی.

۲,۵,۷ ه. د ګاما تابع لپاره د بیرته ګرځیدني(بیرته پیښیدني) اړیکې

د تعریف پواسطه

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^n e^{-x}dx$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left[\left|x^n(-e^{-x})\right|_0^M - \int_0^M nx^{n-1}(-e^{-x})dx\right]$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left[-M^n e^{-M} + n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx\right]$$
$$= \lim_{M\to\infty}(-M^n e^{-M}) + \lim_{M\to\infty} n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx = 0 + n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx$$

$\therefore \quad \Gamma(n-1) = n\Gamma(n), \quad (n > o$ که چیرې) ، .... (2)

یو ځل بیا د تعریف پواسطه

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\left|-e^{-x}\right|_0^M =$$
$$= \lim_{M\to\infty}(-e^{-M}) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

په (2) کې د...n=1,2,3 په وضع کولو مونږ لرو

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

او داسي نور.

په عمومي ډول سره $\Gamma(n+1) = n!$ کله چي $n = 1,2,3,......$.

پدې دلیل $\Gamma(n)$ ته کله ناکله دفکتور یل تابع هم وایي.

لدې امله، د ګاما تابع بنسټیزه ځانګړتیا له مونږ سره ددې د ارزښت په ټاکنه کې مرسته کوي.

دې ته د ګاما د تابع لپاره د بیرته ګرځیدني یا دبیرته پیښیدني یوه اړیکه وایي.

مونږ کولی شوچي د ګاما تابع ته د $n < 0$ لپار ه د (2) کارولو پواسطه د

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad .... (4)$$

په شکل کې عمومیت ورکړو.

دغي عملیي ته تحلیلي دوام (بیاشروع کیدل) وایي. دا ممکن په زیاته اندازه داسي یادونه وشي چې

$$L(n) = \infty, \quad \Gamma(n+1) = \infty$$

n یو مثبت تام عدد دی.

۲,۵,۷ و. د $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ قیمت

د تعریف پواسطه مونږ لرو چې

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{1/2} e^{x} dx$$

په هغې کې د $x = y^2$, $dx = 2ydy$ په اېښودلو

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{y^2} dy = 2\int_0^\infty e^{x^2} dx$$

y په x باندې په تبدیلولو مونږ لیکلی شو چې

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = 2\int_0^\infty e^{x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{y^2}\,dy = 4\int_0^\infty e^{(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$x = r\cos\theta$ او $y = r\sin\theta$ په اینبودلو

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-e^{r^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

لدې امله

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

۲,۵,۷ ز. د گاما تابع بدلول یا اړونه

مونږ $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{x}\,dx$ لرو. که چېرې مونږ $x = \lambda t$ وضع کړو نو له دی کبله $dx = \lambda\,dt$

$$\therefore \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty (\lambda t)^{n-1}\cdot e^{\lambda x}\cdot \lambda dt = \lambda^n \int_0^\infty t^{n-1}\cdot e^{\lambda t}\,dt$$

لدې امله

$$\frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} = \int_0^\infty x^{n-1}e^{\lambda x}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

۲,۵,۷ ح. د بیتا او گاما تابع ترمینځ اړیکه(رابطه)

د $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ څرگندولو لپاره، د ۷,٤,۲ ز. برخې په (۱) رابطه کې λ د Z پواسطه په ونج کولو.

$$\Gamma(n) = z^n \int_0^\infty x^{n-1}e^{zx}\,dx$$

یا

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{zx}x^{n-1}z^n\,dx$$

$e^{z}z^{m-1}$ پواسطه په ضرب کولولاس ته راځي چې

$$\Gamma(n)e^{z}z^{m-1} = \int_0^\infty e^{z(1+x)}z^{m+n-1}x^{n-1}\,dx$$

د دواړو خواوو نظر Z ته د 0 نه تر ∞ حدونومینځ کې په انتیگرال نیولو، مونږ لرو:

$$\Gamma(n)\int_0^\infty e^{z}z^{m-1}\,dz = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty e^{z(1+x)}z^{m+n-1}\,dz\right)dx$$

یا

$$\Gamma(n)\Gamma(m)=\int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty \frac{e^{y}y^{m+n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dy\right)dx$$

چېرې چې $y=z(1+x)$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\left(\int_0^\infty e^{y}y^{m+n-1}dy\right)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,\Gamma(m+n)dx$$

$$=\Gamma(m+n)\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{m+n}}\,dx$$

یا

$$\Gamma(n)\Gamma(m)=\Gamma(m+n)B(m,n)$$

لدې سببه

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m-n)}$$

۲,۵,۷ ط. پایله یا استنتاج (Deduction)

۱. مونږ پوهیږو

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cdot\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

یا

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

د $2m-1=p$ او $2n-1=q$ لپاره مونږ لاس ته راوړو

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta \cdot \cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma(p+q+1)} \qquad \ldots\ldots\ldots (A)$$

.2

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

د $m+n=1$ په اینودلوسره، دا لاسته راوړو چې

$$\frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

خو $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ ، چیرې چې $0 < n < 1$ وي.

$$\therefore \quad \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \ldots\ldots\ldots (B)$$

۳. په (B) کې $n=\frac{1}{2}$ په اینودلو

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin n \Pi/2} = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

۴. بیا په(B) کې د $n=\frac{1}{4}$ په اینودلو مونږ لاس ته راوړو

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(3/4\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

یا

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

۲,۵,۷ ي. دوه گوني يا د دوه برابرولو فورمول

د $2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(P+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2P)$ ثبوت لپاره چېرې چې p يو تام عدد دی.

فرضوو چې $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\,dx$ ، $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}2x\,dx$ ، نو

$$I=\frac{1}{2}B\left(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$$

د $2x = z$ په ايښودلو، مونږ لاس ته راوړوچې

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2p}z\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}z\,dz=I$$

خو،

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos x)^{2p}dx=2^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x\cos^{2p}x\,dx$$
$$=2^{2p-1}B\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right)=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$$

سربېره پردې، څرنگه چې $I = J$

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$$

يعنې

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2p\cdot\Gamma(p)}=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{2p\cdot\Gamma(2p)}$$

يا

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)}=\frac{2^{2p-1}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p)}$$

يا

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2p)$$

۲,۵,۷ ک. د انتیګرالونو ارزښت ټاکل یا ارزول

$\int_0^\infty e^{ax}\cos bx\cdot x^{m-1}dx$ او $\int_0^\infty e^{ax}\sin bx\cdot x^{m-1}dx$

مونږ د ۷,٤,۲ ز. برخې څخه لروچې

$$\int_0^\infty e^{ax}x^{m-1}dx=\frac{\Gamma(m)}{\lambda^m}$$

$\lambda=a+ib$ په ایښودلو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\int_0^1 e^{[a+ib]x}x^{m-1}dx=\frac{\Gamma(m)}{(a-ib)^m}=\frac{\Gamma(m)}{(a^2+b^2)^m}(a+ib)^m \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

اوس که چیرې $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ، نولدې کبله $r=\sqrt{a^2+b^2}$ او $\theta=tam^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

له دې امله له (1) څخه لاس ته راوړو چې

$$\int_0^\infty e^{ax}e^{ibx}x^{m-1}dx=\frac{\Gamma(m)(a^2+b^2)^{m/2}(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(a^2+b^2)^m}$$

یا

$$\int_0^\infty e^{ax}x^{m-1}(\cos bx+i\sin bx)dx=\frac{\Gamma(m)(\cos m\theta+i\sin m\theta)^n}{(a^2+b^2)^{m/2}}$$

د حقیقي او تصوري (موهومي) برخو په جلاکولو، مونږ لا سته راوړو چې

$$\int_0^\infty e^{ax}\cos bx\cdot x^{m-1}dx=\frac{\Gamma(m)}{(a^2+b^2)^{m/2}}\cos m\theta \qquad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

او

$$\int_0^\infty e^{ax}\sin bx\cdot x^{m-1}dx=\frac{\Gamma(m)}{\left(a^2+b^2\right)^{m/2}}\sin m\theta \qquad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

چېرې چې $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

پایله (Deductions):

په (2) او (3) کې د 0 = a په اینودلو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\int_0^\infty x^{m-1}\cos bx\,dx=\frac{\Gamma(m)}{b^m}\cos\frac{m\pi}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

او

$$\int_0^\infty x^{m-1}\sin bx\,dx=\frac{\Gamma(m)}{b^m}\sin\frac{m\pi}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

۲,۵,۷ ل. د $\int_0^\infty \cos\left(bx^{\frac{1}{n}}\right)dx$ انتیګرال ارزښت تاکنه

$x=z^n$ او $dx=nz^{n-1}dz$ په اینودلو، مونږ لاسته راوړو چې

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos\left(bx^{\frac{1}{n}}\right)dx&=\int_0^\infty \cos(bz)n\,z^{n-1}dz\\&=n\int_0^\infty z^{n-1}\cos bz\,dz\\&=n\frac{\Gamma(n)}{b^n}\cos\frac{n\pi}{2}\\&=\frac{\Gamma(n+1)}{b^n}\cos\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

۲،۵،۷ م. حل شوي مثالونه

۱. مثال: د (a) $\quad \dfrac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}$ او (b) $\quad \dfrac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}$ ارزښت وټاکئ.

حل:

$$(a).\qquad \frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}=\frac{6!}{2\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2(3\cdot 2\cdot 1)\cdot 2\cdot 1}=30$$

$$(b).\qquad \frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}=\frac{2\cdot 1\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{16}{105}$$

۲. مثال: (a) $\quad B(3,5)$، $\quad (b)$ $\quad B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ارزښت وټاکئ.

حل:

$$(a)\qquad B(3,5)=\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(5)}{\Gamma(3+5)}=\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(5)}{\Gamma(8)}=\frac{2!.4!}{7!}=\frac{2\cdot 4!}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}=\frac{2}{7\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{105}$$

$$(b)\qquad B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

۳. مثال: وښایاست چې $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}$.

حل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{1/2}\theta\cdot\cos^{-1/2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{3/2-1}\theta\cdot\cos^{1/2-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{1/\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

۴. مثال: (i) $\int_0^{\infty}x^4e^{-x}dx$, (ii) $\int_0^{\infty}x^6e^{-3x}dx$ ارزښت وټاکئ.

حل:

$$(i)\qquad \int_0^{\infty}x^4e^{-x}dx=\Gamma(4+1)=\Gamma(5)=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$$

$$(ii)\qquad \int_0^{\infty}x^6e^{-3x}dx=\int_0^{\infty}e^{-3x}x^{7-1}dx=\frac{\Gamma(7)}{3^7}=\frac{6!}{2187}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2187}=\frac{80}{243}$$

۵. مثال: $\int_0^4 z^{3/2}(4-z)^{5/2}dz$ ارزښت وټاکئ.

حل: $z=4x$ او $dz=4dx$ په اینودلو سره

$$\int_0^4 z^{3/2}(4-z)^{5/2}\,dz = \int_0^1 (4x)^{3/2}(4-4x)^{5/2}\cdot 4dx$$

$$= 4\cdot 4^{3/2}\cdot 4^{5/2}\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{5/2}\,dx$$

$$= 4^5 B\left(5/2,\ 7/2\right) = 4^5\cdot\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(5/2+7/2)}$$

$$= 1024\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1024\left(3/2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)\left(5/2\cdot 3/2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\right)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{32(45\pi)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 12\pi$$

۶. مثال: د $\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$ ارزښت وټاکئ.

حل: $x = e^{-t}$، $dx = -e^{-t}dt$ په ایښودلو سره

$$\int_0^1 (\ln x)^4\,dx = \int_\infty^0 (-t)^4\left(-e^{-t}dt\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^4\,dt$$

$$= \Gamma(4+1) = \Gamma(5) = 4! = 24$$

۵,۷ الف. پوښتنې

۱. دلاندي ګاما تابعګانوارزښت وټاکي:

$$a.\quad \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} \qquad (b.)\quad \frac{\Gamma(3).\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} \qquad (c.)\quad \frac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$d.\quad \Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) \qquad (e.)\quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\left(Ans: 30, \frac{16}{315}, \frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{\pi}}{3}, \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}\right)$$

۲. ثبوت کړئ چې

$$B(m,n) = B(m+1,n) + B(m,n+1),\ m,\ n > 0$$

۳. د (a) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$, (b) $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$ انتیګرالونوارزښت وټاکئ.

$$\left(Ans: 6, \frac{45}{8}\right)$$

۴. (a) $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$, (b) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$, $(\boldsymbol{c})$ $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$ ازرښت وټاکئ.

$$\left(Ans: \frac{1}{280}, \frac{64\sqrt{2}}{15}, \frac{\pi a^6}{16}\right)$$

۵. وښایاست چې $\int_0^2 x \cdot \sqrt[3]{8 - x^3}\, dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

۶. وښایاست چې

$$a.\quad \int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n \Gamma(n+1), \qquad n > 0$$

$$b.\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right), \qquad n > 0$$

۷. وښایاست چې

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = \Gamma(n), \qquad n > 0$$

۸. وښایاست چې $\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{\left(1+x\right)^{24}}\,dx = 0$

۹. ثبوت کړئ چې

$$\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}\,dx = (b-a)^{m+n-1} B(m,\, n)$$

۷. بیلابیلې پوښتنې

۱. د تعریف په بنسټ د $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$ ارزښت وټاکئ.

۲. دلاندېنیو سلسلو د مجموعې لیمټ کله چې $n \to \infty$ وټاکئ.

$$(i) \qquad \frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2n}\right]$$

$$(ii) \qquad \frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

۳. ثبوت کړئ چې $\int_0^\pi x\sin^6 x\cdot\cos^4 x = \frac{3}{512}\pi$.

۴. وښایاست چې

$$(i) \qquad \int_0^\pi \frac{x\,dx}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2} = \frac{\pi^2\left(a^2+b^2\right)}{4a^3b^3}$$

$$(ii) \qquad \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(1+\sec x+\tan x\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$$

۵. $\int_0^{\infty} \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$ ارزښت وټاکئ.

۶. ثبوت کړئ چې:

$$(i) \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(ii) \qquad \int_0^{\infty} \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

۷. ثبوت کړئ چې

$$\int \left(a^2-x^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}dx = \frac{x\left(a^2+x^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}}{2n+2} + \frac{(2n+1)a^2}{2n+2}\int \left(a^2-x^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}dx$$

۸. د $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ لپاره د بدلوني فارمول پیداکړئ.

۹. څرګند کړئ چې ایا لاندېني انتیګرالونه متقارب دي. د هغو انتیګرالونو ارزښت وټاکئ چې متقارب وي.

$$(i) \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx \qquad\qquad (ii) \qquad \int_0^2 \frac{xdx}{x^2-5x+6}$$

$$(iii) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \qquad\qquad (iv) \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cot x\, dx}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

۱۰. د $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ ارزښت وټاکئ.

۱۱. ثبوت کړي چې $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ نامناسب انیتګرال $p > 1$ لپاره متقارب او $p \le 1$ لپاره متباعد دی.

۱۲. که چېرې $f(x) = f(a+x)$ وي، نو وښایاست چې $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$.

۱۳. د $\int_0^3 (2x-1)dx$ د تعریف پر بنسټ ارزښت وټاکئ.

۱۴. ارزښت وټاکئ.

$$(i) \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^5 x (1-\cos x)^3 \, dx$$

$$(ii) \qquad \int_0^{1\frac{1}{2}} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$$

۱۵. وښایاست چې

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cdot \cos nx \, dx = \frac{m(m-1)}{m^2-n^2} \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} x \cdot \cos nx \, dx$$

اتم څپرکی

د قوسونو اوږدوالي او د مستوی سطحو،حجمونو او دوراني سطحو تاکل

(Rectification and Quadrature Volumes and Surfaces of Revolution)

۱,۱,۸ سریزه

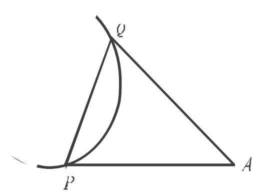
په ظاهري او لوڅو خبرو کې، د یو مستوي دمنحني اوږدوالي ټاکل ډیر اسانه بریښي. خو په ریاضیکي ډول دا کار څه نا څه ستونزمن کار دی. د فزیکي نقطي له نظره، یو نری مزی را اخلو او په اندازه کېدونکي منحني یي غزوو او بیا همدغه تار را اخلو د اعدادو په محور یي غزوو او اندازه یي ټاکو. د یومنحني د قوس د اوږدوالي د لاس ته راوړلو پروسي ته د قوس د اوږدوالي لاسته راوړنه (Retification) وایي. په مستوي کی دیوی ساحي د مساحت لاس ته راوړلوته (Quadratur) وایي. مونږ به لومړی په مشتقاتوکی قوسونه وڅیړو او بیا د یو قوس اوږدوالي. مونږ به لاندي اکسیوم (axiom) اودده پایله (deduction) د خپلي محاسبي بنسټ وګرځوو.

۱.۲.۸ اکسیوم (Axiom)

که چیري Q , P په یو منحني باندي کومي دوه نقطي وي دارنګه چي د PQ قوس اوږدوالی په مقعر ډول د PQ وتر نه تیریږي، نو

$$PA + QA > PQ \text{ قوس} > PQ \text{ وتر}$$

چیرته چي PA او QA یوازي هغه دوه خطونه دي چي منحني یي چاپیره کړیده.



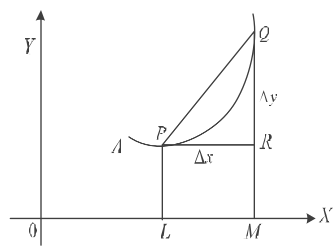
پایله: که چیريQ , P په یو منحني باندي کومي دوه نقطي وي، نو

$$\lim_{Q\to P}\frac{\text{قوس PQ}}{\text{وتر PQ}} = 1$$

۲.۲.۸ دکارتي معادلې لپاره

د $y = f(x)$ منحني لپاره د $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ثبوت چېرته چې s د قوس اوږدوالی دی. فرضوو چې s په منحني باندې د A له کومې ثابتې نقطې څخه د $P(x,y)$ نقطې واقعي واټن ښيي.

مونږ د $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ يوه بله نقطه د P نقطې ته نږدې په پام کې نيسو.



فرضوو چې $arcAQ = s+\Delta s$ نو، $arc PQ = \Delta s$

د $P\hat{Q}R$ قايم الزاويه مثلث نه لرو چې.

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$$
$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

يا

$$\left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = 1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

يا

$$\left(\frac{\text{وتر}\quad PQ}{\text{قوس}\quad PQ}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

فرضوو چې $Q \to P$ ته تقرب کوي دا رنګه چې په لمیټ کې

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

مونږ د $y = f(x)$ منحني لپاره يوه تاکلې کړنلاره جوړوو چې، s د x لورته په مثبته توګه اندازه کېږي، زياتېدونکی دی، لدې کبله s نظر x ته زياتېږي. څکه نو $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ مثبت دی او په پايله کې $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

۱. **يادونه:** د $x = f(y)$ منحني لپاره $\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

۲. **یادونه:** د $P\hat{Q}R$ د قایم الزاویه مثلث څخه،

$$\cos R\hat{P}Q = \frac{PR}{PQ} = \frac{\Delta x}{\Lambda s} \cdot \frac{\text{قوس } PQ}{\text{وتر } PQ}$$

فرضوو چې $Q \to P$ تقرب کوي نو لدې کېله $R\hat{P}Q \to \psi$ ، چېرته چې ψ هغه زاویه ده کوم چې مماس یې د P په نقطه کې د x دمحور مثبت لورته جوړوي.

$$\therefore \quad \cos\psi = \frac{dx}{ds}$$

په ورته ډول

$$\sin\psi = \frac{dy}{ds}$$

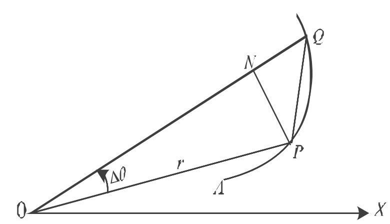
۳. **یادونه:** که چېرې، $x = f(t)$ او $y = g(t)$ د منحني معادلې وي.
په Δt باندې د (A) معادلې په وېشلو او په لیمیت نیولو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

۳,۲,۸ د قطبي معادلو لپاره

د $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ ثبوت د $r = f(\theta)$ منحني لپاره.

راځې چې s په منحني باندې د A کومې ثابتې نقطې څخه د $P(r,\theta)$ ترکومې بوې نقطې پورې واقعي واټن ښیو



مونږ د $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ بله نقطه په منحني باندې دP نقطې ته نژدې په پام کې نیسو. فرضوو چې $arc\ AQ = s + \Delta s$ نو له دی امله $arcPQ = \Lambda s$. په OQ باندې PN عمود رسموو. اوس $\frac{PN}{OP} = \sin\Delta\theta$ نو لدې کبله $PN = r\sin\Lambda\theta$ او $\frac{ON}{OP} = \cos\Delta\theta$ په دی ډول $ON = r\cdot\cos\Lambda\theta$.

لدې امله،

$$NQ = OQ - ON = r + \Delta r - r\cos\Delta\theta$$

$$= r(1-\cos\Delta\theta)+\Delta r = 2r\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}+\Delta r$$

د $P\hat{N}Q$ قائم الزاویه مثلث نه لروچي

$$(PQ)^2 = (PN)^2 - (NQ)^2$$
$$= r^2\sin^2\Delta\theta + (2r\sin^2\frac{\Delta\theta}{2} - \Delta r)^2$$

په $(\Delta\theta)^2$ د وېش نه لاس ته راوړو چي

$$\left(\frac{\text{وتر}\quad PQ}{\text{قوس}\quad PQ}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2 = r^2\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(r\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}+\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2$$

که $P\to Q$ ته تقرب وکړي، نو

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2\cdot 1 + \left(r\cdot 0\cdot 1+\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

مونږ s د θ د زیاتیدو په لوري (یا جهت) په مثبت ډول اندازه کوو ځکه نو $\frac{ds}{d\theta}$ مثبت ده. په دې ډول،

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

۱. یادونه: که چېرې د منحني معادله $\theta = f(r)$ وي، مونږ لرو چي

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1-r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

۲. یادونه:

$$\sin P\hat{Q}N = \frac{PN}{PQ} = \frac{r\sin\Delta\theta}{\text{ترو}\quad PQ}$$
$$= r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\text{قوس}\quad PQ}{\text{وتر}\quad PQ}$$

که $Q\to P$ تقرب وکړي نو پدې ډول د $P\hat{Q}N\to\phi$ تقرب کوي، چیرته چې ϕ، د تانجنت (میل) د مثبت جهتونو او د شعاع وکتور ترمینځ زاویه ده. نوپدې ډول

$$\sin\phi = r\cdot\frac{d\theta}{ds}$$

په ورته ډول

$$\cos\phi = \frac{dr}{ds}$$

۸,۲. ۴ د قوسونو اوږدوالي

دعوی: که چیرې $y = f(x)$ په $[a, b]$ کې متمادي مشتق ولري او s د$y = f(x)$ منحني د $x = a$ او $x = b$ اوږدوالیو (اوردیناتو) ترمینځ اوږدوالی وښیو، نو

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ثبوت: مونږ په n فرعي انټروالونو $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots . (x_{n-1}, x_n)$ کې، د $[a, b]$ د P یو ویش په پام کې نیسو.

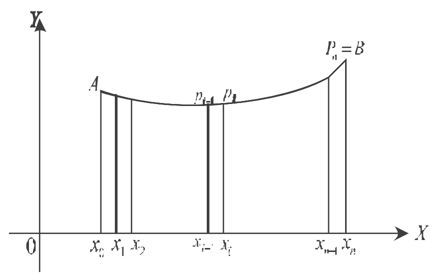
یعني،

$$P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots .., x_k \ldots .., x_{n-1}, x_n\}$$

په دی ډول

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

نولدې امله د AB قوس د نقطو په واسطه په n کوچنیو قوسونو ویشل کیږي.



$$P_0(x_0, f(x_0)), P_1(x_1, f(x_1)), \ldots . P_i(x_i, f(x_i)) \ldots ., P_n(x_n, f(x_n))$$

د $P_{i-1}P_i$ د i–ام قطعه خط اوږدوالی په تقریبي ډول سره د $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ او $P_i(x_i, f(x_i))$ نقطو ترمنځ واټن دی لدې امله

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

د منځني (وسطي) قیمت قضیه کله چې په $[x_{i-1}, x_i]$ کې $f(x)$ لپاره وکارول شي لاس ته راوړو چې

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(c_i)$ ، **چیرې چې** ، $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

لدې امله؛

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 [f'(c_i)]^2}$$

$$=(x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}$$

د AB قوس ټول اوږدوالی د n قطعه خطونو مجموعه ده لکه

$$\therefore \quad s=\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x_i)]^2} \cdot \Delta x$$

کومه چي یواځي په $[a,b]$ کې د $\int \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx$ انتیګرال لپاره یوه د ریمان (Reimann) مجموعه ده.

نو

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

۱. یادونه: که چیرې د منحني معادله د $x = g(y)$ پواسطه راکړل شوې وي مونږ لرو

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

۲. یادونه: که چیرې منحني د $y = g(t)$ ، $x = f(t)$ پارامتریک معادلو پوسیله راکړل شوی وي، نو مونږ لرو چي

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

۳. یادونه: که چیرې د منحني معادله په قطبي بڼه کې، یعني، $r = f(\theta)$ راکړل شوې وي، مونږ لرو

$$x=f(\theta)\cos\theta$$

$$y=f(\theta)\sin\theta$$

لکه د منحني پارامتریک معادلو په څیر.

لدې امله،

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2+[f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta]^2} \cdot d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2} \cdot d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

که چېرې د منحني معادله د $\theta = f(r)$ په واسطه راکړل شوې وي نو

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \cdot dr$$

۲,۸. ۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $y = a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ منحني لپاره $\dfrac{ds}{dx}$ لاس ته راوړئ.

حل: دلته $y = a\ln a^2 - a\ln(a^2-x^2)$ دی ، نو

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = -a\cdot\frac{1}{a^2-x^2}(-2x) = \frac{2ax}{a^2-x^2}$$

اوس،

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+\left(\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}{(a^2-x^2)^2}} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

۲. مثال: د $r = a\theta$ منحني لپاره $\dfrac{ds}{d\theta}$ لاس ته راوړئ.

حل: دلته $r = a\theta$ دی ، نو

$$\frac{dr}{d\theta} = a$$

$$\therefore \ \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\theta^2+a^2} = a\sqrt{\theta^2+1}$$

۳. مثال: د $y^2 = 4ax$ پارابولا د قوس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $3y = 8x$ مستقیم خط پواسطه قطع شوی وي.

حل: دلته

$$y^2 = 4ax \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$3y = 8x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

د دواړو معادلو د حل څخه $(0,0)$ او $\left(\frac{9a}{16}, \frac{3a}{2}\right)$ دتقاطع نقطو په څېر لاس ته راوړو.

له (1) نه

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2a}$$

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{4a^2-y^2}}{2a}$$

نو لدې امله

$$s=\frac{1}{2a}\int_0^{\frac{3a}{2}}\sqrt{4a^2+y^2}\cdot dy$$

$$=\frac{1}{2a}\left|\frac{y\sqrt{4a^2-y^2}}{2}+\frac{4a^2}{2}\ln\frac{y+\sqrt{4a^2-y^2}}{2a}\right|_0^{3a/2}$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\frac{\frac{3a}{2}\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}}{2}+\frac{4a^2}{2}\ln\frac{\frac{3a}{2}+\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}}{2a}\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{3a}{2}\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}+4a^2\ln\frac{\frac{3a}{2}+\frac{5a}{2}}{2a}\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{3a}{2}\cdot\frac{5a}{2}+4a^2\ln 2\right\}$$

$$=\frac{1}{4a}\left\{\frac{15a^2}{4}+4a^2\ln 2\right\}$$

$$=\frac{a}{4}\left\{\frac{15}{4}+4\ln 2\right\}=a\left\{\frac{15}{16}-\ln 2\right\}$$

۴. مثال: د $\theta=0$ نه تر $\theta=\frac{\pi}{2}$ د $x=e^{\theta}\sin\theta$ ، $y=e^{\theta}\cos\theta$ منحني د قوس اوږدوالی لاس ته راوړئ.

حل: د راکړل شويو معادلو د ډيفرنسيل نيوني نه لاس ته راوړو چې.

$$\frac{dx}{d\theta}=e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$$

او

$$\frac{dy}{d\theta}=e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta=e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$$

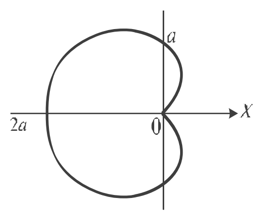
$$\therefore \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$= \sqrt{e^{2\theta}(\sin\theta - \cos\theta)^2 + e^{2\theta}(\sin\theta - \cos\theta)^2}$$
$$= e^{\theta}\sqrt{2}$$

نو د قوس غوښتل شوی اوږدوالی

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\theta} \cdot d\theta$$
$$= \sqrt{2}\left| e^{\theta} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$$

۵. مثال: د $r = a(1-\cos\theta)$ کارډیوید ټول اوږدوالی لاس ته راوړئ او وښایاست چې د منحني پورتني نیمايي قوس د $\theta = 2\pi/3$ پواسطه په دوو برخوویشل شوی دی.

حل: $r = a(1-\cos\theta)$ منحني دی .



$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$
$$\therefore \quad \frac{ds}{d\theta} - \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} - \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$
$$- a \cdot \sqrt{2 - 2\cos\theta}$$
$$= \frac{\theta}{2} = a \cdot \sqrt{4\sin^2 \theta/2} = 2a\sin\theta/2$$

د θ حدونه (لېمټونه) د منحني پورته نمایي برخي لپاره صفرنه تر π دي.

$\therefore$ د منحني د پورته نیمایي برخی د قوس اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$\int_0^{\pi} 2a\sin\theta/2 \cdot d\theta = 2a \left| -2\cos\theta/2 \right|_0^{\pi} = 4a$$

لدې امله د کارډیوید ټول اوږدوالی $2(4a) = 8a$ دی. اوس د قوس اوږدوالی د $\theta = 0$ نه تر $\theta = 2\pi/3$

$$= \int_0^{2\pi/3} 2a \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 2a \left| -2\cos\theta/2 \right|_0^{2\pi/3}$$

$$= 2a\left(-2\cos\pi/3 + 2\cos 0\right) = 2a(2-1) = 2a$$

د منحني د پورته نیمایي برخې نیمایي اوږدوالی $= 2a$ ده
پښله پدې ډول دی.

۲.۸ پوښتنې

۱. د لاندې منحني ګانو لپاره $\frac{ds}{dx}$ لاس ته راوړئ.

$(i)\quad y = \cosh\frac{x}{c}$

$(ii)\quad x^3 = ay^2$

$(iii)\quad 4ay + 2a^2 \ln x = x^2$

۲. د $r\theta = a$ هیپرابولیک مار پیچې (spiral) لپاره وښایاست چې

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}$$

۳. وښایاست چې $r\frac{ds}{dr}$ د

$$\theta = \arccos\frac{r}{k} - \frac{\sqrt{k^2 - r^2}}{r}$$

منحني لپاره ثابت دی.

۴. د $x^2 = 4ay$ پارابول د قوس اوږدوالی چې د راس نه دقایم وتر(Latus Retum) پورې غزیدلی دی په لاس راوړئ.

۵. د یوې دائرې د قوس اوږدوالې لاس ته راوړئ چېرې چې د $x = a\cos\alpha$ او $x = a\cos\beta$ نقطو ترمنځ قطع شوی وی.

۶. وښایاست چې د $3ay^2 = x(x-a)^2$ منحني د کړی (حلقې) اوږدوالی $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ دی.

۷. د $x^{2/3} + y^{\frac{2}{3}} = a^{2/3}$ ستروید ټول اوږدوالی لاس ته راوړئ.

۸. د $x = a(\theta + \sin\theta)$، $y = a(1 - \cos\theta)$ سیکلوید د یو قوس اوږدوالی لاسته راوړئ. او د $\theta = 0$ او $\theta = 2\alpha$ نقطو ترمینځ د قوس اوږدوالی پیدا کړئ.

۹. د $x = a(\theta - \sin\theta)$، $y = a(1 - \cos\theta)$ سیکلوید د یو قوس اوږدوالې لاس ته راوړئ.

۱۰. د $r = a(1+\sin\theta)$ کارډیوئید اوږدوالي لاس ته راوړئ.

۱۱. د $r = 4\sin^2\theta$ منحني د کړی (حلقي) اوږدوالی لاس ته راوړئ.

۱۲. ثبوت کړئ چې د $r\theta = a$ هیپرابولیک مارپیچ (spiral) د قوس اوږدوالي د $r = a$ نقطي نه تر $r = 2a$ پورې $a\left\{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{8}}{1+\sqrt{5}}\right\}$ دی.

۱۳. وښایاست چې د

$$x\sin\theta + y\cos\theta = f'(\theta)$$
$$x\cos\theta - y\sin\theta = f''(\theta)$$

منحني د قوس اوږدوالی د $s = f(\theta) + f''(\theta) + c$ پواسطه ورکړل شوی دی.

۱,۳,۸ ذاتي (حقیقي) معادله (Intrinsic Equation)

تعریف: د s د منحني د اوږدوالی (چې د منحني د یوې ټاکلې نقطې نه په منحني باندې د P تر نقطې ورې اندازه ده) او د ψ زاویې(چې د ټاکلې نقطې او د P په نقطه کې دمماسونو ترمنځ زاویه ده)، ترمنځ اړیکې ته د منحني ذاتي (حقیقي) معادله (intrinsic equation of the curve) وایي.

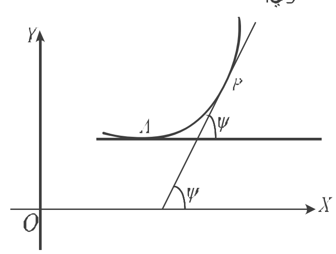
s او ψ ته حقیقي کاردینات (مختصات) وایي.

د یو منحني د دا ډول ښودلو کړنلاره د ویویل (Whewell)، د یو برېټانوي ریاضي پوه پواسطه وړاندې شوې ده. د ذاتي (Intrinsic) د کمیتي لامل دادی چې s او ψ کمیتونه یواځې او یواځې د منحني په شکل پورې اړه لري.

۲,۳,۸ د ذاتي معادلي مشتق (Derivation of the intrinsic equation)

(a) د قایم مختصاتو د معادلې لپاره:

که چیرې $y = f(x)$ د منحني معادله وي.



فرضوو چې $A(a, b)$ د منحني داسې یوه نقطه ده چې مماس د A په نقطه کې د x نه محور سره موازي دی. $P(x, y)$ په منحني باندې یوه متحوله نقطه ده او ψ د A او P په نقطو کې د مماسونو ترمنځ زاویه ده .

$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

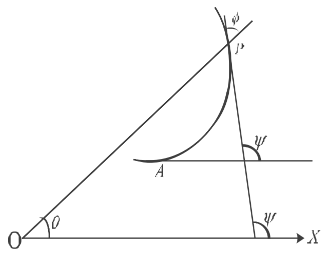
که چیرې s د A نه تر P پورې د قوس اوږدوالی وي نو

$$s = \int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (2)$$

په (1) او (2) کي د x په له منځه وړلو موږ د منحني ذاتي معادله لاس ته راوړو.

(b) قطبي معادلې لپاره:

که چیرې $r = f(\theta)$ د منحني قطبي معادله وي.



فرضوو چې $A(r_1,\alpha)$ په منحني باندې داسې یوه نقطه دې چې په A کې مماس د لومړي خط سره موازي دې.
$P(r,\theta)$ په منحني باندې یوه متحوله نقطه ده او ψ د A او P د نقطو د مماسونو ترمنځ زاویه ده.
که چیرته ϕ د P نقطې د مماس او د شعاع وکتور ترمنځ زاویه وي او s د AP د قوس اوږدوالی وي. نو

$$\tan\varphi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} \qquad (1)$$

$$\psi = \theta + \phi \qquad (2)$$

او

$$s = \int_\alpha^\theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta \qquad (3)$$

د (1)، (2) او (3) معادلو نه د θ او ψ په له منځه وړلو موږ غوښتل شوې حقیقي معادله لاس ته راوړو.

یادونه: موږ باید ټاکلې (ثابته) نقطه مشخصه کړو، ځکه د مختلفو ټاکل شویو نقطو لپاره به موږ مختلفې حقیقي معادلې لاس ته راوړو.

۳,۳,۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $y = c\cosh x/c$ ځنځیري منحني، حقیقي معادله لاس ته راوړئ، د (o,c) سوکه د ټاکلې (ثابتې) نقطې په دول په پام کې ونیسئ.

حل: دلته

$$y = c\cos\frac{x}{c} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin h\frac{x}{c}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1-\sin h^2\frac{x}{c} = \cos h^2\frac{x}{c}$$

$$\frac{ds}{dx} = \cos h\frac{x}{c}$$

$$s = \int_0^x \cos h\frac{x}{c}dx = \left|c\sin h\, {}^{x}\!/_{c}\right|_0^x = c\sin h\frac{x}{c}$$

يعني:

$$s = c\frac{dy}{dx} \Rightarrow s = c\tan\psi$$

کومه چي غوښتل شوي حقيقي معادله ده.

۲. مثال: وښاياست چې د $ay^2 = x^3$ نيمايي کيوزيکل (semi-cusical) پړابولا حقيقي معادله چې مبدا يي د ټاکلي(ثابتې) نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي $27s = 8a(\sec^3\psi - 1)$ ده.

حل: دلته

$$ay^2 = x^3 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad 2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2ay} = \frac{3x^2}{2a\sqrt{x^3/a}} = \frac{3}{2}\sqrt{x/a}$$

لدې سببه

$$\tan\psi = \frac{3}{2}\sqrt{x/a}$$

$$\therefore \quad 4a\tan^2\psi = 9x \qquad (2)$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1+{}^{ax}\!/_{4a}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{4a}}\int_0^x (4a+9x)^{\frac{1}{2}}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left|\frac{(4a-9x)^{3/2}}{3/2\cdot 9}\right|_0^x$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}}\cdot\left\{(4a-9x)^{3/2} - (4a)^{3/2}\right\} \qquad (3)$$

له (2) او (3) څخه د x په له مېنځه وړلولاس ته راوړو چې،

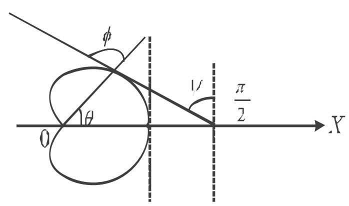
$$27s = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{(4a - 4a\tan^2\psi)^{3/2} - (4a)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$-\frac{(4a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}\cdot\{\sec^3\psi - 1\}$$

یا $27s = 8a(\sec^3\psi - 1)$ غوښتل شوي حقیقي معادله ده.

۳. مثال: وښایاست د $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیوید حقیقي معادله چې $\theta = 0$ د ټاکلي (ثابتي) نقطي په ډول په پام کې نیولو سره $s = 4a\sin\psi/_3$ ده.

حل: دلته



$$r = a(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$= a\cdot\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$= a\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad s = \int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left|4a\sin\theta/_2\right|_0^\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

او

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{a(1-\cos\theta)}{-a\sin\theta}$$

$$= -\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2} = -\cot\theta/2 = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

په $\theta = 0$ کې، مماس په اصلي خط (initial line) عمود دی، نو پدې اساس په A او P کې د مماسونو ترمينځ زاويه ψ ده.

او $\theta+\phi=\psi+\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}=\psi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\theta}{2}=\psi \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\theta=\frac{1}{3}\psi$$

ځکه نو $s=4a\sin\frac{1}{3}\psi$ غوښتل شوی حقيقي معادله ده.

۴. مثال: د $x=a(\theta+\sin\theta)$ ، $y=a(1-\cos\theta)$ سيکلوئيد حقيقي معادله لاس ته راوړئ $\theta=0$ د تټکلي (ثابتې) نقطې په دول په پام کې ونيسئ.

حل: مونږ لروچې

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta)$$

او

$$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{a(1+\cos\theta)}=2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad s=\int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left|4a\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^\theta=4a\sin\frac{\theta}{2}$$

په $\theta=0$ کې، مماس د x د محور سره موازي دی.

$$\therefore \quad \tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{2\sin\theta/2\ \cos\theta/2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \frac{\theta}{2}$$

په پايله کې $s = 4a\sin\psi$ غوښتل شوی ذاتي (حقيقي) معادله ده.

۳,۸ پوښتنې

۱. د $y^2 = 4ax$ پارابولا حقيقي معادله چې مبدأ يې د ثابتې نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي لاس ته راوړئ.

۲. وښاياست چې د $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ استروئيد يعنې $x = a\cos^3\theta$ ، $y = a\sin^3\theta$ چې $(a, 0)$ د ثابتې نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي حقيقي معادله $s = \frac{3}{2}a\sin^2\psi$ ده.

۳. د $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$ ، $y = a(2\sin\theta + \sin 2\theta)$ منحني حقيقي معادله چې $\theta = \frac{\pi}{3}$ د ټاکلې (ثابتې) نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي لاس ته راوړئ.

۴. د $x = e^{\theta}\sin\theta$ ، $y = e^{\theta}\cos\theta$ منحني حقيقي معادله چې $\theta = \pi/4$ د ټاکلې (ثابتې) نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي لاس ته راوړئ.

۵. د $r = a(1-\cos\theta)$ کارديوئيد حقيقي معادله چې قطب د ثابتې نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي لاس ته راوړئ.

۶. د $r = a\cdot e^{k\theta}$ مساوي قاعدي مارپيچې (سپرال) حقيقي معادله چې $\theta = 0$ يې د ثابتې نقطې په توګه په پام کې نيول کيږي لاس ته راوړئ.

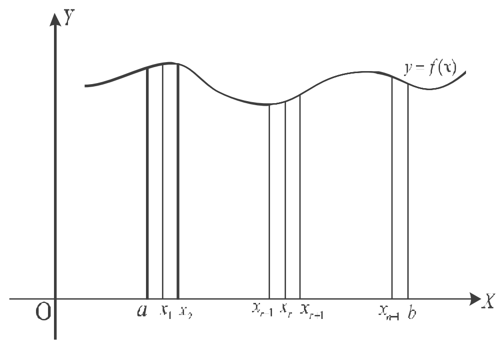
۱,۴,۸ دمستوي دمساحت د ټاکنې کرنلاره يا کوادراتور (Quadrature)

د يو مستوي د سيمې د مساحت د لاس ته راوړلو کرنلاره (پروسې) ته کوادرتور يا مساحت ټاکنه وايي.

۲,۴,۸ په قايمو مختصاتو کې مساحت

قضيه: که چيرې $f(x)$ په $[a,b]$ کې يوه متمادي تابع وي، نو د سيمې مساحت چې د $y = f(x)$ منحني، د x محور، د $x = a$ او $x = b$ د دوه عمودي فاصلو يا اورديناتونوپواسطه راچاپيره شوې ده. د $\int_a^b f(x)dx$ پواسطه راکړل کيږي.

ثبوت: فرضوو چې په $[a,b]$ کې $y = f(x) \geq 0$ مونږ د $[a,b]$ انتروال په n شمير فرعي انتروالونو ويشو چې د هريو اوږدوالی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. په هغه صورت کې نو



$P=\{x_0,x_1,x_2......x_{r-1},x_r........x_n\}$

د $[a,b]$ یوه برخه ده په همدې ډول

$a=x_o<x_1<x_2<........<x_{r-1}<x_r<........x_n=b$

مونږ په $(x_0,x_1.....x_n)$ کې دارنګه رسموو چې غوښتل شوی مساحت په کوچنیو مساحتونو وویشل شي کوم چې مستطیلونو ته په اټکلي ډول ورته دي.

فرض کړئ چې $C_r\in[x_{r-1},x_r]$ او $f(c_r)$ په c_r کې عمودي فاصلې دي. د $r-$ام مستطیل مساحت د x_r-x_{r-1} په اساس قاعدې A_r دی.

$A_r=f(c_r)\cdot(x_r-x_{r-1})$

یا

$A_r=f(c_r).\Delta x$

د n ټولو مستطیلونو د مساحت مجموعه

$$A_r=\sum_{r=1}^{n}A_r=\sum_{r=1}^{n}f(c_r).\Delta x$$

دا دغوښتل شوي مساحت يو اټکل دی. اټکل کله چې د $n\to\infty$ او $\Delta X\to 0$ په پام کې نیولو په واسطه اصلاح شوی وي غوښتل شوی مساحت راکوي. خودې لیمټ $\int_a^b f(x)dx$ دی، څنګه چې $f(x)$ په $[a,b]$ کې متمادي ده. نو لدې امله قضیه ثبوت شوه.

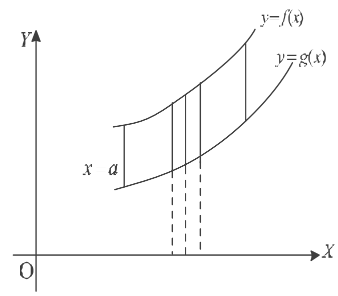
په کوم حالت کې چې $f(x)$ د $[a,b]$ په انتروال باندې مثبت نه وي، نو د $\int_a^b f(X)dx$ معین انتیګرال هم مثبت ندی. ځکه نو پداسې حالت کې مونږ په پام کې نیسو:

$Area=-\int_a^b f(x)dx$

په پایله کې، که چیرې د $f(x)$ علامې په یوه ټاکلي شمیر شیبو کې د $[a,b]$ په انتروال کې بدلون وکړي نو مونږ په $[a,b]$ کې انتیګرال لګه د فرعي انتروالونو د انتیګرالونود مجموعې په شان لیکو. په ساده ډول سره د مساحتونو د مجموعې د ټاکلو لپاره، مونږ باید د انتیګرالونو د مطلقه قیمتونو مجموعه په لاس راوړو. انتیګرال د ټول انتروال د پاسه به یواځې د x محور د پاسنی او لاندنی ساحو توپیر په ګوتو کړي.

۳,۴,۸ د دوه منحني ګانو ترمېنځ مساحت

فرض ووچي غوښتل شوی سيمه د $y = f(X)$ او $y = g(x)$ دوه راکړل شوو منحنيي ګانو او د x = a او x = b ددوه راکړشوو عمودي فاصلو په واسطه محدود شوی دی. دابه د ورته لاملونو په واسطه روښانه شي چي دا مساحت هم د مسلسلو جوړ شويو مستطيلونو د مجموعي د لېمټ په څير څنګه چي په لاندي شکل کي ښودل شوي دي په پام کي نيسو.



لدی امله د مساحت لپاره افاده د

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\cdot dx$$

په مطابق ده.

۴,۴,۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: مساحت پيدا کړئ کوم چي د بيضوي په واسطه راچاپيره شوی دي.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

حل: پدی ځای کي،

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ځرنګه چي منحني دواړو محورونو ته متناظردی مساحت د لومړی ربعي د مساحت څلور چنده دی. او پدی ربع کي د x لپاره حدونه د 0 نه تر a پوري دي.

لدی امله

$$\text{مساحت} = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

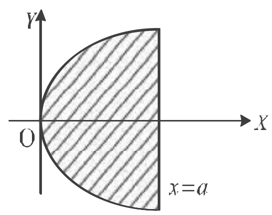
$$= \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\theta \cdot d\theta \;, \qquad (x = a\sin\theta$$ ، چیرې چې)

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$= 2ab\left|\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

۲. مثال: د هغې سیمې مساحت لاس ته راوړئ کوم چې د $y^2 = 4ax$ پرابولا او دقایم محراقي وتر پواسطه چاپیره شوی وي.

حل: قایم محراقي وتر $x = a$ ده.



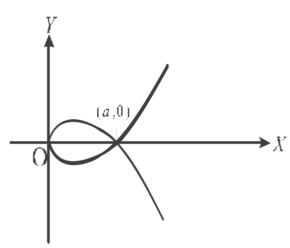
$$\therefore \text{غوښتل شوی مساحت} \quad = 2\int_0^a y \cdot dx$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{4ax} \cdot dx = 4\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= 4\sqrt{a}\left|\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^a = \frac{8\sqrt{a}}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^2}{3}$$

۳. مثال: د هغې سیمې مساحت لاس ته راوړئ چې د $3ay^2 = x(x-a)^2$ منحني ډوله کړی یا ول(loop : دګراف هغه مسیر چې شروع او پای یې یوه نقطه وي) پواسطه احاطه شوې وي.

حل: منحني د x محور ته متناظر ده او منحني ډوله حلقه د $x = 0$ او $x = a$ په منځ کې ده.



$$\therefore \quad \text{غوښتل شوی مساحت} = 2\int_0^a y\cdot dx = 2\int_0^a \sqrt{\frac{x(x-a)^2}{3a}}\cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\int_0^a \sqrt{x}(x-a)\cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\int_0^a (x^{\frac{2}{3}} - ax^{\frac{1}{2}})\cdot dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\left|\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - a\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\left\{\frac{2}{5}a^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\left\{\frac{2}{5}a^{5/2} - \frac{2}{3}a^{5/2}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\left\{\frac{-4}{15}\right\}\cdot a^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{8a^2}{15\cdot\sqrt{3}} \quad \text{(مطلقه قیمت)}$$

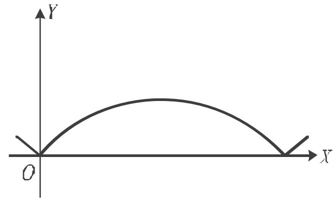
۴. مثال: د

$x - a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1-\cos\theta)$

لیندی یا طاق ډوله سیکلویید مساحت چي کله θ د صفر نه تر 2π پوري تحول کوي یا ډول ډول کیږي پیداکړئ.

حل: دلته $y = a(1-\cos\theta)$ او $dx = a(1-\cos\theta)d\theta$



$\text{غوښتل شوی مساحت} = \int y\cdot dx$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\cdot d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\cdot d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})\cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(3-4\cos\theta+\cos 2\theta)\cdot d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left|3\theta-4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot 6\pi = 3\pi a^2$$

۵. مثال: د هغې سیمې مساحت پیداکړئ کوم چې د $y=x^3$ او $y=x$ منحني ګانو ترمېنځ راچاپېره شوی وي.

حل: د دواړو منحني ګانو د تقاطع د نقطو لپاره

$$x^3 = x \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

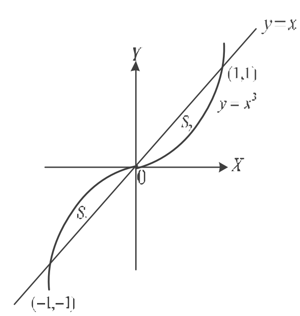
$$\Rightarrow \quad x = 0,\ -1,\ 1$$

د $x=-0,5$ لپاره، $x^3-x=0,375>0$ او د $x=0,5$ لپاره $x^3-x=-0,375<0$.

لدې امله غوښتل شوی مساحت د لاندېنیو دوو سیټونو دمساحت څخه عبارت دی.

$$s_1 = -1\le x\le 0, \qquad x\le y\le x^3$$

$$s_2 = 0\le x\le 1\ , \qquad x^3\le y\le x$$



د S_1 مساحت $= \int_{-1}^{0}(x^3-x)\cdot dx = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}$

$$= 0-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) = \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4}$$

او

د S_2 مساحت $= \int_0^1 (x-x^3)\cdot dx$

$$= \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

په پایله کې د دوارو منحني ګانو ترمنځ راچاپیرشوی مساحت مساوي دی له:

$$S = S_1 + S_2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۴,۸ پوښتنې

۱. ثبوت کړئ د هغې سیمې مساحت چې د $y = c\cosh\frac{x}{a}$، x محور، $x = a$ او $x = b$ پواسطه راچاپیره شوی وي $c^2\left\{\sinh\frac{b}{c} - \sinh\frac{a}{c}\right\}$ دی.

۲. د یوې کوچنې قطعې مساحت چې د r په شعاع دایروي ډسک نه چې مرکز نه د a په واټن د یو وتر پواسطه جلاشوی وي لاس ته راوړئ.

۳. د $y^2 = 4x^2(1-x)$ منحني د کړی یا ول مساحت لاس ته راوړئ.

۴. د هغې سیمې مساحت لاس ته راوړئ چې د $x^2(x^2+y^2) = a^2(y^2-x^2)$ منحني او دهغه مجانب ترمنځ واقع وي.

۵. د هغې سیمې مساحت لاس ته راوړئ چې د $ay^2 = x^2(a-x)$ منحني د حلقې پواسطه راچاپیره شوې وي.

۶. د هغې سحې مساحت لاس ته راوړئ چې د $xy^2 = 4(2-x)$ منحني او د y د محور پواسطه احاطه شوې وي.

۷. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ یا $x = a\cos^3\theta$، $y = a\sin^3\theta$ خلور څوکې هایپوسیکلوئید مساحت لاس ته راوړئ.

۸. هغه مساحت لاس ته راوړئ کوم چې د $y^2 = x^2(4-x^2)$ منحني د یوې حلقې پواسطه راچاپیره شوی وي.

۹. د

$$x = a(\theta + \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

سیکلوئید د یو قوس مساحت لاس ته راوړئ.

۱۰. د هغې سیمې مساحت پیداکړئ چې د $y^2 = 4ax$ او $x^2 = 4ay$ پارابولا پواسطه راچاپیره شوې وي.

۱۱. هغې سیمې مساحت لاس ته راوړئ چې د x د محور پورته خواته او د $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ دایرې او $y^2 = ax$ پارابولا ترمنځ واقع وي.

۱۲. هغه مساحت پيداکړئ کوم چې د $y=\sqrt{x}$ او $y=x^2$ منحني گانو پواسطه راچاپيره شوی وي.

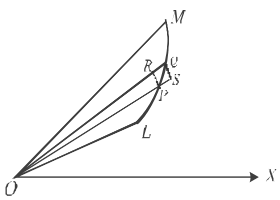
۱۳. د هغې سيمې مساحت پيداکړئ چې د $x^2=4ay$ پارابولا او د $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ منحني پواسطه راچاپيره شوې وي.

۱۴. هغې سيمې مساحت لاس ته راوړئ چې د $x^2=4y$ او $8y=x^2-16$ پواسطه راچاپيره شوی وي.

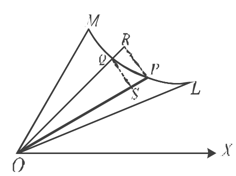
۱,۵,۸ په قطبي مختصاتو کې مساحتونه يا د قطاعو (Seclorial) مساحتونه

قضيه: فرضوو چې $r=f(\theta)$ متما دي او د (θ) دهر قيمت لپاره د $[\alpha,\beta]$ په انتروال کې يوازې يو (يکي يو) قيمت لري. د سيمې مسا حت چې د $r=f(\theta)$ منحني او د $\theta=\alpha$ او $\theta=\beta$ شعاعوو پواسطه راچاپيره شوی وي $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\theta$ دی.

ثبوت: فرضوو چې LM د $r=f(\theta)$ منحني او OL ، OM د $\theta=\alpha$ ، $\theta=\beta$ شعاع و وکتورنه دي.



1- شکل



2- شکل

فرض کړئ چې $P(r,\theta)$ په منحني باندې کومه نقطه او $Q(r-\Delta r,-\Delta\theta)$ په هماغه منحني باندې کومه بله نقطه ده چې د P نقطې ته ډيره نژدې پرته ده لکه چې يوې نقطې د P نه Q ته حرکت کړی وي، شعاع ويکتور يا د لومړي شکل په څير په ثابت ډول تزايد کوي يا د دويم شکل په شان په ثابت ډول تناقص کوي.

که چيرې د OLP مسا حت A وي، نو د OLQ مسا حت $(A+\Delta A)$ دی. O دمرکز په ډول او OP ، OQ د شعاعو په ډول يو دايروي قوس رسموي چې OP، OQ په ترتيب سره په R او S کې قطع کوي.

د OPQ مسا حت چې د OPR او OSQ دايروي قطاعو (سکتورونو) د مساحتونو په منځ کې واقع دی، هغه (ΔA) دی چې د $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ او $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$ په منځ کې واقع دی.

$\therefore$ $\dfrac{\Delta A}{\Delta Q}$ د $\frac{1}{2}r^2$ او $\frac{1}{2}(r-\Delta r)^2$ په منځ کې وا قع دي.

په لېمټ نيولو سره چې $\Delta Q\to 0$ او $\Delta r\to 0$ ، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$$

$$\therefore\quad \int_\alpha^\beta\frac{dA}{d\theta}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta$$

$$\therefore \quad \text{مساحت } OML = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

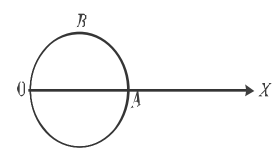
که چیرې دیو مستوي سیمه (ساحه) د $r = f(\theta)$ او $r = g(\theta)$ متمادي منحنیانو او د $\theta = \alpha$، $\theta = \beta$ شعاع وکتورونو پواسطه راچاپیره شوې وي او $g(\theta) \le f(\theta)$ دهرې θ لپاره دارنګه چې $\alpha \le \theta \le \beta$ وي نو دسیمې مساحت مساوي دی له:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[\{f(\theta)\}^2 - \{g(\theta)\}^2\right] d\theta$$

۲,۵,۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $r = 2a\cos\theta$ دایرې مساحت پیدا کړی؟

حل: ددایرې پورتنی نیمایي برخه د $\theta = 0$ او $\theta = \frac{\pi}{2}$ تر مېنځ واقع ده.



$\therefore$ د OAB مساحت دوه برابره ده = د دایرې مساحت

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

۲. مثال: $r = a\sin 2\theta$ د څلور پاڼي ایز ګلاب ټول مساحت پیداکړی .

حل: د منحني یوول پاڼه کړی د $\theta = 0$ او $\theta = \frac{\pi}{2}$ ترمېنځ واقع ده.

$\therefore$ دیوې پاڼې یا ول د مساحت څلورچنده ده = ټول مساحت.

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot a^2 \sin^2 2\theta \cdot d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

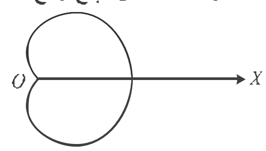
$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 8a^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2$$

۳. مثال: د $r = a(1+\cos\theta)$ کا رډیود مساحت لاسته راوړئ.

حل: د منحني پورتني نیمايي برخه د $\theta = 0$ او $\theta = \pi$ تر مېنځ واقع ده.



$\therefore$ دکا رډیوید مساحت $= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_0^{\pi} r^2 d\theta$

$$= \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,dz, \qquad (\text{چېرې چې } \theta = 2z)$$

$$= 8a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

۴. مثال: د $x^4 + 3x^2y^2 + 2y^4 = a^2xy$ منحني دیوی حلقې مساحت پیدا کړئ.

حل: قطبي کارډیناتو ته په تبدیلوني سره معا دله د

$$r^2 = \frac{a^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + 2\sin^4\theta}$$

سره کیږي. یوول یا کړی د $\theta = 0$ او $\theta = \frac{\pi}{2}$ ترمېنځ واقع ده.

$\therefore$ د یوې کړی مساحت $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^4\theta + 3\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + 2\sin^4\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tag\theta\cdot\sec^2\theta}{1+3tag^2\theta+2tag^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2tag\theta\cdot\sec^2\theta\cdot d\theta}{1+3tag^2\theta+2tag^4\theta}$$

$$=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+3z+3z^2},\qquad(\tan^2\theta=z)$$

$$=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\infty}\frac{dz}{(2z+1)(z+1)}$$

$$=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{2z+1}-\frac{1}{z+1}\right)\cdot dz$$

$$=\frac{1}{4}a^2\ln\left|\frac{2z+1}{z+1}\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{4}a^2\{\ln 2-\ln 1\}=\frac{1}{4}a^2\ln 2.$$

۵. مثال: و ښیاست چې $r=a$ دا یرې او $r=a\cos 5\theta$ منحني تر مېنځ د ایسارې شوي سیمې مسا حت له $\frac{3}{4}\pi a^2$ سره مساوي دی.

حل: د $r=a\cos 5\theta$ منحني درلودونکي د پنځو ولونو یا کړیو دی یوول(کړی)د $\theta=-\frac{\pi}{10}$ او $\theta=\frac{\pi}{10}$ ترمنځ وا قع ده.

$\therefore$ د $r=a\cos 5\theta$ منحني مسا حت مسا وي دی له

$$5\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}}\frac{1}{2}r^2\cdot d\theta=\frac{5}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}}a^2\cos^2 5\theta.d\theta$$

$$=\frac{5}{4}a^2\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}}(1+\cos 10\theta)\cdot d\theta$$

$$=\frac{5}{4}a^2\left|\theta+\frac{1}{10}.\sin 10\theta\right|_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}}$$

$$=\frac{5}{4}a^2\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{10}\right\}=\frac{1}{4}\pi a^2$$

ددایرې مسا حت $=\pi a^2$

$\therefore$ ددایرې او منحني ترمېنځ مساحت مساوي دی له

$$=\pi a^2-\frac{\pi}{4}a^2=\frac{3}{4}\pi a^2$$

۵,۸ پوښتنې

۱. د $r = a(1-\sin\theta)$ کارډیوید مساحت لاسته راوړئ.

۲. د هغې سیمې مساحت چې د $r = a\sin 3\theta$ ول(کړی) پواسطه راچاپیر شوی دی لاسته راوړئ.

۳. د هغې سیمې مساحت لاسته راوړئ چې د $r^2 = a^2\cos 2\theta$ پواسطه راچاپیر شوې وي.

۴. د هغې سیمې مساحت لاسته راوړئ چې د $r = a\sin m\theta$ منحي دیوې کړی پواسطه تړل شوې وي.

۵. د هغې سیمې مساحت لاسته راوړئ چې د $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ منحي پواسطه راچاپیره شوې وي.

۶. وښایاست چې $a < b, r = a\cos\theta + b$ منحني مسا حت له $\pi(\frac{1}{2}a^2 + b^2)$ سره مساوي دی.

۷. د $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$ منحني دیوې کړی مساحت لاسته راوړئ.

۸. د $x^4 + y^4 = 2a^2xy$ منحني ټول مساحت لاسته راوړئ.

۹. د $x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$ منحني ټول مساحت لاسته راوړئ.

۱۰. د هغې سیمې مساحت لاسته راوړئ چې د $r = a(1-\cos\theta), r = a(1+\cos\theta)$ کارډیودونو ترمینځ ایساره شوې وي.

۱۱. $r = a$ دایرې او د $r = a(1+\cos\theta)$ کا رډیوید شریک مساحت لاسته راوړئ.

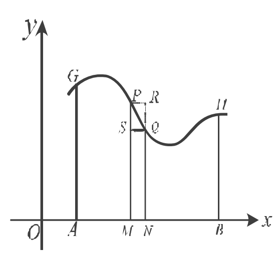
۱۲. د $r = 2a\cos\theta$ دایرې د باندېنې برخې او $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیوید داخلی برخې مساحت لاسته راوړئ.

۱,۶,۸ د یو څرخیدونکي یا دوراني جسم حجم

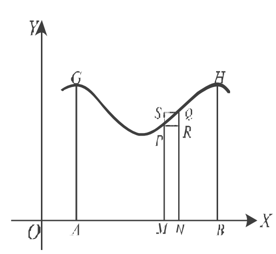
یوجسم هغه وخت رامېنځته کیږي کله چې دیو مستوي سیمه دیو مستقیم خط په شاوخوا باندی په مستوي کې وڅرخیږی. جسم ته څرخیدونکي یا دوراني جسم وایي او خط ته د څرخیدونکي جسم محور وایي.

د یو څرخیدونکي جسم حجم لاسته راوړلو لپاره مونږ لاندېني درې حالتونه په پام کې نیسو.

۱. **حالت:** د څرخیدونکي جسم حجم چې د x دمحور په شا وخوا له دوران کولو نه په لاس راځي، د مستوي سیمه د $y = f(x)$ منحني، د x محور او د $x = a$، $x = b$ دعمودي فاصلو پواسطه راچاپیره شوې ده د $\int_a^b \pi y^2 dx$ پوا سطه ورکول کیږي، د $f(x)$ تابع د (a, b) په انتروال کې د x دهر قیمت لپاره متما دي ده.



شکل-1



شکل-2

فرضوو چې GH د $y = f(x)$ منحني دی، د G , H نقطې د $x = a$ او $x = b$ سره مطا بقت لري.
پدې فرضولو چې $P(x, y)$ په منحني باندې کومه يوه نقطه ده او هم $Q(x + \Lambda x, y + \Delta y)$ په منحني باندې يوه بله نقطه ده دارنګه لکه چې يوې نقطې له P نه Q ته حرکت کړی وي دهغې عمودی واټن يا په ثابت ډول تزايد کوي لکه لومړی شکل يا په ثا بت ډول تناقص کوي لکه دويم شکل.
فرضوو چې V هغه حجم دی چې د $GAMP$ دڅرخيدلو(دوران) په واسطه رامنځته شوی دی او $(v + \Delta v)$ هغه حجم دی چې د $GANQ$ د څرخيدلو پواسطه رامنځته شوی دي، نو Δv هغه حجم دی چې د $PMNQ$ د څرخيدلو په واسطه رامنځته کيږي.

Δv دهغو حجمونوترمېنځ واقع دی کوم چې د $PMNR$ او $QNMS$ مستطيلونو پواسطه توليد شويدي.
څنګه چې Δv د $\pi y^2 \Delta x$ او $\pi(y + \Lambda y)^2 \Lambda x$ ترمېنځ واقع دی. او

$\therefore$ $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ د πy^2 او د $\pi(y + \Delta y)^2$ ترمېنځ واقع دی.

نو په لېمټ نيولو سره کله چې $\Delta x \to 0$، لاس ته راځي چې

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2$$

$$\therefore \quad \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \frac{dv}{dx} dx = |v|_a^b$$

$=$ (د v حجم د $x = b$ لپاره) $-$ (د v حجم د $x = a$ لپاره)

$=$ د $GABH$ دوران په واسطه لاسته را غلی حجم

په پايله کې مونږ د

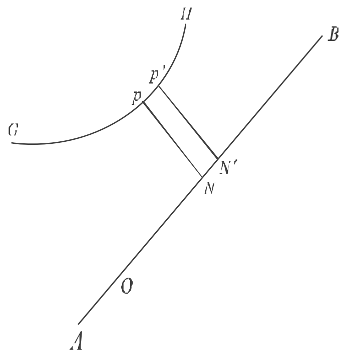
$$v = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

فورمول لاس ته راوړو.

پايله: په ورته ډول هغه حجم چې د y محور په شاوخوا د $x = f(y)$ د څرخيدلو په واسطه د $y = c$ ، $y = d$ حدونو په لړلو جوړشوی دی ده.

$$v = \int_c^d \pi x^2 dy$$

۲. **حالت:** د هر محور په شا و خوا



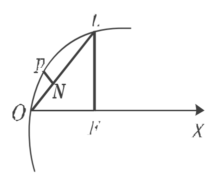
که چېرې څرخېدنه د AB دکوم یوخط په شاوخوا وي او PN کوم عمود د P له یوې نقطې نه په منحني باندې د AB دخط پورته خواته وي او $P'N'$ بل عمود په منحني باندې د P' له یوې نقطې نه P ته نږدې رسم شوی وي، نو حجم یې داسې څرګندېږي:

$$\sum \pi (PN)^2 \cdot (NN')$$

یا که چېرته O د AB په خط باندې یوه را کړل شوې نقطه وي نو،

$$\text{حجم} = \int \pi (PN)^2 d(ON)$$

مثال: دهغې میلې یا ماکو(Spindle) حجم پیدا کړئ چې د یو پارابولیک قوس د څرخېدلونه د هغه خط په شاوخوا چې راس د وتر (هغه وتر چې په اصلي محور عمود او د محراق څخه تېرېږي) د یوې څوکې سره وصلوي انځور شویدی.



فرضو چې پارابولا $y^2 = 4ax$ دی.

نو ددوران یا دڅرخېدلومحور OL یعني $y = 2x$ دی. او

$$PN = \frac{y - 2x}{\sqrt{5}}$$

همدارنګه،

$$ON = \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{y - 2x}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+4y^2+4xy}}{\sqrt{5}} = \frac{2y+x}{\sqrt{5}}$$

$$d(ON) = \frac{dx+2dy}{\sqrt{5}} = \frac{dx+2\sqrt{a/x}\,dx}{\sqrt{5}}$$

$$PN = \frac{2\sqrt{ax}-2x}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \text{حجم} = \int \pi (PN)^2 d(ON)$$

$$= \pi \int_0^a \frac{4}{5} \times (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 \left(1+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{5}} dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a \sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2(\sqrt{x}+2\sqrt{a})dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a (-3ax+2a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}+x^2)dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3\pi\sqrt{5}}{75}$$

۳. حالت: د راکړل شوي عرضي مقطع له څرخیدلو څخه د لاس ته راغلي جسم حجم.

په لومړي حالت کې، مونږ څرخیدونکی جسم حجم $\int_a^b \pi y^2 dx$ ثبوت کړ.

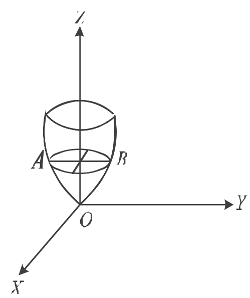
د $\pi y^2 = \pi[f(x)]^2$ انتیګرال دجسم دعرضي مقطع مساحت دی دیومستوي پواسطه چې د x په محورعمود او د x واحدو په اندازه له مبدا څخه واټن لري جوړ کړی وه. لدې امله که چیرې دیو جسم دیوې عرضي مقطع مساحت ، چې د یومستوي پواسطه چې د x په محور (څرخیدونکی محور)عمود اوله مبدا نه د x په یوه واټن کېدای شي چې x د A(x) د یوې تابع په شان څرګنده شي قطع کړي، د جسم حجم د

$$\int_a^b A(x)dx$$

پواسطه په لاس راځي.

مثال: د $x^2/_{16} + y^2/_{25} = z$ بیضوي دوله پړابولوئید څخه د $z = 10$ مستوي پواسطه د قطع شوي جسم حجم پیداکړئ.

فرضوو د AB بیضوي د جسم یوه عرضي مقطع ده چې د z په یوه واټن د z په محور باندې عمود دی.



نو ددغي عرضي مقطع (بيضوي) معا دله

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=z$$

يا

$$\frac{x^2}{16z}+\frac{y^2}{25z}=1$$

دی. ددې مساحت يعني

$$\begin{aligned}A(z)&=\pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z})\\&=20\pi z\end{aligned}$$

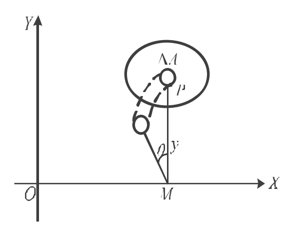
په پایله کي غوښتل شوی حجم عبارت دی له

$$\begin{aligned}\int A(z)dz&=\int_0^{10}20\pi z\,dz\\&=20\pi\left|\frac{z^2}{2}\right|_0^{10}=1000\pi\end{aligned}$$

۲,۶,۸ د پاپس (Papus) یا ګلدین (Guldin) لومړی قضیه

کله چي يو تړلی منحني په خپل مستوي کي د يو خط په شاوخوا دوران کوي، کوم چي منحني نه قطع کوي، د جوړي شوې کړې حجم دهغي استواني سره مساوي دی چي دهغي قاعده منحني ده اودهغي لوړوالی د منحني د مسا حت د سنترويید دمسيراوږدوالی دی.

ثبوت: فرضوو چي څرخيدونکي محور د x محور دی د A راکړل شوی مسا حت په کوچنيو لومړنيو مساحتونو ويشو او فرضوو چي ΔA يو ددغو مسا حتونو څخه دي او د P په نقطه کي وا قع دی.



کله چي مسا حت د θ زاويي په اوږدو کي وڅرخيږي، د قوس اوږدوالی د ΔA پواسطه روښانه کيږي چي $y\theta$ دی

$\therefore$ حجم راغلی ته لاس پواسطه ΔA د $=y\theta\cdot\Delta A$

په پایله کي ټول لاس ته راغلی حجم له:

$$\int y\theta\,dA=\theta\int y\,dA$$

سره مساوي دی. که چېرې $\bar{y}$ د مساحت د ثقل مرکز عمودي واټن (د مختصاتو د محورعرض) وي. مونږ لرو چي

$$\bar{y}=\frac{\int ydA}{\int dA}=\frac{\int ydA}{A}$$

$$\therefore \quad \int ydA = A\bar{y}$$

له دې امله،

$$\theta\int ydA = A\theta\bar{y}$$

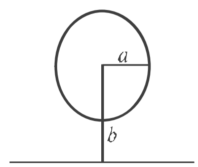
په دې ډول قضیه ثبوت شوه.

۳،۶،۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د يوې چنګک داره کړۍ حجم لاسته راوړئ چې د a په شعاع دايروي ډسک په خپل مستوي کي ديو مستقيم خط په شاوخوا له مرکز څخه د b $(b > a)$ په واټن لري څرخيږي جوړه شوی ده.

حل: ددايرې مسا حت πa^2 دی

د خط څخه د ثقل مرکز واټن b دی.



$\therefore$ د مکمل دوران لپاره د ثقل مرکز (c.g.) د مسير اوږدوالی $2\pi b$ دی.

$\therefore$ غوښتل شوي حجم $=\pi a^2\cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$

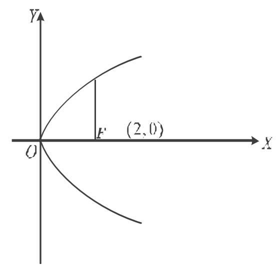
۲. مثال: هغه حجم پيداکړئ چې د x محور په شاو خوا کي ديوی سطحي دڅرخيدلو کولو څخه په لومړی ربع کي د $y^2=8x$ پارابولا او د ده دمحراقي قايم وتر پواسطه راچاپيره شوی وي، رامېنځته کېږي.

حل: د $y^2=8x$ پارابولا لپاره، محراق $(2,0)$ دی.

$\therefore$ د x لپاره حدونه د $x=0$ نه تر $x=2$ دي.

لدي امله غو ښتل شوی حجم مساوي دی له

$$\int_0^2 \pi y^2 dx = \pi\int_0^2 8x dx = \pi\left|4x^2\right|_0^2 = 16\pi$$



۳. مثال: د یو کندولی د y محور په شاوخوا چې $x^3 = 64y$ ، $y > 0$ منحني پوا سطه راچاپیره شوي سطحې دڅرخیدو له امله جوړ شویدی. که چیرې د کندولې ژوروالي 8cm وي، نو څو سا نتي مترمکعب (cm^3) اوبه به په کندولي کې ځای پرځای شي؟

حل: د کندولې ژوروالی 8cm او د $x^3 = 64y$ منحني، له مبدا څخه تیریږي.

$\therefore$ د y لپاره حدودونه $y = 0$ او $y = 8$ دي

$\therefore$ د کندولي غو ښتل شوی حجم عبارت دی له:

$$\int_0^8 \pi x^2 dy = \int_0^8 \pi (64y)^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= 16\pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = 16\pi \left| \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right|_0^8$$

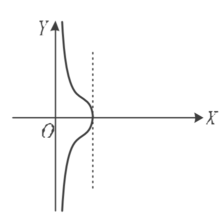
$$= 16\pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 8^{\frac{5}{3}} = \frac{48\pi}{5} \cdot 32$$

$$= \frac{1536}{5} \pi \, cm^3$$

۴. مثال: د هغه جسم حجم لاسته راوړئ چې د y محور په شاوخوا د $xy^2 = 4(2-x)$ منحني پواسطه راچاپیره شوې سطحې دڅرخیدلو پواسطه جوړیږي.

حل: د y محور یو مجانب دی. منحني د x محور د $x = 2$ په نقطه کې قطع کوي. همدا رنګه $x(y^2+4) = 8$

$$\therefore \quad x = \frac{8}{y^2+4}$$



منحني د x محور ته متناظر دی.

$$\therefore \quad \text{غوښتل شوی حجم} = 2\int_0^{\infty} \pi x^2 dy = 2\pi\int_0^{\infty} \frac{64}{(y^2+4)^2}dy$$

د $y=2tag\theta$ په اینودلو،

$$=128\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2\theta d\theta}{16\sec^4\theta}$$

$$=128\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{8\sec^2\theta}=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$

$$=16\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2$$

۵. مثال: د جسم حجم لاسته راوړئ چې د x د محور په شاوخوا د $x=a(\theta-\sin\theta)$، $y=a(1+\cos\theta)$ سیکلوئید دیو قوس له څرخیدلو څخه جوړیږي.

حل: موږ پوهیږو کله چې $\theta=\pi$ ، $y=0$ نو $x=a\pi$

غوښتل شوی حجم عبارت دی له:

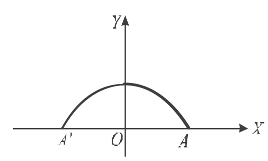
$$=2\int_0^{\pi a} \pi y^2 dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi a} a^2(1-\cos\theta)^2 a\cdot(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=2a^3\pi\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 d\theta$$

$$=2a^3\pi\int_0^{\pi} 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$=16a^3\pi\int_0^{\pi} \cos^6\frac{\theta}{2}d\theta$$



د $\frac{\theta}{2}=\phi$ په اینودلو سره

$$=32a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\phi\ d\phi$$

$$=32a^3\pi\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=5a^3\pi^2$$

۶,۸ پوښتنې

۱. د جسم حجم پیدا کړئ چې د x د محور په شاخوا د $x^2-y^2=a^2$ دایرې له څرخیدو نه جوړیږي.

۲. د کش شوي کرې حجم لاسته راوړئ چې د x د محور په شاوخواد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي دڅرخیدوپواسطه جوړه شوې وي.

۳. هغه حجم پیدا کړئ کوم چې د x د محور په شاخوا د $y^2(a+x)=x^2(a-x)$ منحني د کړی دڅرخیدلو پواسطه جوړ شوی وي.

۴. د هغه څرخ دوله جسم حجم لاسته راوړئ چې په لومړي ربع کې د دقوس دڅرخیدلوله امله چې د $y^2=4ax$ پارابولا او دهغه د محراقي قایم وتر پوا سطه راچاپیره شوی دي د y د محور په شاو خواکې جوړیږي.

۵. وښایاست چې د $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ سیکلوئید د یوقوس پواسطه راچاپیره شوي سطحې دخپلې قاعدې په شاوخوا دڅرخیدلو له امله رامېنځته شوی حجم $5\pi^2a^3$ دی.

۶. و ښایاست چې د یو جسم حجم چې $(a-x)y^2=a^2x$منحني د خپل مجانب په شاوخوا دڅرخیدلو له امله جوړ وي $\frac{1}{2}\pi^2a^3$ دی.

۷. د $y^2=4ax$ پارابولا او د محراقي قایم وتر ترمېنځ مساحت چې دهادي خط په شاوخوا څرخیږي. د هغې کړی حجم لا سته راوړئ چې پدی دول جوړه شوې ده.

۸. د جسم حجم لاسته راوړئ چې د $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ منحني دڅرخیدلو پواسطه دهغه دمجانب په شاوخوا جوړ شوی وي.

۹. د هغه راډ دوله جسم حجم لاسته راوړئ چې د x محور په شاوخوا د $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ هیپوسیکلوئید دڅرخیدلوپواسطه رامېنځته کېږي.

۱۰. ثبوت کړئ چې د $y^2(a-x)=a^2(a-x)$ منحني د مجانب په شاوخوا له څرخیدلو څخه لاسته راغلی حجم $2\pi^2a^3$ دی.

۱۱. د هغې کوټي یاچلي (torus) حجم لاسته راوړئ چې د $x=3$ خط په شاوخوا د $x^2+y^2=4a^2$ دسک دڅرخیدلو له امله جوړه شوې وي، چیرې چې $2a<3$ دی.

۱۲. دیو مستطیل مساحت چې اوږدوالی او سور یې په ترتیب سره 4 او 2 او د ثقل مرکز یې د $(4,3)$ په نقطه کې دی که چیرې (i) د $x=9$ مستقیم خط (ii) د $y=-5$ مستقیم خط او (iii) د $y=-x$ مستقیم خط په شا و خوا دورا ن ورکړل شي. په هر حالت کې لاس ته راغلی حجم پیدا کړئ.

۱۳. د هغودوو برخو حجمونه پیدا کړئ په کوم کې چې د r په شعاع درلودونکې کره د $x=a$, $(a<r)$ مستوي پوسیله ویشل شوې ده.

۱۴. یو جسم چې د څلور واحدو په شعاع دایروي قاعده لري. د جسم حجم پیدا کړئ که چیرې دهر مستوی برخه(مقطع) د قاعدې یوټا کلي قطر ته عمود وي یو متساوي الا ضلاع مثلث دی.

۱۵. د شلغم دوله کروي جسم حجم پیدا کړئ چې د $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ بیضوي پواسطه راچاپیره شوې سطحې د کوچني محور په شاوخوا دڅرخیدلو له امله لاس ته راځي.

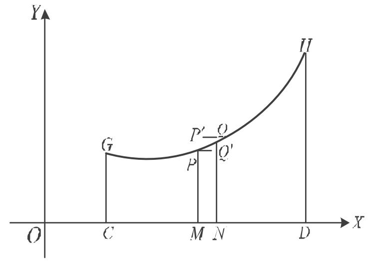
۱۶. د جسم حجم پیداکړئ چې د y محور په شاوخواد $x^2-y^2=1$ ، اود $x=3$ پواسطه راچاپیره شوې سیمې له څرخیدلو څخه لاس ته راځي.

۱,۷,۸ دیوي څرخیدونکي سطحې مساحت (Area of a surfac of (Revolution

که چېرې $f(x)$ د x دهر قیمت لپاره لکه $a < x < b$ متمادي وي، نو د جسم منحني سطحه چې د x محور په شا خوا د $y = f(x)$، $x = a$ ، $x = b$ او x محور پواسطه راچاپېرې شوې سطحې دڅرخیدلو له امله مېنځ ته راځي

$$\int_a^b 2\pi\, y\, ds$$

دی.
چېرته چې s د $x = a$ نقطې نه د (x, y) تر هرې بلې نقطې پورې د قوس د اوږدوالی نوې اندازه دی.



ثبوت:
فرضوو چې GH د $y = f(x)$ منحني دی، او H, G د $x = a$، $x = b$ اړونده نقطې دي. پدې فرضولو سره چې $P(x, y)$ په منحني باندې کومه بله نقطه ده او $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ یوه ګاونډې (مجاوره) نقطه ده. که چېرې د GP قوس اوږدوالی s او د GQ قوس اوږدوالی $(s+\Delta s)$ وي. نو پدې پام کې نیولوسره د هغې منحني سطحې مساحت چې د x دمحور په شاوخوا د GCMPG سیمې دڅرخیدلو له امله مېنځته راغلی A او هغه چې د GCNQG دڅرخیدلو له امله مېنځته راغلی $A+\Delta A$ دی.

PQ' او QP' د x محور ته موازي رسمو. مونږ پوهیږو د جسم منحني سطحه چې د PMNQ دڅرخیدولو له امله جوړه شوې ده دهغواستوانوي منحني سطحو تر مېنځ واقع دی چې د x د محور په شاوخوا د PQ' او QP' دڅرخیدلو له امله جوړې شوي دي. نو پدی ډول ΔA د $2\pi\, y\, \Delta s$ او $2\pi(y-\Delta y)\Delta s$ ترمېنځ او

$\therefore \quad \dfrac{\Delta A}{\Delta S}$ د $2\pi y$ او $2\pi(y+\Delta y)$ ترمېنځ وا قع دي.

په لیمټ نیولو سره کله چې $Q \to P$ مونږ لرو چې،

$$\frac{dA}{ds} = 2\pi y$$

$$\therefore \quad \int_{x=a}^{b} 2\pi\, y\, ds = \int_{x=a}^{b} \frac{dA}{ds} \cdot ds = \Big|A\Big|_{x=a}^{x=b}$$

= (کله چې $x = a$، د A قیمت)−(کله چې $x = b$ ، د A قیمت) =
= د هغې سطحې مساحت چې د GH په واسطه رامنځته کیږي =

۱. پایله: په ورته ډول دهغه جسم د سطحې مساحت چې د y دمحور په شاوخوا د $x = f(g)$ د $y = c$، $y = d$ د حدودنو په لرلو دڅرخیدلو په واسطه کې جوړه شوې وي عبارت دی له

$$A = \int_{c}^{d} 2\pi\, x\, ds$$

۲. پایله: که چېرې دیوی سیمې څرخیدنه د کوم بل محور په شاوخوا په پام کې نیول شوې وي نو د سطحې مساحت عبارت دی له

$$\int 2\pi (PM) ds$$

چېرته چې P په منحنې باندې کومه نقطه ده او PM د P نه په څرخیدونکي محور باندې عمود دی.

مثال: r په شعاع د یوې کرې سطحه پیدا کړئ.
حل: فر ضوو چې $x^2 + y^2 = r^2$ هغه دایره ده کومه چې د x د محور په شاوخوا څرخیږي او راکړل شوې کره جوړوي.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2 - x^2}}$$

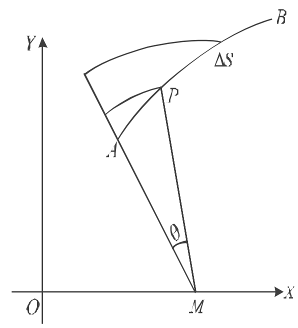
$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$\therefore$ د غوښتل شوې سطحې مساحت $= 2\int 2\pi y ds$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r |x|_0^r = 4\pi r^2$$

۸ .۲،۷ د پاپس دویمه قضیه

که چېرې یو قوس پخپل مستوي کې د یو محور په شاوخوا وڅرخیږي خو دا قطع نه کړي، د رامېنځته شوی جسم منحني سطحه د قوس داوږدوالي د منحني د قوس د ثقل د مرکز د مسیر د اوږدوالي دضرب له حاصل سره مساوي دی.
ثبوت: فرضوو چې s د AB قوس اوږدوالی دی او x محور دڅرخیدلو محور دی. فر ض کړئ چې قوس د θ یوې زاویې په امتداد حرکت کوي.
د قوس د P په نقطه کې Δs یو عنصر په پا م کې نیسو. د قوس اوږدوالی چې Δs پواسطه ښودل کیږي $y\theta$ دی.



څرنګه د Δs پوا سطه را مېنځته شوې سطحه $y\theta\Delta s$ ده.

نولدې امله ټوله را مېنځته شوې سطحه $\int y\theta\, ds = \theta\int y\, ds$ ده.

که چېرې $\bar{y}$ د AB قوس د ثقل د مرکز عمودي واټن وي، نو

$$\bar{y} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int y\, ds}{s}$$

$$\therefore \quad \bar{y}s = \int y\, ds$$

$$\therefore \quad \theta\int y\, ds = \theta\bar{y}\, s = s(\theta\bar{y})$$

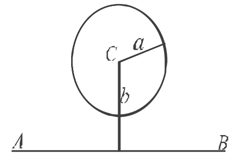
نو له دې امله قضیه ثبوت شوه.

۳,۷,۸ حل شوې مثالونه

۱. مثال: دیوی ځنګري کړی سطحه پیدا کړئ چې پخپل مستوي کی له مرکز څخه د b $(b > a)$ په واټن دیو مستقیم خط په شاو خواد a په شعاع دیو ډسک دڅرخیدلو له امله جوړه شوې وي.

حل: فرضوو چې C د دایروي ډسک مرکز دی او AB خط، د دایروي ډسک محیط له $2\pi a$ سره مساوي دی.

د مسیر اوږدوالی چې د محیط د ثقل مرکز پوا سطه څرګند شوی دی له $2\pi b$ سره مساوي دی.



را منځته شوی سطحه $= 2\pi a \cdot 2\pi b$

$= 4\pi^2 ab$

۲. مثال: د یوی څرخیدونکي سطحي مساحت پیداکړئ چي د x محور په شاوخوا د $y^2 = 12x$ پارابولا د قوس $x = 0$ نه تر $x = 3$ پواسطه چاپیره شوي سطحي دڅرخیدلو له امله رامنځته کیږي.

حل: غو ښتل شوی مساحت مساوي دی له

$$A = \int 2\pi y ds$$

دلته

$$ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{36}{y^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{1 - \frac{36}{12x}}\quad dx$$

$$= \sqrt{\frac{x+3}{x}}\quad dx$$

نو لدې امله

$$A = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x}\sqrt{\frac{x-3}{x}}\, dx$$

$$= 2\pi\ 2\sqrt{3}\ \int_0^3 \sqrt{x+3}\ dx$$

$$= 4\pi\sqrt{3}\left|\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3$$

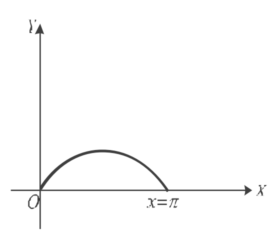
$$= \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\{6\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\}$$

$$= \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} 3\sqrt{3}\{2\sqrt{2} - 1\}$$

$= 24\pi(2\sqrt{2} - 1)$ واحد مربع

۳. مثال: د جسم سطحه پیداکړئ چي د x محور په شاوخوا د هغي سطحي له څرخیدلو څخه رامنځته کیږي چي د $y = \sin x$ منحني د قوس او د $x = 0$ نه تر $x = \pi$ پواسطه چاپیره شوي وي.

حل:



$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$ds = \sqrt{1+\cos^2 x}\ \ dx$$

غوښتل شوی مساحت $= 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$

د ($\cos x = z$) په اېښودلو سره

$$= 2\pi\int_1^{-1} \sqrt{1+z^2}\,(-dz) = 2\pi\int_1^{-1} \sqrt{1-z^2}\,dz$$

$$= 2\pi\left|\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{z+\sqrt{z^2+1}}{1}\right|_{-1}^{1}$$

$$= 2\pi\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right\}$$

۴. مثال: د هغه جسم سطحه پیدا کړئ چې د خپلې قاعدې په شاوخوا د $y = a(1-\cos\theta)$, $x = a(\theta - \sin\theta)$ سیکلوئید ددوران له امله جوړه شوې وي.

حل: په مبدا (0) کې؛ $\theta = 0$ او په A کې $\theta = 2\pi$.

$$\frac{dx}{d\theta} = a\ \ (1-\cos\theta)$$

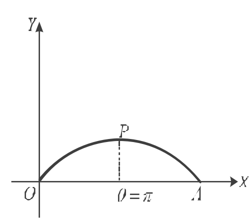
$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore\quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$= a\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2a\sin\frac{\theta}{2}\ .$$



$\therefore$ د غوښتل شوې سطحې مساحت $= 2\int_0^{\pi} 2\pi y\,ds = 4\pi\int_0^{\pi} y\,ds$

$$= 4\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos\theta)\cdot 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

(که چېرې $z = \frac{\theta}{2}$)،

$$= \quad 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 z\,dz$$

$$= \quad 32\pi a^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

۵. مثال: دراډ بوله جسم سطح پيدا کړئ چې د x محور په شاوخوا $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ هايپوسيکلوئيد ددوران له امله جوړ شوی وي.

حل: معا دله کېدلی شي چې په لاندې ډول وليکلو.

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

څکه نو

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 3a\sin\theta\cos\theta$$

لدې امله د غوښتل شوې سطحې مساحت مساوي دی له

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y\,ds = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\theta\cdot 3a\sin\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= 12\pi a^2\left|\frac{1}{5}\sin^5\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

۷,۸. پوښتنې

۱. د $y^2 = 4ax$ پارابولا يوه برخه چې دمحراقي قايم وتر پواسطه چاپيره شوې ده په راس کې د مماس په شاوخوا څرخيږي د منحني سطحې مساحت لاسته راوړئ چې پدې ډول جوړه شوې وي.

۲. د هغې سطحې مساحت لاسته راوړئ چې y محور په شاوخوا د x = 0 او x = 3 ترمېنځ د $3y = (x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ دڅرخيدلو له امله رامېنځته کيږي.

۳. د هغې څرخيدونکې سطحې مساحت لاسته راوړئ چې د y دمحورپه شاوخوا د y = 0 نه تر y = 1 او د $x = y^3$ قوس پواسطه چاپيره شوې سطحې له څرخيدلو څخه رامنځته شوې وي.

۴. دهغې سطحې مساحت وښایاست چې د x محورپه شاوخوا دیوې سیمې دڅرخیدلو له امله چې د $3ay^2 = x(-a)^2$ منحني د کړی پواسطه چاپیره شوې وي جوړه شي $\frac{1}{3}\pi a^2$ ده.

۵. د r په شعاع د یوې کرې مساحت لاسته راوړئ چې د دوه موازي مستویانو ترمېنځ د مرکز نه د r_1 او r_2 په واټن واقع وي چېرته چې $r_1 < r_2 < r$.

۶. ثبوت کړئ چې د یوې شلغم ډوله یا کش شوي کروي سطحې مساحت د خپل لوی محور په شاوخوا دیوې سیمې دڅرخیدلوڅخه چې د e په عن المرکزیت د یوې بیضوي پواسطه چاپیره شوې ده څخه لاسته راځي $2\pi ab(\sqrt{1-e^2} - \frac{1}{e} arc\sin e)$ دی.

۷. ثبوت کړئ د هغې کروي سطحې مساحت چې د کوچني محور په شاوخوا د هغې سیمې دڅرخیدلو څخه چې $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي پواسطه چاپیره شوې ده څخه لاسته راځي د $2\pi(a^2 + \frac{b^2}{e}\ln\sqrt{\frac{1+e}{1-e}})$ سره مساوي دی.

۸. د هغې کرې مساحت لاسته راوړئ چې د x محور په شاوخوا د هغې سیمې دڅرخیدلو نه چې د $x = a(\theta + \sin\theta)$ د $y = a(1-\cos\theta)$ سیکلوئید پوا سطه چاپیره شوې ده رامینځته شوې وي.

۹. د هغې سطحې مساحت پیداکړئ چې د $t = 0$ او $t = 4$ ترمېنځ دy محور په شاوخوا د$x = t+1$، $y = \frac{1}{2}t^2 + t$ منحني دڅرخیدلو نه لا سته راځي.

۱۰. د a په شعاع د یوې دایرې یوه ربع چې دخپل دوتر په شاوخوا څرخیږي، وښایاست چې دلاسته راغلې مېلې سطحه $2\pi a^2 \cdot \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4}\pi)$ ده.

۱۱. د یوې سطحې مساحت پیدا کړئ چې د $3x + y - 4 = 0$ خط په شاوخوا دیوې سطحې دڅرخیدلو نه چې د مثلث پواسطه چې $(0,0)$، $(8,0)$ ، $(0,6)$ دهغه راسونه دي چاپیره شوې ده لاسته راځي.

۱۲. د هغه جسم سطحه پیدا کړئ چې د x محورپه شاوخوا د $x = t^2$، $y = t - \frac{1}{3}t^3$ منحني دکړی دڅرخیدو له امله مېنځته راځي.

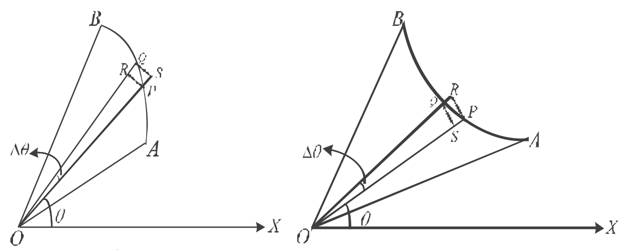
۱۳. دیوجسم سطحه پیداکړئ چې داصلي محورپه شاوخوا د $r = a\ (1-\cos\theta)$ کارډیوید دڅرخیدلو پواسطه لاسته راځي.

۱۴. دهغه جسم سطحه پیدا کړئ چې د $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ خط په شاوخوا د $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ دایرې ددوران نه لاسته راځي.

۱,۸,۸ په قطبي مختصاتو(کاردیناتو) کې حجم او د سطحې مساحت

(a) حجم: دیو جسم حجم چې د لومړي خط په شاوخوا د یوې سیمې له څرخیدولو نه چې د $r = f(\theta)$ منحني او $\theta = \alpha$، $\theta = \beta$ شعاع وکتورنو پواسطه چاپیره شوې ده

$$\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, d\theta$$ دی.



۱-شکل ۲-شکل

فرضوو چې AB د $r = f(\theta)$ منحني دی، او OA، OB د $\theta = \alpha$، $\theta - \beta$ شعاعو وکتورونه دي. که چېرې $P(r,\theta)$ دمنحني کومه نقطه وي او $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ د منحني کومه بله نقطه وي چې P ته ډېره نږدې واقع وي څنګه چې یوه نقطه له P نه Q ته حرکت وکړي، شعاع وکتور یا په ثابت ډول لکه د لمړي شکل ښشان ډېرښت (تزاید) مومي یا په ثا بت ډول د دویم شکل ښشان کمښت (تناقص) مومي.
که چېرې د څرخیدلو پواسطه لاسته راغلی حجم، اصلي (لومړني) محورته، د OAP سیمې دڅرخیدلو له امله v وي
او همدا ډول د OAQ مساحت $V + \Delta V$ وي.

O لکه مرکز په ډول اوOP، OQ لکه شعاعو په لرلو دایروي قوسونه رسموو چې OQ، OP په ترتیب سره په R، S کې پرې (قطع)کوي.
د OPQ مساحت د $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ او $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta Q$ په مېنځ کې وا قع دی او دده د ثقل مرکز عمودي واټن $\frac{2}{3}r\sin\theta$ او $\frac{2}{3}(r+\Delta r)\sin(\theta-\Delta\theta)$ تر مېنځ وا قع دی. له دې سببه د پاپس (Papus) د لومړی قضیې پر بنسټ، د OPQ سیمې پواسطه جوړ شوی حجم د $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta\cdot 2\pi(\frac{2}{3})r\sin\theta$ او $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta\cdot 2\pi\frac{2}{3}(r+\Delta r)\sin(\theta+\Delta\theta)$ ترمېنځ واقع دی یا د ΔV د $\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\Delta\theta$ او $\frac{2}{3}\pi(r+\Delta r)^3\sin(\theta+\Delta\theta)\Delta\theta$ تر مېنځ وا قع دی.

$\therefore$ $\frac{\Delta v}{\Delta\theta}$ د $\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta$ او $\frac{2}{3}\pi(r+r\Delta)^3\sin(\theta-\Delta\theta)$ ترمېنځ واقع دی.
د لېمټ په نیولو سره چې کله $\Delta\theta \to 0$، مونږ لرو

$$\frac{dv}{d\theta}=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta$$

$\therefore \quad \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta d\theta=\int_\alpha^\beta \frac{dv}{d\theta}.d\theta=|v|_\alpha^\beta=$ د OAB پواسطه لاس ته راغلی حجم

پایله: په ورته ډول د هغه جسم حجم چې دڅرخیدلو پواسطه د هغه خط په شا و خوا چې د O نه تیریږي او په اصلي (لومړني) خط عمود وي $\int \frac{2}{3}\pi r^3\cos\theta d\theta$ دی. او دهغه جسم حجم چې د $\theta=\gamma$ خط په شا وخوا دڅرخیدلو نه را مېنځته کیږي $\int \frac{2}{3}\pi r^3\sin(\theta-\gamma)d\theta$ دی.

(b) مساحت: که چیرې $r=f(\theta)$ منحني د $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ شعاع وکتورترمېنځ د اصلي خط په شاوخوا وڅرخیږي د لاسته راغلي سطحي مساحت مساوي دی له:

$$A=\int_\alpha^\beta 2\pi y ds=\int_\alpha^\beta 2\pi y\frac{ds}{d\theta}\cdot d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta 2\pi r\sin\theta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}d\theta$$

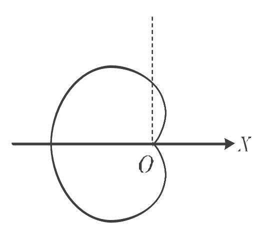
۲،۸،۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د څرخیدونکي حجم او سطحه پیدا کړئ چې د اصلي خط په شاوخوا د $r=a(1-\cos\theta)$ کا ردیوید پواسطه چاپیره شوې سطحې د څرخیدلو له امله لاس ته راځي.

حل: د منحي پورتني نیمه برخه د $\theta=0$ او $\theta=\pi$ ترمېنځ پرته ده.

$\therefore \quad$ لاس ته راغلی حجم $=\int_0^\pi \frac{2}{3}\pi r^2\sin\theta d\theta$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1-\cos\theta)^3\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^3\left|\frac{(1-\cos\theta)^4}{4}\right|_0^\pi=\frac{8\pi a^3}{3}$$



د لاس ته راغلي سطحي مساحت:

$$\int_0^{\pi} 2\pi y ds = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin\theta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\quad d\theta$$
$$=2\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2-a^2\sin^2\theta}\quad d\theta$$
$$=2\pi a^2\int_0^{\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\quad d\theta = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta$$
$$=32\pi a^2\left|\frac{\sin^5\frac{\theta}{2}}{5}\right|_0^{\pi}=\frac{32\pi a^2}{5}$$

۲.مثال: څرخیدونکي (دوراني) حجم او سطحه پیدا کړئ چې د $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ ترمېنځ داصلي خط په شاوخوا د $r=ae^{\theta}$ منحني دڅرخیدنو نه لاس ته راځي.

حل: رامېنځ ته شوی حجم عبارت دی له:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\theta\, d\theta$$
$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3e^{3\theta}\sin\theta\, d\theta=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3\theta}\sin\theta\, d\theta$$

مونږ پوهیږو چې

$$I=\int e^{a\theta}\sin(b\theta+c)d\theta$$
$$=\frac{e^{a\theta}}{a^2+b^2}[a\sin(b\theta+c)-b\cos(b\theta+c)]$$
$$\therefore\quad V=\frac{2}{3}\pi a^3\left|\frac{e^{3\theta}}{10}(3\sin\theta-\cos\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{10}\left\{e^{3\frac{\pi}{2}}\cdot 3+1\right\}=\frac{\pi a^3}{15}(3e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$$

او د لاسته راغلي سطحي مساحت عبارت دی له:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r\sin\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ae^{\theta}\sin\theta\sqrt{r^2+(dr/d\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\theta}\sin\theta\cdot\sqrt{a^2e^{2\theta}+a^2e^{2\theta}}\,d\theta$$

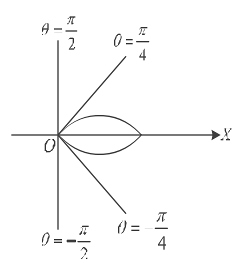
$$= 2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\theta}\sin\theta\cdot\sqrt{2}ae^{\theta}d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi a^2\left|\frac{e^{2\theta}}{5}(2\sin\theta-\cos\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a^2}{5}\left\{e^{\pi}(2)+1\right\} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi a^2}{5}(2e^{\pi}+1)$$

۳. مثال: وښئياست چې د يو جسم حجم چې د $\theta=\frac{\pi}{2}$ خط په شاوخوا د $r^2=a^2\cos 2\theta$ منحني ديوې حلقې پواسطه راچاپيره شوې سطحې د څرخيدلو له امله لاسته راځي $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$ دی.

حل: کړی ‌ئ حلقه د $\theta=\frac{-\pi}{4}$ او $\theta=\frac{\pi}{4}$ ترمېنځ ده او اصلي خط ته متنا ظره ده.



له دې امله غوښتل شوی حجم $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3}\pi r^3\cos\theta\,d\theta$ دی.

$$= \frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos 2\theta}\,)^3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

($\sqrt{2}\sin\theta=\sin z$ په اېښودلو)

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 z)^{\frac{3}{2}}\frac{\cos z dz}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 z\cos z\,dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 z\,dz$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$$

۸،۸ پوښتنې

١. د یو جسم حجم او سطحه پیدا کړئ چې د اصلي (لومړني) خط په شاوخوا د $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیوئید دڅرخیدلو له امله تولید شوی وي.

٢. دیو څرخیدونکي جسم حجم او سطحه پیدا کړئ چې د لومړني خط په شاوخوا د $r = 2a\cos\theta$ منحني دڅرخیدلو له امله لاسته راځي.

٣. وښایاست چې د $r = a - b\cos\theta$، a > b حلزون یا پشوګي (Limacon) پواسطه چاپیره شوي سطحې دڅرخیدلو له امله تولید شوی حجم $\frac{4}{3}\pi a(a^2+b^2)$ دی.

٤. که چیرې د $r = 1+2\cos\theta$ منحني داخلي حلقه یا کړی ، د لومړني خط په شاوخوا څرخیدلي وي نو وښایاست چې رامینځته شوی حجم $\frac{\pi}{12}$ دی.

٥. د هغه جسم حجم لاسته راوړئ چې د لومړني خط په شاوخوا د $r^2 = a^2 + \cos 2\theta$ برنولي پروانې (lemniscates) دڅرخیدلو له امله رامینځته شوی وي.

٦. دیوجسم د سطحي مساحت پیدا کړئ چې د لومړني خط په شاوخوا د $r^2 = a^2\cos 2\theta$ پروانې (lemniscates) دڅرخیدلو له امله رامینځته شوی وي.

٧. و ښایاست که چیرې یوه سیمه د $r = 2a(1+\cos\theta)$ کارډیوئید په داخل کې او د $r(1+\cos\theta) = 2a$ پارابولا د باندې لوري ته واقع دي د لومړي خط په شاوخوا وڅرخي مینځته راغلی حجم $18\pi a^3$ دی.

۸ . بیلابیلې پوښتنې

١. ثبو ت کړئ چې د $x^2(a^2-x^2) = 8a^2y^2$ منحني ټول اوږدوالی $\pi a\sqrt{2}$ دی.

٢. و ښایاست چې $3ay^2 = x^2(a-x)$ منحني د یوې کړۍ محیط $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ دی.

٣. د

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

$$y = (a+b)\sin\theta - b\sin\frac{a+b}{b}\theta$$

اپیسیکلوئید (epicycloids) لپاره و ښایاست چې $s = \frac{4b(a+b)}{a}\cos\frac{a\theta}{2b}$ ، چیرې چې S له هغې نقطې څخه اندازه کیږي چې هلته $\theta = \frac{\pi b}{a}$ ده.

٤. وښایاست چې د $r = a + b\cos\theta$ حلزون یا پشوګی (limacon) محیط، که چیرته $\frac{a}{b}$ کوچنی وي، په اټکلي ډول سره $2\pi a(1+\frac{b^2}{4a^2})$ دی.

٥. ثبوت کړئ چې د $r = a + b\cos\theta,\ a < b$ حلزون limacon د دوو حلقو د اوږدوالیو ترمینځ توپیر 4a دی.

۶. وښایاست چې د $3ay^2 - 2x^3$ ذاتي (اصلي) معادله $9s - 4a(\sec^3\varphi - 1)$ ده.

۷. د هغې سیمې مساحت پیدا کړئ چې د $x^2y^2 = a^2(y^2 - x^2)$ منحني او د ده دمجانب ترمینځ واقع وي.

۸. وښایاست د هغې ساحې مساحت چې د $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ منحني د یوې کرې پواسطه راچاپیره شویدی د هغې سیمې له مساحت سره مساوي دی کوم چې د منحني اود هغه دمجانب پواسطه راچاپیره شوی وي.

۹. د هغې سیمې مساحت لاسته راوړئ چې د $(x+y)^2(x^2+y^2) = 2axy$ منحني د یوې کرې پواسطه راچاپیره شوی وي.

۱۰. د $r = a(\sec\theta + \cos\theta)$ منحني او ددہ د مجانب ترمینځ مساحت لاسته راوړئ.

۱۱. د یو جسم حجم پیدا کړئ چې د لوی محور د څوکې په نقطه کې د مماس په شاوخوا دیوې بیضوي دڅرخیدلو له امله رامینځته شوی وي.

۱۲. یوه سیمه چې $r^2 = a^2\cos 2\theta$ پرواني (Lemniscate) پواسطه راچاپیره شوی ده، په قطب کې د یو مماس په شاوخوا څرخي. و ښایاست هغه حجم او سطحه چې دڅرخیدلو له امله رامینځته شویدی په ترتیب سره $\frac{1}{4}\pi^2a^3$ او $4\pi a^2$ دي.

۱۳. وښایاست چې د $y = c\cosh\frac{x}{c}$ په ځنځیري یا فنري دوله (catenary)کې، د قوس اوږدوالی له څوکې (راس) نه چیرې چې $x = 0$ تر بلې هرې نقطې پورې د $s = c\sin h\frac{x}{c}$ پواسطه راکړ شویدی.

۱۴. هغه مساحت پیدا کړئ چې د $x^3 + y^3 = 3axy$ منحني یوې کرې پوا سطه چاپیره شو دی.

۱۵. د $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ منحني د یوې ربعې اوږدوالی پیدا کړی.

۱۶. د $9ay^2 = x(x-3a)^2$ منحني دیوې کرې او ږدوالی پیدا کړی.

۱۷. د جسم حجم پیدا کړئ چې د y محور په شاوخوا د یوې سیمې دڅرخیدلو له امله چې د $y = 4x - x^2 - 3$, $1 \le x \le 3$ پواسطه راچاپیره شوې وي لاس ته راځي.

۱۸. د $y^2(a^2 - x^2) = x^2(a^2 + x^2)$ منحني او ددہ د مجانب ترمینځ مساحت پیدا کړئ.

۱۹. ثبوت کړئ چې $y^2(a-x) = (a-x)^3$ منحني اودده د مجانب ترمینځ مساحت د هغې دا برې د مساحت درې چنده دی د کومې چې شعاع a ده.

۲۰. و ښایاست چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي محیط (چاپیریال) عبارت دی له:

$$2\pi a = [1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}e^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}e^6 ......]$$

نهم څپرکی

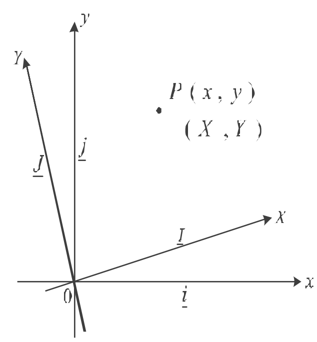
دوه بعدیزه هندسه

۹. ۱. ۱ سریزه

پدې څپرکي کې به د څلورم څپرکي د ضمیمي پشان تلنه وشي په کوم کې چې مونږ مستطیلي او قطبي کاردیناتوسیستمونه وڅیړل. په هغه څپرکي کې مونږ د محورنو انتقالي حرکت او دویمه درجه متجانسې معادلې وڅېړلې. دلته به مونږ (پدې څپرکي کې) دویمه درجه عمومي معادلې او ددوې صنف بندي وڅیړو. همدارنګه پدغه څپرکي کې به مونږ د مخروطونو په رسمولو او په قطبي کار دیناتو کې د دوی په چال چلند بحث وکړو.

۹. ۲. ۱ د محورونو څرخیدل (Rotation of Axes)

مونږ دوه ډوله د مستطیلي کاردیناتو سیستمونه څنګه چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي لرو:



دلته د X، Y مختصاتو سیستم د x، y مختصاتو سیستم د مبداء په شاوخوا د یوې θ زاویې په اندازه دپرله پسی دوران له امله لاس ته راغلی دی. فرضوو چې $\underline{j},\underline{i}$ د x،y محورونو په امتداد واحد وکتورونه او $\underline{J},\underline{I}$ په ترتیب سره د X، Y محورونو په امتداد واحد وکتورونه ښیي. که چیرې د P د نقطې مختصات د (y, x) د مختصاتو په سیستم کې(x, y) اود (X, Y) مختصاتوپه سیستم کې X, Y وي نو

$$OP = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$= X\underline{I} + Y\underline{J}$$

خو،

$$\underline{I} = \cos\theta \underline{i} - \sin\theta \underline{j}$$

$$\underline{J} = -\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j}$$

څکه نو،

$$x\underline{i} + y\underline{j} = X(\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}) + Y(-\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j}$$

$$= (X\cos\theta - Y\sin\theta)\underline{i} - (X\sin\theta - Y\cos\theta)\underline{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

د X او Y لپاره د دغو معادلو په حل کولولاس ته راوړو

$$\left.\begin{array}{l} X = x\cos\theta - y\sin\theta \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

(A) او (B) د انتقال معادلي دي. دا انتقالي معادلي مونږ سره مرسته کوي چي دهر هندسي محل معادله نسبت قايم مختصاتو محورونويوی جوړی ته په ورته هندسي محل معادلي باندی نسبت اړونده محورونو يوی دويمی جوړی ته چي له اړونده مبدا څخه تيريږي اوله اصلی محورونو سره د θيوه زاويه جوړي تبديل کړو.

مثال: د $x^2-y^2-9=0$ معادله د محورونو د 45° د دوران له امله يې تبديله کړئ.

حل: له مثلثاتوڅخه ، مونږ پوهيږو $\sin\theta = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ کله چي $\theta = 45^\circ$ وي.

نو لدي امله د (A) انتقالي معادله

سره کيږي. $x = \dfrac{X}{\sqrt{2}} - \dfrac{Y}{\sqrt{2}}$ او $y = \dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}}$.

په راکړل شوي معادله کي د دوی په عوضولو سره لاس ته راوړو

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 9 = 0$$

يعني، $-2XY-9=0$ يا $2XY+9=0$.

۹ . ۲ . ۲ دویمه درجه عمومي معادله

دوه متحوله دویمه درجه عمومي معادله د $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ په څېر لیکل کېږي.

قضیه:

فرضوو چې د محورونو دهر انتقال له امله د

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

معادله د $AX^2+2HXY-BY^2-2GX+2FY+C=0$ سره کېږي.

نو $A+B=a+b$ او $H^2-AB=h^2-ab$ ته د دوران عناصر(اجزا) وایي.

ثبوت: فرضوو چې د مختصاتو محورونو د θ زاویې په اندازه دوران کړی دی. د

د

$$x=X\ Cos\theta-Y\ Sin\theta$$

$$y=X\ Sin\theta-Y\ Cos\theta$$

انتقال دمعادلو دکارولو په واسطه (1) دویمه درجه معادله

$$a\left(X\ Cos\theta-Y\ Sin\theta\right)^2+2h\left(X\ Cos\theta-Y\ Sin\theta\right)\left(X\ Sin\theta+Y\ Cos\theta\right)+$$
$$+b\left(X\ Sin\theta+Y\ Cos\theta\right)^2+2g\left(X\ Cos\theta-Y\ Sin\theta\right)+2f\left(X\ Sin\theta+Y\ Cos\theta\right)+c=0$$

سره کېږي. یعني ،

$$\left(a\ Cos^2\theta+2h\ Sin\theta\cdot Cos\theta-b\ Sin^2\theta\right)x^2+2\left[\left(h\ \left(Cos^2\theta-Sin^2\theta\right)-\left(a-b\right)Cos\theta\cdot Sin\theta\right]XY$$
$$+\left(a\ Sin^2\theta-2hCos\theta\cdot Sin\theta+b\ Cos^2\theta\right)Y^2+2\left(g\ Cos\theta+f\ Sin\theta\right)X+$$
$$+2\left(f\ Cos\theta-g\ Sin\theta\right)Y+c=0$$

یا

$$AX^2+2HXY+BY^2+2GX-2FY+C=0$$

چیرته چې

$$A=a\ Cos^2\theta+2h\ Sin\theta\cdot Cos\theta+b\ Sin^2\theta$$

$$B=a\ Sin^2\theta-2hCos\theta\cdot Sin\theta+b\ Cos^2\theta$$

$$H=h\ \left(Cos^2\theta-Sin^2\theta\right)-\left(a-b\right)Cos\theta\cdot Sin\theta$$

$$G = g\ Cos\theta - f\ Sin\theta$$

$$F = -g\ Sin\theta + f\ Cos\theta$$

$$A + B = a\left(Cos^2\theta + Sin^2\theta\right) + b\left(Cos^2\theta - Sin^2\theta\right) = a + b$$

$$H^2 - AB = \left\{h\left(Cos^2\theta - Sin^2\theta\right) - (a - b)Sin\theta \cdot Cos\theta\right\}^2 -$$
$$-\left(a\ Cos^2\theta + 2h\ Sin\theta \cdot Cos\theta + b\ Sin^2\theta\right)\left(a\ Sin^2\theta - 2hCos\theta \cdot Sin\theta + b\ Cos^2\theta\right) = h^2 - ab$$

په پایله کې $A + B$ او $H^2 - AB$ عناصر دي.

۹ . ۲ . ۳ دویمه درجه متجانسه معادله

د x او y یوې معادلې ته دویمه درجه متجانسه معادله وایي،که چېرې په هرحد کې د x او y ترتیبونو مجموعه یو شان او له 2 سره مساوي وي.دمثال په ډول

$3x^2 + 4xy - 7y^2 = 0$ یوه دویمه درجه متجانسه معادله ده د $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ معادلې ته چې $a,b,h \in R$ او په یو وخت ټول صفرنوي دویمه درجه عمومي متجانسه معادله وایي.

قضیه :

یوه دویمه درجه متجانسه معادله دوه مستقیم خطونه ښیي چې له مبداء څخه تیریږي، کوم چې ممکن حقیقي وي یا خیالي وي.

ثبوت: راځي چې د

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad ...(1)$$

عمومي متجانسه معادله په پام کې ونیسو چې a؛ b، h په یوه وخت صفر نوي او $a,b,h \in R$.

مونږ دویم ځل معادله پدې ډول

$$by^2 + 2hxy + ax^2 = 0$$

لیکو. په x^2 دویش نه وروسته ،لاس ته راځي:

$$b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0$$

داد $\frac{y}{x}$ یوه دویمه درجه معادله ده چې

$$\frac{y}{x}=\frac{-2h\pm\sqrt{4h^2-4ab}}{2b}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

دوه راکړل شوي جذرونه لري.

فرضوو چې $$m_1=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b} \quad \text{او} \quad m_2=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

نو لدې امله کولی شو چې (۱) معادله د

$$b(\frac{y^2}{x^2})-2h\frac{y}{x}+a=b(\frac{y}{x}-m_1)(\frac{y}{x}-m_2)=o$$

په بڼه ولیکو یعنې،

$$by^2+2hxy+ax^2=b(y-m_1x)(y-m_2x)=o$$

$$\rightarrow b(y-m_1x)(y-m_2x)=o$$

نو لدې امله (۱) معادله د $y=m_1x$ او د $y=m_2x$ دوه مستقیم خطونومعادلې چې له مبدا څخه

تېرېږي ښيي.

دوه مستقیم خطونه حقیقي اوځانګړي دي که چېرې $h^2>ab$، حقیقي او منطبق وي که چېرې $h^2=ab$ او خیالي دي که چېرې $h^2<ab$.

یادونه: د $h^2<ab$ په حالت کې ، مستقیم خطونه،که څه هم خیالي دي، خو په یوه حقیقي نقطه کې قطع کوي دمبداء مختصاتولپاره(۱)معادله صدق کوي.

۹. ۲. ۴ د جوړه خطونو چې د $ax^2+2hxy+by^2=0$ پواسطه ښودل کیږي تر منځ زاویه

فرضوو چې دوه مستقیم خطونه چې د $ax^2+2hxy+by^2=0$ معادلې پواسطه ښودل کیږي ، $y=m_1x$ او $y=m_2x$ دي. ∴ مونږلرو چې

$$m_1=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b} \quad ، \quad m_2=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

لدې امله مونږ $m_1-m_2=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{b}$ او $m_1\cdot m_2=\frac{a}{b}$ لاس ته راوړو

که چېرې θ ددغو دوو مستقیمو خطونو تر منځ زاویوي مقداروي.

$$\tan\ \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

پایله: که چېرې $h^2 - ab = 0$ وي، خطونه منطبق دي او که چېرې $a + b = 0$ وي خطونه عمود دي.

۹. ۲. ۵ قضیه

د $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy - c = 0$ معادله د دوه مستقیم خطونو یوه جوړه راښیي که چېرې:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ثبوت: مونږ پوهیږو چې یوه دویمه درجه متجانسه معادله یوه جوړه مستقیم خطونه راښیي.

مونږ محورونه $(1,m)$نقطې ته انتقالوو نوپدې ډول معادله یوې متجانسې معادلې ته تغیر کوي.

د $x = X - \ell$ ، $y = Y + m$ په واسطه راکړل شوې معادله د

$$a(X + \ell)^2 + 2h(X - \ell)(Y - m) + b(Y - m)^2 + 2g(X + \ell) + 2f(Y + m) + c = o$$

سره کېږي، یعنې،

$$\begin{aligned} &aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(al + hm - g)X + 2(hl + bm - f)Y \\ &+ al^2 + 2hlm + bm^2 + 2gl + 2fm + c = o \end{aligned}$$

دابه متجانسه وي که چېرې

$$al + hm - g - o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$hl + hm + f = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$al^2 + 2hlm + bm^2 + 2gl + 2fm - c = o \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

(c)کیداي شي چې د

$$l(al + hm - g) - m(hl - bm + f) + gl + fm + c = o$$

په ډول ولیکل شي.

د(A) او(B) په مرسته کولو دا د

$$gl + fm + c = o .... (D)$$

سره کېږي.

د(A)،(B)او (D) څخه د ℓ او m په له مینځه وړلو سره ،لاسته راوړو چي :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

یعني

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

په دې حالت کې که دغه شرط صدق وکړي نو معادله دوه مستقیم خطونه راښيي.

که چېرې $a \neq 0$ د $(ax + hy + g)^2$ مربع په بشپړونو سره c معادله کیداې شي چي د دوو مربعاتو د تفاوت په ډول ولیکل شي .

نولدی امله معادله کیدای شي چي په دوو خطي عاملونو (فکتورونو) تجزیه شي او پدې ډول مونږ یوه د مستقیم خطونو یوه جوړه لاس ته راوړو چي د دویمې درجې معادلې پواسطه ښودل کیږي.

۹ . ۲ . ۶ قضیه

که چیرې د $ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy - c = 0$ عمومي معادله دوه مستقیم خطونه وښیي، نودوي په ترتیب سره له دوو مستقیمو خطونو سره موازي دي چې د $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ متجانسي معادلي پواسطه ښودل شویدي.

ثبوت : مونږ لیکلی شوچي:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx - 2fy + c - b(y - m_1x - c_1)(y - m_2x - c_2)$$

داړونده حدونو په ضریبونو او مقایسه کولوسره لاس ته راوړو چي

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \quad , \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{a}{b}$$

اوس ، $b(y - m_1x)(y - m_2x) - b\left[y^2 - (m_1 + m_2)xy - m_1m_2x^2\right]$

$$= b\left[y^2 - \left(-\frac{2h}{b}\right)XY + \frac{a}{b}x^2\right]$$

$$= by^2 + 2hxy - ax^2 = ax^2 + 2hxy + by^2$$

یعني، $ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1x)(y - m_2x)$

اوس $y - m_1x - c_1 = 0$ د $y - m_1x = 0$ سره موازي دی او $y - m_2x - c_2 = 0$ د $y - m_2x = 0$

سره موازي دی. په پایله کي مونږ کولي شوچي د دوو خطونو تر مینځ د θ زاویی اندازه چي د

$$\tan\ \theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

پواسطه راکړل شویده ثبوت کړو.

۹. ۲. ۷ قضیه

د

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

دویمه درجه عمومي معادله تل یوه مخروطي برخه یا مقطع ښیي.

ثبوت:

فرضو چي د مختصاتو محورو نو د θ زاویې په اندازه دوران کړی دی. د

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

د انتقالي معادلو په کارولو سره (1) معادله د

$$a(X\ Cos\theta - Y\ Sin\theta)^2 + 2h(X\ Cos\theta - Y\ Sin\theta)(X\ Sin\theta + Y\ Cos\theta)$$
$$+ b(X\ Sin\theta + Y\ Cos\theta)^2 + 2g(X\ Cos\theta - Y\ Sin\theta) + 2f(X\ Sin\theta + Y\,Cos\theta) + c = 0$$

سره کیږي، یعني

$$(a\ Cos^2\theta + 2h\ Sin\theta \cdot Cos\theta - b\ Sin^2\theta)X^2 + 2\left[h(Cos^2\theta - Sin^2\theta) - (a - b)Cos\theta \cdot Sin\theta\right]XY$$
$$+ (a\ Sin^2\theta - 2hCos\theta \cdot Sin\theta + b\ Cos^2\theta)Y^2 + 2(g\ Cos\theta + f\ Sin\theta)X$$
$$+ 2(f\ Cos\theta - g\ Sin\theta)Y + c = 0$$

یا

$$AX^2+2HXY+BY^2+2GX+2FY+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

چیرته چې :

$$A=a\ Cos^2\theta+2h\ Sin\theta\cdot Cos\theta-b\ Sin^2\theta$$

$$B=a\ Sin^2\theta-2hCos\theta\cdot Sin\theta+b\ Cos^2\theta$$

$$H=h\ \left(Cos^2\theta-Sin^2\theta\right)-(a-b)Cos\theta\cdot Sin\theta$$

$$G=g\ Cos\theta+f\ Sin\theta$$

$$F=-g\ Sin\theta+f\ Cos\theta$$

اوس مونږ θ د ټاکلولپاره په (2) کې د XY ضربي مقدار له مینځه وړو. نو

$$h\ \left(Cos^2\theta-Sin^2\theta\right)-(a-b)Cos\theta\cdot Sin\theta=0$$

یعنې، $2h\ Cos2\theta-(a-b)Sin2\theta=0$

یعنی، $\tan 2\ \theta=\dfrac{2h}{a-b}$

(2) انتقالی معادله د

$$AX^2+BY^2-2GX+2FY+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

سره کېږي.

۱. **حالت:** که چېرې $A\neq 0$ ، $B\neq 0$ دحدونود مربعاتو په بشپړوکولو سره (3) معادله د

$$A\left(X^2+\frac{2G}{A}X+\frac{G^2}{A^2}\right)+B\left(Y^2+\frac{2F}{B}Y+\frac{F^2}{B^2}\right)=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-c$$

یا

$$A\left(X+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(Y+\frac{F}{B}\right)^2=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

سره کېږي. اوس مبداء د $\left(-\frac{G}{A}\quad,\quad-\frac{F}{B}\right)$ نقطې ته تبدیلوو.

یعنې د $x' = X + \frac{G}{A}$ ، $y' = Y + \frac{F}{B}$ په اینودلو سره (4) معادله د

$$Ax'^2 - By'^2 = C$$

سره کېږي ،چیرې چې
$$C = \frac{G^2}{A} + \frac{F^2}{B} - c$$

یا
$$\frac{x'^2}{C/A} + \frac{y'^2}{C/B} = 1$$

چیرې چې C/A او C/B دواړه مثبت وي ، معادله یوه بیضوی (یادایره) ښیي.

که چیرې C/A او C/B مختلفې علامې ولري نومعادله یو هایپارابولاښیي.

که چیرته C/A او C/B دواړه منفي وي ، نوهندسي محل یې یوه خیالي بیضوي ده .

که چیرې C=0 وی معادله یو جوړه مستقیم خطونه ښیي کوم چې حقیقي یا خیالي وي د A او B په مطابق مخالفې یا یوشانتې علامې لري.

۲. حالت: که چیرته $A \neq 0$, $CB = 0$ (3) معادله د

$$AX^2 - 2GX + 2FY + c = 0$$

$$A\left(X^2 + \frac{2G}{A}X + \frac{G^2}{A^2}\right) + 2FY - \frac{G^2}{A} + c = 0$$

یا
$$A\left(X + \frac{G}{A}\right)^2 + 2F\left(Y + \frac{c}{2F} - \frac{G^2}{2AF}\right) = 0$$

سره کېږي.

که چیرته $X - \frac{G}{A} = x'$ او $Y + \frac{c}{2F} - \frac{G^2}{2AF} = y'$ ، معادله د

$$Ax'^2 - 2F\,y' = 0 \qquad \text{یعنې} \qquad x'^2 = -\frac{2F}{A}y'$$

سره کېږي کومه چې یو پارابولا ښیي.

۳. حالت: که چیرته $A=0$ ، $B\neq 0$ ، (3) معادله په پورته ډول د $y'^2=-\frac{2G}{B}x'$ شکل غوره کوي کوم چې یو پارابولا ښيي.

نو لدې امله په هر حالت کې دويمه درجه عمومي معادله يوه مخروطي مقطع ښيي.

يادونه: مونږ لاندې پايلې لرو:

1. که چيرته $h^2-ab\langle 0$ ،هندسي محل يوه بيضوي ده يا په ټاکلو حالاتو کښې يوه ځانګړې نقطه يا هندسي محل موجود نه وي .
2. که چيرته $h^2-ab=0$ ،هندسي محل يو پارابولا ده يا په ځينوحالا تو کې يوه جوړه موازي خطونه يا هندسي محل موجوده نه وي .
3. که چيرې $h^2-ab>0$ ، هندسي محل يوهيپرابولا يا په ځانګړو(استثنائي) حالاتو کې يو جوړه متقاطع خطونه دي.

۹. ۲. ۸ د مخروطي ټوټو يا مقطع ګانورسمول

تر اوسه پورې مونږ د محورونو په انتقال اوپه دوران باندې بحث وکړه. همدارنګه مونږ دويمې درجې عمومي معادلې تبديلېدل په مخروطي معادلې چې د مختصاتو يوبل سيستم پورې اړه نړي وڅېړلې. نو لدې امله مونږ مخروطي مقطع ګانې رسمولای شو چې ديوې دويمې درجې معادلې پواسطه ښودل کيږي. په لاندې حل شوو مثالونو کې مختلف حالتونه څېړل شوي دي.

۹. ۲. ۹ حل شوي مثالونه

۱. مثال: ثابت کړئ چې لاندې معادله په هر حال کې دوه مستقيم خطونه ښيي. که چيرې دارنګه وي، د هر مستقيم خط معادله په لاس راوړئ.

$$2x^2-xy+5x-2y+2=0$$

حل: دلته مونږ لرو چې $a=2$ ، $b=0$ ، $h=-\frac{1}{2}$ ، $g=\frac{5}{2}$ ، $f=-1$ ، $c=2$. او

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2(0-1)+\frac{1}{2}\left(-1-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=-2+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=0$$

لدې امله راکړل شوې معادله دوه مستقیم خطونه ښیي. مونږ د $(ax+hy-g)^2$ مربع په بشپړولو سره معادله بیا لیکو ، یعني

$$2x^2-xy+5x-2y-2=0$$

راکړل شوې معادله ده.

یا
$$4x^2-2xy+10x-4y+4=0$$

یا
$$4x^2+\frac{1}{4}y^2-\frac{25}{4}-2xy+10x-\frac{5}{2}y-\frac{1}{4}y^2-\frac{25}{4}-4y+4+\frac{5}{2}y=0$$

یعنی،

$$\left(2x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}y^2-\frac{3}{2}y-\frac{9}{4}=0$$

یعنی،
$$\left(2x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)=0$$

یا
$$\left(2x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

یعنی،
$$\left(2x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\right)=0$$

یعنی،
$$(2x+4)(2x-y+1)=0$$

$\therefore$ $x-2=0$ او $2x-y+1=0$ دوه مستقیم خطونه دي.

۲. مثال: د λ د کومو قیمتونو لپاره لاندنۍ معادله د مستقیم خطونه یو جوړه ښیي.

$$\lambda xy+5x+3y+2=0$$

حل: دلته مونږ $a=0$ ، $b=0$ ، $c=2$ ، $h=\frac{\lambda}{2}$ ، $g=\frac{5}{2}$ ، $f=\frac{3}{2}$ لرومعادله به دوه مستقیم خطونه وښیي که چېرې

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda/2 & 5/2 \\ \lambda/2 & 0 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

یعنې،

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\lambda-\frac{15}{4}\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{3\lambda}{4}-0\right)=0$$

یعنې،

$$-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{15\lambda}{8}+\frac{15\lambda}{8}=0$$

یا

$$-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{15\lambda}{4}=0$$

یا $2\lambda^2-15\lambda=0$ یعنی $\lambda=0$ یا $\lambda=\frac{15}{2}$

$\lambda\neq 0$ ځکه نوپدی حالت کې معادله خطي ده او یو مستقیم خط ښيي. نو لدې امله د $\lambda=\frac{15}{2}$ لپاره ، راکړل شوی معادله دوه مستقیم خطونه ښيي.

۳. مثال: د لاندې جوړه خطونو تر منځ زاویه پیداکړئ .

$$3x^2+7xy+2y^2=0$$

حل: دلته $a=3$ ، $h=\frac{7}{2}$ ، $b=2$.

که چیرته θ د دوو مستقیمو خطونه تر مینځ زاویه وي نو

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}=\frac{2\sqrt{\frac{49}{4}-6}}{3+2}=\frac{2x5}{5x2}=1$$

نو لدې امله $\theta=\frac{\Pi}{4}$.

۴. مثال: مخروطی مقطع رسم کړئ کومې چې د $x^2-2x-y=0$ معادلې پواسطه ښودل شویدی.

حل: معادله د $x^2-2x+1=y+1$

په څېر ليکلی شو.

يعني ، $(x-1)^2=y+1$ ....(1)

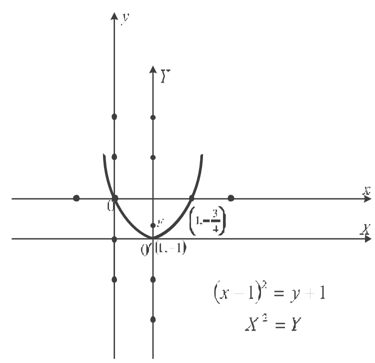
که چيرته مونږ $X=x-1$ ، $Y=y+1$ وليکو، (1) معادله د $X^2=Y$ سره کيږي، کوم چې يو پارابولا دی.

د راس مختصات يې د $X=0$ او $Y=0$ پواسطه راکړل شوي دي. يعني، $x-1=0$ ، $y+1=0$ ، ځکه نو د راس مختصات يې $(1,-1)$ دی.

د پارابولا د محور معادله $X=0$ ده يعني $x-1=0$ يا $x=1$.

د محراق مختصات $X=0$ ، $Y=\frac{1}{4}$ پواسطه راکړل شوي دي ، يعني، $x-1=0$ ، $y-1=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ محراق دی .د پارابولا رسم په لاندې ډول دی .



۵. مثال: مخروطي مقطع رسم کړئ کومه يوه چې د $2x^2+4xy+5y^2=6$ معادلې پواسطه ښودل شويده.

حل: دلته ، $a=2$ ، $b=5$ ، $h=2$ ، $h^2-ab=4-2.5=4-10=-6\langle 0$

نو پدې ډول راکړل شوي معادله يوه بيضوي ښيي.

مونږمحورونه د θ زاويې په اندازه څرخووکوم چې

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{2\ \tan\ \theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4}{3}$$

يعني

$$2\tan^2\theta-3\tan\ \theta-2=0 \Rightarrow (2\tan\theta+1)(\tan\theta-2)=0 \Rightarrow \tan\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\theta=2,-\frac{1}{2}$$

مونږ θ داسې ټاکوچې $\tan\ \theta=2$

لدې امله

$$\sin\ \theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cos\ \theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

انتقالي معادلې

$$x=X\ \cos\ \theta-Y\ \sin\ \theta=\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}$$

$$y=X\ \sin\ \theta+Y\ \cos\ \theta=\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}$$

دي. په را کړل شوي معادله کې د عوض کولو له امله ، مونږ لاس ته راوړو چې :

$$\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)+5\left(\frac{2X-Y}{\sqrt{5}}\right)^2=6$$

يعني،

$$6X^2+Y^2=6$$

يعني،

$$\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=1$$

کومه چې يوه بيضوي ده.

لوي محور د y محور په امتداد دی. د بیضوي د مرکز مختصات د $X=0$ ، $Y=0$ پواسطه را کړل شوي دي . یعني $x=0$ ، $y=0$. لدې امله ∴ $(0,0)$ مرکز دی.

دلته $a=6$ ، $b=1$ ، $c=\sqrt{6-1}=\sqrt{5}$

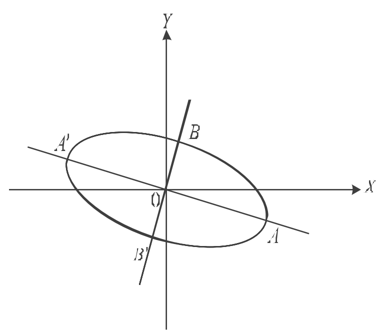
د محراقونو مختصات د $X=0$ ، $Y=\pm\sqrt{5}$ پواسطه را کړل شوي دي. ∴ $(2,-1)$ او $(-2,1)$ محراقونه دي.

د راسونو مختصات د $X=0$ ، $Y=\pm\sqrt{5}$ پواسطه را کړل شوي دي. ∴مونږ راسونه لکه $\left(-2\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ ،

$\left(2\sqrt{\frac{6}{5}},-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ لاس ته راوړو .

د کوچني محور ځوکی (انجامونه) $X=\pm1$ ، $Y=0$ پواسطه راکړل شوي دي.لدې امله د کوچني محور انجامونو بڼګوکو مختصات $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ او $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ دي.

د بیضوي رسم په لاندې ډول دی.



۶. مثال: مخروطي مقطع چې د $xy+x+y=0$ پواسطه ښودل شویده و څیړئ.

حل:

$$xy+x+y=0 \qquad \ldots(1)$$

دلته $a=0$ ، $b=0$ ، $h=\frac{1}{2}$ ، $h^2-ab-\frac{1}{4}\rangle 0$

∴ (1) معادله یو هایپرابولا ښیي.

مونږ محورونو ته د θ زاویې په اندازه دوران ورکوو نو دارنګه چې

$$\tan\ 2\theta = \frac{2h}{a-b} = \frac{1}{0} = \infty$$

لدي امله، $2\theta = \pm 90^\circ$ ، مونږ $\theta = 45^\circ$ په پام کې نیسو.

ځکه نو،

$$\therefore \quad \cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

انتقال معادلې

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \ \ y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \ \ Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

دي. په (1) معادله کې د x ، y لپاره په تعویض کولو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = 0$$

یعنې، $X^2 - Y^2 + 2\sqrt{2}X = 0$ یا $\left(X+\sqrt{2}\right)^2 - Y^2 = 2$

که چیرې مونږ $X+\sqrt{2} = x'$ او $Y = y'$ ولیکو. معادله په $x'^2 - y'^2 = 2$ بڼدې بدلیږي کوم چې یو مستطیلي هایپارابولا ښیي. یعنې،

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1, \quad a = b = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2+2} = 2$$

$y' = 0$ محراقي محور دی یعنې $Y = 0$ ، $x - y = 0$.

د مرکز مختصات د $x' = 0$ ، $y' = 0$ پواسطه راکړل شوي دي یعنې،

$$X + \sqrt{2} = 0, \quad Y = 0 \quad \Rightarrow X = -\sqrt{2}, \qquad Y = 0$$

یعنې،

$y = -1$ ، $x = -1$ دی. نو $(-1, -1)$ مرکز مختصات دي.

د محراقونو مختصات د

$x' = \pm 2, \quad y' = 0$

راکړل شوي دي، یعني،

$X + \sqrt{2} = \pm 2, \quad y' = 0$

یعني،

$X = -\sqrt{2} \pm 2, \quad Y' = 0$

یا $\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \pm 2$ او $x - y = 0$.

$\therefore \quad \left(-1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right)$ او $\left(-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)$ محراقونه دي.

مجانبونه د $x'^2 - y'^2 = 0$ پواسطه راکړل شوي دي. یعني،

$\left(X + \sqrt{2}\right)^2 - Y^2 = 0$

یعني، $X + Y + \sqrt{2} = 0$ او $X - Y + \sqrt{2} = 0$. یعني،

$\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{-x+y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 0$

او

$\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{-x+y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 0$

او ، یعني، $y + 1 = 0$ او $x + 1 = 0$.

د راسونو مختصات د $x' = \pm\sqrt{2}$ ، $y' = 0$ پواسطه راکړل شوي دي.

یعني:

$X + \sqrt{2} = \pm\sqrt{2}, \quad Y = 0$

یعني، $X = 0, \quad Y = 0$ او $X = 2\sqrt{2}, \quad Y = 0$

$\therefore \quad (0,0)$ او $(-2,-2)$ راسونه دي.

۹. ۲ پوښتنې

څرګند کړئ چې آیا لاندني معادلې دوه مستقیم خطونه ښیي. او که چېرې دارنګه وي د هر مستقیم خط معادله لاس ته راوړئ.

1, $6x^2-15y^2-xy-16x+24y=0$

2, $10x^2-23xy-5y^2-29x+23y+21=0$

3, $10xy+8x-15y-12=0$

د k د کوم قیمت لپاره لاندې هره یوه معادله دوه مستقیم خطونه ښیي.

4, $kx^2-xy+5x-2y+2=0$

5, $x^2+4xy-y^2-6x+k=0$

6, $6x^2+kxy-y^2-21x-8y+9=0$

مخروطي مقطع رسم کړئ کوم چې د لاندې معادلو پواسطه ښودل شوې دي.

7, $16x^2+24xy+9y^2-5x-10y+1=0$

8, $4y^2-6x-4y-5=0$

9, $y^2+6y+2x+7=0$

10, $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$

11, $9x^2+16y^2-18x-96y+9=0$

12, $9x^2-25y^2+54x-50y-119=0$

13, $25y^2-9x^2-50y-54x-281=0$

14, $y^2-9x^2+6y-36x-63=0$

15, $x^2-4y^2-2x+16y-40=0$

مخروطي مقطع ګانې وڅېړئ چې د لاندې معادلو پواسطه ښودل شوې دي.

16, $9x^2+24xy+16y^2-125y=0$

17, $4x^2+4xy+y^2+3x+4y+1=0$

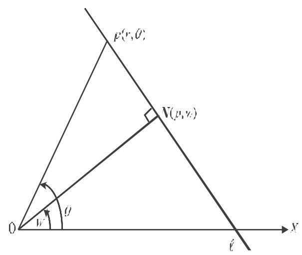
18, $4x^2+3xy+45=0$

19, $2x^2-6xy+10y^2-11=0$

20, $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$

په قطبي مختصاتو کې مخروطي مقطع ګانې

۹. ۳. ۱ مستقیم خط



که چیرې په مستوي سطح کې l یو خط وي.

فرضوو چې $ON=\rho$ د l په خط باندې د 0 نه تر N پورې عمودي واټن دی،څرنګه چې (ρ,w) د N قطبي مختصات دي، او هم فرضوو چې $P(r,\theta)$ د l په خط کومه یوه بله نقطه ده.

لدې امله، $N\hat{O}P==\theta-w$ زاویې او ONP قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې

$$OP\ \cos(\theta-w)=ON$$

یا

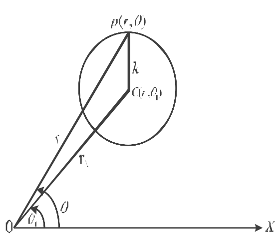
$$r\cos(\theta-w)=\rho$$

څرنګه چې معادله په خط باندې دP دهرې نقطې لپاره صحت لري، دا د خط معادله ده. مونږ لاندې ځانګړې حالتونه لرو:

۱. **حالت:** که چیرته د l خط په قطبي محور باندې عمود بوي ، نو یا $w=0^\circ$ یا $w=180^\circ$ ، او لدې سببه د خط معادله چې په قطبي محور باندې عمود وي، $\cos\ \theta=\pm\rho$ ده.

۲. **حالت:** که چیرته خط قطبي محورته موازي وي،نو یا $w=90^\circ$ یا $w=270^\circ$ ، اولدې امله دیو خط معادله چې قطبي محورته موازي وي، $r\sin\theta==\rho$ ده.

۳. **حالت:** که چیرې خط راساً د قطب نه تیر شي ،د خط دهرې نقطې لپاره ویکتوري زاویه یو ډول ده اولدې امله دیو خط معادله چې راساً له قطب نه تیریږي $\theta=\alpha$ ده چیرې چې α زاویه له قطبي محور سره د خط پواسطه جوړه شوې ده.



۹. ۳. ۲ دایره

فرضوو چې $c(r_1,\theta_1)$ د k په شعاع دیوې دایرې مرکز دی، او هم فرضوو چې $P(r,\theta)$ په دایرې

باندې کومه بله نقطه ده،نو لدې امله $\hat{COP}=\theta-\theta_1$

اود کوساینونو د قانون په اساس مونږ لکه

$$k^2=r^2+r_1^2-2r\cdot r_1\cdot\cos(\theta-\theta_1)$$

د دایرې معادله لرو.

مونږ لاندی ځانګړې حالتونه لرو.

۱. حالت: که چېرې د دایرې مرکز په قطب کې وي، $r_1=0$ او پدې ډول د دایرې معادله چې مرکز یې په قطب کې وي $r=\pm k$ ده.

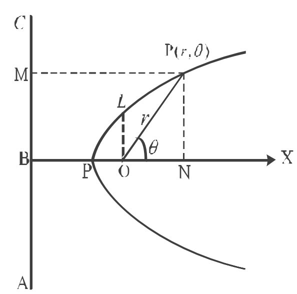
۲. حالت: که چېرې د دایرې مرکز په قطبی محور باندی وي اودایره راساً له قطب تیره شي ، د $\theta_1=0$ او $k=\pm r_1$ اوځکه نود دا ډول دایرې معادله $r=\pm 2k\cos\theta$ ده.

۳. حالت: که چېرې د دایرې مرکزد y په محور واقع وي او دایره راساً له قطب نه تیره شي، $\theta_1=90^\circ$ او $k=\pm r_1$ اوپه هغه صورت کې نود دارنګه دایرې معادله $r=\pm 2k\sin\theta$ ده.

۹. ۳. ۳ مخروطي مقطع ګانې

پوهیږو چې یوه نقطه په په یوی مخروطی مقطع باندی واقع ده که چیرته ددی دواټنونو نسبت له یوې ټاکلی نقطې اوله یو ټاکلی خط څخه ثابت وي. چې ټاکلې نقطې ته محراق اوټاکلي خط ته هادي وايي.

فرضوو چې O محراق دی او ABC هادي دی. O د قطب په ډول او د ox خط چې په هادي باندې عمود دی د قطبی محورپه شان په پام کې نیسو.



که چیرته $p(r,\theta)$ په مخروطی مقطع باندی کومه یوه نقطه وي ، نود تعریف په اساس مونږ لرو چې:

$$\frac{OP}{PM}=e \qquad \text{یا} \qquad OP=e\cdot PM$$

مونږلرو چې $OP = r$ او $PM = BO + ON = P + r\cdot\cos\theta$

لدې امله $r = e(P + r\cdot\cos\theta)$ یا $r = \dfrac{ep}{1 - e\ \cos\theta}$

که چېرې $OL = l$ قایم محراقي وتر (Latus rectum) نیمایي وی $\dfrac{\ell}{p} = e$ یعنی $\ell = ep$. دیوې مخروطي مقطع معادله کیدای شي چې $r = \dfrac{\ell}{1 - e\ \cos\theta}$ په شان ولیکل شي.

پدې حالت کې مونږ قطبی محور د اصلي محور په څېر په پام کې نیسو، که چېرې مونږ دy محور یعنې، $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ، د اصلی محور په څېرپه پام کې ونیسود مخروطي مقطع معادله $r = \dfrac{\ell}{1 - e\ \sin\theta}$

ده د e قیمت په هر حال کې ښيي چې مخروطي مقطع یو پارابولا ،یوه بیضوي یا یوهایپارابولا دی.

که چیرته $e = 1$ ، معادله د یو پارابولا قطبی معادله ده.

که چیرته $e\langle 1$ ، معادله د یوی بیضوي قطبی معادله ده.

که چیرته $e\rangle 1$ ، معادله د یو هایپارابولا قطبی معادله ده.

۹. ۳. ۴ په قطبي شکلونو باندې د قایم مختصاتو د مخروطي مقطع ګانو بدلونه

(i) پارابولا: د $y^2 = 4ax$ معادله یو پارابولا ښيي چې راس یې په مبداء کې ، محراق یې په (a,θ) کې او هادی خط (directrix) $x + a = 0$ ده ، چیرته چې $a\rangle 0$

که چېرې مونږ مبداء محراق ته تبدیله کړو، د $x = x' + a$, $y = y'$ انتقال د کارولو پواسطه،معادله د

$$y'^2 = 4a(x' + a)$$

سره کېږي.

په پایله کې د پارابولا معادله چې محراق یې په مبداء کې راس یې په $(-a,0)$ کې او د $x + 2a = 0$ هادې په لرلو عبارت ده له

$$y^2 = 4a(x + a)$$

ده. دواړو خواوو ته د x^2 په جمع کولو سره لرو:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 4ax + 4a^2$$

یا $r^2=(x+2a)^2$

د دویم جذر په نیونواو د $x=r\cdot\cos\theta$ په لیکلو، معادله

$$r=r\ \cos\theta+2a$$

یا

$$r=-r\ \cos\theta-2a$$

سره کیږي.مونږ په اساني سره باوري کیدلی شو چې دواړه معادلې ورته ګرافونه ښیي. نو ځکه دپارابولا معادله

$$r=r\ \cos\theta-\ell$$

ده ، چیرې چې $\ell=2a$ دقایم محراقي وتر نیمایي دی.

نولدې کبله معادله د

$$r=\frac{\ell}{1-\cos\theta}$$

په شان لیکلی شو.

(ii) بیضوي: د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ معادله د بیضوی معادله ده چې محراقونه یې $(-c,0)$ او $(c,0)$ او لوی او کوچنی نیم محورونه یې په ترتیب سره a او b دي او $a^2=b^2+c^2$.

که چیرته مونږ مبداء د $(-c,0)$ محراق ته تبدیله کړو،د بیضوي معادله د $(0,0)$ او $(2c,0)$ محراقونو اوپه $(c,0)$ کې د مرکز په لرلو

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ده ،یعنې،

$$b^2x^2-2b^2cx+b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2$$

یا

$$a^2x^2+a^2y^2=(a^2-b^2)x^2+2b^2cx+a^2b^2-b^2c^2$$

یعنې،

$$a^2(x^2+y^2)=c^2x^2+2b^2cx+b^4$$

یعنې،

$$a^2r^2=(cx+b^2)^2$$

لدې امله

$$ar=cx+b^2$$

د مثبتي علامې په ټاکلو او د $x = r\cos\theta$ په ليکلو سره معادله

$$ar = c\,r\cos\theta - b^2$$

سره کيږي،يعني،

$$r = \frac{b^2}{a - c\cdot\cos\theta} = \frac{b^2/a}{1-\left(c/a\right)\cos\theta}$$

ځکه چې $\ell = \frac{b^2}{a} =$ دقايم محراقي وتر نيمايي او $e = \frac{c}{a}$ ده ، نومعادله د

$$r = \frac{\ell}{1-e\cos\theta}$$

سره کيږي.

(iii) هايپارابولا: د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ معادله د هايپارابولا معادله ده ، د بيضوي د حالت په شان د هايپارابولا معادله چې د $(-C,0)$ مرکز ، $(0,0)$ او $(-2c,0)$محراقونو په لرلو

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad c^2 = a^2+b^2$$

ده ، يعني

$$b^2x^2+2b^2cx+b^2c^2-a^2y^2=a^2b^2$$

يا

$$-a^2\left(x^2-y^2\right)=-\left(a^2+b^2\right)x^2-2b^2cx-b^2\left(c^2-a^2\right)$$

يعني ،

$$a^2\left(x^2+y^2\right)=c^2x^2+2b^2cx-b^4$$

يا

$$a^2r^2=\left(cx+b^2\right)^2$$

د بيضوي د حالت په شان معادله

$$ar = cx\cos\theta + b^2$$

سره کيږي ،يعني ،
$$r=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}=\frac{b^2/a}{1-\left(c/a\right)\cos\theta}$$

څنګه چې $\ell=\frac{b^2}{a}=$ د قايم محراقي وتر نيمايي او $e=\frac{c}{a}$ ده ، نو معادله د
$$r=\frac{\ell}{1-e\ \cos\theta}$$
سره کيږي.

۹. ۳. ۵ حل شوي مثالونه

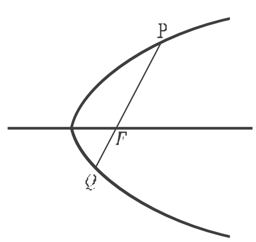
۱. مثال: ثبوت کړي چې دهرې مخروطي مقطع قايم محراقي وتر نيمايي (*semi latus rectum*) دهر يوه محراقي وتر دقطعاتوترمينځ هارمونيکي وسط دی.

حل: فرضوو چې $r=\frac{\ell}{1-e\ \cos\theta}$ د مخروطي مقطع معادله ده. پدی فرضولوسره چې $P(r_1,\theta)$ او $Q(r_2,\pi+\theta)$ د يو محراقي وتر څوکي(يا انجامونه) دي. څنګه چې P او Q په مخروط مقطع باندی واقع دي.

$$r_1=\frac{\ell}{1-e\ \cos\theta}$$

او

$$r_2=\frac{\ell}{1-e\ \cos(\pi+\theta)}$$



يا $\frac{\ell}{r_1}=1-e\ \cos\theta$ او $\frac{\ell}{r_2}=1+e\ \cos\theta$

په جمع کولو سره لاس ته راوړ چې $\frac{\ell}{r_1}+\frac{\ell}{r_2}=2$

يا $\frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}=\frac{2}{\ell}$

پدی دليل پايله ده.

۲. مثال: مخروطي مقطع رسم کړئ چې دهغه معادله $r=\frac{8}{3-\cos\theta}$ دی.

حل: په 3 باندې د صورت او مخرج په تقسیمولوموښ لرو چې $r=\dfrac{2.6}{1-\left(\frac{1}{3}\right)\cos\theta}$.

کومه چې د یوې بیضوي معادله ده ، ځکه نو $e=\frac{1}{3}\langle 1$. قطبي محور اصلي محور دی نو لدې امله منحني د X محورته متناظر دی.

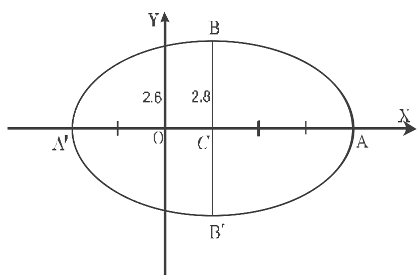
دلته د قایم محراقي وتر نیمایي $\ell=2.6=(semi\ latus\ rectum)$ دی.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	4	2.6	2	2.6	4

$\ell=\dfrac{b^2}{a}=2.6$ او $2a=4+2=6$ **یعني** $a=3$

$\therefore\quad b^2=2.6\cdot 3=7.8 \qquad \therefore\quad b=\sqrt{7.8}=2.8$

د دغو معلوماتو په لرلو سره موښ منحني په لاندې ډول لاس ته راوړو:



۳. مثال: $r=\dfrac{10}{1-\sin\theta}$ مخروطي مقطع رسم کړئ.

حل: راکړل شوي معادله سره د $r=\dfrac{\ell}{1-e\ \cos\theta}$ په پرتله کولوموښ وینو **چې** $e=1$ دی.

لدې امله مخروطي مقطع یو پارابولا دی او د هغه محور $\theta=\pi/2$ دی.

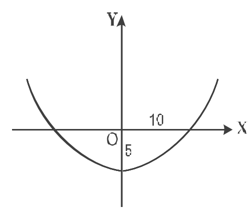
د قایم محراقي وتر نیمایي $\ell=10$,10 $(semi-latus\ \ rectum=10)$

منحني د $\theta=\pi/2$ خط ته متناظر دی

$2a = \ell = 10 \qquad \therefore \quad a = 5$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	10	∞	10	5	10

پدې معلوماتوسره مونږ د منحني ګراف په لاندې ډول لاس ته راوړو



۴. مثال: مخروطي مقطع رسم کړئ چې د $r = \dfrac{9}{1+\sin\theta}$ معادلې پواسطه ښودل شویده.

حل: په 2 باندې د صورت او مخرج په تقیسمولو، راکړل شوې معادله د $r = \dfrac{9/2}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}$ سره کیږي کومه چې

د یوې بیضوي معادله ده ځکه نو $e = \frac{1}{2} \langle 1$.

د بیضوي لوي محور د **y** محور دی اومنحني د $\theta = \pi/2$ خط ته متناظر دی.

لدې امله د قایم محراقي وتر نیمایي $= l = \frac{9}{2} = 4.5$

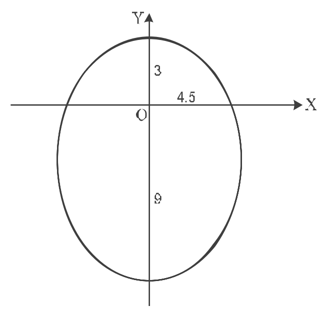
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	4.5	3	4.5	9	4.5

$2a = 3 + 9 = 12 \Rightarrow a = 6$

او

$$b^2 = a \cdot \ell = 6 \cdot \frac{9}{2} = 27 \quad \therefore \quad b = \sqrt{27}$$

پدې معلوماتوسره مونږ په لاندې ډول سره منحني لاس ته راوړو.



۹ . ۳ پوښتنې

مخروطي شکلونه رسم کړئ چې د لاندینیو معادلو پواسطه ښودل شوي دي.

1. $r = \dfrac{4}{3 - \cos\theta}$ 2. $\dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

3. $r = \dfrac{1}{1 + \sin\theta}$ 4. $\dfrac{6}{1 - 2\sin\theta}$

5. د $r = \dfrac{1}{1 - \sin\theta}$ معادله دقایمومختصاتوپه شکل یې تبدیله کړئ.

6. ثبوت کړئ چې په هرې مخروطي مقطع کې د دومتقابلو عمودي محراقي وترونو مجموعه ثابته ده.

7. که چیرته PFP' او QFQ' د مخروطي مقطع دوه عمودی محراقي وترونه وي،ثبوت کړئ چې

$$\frac{1}{PF \cdot FP'} + \frac{1}{QF \cdot FQ'} = Cons\tan t$$

۹. بیلابیلې پوښتنې

۱. د دوو مستقیمو خطونو تر مینځ زاویه لاس ته راوړئ چې د $x^2 - 2xy \tan\theta - y^2 = 0$ معادلې پواسطه ښودل شوې ده.

۲. وښایاست چې د $16xy-6x+8y-3=0$ معادله یو جوړه مستقیم خطونه ښیي.

۳. د k د کومو قیمتو لپاره لاندې معادله یو جوړه مستقیم خطونه ښیي.

$$4x^2-9y^2-2(8+K)x-18y=29+2K$$

۴. مخروطي مقطعګانې چې د لاندې معادلو پواسطه ښودل شوي دي وڅیړئ.

$(i)\qquad 73x^2+72xy-52y^2-220x-40y+100=0$

$(ii)\qquad 119x^2+240xy-119y^2-130x-312y-338=0$

۵. د $29x^2-24xy+36y^2-118x-24y-55=0$ معادلې مخروطي مقطع وڅیړئ او رسم یې کړئ.

۶. مخروطي مقطعګانې رسم کړئ چې دهغوی معادلې.

$(i)\quad r=\dfrac{4}{1-\sin\theta}\qquad\qquad (ii)\quad \dfrac{10}{2-3\cos\theta}$

$(iii)\quad r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}\qquad\qquad (iv)\quad \dfrac{2}{1+\cos\theta}$

دی.

۷. د یوې مخروطي مقطع PQ یو وتر چې د هغې عین المرکزیت e او قایم محراقي وتر نیمایي ℓ دی د S کمان(قوس)سره په محراق کې یوه قایمه زاویه جوړه وي،ثبوت کړئ چې

$$\left(\frac{1}{SP}-\frac{1}{\ell}\right)^2+\left(\frac{1}{SQ}-\frac{1}{\ell}\right)^2=\frac{e^2}{\ell^2}$$

لسم څپرکی

درئ بعدیزی هندسی I برخه

(خطونه اومستوي ګانې)

۱,۱,۱۰ سریزه

په مستوي کې دیوې نقطې حالت د x او y د دوه عدودونو پواسطه چې په مستوي کې د دوه مستقیم خطونو د اړیکي په لرلو لاس ته راځي ښودل کیږي په عمومي ډول په قایمه زاویوکی . دیوې نقطې حالت په فضا کې د Z, Y, X دریو عددونو پواسطه ښودل کیږي. مستوي د $R \times R$ یا R^2 په ډول؛ فضاء او درئ بعدیزه فضاء د $R \times R \times R$ یا R^3 په ډول په پام کې نیول کیږي.

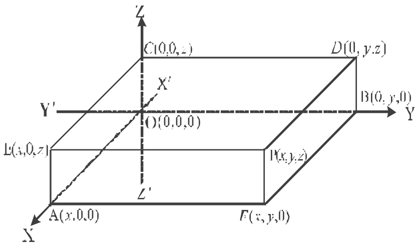
په مستوي کې مونږ ولیدل چې د مستوي د نقطو او (x, y) مرتبې جوړې ترمینځ یو په یو اړیکه وجود لري.اوس به مونږ وپوهیږو چې هلته په درئ بعدیزی فضاء کې د نقطو اود (x, y, z) مرتبې درې ایزی تر مینځ یو په یو اړیکه وجودلری. دوه مرتبې درې ایزی مساوي په پام کې نیول کیږي که چیرې یواځې او تنهایواځې ددوی اړونده اجزاوی مساوي وي. په هغه صورت کې $(x, y, z) = (a, b, c)$ که چیرې یواځې او تنها یواځې $x = a, y = b$ او $z = c$.

یوه دوه متحوله معادله په مستوي کې یومنحني ښیي ، حال داچې یوه درې متحوله معادله په درې بعدی فضاکی یو مستوي ښیي. تر ټولو ساده دوه متحوله معادله د $ax + by + c = 0$ خطي معادله ده کوم چې یو مستقیم خط ښیي. حال داچې تر ټولو ساده د درې متحولینو معادله $ax + by + cz + d = 0$ دیومستوي معادله ده. نو پدی ډول د یوې معادلې ډول ډول شکلونه دپورتنیو راکړل شوی اړونده معلوماتو له مخې او هغه معلومات چې مونږ یې غوښتنه کوو په پام کې نیولې شو.

۱,۲,۱۰ د قایمو مختصاتو سیستم

په درئ بعدیزه فضاء کې په ترتیب سره د نقطو د ځای پر ځای کولو لپاره مونږ باید کوم ثابت ښه سیستم یا چوکاټ ولرو. مونږ داسې یو چوکاټ د O یوی ثابتې نقطې په ټاکلواو د O په نقطه کې له دواړو خواوود درې عمودي خطونو په ټاکلو چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي . لاس ته راوړو .

د د غوخطونو په هر یوه باندې یو مثبت لوری ټاکل شوی دی او دیوغشی پواسطه ښودل کیږي . دغو دریو خطونو ته د x محور ، y محور او د z محور وایي.



د x محوراود y محور په گډه سره یو افقي مستوي ټاکي چې د xy مستوي ورته وايي . په ورته ډول د xz مستوي يو عمودي مستوي ټاکي چې د x محوراو z محور درلودونکې دی، او دyz مستوي هغه مستوي دی چې د y محوراو z محور پواسطه ټاکل شويدي.

که چيري P په فضاء کې کومه نقطه وي دا په ارونده ټاکلي چوکاټ کې په ترتيب سره درې مختصات لري او دا مختصات د $P(x,y,z)$ د ليکنې پواسطه ښودل کيږي. دغه مختصات په دې ډول تعريف شويدي.

x د yz مستوي نه د P مستقيم واټن دی.

y د xz مستوي نه د P مستقيم واټن دی.

z دxy مستوي نه د P مستقيم واټن دی.

په شکل کې دوی په ترتيب سره د EP، DP او FP مستقيم واټنونه دي. دغه ټوټه خطونه د يو بکس څنډې جوړوي، له هريومخ سره دمختصاتو د محورونوڅخه يوعمود دی. د شکل د تورو د نومولو پواسطه ، A د x په محور د P تصوير دی؛ B د y په محور د P تصوير دی او C د z په محور د P تصوير دی . په روښانه ډول د P د مختصاتولپاره يو بل تعريف.

x د OA مستقيم واټن دی.

Y د OB مستقيم واټن دی.

z د OC مستقيم واټن دی.

د P(x,y,z) سمبول دا معنئ لري چې د P مختصات z,y,x دي.

په معکوس ډول ، که چيري z,y,x درې عددونه راکړل شوي وي مونږکولی شو د P يوه نقطه پيداکړو کوم چې مختصات يې z,y,x دي. ددې واقعيت لپاره مونږد x محور په امتداد OA=x واحده اندازه کوو. دAN y محور ته موازي او د y واحد سره مساوي دی او NP د Z محور سره موازي او د z واحدو سره مساوي دی. نو لدې امله P غوښتل شوي نقطه ده .

نو همدارنګه په فضا کې دیوی نقطې حالت په ځانګړي ډول د دریو مختصاتو پواسطه ټاکل کېږي. نو پدې پام کولو سره مونږ ویلی شو چې په فضا کی د نقطو او د (x,y,z) دریې ایزو مختصاتو ترمېنځ یو په یو اړیکه موجوده ده.

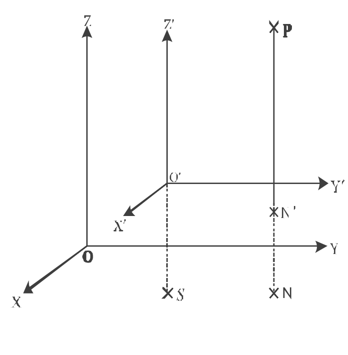
دا څرګنده ده که چېرې x منفي وي ، د (x,y,z) نقطه د yz مستوي شاته واقع کېږي، که چېرې y منفي وي نقطه د xz مستوي کیڼ لور ته واقع کېږي ، او که چېرې z منفي وي نقطه د xy مستوي لاندې واقع کېږي. دمختصاتو دغه درې مستوي ګانې فضا په اتو جلا برخو چې اوکتانټ (Octants) ورته وايي ویشي. هغه اوکتانټ چې دریواړه مختصات یې مثبت وي لومړی اوکتانټ ورته وايي. پاتې نور اوکتانټونه کیداې شي ونومول شي ، خو ددې کار لپاره کوم لامل وجود نه لري.

۱۰. ۲. ۲ د علامو(سمبولونو) لپاره ټاکلي کړنلاره (Convention for signs)

کله چې د x او y دمحورونو لوری وټاکل شي د z د محور مثبت لوری دهغه لوری په امتداد ټاکل کېږي چې د ښي لاس پیچ په هغه لوری کله چې دوران د x نه y ته وی حرکت وکړي. دمحورونو دابول یو سیستم ته د ښي لاس سیستم وایي.

۳,۲,۱۰ دمحورونو انتقال Translation of Axes

دمختصاتو د محورونو د یو نوی سیستم معرفي کولو تخنیک ته چې یې له O نه یوی بلی نقطې څخه تېرېږي او د z,y,x محورونو سره موازي وي د محورونو انتقال وایي. همدارنګه دامبدأ دانتقال په توګه یا د مبدأ د بدلیدلوپه حیث هم پیژندل کېږي.



فرضوو چې oz,oy,ox او $O'Z',O'Y',O'X'$ په ترتیب سره د موازي محورونوچې له Oاو O' څخه تېرېږي دوه سیټونه دي.

فرض کړئ چې (a,b,c)نسبت د oz, oy, ox ته د O' مختصات دي. فرضوو چې (x,y,z) په فضا کې د P د یوی نقطې مختصات نسبت د Z,Y,X مختصاتو سیستم ته دي او (X',Y',Z') دهغې مختصات نسبت د x',y',z'مختصاتوسیستم ته دي.

فرض کړئ چې PN' ، لهPڅخه په $x'y'$ مستوي باندې عمود او د xy مستوي سره د N په نقطه کې مخامخ کېږي. څنګه چې د $x'y'$ په مستوي د xy له مستوي سره موازي دی ، نو PN هم د xy په مستوي عمود دی که چېرې $O'S$ څرنګه چې د XY په مستوي عمود وی ، نو $N\bar{N}' = SO' = C$.

$$Z = NP = N\bar{N}' + \bar{N}'P = C + Z'$$

په ورته ډول

$$X = a + x,' \quad y = b + y'$$

له دې امله

$$x' = x - a$$
$$y' = y - b$$
$$Z' = Z - c$$

۴,۲,۱۰ د ویکتور الجبري ځینې پایلې

دړې بعدیزه تحلیلي هندسه یا فضایي هندسه کېدای شي چې پرته د وکتورونو له استعمال نه وښودل شي. په هر صورت دوکتورونوپه کارولوسره زمونږ وړاندیز ساده کېدای شي. دلته مونږ د ویکتور الجبري یو څه ګټوري پایلې وړاندې کوو.

(i) که چېر ته $0(0,0,0)$ مبدأوي او $P(x,y,z)$ کومه یوه نقطه وي نو $\vec{OP} = xi + yj - zk - [x, y, z]$ او دي ته د P د نقطې د حالت ویکتور وایي .

(ii) د $\underline{V} = [v_1, v_2, v_3]$ وکتور اوږدوالی یا تاکلی اندازه چې په $|V|$ سره ښودل کېږي د مبدأ نه تر (v_1, v_2, v_3) نقطې پورې واټن دی . نو پدې ډول $|\underline{V}| - \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_3^3}$.

(iii) یو ویکتورته د واحد لوی والی یا تاکلی اندازې په لرلو واحد ویکتور وایې. په دی ډول که چېرې v د v لوی والي په لرلو یو ویکتوروي نو $\frac{v}{v}$ د v په امتداد یو واحد ویکتور دی.

(iv) که چېرې $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ دوه نقطې وي نو

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\,\underline{i} + (y_2 - y_1)\,\underline{j} - (z_2 - z_1)\,\underline{k}$$

(v) که چېرې $\underline{u}$ او $\underline{v}$ دوه وکتورونه collinear (په یو خط باندې واقع کېدونکی) یاموازي وي مونږ لیکلای شو چې $\underline{u} - t\underline{v}$، چېرې چې t یو سکالر دی.

(vi) که چېرته $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3]$ او $\underline{v} - [v_1, v_2, v_3]$ دوه وکتورونه وي نو

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u \cdot v \cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

چېرې چېθ د $\underline{u}$ او $\underline{v}$ ترمنځ زاویه ده.

$$\therefore \cos\theta = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{u\cdot v}$$

که چیرې $\underline{u}$ او $\underline{v}$ عمود وي نو $u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3 = 0$

(vii) که چیرې $\underline{u}=[u_1,u_2,u_3]$ او $\underline{v}=[v_1,v_2,v_3]$ دوه وکتورونه وي، نو

$$\underline{u}\times\underline{v} = uv\sin\theta\,\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

چیــــرې چـــې θ د $\underline{u}$ او $\underline{v}$ تــــرمنځ زاویــــه ده او $\underline{n}$ یــــو واحــــد وکتــــور دی چــــې د $\underline{u}$ او $\underline{v}$ په دواړو وکتورونو عمود دی.

(viii) که چیرې $\underline{p}$ او $\underline{q}$ په ترتیب سره د p او Qدوه نقطو د حالت ویکتورونه وي . نو د R نقطې د حالت ویکتور، کوم چې د PQ قطعه خط د m:n په نسبت ویشي $\frac{n\underline{p}+m\underline{q}}{m+n}$ دی.

(ix) سکالري درئ ګونی ضرب

$$\left[\underline{u}\cdot\underline{v}\cdot\underline{w}\right] = \underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w}) = \underline{v}(\underline{w}\times\underline{u}) = \underline{w}(\underline{u}\times\underline{v}) = (\underline{u}\times\underline{v})\,\underline{w} = (\underline{v}\times\underline{w})\underline{u} = (\underline{w}\times\underline{u})\,\underline{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

چیرته چې $u=[u_1,u_2,u_3]$، او داسې نور.

(x) $[\underline{u},\underline{v},\underline{w}]=$ ټکه $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ مجاوروڅنډو په لرلو دمتوازي السطوح حجم.

(xi) د $\underline{u}\cdot\underline{v}$ نقطـوي حاصـل ضــرب د $\underline{u}$ او $\underline{v}$ د دوی د هریـو د اوږدوالـي او یوپــه بـل بانـدې د دوی دتصویریا مرتسم له حاصل ضرب سره مساوي دی.

په ځانګړي ډول که چیرې یو د دغو ویکتورونو په اصطلاح $\underline{u}$ واحد اوږدوالی ولري نو ،

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|\cos\theta$$

کوم چې یواځې یو تصویر دی، یا د u واحد وکتور په لوری د v برخه (ټوټه) دی.

(xii)

$$(\underline{a}\times \underline{b})\cdot(\underline{c}\times \underline{d})=(\underline{a}\times \underline{c})(\underline{b}\times \underline{d})-(\underline{a}\times \underline{d})(\underline{b}\times \underline{c})=\begin{bmatrix} a\cdot c & b\cdot c \\ a\cdot d & b\cdot d \end{bmatrix}$$

(xiii)

$$(\underline{a}\times \underline{b})\times(\underline{c}\times \underline{d})=[\underline{a}\cdot \underline{b}\cdot \underline{d}]\underline{c}-[\underline{a}\cdot \underline{b}\cdot \underline{c}]\underline{d}$$

۵,۲,۱۰ د دوو نقطو ترمنځ واټن (فاصله)

فرضوو چې $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ دوه نقطې دي .

نو

$$\vec{PQ}=[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$$

او ددې اندازه $\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$ده.

نو لدې امله دP او Q ترمېنځ واټن، يانې ، د $\vec{PQ}$ ويکتور اندازه $\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$ ده.

۶,۲,۱۰ په يو راکړل شوي نسبت د يو قطعه خط ويش

فرضوو چې $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ دوه راکړل شوي نقطې دي، او $R(x, y, z)$ د PQ قطعه خط د m: n په نسبت ويشي.

مونږ پوهيږو که چېرې p او q په ترتيب سره د P او Q د حالت ويکتورونه وي نو د R نقطې د حالت ويکتور $\underline{r}$ د

$$\underline{r}=\frac{np+mq}{m+n}$$

پواسطه راکول شوی دی.

اوس $\underline{p}=[x_1, y_1, z_1]$ او $\underline{q}=[x_2, y_2, z_2]$.

لدې امله

$$[x, y, z]=\frac{n[x_1, y_1, z_1]+m[x_2, y_2, z_2]}{m+n}=\frac{[nx_1+mx_2, ny_1+my_2, nz_1+mz_2]}{m+n}$$

يعني $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}, \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$, R , څخه عبارت دی.

۱. پایله: د $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ مېنځني نقطه

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ده .

۲. پایله: که چېرې R د $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ نښلول شوی توټه خط د $1:\lambda$

په نسبت وویشي، نو R عبارت دی له : $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

۷,۲,۱۰ د یو ویکتورلوري لرونکي (جهتي) کوساینونه

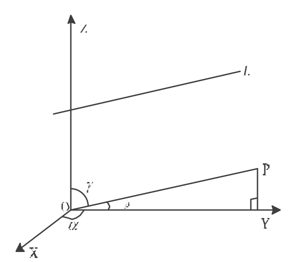
که چېرې $\underline{u}=[u_1, u_2, u_3]=u_1\underline{i}+u_2\underline{j}+u_3\underline{k}$ ، نو u_3, u_2, u_1 ته د $\underline{u}$ ویکتور لوري لرونکی (جهتي) عددونه یا لوری لرونکي نسبتونه وايي.

که چېرې u د $\underline{u}$ اندازه وي نو $\frac{u_1}{u}, \frac{u_2}{u}, \frac{u_3}{u}$ د u ویکتور لوری لرونکي کوساینونه دي، دا روښانه ده چې :

$$\left(\frac{u_1}{u}\right)^2+\left(\frac{u_2}{u}\right)^2+\left(\frac{u_3}{u}\right)^2=1$$

۸,۲,۱۰ د یو خط دجهت(لوري) کوساینونه

که چېرې یوخط د y,x او z محورونو د مثبت لوریو سره په ترتیب د γ, β, α زاویې جوړې کړي ، نو $\cos\gamma, \cos\beta, \cos\alpha$ ته لوری لرونکي کوساینونه او γ, β, α ته لوری لرونکي زاویې وايي.



د $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ثبوت لپاره. فرضوو چې $\cos\gamma, \cos\beta, \cos\alpha$ د L د خط لوری لرونکي کوساینونه دي، او $\vec{OP}=r=xi+yj+zk$ د L لخط ته یو موازي ویکتور دی، کوم چې په روښانه ډول د محورونو سره د γ, β, α زاویې جوړوي.

له شکل څخه څرګندېږي چې $x=r\cos\alpha$ ، $y=r\cos\beta$ او $z=r\cos\gamma$ چېرې چې $r=|\underline{r}|$. او س

$$\underline{r} = r\cos\alpha\, \underline{i} + r\cos\beta\, \underline{j} + r\cos\gamma\, \underline{k}$$

ځرنګه

$$\frac{\underline{r}}{r} = \cos\alpha\, \underline{i} + \cos\beta\, \underline{j} + \cos\gamma\, \underline{k}$$

یو واحد ویکتوردی او لدې امله

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

یا

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

یادونه: د یو خط لوری لرونکي کوساینونه معمولاً دا m, l او n پواسطه ښودل کیږي او لدې امله

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

۹,۲,۱۰ لوري لرونکي (جهتي) نسبتونه

درې عددونه چې د یوه خط لوری لرونکي کوساینونو ته متناسب وي دهغه خط د لوري لرونکي نسبتونو په نوم یادیږي.

یعني که چیرې m, l او n د یوه خط لوري لرونکي کوساینونه او $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ وي نو a, b, c ته د هغه خط لوری لرونکي نسبتونه وایي .

۱. یادونــه: د یـو خـط لـوري لرونکـي نسبتونه د $P(x_1, y_1, z_1)$ او $Q(x_2, y_2, z_2)$ پواسـطه ښـښـول شـوی وي $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ دي

۲. یادونه: که چیرې a, b, c د یوه خط لوري لرونکي نسبتونه وي نو لوري لرونکي کوساینونه د

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

یعنی،

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

پواسطه راکول کیږي.

۳. **يادونه:** د لوري لرونکي کوساينونو اود لوري لرونکي نسبتونو ترمينځ هر وخت يو ځرګند جوړښت شوني دی. دا يـواځې هغـه وخـت شـوني کيـدلی شـي کلهچـې n, m, l لـوري لرونکـي کوسـاينونه وي، نـو مـونږ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ رابطه لرو.

مثال: د يو خط لوري لرونکي کوساينونه پيدا کړئ کوم چې د $P(2,3,4)$ او $Q(4,7,-2)$ نقطو ديو ځای کيدو څخه لاس ته راځي.

حل: د PQ لوري لرونکي نسبتونه $4-2,\ 7-3,\ -2-4$ دي يعنې $2, 4, -6$ يا $1, 2, -3$

$\because$ لوری لرونکي کوساينونه

$$\frac{1}{\sqrt{1+4+9}}, \frac{2}{\sqrt{1+4+9}}, \frac{-3}{\sqrt{1+4+9}}$$

يعنی،

$$\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

دي.

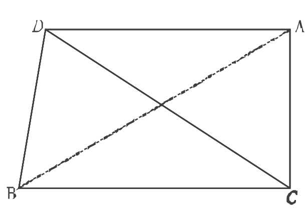
۱۰,۲,۱۰ د دوه مستقيم خطونو ترمينځ زاويه

که چيرې n_1, m_1, l_1 د L يو خط لوري لرونکي کوساينونه وي او n_2, m_2, l_2 د M يو بل مستقيم خط لوري لرونکي کوساينونه وي، نو $\theta \in [0, \pi]$، د دوو خطونو ترمينځ زاويه د $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ پواسطه راکول کيږي.

تعريف: د دوه غير متقاطع خطونو ترمينځ زاويه د دوه خطونو ترمينځ زاويه ده چې د فضا له کومې يوې نقطې څخه په دوی دواړوباندې موازي رسم کيږي.

۱۱,۲,۱۰ څلور سطحي (Tetrahedron)

يو څلور سطحي Tetrahadro دري بعديزه شکل دی چې د څلورو مستوي ګانو پواسطه چاپير شوی دی. دا څلور څوکې (راسونه) لري، هره څوکه د څلورومستوي سطحو څخه د دريو د تقاطع ديوی نقطې په شان راڅرګنديږي. دا شپږ څندی لري، هره څنده د څلورو مستوي سطحو څخه د دوو د تقاطع د خط په څير څرګنديږي. $(4C_2 = 6)$.



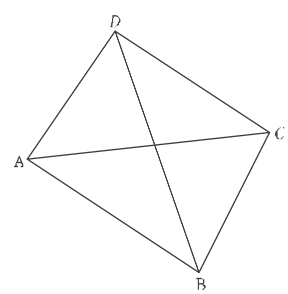
د يو څلورسطحي دجوړيدنې لپاره، مونږ د C, B, A دري نقطو او د D کومې بلې نقطې، چې په هغه مستوي کی چې دC, B, A نقطوپواسطه ټاکل کيږي پرته نه وي کړنه کوو.

نو د څلورسطحي څلور مخونه د BCD, ABC
$ABD, CAD,$ څلورمثلثونه دي، د C, B, A او D
نقطې څلورڅوکې(راسونه) دي او
CA, AD, BC, CD, AB او BD خطونه
دڅلور سطحي (څلورګوټي)شپږ څنډې (ضلعې)
دي.

د CD, AB دوه څنډې چې په جلا ډول سره، د B, A او D, C نقطې يوځای کوي د مخالفو څنډو يوه جوړه بولي. په ورته ډول سره AD, BC او BD, CA د مخالفو څنډودوه نورې جوړې دي.

۱۲,۲,۱۰ د يو څلور سطحي حجم

فرضوو چې $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ او $\underline{d}$ د ABCD څلور سطحي د څوکو(راسونو) د حالت ويکتورونه دي.



$$\text{دڅلور سطحي حجم} = \frac{1}{3}(\text{د ABC مثلث مساحت})(\text{له D څخه ترABC مستوي پورې د ارتفاع اوږدوالي h})$$

$$= \frac{1}{6}(2 \cdot \text{د ABC مثلث مساحت}) \cdot h$$

$$= \frac{1}{6}(\text{لکه د AB او AC مجاورو څنډو په لرلو د متوازي الاضلاع مساحت}) \cdot h$$

$$= \frac{1}{6}\ (\text{لکه د } \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \text{ د مجاورو څنډو په لرلو د متوازي السطوح حجم})$$

$$= \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6}[\underline{b} - \underline{a}, \underline{c} - \underline{a}, \underline{d} - \underline{a}]$$

پایله: که چیري $A(x_1,y_1,z_1)$، $B(x_2,y_2,z_2)$، $C(x_3,y_3,z_3)$ او $D(x_4,y_4,z_4)$ د څلور سطحي څوکي (راسونه) وي

$$\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1]$$

$$\overrightarrow{AC}=[x_3-x_1,\, y_3-y_1,\, z_3-z_1]$$

او،

$$\overrightarrow{AD}=[x_4-x_1,\, y_4-y_1,\, z_4-z_1]$$

اوندې امله د څلور سطحي حجم

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

دی.

۲,۱۰. ۱۳ حل شوي مثالونه

۱. مثال: $A(3,2,-4)$ ، $B(-1,1,-2)$ ، $C(-2,3,3)$ ، $D(-3,-2,1)$ دڅلور سطحي کونجونه یا راسونه دي، څلور سطحي حجم لاس ته راوړئ.

حل: د څلور سطحي حجم

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

د نوروسطرونو نه د لومړي سطر په منفي کولو لاس ته راځي چې

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \\ -6 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \\ -6 & -4 & 5 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\{4(5+28)+1(25-42)+2(-20-6)\}=\frac{1}{6}[132-17-52]=\frac{63}{6}=10\frac{1}{2}=10{,}5$$ (واحد مکعب)

۲. مثال: وښایاست چې (1,6,1)، (1,3,4)، (4,3,1) او (0,2,0) دیو منظم څلور سطحي څوکې (راسونه) دي.

حل: فرضوو چې $A(1,6,1)$، $B(1,3,4)$، $C(4,3,1)$ او $D(0,2,0)$ راکړل شوو څوکو نقطې دي

اوس

$$AB=\sqrt{(1-1)^2+(6-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(1-4)^2+(6-3)^2+(1-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$
$$AD=\sqrt{(1-0)^2+(6-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$
$$BC=\sqrt{(1-4)^2-(3-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9-9}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$
$$BD=\sqrt{(1-0)^2+(3-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$

او،

$$CD=\sqrt{(4-0)^2+(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad AB=AC=AD=BC=BD=CD$$

نوله دی امله راکړل شوې نقطې دیو منظم څورسطحي څوکې جوړوي.

۳. مثال: دهغې نقطې مختصات لاس ته راوړئ کوم چې د $(-3,1,4)$ او $(5,-1,6)$ نقطو د یوځای کیدونه لاس ته راغلي خط د $5:3$ په نسبت ویشي.

حل: دلته نسبت $m:n=3:5$.

که چیرې (x,y,z) غوښتل شوې نقطه وي نو

$$x=\frac{5(-3)+3(5)}{5-3}=0 \quad , \quad y=\frac{5(1)+3(-1)}{3+5}=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}$$
$$z=\frac{5(4)-3(6)}{5+3}=\frac{20+18}{8}=\frac{19}{4}$$

نو په پایله کې $(0,\frac{1}{4},\frac{19}{4})$ غوښتل شوې نقطه ده.

۴. مثال: دهغې نقطې هندسي محل په لاس راوړئ کوم چې د (3 ,2 ,1-) او(3,2,1) نقطو نه په مساوي واټن واقع وي .

حل: راکړل شوي نقطې $A(-1,2,3)$ او $B(3,2,1)$ دي.که چېرې $P(x,y,z)$ دهندسي محل یوه نقطه وي $.PA=PB$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$$

یعنې،

$$2x-4y-6z+1+4-9=-4x-6y-2z+4+9+1$$

یا $3x+y-2z=0$ یا $6x+2y-4z=0$.

۵. مثال: دیو مستقیم خط چې د $(1,-2,0)$ او $(5,-10,1)$ نقطونه تېرېږي لوری لرونکي نسبتونه، لوری لرونکي کوساینونه اود لوري لرونکو زاویو براخوالی پیدا کړئ.

حل: د خط لوری لرونکي نسبتونه

$5-1,-10+2,1-0$ ، یعنې، $4\,,-8\,,1$ دي او،

$$\sqrt{4^2-(-8)^2+1^2}=\sqrt{16+64-1}=\sqrt{81}=9$$

دخط لوری لرونکي کوساینونه $\frac{4}{9},\frac{-8}{9},\frac{1}{9}$ دي. اود لوري لرونکو زاویو اندازې

$$\cos^{-1}\frac{4}{9}\,,\qquad \cos^{-1}(\frac{-8}{9})\,,\qquad \cos^{-1}\frac{1}{9}$$

دي.

۶. مثال: دیو مستقیم خط لوری لرونکي کوساینونه لاس ته راوړئ چې ټولې برابرې (منطبقې) لوری لرونکي زاویې ولري.

حل: دلته $\alpha=\beta=\gamma$.

خکه نو، $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1$.

$$\rightarrow 3\cos^2\alpha=1\rightarrow \cos\ \alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

لدې امله د مستقیم خط لوری لرونکي کوساینونه $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}$ دي.

۷. **مثال:** ددوومستقیمو خطونو لوری لرونکي کوساینونه د $l+m+n=0, l^2+m^2-n^2=0$ معادلو پواسطه راکړ شوي دي. د دوی ترمنځ دزاویې اندازه پیدا کړئ.

حل:

$$l+m+n=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$l^2+m^2-n^2=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

له (1) معادلي نه ؛ $n=-(l+m)$

په (2) معادله کي دقیمت په تعویض کولو، مونږ لاس ته راوړو چي:

، یعني ، $-2lm=0$ یا $l=0$ یا $m=0$

که چیرې $l=0$, $n=-m$ یا $\frac{n}{l}=\frac{m}{-l}$.

همدارنګه $\frac{n}{l}=\frac{m}{-l}=\frac{l}{0}$ یعني، m, l او n په ترتیب سره $(0, l-$ او l ته متناسب دي او ددوی واقعي قیمتونه $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ دي.

که چیرې $m=0$ ، $n=-\ell$ یا $\frac{\ell}{\ell}=\frac{n}{-l}$ یا $\frac{l}{l}=\frac{m}{o}=\frac{n}{-l}$ ، یعني، n, m, ℓ د $\frac{l}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-l}{\sqrt{2}}$ متناسب دي.

لدې امله ددوه مستقیمو خطونو لوری لرونکي کوساینونه $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$ او $\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$ دي.

که چیرې θ د دوی تر منځ دزاویې اندازه وي نو

$$\cos\theta = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

۲,۱۰ پوښتنې

۱. وښایاست چې (3,-1,3), (1,-1,2), (2,1,0) او (4,1,1) نقطې دیومستطیل څوکې (راسونه)دي.

۲. A(3,2,0) د B(5,3,2) او C(-9,6,-3) دABC مثلث راسونه دي. د A زاويې دداخلي ناصف د تقاطع د نقطې مختصات د BC له ضلعې سره پیداکړئ.

۳. هغه نسبت پیداکړئ کوم چې د yz دمستوي د(2,4,7) او (-3,-5,8) نقطو د یوځای کیدوټوټه(قطعه) خط ویشي .

۴. دمختصاتو دمحورونو لوری لرونکي کوساینونه کوم دي.

۵. یو خط په ترتیب سره د x او y له محورنو سره د 30° او 60° زاویه جوړوي. وواياست چې د z محور سره کومه زاویه جوړوي ؟

۶. ثبوت کړئ که چېرې د α ، β او γ د یو مستقیم خط لوری لرونکي زاويې وي نو

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

۷. که چېرې a, b, c دیوڅلورسطحي جسم څنډې یا ژې وي. وښایاست چې د څلور سطحي څلورو قطرونو تر مینځ د زاويې اندازه د $arc\cos(\frac{\pm a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2 + b^2 + c^2})$ قوس پواسطه راکړل شویده.

۸. ثبوت کړئ چې دیومکعب دهرو دوو قطرونوترمېنځ حاده زاویه $Cos^{-1}\frac{1}{3}$ دي.

۹. یو مستقیم خط د یو مکعب دڅلوروقطرونوسره α,β,γ او δ په اندازه زاويې جوړوي، ثبوت کړئ چې

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma + Cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

۱۰. د دوه مستقیم خطونو تر مېنځ زاويي پیدا کړئ چې لوری لرونکی کوساینونه یې دلاندې معادلو په واسطه راکړل شوي دي.

$$(i)\quad l - 2m - 2n = 0$$
$$lm + mn + nl = 0$$
$$(ii)\quad l + m - n = o$$
$$2lm + 2\ln + mn = o$$
$$(iii)\quad 2l + 2m - n = o$$
$$lm + mn + nl = o$$

۱۱. د خط لوری لرونکي کوساینونه لاس ته راوړئ کوم چې په هغو خطو باندې چې دهغوی لوری لرونکي کوساینونه 3,-2,3 او 1-,-2,-1 ته متناسب دي عمود وي. $2lm + 2\ln - mn = o$

۱۲. که چېرې $n_1, m_1, l_1; n_2, m_2, l_2$ او n_3, m_3, l_3 د ګډ یا له دواړوخواوعمودي خطونو لوری لرونکي کوساینونه وي،ثبوت کړئ هغه خط چې دهغه لوری لرونکي کوساینونه $l_1 + l_2 + l_3; m_1 + m_2 + m_3; n + n_2 + n_3$ ته متناسب دي له دوی سره منطبقې زاویې جوړوي.

۱۳. یو متحول خط چې په دوه مجاوروحالتونوکې د l, m, n او $l + \delta l, m + \delta m, n + \delta n$ لوری لرونکي کوساینونه لري. وښایاست چې ددوه حالتونو ترمېنځ دکوچنې زاویې $\delta\theta$ اندازه د $(\delta\theta)^2 = (\delta l)^2 + (\delta m)^2 + (\delta n)^2$ پواسطه راکړل شوې ده.

۱۴. که چېرې B,A د (3, 4, 5) ، (-1, 3,-7) نقطې وي ، دP یوی نقطې هندسي محل لاس ته راوړئ چې $|PA|^2 - |PB|^2 = \text{constant} = k$؟

۱۵. د دوه ستقیموخطونو ترمېنځ زاویه معلومه کړئ که چېرې ددوی لوری لرونکي کوساینونه د، $3lm + mn - 4ln = 0, l + 2m + 3n = 0$ معادلو پواسطه راکړل شوې وي.

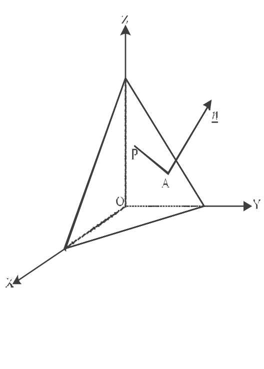
مستوي سطحې

۱,۳,۱۰ تعریف

دیوه مستوي سطحه (پایه لند یول مستوي)یوه سطحه ده دارنګه چې په مستقیم خط باندې هره یوه نقطه چې دسطحې دوه نقطې سره نښلوي په سطحه کې واقع وي.

یومستوي په درې بعدیزه فضاکې په ځانګړې توګه په مستوي کې دیوې نقطې او په مستوي باندې دیو عمود وکتورپواسطه مشخص (ټاکل) کېږي. یو وکتور په یو مستوي باندې عمود وي د مستوي دنارمل په نوم یادیږي.

۲,۳,۱۰ دمستوي معادله



دمستوي دمعادلې دپیداکولو لپاره چې د $A(x_1, y_1, z_1)$ راکړشوې نقطې او $\underline{n} = [a, b, c]$ د صفر خلاف نارمل ویکتورخخه تېرېږي. فرضوچې $P(x, y, z)$ د مستوي کومه بله نقطه ده. دا روښانه ده چې د $\overrightarrow{AP}$ ویکتور $\underline{n}$ ته عمود دی

$$\vec{AP} = [x - x_1, y - y_1, z - z_1]$$
$$\underline{n} = [a, b, c]$$

ځرنګه چې $\overrightarrow{AP}$ ویکتورپه n عمود دی.

$$n \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

یعنې،

$$[a,b,c] \circ [x-x_1, y-y_1, z-z_1] = 0$$

یعنې،

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

د مستوي غوښتل شوی معادله ده. دا لکه دمستوي د نارمل په بڼې(شکل)معادنه پیژندل کیږي.

۳,۳,۱۰ قضیه

که چیرې c,b,a او d ثابت وي اوb,a اوc ټول صفرنه وي، نود $ax + by + cz + d = 0$

معادله لکه د $\underline{n} = [a,b,c]$ وکتور په لرلو یو مستوي ښيي.

ثبوت:

ددې فرضـیې پواسـطه ، چـې b,a اوc ټـول صـفرندي .دیـوی شـیبی لپـاره ، فرضـوو چـې $a \neq 0$. د $ax+by+cz+d=0$ معادله کولی شو بیا د

$$a(x+\frac{d}{a})+by+cz=0$$

په شان ولیکو، یعنې،

$$a[x-(-\frac{d}{a})]+b[y-0]+c[z-0]=0$$

خو داد مستوي د معادلې نارمل شکل چې د$(-\frac{d}{a},0,0)$ له نقطې نه تیریږي او $\underline{n}=[a,b,c]$ په شان نارمل لري.

که چیرې $a = 0$ ، نویا $b \neq 0$ یا $c \neq 0$. دغه حالتونه کولی شود هر یوه لپاره په ورته طریقې سره وکاروو.

د $ax + by + cz + d = 0$ معادلې ته د یو مستوي دمعادلې عمومي شکل وایي.

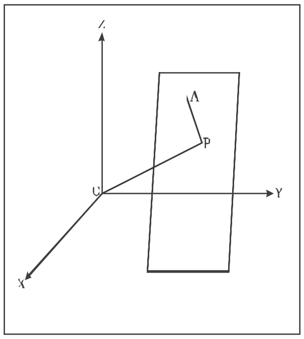
۴,۳,۱۰ د یو مستوي د معادلې نارمل شکل

دP په شرایطوکې دیو مستوي د معادلې د پیداکولو لپاره ، دنارمل اوږدوالی لـه مبدانـه تـر ده پوری او

n, m, l دنارمل لوری لرونکي کوساینونه دي. (p تل مثبت په پام کی نیول کیږي).

فرضو چي OA د O څخه تر راکړل شوي مستوي پوري نارمل دی، A دعمود بیخ ځوکه (قاعده) دی.

نو $|OA| = P$ او n, m, l د OA لوری ژرونکي کوساینونه دي. نو لدي امله (pl, pm, pn)د A مختصات دي. که چیري P(x, y, z) په مستوي باندي کومه یوه نقطه وي.



$$\overrightarrow{PA} = [x - pl, y - pm, z - pn].$$

دا روښانه ده چي $\overrightarrow{OA}$ په $\overrightarrow{AP}$ باندي عمود دي.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

یعني،

$$[l, m, n] = [x - pl,\ y - pm,\ z - pn] = 0$$

یعني،

$$l(x - pl) + m(y - pm) - n(z - pn) = 0$$

یعني،

$$lx + my + nz - p(l^2 - m^2 - n^2)$$

یا

$$lx + my - nz = p$$

څکه $l^2 + m^2 - n^2 = 1$

۵,۳,۱۰ دیومستوي د $ax + by + cz + d = 0$ عمومي معادلي تبدیلول د هغه د نارمل په شکل باندي $lx + my + nz = p$

ځرنگه چي دوه معادلي ورته (عینی) مستوي ښيي، ددوه معادلود ضریبونو دپرتله کولو څخه مونږلاس ته راوړوچي

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \frac{p}{-d} = \pm\frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$$

نولدي امله دیونارمل دn,m,l لوری لرونکي کوساینونه دمستوي د c,b,a سره متناسب دي، او

$$P=\frac{-d}{\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}=\frac{-d}{\pm\sqrt{\sum a^2}}$$

خو p تل مثبت په پام کی نیول کیږي. نولدي امله ، مونږ د $\sqrt{\sum a^2}$ افادي نه دمخه مثبت یا منفي علامه د d په مطا بق چي منفي یا مثبت وي نیسو. په پایله کي که چیرې d مثبت وي.

$$p=\frac{d}{\sqrt{\sum a^2}} \qquad \text{او} \qquad l=-\frac{a}{\sqrt{\sum a^2}},m=-\frac{b}{\sqrt{\sum a^2}},n=\frac{-c}{\sqrt{\sum a^2}}$$

که چیرې d منفي وي ،مونږ به یواځي ددغو ټولو علامو تبدیلونه ولرو. لدي امله د نارمل شکل د $\sqrt{\sum a^2}$ یا $-\sqrt{\sum a^2}$ بائدي دd دعلامی په مطابق چي منفي یا مثبت وي دراکړ شوی معادلی دویش نه لاسته راځي.

مثال : 2x-y+2z+1=0 معادله د نارمل په شکل بدله کړئ.

حل : څنګه چي ثابت حدمثبت دي مونږ راکړل شوي معادله په $-\sqrt{2^2+(-1)^2-2^2}=-3$ ویشو.

نو دنارمل په شکل معادله $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z=\frac{1}{3}$ده ،

پـه مستوي کـي دیونارمـل لـوری لرونکـي کوسـاینونه $-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$ دي اودمبدانـه ترمسـتوي پـوري دعمـود اوږدوالی $\frac{1}{3}$ دی.

۶,۳,۱۰ دیومستوي د تقاطع د شکل معادله

دc,b,a د تقاطع په حالتونوکي کوم چي دایي له محورونو سره جوړوي دیو مستوي د معادلي دلاس ته راوړلو دپاره فرضوو چي د مستوي معادله کوم چي مستوي له محورونو د (a,0,0),(0,b,0),(0,0,c) په نقطوکي مخامخ کیږي

$$Ax+By+Cz+D=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

ده. څرنګه چي دغه نقطې په (i) مستوي بائدي پرتی دي، نو مونږلاس ته راوړو چي

$Aa-D-0$ ؛ یعني ، $A=-\frac{D}{a}$ ، د $y=z=0$ دپاره ،

$Bb+D=0$، یعني ، $B=-\frac{D}{b}$ ، د $x=z=0$ دپاره ،

$Cc+D=0$ ، یعني ، $C=-\frac{D}{c}$ ، د $x=y=0$ دپاره ،

نو لدی امله (i)معادله د $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$ یا $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$سره کېږي کومه چې غوښتل شوي معادله ده.

۷,۳,۱۰ له درې نقطونه یو مستوي تېرېږي

د مستوي د معادلې د پیداکولو لپاره چې د $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ له دریو نقطوڅخه چې په یو مستقیم خط واقع نه دي تېرېږي ،

فرضوو چې د مستوي غو ښتل شوي معادله

$$ax+by+cz+d=0\text{.....................}(i)$$

ده . څنګه چې راکړل شوی نقطې په مستوي باندې پرتې دي ، مونږلرو چې

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0\text{................}(ii)$$
$$ax_2+by_2+cz_2+d=0\text{..............}(iii)$$
$$ax_3+by_3+cz_3+d=0\text{................}(iv)$$

له (i) نه تر (iv) پورې د d,c,b,a په له منځه وړلو سره ، مونږلرو چې

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

کومه چې دنوموړی مستوي غوښتل شوی معادله ده.

یادونه :

1 – درې نقطې چې په یو مستقیم خط باندې پرتې (واقع) وي بې شمیره مستوي ګانې تېرېږي

2- په حقیقي عددي تمرینونوکې دابه ډېر اسانه وي چې هغه میتود وکارول شي کوم چې په لاندې مثال کې کارول شوی ده.

مثال : دمستوي معادله لاس ته راوړې چې(A(2,1,1 ، (B(6,3,1 او (C(-2,1,2 نقطوڅخه تېرېږي .

حل : دیو مستوي عمومي معادله چې له (2,1,1) نقطې څخه تېرېږي

$a(x-2)+b(y-1)+c(z-1)=0$ ....(I)

ده. دابه دB اوC نه هم تيرشي، كه چيري $4a-2b+0c=0$ او $-4a+0b+c=0$.

دوى د $\frac{a}{2}=\frac{b}{-4}=\frac{c}{8}$ يا $\frac{a}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{4}$ پواسطه راکړل کيږي.

په (I) معادله کې ددغو قيمتونوپه عوض کولو سره مونږلرو

$1(x-2)-2(y-1)+4(z-1)=0$ ،

يعنی ، $x-2y+4z-4=0$ دغوښتل شوي معادلي په څير ده.

۸,۳,۱۰ ددوه مستويانو ترمينځ زاويه

ددوه مستوي ګانو ترمينځ زاويه ددوی دنارمل ويکتورونوترمينځ دزاويې په شان تعريف کيږي. نولدې امله د $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=o$

دوه مستويانو ترمينځ زاويه دهغو خطونو ترمنځ زاويې سره چې a_1,b_1,c_1 , a_2,b_2,c_2 لوری لرونکي نسبتونه لري مساوي ده. اولدی امله، $O=Cos^{-1}(\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{\sum a_1^2}\cdot\sqrt{\sum a_2^2}})$ دی.

لدی سببه، دوه مستوي ګانی موازي ياعمود وي په همدی ډول ددی په مطابق دوی ته نارمولونه هم موازي يا عمود وي.نو پدې ډول د

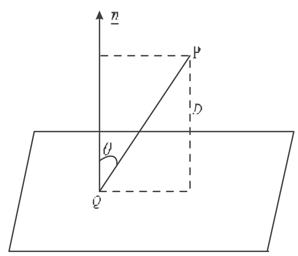
$a_1x-b_1y-c_1z+d_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

دوه مستوي ګانی موازي به وي،که چيري $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ،اوعمود به وي که چيری $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

۹,۳,۱۰ له يومستوي څخه ديوې نقطې واټن (فاصله)

د $ax+by+cz-d=0$ له مستوي څخه د $P(x_1,y_1,z_1)$ يوې نقطې عمودي واټن $\frac{|ax_1+by_1-cz_1+d|}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}}$ دی.

ثبوت: فرضوو چې $Q(x_0,y_0,z_0)$ په مستوي کې
کومه نقطه ده، او د نارمل حالت. $\underline{n}=[a,b,c]$
دارنګه چې دهغه لومړی (اصلي) نقطه دQ په نقطه



کي ده. څنګه چې په شکل کې ده، دD واټن د

$PQ\cos\theta$ سره مساوي دي.

$$D = \frac{QP\cos\theta|\underline{n}|}{|\underline{n}|} = \frac{|QP\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|}$$

خو

$$\begin{aligned} Q\vec{P} &= [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]\cdot[a,b,c] \\ &= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) \end{aligned}$$

او

$$|\underline{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

څکه نود D واټن،

$$D = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ځرنګه چې د $Q(x_0, y_0, z_0)$ نقطه په مستوي کې واقع دي ،نو ددې مختصات دمستوي معادله صدق کوي ، دارنګه چې ، $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ یا $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$.

نوپدې ډول مونږ د $D = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ، واټن لاس ته راوړو.

یادونه : ددونقطوترمېنځ واټن نه موخه ددونقطوترمېنځ مستقیم واټن دې اود مستوي یاخط څخه دنقطې واټن نه زمونږموخه دخط یا مستوي څخه دنقطې عمودي واټن (فاصله) دې.

۱۰،۳،۱۰ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $x + 2y - 2z = 3$ او $2x + 4y - 4z = 7$ موازي مستویانو ترمېنځ واټن لاس ته راوړئ.

حل: دمستویانو ترمېنځ دواټن لاس ته راوړلو لپاره مونږبه دمستوي ګانو څخه په یوه کې یوه اختیاري نقطه وټاکواوبیا مستوي پورې به دغه واټن محاسبه کړو. د $x + 2y - 2z = 3$ په معادله کې د $y = z = 0$ په ایښودلو سره ، مونږ په دغه مستوي کې د $P(3,0,0)$ نقطه لاس ته راوړو. نولدې امله غوښتل شوې واټن له P څخه د $2x + 4y - 4z - 7 = 0$ مستوي پورې واټن دی .یعنې ،

$$\frac{|\,2(3)+4(0)-4(0)-7\,|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\frac{1}{6}$$

۲. مثال: وښایاست چې د $(0,-1,-1),(4,5,1),(3,9,4)$ او $(-4,4,4)$ نقطې (coplanar) دي (په یوه مستوي کې واقع دي).

حل: د دمستوي معادله چې $(0,-1,-1),(4,5,1)$ او $(3,9,4)$ له نقطوڅخه تېرېږي

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ده . نو لدې امله راکړل شوی څلور نقطې په یو مستوي کې (coplanar)واقع دي که چېرې

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

اوس

$$L\cdot H\cdot S=\begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

څلورم ستون په دویم اودریم ستون کې په جمع کولو سره

$$=\begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-4(30-20)-5(20-6)+5(40-18)=-40-70+110=0$$

نولدې امله څلور نقطې په یوه مستوي کې (coplanar) واقع دي.

۳. مثال: د مستوي معادلـه لاس تـه راوړئ چــې د(5,-1,4) نقطــې څخــه تیــر اود $x+y-2z-3=0$ او $2x-3y+z=0$ په هریوه مستوباندې عمود وي.

حل: یو مستوي چې د $(5,-1,4)$ نه نقطې څخه تېرېږي

$$a(x-5)+b(y+1)+c(z-4)=0$$

دی. څرنګه چې دا دوو راکړل شوومستوینوباندې عمود دی، مونږ لروچې

$$a+b-2c=0$$
$$2a-3b+c=0$$

یا،

$$\frac{a}{1-6}=\frac{b}{-4-1}=\frac{c}{-3-2}$$
$$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$$

څکه نو د غوښتل شویې مستوي معادله $x-5+y+1-z-4=0$ ، یعني ، $x-y+z-8=0$ ده .

۴. مثال: د مستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $(1,0,1),(2,2,1)$ نقطوڅخه تېر اود $x-y-z+4=0$ په مستوي باندې عمود وي.

حل: یو مستوي چې د (1,0,1) نقطې څخه تېرېږي

$$a(x-1)+b(y-0)-c(z-1)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

دی. څرنګه چې داد(2,2,1) نقطې نه تېرېږي نو

$$a+2b-0c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

همدارنګه (I) مستوي د $x-y-z+4=0$ په مستوي باندې عموددي نولدی امله

$$a-b-c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

له (II) او(III) نه مونږلاس ته راوړو

$$\frac{a}{-2-0}=\frac{b}{0+1}=\frac{c}{-1-2} \qquad \text{یا} \qquad \frac{a}{-2}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{3}$$

دمستوي غوښتل شوی معادله

$2(x-1)-y+3(z-1)=0$ ، یعني ، $2x-y+3z-5=0$ ده.

۵. مثال: د مستوي معادله لاس ته راوړئ چي د $x+y+z=6$ او $2x+3y+4z+5=0$ مستوي ګانو دتقاطع او د(1,1,1) له نقطې څخه تېرېږي.

حل: د

$$x+y+z-6+k(2x+3y+4z+5)=0,..............,(i)$$

مستوي دk په ټولو قیمتونو سره دراکړل شوومستویانودتقاطع نه تېرېږي. د (1,1,1) نقطې نه به تیرشي که چېرې $-3+14k=0$ یا $k=\dfrac{3}{14}$

په (i) کي د $k=\dfrac{3}{14}$ په ایښودلو، مونږلاس ته راوړو.

$20x+23y+26z-69=0$ کومه چي د مستوي غوښتل شوې معادله ده

۶. مثال: د $2x+y-z=7, x+2y+z=6$ مستویانوتر مینځ دحاده زاویې پراخوالی لاس ته راوړئ.

حل: دوومستویانوته دنارمل خطونو لوری ګرونکي نسبتونه 1,2,1 او 2,1,−1 دي. ددوه مستویانوترمېنځ زاویه دوومستویانو ته د نارمل خطونو ترمېنځ زاویې سره یو شانتی ده. لدې امله که چېرې θ ددوی ترمېنځ زاویه وي

$$\cos\theta=\frac{2\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot 1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

۱۰ .۳ پوښتنې

۱. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چي ددريوراکړ شوو نقطو څخه تېرېږي.

$$(i)(2,2,-1),(3,4,2),(7,0,6)$$
$$(ii)(4,-1,2),(-3,-2,-1),(7,-1,3)$$

۲. د $3x-4y+5z=0$ او $2x-y-2z=5$ مستويانو معادلې په نارمل شکل باندي تبديلي کړئ همدارنګه ددوی تر مينځ دزاويې پراخوالي معلوم کړئ.

۳. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چي د (2,-3,1) له نقطې څخه تېرېږي اوپه کوم مستقيم خط چي نارمل دی د (3,4,-1) او (2,-1,5) نقطې سره نښلوي.

۴. د

(i) , 2x-y+z-6=0 , x+y+2z-3=0

(ii) 2x+y-z-5=0 , x-y-2z+7= 0

مستويانو ترمينځ دحاده زاويې پراخوالي لاس ته داوړئ.

۵. د مستوي معادله لاس ته راوړئ کوم يو چي د (1-,4- , 3) او (5,2,7) نقطو نښلوونکي ټوټه خط عمودي ناصف دی.

۶. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چي د (-1,3,2) نقطې نه تېرېږي او د $2x+2y-2z=5$ او $3x+3y+2z=8$ په مستويانو باندی عمود وي.

۷. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چي د (2,2,1) , (9,3,6) نقطو څخه تېرېږي او

2x+6y+6z = 9 په مستوي باندي عمود وي.

۸. د ټولومستويانود کورنی (حزمې) معادله ولیکي چي دهغوی واټن له مبدا ء څخه اوه (7) ده. دهغوی غړي (اعضاوی)پيداکړئ کوم چي د x+y+z+5=0 مستوي سره موا زي وي.

۹. د مستوي معا دله پيداکړئ کوم چي د (3,4,5) نقطې نه تېرېږي ،د x سره يوه تقاطع لري چي له 5- سره مساوي ده اود $2x+3y-z=8$ په مستوي باندي عمود دی.

۱۰. د مستوي معادله لاس ته راوړئ کوم چي د $2x+y-4=0$ ، $y+2z=0$ مستويانودتقاطع نه تېرېږي اوکوم چي

(i) د 3x +2y – 3z = 7 په مستوي باندې عمود دی .

(ii) د (1 ,-1 ,2)له نقطې نه تیرېږي.

۱۱. د مستویانو د کورنی (حزمې) معادله ولیکې چې x په 5 ، y په 2 او z د صفر په خلاف قطع کوي. ددی کورنی غړي پیداکړئ کوم چې د $3x - 2y + z - 4 = 0$ په مستوي باندې عمود وي.

۱۲. یو متحول مستوي له مبدا څخه د p یو ثابت واټن لري اومحورونه د C,B,A په نقطو کې قطع کوي.

د C,B,A له مستویا نو څخه چې د مختصاتوله مستویانو سره موازي رسم کېږي تیریږي.وښایاست چې ددوی د تقاطع نقطې دهندسی محل $x^2 + y^2 + z^2 - p^2$ دي.

۱۳. د یو څلور سطحي راسونه (څوکې),(0,0,0) (3,0,0) ,(0,-4,0) او (0,0,5) دي د مستویانو معادلې لاس ته راوړئ کوم چې د څلور سطحي څنډې جوړوي .

۱۴. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $2x - y + 3z = 0$ او $x + 2y - 2z - 3 = 0$ مستویانو تقاطع نه تیرېږي او

(i) له مبدا څخه د یو واحدپه واټن کې وی .

(ii) د $3x - 2y + 4z - 6 = 0$ په مستوي باندې عمود وي.

(iii) د x محورسره تقاطع 6 ولري.

۱۵. دیوې نقطې هندسي محل پیداکړئ چې له مبدا څخه دهغې (واټن) دری برابره د 2x-y+2z = 3 مستوي نه واټن څخه وي.

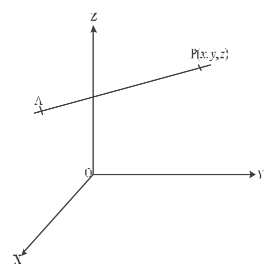
مستقیم خط

۱,۴,۱۰ تعریف

که چیرې A او B په دری بعدیزه فضاء کی دوه بیلې (ځرګندې) خو ثابتې نقطې وي ، مونږ د AB مستقیم خط د p دټو لو نقطو د سیټ په څیر دارنګه چې د $\vec{AP}$ ویکتور د $\vec{AB}$ ویکتور سره په یو مستقیم خط واقع (Collinear) وي تعریفوو. د تحلیلي هندسی په مستوي کې دیو خط معادله په x,y کې دیوې ځانګړې خطي معادلې پواسطه ښودل کیږي. په دری بعدیزه فضا کې یو خط (همغه شان مونږ به یې ځارو) پهz,y,x کې ددوه خطي معادلو په وا سطه ښودل کیږي.

۲,۴,۱۰ دیو خط متناسبي(متقارني یا متناظري) معادلي

فرض ضووچې L یوخط دئ چې د $A(x_1, y_1, z_1)$ له نقطې څخه تېرېږي او $\underline{a} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$ له یو غیر صفري ویکتور سره موازي دی. چېرې چې n, m, l د $\underline{a}$ ویکتور ، همداشانتی، د L د خط، لوری لرونکي کوساینونه دي،



نو L د $P(x, y, z)$ د نقطو سیټ دی دادول چې $\vec{AP}$ د $\underline{a}$ له را کړل شوي ویکتور سره موازي دی.
څکه نو پدې برخه کې $t \in R$ یو سکالر دی پدی دول چې

$$\vec{AP} = t.\underline{a}$$

یا

$$[x - x_1, y - y_1, z - z_1] = t[l, m, n]$$

کوم چې $z - z_1 = t.n$, $y - y_1 = t.m$, $x - x_1 = t.l$ راکړل شوېدي. د t په له مېنځه وړلوسره مونږ لاس ته راوړوچې

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots, (A)$$

څنګه چې د خط معادله د تناظر په شکل کې دی. د A معادله د

$$x = x_1 + t.l$$
$$y = y_1 + t.m$$
$$z = z_1 + t.n$$

په څیرلیکل کیږي. د L دخط پارامتریک معادلی ورته وایي.

۱. یادونه: د (A) معادله امکان لری چې ددریو مستویانودمعادلوپه ډول ولیکل شي خو دوې مستقل نه دې ، څکه چې کوم یو ښایي ددریم مستوي د معادلې دلاس ته راوړلو لپاره اتحاد کړی وي. څکه په خط باندې د هرې نقطې مختصات باید ددې دریو معادلونه هره یوه تصدیق کړي ، هر مستوي در لودونکي د خط دی او د مختصاتو له محورونو څخه په یوه باندې عمود دی. دغو مستوي ګانو ته دخطونو دارتسام مستوي ګانی وایې. په ځانګړي ډول ، څنګه چې د x محور د xz او xy مستوي ګانو تقا طع ده، ددوی معادلې z=0 , y = 0 دي په ګډه په پام کی نیول کیږي. په ورته ډول د y دمحور معادلې z=0 , x = 0 دي او دz محور y=0,x=0 دی.

۲. یادونه: فرض وو چې n,m, l او n_1, m_1, l_1 متناسب دي نود (A) معادله د.

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

سره کیږی ، دا هم د L د معادلو په شان په پام کی نیول کیږي.

مثال: دیوخط معادله لاس ته راوړئ چې د (0, -3, 2) له نقطې نه تیریږي اود (3, 4, 7) او (2, 7, 5) نقطوله نښلول شوي خط سره موازي وي.

حل: د (3, 4, 7) او (2,7,5) نقطو نښلول شوي خط لوری لرونکي نسبتونه

7- 5 ,4- 7, 3- 2 یا 2- , 3 , 1- یا 1, -3, 2 دي. نو لدې امله د غوښتل شوي خط معادله چې د

(0, -3, 2) له نقطې نه تیریږي

$$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$$

دی.

۳,۴,۱۰ دوه نقطې یو خط ټاکي

یو خط چې د (x_1, y_1, z_1) او (x_2, y_2, z_2) نقطوڅخه تیریږي هغه د $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ په څیر لوری لرونکي نسبتونه لري. پدی ډول د غوښتل شوي خط معادله

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

دی.

مثال: د خط معادله لاس ته راوړئ چې د (3, 4, 5) او (3 ,2-,5) نقطوڅخه تیریږي.

حل: د خط لوری لرونکي نسبتونه 2- ,6- ,2 یا 2 ,6 ,2- دي. د خط معادله

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-3}{-2} \qquad \text{یا} \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-5}{-2}$$

ده. په ټوله کومی هغې نقطې پورې چې اړه لري هغه موږ د (x_1, y_1, z_1) په څیر ټاکو. په نوبتي څوابونو سره د ورته مستویګانو ترسیمو ته راکوي.

۴,۴,۱۰ ديو خط عمومي معادله

کله چې په فضاء کې دوه مستوياني قطع کړي يومستقيم خط ښيي. که چېرې $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ددوه متقاطع مستويانومعادلې وي، دهغوی دهرې نقطې مختصات چې دواړو معادلې صدق کوي، په خط باندې يوه نقطه ده چې ددواړو مستويانو پواسطه ټاکل شويدي. په بل ډول ، په خط باندې د هرې نقطې مختصات دواړه معادلې صدق کوي. نو پدې ډول ددوه متقاطع مستوي ګانو معادلې ښايي چې د يوه خط د معادلوپه شان په پام کې ونيول شي.

د يو خط عمومي معادله ښايي د تناظر په شکل ديولومړي متحول چې x ورته وايي په له مېنځه وړلو سره تغير وکړي. اودارنګه يو مرتسمي مستوي له دوه نورومتحولينو څخه لاس ته راځي، اوپدې ډول د دويم متحول په له مېنځه وړلو، چې y ورته وايي، يو بل مرتسمي مستوي په x او z کې لاسته راځي. که چېرې لاس ته راغلې دواړه معادلې د z لپاره حل کړو ، د تناظر په شکل ښايي د z ددغو قيمتونودمساوي کولو پواسطه لاس ته راشي.

مثال: د $3x+2y+4z+5=0$ او $x-y+2z-4=0$ خط معادلې دتناظرپه شکل بدلې کړئ.

حل: په جلا جلا ډول ددواړو معادلو د حل کولو نه ــ لومړی د y په له مينځه وړلو، بيا د x په له مېنځه وړلو، مو نږ لاس ته راوړو :

$$z=\frac{3-5x}{8} \quad \text{او} \quad z=\frac{5y+17}{2}.$$

د z ددغو قيمتونوپه مساوي نيولو ، او د حدونو په بيا ترتيبولو ، مونږ لاس ته را وړو چې

$$\frac{-5x-3}{8}=\frac{5y+17}{2}=z$$

يا

$$\frac{x-\frac{3}{5}}{\frac{-8}{5}}=\frac{y+\frac{17}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{z-0}{1}$$

يعنې،

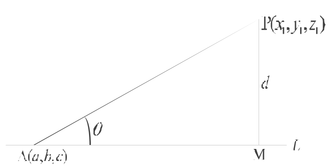
$$\frac{x-\frac{3}{5}}{-8}=\frac{y+\frac{17}{5}}{-2}=\frac{z-0}{5}$$

۵،۴،۱۰ له یو خط څخه د یوې نقطې واټن

له

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

یو خط څخه د $P(x_1,y_1,z_1)$ نقطې د عمودي واټن دټاکلو لپاره.



فرضو چې $d=|PM|$ راکړل شوي خط څخه د $P(x_1,y_1,z_1)$ نقطې عمودي واټن دی. نو $d=|PM|=|\vec{AP}|\sin\theta$ چېرته چې A(a, b, c) په خط باندې یوه نقطه ده او θ د $\overline{AP}$ او خط تر منځ د زاویې پراخوالی یا اندازه دی.

که چېرې $\underline{b}=[l,m,n,]$ د خط لوری لرونکی ویکتور وي نو.

$$d=|\vec{AP}|\sin\theta=\frac{|\vec{AP}|.|\underline{b}|.\sin\theta}{|\underline{b}|}=\frac{|\vec{AP}\times\underline{b}|}{|b|}$$

د ټولو خطونو لپاره $|b|\neq 0$ ، مونږ $d=\frac{|\vec{AP}\times\underline{b}|}{|b|}$ د فورمول په څېر لرو .

۶،۴،۱۰ حل شوي مثالونه

۱. مثال: وښایاست چې $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{1}$ او $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{1}$ مستقیم خطونه عمود دي.

حل: د خطونو لوری لرونکي نسبتونه $1, 2, 1$ او $1, -1, 1$ دي. او $(1)(1) + (2)(-1) + (1)(1) = 0$ نو دواړه خطونه عمود دي.

۲. مثال: د یومستقیم خط معادله لاس ته راوړئ چې د $(2,0,-2)$ له نقطې نه تیر اوپه مستقیم خطونو هر یوه باندې عمود وي. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ او $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

حل: د را کړل شویو خطونو لوری لرونکي نسبتونه $2, 2, 2$ او $3, -1, 2$ دي. که چیرې ℓ_1, m_1, n_1 د غوښتل شوي خط لوری لرونکي نسبتونه وي، نو د عمودیت د حالت پر بنسټ، مونږ لرو چې

$$2l_1 + 2m_1 + 2n_1 = 0$$

$$3l_1 - m_1 + 2n_1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l_1}{4+2} = \frac{m_1}{6-4} = \frac{n_1}{-2-6}$$

یا $\frac{l_1}{6} = \frac{m_1}{2} = \frac{n_1}{-8}$ یا $\frac{l_1}{3} = \frac{m_1}{1} = \frac{n_1}{-4}$.

$\therefore$ د غوښتل شوي خط معادلې چې د $(2, 0, -2)$ نقطې نه تیریږي

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-4}$$

دي.

۳. مثال: ثبوت کړئ چې د $4x + 4y - 5z - 12 = 0$ او $8x + 12y - 13z - 32 = 0$ مستوي ګانی سره قطع کوي او ددوی دتقاطع د خطونومعادلې د

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$$

په شان لیکلای شو.

حل: د دوو مستویانو د نارملونو لوری لرونکي نسبتونه $4, 4, -5$ او $8, 12, -13$ دي.

څرنګه چې دغه لوری لرونکي نسبتونه متناسب نه دي ، نو دواړه مستوي ګانی قطع کوي.د تقاطع په شکل دیو خط د معادلې د لاس ته راوړلولپاره مونږ $z=0$ ټاکو. نو مونږ لروچې $4x + 4y = 12$ او $8x + 12y = 32$ دکومو نه چې $x = 1$ او $y = 2$ لاس ته راځي. نو لدې امله $(1.2.0)$ په خط باندې یوه نقطه ده. په ورته ډول

د $x = 0$ په پام کې نیولو سره مونږ لرو چې $4y - 5z = 12$ او $12y - 13z = 32$ د کومونه چې

$y = \frac{1}{2}$ او $z = -2$ لاس ته راځي.

نو له دي کېله $\left(0,\frac{1}{2},-2\right)$ د خط یوه بله نقطه ده. په نتیجه کې د خط متناظری پامتناسبیې معادلې،

$$\frac{x-1}{o-1} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}-2} = \frac{z-0}{-2-0}$$

یا

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$$

دي.

۴. مثال: د خط معادلې لاس ته راوړئ چې د (1,2,3) نقطې څخه تېرېږي او د

$x - y + 2z - 5 = 0 = 3x + y + z + 6$ خط سره موازي وي.

حل: که چېرېې n_1, m_1, l_1 د غوښتل شوي خط لوری لرونکي نسبتونه وي، مونږ لرو چې

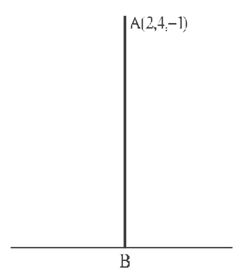
$3l_1 + m_1 + n_1 = 0$ او $l_1 - m_1 + 2n_1 = 0$ کوم چې $\frac{l_1}{-3} = \frac{m_1}{5} = \frac{n_1}{4}$ لاس ته راځي.

نو لدې امله د غوښتل شوي خط معادلې چې د (1,2,3) نقطې نه تېرېږي

$$\frac{X-1}{-3} = \frac{Y-2}{5} = \frac{Z-3}{4}$$

دی.

۵. مثال: د $(2,4,-1)$ له نقطې نه د $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{-9}$ په خط باندې دعمود معادلې لاس ته راوړئ.



حل: د $t = \frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{-9}$ خط ته t وایو.

فرضوو چې $B(-5+t,-3+4t,6-9t)$ په خط باندې یوه نقطه ده.

$$\vec{AB} = [-7+t,-7+4t,7-9t]$$

که چېرې B د $A(2,4,-1)$ له نقطې نه تر خطه پورې د عمود د لاندېنی څوکې نقطه وي

$$1(-7+t)+4(-7+4t)-9(7-9t)=0$$

کوم چې $t=1$ لاس ته راځي.

څرنګه چې $(-4,1,-3)$ د B نقطه ده او د عمود معادلې د $(2,4,-1)$ له نقطې څخه ترخطه پورې

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-4}{1-4}=\frac{z-1}{-3+1}$$

يا

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{2}$$

دي.

۶. **مثال:** معلوم کړئ چې لاندېني راکړل شوي جوړه خطونه يو له بل سره پرې (قطع) کوي يا نه، اوکه چېرې سره پرې کوي د پرېکړې شريکه نقطه يې لاس ته راوړئ.

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-7}{6} \qquad \text{او} \qquad \frac{x-6}{1}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z-1}{2}$$

حل: د معادلې پارمتريک شکل

$$x=t'-6, y=-3t'-5, z=2t'+1 \qquad \text{او} \qquad x=2t-3, y=-2t, z=6t-7$$

دی. که چېرې دواړه خطونه سره قطع کوي .

$$2t-3=t'-6$$

$$-2t=-3t'-5$$

او $6t+7=2t'+1$ کېدای شي چې ثابت وي.

د دوو لومړنيو معادلو د حل نه مونږ لاس ته راوړو چې $t=-\frac{7}{2}$ او $t=-4$ خود t او t' دغه قيمتونه په دريمه معادله کې صدق نه کوي. په پايله کې دوه خطونه سره نه قطع کوي.

۷. **مثال:** وښياست چې په يو مستقيم خط باندې د $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ د ريو نقطود واقع کېدلو لپاره لازمي شرط

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

دی.

د دريو مناسبو نقطو په پام کې نيولوسره، وښاياست چې پورتنی شرط کافي ندی.

حل: فرضوو چې دري واړه نقطې په يو مستقيم خط واقع (collinear) دي. نو

$$[x_1, y_1, z_1] = m[x_2, y_2, z_2] + n[x_3, y_3, z_3]$$

او

او ،

$$\begin{aligned} x_1 &= mx_2 + nx_3 \\ y_1 &= my_2 + ny_3 \\ z_1 &= mz_2 + nz_3 \end{aligned}$$

د n, m په منځه وړلو سره لاس ته راوړو چې

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

يا

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

اوس د $(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)$ دريو نقطو په پام کې نيولوسره. دوی په روښانه ډول په يو مستقيم خط واقع(collinear) ندي، خو

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

نو لدې امله د

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

شرط لازمي دی خو کافي ندی.

۴,۱۰ پوښتنې

۱. د خط معادلې لاس ته راوړئ چې د $(-3,1,4)$ او $(5,-1,6)$ له نقطو څخه تیرېږي.

۲. معلوم کړئ چې راکړل شوي جوړه خطونه په هر یوحالت کې قطع کوي یا نه؛ او که چېرې قطع کوي شریکه نقطه یې لاس ته راوړئ.

(i) , $x=p-1, y=2+p, z=-1-2p$

او $x=1+2q, y=-6+q, z=5-3q$

(ii) , $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{2}$

او $x=-1+2p, y=2+2p, z=5-3p$

۳. د $(-3,0,-2)$ له نقطې نه د $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$ په مستقیم خط باندې دعمود دبیخ د نقطې مختصات پیداکړې. همدارنګه د عمود اوږدوالی او معادلې لاس ته راوړئ.

۴. د مستقیم خط معادلې لاس ته راوړئ چې د $(0,-3,2)$ له نقطې نه تیر او د $(3,4,7)$ او $(2,7,5)$ نقطو د یوځای شوي مستقیم خط سره موازي وي.

۵. د $(1,6,3,)$ له نقطې څخه د $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ په مستقیم خط باندې د عمود معادلې لاس ته راوړئ. همدارنګه د عمود بیخ مختصات او اوږدوالی پیداکړئ.

۶. د $x+y-z+1=0=4x+y-2z+2$ خط دتناظرشکل معادلې لاس ته راوړئ او د هغه لوری ټرونکي کوساینونه پیداکړی.

۷. د مستقیم خط معادله لاس ته راوړې چې په $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3},\frac{x+2}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+3}{2}$ دواړو خطونو باندې عمود وي او د دوې د تقاطع له نقطې نه تیریږي.

۸. وښایاست چې د $x+2y-z-7=0=y+z-2x-6$ او $3x+6y-3z-8=0=2x-y-z$ خطونه موازي دی.

۹. وښایاست چې د $x+2y-1=0=2y-z-1$ او $x-y-1=0=x-2z-3$ خطونه عمود دي.

۱۰. له مبدأ نه د $x+2y+3z+4=0=2x+3y+4z+5$ په خط باندې عمود معادله لاس ته راوړی او همدارنګه دعمودد بیخ دنقطې مختصات پیداکړئ.

۱۱. د خط لوری لرونکي کوساینونه لاس ته راوړی چې د $z+2y-3=0$ او $x+3y-z+5=0$ معادلو پواسطه راکړ شوی وي اوهمدارنګه د مستقیم خط معادله لاس ته راوړئ چې د $(5,-3,2)$ نقطې نه تیر او له راکړل شوي خط سره موازي وي.

۱۲. د مستقیم خط معادله لاس ته راوړئ چې د $(3,4,5)$ نقطې نه تیر او د z محورپه قایمه زاویه قطع کوي.

۱۳. د $3x+2y+z-5=0=x+y-2z-3$ او $2x-y-z=0=7x+10y-8z$ خطونو ترمنځ زاویه لاس ته راوړئ.

۱۴. ثبوت کړئ چې د خط متناظری معادلې چې د $2x-5y+z-1=0$ او $x+y-2z+3=0$ دوه مستویانو د تقاطع په نقطه کې جوړوي

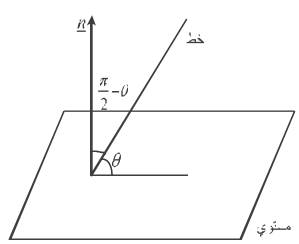
$$x=\frac{y-\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{z-\frac{14}{9}}{\frac{7}{9}}$$

دي.

یو خط او یو مستوي

۱,۵,۱۰ د یو خط او یو مستوي ترمېنځ زاویه

د یو خط اود یومستوي ترمېنځ زاویه د خط او په مستوي باندې ددې د تصویر (مرتسم) ترمېنځ زاویه ده دا په څرګند ډول د یوخط او د مستوي د نارمل تر مېنځ زاویې لپاره بشپړوونکې ده.



۲,۵,۱۰. د $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ خط او د $ax+by+cz+d=0$ مستوي ترمېنځ د زاويي ټاکل

ځرنګه چې د راکړل شوي مستوي د نارمل اود راکړل شوي خط لوری لرونکي کوساينونه په ترتيب سره a,b,c او l,m,n ته متناسب وي، مونږ لرو چې

$$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$$

چېرې چې θ غوښتل شوې زاويه ده.

مستقيم خط له مستوي سره موازي دی، که چېرې $\theta=0$ وي ، يعنې ؛

$$al+bm+cn=0$$

کوم چې لدې حقيقت ځخه هم ځرګنديږي که چېرې يو خط يو مستوي ته موازي وي دا دهغه مستوي په نارمل عمود دی .

يادونه: خط به مستوي په يوه ځانګړې نقطه کې قطع کړي که چېرې $al+bm+cn=0$

۳,۵,۱۰ په يومستوي کې د يو خط د واقع کيدلو لپاره شرطونه

د $\alpha: ax+by+cz+d=0$ په مستوي کې د $L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ خط دواقع کېدلودشرطونودلاس ته راوړلو لپاره ، خط به په راکړل شوی مستوي کې واقع وي که چېرې يکې يو(يواځې اوتنها يواځې)، د

$$lr+x_1, mr+y_1, nr+z_1$$

خط دهری نقطې مختصات د مستوي معادله د r د ټولو قيمتونو لپاره صدق کړي نوپدی ډول $r(al+bm+cn)+(ax_1+by_1+cz_1+d)=0$ يو عينيت دی.

لدې نه لاس ته راځي چې

$$al+bm+cn=0$$
$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$

کوم چې غوښتل شوي دوه شرطونه دي.

دا شرطونه هندسي حقيقتونوته لاربنوونه کوي چې يو خط به په يو راکړل شوي مستوي کې واقع وي، که چېرې:

i. دمستوي نارمل په خط عمود وي.

ii.	د خط هره یوه نقطه په مستوي کې واقع وي.

پایله: د یو مستوي معادله د $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ خط په لرلو

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

ده چېرته چې $Al+Bm-Cn=0$.

یادونه: مونږ پورتني پایلې په لاندې ډول لنډیز (خلاصه) کوو:

۱: د L مستقیم خط د α مستوي په یوه نقطه کې قطع کوي که چېرې یواځې او تنها یواځې

$$al+bm+cn\neq 0$$

۲: د L مستقیم خط د α په مستوي کې واقع دی که چېرې یواځې او تنها یواځې

$$ax_1-by_1+cz_1+d=0 \text{ او } al-bm+cn=0$$

۳: د L مستقیم خط د α مستوي سره موازي دي که چېرې یواځې او تنها یواځې

$$ax_1-by_1+cz_1+d\neq 0 \text{ او } al-bm+cn=0$$

۴,۵,۱۰ هم سطحه یا هم مخیزه خطونه

دوه هم سطحه خطونه یا په یوه ټاکلې نقطه کې قطع کوي یا موازي دي. د وروستي حالت لپاره ویل کېږي چې دوي په لایتناهي کې سره قطع کوي نو پدې ډول دوه هم سطحه خطونه سره تل قطع کوي.

دوه غیر هم سطحه یامترادف (Skew) خطونه هیڅ کله سره نه قطع کوي نه موازي دي.

۵,۵,۱۰ د خطونو د هم سطحه کیدلولپاره شرط: د

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(i)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(ii)$$

دوه مستقیم خطونه چې سره پرې کوي یعني هم سطحه وي د لاس ته راوړنې شرط دادی چې: که چېرې خطونه سره پرې(قطع) کوي، دوی باید په یوه مستوي کې واقع وي. دیو مستوي معادله به د (i) خط لرونکې وي که چېرې

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

چېرته چې

$$al_1 + bm_1 + cn_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

دی.

(1)مستوي به د (ii) خط لرونکي وي که چېرې د (x_2, y_2, z_2) نقطه په ده کې پرته وي او خط له ده سره موازي وي.

بدی

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \qquad \ldots(3)$$

او

$$al_2 + bm_2 + cn_2 = 0 \qquad \ldots(4)$$

د (2),(3) او (4) رابطو نه د c, b, a په له منځه وړلو سره مونږ لاس ته راوړو چې

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \ldots(A)$$

کوم چې د خطونو د قطع کیدلو لپاره غوښتل شوی شرط دی.

که چېرې د (A) شرط صحت وي مستوي معادله به د دوه مستقیمو خطونو درلودونکي وي او د (1),(2) او (4) په رابطو کې د a, b, c په له منځه وړلو سره لاس ته راځي یعني.

$$\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} = 0$$

۶,۵,۱۰ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** وښایاست چې د $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ خط د $2x + y - 2z = 3$ مستوي سره موازي دی.

حل: دراکړ شوي خط لوری لرونکي نسبتونه $5,4,3$ اودمستوي د نارمل لوری لرونکي نسبتونه $2,1,2-$ دي. څرنګه چې $3(2) + 4(1) + 5(-2) = 0$ دمستوي نارمل پر راکړل شوي خط باندی عمود دی کوم چې د خط موازي توب له راکړل شوی مستوي سره په ګوتو کوي.

۲. مثال: وښایاست چې $\frac{x+10}{1}=\frac{8-y}{2}=\frac{z}{1}$ خط د $x+2y+3z-6=0$ په مستوي کې واقع دی.

حل: د خط معادلې په $\frac{x+10}{1}=\frac{8-y}{2}=\frac{z}{1}=t$ سره ښودل شویدي دي.

په خط باندې یوه نقطه $(-10+t,8-2t,t)$ ده. څرنګه چې د t د ټولو قیمتونو لپاره $1(-10+t)+2(8-2t)+3t-6=0$. خط د $x+2y+3z-6=0$ په مستوي کې واقع دي.

۳. مثال: ثبوت کړی چې د $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+10}{8}$ او $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+3}{7}$ مستقیم خطونه سره قطع کوي.
همدارنګه د دوی د تقاطع نقطه او مستوي چې له دوی څخه تیرېږي لاس ته راوړئ.

حل: دواړه خطونه $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+10}{8}=p$ او $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+1}{7}=q$ دي.

په هریو خط یوه نقطه $(1+2p,-1-3p,-10+8p)$ او $(4+q,-3-4q,-1+7q)$ ده. که چېرې دوه خطونه سره قطع کړي، د $1+2p=4+q$ ، $-1-3p=-3-4q$ او $-10+8p=-1+7q$ معادلې باید ثابتې واوسی. دلومړنیو دوه معادلو د حل نه مونږ $q=1,p=2$ ، لاس ته راوړو کوم چې دریمه معادله صدق کوي. نو لدې کبله دوه خطونه سره قطع کوي او د دوی د تقاطع نقطه $(5,-7,6)$ده.

اوس مستوي چې له دواړو خطونو څخه تیرېږي د $(5,-7,6)$ نقطې درلودونکی دی او دده نارمل په دواړو خطونو عمود دی.

نولدې کبله د مستوي معادله چې له راکړل شوو خطونو څخه تیرېږي $a(x-5)+b(y+7)+c(z-6)=0$ ده چېرته چې $2a-3b+8c=0$ او $a-4b+7c=0$.

د دغو معادلو نه د c,b,a په له منځه وړلو سره مونږ د مستوي معادله پدې ډول

$$\begin{bmatrix} x-5 & y+7 & z-6 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}=0$$

لاس ته راوړو. یعنې ،

$$(x-5)(-21+32)-(y+7)(14-8)+(z-6)(-8+3)=0$$

یا

$$11x-6y-5z-67=0$$

۴. مثال: د مستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $(3,-2,5)$ له نقطې څخه تیر اود $x=2+3t$, $y=1-6t$, $z=2+2t$ په خط باندې عمود وي.

حل: د راکړل شوي خط لوری لرونکي نسبتونه $3,-6,2$ دي. څرنګه چې مستوي په راکړل شوي خط عمود دی ، نو مستوي ته د نارمل لوری لرونکي نسبتونه $3,-6,2$ دي.

دیو مستوي معادله چې په خط باندی عمود دي $3x-6y+2z+d=0$ ده. څرنګه چې دا د $(3,-2,5)$ له نقطې نه تېرېږي مونږ لروچې $9+12+10+d=0$ يعنې $d=-31$،

څکه نو د غوښتل شوی مستوي معادله $3x-6y+2z-31=0$ ده

۵. مثال: دمستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $(2,-3,1)$ له نقطې نه تېر او د $x-3=2y=3z-1$ خط درلودونکی وي.

حل: $x-2y-3=0=2y-3z+1$ د خط معادلې دي.

کوم مستوي چې لدې خط څخه تېرېږي $x-2y-3+k(2y-3z+1)=0$ دی . څرنګه چې داد $(2,-3,1)$ له نقطې نه تېرېږي نو

$2+6-3+k(-6-3+1)=0$ ، يعنې، $k=\dfrac{5}{8}$ ، نو لدې امله دغوښتل شوی مستوي معادله $x-2y-3+\dfrac{5}{8}(2y-3z+1)=0$ ده، يعنې، $8x-6y-15z-19=0$

٦. مثال: دهغه مستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $(2,-1,1)$ او $(1,2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $2x=-3y=6z$ له مستقيم خط سره موازي وي.

حل: مستوي چې د $(2,-1,1)$ له نقطې نه تېرېږي

$$a(x-2)+b(y+1)+c(z-1)=0 \qquad \ldots(1)$$

ده . همدا شانتې چې د $(1,2,-1)$ له نقطې نه تېرېږي

$$-a+3b-2c=0 \qquad \ldots(2)$$

څنګه چې مستوي د $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ له خط سره موازي دي.

$$3a-2b+c=0 \qquad \ldots(3)$$

د (1)،(2) او (3) رابطو څخه د a,b,c په له منځه وړلو سره، مونږ لاس ته راوړوچې،

$$\begin{bmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

یعني،

$$(x-2)(3-4)-(y+1)(-1+6)+(z-1)(2-9)=0$$

یا،
$$-x+2-5y-5-7z+7=0$$

یا ،
$$x+5y+7z-4=0$$

کومه چې غوښتل شوې معادله ده .

۷. مثال: د $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ او د $a_3x+b_3z+c_3z+d_3=0=a_4x+b_4y+c_4z+d_4$ مستقیمو خطونو په یوه سطحه کې دشتون(Coplanar) شرط لاس ته راوړئ.

حل: که چېرې خطونه په یوه سطحه کې وي، دوی په کومه نقطه کې پرې کوي په اصطلاح (x_1, y_1, z_1)، کومه چې د

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=0$$
$$a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2=0$$
$$a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0$$

او

$$a_4x_1+b_4y_1+c_4z_1+d_4=0$$

په څلوروارو راکړل شوومستوي ګانوکې واقع ده. په دغو معادلو کې د z_1, y_1, x_1 په له منځه وړلو سره مونږ لاس ته راوړو چې

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = 0$$

کوم چې غوښتل شوی شرط دی.

په هغه حالت کې، چې دا شرط صدق کوي، د تقاطع دنقطې مختصات کولی شو چې په یووخت کې د دغو څلورو معادلو نه د دریو معادلو په حل کولولاس ته راوړو.

۵,۱۰ پوښتنې

۱. وښایاست چې د $\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{3}$ مستقیم خط د $4x+8y+12z+19=0$ په مستوي باندې عمود دی.

۲. ثبوت کړی چې د $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ او $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ مستقیم خطونه سره هم سطحه (هم صفحه) دي.

۳. ثبوت کړئ چې $\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ او $x=1+t,\ y=1,\ z=1-t$ مستقیم خطونه په یوه مستوي کې واقع دی اوددغه مستوي معادله لاس ته راوړی.

۴. د مستوي معادله لاس ته راوړئ ، چې د $x+2z=4$, $y-z=8$ له خطونو نه تیر او د $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-2}{4}$ له خط سره موازي وي.

۵. دهغو مستویانو معادلې لاس ته راوړئ چې د $(4,-5,3)$، $(2,3,1)$ له نقطونه تېرېږي او د قایمو مختصاتو له محورو سره موازي وي.

۶. وښایاست دلته داسې مستوي شتون نلري کوم چې د $x=2t-3, y=4t-2, z=t-3$ له مستقیم خط نه تیراو د $2x-y+z=o$ له مستوي سره موازي وي.

۷. ثبوت کړئ چې د $8x+12y-13z-32=0=4x+4y-5z-12$ او $2x-z-4=0=3x-2y+2$ مستقیم خطونه سره موازي دي. دمستوي معادله لاس ته راوړئ چې له دوی څخه تېرېږي.

۸. د مستویګانو معادلې لاس ته راوړئ چې د $2x-y+3z-5=0=x+y-z$ له مستقیم خط څخه تېرېږي او کوم چې د مختصاتو پر مستویګانوباندې عمود وي؟

۹. د مستوي معادله په لاس راوړئ چې د $x=2t, y=3t, z=4t$ خط لرونکې او د $x+y+z=0$ او $2y-z=0$ مستویانې قطع کوي.

۱۰. وښایاست چې د $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-5}$ مستقیم خط اود $3x+4y-2z=22$ مستوي دپرېکړې (تقاطع) یکې یوه نقطه لري. د پرېکړې نقطه لاس ته راوړئ.

۱۱. نقطې وټاکئ، چېرې چې هره یوه د $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{-1}$ مستقیم خط اود $x+y+z=3$ مستوي شریکې دي.

۱۲. وښایاست چې $x+2y-5z+9=0=3x-y+2z-5$ او $2x+3y-z-3=0=4x-5y+z+3$ خطونه په یوه مستوي کې واقع دي.

۱۳. دیو مستقیم خط معادله لاس ته راو ړئ چې د $(5,-3,2)$ نقطې نه تیریږي او د xy پرمستوي عمود وي.

۱۴. یوخط ئـوری لرونکـي کوسـاینونه چـې $-5,7,2$ تـه متناسـب دي، د $\frac{z+2}{1}=\frac{y-7}{-1}=\frac{x-5}{3}$ او $\frac{z-6}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{x+3}{-3}$ خطونود پرېکړې ترنقطې پورې رسمیږي. دپرېکړې دنقطو مختصات اوپه ده باندې دپرېکړ شوي اوږدوالی لاس ته راوړئ.

۱۵. د مستوي معادله لاس ته راوړئ چې د $x-3=2y=3z-1$ خط درلودونکی وي او د $(2,-3,1)$ له نقطې نه مستقیماً تیریږي.

۱۶. د $(-1,-5,-10)$ نقطې واټن د $\frac{z-2}{12}=\frac{y+1}{4}=\frac{x-2}{3}$ خط او د $x-y+z=5$ مستوي د پرېکړې نقطې څخه لاس ته راوړئ.

د دوه مستقیمو خطونو ترمنځ تر ټولو لنډ واټن

۱,۶,۱۰ تعریف

دوه مستقیم خطونه کوم چې نه یوبل پرې کوي اونه سره موازي وي غیرهم صفحه یا متنافر(Skew) خطونه وایي.

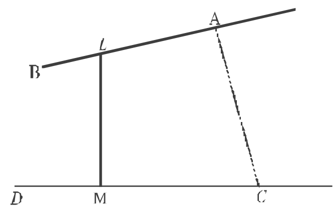
دوه هم مخیزه (په یومستوي کې) خطونه یا سره په یوه ټاکلې نقطه کې پرې کوي یا دوی موازي دي. که چېرې خطونه یوبل پرې کوي ددوي ترمنځ ترټولولنډواټن صفردی. که چېرې دوی سره موازي وي، ددوي ترمنځ ترټولولنډواټن پریو مستقیم خط باندې دهرې یوې نقطې نه تربل مستقیم خط پورې واټن دی.

ددوه غیرهم مخیزه خطونوترمنځ ترټولو لنډواټن باندې مخکې بحث وشو، مونږ دخلاصې درې بعدیزې هندسې څخه لاندې پایلې بیانوو.

که چېرې دوه مستقیم خطونه سره متنافریا یساري (Skew line) وي، نو

(I) دوي په موازي مستویانوکی واقع دي،
(II) یواځې او تنها یواځې یومستقیم خط پردوی دواړوباندې عمود دي.
(III) په خطونوباندې ددغه ګډعمود پرېکړه ددوی ترمنځ تر ټولو لنډواټن دی.
(IV) دخطونوترمنځ ترټولولنډواټن اوږدوالی دخطونودهرو دوو نقطو دیوځای شوي خط دترټولولنډواټن تصویر(مرتسم) دی.

۲,۶,۱۰ ددوه مستقیمو خطونو ترمېنځ د ترټولو لنډ واټن اوږدوالی او د خط معادلولاس ته راوړل



که چېرې CD, AB دوه راکړل شوي مستقیم خطونه وي او LM خط دی کوم چې دوی دواړه په قایمې زاویې سره په L او M کې قطع کوي، نو LM د راکړل شووخطونو ترمېنځ ترټولولنډ واټن خط دی اود LM واټن یې اوږدوالی دی. فرض کړئ چې

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad \dots(i)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad \dots(ii)$$

دراکړل شویوخطونو معادلې دي اود LM ترټولو لنډواټن د

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \qquad \dots(iii)$$

خط په اوږدوکې پروت دی.

(iii) خط په (i) او (ii) دواړو خطونو عمود دی. نولدې امله مونږ لرو چې

$$ll_1+mm_1+nn_1=0$$
$$ll_2+mm_2+nn_2=0$$

یا

$$\frac{l}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{m}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{n}{l_1m_2-l_2m_1}=\frac{1}{\sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

$$\therefore \quad l=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{\sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}}, \boldsymbol{m}=\frac{n_1l_2-n_2l_1}{\sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}}, \boldsymbol{n}=\frac{l_1m_2-l_2m_1}{\sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}} \qquad \dots(iv)$$

دلنډ واټن خط په دواړو خطونوعمود دی. نولدې امله ترټولو لنډ واټن اوږدوالی (i) او(ii) راکړشووخطونوپه هریوه باندې دهرودوونښلول شوونقطو د لنډ واټن دخط تصویر(projection) دی.باندی چې د n,m,l لوری لرونکو کوساینونه په لرلوخط باندې د (x_1,y_1,z_1) او (x_2,y_2,z_2) دیوځای کېدو تصویر په پام کې نیولو سره، مونږپوهیږوچې ترټولو لنډواټن

$$=(x_2.x_1)l-(y_2-y_1)m+(z_2-z_1)n$$

سره مساوی دی چېرته چي د n,m,l قیمتونه لرودا په (iv) معادلي کي راکړل شویدی. دلنډ واټن خط دمعادلي دټاکلو لپاره، مونږ څرګند وو چي دا د دواړو راکړل شوو خطونو سره په یومستوي کي واقع دي. د مستوي معادله چي د (i) او (iii) هم مستوي خطونو درلودونکی وي.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \qquad ...(v)$$

ده، او د مستوي معادله چي د (ii) او (iii) هم مستوي خطونو درلودونکی وي

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \qquad ...(vi)$$

ده. پدی ډول (v) او(vi) ترټولو لنډ واټن خط دوه معادلي دي، چېرته چي n,m,l په (iv) رابطه کي راکړل شوي دي.

یادونه: ترټولولنډواټن دټاکلونور میتودونه په حل شوومثالونوکي شرح شوي دي.

۳,۶,۱۰ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $x+a=2y=-12z$ او $x=y+2a=6z-6a$ خطونو ترمېنځ تر ټولو لنډ واټن لاس ته راوړئ.

حل: د دوه مستقیم خطونو معادلي په لاندي ډول لیکلی شو

$$\frac{x+a}{12}=\frac{y}{6}=\frac{z}{-1} \qquad ...(1)$$

او

$$x-y-2a=0=x-6+6a \qquad ...(2)$$

یو مستوي چي له (2) خط نه تېرېږي:

$$x-y-2a+k(x-6z+6a)=0$$

یا

$$(1+k)x-y-6kz-2a+6ak=0$$

که چېر ته دا له (1) خط سره موازي وي،

$$12(1-k)-6(-1)+(-1)(-6k)=0$$

یعنی،

$$k=-\frac{1}{3}$$

لدی امله دمستوي معادله چې له (2) خط نه تېرېږي او له (1) خط سره موازي وي:

$$x-y-2a-\frac{1}{3}(x-6z+6a)=0$$

یعني،

$$2x-3y+6z-12a=0 \qquad \ldots(3)$$

ده، په (1)مستقیم خط باندې یوه نقطه $(-a,0,0)$ده.

له (3) مستوي څخه د $(-a,0,0)$ واټن = د دووخطونوترمینځ ترټولو لنډ واټن:

$$=\frac{\left|2(-a)-3.0+6.0-12a\right|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{\pm 4a}{7}=2a$$

۲. مثال: دهغو نقطومختصات لاس ته راوړی چېرته چې د $\frac{x-23}{-6}=\frac{y-19}{-4}=\frac{z-25}{3}$ او $\frac{x-12}{-6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-5}{2}$ خطونو ترمینځ خورا لنډ واټن خط دوی قطع کوي. سره په داخل کې مخامخ کیږي.

حل: فرضو چې p ، Q نقطې دي چېرته چې دلنډ واټن خط دواړه خطونه قطع کوي. p او Q په دواړو خطونو باندې دې ، فرض وو چې p په $(23-6P, 19-4P, 25+3P)$، او Q په$(12-9q,1+4q,5+2q)$ ، په هرخط باندې یوه نقطه ده.

$$\vec{PQ}=[-9q+6p-11,\ 4q+4p-18,\ 2q-3p-20]$$

څرنګه چې$\vec{PQ}$ دواړو خطونوته عمود دی نو.

$$-6(-9q+6p-11,)-4(4q+4p-18)+3(2q-3p-20)=0$$

او

$$-9(-9q+6p-11)+4(4q+4p-18)+2(2q-3p-20)=0$$

یا $44q-61p+78=0$ او $101q-44p-13=0$

د دواړومعادلو په حل کولو مونږ $p=2$ او $q=1$ لاس ته راوړو .

په پایله کې $p(11,11,31)$ او $Q(3,5,7)$ دوه نقطې دي.

۳. مثال: $\frac{X-1}{2}=\frac{Y-2}{3}=\frac{Z-3}{4}$ او $\frac{X-2}{3}=\frac{Y-3}{4}=\frac{Z-4}{5}$ دوه خطونه راکړل شوي دي دهغو نقطو مختصات لاس ته راوړئ چېرې چې ګډ (شریک) عمود دغه دواړه خطونه سره پرې کوي. همدارنګه دګډ عمود اوږوالی او معادله لاس ته راوړئ.

حل: فرض وو چې $P(1+2P,2+3P,3+4P)$ په لومړي خط باندې یوه نقطه ده، او $Q(2+3q,3+4q,4+5q)$ په دویم خط باندې یوه نقطه ده. د PQ خط لوری لرونکي نسبتونه له $3q-2p+1, 4q-3p+1, 5q-4p+1$ دی.

که چېرې $\vec{PQ}$ دواړو خطونوته.

$$2(3q-2p+1)+3(4q-3p+1)+4(5q-4p+1)=0$$

او

$$3(3q-2p+1)+4(4q-3p+1)+5(5q-4p+1)=0$$

یا

$$38q-29p+9=0 \quad \text{او} \quad 50q-38p+12=0$$

عمود وي. د دواړو معادلو له حل کولو نه مونږ $p=-1$ او $q=-1$ ،لاس ته راوړو.

د p او q ددغو قیمتونو لپاره د p مختصات $(-1,-1,-1)$ او د Q مختصات $(-1,-1,-1)$ دي.

لدې امله دواړه خطونه په $(-1,-1,-1)$ نقطه کی قطع کوي.

نولدې کبله ترټولو لنډ واټن، یعني دګډعمود اوږدوالی صفر دی. او پدی برخه کې د خطونو په مستوي کې کوم ګډ عمود شتون نلري.

په هر صورت مونږ کولای شو چې د یو خط معادله لاس ته راوړو چې دواړوخطونو ته چې د $(-1,-1,-1)$ شریکی نقطې نه تېرېږي عمود وي.

که چېرې l,m,n ددغه خط لوری لرونکي نسبتونه وي، نو

$$2l-3m+4n=0 \quad \text{او} \quad 3l+4m+5n=0$$

$$\frac{l}{1}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{1}$$

نو لدې کبله د خط معادلې $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ ، دي.

۴. **مثال:** د $5x-y-z=0=x-2y+z-3$ او $7x-4y-2z=x-y-z-3$ خطونو ترمېنځ د لنډ واټن خط اوږدوالی او معادلې لاس ته راوړئ.

حل: لومړی مونږ معادلې متناسب حالت ته تبديلوو. نو مونږ به د دواړو خطونو معادلې لکه د $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$ او $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$ په ډول ولرو.

که چېرته n,m,l دلنډ واټن دخط لوری لرونکي نسبتونه وي، مونږلرو چې $l+2m+3n=0$ او $2l+3m+n=0$ يعنې،

$$\frac{l}{7}=\frac{m}{-5}=\frac{n}{1}=\frac{1}{\sqrt{75}}$$

$$l=\frac{7}{\sqrt{75}},m=\frac{-5}{\sqrt{75}},n=\frac{1}{\sqrt{75}}$$

نو لدې امله د لنډ واټن اوږدوالی $l(x_2-x_1)+m(y_2-y_1)+n(z_2-z_1)$

$$=\frac{7}{\sqrt{75}}(0-0)-\frac{5}{\sqrt{75}}(-1-1)+\frac{1}{\sqrt{75}}(2+1)=\frac{10}{\sqrt{75}}+\frac{3}{\sqrt{75}}=\frac{13}{\sqrt{75}}$$

دی او

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

دلنډ واټن دخط معادلې دي. يعني، $17x+20y-2z-39=0=8x+5y-31z+67$.

5. مثال: د $A(3,2,-4)$ او $B(1,6,-6)$ نقطو نښلول شوی مستقيم خط او د $C(-1,1,-2)$ او $D(-3,1,-6)$ نقطو نښلول شوی مستقيم خط ترمينځ لنډ واټن پيداکړئ. دلنډ واټن د خط معادلې او د هغې نقطې مختصات چيرې چې دا AB او CD قطع کوي.

حل: د A او B دنقطو نه تيرشوی خط معادلې

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z+4}{-6-4}$$

يا

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+4}{-2}=p \qquad ...(1)$$

دي. او د C او D د نقطو نښلول شوي خط معادلې

$$\frac{x+1}{-3+1}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z+2}{-5+2}$$

یا

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-4}=q \qquad \ldots(2)$$

دي. فرض کړئ چې P او Q د شریک عمود بیخونه (پايې) دي د P د نقطې مختصات $(3-2P, 2+4P, -4-2P)$، او د هغو د Q دنقطې مختصات $(-1-2q, 1, -2-4q)$ دي.

$$\vec{PQ}=[-2q+2p-4, -4p-1, -4q+2p+2]$$

ددې دپاره چې $\vec{PQ}$ (1) او (2) دواړو ته عمود وي نو

$$-2(-2q+2p-4)+4(-4p-1)-2(-4q+2p+2)=0$$

او

$$-2(-2q+2p-4)+0(-4p-1)-4(-4q+2p+2)=0$$

یا $12q-24p=0$ او $20q-12p=0$.

ددغومعادلو دحل کولونه مونږ لاس ته راوړو چې $p=0$, $q=0$

د p نقطه $(3,2,-4)$ ده او د Q نقطه $(-1,1,-2)$ ده او لنډ واټن

$$=|PQ|=\sqrt{(-1-3)^2+(1-2)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{21}$$

دی. او د PQ دخط معادلې $\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z+4}{-2+4}$ یا $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$ دي.

۶,۱۰ پوښتنې

۱. د $\frac{z-10}{7}=\frac{y+9}{-16}=\frac{x-8}{3}$ او $\frac{z-5}{-5}=\frac{y-29}{8}=\frac{x-15}{3}$ مستقیمو خطونو تر مینځ لنډ واټن د خط اوږدوالي او معادلې لاس ته راوړئ.

۲. د Z د محور او د $ax+by+cz+d=0=a'x+b'y+c'z+d'$ خط ترمینځ لنډ واټن پیدا کړئ.

۳. د $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ او $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ مستقیمو خطونو تر منځ لنډ واټن پیدا کړی.
همدارنګه دمستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ کوم چې په دواړو راکړل شویومستقیمو خطونو باندې عمود دی.

۴. د $\frac{x-3}{2}=\frac{y+15}{-7}=\frac{z-9}{5}$ او $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-9}{-3}$ – مستقیمو خطونو تر منځ دلنډ واټن د خط
اوږدوالي اومعادلې پیدا کړئ.

۵. د $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ او $\frac{x+1}{7}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ مستقیمو خطونو ترمنځ لنډ واټن پیداکړئ،
مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ کوم چې په دواړو راکړل شویو مستقیمو خطونو باندې عمود دي او همدارنګه
د راکړل شویو مستقیمو خطونو سره دهغه د پرېکړې نقطه وټاکئ.

۶. د $\frac{z}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{x-3}{-4}$ او $\frac{z-7}{1}=\frac{y}{1}=\frac{x+2}{-4}$ مستقیمو خطونو ترمنځ لنډ واټن د خط اوږدوالی او
معادلې لاس ته راوړئ.

۷. د $(-3,7,-13)$ او $(-6,1,-10)$ نقطو په نښلول شوي خط باندې د نقطې مختصات پیدا کړئ کومه چې د
$2x-y-3z+32=0$ او $3x+2y-15z-8=0$ مستویانو د پرېکړې نقطې ته خورا نژدې ده.

۸. د

$$6x-8y+3z+13=0=x+2y+z-3$$

$$3x-9y+5z=0=x+y-z$$

مستقیمو خطونو دګډ عمود اوږدوالی او معادلې لاس ته راوړئ.

۱۰ بیلابیلی پوښتنې

۱. هغه نسبتونه لاس ته راوړئ کوم چې د $(3,2,1,)$ او $(1,3,2,)$ نقطو دیوځای کېدو نه لاس ته راغلی خط د یوې سطحې پواسطه چې د $3x^2 - 72y^2 + 128z^2 = 3$ معادلې پواسطه ښودل شویده ویشل کیږي.

۲. ثبوت کړئ که چېرې دیوڅلورګوټیز (څلورسطحی،تیتراهیدران) دوه جوړې متقابلې ضلعې عمود وي، نو دریمه جوړه هم عمود ده.

3. دیوې نقطې دهندسي محل معادله دارنګه لاس ته راوړئ چې دهغې واټن له $2x - y + 3z + 5 = 0$ مستوي نه تل دهغې د واټن له $x + 2y - 3z - 4 = 0$ مستوي نه دوه برابره وي.

۴. د P_1, P_2, P_3 نقطوپه یو خط باندی د واقع کېدلو (Collinear) لپاره اړین (لازمی او کافي) شرطونه ښیي چې پدی برخه کې باید د k_1, k_2, k_3 سکالري قیمتونه موجود وي همداراز $(k_1 + k_2 + k_3 = 0)$ د $k_1 \bar{V}_1 + k_2 \bar{V}_2 + k_3 \bar{V}_3 = 0$ چېرته چې $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ په ترتیب سره د $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$ ویکتورونه دي.

۵. وښایاست چې د $(3,-4,5)$ نقطې د واټن د $2x + 5y - 6z = 16$ له مستوي څخه چې د $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ خط سره موازي دی $\frac{60}{7}$ دی.

۶. یوبدلیدونکې(متحول) مستوي چې له مبدأ څخه د p ثابت واټن لري اومحورونه د A, B, C په نقطو کې قطع کوي، وښاياست چې

(i) د ABC مثلث دمرکزي نقطې هندسي محل $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 9P^{-2}$ دی

(ii) د $OABC$ دڅلور سطحي جسم د مرکزي نقطې هندسي محل $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = 16P^{-2}$ دې.

۷. وښایاست چې د څلور سطحي جسم (تیترا هیدران Tetrahedron) ددوو متقابلو څنډو(ضلعو) ترمېنځ لنډ واټن چې د $y + z = 0, z + x = 0, x + y = 0$ او $x + y + z = a$ مستویانو پواسطه جوړ شوی دی $\frac{2a}{\sqrt{6}}$ دی، او دلنډ واټن دری مستقیم خطونه $(-a,-a,-a)$ په نقطه کې قطع کوي.

۸. ثبوت کړئ څلورسطحي جسم چې د مختصاتو د مستو یانو او د $xyz = c^3$ سطحې ته د یو مماس مستوي پواسطه جوړ شوی دی ثابت حجم لري.

یوولسم څپرکی
درې بعدیزې هندسې II برخه
(دویمه درجه سطحې)

۱۱. ۱. ۱ سریزه

په مستوي کې د $f(x، y) = 0$ یوه معادله یو منحني ښيي، په داسې حال کې چې په درې بعدي فضا کې د $f(x، y، z) = 0$ یوه ساده معادله یوه سطحه ښيي. په ځانګړي ډول د $ax + by + cz + d = 0$ خطي معادله یوه مستوي سطحه یا په ساده ډول یومستوي ښيي. په دوه بعدیزه هندسه کې د $ax^2 - bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ دویمې درجې معادلې ګراف په x او y کې مخروطي برخه (conic section) ده. په درې بعدیزه هندسه کې د $ax^2 + by^2 + cz^2 - dxy + exz - fyz - gx + hy - iz - f = 0$ دویمې درجې معادلې ګراف ته په x، y او z کې یوه دویمه درجه سطحه (quadric surface) یا سطحه (quadric) وایي. د دې معادلې مختلف شکلونه مختلفې سطحې لکه: کره، بیضوي، مخروط او داسې نور ښيي.

په دوه بعدیزه سطحو کې دیو منحني عمومي شکل کېدای شي چې د نقطو په نخشه کولو(په رسموولو) سره لاسته راشي. په هر حال، د درې بعدیزه سطحو لپاره د نقطو نخشه کول (رسمول) په عمومي ډول دارنګه مرسته نه کوي ځکه چې د یوې سطحې د ناتمام تصویر د لاسته راوړلو لپاره ډېرو نقطو ته اړتیا وي. دا ښه ده چې د یوې سطحې د شکل دجوړېدو لپاره د ځینو سمو ټاکل شویو مستویانو سره د تقاطع منحني ګاني وکاروو. دیوې سطحې د رسمولو لپاره، مونږ به ددې ځانګړتیاوې لکه نخشه کول(طرحه) د پرېکړې نقطې او تناظریت ښه وڅېړو.

۱۱. ۲. ۱ نخشه کول یا دکرښو ایستل

د یو مستوي او یوې سطحې د پرېکړې منحني ته په مستوي کې د سطحې د کرښو ایستل یا نخشه کول وایي.

مونږ به د یوې سطحې نخشه(طرحه) د قایم مختصاتو په مستویانو کې یا په هغو مستویانو کې چې د قایم مختصاتو مستویانو سره موازي وي لاس ته راوړو. د یوې سطحې په معادله کې د $x = k$ په وضع کولو سره، د y او z د یوې برخې (ټوټې) معادله کې لاسته راځي. په ورته ډول د $y = p$ او $z = q$ مستویانو پواسطه به هم برخې لاس ته راوړو. نخشه کول یا دکرښو ایستل (Trace) د yz په مستوي کې، د zx په مستوي کې یا د xy په مستوي کې د سطحې په معادله کې د $x = 0$ ، $y = 0$ یا $z = 0$ په وضع کولو سره لاس ته راځي.

۱۱. ۲. ۲ د پرېکړې یا د تقاطع نقطې (Intercepts)

یوې نقطې ته چېرته چې د قایم مختصاتو محورونه یوه سطحه پرې کوي د پرېکړې نقطه وایي. د دې لپاره چې د یوې سطحې د پرېکړې نقطه د x په محور باندې لاس ته راوړو، مونږ د سطحې په معادله کې $y =$

$z = 0$ وضع کوو او معادله د x لپاره حل کوو. په ورته ډول مونږ کولای شو چې د y او z په محورونو باندې په ترتیب سره $Z = x = 0$ یا $y = x = 0$ په وضع کولو د پرېکړې نقطې لاس ته راوړو.

مثال: د $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 5z - 4 = 0$ سطحې د پرېکړې نقطې او نښې یا خاپې (traces) لاس ته راوړئ.

حل: د $y = z = 0$ په وضع کولو سره، مونږ لرو چې

$x^2 - 4 = 0$ یعنې، $x = \pm 2$ $\therefore$ $(\pm 2, 0, 0)$ د x په محور د پرېکړې نقطې دي.

د $x = z = 0$ په وضع کولو، مونږ $y^2 - 4 = 0$ لرو.

$\therefore$ $(0, \pm 2, 0)$ د y په محور د پرېکړې نقطې دي.

د $x = y = 0$ په وضع کولو، مونږ $z^2 + 5z - 4 = 0$ لاس ته راوړو.

$$\therefore \quad z = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$\therefore$ $(0, 0, \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2})$ د z په محور د پرېکړې نقطې دي.

د xy – په مستوي کې نخشه کول($z = 0$ په وضع کولو لاس ته راځي) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ دی.

په ورته ډول مونږ ګورو چې د zx - مستوي کې او yz - مستوي کې نښې یا اثرونه په ترتیب سره $x^2 + z^2 - 2xz + 5z - 4 = 0$ او $y^2 + z^2 + 5z - 4 = 0$ دي.

۱۱. ۲. ۳ تناظر (Symmetry)

P او P' دوه نقطو ته په ترتیب سره نظر یو خط یا یومستوي ته متناظر وایي که چېرې دا خط یا مستوي د PP' د خط په منځنۍ نقطه کې عمود وي. په بله وینا P' په هنداري کې د P تصویر یا انعکاس دی.

یو شکل ته نظر یو خط یا مستوي ته متناظر وایي که چېرې د شکل د هرې نقطې د هنداری تصویر هم په شکل کې واقع وي که چېرې خط یا مستوي د هنداري په شان په پام کې ونیول شي.

یوه سطحه نظر د x محور ته متناظره ده که چېرې یواځې او تنها یواځې دهغې معادله که چېرې مونږ y په $-y$ او z په $-z$ باندې عوض کړوتغیر ونکړي. ورته پایلې د y محور او z محور لپاره صدق کوي.

يوه سطحه نظر د yz مستوي ته متناظره ده كه چېرې يواځې اوتنها يواځې دهغې معادله كه چېرې مونږ د x پر ځای x – ځای پرځای كړو تبدیله نشي ، یعني ، معادله لا په x كي وي. ورته پایلې د zx مستوي او xy مستوي لپاره صدق کوي.

۴ . ۲ . ۱۱ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $x^2+4y^2+z^2-2xz+4xy-2x-4y+z+1=0$ سطحې دپرېكړې نقطې او نخشه كول يا اثرونه پیداکړئ.

حل: د x په محور پرېكړې نقطو لپاره په معادله كې $y = z = 0$ عوض كوو.

$x^2-2x+1=0$ یعني ، $(x-1)^2=0$ یعني ، $x=1$

∴ د x په محور د پرېكړې نقطه $(1،0،0)$ ده.

د y په محور پرېكړې نقطې لپاره، مونږ لرو چې

$4y^2-4y+1=0$ یعني ، $(2y-1)^2=0$ یعني ، $y=\frac{1}{2}$

∴ د y په محور د پرېكړې نقطه $(0,\frac{1}{2},0)$ ده.

د z په محور د پرېكړې نقطې لپاره، مونږ لرو چې

$z^2+z+1=0$ یعني ، $z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{3}$

يعني د z په محور د پرېكړې نقطه وجود نه لري يا سطحه د z محور نه پرې كوي.

yz په مستوي كې د نخشو (traces) لپاره مونږ په معادله كې $x = 0$ په پام كې نیسو.

∴ د yz – په مستوي كې نخشه يا نښه $4y^2+z^2-4y+z-1=0$ ده.

په xz او xy په مستویانوکې نخشه ويستل يا نښې په ترتیب سره په لاندې ډول دي.

$$x^2+z^2-2xz-2x+z+1=0$$

او

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=0$$

۲. مثال: د $2x^2-z^2+xy-8yz+y-z-2=0$ سطحې د پرېكړې نقطې د مختصاتو په محورونو باندې پیداکړئ.

حل: د x په محور د پرېكړې د نقطو لپاره په معادله كې $y = z = 0$ وضع كوو. نو مونږ لاس ته راوړو چې:

$2x^2-2=0$ یعني ، $x=-1,1$

∴ د x په محور د پرېکړې نقطې 1 ,1− یا $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$ دي.

د y په محور د پرېکړې د نقطو لپاره په معادله کې $x=z=0$ وضع کوو چې $y-2=0$ لاس ته راوړو. یعنې، (2) د y په محور د پرېکړې نقطه ده.

د z په محور د پرېکړې د نقطو لپاره، لرو چې

$-z^2-z-2=0$ یعني ، $z^2+z+2=0$

کوم چې موهومي جذرونه لري. لدې امله ویلی شو چې د z په محور د پرېکړې نقطې شتون نلري.

۳. مثال: د $z=4-x^2-y^2$ سطح وڅېړئ او بیایې انځور (رسم) کړئ.

حل:

(i) معادله په x او y کې برابره (پوشن) ده. لدې کبله سطحه د yz مستوي او xz مستوي په شاوخوا کې متناظره ده.

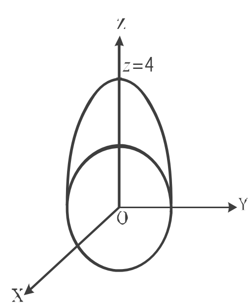
(ii) سطحه د z محور په شاوخوا متناظره ده.

(iii) د مختصاتو په محورونو باندې د پرېکړې نقطې $(\pm2,0,0)$، $(0,\pm2,0)$ او (4 ، 0 ، 0) دي.

(iv) د xy په مستوي کې د نخشې ایستلو معادله $x^2-y^2=4$ ده کومه چې یوه دایره ده. د yz – په مستوي کې دنخشې ایستلومعادله $z=4-y^2$ ده کوم چې یو پارابول دی اود xz په مستوي کې دنخشې ایستلو معادله $z=4-x^2$ ده کوم چې یو پارابولا دی.

(v) د $x=a$ برخه په مستوی کې $z=4-a^2-y^2$ ، یو پارابول دی. د $y=b$ برخه په مستوي کې $z=4-b^2-x^2$ ، یو پارابول دی او د $z=c$ برخه په مستوی کې $x^2+y^2=4-c$ ، یوه دایره ده چېرې چې $c<4$.

د سطحې انځور په لاندې ډول دی.



۴. مثال: د $x^2+4y^2=z^2-4$ سطح وڅېړئ او رسم يې کړئ.

حل:

(i) دغه معادله بدلون نه کوي كه چېرې x د x− پواسطه، y د y− پواسطه او z د z− پواسطه عوض شي نو ددې پربنسټ سطح د yz، zx او xy مستويانو ته په ترتيب سره متناظره ده.

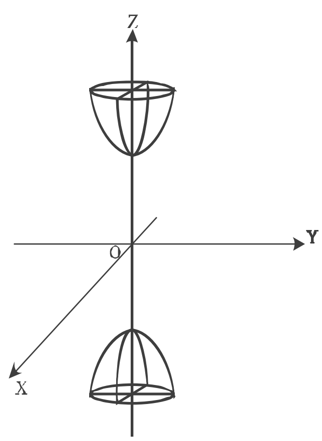
(ii) کله چې y او z په يوه وخت په y− او z− بدل شي، معادله بدلون نه کوي، نو ددې پر بنسټ سطح د x - محور ته متناظره ده. په ورته ډول مونږ ښودلی شو چې سطحه y− محور ته او z− محور ته متناظره ده.

(iii) سطح د x – محور او د y – محور نه پرې کوي. د پرېکړې نقطې د z په محور باندې $(0،0،2)$، $(0،0،-2)$ دي.

(iv) د xy – مستوي کې نخشې ايسټل موهومي دی. په yz− مستوي او zx – مستوي کې نخشې ايسټل د $z^2-4y^2=4$ او $z^2-x^2=4$ هايپربولاوې دي.

(v) نخشه ايسټل د x = a په مستوي کې د $z^2-4y^2=a^2+4$ هايپربولا دی او نخشه ايسټل د $y=b$ په مستوي کې $z^2-x^2=4b^2+4$ يو هيپربولا دی اونخشه ايسټل د z د z = c په مستوي کې $x^2+4y^2=c^2-4$ دی، کومه چې يوه حقيقي بيضوي ده که چېرې $c^2>4$ وي.

د سطحې انځور يا رسم په لاندې ډول دی.



۱۱ . ۲ پوښتنې

۱. د لاندې سطحو د پرېکړې نقطې او نخشه ایستل (traces) یا خاپې پیداکړئ.

$(i)\quad 2x-3y+6z=-21$

$(ii)\quad x^2+y^2+z^2-2z=0$

$(iii)\quad x^2+y^2+z^2-2xz+5z-4=0$

۲. د مستوي د پرېکړې نقطې او نخشه ایستل (traces) لاس ته راوړئ کوم چې له مبدا څخه 4 په اندازه واټن لري او کوم چې نارمل د 1، 2، 2−لورې لرونکې اجزاوې لري.

۳. د لاندې سطحو د پرېکړې نقطې د مختصاتو په محورونو کې پیداکړئ.

$(i)\quad x^2+4y^2+5xz-2x+y-3=0$

$(ii)\quad x^2+3y^2+z^2-2x-3=0$

۴. په لاندې حالاتو کې په ځانګړو شوو مستویانو کې د راکړل شویو سطحو د نخشه ایستلو (traces) معادلې لاس ته راوړئ.

(I) $xy+xz+yz=1;$ ، $x-$ مستوي.

(II) $x^2+xy-3xz-2=0;$ ، $y-$ مستوي.

۵. لاندې سطحې وڅېړئ.

$(i)\quad 4x^2+4y^2+z^2-16=0$

$(ii)\quad x^2+4y^2+16z^2=16$

$(iii)\quad Z=x^2-y^2$

$(iv)\quad z^2=1-x^2-y^2+x^2y^2.$

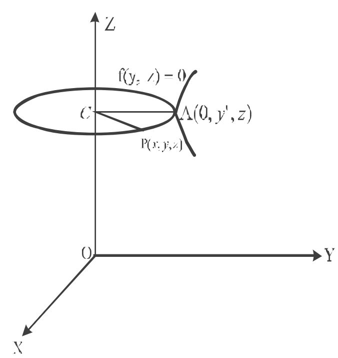
۱۱ .۱,۳ څرخېدونکې(دوراني) سطحه

که چېرې دیو مستوي منحني ته دهغه په مستوي کې د یو مستقیم خط په شاوخوا دوران ورکړل شي، یوه سطحه تولیدېږي (رامنځته کېږي) چې د دوران سطحه ورته وايي. دمستویانو په واسطه د دوران دیوې سطحې څخه بېلې شوې برخې محور ته عمود او په همدې محور باندې د دوې د مرکزونو په لرلو موازي دائرې دي.

د S سطحه به یوه څرخېدونکې یا دوراني سطحه وي که چېرې پدې برخه کې د L یو خط دارنګه شتون ولري چې د سطحې څخه هره بېله شوې برخه L ته عمود اوپه L باندې دمرکز په لرلو یوه دائره وي.

۱۱. ۳. ۲ د يوې څرخيدونکی سطحې معادله Equatio of a surface of revolution

د سطحې دمعادلې د لاس ته راوړلو لپاره کومه چې د z دمحور په شاوخوا د، $f(y, z) = 0$، $x = 0$ منحني د څرخيدلو نه مېنځ ته راغلې ده. فرضوو چې $A(0, y', z)$ په منحني باندی يوه نقطه ده، کومه چې د z محورپه شاوخوا څرخي. پدی فرضولوسره چې $P(x, y, z)$ په سطحې باندی يوه نقطه ده چې د $A(0, y', z)$ له نقطې سره مطابقت لري.



فرضوو چې AC په OZ عمود دی. څرنګه چې A د OZ په شاوخوا څرخي د C په مرکز يوه دايره رسموی، چې دهغې شعاع له AC سره مساوي ده او دهغې مستوي د z په محور عمود دی. نو لدې کبله P په دغې ددايرې باندې يوه نقطه ده.

څرنګه چې A په

$$f(y', z) = 0, \qquad \ldots(i)$$

توليدوونکي منحني باندې واقع ده ، خو

$$y' = AC = CP = \sqrt{y^2 + x^2}$$

لدې امله له (i) معادلې څخه لاسته راځي چې

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z) = 0$$

کومه چې د سطحې غوښتل شوې معادله ده.

که چېرې د منحني معادله $y = f(z)$ ، $x = 0$ وي. نو د سطحې معادله $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$ يا $x^2 + y^2 = [f(x)]^2$ ده، په معکوس ډول، هره معادله چې د هغې x او y يواځې د $x^2 + y^2$ په بڼه څرګنديږي

د z محورپه شاوخوا ځرخیدونکې سطحه ښیي. په ورته ډول مونږ کولای شو د یوې سطحې معادله چې دیو منحني د ځرخیدلو پواسطه د مختصاتو په هر مستوي کې د مختصاتو د محورونو په شاوخوا چې په هغه کې واقع وي لاسته راوړو. د دې لپاره مونږ کولای شو چې لاندې جدول و کاروو.

منحني په	په شاوخوا ځرخیدلو	عوض کېدونکي Replace	ځای پرځای کېدونکي By
xy– مستوي کې	**x – محور**	y^2	$y^2 - z^2$
xy– مستوي کې	y – محور	x^2	$x^2 + z^2$
yz – مستوي کې	y – محور	z^2	$z^2 + x^2$
yz – مستوي کې	z – محور	y^2	$y^2 - x^2$
zx – مستوي کې	z – محور	x^2	$x^2 - y^2$
zx – مستوي کې	x – محور	z^2	$z^2 + y^2$

یادونه: د یوې سطحې معادله چې د مختصاتو په مستوي کې د مختصاتو د محورپه شاوخوا د یو منحني د ځرخیدلو له امله په هغه مستوي کې مېنځ ته راغلې وي لاس ته راوړو، ددوراني محورونو اړونده مختصاتو په بدلون په مستوي کې د منحني معادله بدلون نه کوي او بله مختصه د دوو نورو د مربعاتو مجموعې د مربع جذر پواسطه عوض کوو.

۳،۱۱ .۳ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** د سطحې معادله لاس ته راوړئ چې د $4x^2 - 9z^2 = 5$, $y = 0$ منحني د ځرخیدلو له امله، (a). د x محور، (b). د z محور په شاوخوا لاس ته راغلې وي.

حل:

(a). د $4x^2 - 9z^2 = 5$ منحني د xz - مستوي کې دی. د x محور په شاوخوا ځرخي. نو ددې لپاره چې د ځرخیدونکې د سطحې معادله لاس ته راوړو، د z^2 پر ځای $z^2 + y^2$ وضع کوو.

لدی امله د سطحې غوښتل شوې معادله ده $4x^2 - 9(z^2 + y^2) = 5$

(b) منحني د z – محورپه شاوخوا دوران کوي نو ددې لپاره چې د څرخيدونکي سطحې معادله لاس ته راوړو د x^2 پرځای x^2+y^2 وضع کوو.

لدی امله د سطحي غوښتل شوې معادله ده $4(x^2+y^2)-9z^2=5$

۲. مثال: وښاياست چې $x^2+y^2-z=2$ يوه څرخيدونکي سطحه ده. توليدوونکي (زيږوونکي) او د څرخيدلو محور لاس ته راوړئ.

حل: کېدالای شي چې معادله د $x^2+y^2=2-z$ په بڼه وليکل شي.

دا د $x^2+y^2=f(z)$ په شکل ده چيرې چې f(z) = 2 - z . نو لدې کبله دا يوه څرخيدونکي سطحه ده، او د z – محور د دوران محور دی. د مولد په ډول امکان لري چې مونږ $y^2=z-2$ منحني د yz – په مستوي کې يا $x^2=2-z$ منحني د xz – په مستوي کې په پام کې ونسيو.

۳. مثال: د سطحي معادله پيداکړئ چې د $z=0$, $x^2+y^2+2ax+b^2=0$ دايرې دڅرخيدلوله امله y– دمحور په شاوخوا توليد شوې وي.

حل: منحني د xy– په مستوي کې دی او دا د y – د محور په شاوخوا دوران کوی. لدې سببه د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره مونږ د منحني په معادله کې د x^2 پرځای x^2+z^2 وضع کوو.

$$x^2+z^2+y^2+2a\sqrt{x^2+z^2}+b^2=0$$

يا

$$x^2+z^2+y^2+b^2=-2a\sqrt{x^2+z^2}$$

يا

$$\left(x^2+y^2+z^2+b^2\right)^2=4a^2(x^2+z^2)$$

لدی امله د سطحي غوښتل شوې معادله ده

۱۱ . ۳ پوښتنې

د سطحي هريوه معادله پيداکړئ چې د راکړل شوو منحني ګانو د څرخيدلو نه د ټاکل شوومحورونو په شاوخوا لاس ته راغلې وي.

۱. $y=0$, $x^2-2z^2=1$ (i) x– محور (ii) z– محور

۲. $y=0$, $x=z^2-a^2$ (i) x– محور (ii) z– محور

۳. $z=0$, $x^2+2y^2=8$ (i) x– محور (ii) y– محور

۴. $x=0\ ,\ \ 6y^2+6z^2=7$ (i) y– محور (ii) z– محور

۵. $y=0\ ,\ x=z^2$ (i) x– محور (ii) z– محور

ووایاست چي د لاندې سطحو لپاره د مختصاتو کوم محورونه د څرخیدلو یا دوران محورونه دي او په بشودل شویو مستویگانو کي د یو مولد منحني معادله ولیکئ.

۶. $x^2+y^2+z^2=a^2$ xy– مستوي

۷. $x^2-y^2-4z^2=16$ xz– مستوي

۸. $x^2y^2+y^2z^2=1$ yz– مستوي

۹. $x^2-4y^2-4z^2=8$ xy– مستوي

۱۰. هغه سطحه وڅیړئ چي د x – محور په شاوخوا د $z=0\ ,\ 2x+3y=6$ مستقیم خط د څرخیدلو څخه لاس ته راغلي وي.

کره The Sphere

۱۱. ۱,۴ تعریف

په فضا کي د نقطو سیټ پدې ډول چي ددوی واټن له یوې ټاکلې نقطې څخه ثابت وي یوه کره ده.

ټاکلې نقطې ته مرکز وایي او ثابت واټن ته د کرې شعاع وایي.

۱۱. ۴. ۲ د یوې کرې معادله (Equation of a sphere)

یوې کرې معادله چي مرکز یي C(a، b، c) او شعاع یي r وي لاس ته راوړو.

فرضوو چي P(x،y،z) په کرې باندې کومه بله نقطه ده. نو لدې سببه، د تعریف له مخې $|PC|=r$

$$\therefore\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

یا

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0 \qquad \ldots(1)$$

کومه چي د کرې غوښتل شوې معادله ده.

مونږ د کرې د (1) معادلې دلاندينيو خانګړتياوو يادونه کوو:

i. دا په x، y، z کې دويمه درجه ده؛
ii. د z^2, y^2, x^2 ضريبونه مساوي دي؛
iii. د xy، yz، zx ضربي حدونه وجود نلري.

له بله پلوه، مونږ کولای شو چې

$$ax^2+ay^2+az^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0 \qquad \ldots(2)$$

عمومي معادله وښيو چې پورتني درې ځانګړتياوې لري يوه کره ښيي.

(1) معادلې ته د يوې کرې د معادلې ستندرد شکل وايي او (2) ته د يوې کرې د معادلې عمومي شکل وايي.

(2) معادله کله چې د

$$x^2+y^2+z^2+\frac{2u'}{a}x+\frac{2v'}{a}y+\frac{2w'}{a}z+\frac{d'}{a}=0$$

يا

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \qquad \ldots(3)$$

په شکل وليکل شي ښايي چې د يوې کرې د عمومي معادلې په څير په پام کې ونيول شي.

(3) معادله د

$$(x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2=u^2+v^2+w^2-d$$

يا

$$[x-(-u)]^2+[y-(-v)]^2+[z-(-w)]^2=\left[\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}\right]^2$$

معادل ده.

نو لدې کبله (3) معادله يوه کره ښيي چې مرکز يې $(-u, -v, -w)$ او شعاع يې $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ ده.

۱۱. ۴. ۳ کره چې له څلورو راکړل شويو نقطو څخه تيريږی

د يوې کرې دمعادلې د لاس ته راوړلو چې د (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) او (x_4, y_4, z_4) څلورو نقطو څخه چې په يو مستوي کې واقع ندي تېريږي.فرضوو چې غوښتل شوې معادله

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \qquad \ldots(1)$$

څرنګه چې راکړل شوي څلور نقطې پدې بڼدې پرتې دي، نو

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+zvy_1-2wz_1+d_1=0 \qquad ...(2)$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+2ux_2+zvy_2+2wz_2+d_2=0 \qquad ...(3)$$
$$x_3^2+y_3^2+z_3^2+2ux_3+zvy_3+2wz_3+d_3=0 \qquad ...(4)$$

او

$$x_4^2+y_4^2+z_4^2+2ux_4+zvy_4+2wz_4-d_4=0 \qquad ...(5)$$

له (1) نه تر (5) معادلو کې د d،w،v،u په له منځه وړلو سره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2-y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2-y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2-y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

کومه چې غوښتل شوې معادله ده.

یادونه: په عددي ګټلوپېښتنو کې، مونږ ښايي چې لومړی د d،w،v،u قېمتونه (2) نه تر (5) څلوروحالتونو څخه لاس ته راوړو او بیا دوی په (1) معادله کې وضع کړو.

۱۱. ۴. ۴ مماس مستوي (The Tangent plane)

یو مستوي په یوې کرې باندې د P په یوه نقطه کې مماس دی که چېرې یواځې او تنها یواځې P په دواړو مستوي او کرې باندې واقع وي او په شعاع باندې چې د P له نقطې څخه تیرېږي عمود وي.

دا له تعریف څخه روښانه ده یو مستوي په یوې کرې باندې مماس وي که چېرې یواځې او تنها یواځې د مستوي واټن د کرې له مرکز څخه د کرې د شعاع سره مساوي وي.
نو پدې ډول که چېرې د کرې معادله

$$x^2+y^2+z^2+2ux-2vy+2wz+d=0$$

وي د مماس مستوي معادله په کرې باندې د (x_1,y_1,z_1) په نقطه کې

$$(x_1+u)(x-x_1)+(y_1+v)(y-y_1)+(z_1+w)(z-z_1)=0$$

ده.

یادونه: ۱. یو مماسي خط چې د یوې کرې له هرې نقطې نه تیرېږي د کرې په شعاع باندې چې له هغې نقطې

نه تیرېږي عمود وي

۲. د یوې کرې له باندني یوې نقطې نه کېدای شي په نابلاکلي شمیر خطونه چې کره لمسوي رسم شي.

ټول دغه مماس خطونه په یوه مخروطي شکل باندې چې د کرې پوښوونکي گڼل کیږي راس يې په

همغه نقطه کي دی واقع دي.

۱۱. ۴. ۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د کرې معادله لاس ته راوړي چې د هغې مرکـــــز $(3, 0, -2)$ نقطه دي او کومه چې مستقیماً د $(1, 6, -5)$ نقطې څخه تیریږي.

حل: د کرې شعاع د مرکز او په کرې باندې پرتې نقطې تر منځ واټن دی.

$$= \sqrt{(1-3)^2+(6-0)^2+(-5+2)^2} = \sqrt{4+36+9}$$

نو لدې امله د کرې معادله

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=49$$

ده. یعنې،

$$x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$$

۲. مثال: د کرې معادله لاسته راوړئ چې د $(0, 0, 0)$، $(0, 1, -1)$، $(-1, 2, 0)$ او $(1, 2, 3)$ نقطو څخه تیریږي

حل: فرضوو چې د کرې معادله $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ده.

څرنگه چې دا د راکړل شویو نقطو څخه تیریږي، د نقطو مختصات په دی معادله کې صدق کوي.لدی امله

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & d=0 \\
& 2+2v-2w=0 \\
& 5-2u-4v=0 \\
& 14+2u+4v+6w=0
\end{aligned}$$

په یوه وخت د دغو معادلو د حل کولونه، موږ لاس ته راوړو چې $d=0$, $u=-\frac{15}{14}$, $v=-\frac{25}{14}$ او $w=\frac{11}{14}$

نو لدې کبله د کرې معادله

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{-15}{14}\right)x+2\left(\frac{-25}{14}\right)y+2\left(\frac{11}{14}\right)z=0$$

یا

$$7(x^2+y^2+z^2)-15x-25y+11z=0$$

دی.

۳. مثال: د $2x^2+2y^2+2z^2+6x-9=0$ کرې مرکز او شعاع پیداکړئ.

حل: راکړل شوې معادله کولی شو چې د

$$x^2+y^2+z^2-3x-\frac{9}{2}=0$$

یا

$$x^2+3x+\frac{9}{4}+y^2+z^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}$$

په ځیر ولیکو یعنې

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\frac{27}{4}$$

لدې امله دکرې مرکز $\left(\frac{-3}{2}, 0, 0\right)$ ده شعاع $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ده.

۴. مثال: د کرې معادله لاس ته راوړئ چې دهغې مرکز د $x = y = z$ په مستقیم خط باندې واقع وي اودا مستقیماً د $(5، 3، 0)$ او $(-1، 4، 1)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل: فرضوو چې د کرې معادله $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ده، د هغې مرکز $(-u، -v، -w)$ د $x = y = z$ په مستقیم خط باندې واقع دی.

$$\therefore \quad u=v=w \qquad \ldots(i)$$

دا چې کره د $(5، 3، 0)$ او $(-1، 4، 1)$ له نقطو څخه تیرېږي، نو

$$\therefore \quad 34+10u+6v+d=0 \qquad \ldots(ii)$$

او

$$18-2u-8v+2w+d=0 \qquad \ldots(iii)$$

په یوه وخت کې د(i)، (ii) او (iii) معادلو د حل نه، موږ لاس ته راوړو چې

$$u=v=w=d=-2$$

نو لدې امله د کرې غوښتل شوې معادله په لاندې ډول ده

$$x^2-y^2+z^2-4x-4y-4z-2=0$$

ده.

۵. مثال: د کرې معادله لاس ته راوړئ کومه چې د $(-3,6,0)$, $(-2,-5,-1)$ او $(2،4،1)$ له نقطو څخه مستقیماً تیریږي او د هغې مرکز د قایمه الزاویه مثلث پر وتر باندی واقع دي چې پدی صورت کې جوړیږي.

حل: فرضوو چې راکړ شوې نقطې $A(-3,6,0)$, $B(-2,-5,-1)$, $C(1,4,2)$ دي.

$$|AB|^2 = (-3+2)^2 + (6+5)^2 + (0-1)^2$$
$$= 1+121+1 = 123$$
$$|BC|^2 = (1+2)^2 + (4+5)^2 + (2+1)^2$$
$$= 9+81+9 = 99$$
$$|CA|^2 = (1+3)^2 + (4-6)^2 + (2-0)^2$$
$$= 16+4+4 = 24$$
$$\therefore \quad |AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$$

پدی ډول AB د قایمه الزاویه مثلث وتر دی ځکه نو د کرې مرکز په AB باندې واقع دی، نو لدې امله AB قطر دی.

پدی صورت کې دکرې مرکزد AB منځنې نقطه ده، چې $D\left(\frac{-3-2}{2},\frac{6-5}{2},\frac{0-1}{2}\right)$ یا $\left(\frac{-5}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ورته وایي او

$$\text{شعاع} = AD = \frac{1}{2}\ AB = \frac{\sqrt{123}}{2}$$

نو لدې کبله د کرې معادله

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{123}{4}$$

یا

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5x - y + z - 24 = 0$$

ده.

۶. مثال: د $(2،3،-6)$ په نقطه کې د $x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z+25=0$ په کرې باندی د مماس مستوي معادله لاس ته راوړئ.

حل: د کرې مرکز $(2،3،-4)$ دی. د مماس مستوي ته د نارمل لوری لرونکي نسبتونه د خط لوري لرونکي نسبتونه دي چې د $(2،3،-4)$ مرکز او $(2،3،-6)$ نقطه سره نښلوي. یعنې ، $2-2, 3-3, -4+6$

یا $(2،0،0)$.

نو لدي امله د مماس مستوي معادله عبارت ده له

$$0(x-2)+0(y-3)-2(z-6)=0$$

يعني، $z+6=0$

۱۱. ۴ پوښتنې

۱. د کرې معادله لاس ته راوړئ که چېرې

(i) شعاع يې ٤ او مرکز يې په $(1،1،1)$ په نقطه کې وي.

(ii) شعاع يې a او مرکز د $(a،0،0)$ په نقطه کې وي.

۲. د لاندې کرو مرکزونه او شعاعوي پيداکړئ

$$(i)\quad x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$$

$$(ii)\quad 2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z+3=0$$

۳. د کرې معادله لاس ته راوړئ چې له څلورو نقطو څخه تېرېږي.

$$(i)\quad (4,-1,2),(0,-2,3),(1,-5,1),(2,0,1)$$

$$(ii)\quad (0,0,0),(-a,b,c),(a,-b,c),(a,b,-c)$$

۴. د کرې معادله پيداکړئ چې د څلور سطحي (Tetrahedron) پواسطه چې دهغه مستويګانې $x=0,\ y=0,\ z=0$ او $lx+my+nz+p=0$ دی چاپيره شوې وي.

۵. د يوې کرې معادله وښيې چې له $(4،5-،2)$ ،$(1،1،1-)$ ،$(2،0،3)$ دريو نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $2x+3y+4z=6$ په مستوي باندې دی $x^2+y^2+z^2+4y-6z=1$ ده.

۶. ديوې کرې معادله وښيې چې د يو مستقيم خط په لرلوچې د (x, y_1, z_1) او (x_2, y_2, z_2) نقطې لکه يو قطر سره نښلوي:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

ده.

۷. دیوی کرې معادله لاس ته روړې چې د $(0، -2، -4)$، $(2، -1، -1)$ نقطو څخه تېرېږي او په $2x-3y=0$، $5y+2z=0$ مستقیم خط باندې مرکز لري.

۸. دکرې معادله لاس ته راوړئ چې مرکز یې د $(2، -1، -1)$ په نقطه کې اود $x-2y+z+7=0$ له مستوي سره مماس وي.

۹. د

(i) $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z=0$ ، په $(3، 2، 5)$ په نقطه کې.

(ii) $3(x^2+y^2+z^2)-2x-3y-4z-22=0$ ، په $(1، 2، 3)$ په نقطه کې.

کرو ته د مماس مستویګانو معادلې په لاس راوړئ.

۱۰. د k په شعاع یوه کره چې له مبدا څخه تېرېږي او محورونه د A، B، C په نقطو کې قطع کوي. ثبوت کړئ چې د ABC مثلث مرکزي نقطه د $9\left(x^2-y^2+z^2\right)=4k^2$ په کرې پرته ده.

۱۱. یوه نقطه دارنګه حرکت کوي چې له مبدا څخه ددې د واټن مربع له یو ټاکلي مستوي څخه ددې نقطې واټن متناسب دی. وښایاست چې ددې هندسي محل یوه کره ده.

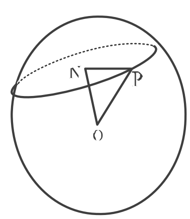
۱۲. یو مستوي چې د $(a، b، c)$ له یوې ټاکلې نقطې څخه تېرېږي او د مختصاتو محورونه په A، B او C کې قطع کوي. د OABC کرې د مرکز هندسي محل د مستوي د مختلفو حالتونو لپاره پیداکړئ، O مبدا ده.

۱۱. ۵. ۱ یوې کرې سره دمستوي پرېکړې(مقطع)

له یوې کرې سره دیوه مستوي مقطع ، یعنې، د یوې کرې او یومستوي د ګډو نقطو سیټ، یوه دایره ده.

فرضوو چې C د کرې مرکز او P، د مستوي برخې (مقطع) کومه یوه نقطه ده. فرض کړئ چې ON په راکړ شوي مستوي باندې عمود دی؛ N د عمود دقاعدې ځوکه ده.

څرنګه چې ON په هغه مستوي باندې عمود دی کوم چې د NP خط لرونکی دی. موږ لرو چې ON په NP باندې عمود دی. لدې امله $NP^2=OP^2-ON^2$.



اوس O او N ټاکلې نقطې دي، دغه اړیکه ښیي چې NP په مقطع باندې د P د ټولو حالتونو لپاره ثابته ده.

لدې امله د P هندسي محل يوه دايره ده
چې د هغې مرکز N دی، چې د کرې له
مرکز څخه تر مستوي پورې دعمود د
قاعدې ځوکه ده.

لويه يا عظيمه دايره (great circle): د يو مستوي پواسطه د يوې کرې مقطع چې دهغې له مرکز څخه تېرېږي د يوې عظيمې يا لويې دايرې په توګه پېژندل کېږي. د يوې لويې دايرې مرکز او شعاع لکه د کرې د مرکز او شعاع په شان دي.

پاپله: يوه دايره چې له دريو راکړل شويو نقطو څخه تېرېږي په بشپړه توګه په هرې يوې کرې باندې چې له ورته نقطو څخه تېرېږي واقع ده.

يادونه: د دوو کرو د پرېکړې منحني يوه دايره ده.

۱۱. ۵. ۲ د يوې دايرې معادله

هره يوه دايره د کومې کرې سره د مستوي د تقاطع نه چې لدې څخه تېرېږي لاس ته راځي. نو لدې سببه يوه دايره کېدای شي چې د دوو معادلو په واسطه وښودلی شي، چې يوه د يوې کرې او بله د يو مستوي.

څکه نو د $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0, \quad lx + my + nz = p$ دواړه معادلې په ګډه سره يوه دايره ښيي.

همدا راز يوه دايره کېدای شي چې د هرو دوو کرو د معادلو پواسطه چې يو بل څخه تېرېږي وښودل شي.

يادونه: د $z = 0$ ، $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ معادلې هم يوه دايره ښيي کومه چې د $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ استوانې د $z = 0$ له مستوي سره تقاطع ده.

۱۱. ۵ .۳ کرو نه د يوې راکړل شوې دايرې تيريدل (Spheres Through a Given Circle)

که چېرې د يوې دايرې معادلې $S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ او $U = ax + by + cz + d = 0$ وي، نو د $S + \lambda U = 0$ معادله يوه کره ښيي چې راکړل شوې دايره ورته تيريږي، پدې ځای کې λ کوم يو عدد دی، په ورته ډول که چېرې

$$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$$

او

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$$

دوه کرې وي، کومې کرې نه چې دایره تیریږي د دوارو ترمېنځ شریکه وي $S_1 + \lambda S_2 = 0$ ده، دلته λ یو اختیاري ثابت دی کوم چې کېدای شي د هغو معادلو په څېر وټاکل شي چې یو بل شرط سرته رسوي.

یادونه: مونږ یادوونه کوو چې د دایرې د مستوي معادله چې له دوو راکړل شویو کرو څخه تېرېږي

$$s_1 - s_2 = 2(u_1 - u_2)x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - w_2)z + d_1 - d_2 = 0$$

ده.

لدې څخه مونږ پوهېږو چې د کومې کرې معادله چې د $S_1 = 0$، $S_2 = 0$ له دایرې څخه تېرېږي کېدای شي چې د $S_1 + k(S_1 - S_2) = 0$ په توګه په پام کې ونیسو، k یو اختیاري ثابت دی.

۱۱. ۵. ۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د کرې معادله لاس ته راوړئ چې د

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y + 6 = 0, \qquad x - 2y + 4z - 9 = 0$$

دایرې او د $(3، 2- ، 1)$ نقطې څخه تېرېږي.

حل: په راکړل شوې دایرې کې یوه کره

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 6 + k(x - 2y + 4z - 9) = 0$$

ده. څرنګه چې دا د $(3، 2- ، 1)$ نقطې څخه تېرېږي نو.

$$1 + 4 + 9 - 2 - 6 + 6 + k(1 + 4 + 12 - 9) = 0$$

یعنی، $k = -2$

نو لدې کبله د غوښتل شوې کرې معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y + 6 - 2(x - 2y - 4z - 9) = 0$$

یعنې

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 8z - 24 = 0$$

ده

۲. مثال. د

$x^2+y^2+z^2-2y-4z-11 \quad , \quad x-2y-2z-15$

ددايري مرکز او شعاع لاس ته راوړئ.

حل. دايره د

$$x+2y+2z=15 \qquad ...(1)$$

مستوي او د

$$x^2+y^2-z^2-2y-4z-11=0 \qquad ...(2)$$

کرې د پرېکړې پواسطه جوړه شوې ده.

د کرې مرکز $C(0، 1، 2)$ او شعاع $R=\sqrt{0+1+4+11}=4$ ده.

د دايرې مرکز C' د کرې د مرکز C نه په (1) مستوي باندې دعمود بيخ (قاعده) ده.

لدې امله د CC' معادله

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}=t$$

يا $x = t$ ، $y = 2t + 1$ ، $z = 2t + 2$ ده.

د C' نقطې لپاره د **t** قيمت د دغو مختصاتو جوړيدلو پواسطه چې د مستوي (1) معادله کې صدق کوي.

لدې سببه $t+4t+2-4t-4=15$ ، يعنې ، $t=1$

ددايرې د مرکز مختصات $C'(1, 3, 4)$ دي.

اوس

$$|CC'|=\sqrt{(0-1)^2+(1-3)^2-(2-4)^2}=3$$

که چېرې **r** د ددايرې شعاع وي، نو

$$r^2=R^2-|CC'| \quad \therefore \quad r=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

۳. مثال. وښاياست چې د $x^2+y^2+z^2=9, x-2y+4z-13=0$ او

$x + y + z + 2 = 0$ ، $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 6z + 21 = 0$ دوه ددایرې په یوې کرې کې واقع دي. د هغې معادله پیداکړئ.

حل: کومه یوه کره چې له لومړۍ دایرې نه تېرېږي

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + k(x - 2y + 4z - 13) = 0 \qquad ...(1)$$

ده او کومه کره چې د دویمې دایرې نه تېرېږي

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 6z + 21 + k'(x + y + z + 2) = 0 \qquad ...(2)$$

که چېرې دواړه راکړل شوې دایرې په یوې کرې باندې واقع وي، د (1) او (2) معادلې باید د k او k' د ځینو قیمتونو لپاره یو شانتې وي، دا غوښتنه ده چې

$$k = k' \;,\; -2k = 6 + k'$$
$$4k = -6 + k', \qquad -9 - 13k = 21 + 2k'$$

ټولې دغه معادلې د $k = k' = -2$ لپاره صدق کوي.

نو لدې کبله دواړه دایرې په یوې کرې واقع دي، او په (1) یا (2) معادلې کې د دغو قیمتونو په وضع کولو موږ لاس ته راوړو چې

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z + 17 = 0$$

دا همغه شانتې د کرې معادله ده په کومه کې چې دواړه راکړل شوې دایرې واقع وي.

۴. مثال: د کرې معادله پیداکړئ د کومې لپاره چې

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0, \quad 2x + 3y + 4z - 8 = 0$$

دایره یوه لویه (عظیمه) دایره وي.

حل: یوه کره چې د راکړ شوې دایرې نه تېرېږي

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y + 2z + 2 + k(2x + 3y + 4z - 8) = 0 \qquad ...(1)$$

ده. د هغې مرکز $\left(-k, \dfrac{7+3k}{2}, 1-2k\right)$ دی.

که چېرې راکړل شوې دایره لویه دایره وي نو د (1) کرې مرکز باید په $2x + 3y + 4z - 8 = 0$ مستوي کې واقع وي.

لدې سببه

$$-2k-\frac{21+9k}{2}+4-8k-8=0$$

یا

$$-4k-21-9k+8-16k-16=0$$

یا $k=-1$

$k=-1$ په اینودلو، موږ د غوښتل شوې کرې معادله لکه

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$$

لاس ته راوړو.

۵. مثال: د دایرې معادله پیداکړئ چې $(0، 0، C)$، $(0،b،0)$، $(a،0، 0)$ دریو نقطو پواسطه جوړشوي مثلث چاپیره کړې وي. همدارنګه د دغې دایرې د مرکز مختصات له لاس راوړئ.

حل: د مستوي معادلې چې د مثلث له دریو نقطو څخه تیریږي $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ده.

غوښتل شوې دایره له هرې کرې سره د مستوي د پرېکړې منحنې دی چې له دریو نقطو څخه تیریږي.

ددې کرې د معادلې پیداکېدو لپاره، یو څلورمه نقطه لازمه (اړینه) ده، کومه چې، د کار د اسانتیا لپاره، موږ لکه مبدا په پام کې نیسو.

که چیرې $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ یوه کره وي چې له دغو څلورنقطو څخه تیریږي، نو موږ لرو چې:

$$\begin{aligned}
a^2-2ua+d&=0;\\
b^2+2vb+d&=0;\\
c^2+2wc-d&=0;\\
d&=0.
\end{aligned}$$

کوم نه چې $d=0,\ u=-\frac{1}{2}a,\ \ v=-\frac{1}{2}b,\ \ w=-\frac{1}{2}c$ لاس ته راځي.

نو د کرې معادله $x^2+y^2-z^2-ax-by-cz=0$ ده.

لدې امله د دایرې معادلې $x^2+y^2-z^2-ax-by-cz=0$ او $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ دي.

د دغې دایرې مرکز په $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ مستوي باندې د کرې مرکز $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\ \frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}c\right)$ څخه د عمود قاعده ده.

د عمودي خط معادلې $\frac{x-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{a}}=\frac{y-\frac{1}{2}b}{\frac{1}{b}}=\frac{\boldsymbol{z}-\frac{1}{2}c}{\frac{1}{c}}=r$ دي چې له کبله یې دارنګه ویل کېږي چې $\left(\frac{r}{a}-\frac{a}{2},\ \frac{r}{b}+\frac{b}{2},\ \frac{r}{c}+\frac{c}{2}\right)$، په خط باندې کومه یوه نقطه ده. ددې د پرېکړې نقطه د مستوي سره $r\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-\frac{1}{2}=0$ یا $r=-\frac{1}{(2\sum a^{-2})}$ پواسطه ورکول کېږي.

لدې امله مرکز

$$\left[\frac{a(b^{-2}+c^{-2})}{2\sum a^{-2}},\ \ \frac{b(c^{-2}+a^{-2})}{2\sum a^{-2}},\ \ \frac{c(a^{-2}+b^{-2})}{2\sum a^{-2}}\right]$$

۱۱ـ ۵ پوښتنې

۱. د کرې معادله لاس ته راوړئ چې

(i) د $x^2+y^2-z^2=9,\ \ 2x+3y+4z=5$ دایرې او $(1، 2، 3)$ نقطې څخه تېرېږي؛

(ii) د $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ z=0$ دایرې او (α,β,γ) نقطې څخه تېرېږي.

۲. د هغې دایرې مرکز او شعاع پیداکړئ په کومه کې چې $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-19=0$ کره د $x-2y-2z+7=0$ مستوي پواسطه قطع کېږي.

۳. ثبوت کړئ چې د

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0,\quad 5y+6z+1=0,$$

او $x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0,\ \ x+2y-7z=0$ دوه دایرې په یوې کره واقع دي او د هغې معادله لاسته راوړئ. همدارنگه د a قیمت لاسته راوړئ په کوم قیمت سره چې $x-y+z=a\sqrt{3}$ مستوي له کرې سره په تماس کې کیږي.

۴. وښایاست چې د

$$x^2+y^2+z^2+3x-4y+3z=0\ ,\ \ x-y+2z-4=0$$

او $2(x^2+y^2+z^2)+8x-13y+17z-17=0,\ \ 2x+y-3z+1=0$ دوه دایرې په یوې کرې واقع دي. د کرې معادله لاس ته راوړئ.

۵. د کرې معادله پیداکړئ چې د $x^2+y^2+z^2-4x-y+3z+12=0,\ 2x+3y-7z=10$ دایرې نه تیره او د $x-2y+2z=1$ مستوي سره په تماس کې وي.

۶. د کرې معادله پیداکړئ چې د $x^2+y^2+z^2=1,\ \ 2x+4y+5z-6=0$ دایرې څخه تیر او د $z=0$ مستوي سره په تماس کې وي.

۷. د کرې معادله لاسته راوړئ چې د $x^2+y^2+z^2+10y-4z-8=0,\ \ x-y+z=3$ دایره د لویې دایرې په شان ولري.

۸. د کرې معادله لاسته راوړئ چې $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0,\ \ x+2y-z=4$ دایره د لویې دایرې په څیر ونړي.

۹. د کرې معادله پیداکړئ کومه چې د $C(0,0,3)$, $B(0,3,0)$, $A(3,0,0)$ نقطو څخه تیریږي اودهغې دمرکز د ABC په مستوي کې واقع وي. دهغې مرکز او شعاع لاس ته راوړئ.

۱۰. یوه نقطه دارنگه خوځښت (حرکت) کوي چې ددې د واټنونو د مربعاتو مجموعه دیو مکعب له شپږو مخونو څخه ثابته ده، وښایاست چې ددې هندسي محل یوه کره ده.

۱۱. وښایاست دیوې کرې معادله چې د $4x-5y-z=3$ په مستوي باندې مرکز لري او د

$$x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+8=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+4x+5y-6z+12=0$$

معادلو په لرلو له دایرې څخه تیریږي $x^2+y^2+z^2-7x+9y-11z-1=0$ ده.

۱۲. د کرو لپاره معادلې لاس ته راوړئ کومې چې د $x^2+y^2+z^2=5,\ x+2y+3z=3$ دایرې څخه تېرېږي او د $4x+3y=15$ مستوي سره په مماس وي.

استوانه (The cylinder)

۱۱. ۶. ۱ تعریف

یوې درې بعدیزې سطحه ته چې د یو مستوي منحني یو خط دعرضي مسیراو د یو ثابت خط په شاوخوا په موازي ډول دحرکت کولو پواسطه رامینځته کېږي استوانوي سطح یا په ساده ډول استوانه وايي.

مستوي منحني ته لارښود منحني یا موجه خط (directrix) وايي ،او حرکت کوونکي خط ته مولد (رامنځته کوونکی) یا عنصر وایي.

۱۱. ۶. ۲ د یوې استوانې معادله

د استوانې دمعادلې دپیدا کولو لپاره چې د هغې مولدونه $f(x,y)=0,\ z=0$ منحني پرې کوي او د $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ خط سره موازي وي.

فرضوو چې (α,β,γ) د استوانې کومه نقطه ده. د مولد معادلې چې له دغې نقطې څخه تېرېږي

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

دي. پدغه خط باندې دهرې یوې نقطې مختصات$(\alpha+lt,\ \beta+mt,\ \gamma+nt)$ دي کومې چې په راکړل شوي منحني باندې واقع دي که چېرې

$$f(\alpha+lt\ ,\ \beta+mt)=0 \qquad \ldots(i)$$

$$\gamma+nt=0 \qquad \ldots(ii)$$

د (i) او (ii) په مینځ کې د t په له مینځه وړلو سره موږ لاسته راوړو چې

$$f\left(\alpha-\frac{\gamma l}{n}\ ,\ \beta-\frac{\gamma m}{n}\right)=0$$

دغه هغه شرط دی چې د$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ نقطه په استوانې باندې خامخا واقع ده.

لدی امله د استواني معادله د (α,β,γ) نقطي هندسي محل دی، یعنی

$$F(x,y,z)=f\left(x-\frac{zl}{n},\ y-\frac{zm}{n}\right)=0$$

مثال: د استواني معادله پیداکړئ چې د $y=z^2$, $x=0$ لاربنود منحني او اصلی عناصرو (مولد خطونو) په لرلو د [2، 3، 4] ویکتور سره موازي وي.

حل: فرضوو چې (α,β,γ) په استواني کومه نقطه ده. د یو مولډ معادلې چې د (α,β,γ) نقطې نه تیرېږي

$$\frac{x-\alpha}{2}=\frac{y-\beta}{3}=\frac{z-\gamma}{4}=t$$

د $(\alpha+2t\ ,\ \beta+3t,\gamma+4t)$ نقطه په لاربنود منحني واقع کېږي که چیرې

$$\beta+3t=(\gamma+4t)^2 \qquad \ldots(i)$$
$$\alpha+2t=0 \qquad \ldots(ii)$$

په (i) او (ii) کې د t په له منځه وړو سره مونږ لاس ته راوړو چې

$$\beta-\frac{3\alpha}{2}=(\gamma-2\alpha)^2$$

لدی امله د استواني معادله $y-\frac{3x}{2}=(z-2x)^2$ یا $z^2+4x^2-4xz+\frac{3x}{2}-y=0$ ده.

۱۱. ۶. ۳ قایمه استوانه

که چیرې د یوې استواني عناصر یامولد د یو مستوي ته نارمل وي استواني ته نسبت هغه مستوي ته قایمه استوانه وایي.
مونږ به قایمه استوانه نظر د قایمو مختصاتو مستویاتو ته په پام کې ونسیو.

۱۱. ۶. ۴ د یوې قایمې استوانې معادله

فرضوو چې $z=0$, $f(x,y)=0$ لاربنود (هادي) منحني دی.

د استواني عناصر یا تولیدوونکي به د xy– مستوي ته نارمل یا به د z محور ته موازي وي، یعنې د [0، 0، 1] ویکتور.

د ۱۱. ۵. ۲ مخکني برخې د موضوع په شان مونږ د استواني معادله لکه

$$f\left(x-\frac{z.0}{l}\ ,\quad y-\frac{z.0}{l}\right)=0$$

لاس ته راوړو، يعنې $f(x,y)=0$.

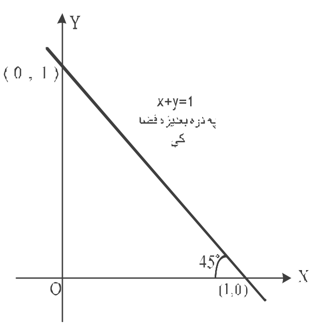
نوېدی ډول يوه قايمه استوانه نسبت د قايمو مختصاتو مستوي ته د هادي دمنحني په څير په همغه مستوی کې يوشانتې معادله لري.

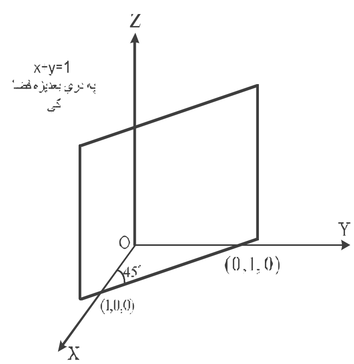
د قايم مختصاتومحور نظر د مختصاتو مستوي ته نارمل دی په کوم يوه چې استوانه قايمه ده، د استوانې د محور په نوم يادېږي.

په عمومي ډول سره، که چېرې يوه معادله په x او y کې د C يومنحني د xy په مستوي کې ددې دګراف لپاره ولري نو د همدې معادلې ګراف په درې بعديزه فضا کې يوه استوانوي سطحه رامېنځته کوي هغه چې د z– محور ته موازي يو مولد په ډول چې د xy– مستوي کې د C منحني په عرضي مسيرحرکت کوي رسمېږي. په ورته ډول، يو معادله په x او z کې يواځې يوه استوانوي سطحه په درې بعديزه فضا کې چې مولد يې د y محور ته موازي وي ښيي، او يوه معادله په y او z کې تنها يوه استوانوي سطحه په درې بعديزه فضا کې ښيي چې مولد يې د x محور ته موازي وي. په لنډ ډول:

يوه معادله چې د x ، y او z له دريو متحولينو څخه يواځې دوه متحوله ولري په درې بعديزه فضا کې يو استوانوي سطحه ښيي. د سطحې مولد، هغه محور ته موازي وي کوم چې په معادله کې شتون نه لري.

د بېلګې (مثال) په ډول د $x+y=1$ معادله په دوه بعديزه فضا کې يو مستقيم خط او په درې بعديزه فضا کې يو مستوي څنګه چې په لاندې ډول ښودل شوي دي ښيي.





۱۱. ۶. ۵ قایمه دایروي استوانه

قایمه دایروي استوانه یوه سطحه ده چې د یو مستقیم خط پوسیله کوم چې تل له یوه ثابت مستقیم خط سره موازي او هم له هغه څخه په یو ثابتي واټن لري واقع وي، رامېنځته کېږي.

ثابتي واټن ته شعاع او ثابت خط ته د استوانې محور وايي.

د یوې دایروي استوانې یوه برخه چې ددې محورته عمود (نارمل) وي یوه دایره ده.

یوه دایروي استوانه کیدای شي چې په لاندې ډول هم تعریف شي:

یوه قایمه دایروي استوانه یوه سطحه ده چې د یو خط پوسیله کوم چې تل یوه دایره قطع کوي او ددې په مستوي باندې عمود وي رامېنځته کېږي.

یوې استوانې ته چې د هغې مولدونه له یوې راکړل شوې سطحې سره په تماس کې وي یوه پوخوونکې استوانه (enveloping cylinder) وايي.

۱۱. ۶. ۶ دویمه درجه استوانې (The quadric cylinders)

د دویمې درجې استوانې معادله د

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots(i)$$

په شکل سره دی.

دویمه درجه استوانه یوه اېلیپټیکي استوانه، یوه هایپارابو لیکه استوانه یا پارابولیکه استوانه ده، که چېرې (i) معادله یوه بیضوي، یوهایپارابولا یا یو پارابولا په دوه بعدیزه فضاً کې یعني د xy په مستوي کې وښودلی شي.

۱۱. ۶. ۷ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د استوانې معادله چې $z = 0$, $x^2 + y^2 = 9$ دهادي په شان وي او مولد (اساسي خط) د[1، 2 − ،1]

ویکتور سره موازي وي پیداکړئ.

حل: فرضوو چې (α, β, γ) د استوانې کومه نقطه ده.

لدې امله د مولد معادلې چې د (α, β, γ)نه تیرېږي

$$\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{-2}=\frac{z-\gamma}{1}=t$$

پدې خط باندې دهرى يوې نقطې مختصات $(\alpha+t,\ \beta-2t,\ \gamma+t)$ دي کومه چې په راکړل شوي منحني باندې واقع ده که چېرې $(\alpha+t)^2+(\beta-2t)^2=9$ او $\gamma+t=0$ وي.

د دغو دوو معادلو نه د t په له منځه وړلو لاس ته راوړو چې

$$(\alpha-\gamma)^2-(\beta+2\gamma)^2=9$$

نو لدې امله د استواني معادله $(x-z)^2+(y+2z)^2-9=0$ ده، يعني،

$$x^2+y^2+5z^2-2xz+4yz-9=0$$

۲. مثال: د استواني معادله پيداکړئ چې مولدونه يې د $y=\frac{1}{3}z\ ,\ x=-\frac{1}{2}z$ سره موازي وي او د هغې لاربښود (هادي) منحني د $x^2+2y^2=1\ ,\ z=3$ بيضوي ده.

حل: فرضوو چې $P\ (\alpha,\beta,\ \gamma)$ د استواني کومه يوه نقطه ده.

لدې امله د مولد معادلې چې د P له نقطې تيرېږي

$$\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{-2}=\frac{z-\gamma}{3}=t$$

په دغه خط باندې د هرى يوې نقطې مختصات $(\alpha+t\ ,\beta-2t\ ,\gamma+3t)$ دي کوم چې په راکړل شوي بيضوي باندې واقع کېږي که چېرې

$$(\alpha+t)^2+2(\beta-2t)^2=1 \qquad \text{او} \qquad \gamma+3t=3$$

دغو دوو معادلو څخه د t په له منځه وړلو سره لاسته راځي چې

$$(\alpha+\frac{3-\gamma}{3})^2-2(\beta-\frac{6-2\gamma}{3})^2=1$$

يا

$$(3\alpha-\gamma-3)^2+2(3\beta+2\gamma-6)^2=9$$

يعني

$$9\alpha^2+18\beta^2+9\gamma2-6\alpha\gamma+24\beta\gamma+18\alpha-72\beta-54\gamma+72=0$$

يا

$$3\alpha^2+6\beta^2-3\gamma^2-2\alpha\gamma+8\beta\gamma-6\alpha-24\beta-18\gamma+24=0$$

په پایله کې د استواني معادله

$$3x^2+6y^2+3z^2-2xz+8yz+6x-24y-18z-24=0$$

ده.

۳. مثال: د 2 په شعاع یوې قایمې دایروي استواني معادله لاسته راوړئ چې د هغې محور (3 ،2 ،1) له نقطې څخه تېرېږي او له2 ،3 − او6 سره متناسب لوري لرونکي کوساینونه د 2 ،3 − ،6 نړي.

حل: د استواني محور

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{6} \qquad \text{یا} \qquad \frac{x-1}{2/7}=\frac{y-2}{-3/7}=\frac{z-3}{6/7}$$

دی.

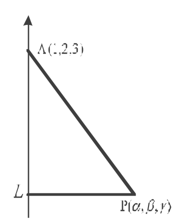
فرضوو چې(α, β, γ) په استواني باندې کومه یو نقطه ده. A(1، 2، 3) په محورباندې یوه نقطه ده.

لدې امله د استواني شعاع LP ده.

$$|PA|^2=(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2$$

او

$$AL=2/7(\alpha-1)-3/7(\beta-2)+6/7(\gamma-3)$$



$$\therefore \quad |LP|^2=(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2-\left[2/7(\alpha-1)-3/7(\beta-2)+6/7(\gamma-3)\right]^2$$

څنګه چې د استواني شعاع 2 ده، نو $|LP|^2=4$

$$\therefore \quad (\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-3)^2-\left[\tfrac{2}{7}(\alpha-1)-\tfrac{3}{7}(\beta-2)+\tfrac{6}{7}(\gamma-3)\right]^2=4$$

د دې رابطې په ساده کولو سره، مونږ پوهیږو چې د (α,β,γ) نقطه په

$$45\alpha^2+40\beta^2+13\gamma^2+36\beta\gamma-24\alpha\gamma+12\alpha\beta-42\alpha-280\beta-126\gamma+294=0$$

معادله کې صدق کوي. لدې کبله د استواني معادله

$$45x^2+40y^2+13z^2+36yz-24xz+12xy-42x-280y-126z+294=0$$

ده.

۱۱. ۶ پوښتنې

۱. د استواني معادله پیداکړئ چې د هغې هادي منحني $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, $z=0$ وي او مولد یې د $[1، 1، 1]$ له وکتور سره موازي وي.

۲.داستواني معادله پیداکړئ چې مولدونه یې د z محورسره موازي وي اوکوم چې د $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1$ منحني څخه تیریږي.

۳. د استواني معادله پیداکړئ چې د هغې هادي منحني $4x^2+y^2=2$, $z=0$ وي او د کومې چې مولدونه د $3x=-6y=2z$ سره موازي وي.

۴. د استواني معادله لاس ته راوړئ چې لارښود منحني یې $ax^2+by^2+cz^2=1,\ lx+my+nz=p$ او مولد یې د x له محور سره موازي وي.

۵. لاندې سطحې وڅیړئ.

$(i)\quad 2x^2-y^2=4 \qquad\qquad (ii)\quad z=\sin x$

$(iii)\quad x^2-y^2-4x-6y+11=0$

۶. د قایمې استواني معادله لاسته راوړي چې د هغې هادي منحني د xy په مستوي کې د $(0، 6، 4)$ مرکز او 5 شعاع په لرلو یوه دایره ده.

۷. د 2 شعاع په لرلو د قایمې دایروي استواني معادله پیداکړئ چې دهغې محور د $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{5}$ خط په اوږدو کې واقع وي.

۸. د 3 شعاع په لرلو د قايمي دايروي استوانې معادله لاسته راوړئ اودهغې محور $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{-1}$ خط وي.

۹. د قايمي دايروي استواني معادله لاسته راوړئ چې په دايرې باندې چې د $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ دريو نقطو څخه تيريږي د لارښود منحني په څير ځرګنده شوې وي.

مخروط (The cone)

۱۱. ۷. ۱ تعريف

يو مخروط يوه سطحه ده چې د يو مستقيم خط پوسيله رامينځته کيږي هغه چې د يوې ثابتې نقطې څخه تيريږي او يو راکړل شوی منحني پرې (قطع) کوي.

ثابتې نقطې ته د مخروط راس او راکړل شوي منحني ته د مخروط لارښود منحني يا دمخروط هادی وايي. حرکت کونکي خط ته د مخروط مولد وايي او د مولد هريوه ځانګړي حالت ته د مخروط يو مولد يا اساسي خط وايي.

يوه مخروط ته چې دهغه معادله دويمه درجه وي دويمه درجه مخروط وايي.

يو مخروط چې يوې سطحې ته د مماس د خطونو پواسطه چې له يوې راکړل شوې نقطې څخه رسميږي جوړشوې وي، دسطحې دراکړل شوی نقطې سره دهغې د راس په توګه راچاپيره شوی مخروط وايي.

۱۱. ۷. ۲ د يوه مخروط معادله

د مخروط معادله لاس ته راوړو چې دهغه راس د (α, β, γ) په نقطه کې او د هغه مولدونه د

$$f(x,y)=0, \quad z=0 \qquad \ldots(i)$$

منحني غوڅوي. د هر يوه خط معادله چې د (α, β, γ) نقطې نه تيريږي

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \qquad \ldots(ii)$$

ده. نوموړی خط د $z = 0$ مستوي سره د $\left(\alpha - \frac{l\gamma}{n},\ \beta - \frac{m\gamma}{n},\ 0\right)$ په نقطه کې مخامخ کیږي کوم چې به په راکړل شوي منحني باندې واقع شي که چیرې

$$f\left(\alpha - \frac{l\gamma}{n},\ \beta - \frac{m\gamma}{n}\right) = 0 \qquad \ldots(iii)$$

دغه د (ii) خط لپاره د (i) منحني دغوڅونويو شرط دی. په (ii) او (iii) معادلو کې د l،m،n په له منځه وړو سره لاس ته راوړو چې

$$f\left(\alpha - \frac{x-\alpha}{z-\gamma}\gamma,\ \beta - \frac{y-\beta}{z-\gamma}\gamma\right) = 0$$

کومه چې د مخروط غوښتل شوي معادله ده.

۱۱. ۷. ۳ دويمه درجه مخروطونه چې راس يې په مبدا کې وي

د یو مخروط د معادلې د ثبوتولو لپاره چې دهغه راس په مبدا کې وي په x،y،z کې متجانسه ده او که نه.

مونږ د

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \ldots(1)$$

دويمې درجې عمومي معادله په پام کې نيسو او ښيو که چیرې دا یو مخروط وښيي چې دهغه راس په مبدا کې وي ، نو $u = v = w = d = 0$

فرضوو چې $P(x',\ y',\ z')$ په مخروط باندې چې د (1) معادلې پوسيله ښودل شوی دی کومه یوه نقطه ده.

اوس، rx', ry', rz' په یو خط باندې چې P د O له مبدأ سره نښلوي د یوې نقطې عمومي مختصات دي.

ځرنګه چې OP د (1) مخروط یو موند دی، نو د(rx', ry', rz')نقطه پدې باندې بايد د r د هر قيمت لپاره واقع شي. نو لدې کبله

$$r^2(ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2fy'z' + 2gz'x' + 2hx'y') - 2r(ux' + vy' + wz') + d = 0$$

بايد د r یو عينيت وي.

لدې څخه لاس ته راځي چې

$$ax'^2+by'^2+cz'^2+2fy'z'+2gz'x'+2hx'y'=0 \qquad \ldots(i)$$

$$ux'+vy'+wz'=0 \qquad \ldots(ii)$$

$$d=0 \qquad (iii)$$

له (iii) څخه $d = 0$.

له (ii) څخه، مونږ پوهیږو که چېرې u، v، w ټول صفر نه وي، نو په مخروط باندې د هرې یوې نقطې مختصات (x', y', z') د لومړۍ درجې یوه معادله صدق کوي نو لدې کبله سطحه یو مستوي ده او دا زمونږ له وینا سره تضادلري.

لدې امله $u = v = w = 0$

په پایله کې مونږ څرګند کړل د یو مخروط معادله چې دهغه راس په مبدا کې وي، خامخا متجانسه ده.

په معکوس ډول، هره دویمه درجه متجانسه معادله یو مخروط ښیي چې دهغه راس په مبدأ کې وي.

دا د معادلې له ځانګړتیا او ماهیت څخه روښانه شوه که چېرې د x', y', z' مختصات په همدې معادلې کې صدق وکړي، نو همدارنګه rx', ry', rz' د r د ټولو قېمتونو لپاره صدق کوي.

لدې امله که چېرې د P هره یوه نقطه په سطحه باندې واقع وي، نو په OP باندې هره یوه نقطه او په پایله کې د OP ټول خط پدې باندې واقع کېږي.

پدې ډول سطحه د خطونو پوسیله چې له مبدأ څخه تېرېږي رامېنځته کېږي او ځکه نو، د تعریف سره سم دا یو مخروط دی چې راس یې په مبدأ کې دی.

یادونه: ددویمې درجې یوه متجانسه معادله د مستویانو یوه جوړه ښيي، که چېرې متجانسه افاده په خطي فکتورونو (په ضربي عاملونو) باندې تجزیه شي.

۱. **پایله:** که چېرې l, m, n د

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \qquad \ldots(1)$$

مخروط د هر مولد لورې ګرونکي نسبتونه وي نو په مولد باندې د (lr, mr, nr) هره یوه نقطه په ده باندې واقع ده او لدې امله

$$al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=0 \qquad \ldots(2)$$

په معکوس ډول، دا روښانه ده که چېرې د (2) معادلې دا پایله سمه (حقیقي) وي، نوخط د l, m, n لوري لرونکو نسبتونو په لرلو د مخروط مولد دی د کوم چې (1) معادله ده.

۲. پایله: د مخروط عمومي معادله چې دهغه راس د (α, β, γ) په نقطه کې وي

$$a(x-\alpha)^2 + b(y-\beta)^2 + c(z-\gamma)^2 + 2f(z-\gamma)(y-\beta) + 2g(x-\alpha)(z-\gamma) + 2h(x-\alpha)(y-\beta) = 0$$

ده. دا په اسانه ډول د (α, β, γ) نقطې ته د مبدأ د انتقال پوسیله ټاکل کیدلی شي.

۱۱. ۷. ۴ قایم دایروي مخروط

یو قایم دایروي مخروط یوه سطحه ده چې د یو خط پوسیله رامنځته کېږي کوم چې له یوې ثابتې نقطې، راس څخه مستقیماً تېرېږي او یوه ټاکلې زاویه له یو ثابت خط سره چې له راس څخه تیریږي جوړوي.

ثابت خط ته د مخروط محور او ټاکلې زاویې ته د مخروط نیمه عمود زاویه وایي.

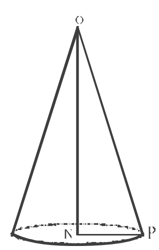
۱۱. ۷. ۵ د یو قایم دایروي مخروط پریکړي(مقطع)

د یو قایم دایروي مخروط پریکړې دثبوت لپاره چې د هر مستوي پوسیله چې دده په محور باندې عمود وي جوړیږي یوه دایره ده.

که چېرې یو مستوي چې د قایم دائروي مخروط ON په محور باندې چې دسره د α نیمه عمودي زاویې لرونکې دی عمودوي د N په نقطه کې سره غوځوي.

فرضوو چې P د مخروط د پریکړې کومه نقطه ده. څرنګه چې ON په هغه مستوي عمود دی کوم چې د NP خط پکښې شامل وي نو موږ ON په NP عمود لرو.
څرنګه چې

$$\frac{NP}{ON} = \tan N\hat{O}P = \tan \alpha,$$



یا $$NP = ON \cdot \tan \alpha$$

کوم چې د پریکړې د P نقطې د ټولو حالتونو لپاره ثابت ده.

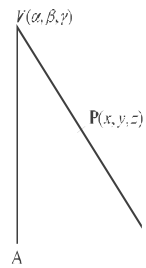
څکه نو د مخروط پریکړې یوه دایره ده چې N دهغې په مرکز کې دی.

۱۱. ۷. ۶ د قایم دایروي مخروط معادله

د قایم دایروي مخروط د معادلې د پیداکولو لپاره چې د هغه راس د (α, β, γ) په نقطه کې، او د هغه محور د

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

په خط او د هغه نیمه عمود زاویه θ وي.



کـــه چېرې V د مخروط راس او VA د مخروط محور وي.

په مخروط باندې د $P(x, y, z)$ هره نقطه پدې دول ده چې خط د هغه د (V) راس سره په نښلولو د VA له محور سره د θ زاویه جوړوي.

د VP لوری لرونکي کوساینونه د $z-\gamma, x-\alpha, y-\beta$ سره متناسب دي.

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}\ \ \sqrt{\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]}}$$

لدې کبله د مخروط غوښتل شوې معادله

$$\left[l(x-\alpha)-m(y-\beta)-n(z-\gamma)\right]^2=(l^2+m^2+n^2)\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\cos^2\theta$$

ده.

پایله (cor): که چېرې راس په مبدأ کې وي، د مخروط معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$(lx+my+nz)^2=(l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

سره کېږي.

۱۱. ۷. ۷ حل شوې مثالونه

۱. مثال: د مخروط معادله پیداکړئ چې د هغه هادي

$$x^2+4y^2-2x+8y-4=0, \quad z=3$$

او راس $(1، 2، -1)$ دی.

حل: دیو خط معادلې چې د (1 ،2 ،1−) راس نه تېرېږي

$$\frac{x+1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-1}{n} \qquad ...(1)$$

دي. دا د 3 = z مستوي سره د $\left(-1-\frac{2l}{n}\,,\ 2-\frac{2m}{n}\,,\ 2\right)$ په نقطه کې قطع کوي کوم چې به خامخا راکړل شوي منحني باندې که چېرې

$$\left(-1+\frac{2l}{n}\right)^2+4\left(2+\frac{2m}{n}\right)^2-2\left(-1+\frac{2l}{n}\right)+8\left(2+\frac{2m}{n}\right)-4=0$$

یا

$$\left(\frac{-n+2l}{n}\right)^2+4\left(\frac{2n+2m}{n}\right)^2+2-\frac{4l}{n}+16+\frac{16m}{n}-4=0$$

یا

$$(2l-n)^2-16(m+n)^2-4ln+16mn+14n^2=0 \qquad ...(2)$$

وې واقع کېږي.

په (1) او (2) کې د n,m,l په له منځه وړلو سره مونږ د مخروط معادله د

$$(2x-2-z+1)^2+16(y-2+z-1)^2-4(x+1)\,(z-1)+16(y-2)(z-1)+14(z-1)^2=0;$$

یا

$$(2x-z+3)^2+16(y+z-3)^2-4(xz-x+z-1)+16(yz-y-2z+2)+14(z-1)^2=0$$

په بڼه لاس ته راوړو، یعني،

$$4x^2+16y^2+31z^2-8xz+48\,yz+16x-112y-166z+203=0$$

۲. مثال: د مخروط معادله لاسته راوړئ چې د هغه راس د (0 ،1 ،1) نقطه ده او د هغه هادي منحني $y=0\,,\ x^2+z^2=4$ دی.

حل: دیو خط معادلې چې د (0 ،1 ،1) راس څخه تېرېږي

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z}{n} \qquad ...(1)$$

دي.

دا د $y = 0$ مستوي سره د $\left(1-\frac{l}{m}, 0, \frac{-n}{m}\right)$ په نقطه کې قطع کوي کوم چې به په راکړل شوي منحني باندې که چېرې

$$\left(1-\frac{l}{m}\right)^2+\left(\frac{-n}{m}\right)^2-4$$

یا

$$(m-l)^2-n^2=4m^2 \qquad ...(2)$$

وي واقع کېږي.

له (1) او (2) څخه د n,m,l په له منځه وړلو سره مونږ د

$$(y-1-x+1)^2+z^2-4(y-1)^2$$

یا

$$(y-x)^2+z^2=4(y^2-2y+1)$$

یعنې،

$$x^2-3y^2+z^2-2xy+8y-4-0$$

مخروط معادلې په شان لاس ته راوړو.

۳. مثال: دویمه درجې مخروط معادله لاسته راوړئ چې دهغه راس په مبدأ کې وي او کوم منحني څخه چې تېرېږي دهغه معادله د

$$ax^2+by^2-cz^2=1, \quad lx+my+nz=p$$

پواسطه راکړل شویدی.

حل: غوښتل شوې معادله یوه دویمه درجه معادله ده کومه چې متجانسه ده او کومه چې د هغو نقطو پواسطه صدق کوي هغه چې په دوه راکړل شویو معادلو کې صدق کوي.

مونږ $lx-my-nz=p$ یوځل بیا لکه د $\frac{lx+my+nz}{p}=1$ په بڼه لیکو.

نولدې کبله غوښتل شوې معادله

$$ax^2+by^2+cz^2=\left(\frac{lx+my+nz}{p}\right)^2$$

یا

$$(ap^2 - l^2)x^2 + (bp^2 - m^2)y^2 + (cp^2 - n^2)z^2 - 2lmxy - 2mnyz - 2nlzx = 0$$

ده.

۴. مثال: د قايم دايروي مخروط معادله لاسته راوړئ چې راس يې $(1 ،3 ،2)$، محور يې د $-x = \frac{y}{2} = z$ خط سره موازي وي او يو د هغو مولدونو څخه $1 ،1- ،1$ ته متناسب لوری لرونکي کوساينونه ولري.

حل: لوری لرونکي نسبتونه د محور او يو مولد په ترتيب سره $1 ،2 ،1-$ او $1 ،1- ،1$ دي. که چېرې θ نيمه عمودي زاويه وي،

$$\cos\theta = \frac{-1-2+1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{18}}$$

که چېرې $P(x، y، z)$ په مخروط باندې کومه نقطه وي نو

$$\cos\theta = \frac{-1(x-2)+2(y-3)-1(z-1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}}$$

یا

$$-\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{-x+2y+z-5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}}$$

یا

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{x-2y-z+5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+14}}$$

د دواړه خواو د مربع کولو او ساده کولو څخه لرو چې

$$4(x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+14) = 3(x^2+4y^2+z^2+25-4xy-2xz+10x-4yz-20y-10z)$$

يعنې،

$$x^2-8y^2-z^2+12xy+6xz-12yz-46x+36y-22z-19=0$$

کومه چې د مخروط غوښتل شوې معادله ده.

۵. مثال: وښاياست چې $fyz+gzx+hxy=0$ د دويمي درجې مخروط کوم چې د مختصاتو له محور څخه تېرېږي عمومي معادله ده.

حل: د دويمي درجې مخروط دپاره عمومي معادله چې راس يې په مبدأ کې وي

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \qquad ...(1)$$

ده.

څرنګه چې د مختصاتو محورونه د مخروط مولدونه دي، د دوی (0، 0، 1)، (0، 1، 0) او (1، 0، 0) لوری لرونکي کوساينونه بايد په (1) معادله کې صدق وکړي.

$$\therefore \quad a=b=c=0$$

نو لدې کبله (1) معادله د

$$fyz+gzx+hxy=0$$

حالت غوره کوي کومه چې د مخروط غوښتل شوي معادله ده.

۶. مثال: د قايم دايروي مخروط معادله لاسته راوړئ چې دهغه راس په مبدأ کې، محور يې د z – محور په اوږدو کې (به امتداد) او نيمه عمودي زاويه يې α وي.

حل: فرضوو چې $P(x،y،z)$ د مخروط کومه نقطه ده. د مولد لوری لرونکي نسبتونه چې د P له نقطې نه تيريږي $x،y،z$ دي او د z محور لوری لرونکي کوساينونه (1، 0، 0) دي.

لدې کبله

$$\cos\alpha=\frac{x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

يعنې،

$$x^2+y^2+z^2=z^2\ \sec^2\alpha$$

يا

$$x^2+y^2=z^2(\sec^2\alpha-1)$$

يعنې،

$$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$$

کومه چې د مخروط غوښتل شوي معادله ده.

۱۱. ۷ پوښتنې

۱. د مخروط معادله لاس ته روا‌ړئ چې دهغه راس د$(3،1،2)$ په نقطه کې وي او دهغه هادی منحني $2x^2+3y^2=1,\ \ z=0$ وي.

۲. د مخروط معادله لاس ته راوړئ چې دهغه راس په مبدأ کې وي او هادی منحني د $x=a,\ \ y^2+z^2=b^2$ دایره وي.

۳. د مخروط معادلـــه لاس ته راوړئ چـــې دهغه راس د $(\gamma,0,0)$ په نقطه کـــــې وي او قاعده یې د $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ z=0$ بیضوي وي.

۴. د مخروط معادله لاسته راوړئ چې د هغه راس $(1،2،3)$ وي او لارښود (هادی) منحني $x^2+y^2+z^2=4\ ,\ x+y+z=1$ دایره وي.

۵. وښایاست هغه خطونه چې د (α,β,γ) نقطې څخه تېرېږي اودهغه لوری لرونکي نسبتونه د $al^2-bm^2+cn^2=0$ صدق کوي د

$$a(x-\alpha)^2+b(y-\beta)^2+c(z-\gamma)^2=0$$

مخروط رامېنځته کوونکي دي.

۶. د مخروط معادله لاسته راوړئ چې راس یې په مبدأ کې وي او دهغه د مولدونو لوری لرونکي کوسائینونه د $3l^2-4m^2+5n^2=0$ رابطه صدق کوي.

۷. د مخروطونو لپاره معادلې لاسته راوړئ چې راسونه یې په مبدأ کې وي اوکوم چې د منحنیانو څخه تېرېږي هغو معادلې د

$$
\begin{aligned}
&(i) && z=2,\ x^2+y^2=4\\
&(ii) && ax^2+by^2=2z,\quad lx+my+nz=p\\
&(iii) && x^2+y^2+z^2+x-2y+3z=4,\\
& && x^2+y^2+z^2+2x-3y+4z=5.
\end{aligned}
$$

پواسطه راکړل شویدي.

۸. د قایم دایروي مخروط معادله لاس ته راوړئ چې د $(3،1،2)$ نقطې څخه تېرېږي، راس یې په $(1،1،2)$ نقطه کې وي او محور یې د $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+2}{3}$ خط سره موازي وي.

۹. د دايروي مخروط معادله لاسته راوړئ چې (2 ،1 ،1) نقطې څخه تېرېږي او راس يې په مبدا کې وي او محور يې د $\frac{x}{2}=-\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$ خط وي.

دويمه درجه سطحي

۱۱. ۸. ۱ دويمه درجه عمومي معادله

د

$$ax^2-by^2+cz^2+2fyz+2gxz-2hxy+2ux-2vy+2wz+d=0$$

د x ، y ، z دويمې درجې عمومي معادلې هندسي محل ته مخروط بوله سطحي(بيضوي بوله، هايپربوليک بوله، پارابوليک بوله) يادويمه درجه وايي. دغې سطحې ته مخروطي دوله وايي ځکه د دې د مستوي مقطع يو مخروط ده، دويمه درجه عمومي معادله کېدلی شي، چې د قايم مختصاتو د محورونو د بدلون يا انتقال پوسيله، دلاندې شکلونو څخه يواځې يوې بدلون کړي وي، د ځانګړي سطحې نوم کوم چې د کومې معادلې هندسي محل دی دهغه په څنګ کې ليکل شوی دی.

1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$	بيضوي
2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$	موهومي بيضوي
3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$	يو مخ ايزه هايپارابولويد
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$	دوه مخ ايزه هايپارابولويد
5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$	موهومي مخروط
6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$	مخروط
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz,$	بيضوي بوله پارابولويد
8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz,$	هايپارابوليك پارابولويد

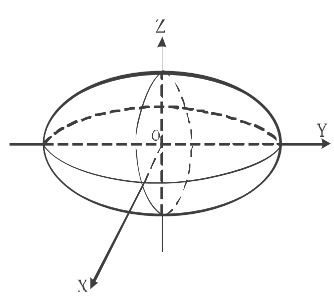
9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,$	بیضوي دوله استوانه
10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1,$	هایپرابولیکه استوانه
11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$	موهومي استوانه
12. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$	د متقاطع مستویانو جوړه
13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$	د موهومي مستویانو جوړه
14. $y^2=4ax,$	پارابولیکه استوانه
15. $y^2=a^2,$	دوه حقیقي موازي مستویاني
16. $y^2=-a^2,$	دوه موهومي مستویاني
17. $y^2=0,$	دوه یو پر بل منطبق مستویاني

هغه معادلې چې مخروطونه او استوانې ښیي د مخه څېړل شویدي لوستونکي د دغو سطحو د ځانګړتیاوو سره اشنا دي.

موږ به د سطحو چې د 1، 3، 4، 6، 7 او 8 معادلو پواسطه ښودل شویدي ماهیت اوځیني اړیني(مهمې) هندسي ځانګړتیاوې وڅېړو.

۱۱. ۸. ۲ بیضوي: د

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad ...(1)$$



یوه سطحه چې په درې بعدیزه فضا کې د (1) شکل معادلې پواسطه یا دیوې معادلې په پواسطه چې د (1) شکل معادلې حالت ته دبدلون وړ او تعریف شي بیضوي (الیپسوید) ورته وایي.

دا نسبت د قایم مختصاتوهر یو محورته، او مبدأ ته متناظره ده. مبدأ هر یو وتر په دوو مساوي برخو ویشي، کوم چې له مبدأ څخه تیرېږي او له همدې کبله ورته د سطحې مرکز وایي.

د XOY مستوي هر وتر چې په همدې مستوي باندې عمود وي په دوو برخو ویشي او سطحه نسبت همدې مستوي ته متناظره ده په ورته ډول، یوه سطحه نسبت د YOZ او ZOX مستویانو ته متناظره ده.

دغو دریو مستویانو ته بنسټیزه یا اساسي مستویانې وایي همدارنګه ټول وترونه چې په دوی باندې عمود دي په دوه مساوي برخو ویشي. د دغو دریو بنسټیزو مستویانو د پرېکړې دریو خطونو ته چې جوړه ایزه په پام کې نیول کېږي بنسټیز محورونه وایي. پدې حالت کې د مختصاتو محورونه بنسټیز(اصلي) محورونه دي.

x یو قیمت اخیستلای نشي کوم چې په عددي ډول سره له a نه لوی وي، په بل ډول y^2 یا z^2 کېدای شي منفي وي. په ورته ډول y او z په عددي ډول په ترتیب سره له b او c نه لوی قیمتونه اخیستلای نشي.

څکه نو سطحه د $z=-c\ ,\ z=c\ ;\ y=-b\ ,\ y=b\ ;\ x=-a\ ,\ x-a$ مستویانو په منځ کې واقع ده او همدارنګه یوه تړلې سطحه ده.

د x - محور د سطحې سره د (a،0، 0) او (−a،0، 0) په دوه نقطو کې مخامخ کېږي. څکه نو سطحه د 2a په یواوږدوالي د x - محور پرې کوي. په ورته ډول هغه اوږدوالې چې د y او z په محورنو باندې قطع کېږي په ترتیب سره 2b او 2c دي.

د 2a ،2b، 2c په اوږدوالي چې اصلي محورونه قطع کېږي د بیضوي د محورونو اوږدوالي ورته وایي.

د z = k مستویانو پواسطه د سطحې پرې کړې شوې برخې (قطعې) کومې چې د XOY مستوي ته موازي دي بیضوي ته ورته معادلې لري :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\ ,\quad z=k\ ,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

یادونه:

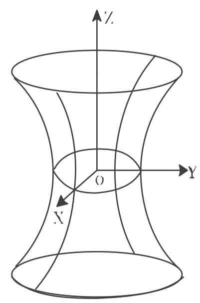
۱. کره د بیضوي یو ځانګړی حالت دی. که چېرې a = b = c، نو د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیضوي د $x^2-y^2+z^2=a^2$ کرې حالت غوره کوي.

۲. یوه سطحه چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ معادلې پوسیله ښودل شوې وي، کومه چې د x،y، z حقیقي قیمتونو پواسطه صدق نه کوي موهومي (خیالي) ده.

۱۱. ۸. ۳ یو مخ ایزه (شیت) هایپارابولوئید: د

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad ...(1)$$

یوه سطحه چې په درې بعدیزه فضأ کې د (1) شکل یوې معادلې پواسطه یا د یوې معادلې په واسطه چې (1) شکل معادلې حالت ته دبدلون وړ اوتعریف شي یومخ ایزه هایپارابولوئید ورته وایي.



مبدأ ټول وترونه چې لدې څخه تېرېږي په دوه مساوي برخو ویشي او لدې سببه، د سطحې مرکز دی.

د قایم مختصاتو مستوي ګاني ټول وترونه چې په دوی باندی عمود وي په دوو برخو ویشي او لدې کبله، د سطحې متناظری مستویانې یا بنسټیزې مستویاني دي. د قایمو مختصاتو محورونه د دوې اصلي محورونه دي.

د x محور ته سطحې سره د (a ،0، 0)،(−a،0،0) په نقطو کې قطع کوي او له همدې کبله سطحه د x محور د 2a په اوږدوالي پرې کوي. په ورته ډول هغه اوږدوالی چې د y په محورباندی پرې کرکېږي 2b دی، حال دا چې د z - محور سطحه سره په کومو حقیقي نقطو کې نه قطع کوي.

د z = k مستویانو پوسیله پرې شوې برخې کومې چې د XOY مستوي سره موازي دي ورته بیضوېن دي لکه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}, \quad z=k \qquad ...(2)$$

د هغو مرکزونه چې د z په محور واقع دي او کوم چې د k د اندازې د ډېرېدلو په شان ډېرښت مومي. پدې برخه کې د k د ډېرښت لپاره کوم حد نشته. سطحه ممکن، لدې امله، د (2) متحولې بیضوي پوسیله تولید شوې وي چېرته چې k د $-\infty$ نه تر $+\infty$ پورې تغییر کوي.

یوځـــل بیا، د $x=k$ او $y=k$ مستویانـــــــو پوسیله بیلـــې شوې برخې (مقطع ګانـــې) په ترتیب سره، $y=k$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$ ، $x=k$ ، $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$ هایپارابولا دي.

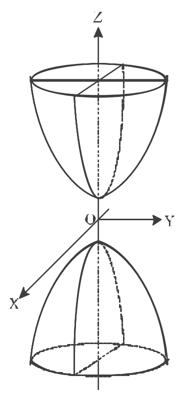
یادونه: که چېرې $a = b$ وي د XOY مستوي کې د سطحې اثر نښه $(trace)$ د $x^2 + y^2 = a^2$ یوه دایره ده او د xy - مستوي سره د سطحو موازي اثرونه د $z = k$, $x^2 + y^2 = a^2 - \frac{k^2}{c^2}$ دایرې دي.

ځکه نو پدې حالت کې، د سطحې په هکله ممکن دارنـــګه فکر وشي چـــې د z د محور پـــه شاوخوا د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ هایپارابولا د دوران پواسطه لاسته راځي او دغه دوران ته هایپارابولوئید وایي.

۱۱. ۸. ۴ دوه مخه ایزه هایپارابولوئید: د

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad ...(1)$$

یوه سطحه چې په درې بعدیزه فضا کې د (1) شکل یوې معادلې پواسطه یا یوې معادلې پواسطه چې د (1) شکل معادلې حالت ته د بدلون وړ وي تعریف شي دوه مخه ایزه هایپارابولوئید ورته وایي.



د مبدأ ټول وترونه چې له همدې ځخه تېرېږي په دوه برخو ویشي اوندې امـه، د سطحې مرکز دی.

د قایم مختصاتو مستویانو ټول وترونه چې په دوی باندې عمود وي په دوه برخو ویشي او له همدې کبله د سطحې د تناظر مستویاني یا د سطحې اصلي مستویاني دي. د قایم مختصاتو محورونه اصلي محورونه دي.

د z - محور له سطحې سره (o،o،c) او (o،o، − c) په نقطو کې قطع کوي چېرته چې په همدی ډول د x او y محورونه د سطحې سره په موهومي نقطو کې قطع کوي.

د yz په مستوي کې او د zx په مستوي کې مرتسمونه یا اثرونه (نښې) په ترتیب سره د $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ او $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ هایپارابولاوې دي. سطحه د xy په مستوي کې کوم اثر(نښه) نه لري.

د $x=k$ او $y=k$ مستویګانو پوسیله بیلې شوې برخې په ترتیب سره د $x=k$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{k^2}{a^2}$ او $y=k$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{k^2}{b^2}$ هایپارابولاوې دي.

د $z=k$ مستوي سطحه د $z=k$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$ بیضوي په بڼه پرې کوي کومه چې د $-c<k<c$ لپاره موهومي ده. نو لدې کبله د سطحې کومه برخه د $z=c$، $z=-c$ مستویګانو تر منځ شتون نه لري. چېرته چې $k^2>c^2$، بېله شوې برخه حقیقي بیضوي ده کومه چې د k^2 په ډېریدلو سره ډېرېږي.

۱۱. ۸. ۵ مرکزي مخروطونه

څلور معادلې چې پورته په پام کې ونیول شوې ټولې د $ax^2+by^2+cz^2=1$ په شکل کې شاملې دي.

د $ax^2+by^2+cz^2=1$ سطحه یوه بیضوي (الیپسوئید) ده که چېرې a،b،c ټول مثبت وي، واقعي(اصلي) بیضوي دي، که چېرې a، b،c ټول منفي وي، یو مخه ایزه هایپارابولوئید دی، که چېرې دوه د مثبت او یو منفي وي، او په اخر کې دوه مخه ایزه هایپارابولوئید دی، که چېرې دوه منفي او یو مثبت وي.

ټولې دغه سطحې دي چې یو مرکزاو درې اصلي مستویاني لري، لدې کبله؛ د مرکزي مخروطونو په څېر پېژندل کېږي.

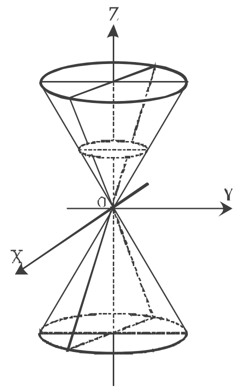
۱۱. ۸. ۶ بیضوي دوله مخروط: د

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

یا

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz^2, \quad c>0 \qquad \ldots(1)$$

یوې سطحې ته چې په درې بعدیزه فضا کې د (1) شکل معادلې پواسطه یا دیوې معادلې پواسطه چې د (1) شکل معادلې حالت ته د بدلون وړ وي تعریف شي بیضوي دوله مخروط ورته وایي.



سطحه نسبت د قایم مختصاتو محورونو ته، د قایم مختصاتو مستویانوته او مبدأ ته متناظره ده. دا د قایم مختصاتو محورونه سره یواځې په مبدأ کې قطع کوي.

د xy په مستوي کې ګراف(اثر) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ دی کومه چې نقطه ده، یعنې مبدأ. د yz په مستوي کې او د zx په مستوي کې ګراف په ترتیب سره $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ او $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ دي. دا د مستقیمو خطونو جوړې دي.

د $x=k$ او $y=k$ مستویانو پوسیله بېلې شوې برخې یا مقطع ګانې په ترتیب سره د $x=k\,,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{a^2}$ او $y=k\,,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2}$ هایپرابولاوې دي.

د $z=k$ مستوي راګرځل شوې سطحه د k د ټولو قیمتونو لپاره بې له $k=0$ څخه کله چې بېله شوې برخه(مقطع) نقطه (مبدأ) وي د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ بیضوي په ډول قطع کوي.

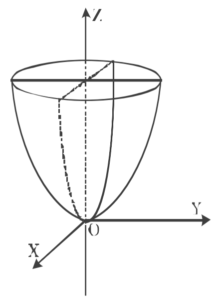
ځکه نو سطحه یو بیضوي ډوله مخروط دی چې راس یې په مبدأ کې دی او د z–محور دهغه د محور په څېر دی.

یادونه: که چېرې $a=b$، نو په مستویانو کې د مخروط ټول مرتسمونه (اثرونه) د xy - مستوي سره موازي دایرې دي. نو لدې کبله سطحه یو قایم دایروي مخروط دی.

۱۱. ۸. ۷ بیضوي ډوله پارابولوئید: د

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad \ldots(1)$$

يوې سطحې ته چې په درې بعديزه فضأ کې د (1) شکل معادلې پواسطه يا د يوې معادلې پواسطه چې د (1) معادلې حالت ته د بدلون وړ وي ځرګنده او تعريف شوې وي بيضوي دوله پارابولوئيد ورته وايي.



د $x = 0$ او $y = 0$ مختصاتو مستوي ګانې وترونه چې دوی ته عمود دي په دوو برخو ويشي او لدې امله دوی دوه متناظر مستوياني يا اصلي مستويانې دي.

z منفي کيدلی نه شي، او لدې کبله د $z = 0$ مستوي منفي خوا ته د سطحې کومه برخه شتون نه لري موږ c مثبت په پام کې نيسو.

د $z = k$ ، $(k > 0)$ مستويانو پوسيله بيلې شوې برخې چې د xy – مستوي سره موازي وي د

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k \qquad \ldots(i)$$

يو شانتې (ورته) بيضوي ګانې دي چې د هغوی مرکزونه د z په محور واقع دي او کومې چې د k داندازې په ډيريدلو سره ډيريږی؛ د k د ډيرېدلو لپاره کوم حدود ټاکل شوي ندي. امکان لری سطحه داسې وګڼل(فرض) شي ځنګه چې د (i) متحولې بيضوي پوسيله رامينځته شوې ده.

ځکه نو سطحه ټوله د $z = 0$ مستوي په مثبته خواکې پرته ده او لاېتناهي پورې پراختيا مومي. د yz او zx مستويانو سره موازي مستويانو پوسيله د سطحې ځخه بيله شوې برخه په روښانه ډول د $\frac{y^2}{b^2} = cz - \frac{k^2}{a^2}$ او $\frac{x^2}{a^2} = cz - \frac{k^2}{b^2}$ پارابولاوې دي.

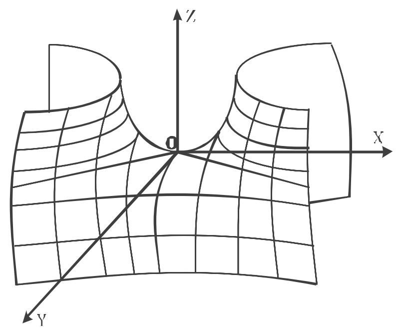
يادونه: که چېرې $a = b$ ، د سطحې اثر (مرتسم) په يو مستوي کې چې د xy له مستوي سره موازي وي يوه دايره ده او سطحه بنايي چې داسې وګڼل(قبوله) شي چې د z - د محور په شاوخوا د $\frac{x^2}{a^2} = cz, \ \ y = 0$ پارابولا د يو دوران په وسيله رامينځته شوې وي.

پاړابولوئيد ته په هغه صورت کې د دوران پاړابولوئيد وايي.

۱۱. ۸. ۸ هايپربولي پارابولوئيد: د

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad \ldots(1)$$

يوې سطحې ته په درې بعديزه فضا کې چې د (1) شکل معادلې پواسطه يا د يوې معادلې پواسطه چې د (1) معادلې حالت ته د بدلون وړ وي تعريف شوې وي هايپارابولي پارابولوئيد وايي.



د $x=0$ ، $y=0$ قايم مختصاتو مستوينې دوه اصلي (اساسي) مستويانې دي.

د $z=k$ مستويانو پوسيله بېلې شوې برخې د $z=k$, $\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}=ck$ هايپارابولا ته چې د هغوی مرکزونه د z په محور باندې واقع دي ورته دي.

که چېرې k مثبت وي، د هايپرابولا حقيقي محور د x له محور سره موازي دي، او که چېرې k منفي وي، د هايپارابولا حقيقي محور د y له محور سره موازي دی.

د $z=0$ مستوي پوسيله بېله شوې برخه (مقطع) د $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $z=0$ او $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}$, $z=0$ خطونو يو جوړه ده.

دمستويانو پوسيله بېلې شوې برخې چې د yz اوzx مستويانوسره موازي وي په ترتيب سره د $\frac{y^2}{b^2}=-cz-\frac{k^2}{a^2}$ او $\frac{x^2}{a^2}=cz-\frac{k^2}{b^2}$ پارابولاوې دي.

يادونه: ۱. دغې سطحې ته يو زين بوله سطحه وايي، او مبدأ ته د زين يوه نقطه وايي.

۲. دوه معادلې چې په ورستنيو دوه بندونو کې په پام کې نيول شوې دي دواړه په څرګند ډول د $ax^2+by^2=cz$ په حالت کې شاملې دي.

دغه معادله يو بيضوي ډوله پارابولوئيد ښيي که چېرې a او b دواړه مثبت يا دواړه منفي وي، او يو هايپارابول ډوله پارابولوئيد ښيي که چېرې يو يې مثبت او بل يې منفي وي. نو لدې کبله د بيضوي ډوله پارابولوئيد لپاره $a\cdot b$ مثبت دي خو د هايپرابول ډوله پارابولوئيد لپاره $a\cdot b$ منفي دی.

۱۱. ۸. ۹ د خط پوسيله جوړه شوې سطحه (Ruled surface)

يوه سطحه چې د يو خط د حرکت پوسيله د راکړل شويو شرايطو لاندې جوړه شوې وي د خط پوسيله جوړه شوې سطحه وايي. حرکت کوونکي خط ته د سطحې مولد (رامېنځته کوونکی) وايي او د مولد يو ځانګړي حالت ته د سطحې مولد يا عنصر وايي.

مستوياني، استواني او مخروطونه د خط پوسيله جوړې شوې سطحې دي. يو مستوي دخطونو پواسطه رامېنځته کيږي چې د يو راکړل شوي خط سره موازي وي. يوه استوانه د يوه خط پوسيله رامېنځته شوې سطحه ده چې د هغې ټولې کښنې(مولد) کرښې سره موازي وي، او يو مخروط د يو خط پوسيله رامېنځته شوې سطحه ده چې دهغه ټولې کښنې کرښې سره متلاقي يا منطبق وي.

۸،۱۱. ۱۰ حل شوي مثالونه

۱. مثال: ثبوت کړئ چې $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ يو مخيزه هايپارابولوئيد د يو خط پوسيله رامېنځته شوې سطحه ده.

حل: مونږ يو ځل بيا د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ يو مخيز هايپارابولوئيد معادله د

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \qquad \ldots(1)$$

يا

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

په بڼه ليکو.

دغه دواړه شکلونه هريوکولی شو چې يوځل بيا

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}} \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}} \qquad \ldots(3)$$

اوس، مونږ په پام کې نيسو ، چې د خطونو دوه کورنۍ په (2) او (3) مساوي کسرونو کې په ترتيب سره د λ او μ دوه اختياري مساوي ثوابتو په وضع کولو سره لاس ته راځي.

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad 1+\frac{y}{b}=\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right), \qquad \ldots(A)$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad 1-\frac{y}{b}=\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right), \qquad \ldots(B)$$

د λ ثابت د هر قيمت سره، د (A) خطونو د کورنۍ يوغړی مطابقت لري او د μ ثابت د هر قيمت سره د (B) خطونو کورنۍ يو غړی مطالقت لري.

اوس به مونږ پوه شو چې د (A) او (B) خطونو دهريوه نقطه په (1) هايپرابولوئيد باندې واقع کيږي.

که چيرې $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ د (A) کورنۍ د يوغړي کومه يوه نقطه وي چې د λ د λ_0 ځينو قيمتونو لپاره لاسته راځي مونږ لرو چې

$$\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\lambda_0\left(1-\frac{y_0}{b}\right), \quad 1+\frac{y_0}{b}=\lambda_0\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)$$

د دوی څخه د λ_0 په له منځه وړلوسره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1-\frac{y_0^2}{b^2},$$

يا

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

دغه اړیکه راښیي چې $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ د (1) هایپارابولوئید یوه نقطه ده.

ورته ثبوت د (B) خطونو د کورنۍ لپاره صدق کوي.

نو څنګه چې λ او μ یو د بل سره توپیر لري، مونږ د (A) او (B) د خطونو دوه کورنۍ لاسته راوړو د کومو چې هر غړی په بشپړه توګه په هایپارابولوئید باندې واقع کېږي.

څکه نو یومخیزه هایپارابولوئید د یوه خط پوسیله رامنځته شوې سطحه ده کومه چې ښایي د خطونو د دوه کورنیو یا (A) او یا (B) پوسیله جوړه شوې وي.

یادونه: د (A) او (B) خطونو کورنۍ دوه ځرګند سیستمونه دي او د یوه سیستم یو غړي د بل سیستم هریو غړي سره یوشانتی کېدلای نشي که څه هم حقیقي قیمتونه یې په λ او μ سره بنودل کېږي.

۲. مثال: د $x^2+z^2-3x-y-z-1=0$ پوسیله تعریف شوې سطحه ځرګنده کړئ.

حل: مونږ راکړل شوې معادله یو ځل د

$$x^2-3x-z^2+z=y+1$$

په څېر لیکو، یعنې

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=y+\frac{7}{2}$$

د $X=x-\frac{3}{2}$, $Y=y-\frac{7}{2}$ او $Z=z+\frac{1}{2}$ لیکلو پواسطه، مونږ محورونه د $\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{7}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ نوې مبدأ ته انتقالوو.

نو لدې کبله دسطحې معادله د $X^2+Z^2=Y$ بڼه غوره کوي کومه چې د یو الپتیکي پارابولوئید ستندرد معادله ده.

څکه نو راکړل شوې معادله یو الپتیکي پارابولوئید چې راس یې په $\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{7}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ کې او خلاصه خوله یې بهر(بیرون) د y – محور مثبت لوري ته ښیي.

۳. مثال: د P(x، y، z) نقطې د حرکت کولو هندسي محل معادله پیداکړئ چې دهغې واټن د (1، 0، 0) له نقطې څخه د (0، 0، 1−) نقطې له واټن جمع یو سره مساوي وي. د سطحې ځرنګوالی وټاکئ.

حل: له راکړل شویو معلوماتو څخه مونږ لرو چې

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}+1$$

$$x^2-2x+1+y^2+z^2=x^2+2x+1+y^2+z^2+1+2\sqrt{(x+1)^2-y^2+z^2}$$

یا

$$-4x-1=2\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

نو، د دواړو خواوو په مربع کولونه، مونږ لاس ته راوړو چې

$$16x^2+8x+1=4(x^2+2x+1+y^2+z^2)$$

یعني

$$12x^2-4y^2-4z^2=3$$

یا

$$\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{3/4}-\frac{z^2}{3/4}=1$$

دغه یو دوه مخیزه هایپرابولوئید دی چې مرکز یې په مبدأ کې او د x- محور د پرېکوونکي (تقاطع) محور په شان دی.

۴. مثال: د $x^2+4y^2=z^2-4$ سطحه وڅېړئ رسم یې کړئ.

حل: راکړل شوي معادله د $x^2+4y^2-z^2=-4$ په بڼه ده. یعنی،

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$$

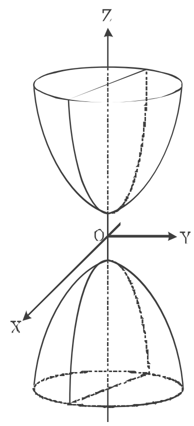
کومه چې د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ معادلې بڼه لري.

لدی امله راکړل شوي معادله یو دوه مخیزه هایپرابولوئید ښیي.

دا د z له محور سره د $(0،0،2)$ او $(0،0،-2)$ په نقطو کې مخامخ کېږي.

دا د xy په مستوي کې کوم اثر (بڼه) نه لري .

د xz په مستوي او yz په مستوي کې یې نښې (اثرونه) په ترتیب سره د $x^2-z^2=-4$ او $4y^2-z^2=-4$ هایپرابولاوې دي. د سطحې رسم(سکېچ) په لاندې ډول سره دی.



۸ .۱۱ پوښتنې

دسطحو څرنګوالې څرګند کړئ کومې چې د لاندې معادلو پوسیله تعریف شوې دي. او همدارنګه د دوی د نښو (رسمونو) څرنګوالې د قایم مختصاتو په مستویانو کې پیداَ کړئ.

1. $4x^2+4y^2+4z^2-4x+16y+12z+1=0$
2. $x^2+4y^2+4z^2-4x=0$
3. $x^2+4y^2+z-4=0$
4. $z^2-4y^2-16x-16y-2z+49=0$
5. $x^2+y^2=2x-z^2$
6. $100x^2+25y^2+100=4z^2$
7. $x^2-9y^2-4z^2-6x+18y+16z+20=0$
8. $x^2+y^2-4z^2=0$
9. $x^2+6x-y^2+2y-z^2+4z+10=0$

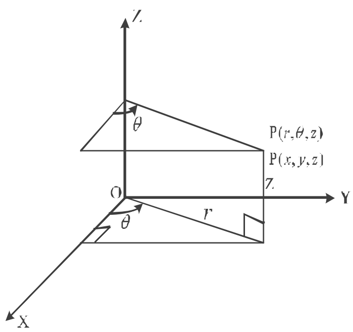
۱۰. ثبوت کړئ چې د $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$ هایپارابول بوله پارابولوئید د خط پوسیله رامېنځته شوې یوه سطحه ده.

کروي مثلثات

۱۱. ۹. ۱

په دوه بعديزه تحليلي هندسه کې مونږ وليدل چې د ځينو منحنيانو ځانګړتياوې په خورا اسانۍ سره مطالعه کېدای شي که چېرې د دوی معادلې قطبي مختصاتو ته انتقال شي. په ورته ډول په درې بعديزه هندسه کې ځينې سطحې په خورا اسانۍ سره ځرګندولې شو که چېرې د دوی معادلې په استوانوي يا په کروي مختصاتو کې وښودل شي. مونږ به ووينو چې کروي مختصات په طول البلد او عرض البلد مختصاتو پورې چې په بېړۍ چلولو کې ترينه کار اخيستل کيږي اړه لري. پدې برخه کې به مونږ هم په بيلو بيلو ځايونو کې د قبلي د لوري د پيداکېدو ميتودونه وڅېړو.

۱۱. ۹. ۲ استوانوي مختصات



د P(x، y، z) يوې نقطې $(r,\ \theta,\ z)$ استوانوي مختصات د x او y پرځای د قطبي مختصاتو د عوض کېدلو پواسطه او z په ورته پاتې کېدلو سره لاسته راځي.

د اسانتيا لپاره، مونږ به په معمول ډول $r \geq 0$ او $0 \leq \theta < 2\pi$ ته اړتيا لرو.

د xy په مستوي کې د مستطيلي او قطبي مختصاتو ترمينځ له اړيکو څخه، دا ځرګنديږي چې په درې بعديزه فضأ کې د يوې نقطې مستطيلي او استوانوي مختصات د $z = z\ ,\ x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ يا په بلې طريقې سره

$$z = z\ \ ,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

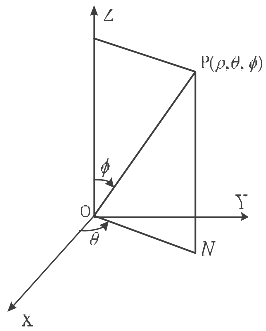
پواسطه اړيکه لري.

د علامو لپاره تړون (کړنلاره تاکل)

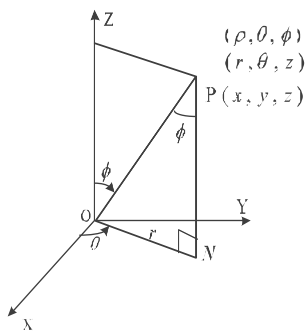
د θ زاويه، د xy په مستوي کې، د ox محور څخه د ساعت د عقربې د مخالف لوري په مطابق اندازه کيږي.

د z – مختصه د NP په مطابق چې د OZ يا OZ' سره موازي وي (په معمول ډول) مثبت يا منفي ده.

۱۱. ۹. ۳ کروي مختصات



په درې بعديزه فضأ کې دP يوې نقطې کروي مختصات (ρ, θ, ϕ)په شکل کې ښودل شوي دي. د ρ مختصه له مبدأ څخه د P تر نقطې پورې واټن دی. د θ مختصه د قطبي مختصو په شان ده او د ϕ مختصه د مثبت z محور څخه تر هغه قطعه خط پورې چې مبدأ د P سره نښلوي زاويه ده. مونږ به اړتيا ولروچې $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$



د P يوې نقطې د کروي او استوانوي مختصاتو تر مېنځ اړيکې په شکل کې ښودل شوي دي

$$r = \rho \sin\phi, \ \theta = \theta, \ z = \rho\cos\phi$$

د دغو اود $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ معادلو په يوځای کولو، مونږ د P نقطې د کروي او مستطيلي مختصاتو تر مېنځ لاندې اړيکې لاسته راوړو.

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \ \ y = \rho\sin\phi\sin\theta, \ \ z = \rho\cos\phi$$

د دې برسيره، څرنګه چې ρ د مبدأ او P نقطې تر مېنځ واټن دی، مونږ لرو چې $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

۹،۱۱. ۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د يوې نقطې کروي مختصې $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ دي. د دې نقطې مستطيلي مختصات پيداکړئ؟

حل: دلته $\rho = 4, \ \theta = \frac{\pi}{3}, \ \phi = \frac{\pi}{4}$ ، نو

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{6}$$

$$z = \rho \cos\phi = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\sqrt{2}$$

لدي امله د نقطې مستطيلي مختصې $\left(\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{2}\right)$ دي.

۲. مثال: لاندې سطحې وڅېړئ.

$$(i)\quad \rho = \rho_0, \qquad (ii)\ \theta = \theta_0, \qquad (iii)\ \phi = \phi_0$$

چېرته چې $\rho_0,\ \theta_0$ او ϕ_0 ثابت دي.

حل:

i. د $\rho = \rho_0$ سطحه د ټولو نقطوڅخه جوړه شوې ده د کومو چې له مبدأ څخه د ρ واټن ρ_0 دی. ρ_0 غیر منفي په پام کې نیول شویدی. دغه د ρ_0 په شعاع یوه کره ده چې مرکز یې په مبدأ کې دی.

ii. د $\theta = \theta_0$ سطحه نیم مستوي دی چې د z – محور په اوږدو کې نښلول شویدی اود x – محور مثبت لورسره د θ_0 یوه زاویه جوړوي. د (r,θ,z) هره نقطه په دغې سطحې باندې، θ د θ_0 قیمت لري، خو r او z د $r \geq 0$ زمونږ د فرضيې لپاره بې له ځانګړتیوب نه ازاد دي

iii. د $\phi = \phi_0$ سطحه د ټولو نقطو څخه جوړه شویده د کوم چې یوټوټه(قطعه)خط تر مبدأ پورې د z – محور مثبت لورسره د ϕ_0 یوه زاویه جوړوي. که چېرې $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$ ، دا به یو مخروط وي چې خوله یې پورته خواته دي او که چېرې $\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \pi$ ، دا به یو مخروط وي چې خوله یې لاندې خواته دي که چېرې $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ، دا د xy مستوي بڼیې.

۳. مثال: د یوې نقطې مستطیلې مختصې $(2, 1, -2)$ دي، د دې کروي قطبي او استوانوي قطبي مختصې لاسته راوړئ.

حل: مونږ لرو چې $x = 2,\ y = 1,\ z = -2$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

او

$$\phi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho} = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$\therefore$ د نقطې کروي قطبي مختصې $\left(3, arc\ \tan\frac{1}{2},\ arc\ \cos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ دي.

اوس

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{2},\ z = -2$$

$\therefore$ د نقطې استوانوي قطبي مختصې $\left(\sqrt{5},\ arc\ \tan\frac{1}{2}, -2\right)$ دي.

۴. مثال: د $\rho = 7\sin\theta\sin\phi$ معادله په ترتیب سره د قایمو او استوانوي مختصاتو په اړونده معادلوباندې تبدیلې کړئ.

حل: معادله $\rho = 7\sin\theta\sin\phi$ ده.

په ρ باندې د دواړو خواوو په ضربولو سره مونږ $\rho^2 = 7\rho\sin\theta\sin\phi$ لاسته راوړو کومه چې په قایمو مختصاتو کې د $x^2 + y^2 - z^2 = 7y$ سره معادل ده.

اوس مونږ $r^2 = x^2 + y^2$، $z = z$ او $y = r\sin\theta$ لیکو.

په استوانوي مختصاتو کې اړونده معادله $r^2 - z^2 = 7r\sin\theta$ ده.

۵. مثال: د $x^2 + y^2 + z = 6$ معادله د کروي قطبي مختصاتو په اړونده معادلې باندې بدله کړئ.

حل: x د $\rho\sin\phi\cos\theta$ پواسطه په عوض کول ، y د $\rho\sin\phi\ \sin\theta$ پواسطه په عوض کولواو z د $\rho\cos\phi$ پواسطه په عوض کولو سره معادله د

$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho\cos\phi = 6$$

سره کیږي ، یعني ،

$$\rho^2\ \sin^2\phi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho\cos\phi = 6$$

یا

$$\rho^2\sin\phi + \rho\cos\phi = 6$$

د کروي قطبي مختصاتو غوښتل شوې معادله ده.

۶. مثال: د $\rho = 2\,a\cos\phi$ معادله د قایمو مختصاتو په یوې معادلې بدله کړئ. دا څه شی ځرګندوي؟

حل: په ρ باندې د $\rho = 2a\cos\phi$ معادلې دواړو خواوو په ضربولو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\rho^2 = 2\,a\,\rho\cos\phi$$

د $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ او $\rho\cos\phi = z$، په لیکلو سره، معادله د

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az$$

بڼه غوره کوي ، کومه چې په قایمو مختصاتو کې غوښتل شوې معادله ده.

معادله کېدای شي چې

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,az - 0$$

یا

$$x^2 + y^2 - (z-a)^2 = a^2$$

په ځير وليکل شي کومه چې یوه کره ښيي چې دهغې مرکز د (0، 0، a) په نقطه کې او شعاع يې د a سره مساوي ده.

۱۱. ۹ پوښتنې

۱. د هغو نقطو استوانوي او کروي مختصات پیداکړئ چې د هغوی قایم مختصات په لاندې ډول وي.

$(i)\ (3,\ 4,\ 5)$ $\quad (iii)\ (-2,\ 1,\ -2)$

$(ii)\ (-\sqrt{3},\ 1,\ -2)$ $\quad (iv)\ (1,\ 1,\ -\sqrt{6})$

۲. د هغو نقطو قایم او استوانوي مختصات لاسته راوړئ چې د هغوی کروي مختصات په لاندې ډول وي.

$(i)\ (4,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3})$ $\quad (ii)\ (1,\ \frac{\pi}{11},\ 0)$

$(iii)\ (4,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3})$

۳. د هغو نقطو قایم او کروي مختصات لاسته راوړئ چې د هغوی استوانوي مختصات په لاندې بڼه وي.

$(i)\ (3,\ \frac{\pi}{2},\ 5)$ $\quad (ii)\ (-1,\ \pi,\ 6)$

$(iii)\ (4,\ \arccos\frac{4}{5},\ 3)$

۴. په کروي مختصاتوکې لاندنې معادلې په قایمو مختصاتوکې د دوی په اړونده معادلو باندې بدلې کړئ.

$(i)\quad \rho = 5\sin\theta\ \sin\phi$

$(ii)\quad \rho^2 + 3\rho\ \cos\phi - 2$

$(iii)\quad \rho^2\ \cos2\theta = a^2$

۵. د قایمو مختصاتولاندنې معادلې د دوی په اړونده (a) د کروي مختصاتو (b) د استوانوي مختصاتو په معادلو بدلې کړئ.

$(i)\quad x^2 + y^2 + 2xy - z^2 + 4 = 0$

$(ii)\quad x^2 + y^2 + 2z = 6$

۶. لاندې سطحې څرګندې کړئ.

$(i)\ r = r_0$ $\quad (ii)\ \theta = \theta_0,$ $\quad (iii)\ z = z_0$

چېرته چې $r_0\ ,\ \theta_0,\ z_0$ ثابت دي.

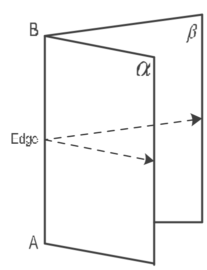
۱۱. ۱۰. ۱ کروي مثلث

یو مستوي او یوه کره په یوي دایرې کې سره غوڅوي. کوم مستوي چې د کرې د مرکز څخه تیرېږي سطحه په یوي دایره کې پرې کوي کومې ته چې تر ټولو لویه (اعظیمه) دایره وایي. کوم بل مستوي چې کره پرې کوي خو د کرې د مرکز څخه نه تیرېږي هم سطحه په یوي دایره کې پرې کوي چې کوچنې دایره ورته وایي.

یوه کروي زاویه هغه زاویه ده چې د دوو پرې شویو (متقاطع) لویو دایرو ترمینځ وي.

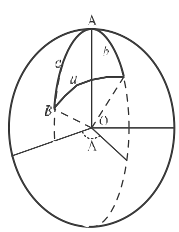
وایي چې دوه متقاطع مستویاني یوه دوه وجهي یا دوه مخیزه (dihedral) زاویه جوړوي. که چېرې د α او β دوه مستویاني په AB کې سره پرې کړي، نو AB ته د دوه وجهي زاویې څنډه (شریک فصل)او مستویانو ته ددې مخونه (وجهی) وایي.

مستوي زاویه د دوو متقاطع مستویانو ترمینځ زاویه ده چې د دوو شعاعو په وسیله چې هره یوه په هر مستوي کې په څنډه باندې په عیني نقطې کې عمود وي جوړېږي. د یوي دوه مخه ایزه زاویې اندازه د دوې مستویانو د زاویې له اندازې سره مساوي ده.



که چېرې مونږ ته د یوي کرې پر سطح باندې دری نقطې راکړل شوې وي، نو کره کېدای شي چې دوه نیمه شي لدی کبله ټولې نقطې په ورته نیمایي کره کې واقع کېږي.

که چېرې نقطې د لویې دایرې (great circle) د قوسونو پوسیله چې ټولې په دغې نیمی کرې باندې واقع وي سره یوځای شي لاسته راغلې شکل ته یو کروي مثلث وایي.

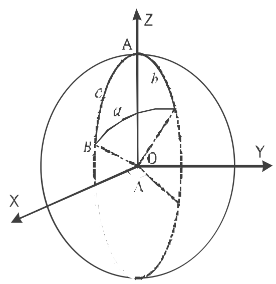


په شکل کې ABC یو کروي مثلث دی. د ABC کروي مثلث ضلعې $a = BC$، $b = CA$او $c = AB$ په ترتیب سره د BOC، COA او AOB زاویو پوسیله چې د کرې په مرکز O کې دوی ته مخامخ واقع دي اندازه کېږي. دA،B،C زاویې د درېو لویو دایرو د مستویانو تر مینځ چې جوړه په پام کې نیول کېږي زاویې دي. نو لدې کبله د A زاویه د AOB او AOC مستویانو تر مینځ ده.

۱۱. ۱۰. ۲ د کوساین فورمول (The cosine formula)

که چېرې ABC یو کروي مثلث وي نو

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$



ثبوت: فرضوو چې ABC د O مرکز په لرلو د یوې کرې پر سطحه باندې یو کروي مثلث دی. دعمومي برخې د ضایعاتو څخه پرته مونږ کولای شو چې د کرې شعاع یو او O د مبدأ په توګه په پام کې ونیسو.نوپه هغه صورت کې $OA = \underline{a}_1$ ، $\overrightarrow{OB} = \underline{b}_1$ او $\overrightarrow{OC} = \underline{c}_1$ واحد وکتورونه دي.

A د AOB او AOC دمستویانوتر منځ زاویه ده. دAOB اوAOC مستویانو نارمل وکتورونه په ترتیب سره $\underline{a}_1 \times \underline{b}_1$ او $\underline{a}_1 \times \underline{c}_1$ دي. نو لدې کبله A د $\underline{a}_1 \times \underline{b}_1$ او $\underline{a}_1 \times \underline{c}_1$ وکتورونو تر منځ زاویه ده.

$$\therefore \quad \cos A = \frac{(\underline{a}_1 \times \underline{b}_1) \cdot (\underline{a}_1 \times \underline{c}_1)}{|\underline{a}_1 \times \underline{b}_1| \cdot |\underline{a}_1 \times \underline{c}_1|}$$

اوس ،
$$\underline{a}_1 \times \underline{b}_1 = |a_1| \cdot |b_1| \sin c = \sin c$$

او ،
$$a_1 \times a_1 = 1 \quad \text{او} \quad \underline{a}_1 \times \underline{b}_1 = \sin b$$

همدارنګه ، $\underline{a}_1 \cdot \underline{b}_1 = \cos c$ او داسې نور.

نو لدې امله

$$\cos A = \frac{(\underline{b}_1 \cdot \underline{c}_1)\,(\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1) - (\underline{a}_1 \cdot \underline{c}_1)\,(\underline{b}_1 \cdot \underline{a}_1)}{\sin c \,\sin b} = \frac{1 \cdot \cos a - \cos b \cos c}{\sin c \sin b}$$

یا

$$\sin b \,\sin c \,\cos A = \cos a - \cos b \,\cos c$$

یعنې

$$\cos a = \cos b \,\cos c + \sin b \sin c \,\cos A$$

په ورته ډول مونږ کولای شو چې دوه نورې پایلې هم ثبوت کړو.

دغه فورمول د کروي مثلثاتو بنسټیز فورمول په توګه پېژندل شوی دی.

۱۱. ۱۰. ۳ د ساین فارمول

که چېرې ABC يو کروي مثلث وي، نو $\dfrac{\sin A}{\sin a}=\dfrac{\sin B}{\sin b}=\dfrac{\sin C}{\sin c}$

ثبوت: فرض وو چې ABC د O مرکز په لرلو د يوې کرې په سطحه باندې يو کروي مثلث دی (دمخکنې عنوان پورې اړوند شکل ته وروګرځئ). مونږ O د مبدأ په توګه او د کرې شعاع يو واحد په پام کې نيسو. نو لدې کبله $\overrightarrow{OA}=\underline{a}_1$, $\overrightarrow{OB}=\underline{b}_1$ او $\overrightarrow{OC}=\underline{c}_1$ واحد وکتورونه دي.

A د AOB او AOC مستوينو تر مېنځ زاويه ده او دغو مستوينو ته نارمل وکتورونه په ترتيب سره $\underline{a}_1\times\underline{b}_1$ او $\underline{a}_1\times\underline{c}_1$ دي.

$$\therefore\ Sin\,A=\frac{\left|(\underline{a}_1\times\underline{b}_1)\times(\underline{a}_1\times\underline{c}_1)\right|}{\left|\underline{a}_1\times\underline{b}_1\right|\ \left|\underline{a}_1\times\underline{c}_1\right|}=\frac{\left|(\underline{a}_1\times\underline{b}_1\cdot\underline{c}_1)\underline{a}_1-(\underline{a}_1\times\underline{b}_1\cdot\underline{a}_1)\underline{c}_1\right|}{\sin c\ \sin b}$$

$$=\frac{\left|(\underline{a}_1\times\underline{b}_1\cdot\underline{c}_1)\underline{a}_1\right|}{\sin b\sin c}=\frac{\left|(\underline{a}_1\times\underline{b}_1\cdot\underline{c}_1)\right|}{\sin b\sin c}$$

په پايله کې

$$\Rightarrow\quad \sin b\sin c\ \sin A=\left|(\underline{a}_1\times\underline{b}_1\cdot\underline{c}_1)\right|$$

په ورته ډول مونږ ثبوتولای شو چې

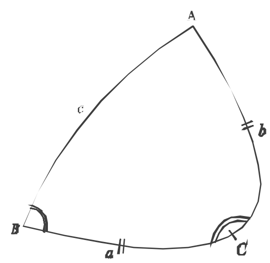
$$\sin c\sin a\sin B=\left|(\underline{b}_1\times\underline{c}_1\cdot\underline{a}_1)\right|$$
$$\sin a\sin b\sin C=\left|(\underline{c}_1\times\underline{a}_1\cdot\underline{b}_1)\right|$$

څرنګه چې د مساواتونو ښي خواوې سره مساوي دي، مونږ لرو چې

$$\sin b\sin c\ \sin A=\sin c\sin a\sin B=\sin a\sin b\sin C$$

نو لدې امله $\dfrac{\sin A}{\sin a}=\dfrac{\sin B}{\sin b}=\dfrac{\sin C}{\sin c}$.

۱۱. ۱۰. ۴ څلورمه برخه یا د کوتنجنت فارمول



د ABC په کروي مثلث کې، د B، a، C، b
څلور پرله پسې برخې په پام کې ونیسئ.

د C زاویه د a او b دوو ضلعو پواسطه ایساره شوې ده او " داخلي زاویه " بلل کیږي. د a ضلع د B او C دوو زاویو پوسیله رابنده یا تړل شوې ده (یعني دواړو خواوو ته یې د A او C زاویې واقع دي) او ''داخلي ضلع'' ورته وایي.

نو لدې امله

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B$$

د کوساین د فورمول په بنسټ مونږ لرو چې

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \qquad \ldots(i)$$
$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C \qquad \ldots(ii)$$

د (i) رابطې په ښي خواکې د (ii) رابطې پواسطه راکړل شوي cos c قیمت عوض کوو ، نو

$$\cos b = \cos a \,(\cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C) + \sin a \sin c \cos B$$
$$\therefore \quad \cos b - \cos b \cos^2 a = \cos a \sin b \sin a \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

یعنې،

$$\cos b \sin^2 a = \cos a \sin b \sin a \cos C - \sin a \sin c \cos B$$

په sin a sin b باندي د وېش نه وروسته

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

د sin e د فرمول پر بنسټ، $\dfrac{\sin c}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$

نولدې امله

$$\cot b\ \sin a = \cos a\ \ \cos C + \sin C\ \cot B$$

$$\therefore\quad \cos a \cos C = \sin a\ \cot b - \sin C\ \cot\ B$$

کوم چې پداخل کې د کلماتو پواسطه بنودل کیږي، ښایي د ښې یادوني لپاره یوه مرسته وي، لکه لاندې شرحه.

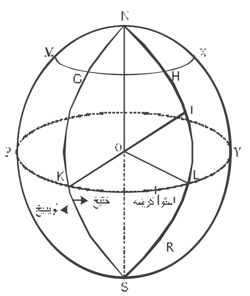
cos (داخلي ضلعی) · cos (داخلي زاویې) =

= sin(داخلي ضلعی) · cot (دبلي ضلعی) – sin (داخلي زاویې) · cot (د بلي زاویې)

د نورو برخو کې شامل فارمولونه کېدای شي چې په ورته توګه ثبوت کړل شي.

۱۱. ۱۰. ۵ عرض البلد او طول البلد

ځمکه کېدای شي د کروي جسم په شان چې د NS قطرپه شاوخوا څرخې په پام کې ونیول شي. N د شمال قطب دی او S د سهېل قطب دی. هغه لویه دایره چې دهغې مستوي په NS باندې عمود ده د استوا د کرښې څخه عبارت ده. هره نیمه ستره دایره چې د N او S پوسیله پرې شوې وي د نصف النهار کرښې په نامه یادیږي. د نصف النهار کرښه کومه چې د ګرینویچ د ستورو د کتنځې څخه تیریږي، د جهاني تړون پربنسټ، اصلي یا ستندرد نصف النهار کرښې په توګه په پام کې نیول.



فرض وو چې NGKS کرښه د نصف النهار ستندرد کرښه ده چې د استوا کرښه د K په نقطه کې پرې کوي، د KOL زاویه د NHS نصف النهار کرښې طول البلد معرفي کوي او دا کېدای شي چې د KL استوائي کرښې د قوس سره یا د KNL کروي زاویې سره په برابره (مساوي) توګه څرګنده شي.

اصلي یا ستندرد نصف النهار کرښه د ځمکې سطحه په دوو نیمو کرو ویشي: ختیځ او لویدیځ. نو لدې امله طول البلدونه د 0° نه تر 180° ختیځ یا لویدیځ ته لړی (لیکې) جوړوي. ټولې سیمې په ورته نصف النهار باندې ورته طول البلد لري او هغه نصف النهار کرښه په کومې چې یوه ځانګړې سیمه پرته وي د NGS اصلي نصف النهار پواسطه ځانګړې کیږي.

د دې لپاره چې په تولیزه توګه د ځمکې په سطحه باندې د یوې سیمې حالت ځانګړی شي، موږ اړینه بولو چې د هغې حالت د هغې د نصف النهار دکرښې په طول البلد باندې څرګند شي. دغه کار د استوا کرښې ته په بیا کتنې سره سرته رسیږي. د J یوه سیمه د NHS نصف النهار په کرښې باندې په پام کې ونیسې. د نصف النهار

کرښې له J نه تېرېږي د استوا کرښه د L په نقطه کې پرې کوي او د LOJ زاویه یا د ستري دایرې د LJ قوس ته د J عرض البلد وایي.

د استوا کرښه د ځمکې سطحه په دوو نیمو کرو ویشي: شمالي او سهیلي، ټولدې امله عرض البلدونه د استوا په کرښه د 0^0 نه تر 90^0 پورې شمال یا سهیل ته په ترتیب سره په شمالي قطب N کې او په سهیلي قطب S کې لړۍ (لیکې) جوړوي.

په J کې کوچنۍ دایره د کومې مستوي چې د استوا د کرښې له مستوي سره موازي ده دعرض البلد موازي ګڼل کېږي او پر دې ټولې سمې د J په شان ورته عرض البلد لري.

راځي چې ϕ د J عرض البلد د ونوموو، پدې صورت کې نو د LOJ زاويې اندازه یا $LJ = \phi$ده. څرنګه چې ON د استوا کرښې په مستوي عمود دی، $m\angle NOL = 90^0$ او له دې کبله $m\angle NOJ = 90^0 - \phi$. د NOJ زاويې اندازه یا د NJ کروي قوس ته د J مکمل عرض البلد وایي. نو ځکه مونږ لرو چې

$$\text{عرض البلد } (Latitude) - 90^0 = \text{مکمل عرض البلد } (co-latitude)$$

۱۱. ۱۰. ۶ د قبلې لوری

د قبلې لوری د P په هره یوه نقطه کې په ستري یوېې (عظیمی)دایرې باندې دP په نقطه کې دمماس (tangent) پواسطه چې د P او په مکه کې د کابې د کور څخه تېرېږي ښودل کېږي.

د کابې د کور عرض البلد ϕ_0 او طول البلد λ_0

$$\phi_0 = 21^\circ\ 25.2'\ N, \quad \lambda_0 = 39^\circ 49.2'\ E$$

دی. په کومې څرګندونې سره سره به مونږ د کابې د کور د نصف النهار کرښې ته د کلاسیکې (لرغونې) نصف النهار کرښې په شان ورنږدې کړې او د یوې سیمې د طول البلد کلاسیکي(اصلي، معیاري، لرغونې) نصف النهار کرښې ته د کلاسیکو طول البڼدونو په شان ورنږدې کوي، د l په بڼه لیکل کېږي.

د کلاسیکې نصف النهار کرښې ستره دایره د ځمکې سطحه په دوه نیمو کرو د کلاسیکې ختیځې (CE) او کلاسیکې لوېدیځې (CW) باندې ویشي. نو لدې امله کلاسیک طول البلدونه له 0° نه تر 180° پورې د کلاسیکې نصف النهار کرښې ختیځ یا لوېدیځ ته لړۍ (لیکې) جوړوي. د یوې سیمې کلاسیک طول البڼد په اسانه توګه کېدای شي چې د معمولي طول البلد څخه د لاندې جدول په مرسته لاسته راوړل شي.

معمولي طول البلد = λ		کلاسیک طول البلد – l
$\lambda° E$	$\lambda_0 < \lambda < 180°$	$(\lambda - \lambda_0)°\ CE$
	$0° < \lambda < \lambda_0$	$(\lambda_0 - \lambda)°\ CW$
$\lambda°\ W$	$0° < \lambda < 180° - \lambda_0$	$(\lambda_0 + \lambda)°\ CW$
	$180° - \lambda_0 < \lambda < 180°$	$[360 - (\lambda_0 + \lambda)]°\ CE$

د مثال(بېلګې) په توګه که چېرې

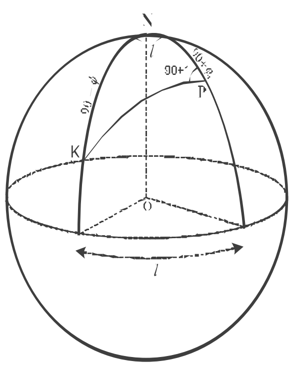
$$\lambda = 67° 2' E \Rightarrow l = \lambda - \lambda_0 = 67° 2' E - 39°\ 49.\ 2' E = 27° 12.8'\ CE$$

د یوې سیمې لپاره په کلاسیکې ختیځې نیمه کره کې د قبلې لورې په عمومي ډول سره د شمال لوېديځ یا سهېل لوېديځ زاویې ته تمایل پیداکوي او ډېر لږ وخت به په حقیقي ډول سره لوېديځ ته تمایل پیداکړي.

د یوې سیمې لپاره په کلاسیکه لوېديځې نیمه کره کې، د قبلې لورې په عمومي ډول سره د شمال ختیځ یا سهېل ختیځ کومې زاویې ته تمایل پیداکوي او ډېر لږ وخت کې به په حقیقي ډول سره ختیځ لوري ته تمایل پیداکړي.

په کلاسیک نصف النهار کرښه کې دیوې سیمې لپاره، د قبلې لورې په حقیقي ډول سره سهېل یا شمال لوري ته د نصف النهار په کرښه د دې حالت مربوط دی.

۱۱. ۱۰. ۷ د قبلې دلوري ټاکل



فرض وو چې N شمالي قطب، K د کابې شریفې کور او P راکړل شوې ساحه ده. PK د ستري(عظیمې) دایرې قوس دی چې د K او د P راکړل شوې ساحې څخه تېرېږي. پدې فرضولو سره چې i د قبلې د سهېل لوېديځ یا سهېل ختیځ لوري چې په کلاسیکه ختیځه یا په کلاسیکه لوېديځه نیمه کره کې چې د P د شتون پورې اړه لري، کوږوالي (میل) دی نو لدې امله د PNK کروي مثلث پواسطه مونږ لرو:

$$m\angle NPK = 90° + i$$

د P $= m\angle PNK$ د NP نصف النهار کرښې او د NK کلاسيك نصف النهار مستويانو ترمنځ زاويه ده.

$L = m\angle PNK$ ، د P (ختيځ يا لوېديځ) کلاسيک طول البلد

قوس NP د $= 90° - \phi$

پدې ځای کې ϕ د P عرض البلد دی. که چېرې شمال لورې ته وي مثبت نيول کيږي او که چېرې سهېل ته وي نو منفي نيول کيږي.

قوس NK د $= 90° - \phi$

دلته $\phi_0 N$ د K عرض البلد دی.

د څلورو برخو فورمولونو نه په پايله کې لاس ته راځي چې

$$\cos(90° - \phi)\ \cos l = \sin(90° - \phi)\cot(90° - \phi_0) - \sin l\ \cot(90° + i)$$

يا

$$\sin\phi\ \cos l = \cos\phi\ \tan\phi_0 + \sin l\ \tan i$$

يا

$$\sin l\ \tan i = \sin\phi\ \cos l - \cos\phi\ \tan\phi_0$$

يعنې

$$\tan i = \sin\phi\ \cot l - \frac{\cos\phi\ \tan\phi_0}{\sin l} = p - q$$

چېرته چې،

$$p = \sin\phi\ \cot l = \frac{\sin\phi}{\tan l}$$

او

$$q = \frac{\cos\phi\ \tan\phi_0}{\sin l}$$

۱۱. ۱۰. ۸ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د ABC په يو کروي مثلث کې، ثبوت کړئ چې

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\ \sin(s-c)}{\sin b\ \sin c}}$$

چیرته چي، $2s = a + b + c$.

حل: مونږ پوهیږو چي $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ او دکوساین له فارمول څخه لاس ته راځي چي

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c\,(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c - 2\sin b \sin c \sin^2\frac{A}{2}$$
$$= \cos(b-c) - 2\sin b \sin c \sin^2\frac{A}{2}$$

یا

$$\cos(b-c) - \cos a = 2\sin b \sin c \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad 2\sin\frac{a-b-c}{2}\sin\frac{a-(b-c)}{2} = 2\sin b \sin c \sin^2\frac{A}{2}$$

څرنگه چي $2s = a + b + c$, $a + b - c = 2(s-c)$ او $a-(b-c) = a-b+c = 2(s-b)$ نو

$$\sin(s-b)\sin(s-c) = \sin b \sin c \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

۲. مثال: د ABC کروي مثلث کي $a = 57°.22.2'$, $b = 72°12.3'$ او $C = 94°1.8'$. د A, c او B قیمتونه محاسبه کړئ.

حل: مونږ لرو چي $a = 57.37°$, $b = 72.21°$, $C = 94.03°$ د کوساین د فورمول پر بنسټ

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C$$

$$= \cos 72.21° \cos 57.37° - \sin 72.21° \sin 57.37° \cos 94.03°$$
$$= 0.3056 \times 0.5392 - 0.9522 \times 0.8422\,(-0.0703)$$
$$= 0.1648 - 0.0564 = 0.1084$$

$$\therefore \quad c = 83.7769° = 83°.\ 46.61'$$

له $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$ مونږ لرو چي

$$\sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c} = \frac{\sin 57.37° \sin 94.03°}{\sin 83.7769°}$$

$$= \frac{0.8422 \times 0.9975}{0.9941} = 0.8451$$

$$\therefore \quad A = 57.6827° = 57°40.96'$$

او

$$\sin B = \frac{\sin b \sin C}{\sin c} = \frac{\sin 72.21° \sin 94.03°}{\sin 83.7769°}$$

$$= \frac{0.9522 \times 0.9975}{0.9941} = 0.9555$$

$$B = 72.8346° = 72°50.08'$$

۳. مثال: د قبلې لورى د کويټې په $30°\ 15'\ N$ عرض البلد او $67°\ E$ طول البلد کې پيدا کړئ.

حل: مونږ پوهيږو چې

$$\phi_0 = 21°\ 25.2'\ N, \quad \lambda_0 = 39°\ 49.2' E$$
$$\phi = 30°15' = 30.25°, \quad \lambda = 67° E$$

$$l = \lambda - \lambda_0 = 67° E - 39°\ 49.2' E = 27°\ 10.8' = 27.18°$$

$$\tan i = \frac{\sin \phi}{\tan l} - \frac{\cos \phi \tan \phi_0}{\sin l} = p - q$$

$$\log p = \log \sin \phi - \log \tan l$$
$$= \log \sin 30.25° - \log \tan 27.18°$$
$$= -0.2978 + 0.2895 = -0.0083$$

$$\therefore \quad p = 0.9811$$

$$\log q = \log \cos \phi - \log \tan \phi_0 - \log \sin l$$
$$= \log \cos 30.25° + \log \tan 21.42° - \log \sin 27.18°$$
$$= -0.0636 - 0.4064 + 0.3403$$
$$= -0.1297$$
$$q = 0.7418$$

$\therefore \quad \tan i \; = p-q = 0.9811-0.7418 = 0.2393$

$\therefore \quad i \quad = 13.4578° = 13° \; 27.5'$ سهېل لوېديځ

۴. مثال: د قبلې لورې د اسلام اباد $33°40'N$ عرض البلد او $73°\,8'E$ طول البلد کې پيدا کړئ.

حل: مونږ لرو چې

$$\phi = 33° \; 40' N = 33.67° N$$

$$\lambda = 73° \; 8' E \; = 73.13° E$$

$$\phi_0 = 21.42° N, \; \lambda_0 = 39.82° E$$

$$l \; = \lambda - \lambda_0 = 72.13° E - 39.82° E = 33.31° CE$$

$$P = \frac{\sin\phi}{\tan l} \quad \therefore \quad \log p = \log\sin\phi - \log\tan l$$

$$= \log\sin 33.67^0 - \log\tan 33.31^0$$

$$= -0.2562 + 0.1824 = -0.0738$$

$$\therefore \quad p = 0.8437$$

$$q = \frac{\cos\phi \tan\phi_0}{\sin l}$$

$$\log q = \log\cos\phi + \log\tan\phi_0 - \log\sin l$$

$$= \log\cos 33.67° + \log\tan 21.42° - \log\sin 33.31°$$

$$= -0.0797 - 0.4064 + 0.2603 = -0.2258$$

$$q \; = 0.5946$$

$$\tan i \; = p - q = 0.8437 - 0.5946 = 0.2491$$

$\therefore \quad i \quad = 13.9877° = 13° \; 59.26'$ سهېل لوېديځ

۵. مثال: ثبوت کړئ چې د ABC په يو کروي مثلث کې،

$$2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} = \sin b\cos A + \sin a\cos B$$

حل: دکيڼي خوا(د کيڼ لاس)حل،

$$L.H.S = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2}$$

$$= (\cos a + \cos b)\tan\frac{c}{2}$$

دښي لاس(ښي خوا) حل،

$$R.H.S = \sin b \; \cos A + \sin a \cos B$$

$$= \sin b \ \frac{\cos a - \cos b \ \cos c}{\sin b \sin c} + \sin a \ \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a}$$

$$= \frac{\cos a - \cos b \ \ \cos c}{\sin c} + \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c}$$

$$= \frac{1}{\sin c}(\cos a - \cos b \cos c + \cos \ b - \cos c \ \cos a)$$

$$= \frac{1}{\sin c}\{\cos a + \cos b - \cos c \ (\cos a + \cos b)\}$$

$$= \frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\sin c} = \frac{(\cos a + \cos b) 2 \ \sin^2 \frac{c}{2}}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

$$= (\cos a + \cos b) \tan \frac{c}{2}$$

نو لدې کبله $L.H.S = R.H.S$

۱۱ .۱۰ پوښتنې

۱. ثبوت کړئ چې د ABC په یو کروي مثلث کې

$$(i) \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin c \sin a}}$$

$$(ii) \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-c) \ \sin (s-a)}{\sin c \sin a}}$$

$$(iii) \quad \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-c) \sin (s-a)}{\sin s \sin (s-b)}}$$

چېرته چې $2s = a + b + c$ سره دی.

۲. ثبوت کړئ چې د ABC په یوکروي مثلث کې

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} = \tan \frac{c}{2} \cot \frac{a-b}{2}$$

۳. وښایاست چې د ABC په یو متساوي الاضلاع مثلث کې

$$(i) \quad \sec A = 1 + \sec a$$

$$(ii) \quad \tan^2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \cos A$$

۴. د ABC کروي مثلث کې $a = 136° 19', \quad B = 62° 20.7', c = 90^0$ د A, b او C قیمتونه محاسبه کړئ.

۵. د قبلې لورى د پېښاور په $34°1'N$ عرض البلد $71°40'E$ طول البلد کې معلوم کړئ.

۶. د قبلې لورى د کراچې په $24°51.5'N$ عرض البلد، $67°2'E$ طول البلد کې معلوم کړئ.

۷. د قبلې لورى د لاهور په $31°35.4'N$ عرض البلد $74°18.7'E$ طول البلد کې معلوم کړئ.

۸. د قبلې لورى د ډکې په $23°42'N$ عرض البلد $90° 22'E$ طول البلد کې چې دهغې $\lambda_0 = 39.82°N$, $\phi_0 = 21.42°N$ راکړل شوي دي معلوم کړئ.

۹. ثبوت کړئ چې د کابې شریفي د کور په شان د ورته موازي عرض البلد درلودونکي سیمي لپاره د قبلې لورى کوږوالي(میلان) $\tan^{-1}(\sin\phi_0 \tan \frac{1}{2})$ شمال لوېديځ یا شمال ختیځ ته دی په مطابق ددې دهغې l کلاسیک یا اصلي طول البلد لوېديځ یا ختیځ دی.

۱۰. ثبوت کړئ چې د استوا پر کرښه د یوې ساحې لپاره، د قبلې لورى کوږوالي شمال لوېديځ یا ختیځ ته $\tan^{-1}(\tan\phi_0 - \operatorname{cosec} l)$ دي په مطابق ددې دهغې د l کلاسیک طول البلد په څېر ختیځ یا لوېديځ ته دي.

۱۱. بیلابیلې پوښتنې

۱. یوه نقطه دارنګه حرکت کوي چې د دې د واټن دمربعاتو مجموعه له دوو ثابتو نقطو نه ثابته ده. وښایاست چې د ددی نقطې هندسي محل یوه کره ده.

۲. د r په شعاع دیوى کرې معادله لاسته راوړئ کومه چې د کارډیناتو درې واړه محورونو سره نښلوي. په څومره شمېر کرې دا ډول رسم کیدلې شي؟

۳. یوه کره د $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ له دایرې څخه تېرېږي. ثبوت کړئ چې د دې د قطراعظمي او اصغري (extremities) نقطو هندسي محل چې د x- محور ته موازي وي د $y = o, x^2 - z^2 = a^2$ مستطیلي هایپارابولا دی.

۴. وښایاست د یوې استوانې معادله چې دهغې مولدونه د

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \; , z = 0$$

منحني غوڅوي او د $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ سره موازي وي

$$a(nx-lz)^2+2h(nx-lz)\,(ny-mz)-b(ny-mz)^2-2\ gn\,(nx-lz)+2\,nf\,(ny-mz)+n^2c=0$$

ده.

۵. وښاياست چې د يوې استواني معادله چې دهغې مولدونه د z – محور سره موازي وي او کومه چې د

$x^2+y^2+z^2=1,\ \ x-y+z=1$

له منحني څخه تېرېږي $x^2+y^2+xy-x-y=0$.

۶. د قايم دايروي مخروط معادله لاسته راوړئ کوم چې د کاردينانو درې واړه محورونه ددې د مولدونو په شان وي.

۷. که چېرې د P يوه نقطه د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ په سطحه باندې پرته وي، نو وښاياست د مستقيم خط ټولې نقطې چې له مبدأ او له P څخه تېرېږي هم په همدغې سطحې باندې پرتې دي.

۸. د $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ مستوي د کاردينانو محورونه د A،B، C په نقطو کې قطع کوي. ثبوت کړئ چې د مخروط معادله کوم چې دخطونو پواسطه چې له راس (0) نه رسم کېږي د ABC دايره غوڅوي رامنځته شوی وي

$$yz\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=0$$

ده.

۹. د قبلې لورى دلاګوس (نيجيريا) په $6°25'\,N$ عرض البلد، $3°\,27'E$ طول البلد کې معلوم کړئ، چې دهغې $\lambda_0=39°49.2'\,N$ $\phi_0=21°25.\,2'\,N,$ ورکړل شوي دي.

۱۰. د هغه قايم دايروي مخروط معادله لاسته راوړئ چې دهغه عمودي زاويه يې 90^0 وي او په مبدأ کې راس لري او دهغه محورد $x=-2y=z$ خط په امتداد وي.

۱۱. د استواني معادله لاسته راوړئ کوم چې د $z=0$ مستوي د $4x^2+y^2=1$ په منحني کې غوڅوي او د $3x=-6y=2z$ سره موازي مولد لري.

دولسم څپرکی

دڅو متحويلينو محاسبه

Calculus of Several Variables

۱۲. ۱. ۱ پيژندنه

پدې برخه کی زیات فورمولونه پیژنوپه کوم کې چې یو راکړل شوې متحول دوه یازیاتونوروومتحويلينوپورې اړيکه پيداکوي (يا مربوط کيږي). دبيلګی(مثال) په توګه: ديومثلث A مساحت دمثلث د b قاعدې اود h لوړوالي پورې د $A = \frac{1}{2}bh$ فارمول پربنسټ اړيکه پيداکوي. مونږوايوچې A دb اوh دوه متحولينوتابع ده. دې ته په ورته ډول دمستطيلي بکس v حجم د اوږدوالی د W سور اود h لوړوالي تابع دې.

ددوه يادېرومتحويلينوتابعګانولپاره ديومتحوله تابعګانوپه شان ورته اوليک دود (ترمينالوژي) پکاريږي. د بيلګی(مثال) په ډول ، د$Z = f(x, y)$ څرګندوني نه داموخه دی چې z د x اوy يوه تابع ده پدې معنې چې دغيرمستقل متحول z يوواحدقيمت دx اوy مستقلو متحولينودځانګړوقيمتونوپوسيله ټاکل کيږي.

ددوه متحوله تابع موضوع کېدای شي چې د n متحوله تابع پورې پراختياوومومي ،خو ددغی موضوع نه دغه عام شوي حالت سره چارچلند ددې کتاب موخه نده.

يواځې يوڅوبيلګی د درې يااضافه د درې متحوله تابعګانوڅخه دلته راوړل شوی دي.

۱۲. ۲. ۱ دوه متحوله تابع

دx اوy دوه متحوله يوه تابع يوه قاعده ده کومه چې دxy دمستوي د D په کوم سيټ کې د(x, y)دهرې يوې نقطې لپاره د$f(x, y)$ يواځې يوحقيقي عدد په نښه کوي.

دD سيټ ته دتابع ډومين وايي: دادxy په مستوي کې دنقطوسيټ دی په کوموسره چې تابع تعريفيږي. که چيرې $f(x, y)$ ديوفارمول په وسيله ځانګړې شي اودf ډومين په ښکاره ډول بيان شوی وي، نودايه دې ډول پوهول کيږي چې ډومين لرونکی دټولوهغونقطو دي په کوموسره چې د فورمول مفهوم افاده کيږي. اودتابع دقيمت لپاره يوحقيقي عدد لاس ته راځي.

مونږد$f(x, y)$، $g(x, y)$اوداسی نوری ليکنی کاروو، ديوې تابع قيمت په (x, y)سره ښيواو ليکو:

$$Z = g(x, y) \ \ , Z = f(x, y)$$

اوداسی نور. مونږبه همداډول کله کله د$Z = Z(x, y)$ ليکنه هم وکاروو که څه هم پدی باندی پوهيږو چې پدې حالت کې z د دوه مفهومونولپاره کارول شويدي ، يوديوی تابع په ډول اوبل ديومتحول په ډول ،مثلاً که چيرې

$$f(x,y)=x^2+2y^3$$
$$f(2,3)=(2)^2+2(3)^3=58$$
$$f(0,1)=0+2=2$$

تعریف: مونږ د $f(x,y)$ یوی تابع ګراف چي د $Z=f(x,y)$ معادلی ګراف دی تعریف کوو.

دبیلګي په ډول د $f(x,y)=1-x-\frac{1}{2}y$ تابع ګراف د $x+\frac{1}{2}y+z=1$ مستوي دي او $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ تابع ګراف د $x^2+y^2+z^2=1$ کره ده.

مستقل اوتابع متحول: که چیری د $z=f(x,y)$ وي ،نو مونږوایوچي z یوتابع یا یو غیرمستقل متحول دی، x او y دواړه مستقل متحولین دي ،

یوې تابع ته یوقیمته یا دځانګري قیمت تابع وایي که چیری یواځي او تنها یواځي دz یوقیمت د (x,y) له هري یوې جوړی سره اړیکه ولري دکوم قیمت لپاره چي تابع تعریف شویدي.که چیري یدې برخه کي د z لپاره دیوه نه دیرقیمتونه شتون ولري، نوتابع ته څوقیمته تابع وایي او کېدای شي چي د یوقیمته توابعودمجموعي په ډول په پام کي ونیول شي. نوله همدی کبله مونږبه خپل ځان یوقیمته توابعوته محدود کړو.که چیری په بل ډول ښودل شوی نه وي.

لیمټ او متمادیت

Limit and Continuity

۱۲ .۲ .۲ تعریف: د (x,y)دټولونقطوسیټ ته په هغه صورت کي چي

$$a<x<b$$
$$c<y<d$$

یوخلاص مستطیل وایي ، c,b,a اوd حقیقي عددونه دي. لدي امله دیوخلاص مستطیل ګراف دټولونقطونه چي د $y=c, x=b, x-a$ او $y-d$ خطونوپواسطه چاپیرشوی مستطیل دننه واقع دي جوړشوي دی. دچاپیره شووخطونونقطی ځانګړي (مستثنيَ) دي (پکښي شاملي ندي).

د (x,y) دټولونقطوسیټ ته په هغه صورت کي چي

$$a<x<b$$
$$c\le x\le d$$

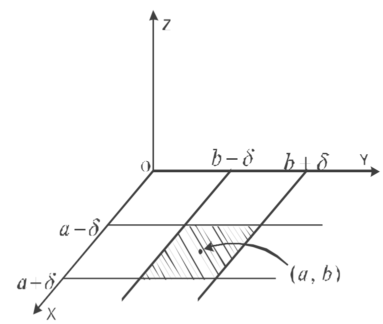
یوترلي مستطیل وایي. c,b,a او d حقیقي عددونه دي. دیوترلي مستطیل په حالت کی، د چاپیره شوو خطونونقطي پکښي شاملي دي.

یادونه:

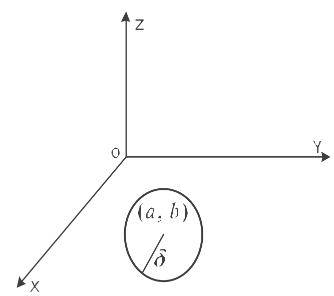
تابعګاني له R نه R ته اکثره وخت دR په انټروالونوکی تعریفیږي. تابعګاني له R^2 نه R ته به دخلاص یاتړلو مستطیلونوباندی ددوی د دومین په توګه تعریف شي

ګاونډیتوب (مجاورت): د (x, y) دټولونقطوسیټ ته په هغه صورت کي چي $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$ ،کله چي $\delta \rangle 0$ وي، دیومستطیل د(a,b) د δ ګاونډیتوب وایي.

د(x, y)دټولونقطوسیټ ته په هغه صورت کي چي $0<|x-a|<\delta$ $0<|y-b|<\delta,$ ، په کومو کي چي (a,b)شامل دي د(a,b) دδله مینځه تللي ګاونډیتوب وایي .



د(x, y)دټولونقطوسیټ ته په هغه صورت کي چي $(x-a)^2+(y-b)^2\langle\delta^2$ ، د(a,b) د δ یوداېروي ګاونډیتوب یا مجاورت وایي.



۱۲ .۲ .۳ لیمټ Limit

فرضووچې $f(x,y)$ په کوم خلاص مستطیل کې چې د(a,b)نقطې درلودونکې وي د(x,y) ټولوقیمتونولپاره تعریف شویده. د شونو (امکاناتو)په ځانګړتیا(استثنا)سره $f(x,y)$ ښایي یانه ښایي (وغواړو که ونه غواړو) د (a,b) په نقطه کې تعریف کیږي. د$f(x,y)$ تابع ته ویل کیږي د L یولیمټ ته څنګه چې $y \to b, x \to a$ تقرب کړیده تقرب کوي که چیري دهر $\varepsilon > 0$ لپاره ،هلته دδیو عدد دارنګه شتون ولري چې

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

چیرته چې

$$0 < |y-b| < \delta \qquad \text{او} \qquad 0 < |x-a| < \delta$$

اومونږلیکوچې

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = L$$

یا ،

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

ددی مانا داده چې د ε په اړونده هرمثبت عدد لپاره ،هلته یوګاونډیتوب (مجاورت) شتون لري. دآرنګه چې ددغه ګاونډیتوب (مجاورت) د(x,y)د هرې نقطې لپاره ، د(a,b)نه په غیرنورې نقطې، د$f(x,y)$ د $L-\varepsilon$ او $L+\varepsilon$ ترمینځ واقع دي. دیوې دوه متحوله تابع لیمټ تاکل اسانه نه دي او ددې کتاب له موخې نه بهر ده.

۱۲ .۲ .۴ پرله پسې والی یامتمادیت (Continuity)

یوې دوه متحوله تابع ته د(x_1,y_1)په نقطه کې ترلې یامتمادي وایي که چیري لاندني شرطونه صدق وکړي:

1. $f(x_1,y_1)$ تعریف شوې وي
2. $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)$ شتون ولري
3. $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = f(x_1,y_1)$

هغه شرط چې $f(x_1,y_1)$ پکې تعریف شوی وي د $z=f(x,y)$ پرسطحه کې د (x_1,y_1) دپاسه دیوی خالیګا دامکان له مینځه وړل دي ،هغه شرط چې $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)$ شتون پکښې یقیني کوي د (x_1,y_1) په نقطه کې د $Z=f(x,y)$ نه نامعین کېدل دي او هغه شرط چې

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)=f(x_1,y_1)$$

یقیني کوي هغه سطحه د (x_1,y_1) نقطې دپاسه یو عمودي جمپ (خیز) باقدم نه لري. په دې صورت کې مونږ ددوه متحوله متمادي تابع ګراف لپاره داسې تصورکولای شوچې دځورود یو نری شیټ یا پوښ څخه جوړه شوی یوه ودانۍ چې مینځ یې خالي اودڅوکواوډرویه ډول راغونجه یا راټوله شوی وي چې پکښې څیرې(شکول) شوي اوسوري ځایونه شتون ونلري.

یوې دوه متحوله تابع ته د xy مستوي د R په سیمه(ساحه) کې متمادي ویل کیږي که چیرې دادR په هره نقطه کې متمادي وي. یوه تابع چې د xy په ټول مستوي کې ترلې (متمادي) وي نوتابع ته هرچیرې متمادي یاپه ساده ډول متمادي وايي.

دیوې دوه متحوله تابع دمتمادیت تعریف د$(\varepsilon-\delta)$ په ژبه په لاندې ډول دی.

تعریف: فرضووچې (a,b) د$z=f(x,y)$ دتعریف دسیمې (دومین) کومه نقطه ده . د $f(x,y)$ تابع ته د(a,b) په نقطه کې متمادي وايي، که چیرې د ε د مخکې ټاکل شوي کوم مثبت عدد د اړیکې لپاره،هلته د δ یومثبت عدد دارنګه شتون و لري چې

$$|F(x,y)-F(a,b)|<\varepsilon$$

د(x,y)دټولولپاره په هغه صورت کې

$$|x-a|<\delta \qquad ,|y-b|<\delta$$

نولدی امله د (a,b)په نقطه کې دمتمادیت لپاره ،هلته یومربع شتون لري چې د $x=a-\delta$ ، $x=a+\delta$ ، $y=b-\delta$, $y=b+\delta$خطونوپه واسطه راچاپیره شوي دي ،همداشان ، ددغه مربع د(x,y)هرې نقطې لپاره ، $f(x,y)$ د$f(a,b)-\varepsilon$ او$f(a,b)+\varepsilon$ په مینځ کې واقع ده،چیرې چې هر ε یومثبت عدد دی خوبیاهم کوچنې دی.

یادونه: دمتمادي توابعود پیژندلو(تشخیصولو)د مرستې لپاره،مونږ به لاندې قضیه وکاروو، کومه چې مونږ بې له ثبوت نه بیان کړې ده.

قضيه:

(i) که چېرې g اوh يومتحوله متمادي تابعګانې وي ،نو $f(x,y)=g(x)h(y)$ دx او y يوه متمادي تابع ده.

(ii) کــه چېــرې g يومتحولــه متمــادي تــابع وي اوh يــوه دوه متحولــه تــابع وي ، نــوددوې د $f(x,y)=g(h(x,y))$ يوه مرکبه تابع دx او y يوه متمادي تابع ده.

قسمي (حصوي) مشتقونه

PARTIAL DERIVATIVES

۱۲. ۲. ۵ فرضووچې f د x او y دوه متحولينويوه تابع ده.که چېرې مونږ y ثابت ونيسواوځرګندکړو،چې $y=y_0$ اوx ديومتحول په څيرونيسو،نو $f(x,y_0)$ يواځې دx يوه تابع ده .که چېرې دغه تابع د $x=x_0$ په نقطه کې ددیفرنشيل وړوي ،نودغه مشتقي قيمت د $f_x(x_0,y_0)$ په څيرليکل کېږي او ويل کېږي چې د (x_0,y_0) په نقطه کې نسبت x ته دf حصوي (قسمي) مشتق دی.

په ورته ډول ، که چېرې مونږ x ثابت ونيسواوقبول کړو $x=x_0$ ،نو $f(x_0,y)$ يواځې دy يوه تابع ده . که چېرې دغه تابع د $y=y_0$ په نقطه کې ددیفرنشيل وړوي، نودغه مشتقي قيمت د $f_y(x_0,y_0)$ په څير ليکل کېږي اوويل کېږي چې د (x_0,y_0) په نقطه کې نسبت y ته دf حصوي مشتق دی ،

د $f_x(x_0,y_0)$ او $f_y(x_0,y_0)$ قيمت اکثره وخت د (x,y) په يوې عمومي نقطه کې د $f_x(x,y)$ او $f_y(x,y)$ افادوڅخه پيداکېږي په واسطه لاسته راځي او وروسته $x=x_0$ او $y=y_0$ په دغوافادوکي عوض کوي. ددې لپاره چې $f_x(x,y)$ لاسته راوړو مونږ نظرx ته د $f(x,y)$ ديفرنشيل نيسو، دy سره ديوثابت په شان چلندکوو.

اوددې لپاره چې $f_y(x,y)$ لاسته راوړومونږ نظر y ته د $f(x,y)$ ديفرنشيل نيسو، x سره ديوثابت په شان چلندکوو.

تعريف : فرضووچې $z=f(x,y)$ دx اوy دوه متحولينويوه تابع ده. سربيره پردې فرضووچې x د Δx په اندازه ډيرښت(تزايد)کوي او قبول کړوچېy ثابت پاتې کېږ ي، z له $f(x,y)$ نه $f(x+\Lambda x,y)$ ته بدلون مومي نو په پايله کې

$$\lim_{\Lambda x\to 0}\frac{f(x+\Lambda x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

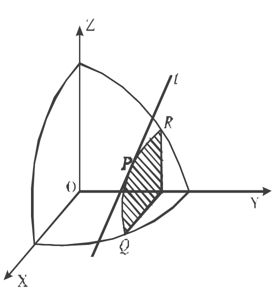
که چېرې داشتون ولري نظرx ته د $f(x,y)$ حصوي مشتق ورته وايي او $f_x(x,y)$ ياپه ساده ډول f_x پواسطه ښودل کيږي.

په ورته ډول که چیرې $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ شتون ولري ،نو نظرy ته د$f(x,y)$حصوي مشتق ورته وايي اود $f_y(x,y)$ياپه ساده ډول دf_yپه څېرليکل کيږي .د f_xاو f_yحصوي مشتقونه د $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ او $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ سمبولونوپه واسطه هم ښودل کيږي . اوکه چيرې $z=f(x,y)$ دیوغیرى مستقل متحول په حیث راپيژندل شوي وي ،نو په هغه صورت کي ښايي د $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ او $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ سمبولونه پکاروپورل شي،د(x_0,y_0)په يوه نقطه کي دحصوي مشتقونولپاره يوه څه ځانگړى ليکني په لاندي ډول دي

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\,y=y_0}\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_0)$$

يادونه: د∂سمبول ته ديوحصوي مشتق نښه وايي. دادکومي الفباتوری ندي،خودرېڅضي يواختراع شوی سمبول دی.

۱۲ . ۲ . ۶ دحصوي مشتقونوهندسي مفهوم



فرضوو چي $z=f(x,y)$.نودا يوه سطحه ښيي.که چيرې y ثابت وساتل شي. يعني، که چيرې y=c ، نود تابع قيمت $z=f(x,c)$ سره کيږي. مونږيوهيږو y=c يو مستوي ښيي چي دxoz مستوي ته موازي اوله مبداڅخه دهغه يو واټن ده. سر بیره پردی $z=f(x,c)$ د$z=f(x,y)$ سطحى سره د $y=c$ مستوي په واسطه دتقاطع (غوڅ شوي) منحني QPR معادله دی.

ددی منحني د مماس ميل د$P[x,c,f(x,y)]$ په نقطه کي نسبت x ته د z د حصوي مشتق پواسطه چي y ثابت ساتل شوی دی لاس ته راځي. نولدی امله دz حصوي مشتق نسبت x ته د$z=f(x,y)$ سطحي سره ديو مستوي پواسطه چي د دxoz مستوی ته موازي دی غوڅ شوی منحني ته د مماس ميل راکوي.

په ورته ډول ، نظرy ته دz دحصوي مشتق لپاره هندسي مفهوم (ځرگندونه) صدق کوي.

۱۲. ۲. ۷ دلوړترتیب حصوي مشتقونه

څرنګه چې د $\frac{\partial f}{\partial x}$ او $\frac{\partial f}{\partial y}$ حصوي مشتقونه د x او y تابعګاني دي ، هریو کېدلاي شي چې حصوي مشتقونه ولري. دغه د f دویم ترتیب حصوي مشتقونه چې څلوروکیدنو (امکاناتو) ته لوړیږي راکړشویدي کوم چې د

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

پواسطه تعریف شویدي.

ورسته لدې ،مونږبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ او $\frac{\partial f}{\partial y}$ ته د f لمړي ترتیب حصوي مشتقونوته ووایو.

یادونه : د $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ او $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ مشتقونوته ددویم ترتیب مختلف حصوي مشتقونه دویم مختلف حصوي مشتقونه وایو. ددیروتابع ګانولپاره هغه چې په غوښتنو کې راپورته کېږي له دغومختلفو حصوي مشتقونو سره مساوي وي.

په پرله پسې ډول په دیفرنشیل نیولوسره مونږکولای شوچې ددریم ترتیب حصوي مشتقونه یادهغې څخه پورته لاسته راوړو ،بعضې امکانات پدې ډول دي.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}\right)$$

دلوړترتیب حصوی مشتقونه کېداي شي چې په رانغښتي(ترکیبي) ډول سره دلاندی لیکنی یا اندکس لیکلو

(Subscript)پواسطه ولیکل شي. دمثال په ډول:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y$$

پدې معمول د قوسونو له ليكلو څخه ډډه وكړي او په ساده ډول يې وليكي.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

په ياد ولرئ چې د(∂)په ليكلوددیفرنشيلونوسلسله دښي نه دچپ خواپه لوستلو لاسته راځي ،خو په لاندې يا په اندکس ليكنو (Subscripte) كې دچپ نه ښي لوري ته په لوستلوسره لاسته راځي. ځيني نورمثالونه په لاندې ډول دي.

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$$

۱۲. ۲. ۸ حل شوي مثالونه

1. مثال : د $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$ (ii) , $f(x,y) = e^{ax}\sin by$ (i)دلمړي ترتيب حصوي مشتقونه لاسته راوړئ.

حل : (i).

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2}2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}2y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

(ii).

$$f(x,y) = e^{ax}\sin by$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax}\sin by$$

او ،

$$\frac{\partial f}{\partial y} = be^{ax}\cos by$$

2. مثال : د (i). $f(x,y)=x^2y^3+x^4y$, (ii). $f(x,y)=e^{x\cdot y}$ ددویم ترتیب حصوي مشتقونه لاسته راوړئ.

حل : (i).

$$f(x,y)=x^2y^3+x^4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+4x^3y \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+x^4$$

پدې ډول مونږلروچي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3+4x^3y\right)=2y^3+12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2+x^4\right)=6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2+x^4\right)=6xy^2+4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3+4x^3y\right)=6xy^2+4x^3$$

3. مثال : که چیرې $f(x,y)=y^2e^x-y$ وي نو f_{xyy} لاسته راوړئ.

حل : مونږلروچي

$$f_{xyy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^2e^x\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2ye^x\right)=2e^x$$

4. مثال : $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چي د $\frac{xy}{x^2+y^2}$ تابع دمتمادي تابعګانویونسبت دی ، دابی له $x^2+y^2=0$ نه متمادي ده. نو $f(x,y)$ په هره نقطه کې بی له $(0,0)$ نه متمادي ده.

اوس څرنګه چي $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ متمادي ده نومونږلروچي

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2+(2)^2} = -\frac{2}{5}$$

5. مثال: که چېرې $f(x,y)=\sin x \sinh y$ وي وښایاست چې $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ دی

(لاپلاس معادله Laplace's Equation)

حل : $f(x,y)=\sin x \sinh y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x \sinh y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x \sinh y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x \cosh y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin x \sinh y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

د (i) او (ii) په جمع کولوسره مونږلاسته راوړوچې

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

6. مثال : که چېرې $f(x,y)=(1-2xy+y^2)^{\frac{-1}{2}}$ وي وښایاست چې $x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y^2}{(1-3xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ دی.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(1-2xy+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2y) = \frac{y}{(1-2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(1-2xy+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2y) = \frac{x-y}{\left(1-2x+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y.\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\left(1-2xy+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xy-y^2}{\left(1-2\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{\left(1-2x+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

7. مثال : ثبوت کړئ چې $f_{xy}(0.0)$ او $f_{yx}(0.0)$ که چېرې $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ وي دتعريف وړندي ، کله چې x او y دواړه صفرنه وي او $f(0.0)=0$.

حل: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0.0)=0$.

$$f_x(0.0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\frac{0-0}{h} = 0$$

او

$$f_x(0.k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,k)-f(0,k)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{hk}{h^2+k^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h^2+k^2} = \frac{1}{k}$$

همدارنګه

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

او

$$f_y(h,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{kh}{h^2+k^2} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{h}{h^2+k^2} = \frac{1}{h}$$

اوس ،

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,0+k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{k} - 0}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k^2},$$ (داد تعریف وړنده)

په درنه بول ،
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(0-h\,,\,0) - f_y(0\,,\,0)}{k}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \frac{1}{h^2},$$ (دادتعریف وړنده)

۱۲ . ۲ پوښتنې

1. دلاندې معادلودلومړي ترتیب حصوي مشتقونه پیداکړئ

$(i)\quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad,\quad (ii)\quad f(x,y) = x^{y^2}$

$(iii)\quad f(x,y) = \ln\frac{x^2+y^2}{x+y}\quad,\quad (iv)\quad f(x,y) = tg(tg^{-1}x + tg^{-1}y)$

$(v)\quad f(x,y) = e^{\sin(\frac{y}{x})}$

2. (i) که چېرې f(x, y, z) =(x-y) (y-z) (z-x) وي، ثبوت کړئ چې

$f_x + f_y + f_z = 0$

(ii) که چېرې $f(x,y,z) = x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$ وي ،ثبوت کړئ چې

$xf_x + yf_y + zf_z + = -2f(x,y,z)$

3. دلاندې معادلودوېم ترتیب حصوي مشتقونه لاسته راوړئ

$$(i)\quad f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}\quad,\quad (ii)\quad f(x,y)=e^{xy}$$

$$(iii)\quad f(x,y)=ax^4+2hx^2y^2+by^4$$

4. وښایاست چې لاندي تابعګانی د $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ لاپلاس معادله صدق کوي .

$$(i)\ f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}\quad,\quad (ii)\quad f(x,y)=\arctg\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$(iii)\quad f(x,y)=e^x\sin y+e^y\cos x$$

5. که چیرې $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ وي،نوثبوت کړئ چې

$$(f_x-f_y)^2=4(1-f_x-f_y)$$

6. ثبوت کړئ چې $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ دي که چیرې

$$(i)\ f(x,y)=x^2tg^{-1}\frac{y}{x}-y^2tg^{-1}\frac{y}{x}$$

کله چې x اوy دواړه (0) نه وي او $f(0,0)=0$ وي

$$(ii)\ f(x,y)=x^2y\sin\frac{1}{x}$$

کله چې x اوy دواړه صفرنه وي او $f(0,0)=0$ وي

7. وښایاست چې $x^2f_{x^2}-y^2f_{y^2}=0$ که چیرې $f(x,y)=\sin(xy)$ وي

8. که چیرې $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ وي،ثبوت کړئ چې $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ سره دی

9. که چیرې $f(x,y)=y^3+ayx^2$ ، نو a پیداکړئ دارنګه چې $f_{xx}+f_{yy}=0$ سره دي

10. که چیرې $f(x,y,z)=r^m$ وي کله چې $r^2=x^2+y^2+z^2$ وي ، نو وښایاست چې

$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=m(m+1)r^{m-2}$ سره دي

دیفرینسیل نیولو وړتیا(قابلیت)

۱۲. ۳. ۱ تعریف

ددوه متحولینو $f(x,y)$ یوې تابع ته د (x_0,y_0) په نقطه کې ددیفرینسیل نیونې وړوایي که چېرې $f_x(x_0,y_0)$ او $f_y(x_0,y_0)$ شتون ولري او د Δf

$$\Lambda f = f_x(x_0,y_0)\Lambda x + f_y(x_0+y_0)\Lambda y + \varepsilon_1\Lambda x + \varepsilon_2\Lambda y$$

په شکل ولیکل شي. چیرې چې ε_1 او ε_2 د Δx او Δy تابعګانې دي دارنګه چې د $0 \to \varepsilon_1$ او $0 \to \varepsilon_2$ په همدې ډول $(\Delta x\ ,\ \Delta y)\to(0,0)$. یوې تابع ته د xy مستوي د R په سیمه کې ددیفرینسیل نیولو وړوایي که چېرې دا د R په هره نقطه کې ددیفرینسیل نیولو وړتیاولري. یوه تابع چې د xy په ټول مستوي کې ددیفرینسیل نیولو وړوي ویل کیږي چې هرچېرته ددیفرینسیل نیولووړ یاپه ساده ډول ددیفرینسیل وړده.

یادونه : دیومتحوله تابعګانولپاره، چې حدونه یې" ددیفرینسیل وړوي "او " یومشتق ولري " ورته یا مترادف دي. خوبیا هم ، ددوه متحوله تابعګانو ددیفرینسیل نیولو وړتیا لپاره نسبت دحصوي مشتقونوله مازې (یوازې) شتون څخه خورا سخت ضرورت دی.

اوس مونږ پدي برخه کې یوڅو قضیي بې له ثبوت څخه ځکه چې دهغوي ثبوتونه ددي کتاب دموخوڅخه بهردي بیانوو.

1. قضیه: که چېرې f د (x_0,y_0) په نقطه کې ددیفرینسیل نیولو وړوي نوf د $(x_0\ ,\ y_0)$ په نقطه کې متمادي دي.

2. قضیه : که چېري f دکومي دایروي سیمي چې دهغې مرکز په (x_0,y_0) کې دی په ځینونقطو کې د لومړی ترتیب حصوي مشتقونه ولري ،او دغه حصوي مشتقونه د (x_0,y_0) په نقطه کې متمادي وي نو f د (x_0,y_0) په نقطه کې ددیفرینسیل نیولو وړده.

3. قضیه : فرضووچې f یوه دوه متحوله تابع ده ، که چېرې f, f_x, f_y, f_{xy} او f_{yx} په یوخلاص سیټ کې متمادي وي نود سیټ په هره نقطه کې $f_{xy} = f_{yx}$ دي.

۱۲. ۳. ۲ متجانسي تابعګانې

په عادي ډول ، د $f(x,y)$ تابع ته د n ترتیب یوه متجانسه تابع وایي، که چېرې په هر حد کې د x او y درجې د n سره مساوي وي.نوله دي کبله

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

د n ترتیب یوه متجانسه تابع ده

دمتجانس والي دغه تعریف یواځې دپولینومي تابعګانولپاره کارول کیږي.ددې لپاره چې دمتجانس والي مفکوره (مفهوم)وسعت پیداکړي نویوشانتي بې ساري تابعګاني ددوی دپراختیا په سیمه کې راوړل کیږی.مونږ وایوچې z د n درجې یوه متجانسه تابع ده. که چیرې داد $x^n f(y/x)$ په بڼول دځرګندونې وړوي.

(i) پولینومي تابع کومه چې په لاندې بڼول لیکل شوېده

$$x^n\left[a_0 + a_1\frac{y}{x} + a_2(\frac{y}{x})^2 + \cdots + a_n(\frac{y}{x})^n\right]$$

دنوې تعریف سره سم دn ترتیب یوه متجانسه تابع ده. د

$$x^n \sin(\frac{y}{x}) \quad , \quad \frac{(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{(y+x)}$$

تابعګاني یواځې ددویم تعریف سره سم (په مطابق)متجانسې تابع ګاني دي دلته د $x^n \sin(\frac{y}{x})$ درجه n ده.همدارنګه

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \frac{\sqrt{x}\left[1-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right]}{x\left[1-\frac{y}{x}\right]} = x^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}{1-\frac{y}{x}}$$

نو داد $-\frac{1}{2}$ درجې دي.

۱۲ . ۳ . ۳ دایولرقضیه (Euler's theorem)

که چیرې z د y,x د n ترتیب یوه متجانسه تابع وي نو

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

ثبوت :ځرنګه چې z د y,x دn ترتیب یوه متجانسه تابع ده نومونږلرو چې

$$z = x^n f(\frac{y}{x})$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} f(\frac{y}{x}) + x^n f'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$= nx^{n-1} f(\frac{y}{x}) - yx^{n-2} f'(\frac{y}{x})$$

او

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{n}f'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}f'(\frac{y}{x})$$

نوله دي کېله

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nx^{n}f(\frac{y}{x})=nz$$

۱۲. ۳. ۴ حل شوي مثالونه

1. مثال: د $z=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}$ لپاره دايولر قضيه امتحان کړئ

حل: z د $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ درجې يوه متجانسه تابع ده نوموږ لرو چې. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{12}z$

او س

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}}{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^{2}}$$

او

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\frac{1}{3}y^{\frac{-2}{3}}-(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\frac{1}{4}y^{\frac{-3}{4}}}{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^{2}}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})x^{\frac{1}{3}}-3(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{4}}}{12(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^{2}}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})y^{\frac{1}{3}}-3(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})y^{\frac{1}{4}}}{12(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^{2}}$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(4-3)(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})}{12(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^{2}}$$

$$=\frac{1}{12}\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{12}z$$

کوم چې غوښتل شوې دی.

2. مثال : که چېرې $u = xy \cdot f(\frac{x}{y})$ وي، وښایاست چې $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

حل: مونږلروچې

$$u = xyf(\frac{x}{y}) = y^2\frac{x}{y}f(\frac{x}{y}) = y^2\phi(\frac{x}{y})$$

U یوه دویمه درجه متجانسه تابع ده.

دایولردقضیې په بنسټ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

څنګه چې غوښتل شویدی

3. مثال : که چېرې $u = \tan^{-1}\frac{x^3 + y^3}{x - y}$ وي، ثبوت کړئ چې

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

حل : دلته u یوه متجانسه تابع نده. مونږ بیاهم ، لیکو چې

$$z = \tan u = \frac{x^3 + y^3}{x - y} = x^2\frac{1 + (\frac{y}{x})^3}{1 - (\frac{y}{x})}$$

نوپدې ډول z د x , y ددویم ترتیب یوه متجانسه تابع ده

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

خو $\frac{\partial z}{\partial x} = \sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y}$

په (1) رابطه کې په ونج کولو مونږ لاسته راوړوچې

$$\sec^2\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2z=2\tan u$$

یا
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\sin u}{\cos u}\cos^2 u=\sin 2u$$

4. مثال : که چیرې $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ وي، وښایاست چې

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

سره دی.

حل : مونږلروچې

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}2x=-x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}}$$

په ورته ډول یادورته والي (تناظر) نه لروچې

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}+3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}}$$

له جمع کولونه لاس ته راوړوچې

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$$
$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}+3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}}(x^2+y^2+z^2)$$
$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}+3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

څه چې غوښتل شوي دي
$$=0$$

5. مثال : که چېرې $u=\ln\frac{x^2+y^2}{x+y}$ وي، ثبوت کړئ چې $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$.

حل : u يوه متجانسه تابع نه ده

فرضووچې $z=e^u=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ دي. نو z يوه لومړئ درجه متجانسه تابع ده

دايولردقضيي پربنسټ مونږلروچې

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=1\cdot z=z$$

يا

$$x\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=z=e^u$$

څه چې غوښتل شوي دي

$$\Rightarrow x\cdot e^u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot e^u\frac{\partial u}{\partial y}=e^u\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$$

۱۲ .۳ پوښتنې

1.دايولرقضيه دلاندي تابعگانولپاره امتحان کړئ

$(i)\quad u=x^n\ln(\frac{y}{x})\qquad (ii)\quad u=\frac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}}}$

$(iii)\quad u=(x^2+xy+y^2)^{-1}$

2.که چېرې $u=arc\sin\frac{x^2+y^2}{x+y}$ وي، ثبوت کړئ چې $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\tan u$

3.که چېرې $u=arc\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ وي، ثبوت کړئ چې $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

4. که چېرې $u=\phi(\frac{y}{x})$ وئ، وښاياست چې $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

5.که چېرې $u = arc\ \cos\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ وئ ثبوت کړئ چې

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cot gu$$

6. که چېرې $u = arc\sec\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}}$ و ئ ثبوت کړئ چې

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4}\cot gu$$

7.که چېرې $u = arc\ \cos ec\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$ وئ ثبوت کړئ چې

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{4}\tan u$$

8. که چېرې $u = f(x,y)$ دn ترتیب یوه متجانسه تابع وي نوثبوت کړئ چې

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-n(n-1)u\ .$$

فرض کړئ چې

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

9. که چېرې $z=f(x+ay)+\phi(x-ay)$ وئ، ثبوت کړئ چې $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

10. که چېرې $u=f(r)$ چېرته چې $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ، نوثبوت کړئ چې

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$

11. که چېرې $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ وي نوثبوت کړچې

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=y\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=z\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

بشپړ(کلي) ديفرينسيلونه

TOTAL DIFFERENTIALS

۱۲. ۴. ۱ مونږ د

$$z = f(x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

يوه تابع په پام کې نيسو .

فرضووچې $(x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y)$ دارنګه دوه نقطې دي چې $\Delta x, \Delta y$ د xاو y مستقل متحولينو بدلونونه دي. که چېرې Δz په z کې د پا يلې په حيث لاس ته راغلی بدلون وي. نومونږلروچې

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

له (i) او(ii) څخه مونږلاسته راوړوچې

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

دلته د Δz بدلون ددوو تفاضلونو د مجموعې په ډول څرګند شوي دی ، دغو هرې يوې باندې به مونږ د لاګرانج د وسطی قيمت قضيه تطبيق کړو.

مونږ $f(x + \Delta x, y)$ د y ديوی تابع په ډول په پام کې نيسو ، $x + \Delta x$ ثابت فرض شوې دی ، نو لدی کبله دوسطي قيمت د قضيه پر بنسټ ،

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = \Delta y f_y(x - \Delta x, y + \theta_1 \Delta y)$$

مونږ ليکو چې

$$f_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) - f_y(x, y) = \varepsilon_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

نولدی کبله ε_2 په $\Delta x, \Delta y$ پوری اړه لري ، څکه نو $f_y(x, y)$ دپام کې نيول شوي متماديت له امله، صفر ته تقرب کوي ځکه څنګه چې Δx او Δy دواړه صفر ته تقرب کوي.

دویم ځلي بيا مونږ $f(x,y)$ يواځې د x ديوی تابع په ځير په پام کی نيسو، y ثابت فرض شوی دی ، نو لدی کبله د وسطي قيمت د قضيي پر بنسټ مونږ لرو چې

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\Delta x f_x(x+\theta_2\Delta x,y)$$

مونږ ليکو چی

$$f_x(x-\theta_2\Delta x,y)-f_x(x,y)=\varepsilon_1 \text{..............................}(v)$$

نو لدی کبله ε_1 په Δx پوری اړه لري او، ځکه نو $f_x(x,y)$ د فرض شوي متماديت له کبله صفر ته تقرب کوي لکه ځنګه چی Δx صفر ته تقرب کوي.

له (iii) ، (iv) او (v) څخه مونږ لرو چې

$$\Delta z=[\Delta x f_x(x,y)+\Delta y f_y(x,y)]+[\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y]$$

ځکه نو په z کی د Δz بدلون له د دوه برخو نه چې دقوسونو په وسيله په ښه شوي دي تشکيل شويدي. له دغو څخه لومړی ته د z ديفرينشل وايي او د dz پواسطه ښودل کيږي .نوليکلي شو چي

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \text{ ....}(vi)$$

فرضوو چی $z=x$ ، نو لدی امله $dx=dz=1.\Delta x=\Delta x$

په ورته ډول ؛ د $z=y$ په پام کي نيولوسره ، مونږ وينو چی $\Delta y=dy$ ځکه نو (vi) رابطه

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ شکل غوره کوي.

يادونه :

دا يادونه بايد وشي dx او dy دx اوy مستقلو متحولينوديفرينشيلونه دΔx او Δy حقيقي بدليدل دي ، خودz غيرمستقل متحول dz ديفرينشيل لکه دΔz بدليدلو په ځير نه ده ، دا دΔz دبيربنت بنسټيزه برخه ده.

۱۲ .۴. ۲ اټکلي شمیرنه یامحاسبه

د پورته څرګندونو څخه وپوهیدو چې په z کې د dz بدلیدل په x او y کې د Δx او Δy له کوچنی بدلون سره چې $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ده اړیکه لري،کوم چې په dz سره لیکل شوی ده.

تعریف : د $z = f(x,y)$ دیوې دوه متحوله دیفرینشیل وړتابع بشپړ دیفرینشیل د $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

په شان تعریف کیږي.

۱۲ .۴. ۳. حل شوي مثالونه

۱.مثال : فرض کړي چې $u = \sqrt{x+2y}$ او x له 3 نه تر 2.98 پورې بدلون مومي کله چې y له 0.5 څخه تر 0.51 پوري بدلون وکړي. د u د بدلون لپاره یواټکلي قیمت لاسته راوړی.

حل : دلته

$$u = \sqrt{x+2y}\ ,\ x = 3\ ,\ y = 0.5$$
$$dx = 2.98 - 3 = -0.02\ \ ,\ \ dy = 0.51 - 0.5 = 0.01$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+2y}} = \frac{1}{2\sqrt{3+2(0.5)}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+2y}}.2 = \frac{1}{\sqrt{3+2(0.5)}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

اوس

$$du\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{1}{4}(-0.02) + \frac{1}{2}(0.01)$$
$$= -0.005 + 0.005 = 0$$

نولدی امله یدي برخه کي په u کی کوم بدلون شتون نلري.

۲. مثال : د یو مستطیل دمساحت په محاسبه کی دخطاسلنه پیداکړی کله چی 2 سلنه (2%) خطا د هغه مستطیل د ضلعو په اندازه کولو کی رامینځته کیږي.

حل : فرضوو چی د نوموړي مستطیل ضلعی x او y دي.

$\therefore$ مساحت $= A = x\ .\ y$

$$dx = \frac{2}{100}x \;,\; dy = \frac{2}{100}y$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy$$

$$= y.\frac{2}{100}x + x.\frac{2}{100}y = \frac{4}{100}xy$$

د خطا سلنه $= \frac{dA}{A}X100 = \frac{4xy}{100xy}.100 = 4\%$

۳. مثال : که چېرې د اوسپنې یو ډول مستطیلي ټوټې ته تودوخه ورکړل شي، ددوی ابعاد په ترتیب سره 5cm نه تر 5.01cm او 7cm نه تر 7.02cm پورې ډېرېږي . د هغې د مساحت اټکلي بدلون پیداکړئ.

حل : پدې ځای کې

$$x = 5 \;,\; dx = 0.01$$
$$y = 7 \;,\; dy = 0.02$$

مساحت $= A = x.y$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y(0.01) + x(0.02)$$
$$= 7(0.01) + 5(0.02) = 0.07 + 0.10 = 0.17cm^2$$

٤. مثال : دیو مستطیلي متوازي السطوح حجم د $v=xyz$ فارمول پوسیله راکړل شوي دی. که چېرې دغه جامد جسم ته له پورته خوا فشار ورکړل شي څوچې z د2% په اندازه کمښت ومومي او xاو y هر یو د0.75% په تقریبي ډول سره ډېرښت ومومي ،په کومه سلنه بدلون به په v کې را پیښ شي.

حل : اوس ،

$$v = xyz$$

$$dx = \frac{0.75x}{100}, dy = \frac{0.75y}{100}, dz = -\frac{2z}{100}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$= yz(\frac{0.75x}{100}) + xz(\frac{0.75y}{100}) + xy(\frac{-2z}{100})$$

$$= -\frac{0.5xyz}{100}$$

په سلنه بدلون یا تغیر $= \frac{dv}{v}X100 = -\frac{0.5xyz}{100xyz}.100 = -0.5\%$

۱۲ .۴ پوښتنې

۱. که چېرې $z = xy^3 - 8x^2y^2$، او x له 1 نه تر 1.01 پورې او y له 8 نه تر 8.02 پورې بدلون ومومي، په z کی بدلون لپاره تقریبي قیمت لاسته راوړی.

۲. که چېرې $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy^2z^3$ او x له 2 نه تر 2.01 پورې، y له 1 نه تر 1.02 پورې او z له

-1- نه تر 0.99 – پورې بدلون ومومي په u کی دبدلون لپاره تقریبي قیمت لاسته راوړی.

۳. دیومخروط جانبي (اړخیزه)سطحه د $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ فارمول پوسیله راکړل شوی ده چېرته چی r دقاعدی شعاع او h لوړوالی دی.که چېرې په محاسبه کې r د 1% په پاملرنې سره 6 لاسته راشی او h د 0.25% په پاملرنې سره 8 لاسته راشي ، د s مساحت به په کومې پاملرنې سره وي.

٤. دیوی ساده رقاصی په لړ خوځښت سره $T = 2\pi\sqrt{\ell / g}$ پیریود دی. که چېرې د T په محاسبه کی د ℓ قیمت د 8.05ft پر ځاې ℓ =8ft اودg قیمت د $32.01 ft / \sec^2$ پر ځاې $g = 32 ft / \sec^2$ وکارول شي ، په T کی اټکلي خطا وټاکې.

۵. د یو مثلث دمساحت لپاره فارمول $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$ دی. په کوم اټکل سره د Δ په محاسبه کی څومره خطا رامینځته کېږي که چېرې a د 9 پر ځای 9.1 ونیول شی، b د 4 پرځای 4.08 ونیول شی او C د 30° پر ځای $30^\circ 3'$ ونیول شي.

۶. دیوې بیضوي په مساحت کی دخطا سلنه پیداکړی کله چی دلوی او کوچني محورونوپه اندازه کولوکی 1% خطا را مینځته کیږي.

۷. په کوم قیمت سره د یو مستطیل مساحت بدلون کوي که چېرې ددی اوږدوالی 15ft وي او په $3 ft / \sec$ کی ډیرښت ومومي او سور یې 6ft وي اوپه $2 ft / \sec$ کی ډیرښت ومومي.

۱۲ .۵ .۱ مرکبی تابعگانی

فرضوو چی

$$z = f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

او که چېرې

$$x = \phi(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$y = \psi(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

دارنګه چيy,x پخپله د t پودريم متحول تابعګا نې وي . نوپدی صورت کی ویل کیږي چي (i) ، (ii) او (iii) تابعو ی معادلې د z غوندې د t يوه مرکبه تابع معرفی کوي. برسيره پردی ، که چيرې

$$x = \phi(u,v)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$$

$$y = \psi(u,v)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(v)$$

نو پدې صورت کې x او y دu,v متحولینو تابعګانې دي. نو پدی ځای کې (i) (iv) (v) تابعوي معادلې د z غوندې دu,v يوه تابع راپيژني، کومې ته چي دu او v مرکبه تابع وايي.

۱۲. ۵. ۲ دمرکبو تابعګانو ديفرينشيل نيونه

فرضوو چي $z = f(x,y)$ ، دمتمادي حصوي مشتقونو لرونکی ده او هم که چيرې

$$x = \phi\,(t)$$
$$y = \psi\,(t)$$

دمتمادي مشتقونو لرونکي وي. نو

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

فرضوو چي $t+\Delta t, t$ دوه قيمتونه دي. که چيرې $\Lambda z, \Lambda y, \Lambda x$ په ترتيب سره پهz,y,x کی بدلونونه وي نو په t کی د Λt د بدلون لپاره. موږ لرو چي

$$x + \Lambda x = \phi(t + \Lambda t)$$
$$y + \Delta y = \psi(t + \Delta t)$$

$$z + \Delta z = f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y)$$
$$\therefore \Delta z = f(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y) - f(x,y)$$
$$= [f(x + \Lambda x\ ,\ y + \Lambda y) - f(x, y + \Lambda y)] + [f(x, y + \Lambda y) - f(x,y)]$$

موږ ښې لوری ته په دوه تفاضلونو باندی د لاګرانج د وسطي قيمت قضيې په تطبيقولو ، لاسته راوړو چي

$$\Delta z = \Delta x \ f_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) + \Delta y \, f_y(x, y+\theta_2 \Delta y) \quad , \quad (0<\theta_1 \ , \ \theta_2<1)$$

$$\therefore \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} f_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) + \frac{\Delta y}{\Delta t} f_y(x, y+\theta_2 \Delta y) ....(i)$$

که چېرې $\Delta t \to 0$ ؛ پدې ډول Λx او Λy صفر ته تقرب کوي.

لدی سببه د حصوي مشتقونو د متمادي والي له امله ، مونږ لرو چې

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x+\theta_1 \Delta x \ , \ y-\Delta y) = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} f_y(x, y-\theta_2 \Delta y) = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ډول (i) لمیټ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dt} \quad ....(ii)$$

سره کیږي.

یادونه: فرضوو چې z=f(x,y) ، نظر x او y ته دلومړی ترتیب حصوي مشتقونه لري.

پدې فرضولوسره چې

$$x = \phi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

متمادي لومړی ترتیب حصوي مشتقونه لري.

د $\partial x / \partial u$ لاسته راوړو لپاره ، مونږ (v) دیو ثابت په شان په پام کی نیسو، له همدی کبله ښایي چې x او y
یواځی د u تابعګانی وګڼل شي. نو دپورتني قضیې پر بنسټ ، مونږ لرو چې

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} \quad ....(iii)$$

داپه ورته ډول سره ښودلي شو چې

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} \quad ....(iv)$$

د (ii) , (iii) او (iv) معادلو ته ځنځيري(مرکبي) قاعدی وايي.

۱۲. ۵. ۳ ضمني تابعګانی (Implicit Functions)

فرضوو چی f(x,y) لکه د

$$f(x,y)=0 \quad ....(i)$$

هرو دوو متحولينو تابع ده.

که چېرته (i) تابع په نورو حدونو کی ديو متحول لپاره په ښکاره ډول حل شوي نه وی نو په هغه صورت کی(i) ، y د x ديوی ضمني تابع په څير رامعرفي کوي.

يادونه : دهغو شرايطو څيړنه دکومو لاندی چی (i) مساوات y دx دتابع په توګه معرفي کړی ندی. په هرحال ، ددی کتاب له موخو څخه نه ګڼل کيږي. دلته مونږ هغه شرطونه په پام کي نيسو دکومو لاندی چی (i) مساوات y دx د مشتق وړ تابع په توګه معرفي کوي صدق کړي.

۱۲. ۵. ۴ د ضمني تابعګانو ديفرينشيل نيونه

فرضووچي

$$f(x,y)=0 \quad ....(i)$$

اوس f(x,y) د x او y دوه متحولينو تابع او y بيا دx تابع دی نودارنګه بايد مونږ f(x,y) د x د يوي مرکبی تابع په توګه په پام کی ونيسو. پدې ډول x ته د حصوي(جزوي) مشتقونو په نيولو،مونږ لاسته راوړو چی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

يعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}=0$$

يعنی

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{f_x}{f_y}$$

که چيرې $f_y \neq 0$ وي.

دویم ځلی x ته په دیفرینشیل نیولو سره ، $\partial f/\partial x$ او $\partial f/\partial y$ نظر x ته دمرکبو تابعګانو په شان په پام کې نیوڵو سره، مونږ لاسته راوړوچي

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

لدی امله

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{fx}{fy}$$

او

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_x{}^2(f_y)^2-2f_{yx}f_xf_y+f_y{}^2(f_x)^2}{(f_y)^2}$$

نوبتی یا متناوب میتود (Alternate Method)

مونږلرو چی $f(x,y)=0$

که چیری Δx د x ډیروالي (زیاتوالی) او Δy دپایلي په حیث د y ډیروالی وي ، دارنګه چی

$$f(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)=0$$
$$f(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)-f(x\ ,y)=0$$

یا

$$f(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)-f(x\ ,\ y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x\ ,y)=0$$
$$\Delta x\, f_x(x+\theta_1\Delta x\ ,\ y+\Delta y)+\Delta y\ f_y(x\ ,\ y+\theta_2\Delta y)=0$$

یا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f_x(x+\theta_1\Delta x\ ,\ y+\Delta y)}{f_y(x\ ,\ y+\theta_2\Delta y)}$$

که چیری $\Delta x\to 0$

که چیري $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$, $(f_y\neq 0)$

۱۲ . ۵ . ۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال : $\dfrac{dz}{dt}$ پیدا کړی کله چی

$$z=xy^2+x^2y\ ,\ \ x=at^2\ \ ,\ \ y=2at$$

حل :

$$\frac{dz}{dx}=y^2+2xy \quad , \quad \frac{dz}{dy}=2xy+x^2$$

$$\frac{dx}{dt}=2at \quad , \quad \frac{dy}{dt}=2a$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$=(y^2-2xy)2at+(2xy+x^2)2a$$

۲. مثال : که چېرې $y=e^v\ ,\ x=u^2-v\ ,\ z=\frac{\cos y}{x}$ وي نو $\frac{\partial z}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}$ لاسته راوړی.

حل : مونږ لرو چې

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\cos y}{x^2}\cdot 2u+(-\frac{\sin y}{x})\cdot 0$$

$$=-\frac{2u\cos y}{x^2}$$

او

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{-\cos y}{x^2}(-1)+(\frac{-\sin y}{x})e^v$$

$$=\frac{1}{x^2}[\cos y-x\sin y.e^v]=\frac{1}{x^2}[\cos y-xy\sin y] \quad , \quad (\because e^v=y)$$

۳. مثال : فرض کړئ چې $z=\sqrt{xy+y}\ ,\ x=\cos\theta\ ,\ y=\sin\theta$. د ځنځیري قاعدې په کارولو سره $\frac{dz}{d\theta}$ لاسته راوړی کله چې $\theta=\frac{\pi}{2}$ وي.

حل : د

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{d\theta}$$

ځنځيري قاعدې څخه مونږ لاسته راوړو چې

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{1}{2}(xy+y)^{-\frac{1}{2}}(y)(-\sin\theta)+\frac{1}{2}(xy+y)^{-\frac{1}{2}}(x+1)(\cos\theta)$$

کله چې $\theta=\pi/2$ وي ، نو مونږ لرو چې

$$x=\cos\pi/2=0\ ,\ \ y=\sin\pi/2=1$$

په فارمول کی د $\frac{dz}{d\theta}$ لپاره د $x=0$, $y=1$, $\theta=\pi/2$ په عوض کولو سره لاسته راځي چې

$$\left.\frac{dz}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/2}=\frac{1}{2}(1)(1)(-1)+\frac{1}{2}(1)(1)(0)=-\frac{1}{2}$$

٤. مثال: که چېرې $H=f(y-z\ ,\ z-x\ ,\ x-y)$ وی ، ثبوت کړئ چې

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0$$

حل: که چېرې $u=y-z$, $v=z-x$, $w=x-y$ ، دارنګه $H=f(u.v,w)$ مونږد z,y,x يوې مرکبې تابع په شان د H څرګندول لرو .

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot(-1)+\frac{\partial H}{\partial w}\cdot 1=-\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{\partial H}{\partial w}$$

په ورته ډول،

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{\partial H}{\partial w}+\frac{\partial H}{\partial u}$$
$$\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial H}{\partial v}$$

په جمع کولو سره ، مونږ به پا یله لاس ته راوړو.

۵. مثال : که چېرې $z=f(x,y)$ ، $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ، وښيي چې

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

حل : مونږ لروچې

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$$

یا

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta......................(II)$$

د (I) او (II) مسأواتونو په مربع کولو او په جمع کولو لاس ته راوړو چې

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^2+(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

۶. مثال : $\frac{dy^2}{dx^2}$ لاسته راوړو که چېرې $x^3+y^3=3axy$

حل: مونږ لرو چې

$$f(x\,,\,y)=x^3+y^3-3axy=0$$
$$\therefore\quad f_x=3x^2-3ay$$
$$f_y=3y^2-3ax$$
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

x ته په دیفرینشیل نیولو سره

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y^2-ax)\,(a\frac{dy}{dx}-2x)-(ay-x^2)\,(2y\frac{dy}{dx}-a)}{(y^2-ax)^2}$$
$$=\frac{\frac{dy}{dx}(ay^2-a^2x-2ay^2+2x^2y)-(2xy^2-2ax^2-a^2y+ax^2)}{(y^2-ax)^2}$$

$$=\frac{\frac{ay-x^2}{y^2-ax}(2x^2y-ay^2-a^2x)-(2xy^2-ax^2-a^2y)}{(y^2-ax)^2}$$

$$=\frac{6ax^2y^2-2a^3xy-2xy(x^3+y^3)}{(y^2-ax)^3}$$

$$=\frac{6ax^2y^2-2a^3xy-2xy(3axy)}{(y^2-ax)^3}$$

$$=\frac{-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}=\frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$$

۱۲. ۵ پوښتنې

۱. فرض کړی چې $z=x^2y$, $x=t^2$. $y=t^3$ دځنځيري قاعدی په کارولوسره $\frac{dz}{d\theta}$ لاسته راوړی او پایلې د z د ښودلوپواسطه لکه د t دیوی تابع په څیر مستقیماً په دیفرینشیل نیولوامتحان کړئ.

۲. که چیرې $u=x-y^2$, $x=2r-3s+4$, $y=-r+8s-5$ وي ، $\frac{\partial u}{\partial r}$ او $\frac{\partial u}{\partial s}$ لاسته راوړی.

۳. $\frac{dy}{dx}$ لاسته راوړی که چیرې

$(i)\quad x^3+y^2x-3=0$

$(ii)\quad \sin xy-e^{xy}-x^2y=0$, $(iii)\quad x^y=y^x$

٤. که چیرې $F(x,y,z)=0$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ او $\frac{\partial z}{\partial y}$ پیدا کړئ.

۵. که چیرې $\phi(y,z)=0, f(x,y)=0$ وښایاست چې

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

٦. فرض کړئ چي $z = f(x,y)$, $x = e^{u} + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^{v}$ وښایاست چی

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$

٧. که چیري $z = f(2x - 3y)$ وي ، وښایاست چی

$$3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

٨. $z = xy^2 + x^3y$, $x = r^2 - 2s$, $y = 2r - s^2$ راکړل شوي دي ، $\frac{\partial z}{\partial r}$ او $\frac{\partial z}{\partial s}$ لاسته راوړی.

٩. که چیري $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = a$ وي ، وښایاست چی

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-a}{(1-x^2)^{3/2}}$$

١٠. که چیري $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ وي ، ثبوت کړی چی

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{(hx + by + f)^3}$$

لوری لرونکي (جهتي) مشتقونه

۱۲. ۶. ۱ ګرادينت Gradient

فرضووچي $z = f(x,y)$ د دوه متحولينو يوه تابع ده. نو د دوه حصوي مشتقونو په مرستی سره مونږ په R^2 کی د $\frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$ يووکتور جوړوو. چې دغه وکتورته (دګرادينت وکتور) وايي، دgrad f ياد ∇f پواسطه ليکل کيږي، (د $Del\, f$ په شان لوستل کيږي).

ځکه نو

$$grad\ f = \nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial z}{\partial x} + j\frac{\partial z}{\partial y}$$

دغه وکتورد D دسيمی په نقطو کی چېرته چی حصوي مشتقونه شتون لري تعريفيږی.

په دريو متحولينو کي

$$\nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$$

چېرې چی f د $u = f(x,y,z)$ پوسيله راکړل شوي دي.

۱۲. ۶. ۲ تعريف

فرضوو چی $u = f(x,y,z)$ د R^3 د D په يوه سيمه کی تعريف شويده. که چېرې p د D يوه نقطه وي، پدې فرضولو کولوسره، Δs په يو ځانګړي(ټاکلي) لوري د p دځای نيوني اندازه ښيي.که چېرې Δu په u کي برابر(مطابق) بدلون وښيي. نو $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$ ته، که چېرې دا شتون ولري ، په يوځانګړي لوري د p په نقطه کی د u مشتق وايي اود $\frac{du}{ds}$ پواسطه ښودل کيږي .

۱۲. ۶. ۳ لوري لرونکی مشتق

فرضوو چي $u=f(x,y,z)$ د يوې راکړل شوې فضا د c دمنحني د (x,y,z) په يوه نقطه کي تعريف شوې ده. که چيرې $F(x+\Delta x, y-\Delta y, z+\Delta z)$ په c باندې په يوه مجاوره نقطه کی دتابع قيمت وي، اوهم فرضوو چې Δs د دغو دوو نقطو تر مينځ د منحني د قوس اوږدوالی ښيي. نو

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{F(x-\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x,y,z)}{\Delta S}$$

که چيرې دا شتون ولري نودې ته د c دمنحني په اوږدوکي د (x,y,z) په نقطه کی د u يا $F(x,y,z)$ لوري لرونکی مشتق وايي او دا د

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

پواسطه راکړل شوې دې. د وکتور په حالت (شکل) کی کېداي شي چي داد

$$\frac{du}{ds}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\underline{k}\right)\ \left(\frac{dx}{ds}\underline{i}+\frac{dy}{ds}+\underline{j}\frac{dz}{ds}\underline{k}\right)$$

$$=\nabla F.\frac{dr}{ds}\ =\ \nabla F.T$$

په ځير وليکل شي. له هر يوه څخه څرګندېږي ده چي لوری لرونکی مشتق د c د مماس په لورې د ∇u د ترکيبونکي برخی (Compunent) په واسطه راکول کېږي.

څکه نو د $\underline{v}=[a,b,c]$ په لوري د u لوري لرونکی مشتق د $\underline{v}$ په لوري کی د ∇u ترکيبوونکي برخه (جز) دی. يعنی ،

$$\frac{du}{ds}=\frac{\underline{v}.grad\ u}{\left|\ \underline{v}\ \right|}$$

یادونه : لوری لرونکی مشتق پخپله دګرادینت په لوري کي تر ټولو لوی دی او تر ټولو لوي لوری لرونکی مشتق پراخوالی $|\nabla u|$ دی. له بل پلوه د u لپاره نه بدلیدونکی لوري د u ګرادینت ته دعمود لوری دی.

۱۲. ۶. ۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال : د $(0,0,0)$ په نقطه کی د $u = ye^{-x}(x^2+y^2+z^2+1)$ د بدلون اندازه د $[2,1,2]$ په لوري باندی وټاکی.

حل : مونږ لرو چی $u = ye^{-x}(x^2+y^2+z^2+1)$

په $(0,0,0)$ کی

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{-x}(2x - x^2 - y^2 - z^2 - 1) = 0 \; ,$$

په $(0,0,0)$ کی

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x^2 + 3y^2 + z^2 + 1 + y) = 1 \; ,$$

په $(0,0,0)$ کی

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{-x}.2z = 0 \; ,$$

څرنګه چي $grad \;\; u = [\,0\,,1\,,\,0\,]$ او $\vec{v} = [\,2\,,1\,,2\,]$ ، نو

$$\frac{du}{ds} = \frac{grad\; u\;.\;\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{0.2+1.1+0.2}{\sqrt{4-1+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

۲. مثال: د $F = x^2yz^3$ لوری لرونکي مشتق د $z = u - \cos u \,,\; y = 2\sin u + 1 \,,\; x = e^{-u}$ منحني په اوږدوکي دp نقطې ته چیری چی u=0 ده لاسته راوړی.

حل: د p نقطه چی د u=0 پوری اړه لري $(1,1,-1)$ ده. نو دp په نقطه کی

$$\Delta F = 2xyz^3\underline{i} + x^2z^3\underline{j} + 3x^2yz^2\underline{k} = -2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$$

او

$$\frac{dr}{du} = \frac{d}{du}[e^{-u}\underline{i} + (2\sin u + 1)\underline{j} + (u - \cos u)\underline{k}]$$

$$= -e^{-u}\underline{i} + 2\cos u\,\underline{j} + (1 + \sin u)\underline{k}$$

$$= -\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$$

د p په نقطه کی منحني ته یو مماس ویکتوردی.

پدې لوري کې واحد مماس وکتور $T_0 = \frac{-i + 2j + k}{\sqrt{6}}$ دی.

نو لوري لرونکي مشتق $= \Delta F . T_0 = (-2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}) . \frac{-\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

۳. مثال : که چېرې $u = arc\tan(\frac{y}{x})$ ، په (a,b) کې د u د بدلون دلوري ترټولو لوی قیمت پیداکړئ اوددغه بدلون دلوري د لوی قیمت پراخوالی پیداکړئ. په (a,b) کی دبدلون د نه کولو لوری پیداکړئ.

حل : لوري لرونکی مشتق پخپله د ګرادینت په لوري کې خورازیات لوي دی اوددغه لوري لرونکي مشتق خورا لوی پراخوالی د ګرادینت د ویکتور پراخوالی دی.

په (a , b) کی

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$= -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

په (a , b) کی

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$\therefore$ د بدلون د ستر قیمت لوري $=grad\ u=\left[\frac{-b}{a^2+b^2},\frac{a}{a^2+b^2},0\right]$

$$=-\frac{-b}{a^2+b^2}\underline{i}-\frac{a}{a^2+b^2}\underline{j}$$

د بدلون ستر پراخوالی $=|grad\ u|$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

د بدلون نه کولو لوری پواځی u grad ته یو عمودی وکتور دی کوم چی

$$\underline{v}.grad\ u=0 \quad \text{،ځکه چی ،} \quad \vec{v}=a.\underline{i}+b\underline{j}$$

۱۲. ۶ پوښتنې

۱. د u د بدلون قیمت په راکړل شوی نقطه کی او په راکړل شوي لوری کي لاسته راوری.

$$(i)\quad u=\sin h(x+y)+\cos h\ Z \quad ; \qquad (1,0,1),[-2,2,-1]$$

$$(ii)\ u=2xy-\frac{y}{x} \qquad ; \qquad (1,2),[2,-3,0]$$

۲. د $f(x,y)=3x^2y$ لوری لرونکی مشتق د (1,2) په نقطه کی د $\underline{a}=3\underline{i}+4\underline{j}$ وکتور په لوری لاسته راوری.

۳. د e^{xy} لوری لرونکی مشتق د (2,0-) په نقطه کی د $\underline{u}$ واحد وکتور په لوري (مسیر) چی د x دمحور مثبت لوري سره $\pi/3$ زاویه جوړوي لاسته راوړی.

٤. فرضوو چی $u = x^2 + y^2$ د (a,b) په نقطه کی د u د بدلون د خورا لوی قیمت لوری او ددی بدلون د خورا لوی قیمت پراخوالی وټاکي. د (a,b)په نقطه کی د بدلون نه کولو لوری لاسته راوړی.

٥. د مبدا په لوري د (1,1,3) P په نقطه کی کله چی u=xyz وي $\frac{du}{ds}$ لاسته راوړي.

٦. د تودوخی ویش د $x^2 + y^2 \leq 1$ ، $y \geq 0$ نیمه دایروي لوښي لپاره د $T = 3x^2y - y^3 + 27z$ فرمول پواسطه دخانګړو شرایطولاندی راکړل شوی دي. دy دمحورپه لوري د $A(0,\frac{1}{2})$ په نقطه کی $\frac{dT}{ds}$ لاسته راوړی. همدارنګه

(i) $\frac{dT}{ds}$ د [1,-2] په لوري د A په نقطه کی ،

(ii)د بدلون دخورا زیات قیمت لوری ،

(iii) د بدلون د خورا زیات قیمت پراخوالی ،

(iv) په A کي د ایزوترمل (ورته حرارت) لوری (د A په نقطه کی د بدلون د صفر قیمت لوری) ،لاس ته راوړی.

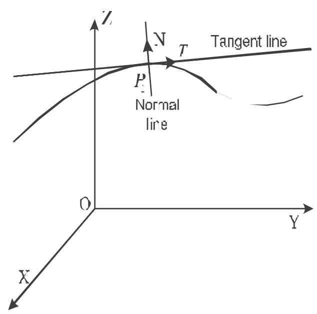
۷. (a) د (3,-1,5)Q شاوخوا لوری ته د (1,2,-1)P په نقطه کی د $u = 2x^3y - 3y^2z$ لوری لرونکی مشتق لاسته راوړی.

(b) د p څخه په کوم لوري ، لوري لرونکی مشتق اعظمي ده.

(c) د لوري لرونکي مشتق اعظمي پراخوالی څومره دی.

۱۲ . ۷ . ۱ پر سطحوباندی نارملونه ، مماس مستوي ګاني

پدې برخه کی مونږ په درې بعدیزه فضاکی پر سطحوباندی مماسی مستویګانې ترڅېړني لاندې نیسو.



مونږ په ځینو اصطلاحګانو شروع کوو: فرضوو چې $p_0(x_0, y_0, z_0)$ په درې بعدیزه فضاکې د c منحني له پاسه یوه نقطه ده. که چېرې منحني د p_0 په یو نقطه کې د T یو واحد مماسي ویکتور او N یو واحد نارمل وکتورولري، نوکوم خط چې د p_0 څخه تیریږی او د T سره موازې وي په معمولي ډول هغه ته د p_0 په نقطه کی د C سره دمماس خط وایي ، او کوم خط چې د p_0 څخه تیریږی او د N سره موازي وي په معمولي ډول هغه ته د p_0 په نقطه کی د c سره دنارمل خط وایي.

۱۲ . ۷ . ۲ تعریف

راځي چې قبول کړو چې $p_0(x_0, y_0, z_0)$ د $z = f(x, y)$ یا $F(x, y, z) = 0$ پر یوې سطحی باندي یوه نقطه ده او فرضووچی f د (x_0, y_0) په نقطه کی د دیفرینشیل وړ ده. پریوه سطحه باندي د منحني ګانو سیټ په پام کی نیسو هغه چې د p_0 په نقطه کی د عمودی مستویګانو پواسطه د سطحی غوڅوونکي (قطع کوونکي) دی. که چیرې ددغومنحنیګانوڅخه هریود p_0 په نقطه کی د مماس یو خط وي ،او که د مماس دغه خطونه په یو ګډ مستوي کی سره واقع شي، نو دغه مستوي ته د p_0 په نقطه کی د سطحی سره دمماس مستوي وایي. کوم خط چې د p_0 له نقطی څخه تیریږی دمماس په مستوي باندي عمود وي هغه ته د p_0 په نقطه کی د سطحی نارمل خط وایي او د p_0 په نقطه کی پر مماس مستوي باندی یو نارمل ویکتور ته ویل کیږي چې د p_0 په نقطه کی پر سطح باندي نارمل دي.

اوس مونږ ثبوتوو چی ګرادF (grad F) د مماس په مستوي د F(x,y,z)=c سطحی ته یو عمودی ویکتور دی، چیرې چی c یو ثابت دی.

فرض ور چی په سطحی باندی د $p(x,y,z)$ په کومه نقطه کې $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ دحالت ویکتوردی نود $dr = dx\underline{i} + dy\underline{j} + dz\underline{k}$ کوم چې سطحی ته د p په نقطه کی د مماس په مستوي کې واقع دی.

همدارنګه

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

کوم چی د

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\underline{k}\right).(dx\ i + dy\ j + dz\ k) = 0$$

په شانتې لیکلې شو. یعنی $grad\ F\ .\ d\underline{r} = d$

دا رابنیي چی grad F په $d\underline{r}$ عمود دی او څکه نود p په نقطه کی سطحی ته د مماس په مستوي عمود دی.

په پئیله کی $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ د $p(x,y,z)$ په نقطه کې پر سطح باندي د نارمل لوری ترونکی نسبتونه دی.

نوپدې دول د (x_1,y_1,z_1) په نقطه کی د $F(x,y,z)=0$ سطحي ته دمماس د مستوي معادله

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_1) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_1) = 0\right.$$

ده. چیرته چی $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ د (x_1,y_1,z_1) په نقطه کی د F حصوي مشتقونه دي او د نارمل معادلې

$$\frac{x-x_1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-z_1}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

دي.

۱۲ .۷ .۳ د دوه سطحودتقاطع(پریکړې) زاویه

په یوه ګډه نقطه کې د دوه سطحود تقاطع زاویه په هماغه نقطه کې ددوي د مماس مستویانو تر مینځ زاویه ده. که چیرې دوي په قایمه زاویه قطع کړي نو سطحو ته متعامدې وایي.

۱۲ .۷ .۴ د يوې سطحې پارامتريکې معادلې

فرضوو چې $F(x,y,z)=0$ يوه سطحه ده .که چېرې z,y,x د

$$x=f(u,v)\ ,\ y=g(u,v)\ ,\ z=h(u,v)..............................(I)$$

معادلو پوسيله تعريف شوي وي. نو (I) معادلې ته د u او v په څېرد پارامترونو په نرلود سطحې پارامتريک معادلې وايي مونږ ګرو چې $\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$.

اوس مونږ د p_0 په نقطه کې نارمل ويکتورلاسته راوړو چې د $u=u_0$ او $v=v_0$ پارامتريک قيمتونو پوسيله ټاکل کېږي.

که چېرې $v=v_0$ او u تحول وکړي نو (I) معادلې دS په سطحې باندې د يو منحني چې د p_0 څخه تيريږي پارامتريک معادلې دي، پارامتر u دی. دمماس ويکتور دغه منحني ته له $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$ سره کلينار(په يوه مستقيم خط واقع) دی.

په ورته ډول که چېرې $u=u_0$ وي او v تحول وکړي نو (I) معادلې د S په سطحې باندې د v پارامترسره د يو منحني چې د p_0 څخه تيريږي پارامتريک معادلې دي. د مماس ويکتور دغه منحني ته د $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ سره پر يو مستقيم خط واقع دی.

څرنګه چې په p_0 کې نارمل ويکتورو دمماس ويکتورونو ته د S پر سطحې باندې ټولو منحني ګانو سره چې د p_0 څخه تيريږي عمود دي، اودغو ويکتورونوته ځانګړې(بيل) دی، چې مونږ وايو چې د $\underline{n}$ نارمل ويکتور له $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$ سره په يو مستقيم خط واقع دی.

۱۲ .۷ .۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال : د (2,3,6) په نقطه کې د $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$ يو مخ ايزه (شيت)هايپرابولوييد دمماس مستوي معادله پيداکړئ.

حل : مونږ د $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}-1=0$ سطحه لرو.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{2},\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{9},\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{z}{18}$$

د (2,3,6) په نقطه کی مونږ لرو چي

$$grad\ \ F=\frac{\partial F}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\underline{k}=\underline{i}+\frac{2}{3}\underline{j}-\frac{1}{3}\underline{k}$$

د (2,3,6) په نقطه کی د مماس مستوي نارمل ته لوری لرونکی نسبتونه $1\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\frac{1}{3}$ دي. لدی امله د مماس مستوي معادله

$$1(x-2)+\frac{2}{3}(y-3)-\frac{1}{3}(z-6)=0$$

ده ، یعنی

$$3x+2y-z-6=0$$

۲. **مثال :** چېرته او په کومه زاویه د $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$ مخروط او د $x^2+y^2=4$ استوانه یو بل پری کوي

حل : په یوه وخت ددومعادلو د حل نه لاس ته راوړو چي

$z^2=8$ يا $z=\pm 2\sqrt{2}$. نو لدی امله مخروط او استوانه د $z=2\sqrt{2}$ او $z=-2\sqrt{2}$ مستویـنو په اوږدو کي یو له بل سره پرې کوي.

که چیرې (x_1,y_1,z_1) د تقاطع یوه نقطه وي نو $z_1^2=8$ او $x_1^2+y_1^2=4$. اوس د مخروط لپاره مونږ لرو چي

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial f}{\partial z}=-z$$

خکه نو، د (x_1, y_1, z_1) په نقطه کي دمخروط دمماس مستوي د نارمل لوری ته لرونکي نسبتونو $-z_1, 2y_1, 2x_1$ دي.

د استواني لپاره مونږ لرو چې

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

لدې سببه،د (x_1, y_1, z_1) په نقطه کی داستواني د مماس دمستوي نارمل ته لوری لرونکي نسبتونه $0, 2y_1, 2x$ دي.

نوپدې ډول د مخروط اود استواني تر مینځ د θ زاویه د

$$\cos\theta = \frac{(2x_1)(2x_1)-(2y_1)\ (2y_1)+(-z_1)(0)}{\sqrt{4x_1^2+4y_1^2+z_1^2}\ .\ \sqrt{4x_1^2-4y_1^2+0}}$$
$$= \frac{4x_1^2+4y_1^2}{\sqrt{4x_1^2+4y_1^2+z_1^2}\ .\ \sqrt{4x_1^2+4y_1^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4(x_1^2+y_1^2)}}{\sqrt{4(x_1^2+y_1^2)+z_1^2}} = \frac{\sqrt{4.4}}{\sqrt{4.4+8}} = \frac{4}{\sqrt{24}} = \frac{4}{2\ .\sqrt{6}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

پواسطه راکړشوې ده.

یعنی $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ غوښتل شوې زاویه ده .

۳. مثال : د سطحی لپاره چې د x= 2cos h u cosv , y=3 cos h u sin v، او z=6 sin h u پارامتریک معادلو پواسطه تعریف شوي ده ، سطحي ته یو نارمل ویکتور په هغه نقطه کی کوم چی $u=1, v=\frac{\pi}{3}$ دي لاسته راوړی.

حل: مونږلرو چې

$$r = xi + yj + zk = (2\cos h\, u \cos v)i + (3 \cos h\, u \sin v)j + (6 \sin h\, u)k$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial u} = (2\sin h\, u \cos v)i + (3\sin h\, u \sin v)j + (6\cos h\, u)k$$

د $v = \frac{\pi}{3}, u = 1$ لپاره

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (2\sin h 1 . \frac{1}{2})i + (3\sin h 1 . \frac{\sqrt{3}}{2})j + (6\cos h 1)k$$

$$= (\sin h 1)i + (\frac{3.\sqrt{3}}{2}\sin h 1)j + (6\cos h 1)k$$

او

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-2\cos h u \sin v)i + (3 \cos h\, u \cos v)j$$

د $v = \frac{\pi}{3}, u = 1$ لپاره ،

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-\sqrt{3} \cos h 1)i + (\frac{3}{2}\cos h 1)j + 0k$$

سطحي ته نارمل ويکتور

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin h 1 & \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin h 1 & 6 \cos h 1 \\ -\sqrt{2}\cos h 1 & \frac{3}{2}\cos h 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 \cos h^2 1\, i - 6\sqrt{3} \cos h^2 1\, j + 6 \sin h 1 \cos h 1$$

$$= 9 \cos h^2 1\, i - 6\sqrt{3} \cos h^2 1\, j + 3 \sin h 2\, k$$

دی.

٤. مثال : ثبوت کړئ چې دیوې کرې یو نارمل ویکتور په کومه نقطه کې دشعاع له وکتور سره چې له همغې نقطې څخه تیریږي په یوه مستقیم خط واقع دی.

حل : د a په شعاع دیوې کرې پارامتریک معادلې

$$
\begin{aligned}
x &= a \sin\phi \cos\theta \\
y &= a \sin\phi \sin\theta \\
z &= a \cos\phi
\end{aligned}
$$

دي

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ د کرې په کومه نقطه کې د حالت ویکتور دی او همدارنګه $\underline{r}$ په هماغه نقطه کې شعاع ویکتوردی.

$$
\begin{aligned}
\underline{r} &= a \sin\phi \cos\theta\, \underline{i} + a\sin\phi \sin\theta\, \underline{j} + a\cos\phi\, \underline{k} \\
\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} &= a\cos\phi \cos\theta\, \underline{i} + a \cos\phi \sin\theta\, \underline{j} - a\sin\phi\, \underline{k} \\
\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} &= -a\sin\phi \sin\theta\, \underline{i} + a\sin\phi \cos\theta\, \underline{j} + 0\underline{k}
\end{aligned}
$$

کرې ته نارمل ویکتور

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi \sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= a^2 \sin^2\phi \cos\theta\, \underline{i} + a^2 \sin^2\phi \sin\theta\, \underline{j} + (a^2\cos\phi\sin\phi\cos^2\theta \\
&\quad + a^2\cos\phi \sin\phi \sin^2\theta)\, \underline{k} \\
&= a^2 \sin^2\phi \cos\theta\, \underline{i} + a^2 \sin^2\phi \sin\theta\, \underline{j} + a^2 \cos\phi \sin\phi\, \underline{k} \\
&= a\sin\phi (a\sin\phi \cos\theta\, \underline{i} + a\sin\phi\sin\theta\, \underline{j} + a\cos\phi\, \underline{k}) \\
&= a\sin\phi\, \underline{r}
\end{aligned}
$$

دي. نو پدې ډول نارمل ویکتور له $\underline{r}$ سره په یو مستقیم خط واقع (collinear) دی.

۷.۱۲ پوښتنې

۱. د $(1,-1,1)$ په نقطه کې د $6x^2+3y^2-2z^2=11$ الیپسوید (بیضوي) سره د مماس دمستوي معادله لاسته داوړئ.

۲. د $(5,-1,-3)$ په نقطه کې د $3x^2-4y^2-6z^2=17$ مخروط سره دمماس دمستوي معادله لاسته راوړئ.

۳. د $(-6,2,\sqrt{24})$ په نقطه د $x^2-2y^2-z^2=4$ دوه مخیزه (شیټ) هایپرابولویید سره دمماس مستوي لاسته راوړئ. هغه نقطې پیدا کړئ په کومو کې چې دمماس مستوي ګاني د $2x+y+z=0$ سره موازي وي.

٤. د $(-2,2,-2)$ په نقطه کې د $xz=4$ استوانی سره دمماس مستوي لاسته راوړئ.

۵. د $(\frac{3}{5}a,\frac{4}{5}a,2a)$ په نقطه کی د $x^2+y^2=a^2$ استوانی سره دمماس مستوي لاسته راوړئ. وښایاست چې په کومه نقطه د مماس مستوي د مولد مستقیم خط په اوږدو کې چې له همغې نقطې نه تیریږي له استوانی سره تماس کوي.

٦. د (x_1,y_1,z_1) په نقطه کې د $ax^2+by^2-cz^2=1$ مخروط ته دمماس د مستوي اود نارمل معادلې لاسته راوړئ.

۷. په کومې زاویې سره د $x^2+y^2+z^2=16$ کره او د $y=2$ مستوي یوله بل سره پرې(قطع) کوي.

۸. وښایاست چې $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12}=1$ الیپسوید (بیضوي)او $\frac{y^2}{3}-x^2-z^2=1$ هایپرابولویید یوله بل سره نیغ (په عمودي ډول) قطع کوي.

۹. وښایاست چې $x^2+y^2+z^2=16$ کره او $3(x^2+y^2)=z^2$ مخروط یوله بل سره په عمودي ډول قطع کوي.

۱۰. د $2x^2-6y^2+3z^2=5$ ته د دوو مماسی مستوي ګانو معادلې لاس ته راوړئ کوم چې د $x+9y-3z=0=3x-3y+6z-5$ له خط څخه تیریږي.

۱۱. ثبوت کړئ چې د یوې کرې هر نارمل دکرې له مرکز څخه تیریږي. ددې معکوس بیان او ثبوت کړئ.

۱۲. ثبوت کړئ چې $2x^2 + y^2 + z^2 = 7$ بیضوي او $y^2 = 4x$ استوانه د (1 , 2 , 1) په نقطه کې یوپه بل عمود دي.

۱۳. څرګند کړئ چې a او b د $y = ax^2 + bz^2$ پارابونوئید لپاره د $x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$ بیضوي سره د (1 , 2 , 1) په نقطه کې متعامد (عمودی کرښه)جوړوي.

۱۲ ـ ۷ . ۵الف . ددوه متحوله تابعګانو اکستریموم (اعظمي او اصغري)

په پنځم څپرکي کې مو ولوستل چې د یو متحوله تابع اعظمي او اصغري قیمتونه څرنګه لاسته راځي . اوس به مونږ د دوه متحوله تابعګانو لپاره ورته تخنیکونو (لارې چارو) ته انکشاف ورکړو.

د دوه متحوله تابعګانو ګراف غونډۍ(تپې) او درې(ناووڼه) جوړوي ، د تپو پورته برخوته نسبي اعظمي، او د درو تر ټولو ټیټو نقطو ته نسبي اصغري وایي.

په هندسي ډول ،اړونده نسبي اعظمي اونسبي اصغري د دوي په نژدې ګاونډیتوب کې لوړې اوټیټې نقطې دي.

۱۲ ـ ۷ . ۵ ب . تعریفونه

نسبي اعظمي

د f یوې دوه متحوله تابع ته وایي چې د (x_0, y_0) په نقطه کې یوه نسبي اعظمي لري که چیرې هلته د (x_0, y_0) په مرکز یوه دایره داډول شتون ولري چې د دایرې په داخل کې د (x , y) ټولو نقطو لپاره $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$.

نسبي اصغري

د f یوې دوه متحوله تابع ته وایي چې د (x_0, y_0) په نقطه کې یوه نسبي اصغري لري که چیرې هلته د (x_0, y_0)په مرکزیوه دایره دا ډول شتون ولري چې ددایرې په داخل کې د (x , y) ټولونقطو لپاره $f(x_0, y_0) \le f(x, y)$.

نسبتي اکستریموم

د f یوې دوه متحوله تابع ته وایي چې د (x_0, y_0) په نقطه کې نسبي اکستریموم لري که چیرې f د (x_0, y_0) په نقطه کې یا یوه نسبي اعظمي ولري یا یوه نسبي اصغري ولري.

مطلق اعظمي

د f یوی دوه متحوله تابع ته وایي چې د (x_0, y_0) په نقطه کې یوه اعظمي یا مطلق اعظمي لري که چېرې د f په ډومېن کې د (x, y) ټولو نقطو لپاره $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$

مطلق اصغري

د f یوې دوه متحوله تابع ته وایي چې د (x_0, y_0) په نقطه کې یو اصغري یا مطلق اصغري لري که چېرې د f په ډومېن کې د (x, y) ټولو نقطو لپاره $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

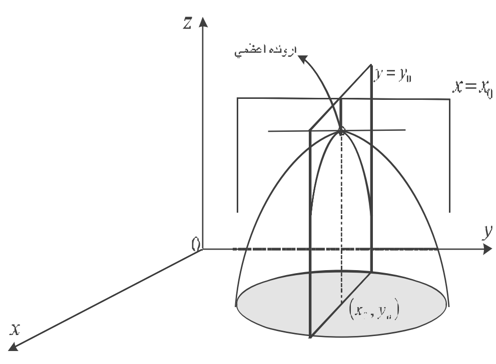
۱۲ . ۷ . ۵ ج . قضیه

فرض کړئ چې f د (x_0, y_0) په نقطه کې یو نسبي اکستریموم لري او که چېرې د f دلومړی ترتیب حصوي مشتقونه په دغې نقطه کې شتون ولري نو.

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{او} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

ثبوت :

فرضوو چې f یوه دوه متحوله تابع ده دکومې چې د (x_0, y_0) په نقطه کې دلومړي ترتیب حصوی مشتقونه شتون لري که چېرې f د (x_0, y_0) په نقطه کې نسبی اعظمي ولري ، نو دا په هندسي توګه روښانه ده چې پر $x = x_0$ او $y = y_0$ مستویانو باندی د $z = f(x, y)$ سطحي نښې (اثر) د (x_0, y_0) په نقطه کې افقي مماسي خطونه لري. څکه نو $f_x(x_0, y_0) = 0$ او $f_y(x_0, y_0) = 0$

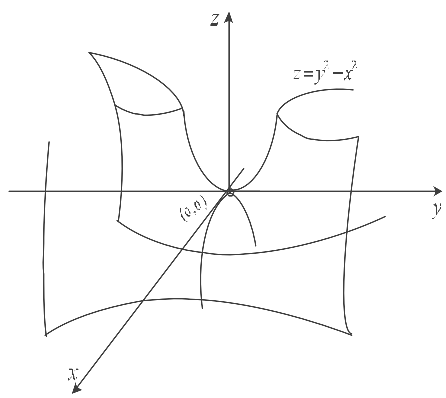


ورته پایله لاسته راځي که چېرې f د (x_0, y_0) په نقطه کې یو نسبي اصغري ولري.

یادونه:

د $f_x(x_0,y_0)=0$ او $f_y(x_0,y_0)=0$ شرطونه کافي ندي چې د (x_0,y_0) په نقطه کې د f یوه دوه متحوله تابع چې يو نسبي اکستريموم لري يقيني (گرنتي) کړي.

د بېلگې په توگه، د $f(x,y)=y^2-x^2$ تابع په پام کې ونيسي. د f تابع گراف څنگه چې په شکل کې ښودل شوې دي د $z=y^2-x^2$ هايپرابوليک پارابولوييد دی.



د $(0,0)$ په نقطه کې ، د xz - په مستوي کې نښې (اثر)او د yz - مستوي کې نښې دواړه افقي مماسي خطونه لري ؛ نوهغه ده چې ، $f_x(0,0)=0$ او $f_y(0,0)=0$. خوبيا هم ، f د $(0,0)$ په نقطه کې نسبي اکستريموم نه لري. ددې دپوهيدلو دليدو لپاره ،د xy- په مستوي کې د کومې دايرې په داخل کې چې مرکز يې د $(0,0)$په نقطه کې پروت دی ترکتنې لاندې نيسو. پدې برخه کې نقطې شتون لري چېرته چې $f(x,y)$ مثبت وي (نقطې د y– د محورد پاسه دی) او پدې برخه کې نقطې شتون لري چېرته چې $f(x,y)$ منفي وي (نقطې د x– دمحوردپاسه دی). څکه نو $f(0,0)=0$ د دايرې په داخل کې د $f(x,y)$ نه لوی قيمت دی نه کوچنی قيمت دی.

د $(0,0)$ نقطې ته د $f(x,y)=y^2-x^2$ تابع د منحني يوه زيني (Saddle) نقطه وايي.

بحراني نقطه Critcal Point

د $f(x\ ,y\ )$ یوي تابع په دوماین کي د (x_0,y_0) یوي نقطی ته د $f(x\ ,y\ )$ بحراني نقطه وایي که چیري یا $f_x(x_0,y_0)=\ f_y(x_0,y_0)=0$ یا یو(یادواړه)دلومړي ترتیب حصوي مشتقونه $f_x(x_0,y_0)$ او $f_y(x_0,y_0)$ شتون ونلري.

نو وروستی قضیه مونږ ته دا وایي چي د تابعګانو نسبي اکستریموم په بحراني نقطو کي واقع کیږي.

یوه بحراني نقطه په کومه کي چي یوه تابع یواړونده اکستریموم ونه لري د f د منحني د زیني نقطي په نوم یادیږي.

مثال: د

$$f(x\ ,y\ )=9-x^2-y^2$$

تابع دمنحني ټولي نسبي اعظمی ، نسبي اصغری او زیني Saddle نقطي په نښه(پیدا) کړئ.

حل: له

$$f(x\ ,y\ )=9-x^2-y^2$$

$$f_y(x\ ,y\ )=-2y \quad \text{او} \quad f_x(x\ ,y\ )=-2x$$

څخه د بحراني نقطي دلاسته راوړلو لپاره مونږ د $f_x(x\ ,y\ )$ او $f_y(x\ ,y\ )$ حصوي مشتقونه د صفر سره مساوي نیسو. لدې نه لاس ته راځي چي $x=0$ او $y=0$ ، نو $(0,0)$ یکي یوه بحراني نقطه ده. پدې بحراني نقطه کي مونږ لرو چي $f(0,0)=9$ ،حال دا چي د $(x\ ,y\ )$ ټولي نقطی له $(0,0)$ څخه تو پیر لري، مونږ ګرو چي$f(x\ ,y\ )<9$.څرنګه چي$f(x\ ,y\ )=9-x^2-y^2=9-(x^2+y^2)$ نوپدي دول f د $(0,0)$ په نقطه کي یوه نسبي اعظمي لري.

د ډیرو پیچلواومغلقو تابعګانو لپاره مونږ د نسبي اکستریممونواوډزیني نقطولاسته راوړلولپاره نورو میتودونوته اړتیا لرو. لاندیني قضیه ، کومه چي په ډیر پر مخ تللي کلکولس (حساب)کي ثبوت شوی دی د یفر ینشیلي تابعګانو د نسبي اکستریممونو د لاسته راوړو لپاره پکاریږي.

۱۲ . ۷ . ۵ د . قضیه

فرض کړئ چي f یوه دوه متحوله تابع ده متمادي دویم ترتیب حصوي مشتقونه په کومه دائره کي چي مرکزیي د (x_0 , y_0) په بحراني نقطه کي ده لري او پدی فرضولو سره

$$D = f_{xx}(x_0 , y_0) \, . \, f_{yy}(x_0 , y_0) - \left[f_{xx}(x_0 , y_0)\right]^2$$

(a)که چیرې D > 0 او $f_{xx}(x_0 , y_0) > 0$ ، نو f د (x_0 , y_0) په نقطه کي یو نسبي اصغري لري.

(b)که چیرې D > 0 او $f_{xx}(x_0 , y_0) < 0$ ، نو f د (x_0 , y_0) په نقطه کي یو نسبي اعظمي لري.

(c)که چیرې D < 0 ، نو f د (x_0 , y_0) په نقطه کي د منحني یوه زیني (Saddle) نقطه لري.

(d)که چیرې D = 0 ، نو کومه پایله لاس ته راوړلی نشو.

۱۲ . ۷ . ۵ ه . حل شوي مثالونه

۱. مثال : د $f(x , y) = 3x^2 - 2xy + y^2$

تابع ټولي نسبي اعظمي ، نسبي اصغري د منحنی زیني نقطې پیدا کړئ.

حل : د بحراني نقطو د لاسته راوړلو لپاره موږ حصوي مشتقونه کاروو.

$$f_x = 6x + 2y \qquad \text{او} \qquad f_y = 2x + 2y$$

د صفر سره په مساوي کېدو. دا $x = 0$ او $y = 0$ لاسته راځي ، نو $(0,0)$ یواځيني بحراني نقطه ده. او

$$f_{xx}(x, y) = 6 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad \text{او} \quad f_{xy} = 2$$

د $(0,0)$ بحراني نقطه کي

$$D = 6(2) - 2^2 = 8 > 0 \qquad \text{او} \qquad f_{xx}(0,0) = 6 > 0$$

لدی امله f د $(0,0)$ په نقطه کي یوه نسبي اصغري لري.

۲. مثال : د $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

تابع لپاره نسبي اعظمي ، نسبي اصغري او زيني نقطې پيدا کړئ.

حل : له $f(x,y)$ څخه مونږ لاسته راوړو چې

$$f_y(x,y)=2y+x+3 \quad , \quad f_x(x,y)=y+2$$

$$f_{xy}(x,y)=1 \quad \text{او} \quad f_{yy}(x,y)=2 \quad , \quad f_{xx}(x,y)=0$$

د بحراني نقطې د لاسته راوړلو لپاره مونږ حلوو

$$2y+x+3=0 \quad \text{او} \quad y+2=0$$

معادلې حلوو ، کوم چې لاس ته راغلل $x=1$ او $y=-2$.

څکه نو $(1,-2)$ يواځينی بحراني نقطه ده.

$$D=f_{xx}(1,-2)\,.\,f_{yy}(1,-2)-[f_{xy}(1,-2)]^2$$
$$=0\cdot 2-1^2=-1<0$$

نو لدې امله $(1,-2)$ د منحني يوه زيني نقطه ده

۳. مثال : د $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y$

تابع لپاره نسبي اعظمي ، نسبي اصغري او زيني نقطې پيدا کړئ.

حل: له $f(x,y)$ څخه مونږ لرو چې

$$f_{xx}(x,y)=2-2y \;\; , \;\; f_y(x,y)=4y-x^2 \quad , \quad f_x(x,y)=2x-2xy$$
$$f_{xy}=-2x \quad , \quad f_{yy}=4$$

د بحراني نقطو دلاسته راوړلو لپاره مونږ د $2x-2xy=0$ او $4y-x^2=0$ معادلې حلوو

$$x-\frac{x^3}{4}=0 \quad , \quad y=\frac{x^2}{4}$$

يعنی،

$$x(4-x^2)=0 \quad ، \quad x=0,2\ ,\ -2$$

لدی امله بحراني نقطې $(0,0)$, $(2\ ,1)$ او $(-2\ ,\ 1)$ دي.

د $(0\ ,\ 0)$ لپاره

$$D=f_{xx}(0\ ,\ 0)\ \ f_{yy}(0\ ,\ 0)-[f_{xy}(0\ ,\ 0)]^2$$
$$=2\cdot 4-0=8>0$$

او $f_{xx}(0\ ,\ 0)=2>0$

لدی امله $(0\ ,\ 0)$ يوه نسبي اصغري نقطۀ ده.

د $(2\ ,\ 1)$ لپاره

$$D=f_{(xx)}(2,1)\ .\ f_{yy}(2,1)-[f_{xy}(2,1)]^2$$
$$=0\cdot 4-(-4)^2=-16<0$$

ځکه نو $(2\ ,\ 1)$ يوه زيني نقطه ده

د $(-2\ ,\ 1)$ لپاره

$$D=f_{xx}(-2,1)\ .\ f_{yy}(-2,1)-[f_{xy}(-2,1)]^2$$
$$=0\cdot 4-4^2=-16<0$$

لدی سببه $(-2\ ,\ 1)$ يوه زيني نقطه ده.

٤. مثال : د $x^2-yz=5$ په سطحه باندی نقطې پيداکړئ هغه چې مبدا ته نژدې وي.

حل : فرض وو چې $p(a,b,c)$ د $x^2-yz=5$ په سطحه باندې يوه نقطه ده

$$a^2-bc=5 \quad \text{يا} \quad a^2=bc+5$$

له مبدا څخه د p واټن :

$$d=\sqrt{a^2-b^2+c^2}=\sqrt{bc+5-b^2+c^2}$$

ده ، که چیري ، $d^2=f(b,c)=b^2+c^2-bc+5$

$$f_b(b,c)=2b+c\,,f_c(b,c)=2c-b$$
$$f_{bb}(b,c)=2\,,f_{cc}(b,c)=2\;\;,\;\;f_{bc}=(b,c)=1$$

د بحراني نقطود لاسته راوړلولپاره مونږ 2b+c=0 او 2c+b=0 معادلي حلوو .

لدي نه لاسته راځي چې b=0 ، c=0 او $a^2=5$ یا $a=\pm\sqrt{5}$

$(\pm\sqrt{5}\,,0,0)$ بحراني نقطي دي.

$$D=f_{bb}(0,0)\;.\;f_{cc}(0,0)-[f_{bc}(0,0)]^2=2\cdot2-1=3>0$$

او $f_{bb}(0,0)=2>0$

لدی امله د b=0 , C=0 لپاره D اصغري دی.

په پایله کي غوښتل شوې نقطي $(\sqrt{5}\,,0,0)$ او $(-\sqrt{5}\,,0,0)$ دي.

۱۲ .۷. الف. پوښتني

د لاندینیو تابع ګانو لپاره ټولې نسبي اعظمی ، نسبي اصغري او زیني نقطي پیدا کړئ.

1. $f(x,y)=x^2+xy-y^2-3x$ ، [ځواب . (2 ,-1) نسبي اصغري]
2. $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{2}{xy}$ ، [ځواب . (1 ,1) , (1- ,1-) نسبي اصغري]
3. $f(x,y)=x^2+y-e^y$ ، [ځواب . (0 , 0) د منحني زیني(تیته) نقطه]
4. $f(x,y)=e^{(x^2+y^2+2x)}$ ، [ځواب . (0 , 1-) نسبي اعظمي]
5. $f(x,y)=\sin x+\sin y,0<x<\pi,0<y<\pi$ [ځواب . $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ نسبي اعظمي]

6. $f(x,y)=3x^2-2xy-y^2-8y$ ، [ځواب . (6 , 2) نسبي اصغري]

7. $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ [ځواب .(1-,1-) , (1,1) نسبي اعظمي ,(0,0)دمنحني زيني نقطه]

8. $f(x,y)=2y^2x-yx^2+4xy$ ، [ځواب . (0,0),(4,0),(0,-2) زيني نقطي $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$
نسبي اصغري]

9. دري مثبت عددونه پيداکړئ چي مجموعه يي 27 او د مربعتو مجموعه يي د شونئ تر حده پوري کوچني وي. [ځواب . 9,9,9]

10. د يو مستطيلي بکس اعظمي حجم لاسته راوړي چي دري مخه يي د قايم مختصاتو په مستوي ګانو کي او دهغه يو راس د x+y+z=1 مستوي په لومړی ربع کي وي

[ځواب $\frac{1}{27}$]

11. يو تړلی مستطيلي بکس $16\ ft^3$ حجم په لرلو دوه ډولو موادو څخه جوړشوی دی. سر او بيخ يي له هغو موادو څخه جوړدي چي يو ft^2 په 10Af او بغلونه يي له هغو موادو څخه جوړدي چي يو ft^2 او 5Af قيمت لري. د بکس اندازي پيداکړئ چي له امله يي د موادو قيمت اصغري وي.

[ځواب . اوږدوالی = سور = 2t ، لوړوالی =4f]

12. د يو مستطيلي بکس ابعاد وټاکي ، چي سريي خلاصيږي ، د V حجم لري ، او دده د جوړولو لپاره لږ مواد پکاروول شوي دي.

[ځواب . اوږدوالي = سور = $\sqrt[3]{2V}$ ، لوړوالي = $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$]

13. د يو مستطيلي بکس ابعاد وټاکي چي سريي خلاصيږي $32\ ft^3$ حجم لري ،دده د جوړونو لپاره لږ مواد پکار وړل شوي دي.

[ځواب .اوږدوالي = سور = 4ft . لوړوالي = 2ft]

څوګوني انتيګرالونه

۱۲ .۸ .۱

د يوې يو متحوله تابع د انتيګرال مفهوم په شپږم څپرکي کي راګرشوی وه پدې برخه کي به مونږ وښيو چې دانتيګرال دغه مفهوم ديوی دوه متحوله يا څو متحوله تابع لپاره په اساني سره غزول کيدلای شي.

۱۲ .۸ .۲ دبل يا دوه ګوني انتيګرالونه

د يو معين انتيګرال نظريه(مفکوره) کيدای شي چې د دوه يا څو متحوله تابعګانو لپاره وغزول شي. په دې برخه کي به مونږ په دوه ګوني انتيګرال بحث وکړو ، کوم چې هغه د دوه متحوله تابعګانو لپاره پراختيا(توسعه) کړيده.

راځي چې مونږ هغه مرحلې تکرارکړو کوم چې د $\int_a^b f(x)\,dx$ يوې يو متحوله تابع معين انتيګرال پيژندلو لپاره ورته اړتيا دي.

۱. مرحله : د [a , b] انتروال په n فرعي انتروالونو چې $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ اوږدوالی ولري تقسيم کړئ.

۲. مرحله : د Δx_r په هر انتروال په کي د c_r يوه اختياري نقطه وټاکئ.

۳. مرحله : د $\sum_{r=1}^{n} f(c_r)\Delta x_r$ ريمان (Riemann) مجموعه جوړه کړئ.

٤. مرحله : دغه کړنې (پروسې) ډيرې ډيرې په فرعي ويشونو سره تکرار کړئ ، ترڅوچې د هر فرعي انتروال اوږدوالی صفر ته او n ، د فرعي انتروالونو مقدار ، $+\infty$ ته ورنژدې شي.

نومونږ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(c_r)\Delta x_r$$

معرفي کوو

د يوې دوه متحوله تابع لپاره د يو انتيګرال تعريف ددغو تطريو يوه طبيعي (ساده) غځيدنه دی. حال دا چې د f(x) نتيګرال نيونه د x پر محور باندی د يو تړلي انتروال د پاسه ځای په پام کي نيول کيږي ، د f(x , y) انتيګرال نيونه د xy– په مستوي کي د R د يوې تړلي سيمی دپاسه ځای په پام کي نيول کيږي.

ددې لپاره چې يو دوه ګونی انتيګرال تعريف کړو مونږ په لاندې ډول مخ په وړاندې ځو:

۱. مرحله : د کاردينټونه محورونو سره موازي خطونه پکاروو ، د R سيمه په کوچنيو(فرعي) مستطيلونو ويشو او ټولې هغه نقطې چې دکوچنيو مستطيلونو د R د سيمې څخه د باندې پاتې کيږي په پام کې نه نيسو. ددغو مستطيلونو مساحت د

$$\Delta A_n \ ,................,\ \Delta A_r\ ,.........,\Delta A_3\ ,\ \Delta A_2\ ,\ \Delta A_1\ .$$

پواسطه ښيو.

۲.مرحله : ددغو کوچنيو مستطيلونو په هر يوه کې يوه اختياري نقطه ټاکو ، او هغوی د

$$(c_n, d_n), ..., (c_2, d_2)\ ,(c_1, d_1)$$

په واسطه ښيو.

۳ . مرحله : د $\sum_{r=1}^{n}(c_r, d_r)\Delta A_r$ مجموعه تشکيلوو، چې دې ته دريمانRiemann مجموعه وايي.

٤. مرحله : دغه پروسي(عملي) په ډيرو زياتوفرعي ويشنو سره تکرار وو ، ترڅو چې د هر مستطيل اوږدوالي او سور صفر ته نژدې شي ، او دn ، مستطيلونو شمير $+\infty$ ته نژدې شي.

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f(c_r, d_r)\Delta A_R$$

تعريفوي.

د $\iint_R f(x,y)dA$ سمبول ته د R په سيمه کې د $f(x,y)$ دوه ګوني انتيګرال وايي

د $\int_a^b f(x)dx$ انتيګرال دهغې سيمې مساحت چې د x=a , x=b تر مينځ ،د y=f(x) منحنی لاندې خواته او د x– محور پاس خوا ته واقع دې که چيرې f(x) منفي نه وي ښيي.

په ورته ډول مونږ پوهيږو چې $\iint_R f(x,y)dA$ د يو جامد جسم حجم چې پورته خواته د z=f(x,y) سطحې او لاندې خوا ته چې د R دسيمې پواسطه راتاوشوي ده که چيرې f(x,y) منفي نه وي ښيي.

دوه ګوني انتیګرالونه ، یوګونوانتیګرالونو ته ورته په زړه پورې ډیرې ځانګړتیاوې (خاصیتونه) لري:

$$(i) \qquad \iint_R c\; f(x,y)\,dA = c \qquad \iint_R f(x,y)\,dA$$ (C یو ثابت دی)

$$(ii) \qquad \iint_R \{f(x,y)+g(x,y)\}dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

$$(iii) \qquad \iint_R \{f(x,y)-g(x,y)\}dA = \iint_R f(x,y)\,dA - \iint_R g(x,y)\,dA$$

(iv) که چېرې د R سیمه د R_1 او R_2 په فرعي سیموبندې وویشل شي ، نو

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

۱۲ .۸ .۳ حصوي انتیګرال نیونه

د f(x,y) یوې تابع حصوي مشتقونه په داسې ډول محاسبه کېږي چې د متحولینو څخه یو ثابت نیول کېږي اونسبت بل متحول ته دغغې ډیفرینشیل ټاکل کېږي. راځې چې مونږ ددغې عملیې معکوس په پام کې ونیسو ، حصوي انتیګرال نیونه. د $\int_a^b f(x,y)\,dx$ سمبول نسبت x ته یو حصوي معین انتیګرال دی.

ددی انتیګرال ارزښت ټاکل دارنګه دي چې y ثابت نیول کېږي او نسبت x ته د هغې انتیګرال ټاکل کېږي. په ورته ډول ، نظر y ته حصوي معین انتیګرال یعنې

$$\int_a^b f(x,y)\,dy$$

ارزښت داسې ټاکل کنږي چې x یکې ثابت نیول کېږي او نسبت y ته دهغې انتیګرال ټاکل کېږي.

مثال :

$$\int_0^1 xy^2\,dx = y^2\int_0^1 x\,dx = \left|\frac{y^2x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{y^2}{2}$$

او

$$\int_0^1 xy^2\,dy = x\int_0^1 y^2\,dy = \left|\frac{x\,y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{x}{3}$$

څنګه چې لدغه مثال نه جوتيږي، د $\int_a^b f(x,y)\,dx$ شکل يو انتيګرال د y يوه تابع رامينځته کوي حال دا چې د $\int_a^b f(x,y)\,dy$ شکل يو انتيګرال د x يوه تابع رامينځته کوي. نو پدې ډول نومونږد محاسبو لاندنې ډولونه په پام کې نيولای شو.

$$\int_c^d [\int_a^b f(x,y)\,dx]dy \qquad \text{.........}(A)$$

$$\int_a^b [\int_c^d f(x,y)\,dy]dx \qquad \text{.........}(B)$$

په (A) کې ، د $\int_a^b f(x,y)\,dx$ داخلي انتيګرال ، د y يوه تابع رامينځته کوي ، کومه چې بيا وروسته د $c \le y \le d$ پر انتروال کې انتيګرال نيول کيږي. په (B) کې ، د $\int_c^d f(x,y)\,dy$ انتيګرال نيولو څخه د x يوه تابع لاسته راځي ، کومه چې بيا د $a \le x \le b$ پر انتروال کې انتيګرال نيول کيږي. د (A) او (B) افادی د تکراري انتيګرالونو په نامه ياديږي. اکثره قوسونه له مينځه ځي او افادې په لاندې ډول ليکل کيږي ،

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)\,dx]dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)\,dy]dx$$

مثال : د لاندې انتيګرالونو ارزښت وټاکئ

$$(a),\quad \int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\,dy\,dx. \qquad (b),\quad \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\,dx\,dy$$

حل :

$$(a) \quad \int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)dy\ dx = \int_0^3 \left\{ \left| y+4xy^2 \right|_{y=1}^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^3 [(2+16x)-(1+4x)]dx = \int_0^3 (1-12x)\,dx = \left| x+6x^2 \right|_0^3 = 57$$

$$(b) \quad \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\,dx\ dy$$

$$= \int_1^2 \left\{ \left| x+4x^2 y \right|_0^3 \right\} dy = \int_1^2 (3+36y)\,dy = \left| 3y+18y^2 \right|_1^2 = 57$$

دا کومه تصادفي پېښه نده چې په وروستني مثال کې دواړه تکراري انتيګرالونه يو ډول ارزښت (قيمت) لري ، دا د لاندني قضيې يوه پايله ده، کومه چې مونږ هغه بې له کوم ثبوت څخه بيانوو.

قضيه : فرضوو R يو مستطيل دی چې د

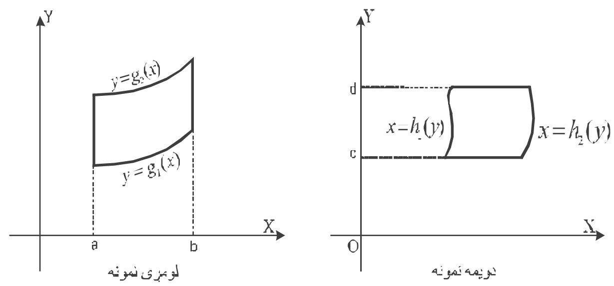
$$a \le x \le b \qquad ، \qquad c \le y \le d$$

نامساواتونو پوسيله تعريف شوی دی. که چېرې $f(x,y)$ پدغه مستطيل باندی متمادي وي نو

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

۱۲ .۸. ۴ د نامستطيل دوله سيمودپاسه دوه ګوني انتيګرالونه

تر اوسه پورې مونږ يواځې دانتيګرال نيونې د ثابتو ليمټونو(حدونو) په لرلوسره تکراری انتيګرالونه ترڅېړنې لاندې نيولی دي،يعني په مستطيلي سيمو کې ، اوس به مونږ د هغو دوه ګونو انتيګرالونوسره سروکارولرو چې د دوه دوله ترلوسيمو د معلومولولپاره ترينه کار اخيستل کېږي ، کومې چې به مونږ هغه په I دول او II دول يادی کړو.



د I ډول یوه سیمه د x=a او x=b عمودی خطونو پوسیله د ښي او چپ لوریونه ترل شوې ده اود پورته او لاندې خوانه $y=g_1(x)$ او $y=g_2(x)$ د باریکو بڼریکو منحنیاتوپوسیله چېرته چې د $a\le x\le b$ لپاره $g_1(x)\le g_2(x)$ وي ترل شوې دي.

د II ډول یوه سیمه د پورته او لاندې خوانه د y=c او y=d افقي خطونو پوسیله ترل شوې او د ښي او چپو خوانه د $x=h_1(x)$ او $x=h_2(x)$ نازکونزکومنحنیاتوپوسیله چېرته چې د $c\le y\le d$ لپاره $h_1(y)\le h_2(g)$ صدق کوي ترل شوې ده.

لاندني قضیه به مونږ ددې ور وګرځوي چې د I ډول سیمي او II ډول سیمي د دوه ګوني انتیګرالونو ارزښتونه د تکراري انتیګرالونو نه پکار اخیستلو سره وټاکو.

قضیه : (a) که چېرې R د I ډول یوه سیمه وي په کومه کې چې f(x,y) متمادي وي نو

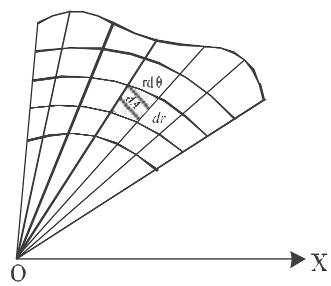
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(b) که چېرې R د II ډول یوه سیمه وي په کومه کې چې f(x,y) متمادي وي نو.

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

۱۲ .۸ .۵ په قطبي مختصاتو کې دوه ګوني انتیګرال

فرضوو چې $f(r,\theta)$ د R په سیمه کې چېرته چې R د $\theta=\pi,\theta=\beta$ مستقیمو خطونو او د منحني ګانو پوسیله چې دهغوی قطبي معادلې $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$ دي ترل شویده (راچاپیره شویده)، د R سیمې دپاسه د $f(r,\theta)$ دوه ګونی انتیګرال $\iint_R f(r,\theta)\,dA$ دي او ارزښت یې د $\int_\alpha^\beta\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$ تکراري انتیګرال پوسیله ټاکل کېږي.



په همدی ډول په مستطيلي مختصاتو کې د اسانتياپه موخه مونږ د R سيمه د دايروي قوسونه پوسيله چې مرکز يې په مبدا کې وي او شعاعوې يې له مبدا څخه خپريږي پوښو. کومې کوچنې سيمې چې ددغو ليکو پوسيله تورى شويدي دقطبي مستطيلونو په نامه سره ياديږي. د قطبي مستطيلونو چې کومه نقطه د R د سيمې څخه د باندې وي په پام کې نه نيسو. فرضوو dA مساحت د r او r+dr په شعاع دوه دايروي قوسونواو شعاع ګانو پواسطه راچاپيره شويدي کومی چې د x له محورسره θ او $\theta + d\theta$ په اندازه زاويې جوړوي ، نو مونږ dA د dr په افادو يو کوچني مستطيل د $rd\theta$ پوسيله معامله کوو. لدې کبله dA=r dr d θ او همدارنګه

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$$

۱۲ .۸ .۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال : د $\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$ انتيګرال ارزښت وټاکئ .

حل :

$$\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_2^4 \left[\int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\right] dx$$

$$= \int_2^4 \left\{ \left| x^2 y + \frac{y^3}{3} \right|_1^2 \right\} dx = \int_2^4 \left[2x^2 + \frac{8}{3} - (x^2 + \frac{1}{3}) \right] dx$$

$$= \int_2^4 (x^2 + \frac{7}{3})\,dx = \left| \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x \right|_2^4$$

$$= \frac{64}{3} + \frac{28}{3} - \frac{8}{3} - \frac{14}{3} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3} \ .$$

۲. مثال : د $\int_0^1 \int_0^x (x^2+4xy)\,dy\,dx$ انتیګرال ارزښت وټاکئ.

حل :

$$\int_0^1 \int_0^x (x^2+4xy)\,dy\,dx = \int_0^1 \left\{ \left| x^2 y + 2xy^2 \right|_0^x \right\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3+2x^3)\,dx = \int_0^1 3x^3 dx = \left| \frac{3x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{3}{4}$$

۳. مثال : د $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx$ انتیګرال ارزښت وټاکئ.

حل :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left\{ \left| \frac{xy^3}{3} \right|_{x^2}^x \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx = \left| \frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}$$

٤. مثال : د $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos\theta\,dr\,d\theta$ انتیګرال ارزښت وټاکئ.

حل :

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (r^2 \cos\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \cos\theta \left| \frac{r^3}{3} \right|_0^2 \right\} d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \frac{8}{3} \left| \sin\theta \right|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$$

۵. مثال : د R سیمي دپاسه چې د $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ او x=4 په مینځ کې چاپیره شوې ده د $\iint_R xy \ dA$ انتیګرال ارزښت وټاکئ.

حل :

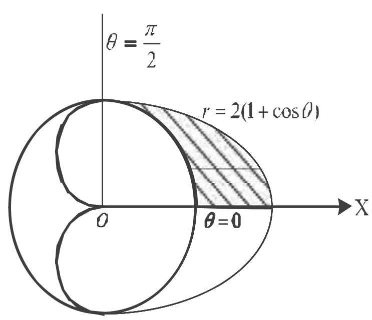
$$\iint_R xy \ dA = \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy \, dx \, dy$$

$$= \int_2^1 \left| x\frac{y^2}{2} \right|_{x/2}^{\sqrt{3}} dx = \int_2^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right|_2^4 = \frac{64}{6} - \frac{256}{32} - \frac{8}{6} + \frac{16}{32} = \frac{11}{6}$$

٦. مثال : د $\iint_R \sin\theta \ dA$ انتیګرال ارزښت وټاکي چېرته چې R په لومړي ربع کې یوه سیمه ده کومه چې د r=2 دایرې څخه دباندې او د $r = 2(1+\cos\theta)$ کار ډیوېډ دننه پرته ده.

حل : د R سیمه په شکل کې د سیورې په ډول ښودل شوې ده



پدې ډول ،

$$\iint_R \sin\theta \; dA =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} \sin\theta \, r \; dr \; d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left\{\left|\sin\theta \frac{r^2}{2}\right|_2^{2(1+\cos\theta)}\right\} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\{(1+\cos\theta)^2 \sin\theta - \sin\theta\} d\theta$$

$$= 2\left|-\frac{(1+\cos\theta)^3}{3} + \cos\theta\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - (-\frac{5}{3})\right\} = \frac{8}{3}$$

۱۲ .۸ پوښتنې

لاندې انتیګرالونه لاسته راوړئ

1. $\int_0^2\int_0^1 xy \; dy \; dx$
2. $\int_1^2\int_0^3 (x-y)\,dx\,dy$
3. $\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y \; dy \; dx$
4. $\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\,dy\;dx$
5. $\int_2^4\int_y^{8-y} y\,dx\,dy$
6. $\int_2^6\int_0^y \frac{dx}{x^2+y^2}\,dy$
7. $\int_0^{\pi/3}\int_{1/2}^{\sin x} (1+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}})\,dy\;dx$
8. $\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^3\cos^2\theta \; dr \; d\theta$
9. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^{\tan\theta} \frac{r^2}{r^2+1}\,dr\,d\theta$
10. $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos y} x\sin y \; dx \; dy$

11. د $\iint_R (2x-y^2)\; dA$ انتیګرال د R مثلثي سیمې د پاسه چې د $y=x+1$, $y=-x-1$ او y=3 خطونو تر مینځ راچاپیره شویده لاسته راوړئ .

12. د $\iint_R x\,dy\,dx$ او $\iint_R x\,dx\,dy$ انتیګرالونه چېرته چې R د xy=2 او x+y=3 پوسیله تاکل شوې دي لاسته راوړې.

13. د $\iint_R dy\,dx$ انتیګرال چېرته چې د R سیمه د محور ، د x=2 خط او $y=e^x$ منحني پوسیله تاکل شوې وي لاسته راوړئ.

د دوه ګونو انتیګرالونو تطبیقات

۱۲ . ۹ . ۱ مساحت :

که چېرې f (x,y)=1 ، د $\iint_R f(x,y)\,dA$ دوه ګونی انتیګرال د $\iint_R 1.dA$ سره شي ، کوم چې په مکعبي مقیاسي واحداتو کې د یوواحد لوړوالي د یوې استواني حجم اندازه کوي : په مربعي واحداتو کې د R د سیمې مساحت اندازه کوي ، نو لدې کبله په مستطیلي مختصاتو کې مساحت د $\iint_R dA = \iint_R dy\,dx$ سره او په قطبي مختصاتو کې مساحت د $\iint_R r\,dr\,d\theta$ سره مساوي دی.

۱۲ . ۹ . ۲ حجم

څرنګه چې په ۱۲ . ۷ . ۲ برخه کې بحث وشو ، د $\iint_R f(x,y)\,dA$ دوه ګونی انتیګرال د یو جسم حجم چې پورته خواته د z=f(x,y) سطحې پوسیله او لاندې خواته د R سیمې پوسیله چاپیره شوې وي ټاکي.

۱۲ . ۹ . ۳ فزیکي تطبیقات

فرض کړئ چې یوراکړل شوې پوړ (طبقه) په یو مستطیلي مستوي کې د یوې سمسې بڼه لري ،په ρ سره دهغې کثافت د وزن تابع. که چېرې $\rho = \rho(x,y)$ په R کې dA د (x,y) په نقطه کې کثافت وي، نو dm د کتلې بنودونکي عنصر د $dm = \rho(x,y)\,dx\,dy = \rho(x,y)\,dy\,dx = \rho(x,y)\,dA$ سره په پام کې نیول کېږي.

دوه ګوني انتیګرال نیونه به د.

(i). $M = \iint \rho(x,y)\,dA$ کتله

(ii). ثقل مرکز (x,y)

$$\bar{x} = \frac{\iint x\,\rho(x,y)\;dA}{\iint \rho(x,y)\;dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y\,\rho(x,y)\;dA}{\iint \rho(x,y)\;dA}$$

(iii). دx- د محور په شاو خوا د انرشيامومنت (عطالت مومنت)

$$\mathrm{I}_x = \iint y^2 \rho(x,y)\,dA$$

(iv). د y– دمحور په شاوخوا د انرشيا مومنت

$$\mathrm{I}_y = \iint x^2 \rho(x,y)\,dA$$

(v). د مبدا په شاوخوا د انرشيا قطبي مومنت

$$\mathrm{I}_0 = \iint (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dA$$

شميرنې(محاسبې كولو) لپاره وكاروو.

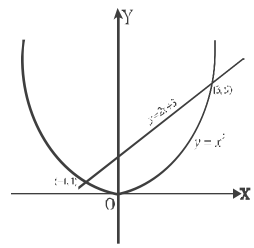
نوټ : د پورتنيو ټولو په انتيګرال نيولو كې د R مساحت دهغوي د انتيګرال نيولو حددې

۱۲ ـ ۹ ـ ۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال : د $y = x^2$ پارابولا او د $y = 2x + 3$ خط پواسطه را چاپيره شوى مساحت پيداكړې.

حل : دپارابولا او د خط د پريكړې(تقاطع) نقطې (1,1-) او (3,9) دي.غوښتل شوى مساحت

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx$$
$$=\int_{1}^{3}\left|y\right|_{x^2}^{2x+3} dx$$
$$=\int_{1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx$$
$$=\left|x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3}$$



$$=9+9-9-(1-3+\frac{1}{3})=\frac{32}{3}$$ واحد مربع

دي.

۲. مثال : د جسم حجم پیداکړئ کوم چي د $x^2+y^2=4$ استواني او y+z = 4 او z=0 مستوي ګانو پواسطه راچاپیر شوی دي.

حل : جسم له پورته خواد z=4-y مستوي پواسطه او له لاندې خواد $x^2+y^2=4$ دایرې د ننه دR د سیمی پواسطه راچاپیره شوی ده. نو لدې کبله حجم د

$$V=\iint_R(4-y)\,dA=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-y)\,dy\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\left|4y-\frac{1}{2}y^2\right|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$
$$=\int_{-2}^{2}8\sqrt{4-x^2}\,dx=8(2\pi)=16\pi$$

پواسطه راکړل شوی دی.

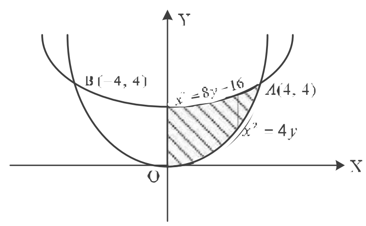
۳. مثال: د یو مستوي مساحت چي یونول کثافت لري او په لومړي ربع کي د $x^2=4y$ او $8y=x^2+16$ پواسطه راچاپیره شوی دي د ثقل مرکزیي لاسته راوړئ.

حل : په یوه وخت د دوو معادلو د حل نه ،مونږ (4,4) او (-4,4) د دوی د پرېکړې د نقطو په شان لاسته راوړو. دي مونږ بٌید د سیورې د سیمی د ثقل مرکز $(\bar{x},\bar{y})$ لاسته راوړو.

$$\bar{x} = \frac{\iint x\, dA}{\iint dA}$$

$$= \frac{\int_0^4 \int_{x^2/4}^{\frac{x^2+16}{8}} x\ dy\ dx}{\int_0^4 \int_{x^2/4}^{\frac{x^2+16}{8}} dy\ dx} = \frac{\int_0^4 x\left(\frac{x^2+16}{8} - \frac{x^2}{4}\right) dx}{\int_0^4 \left(\frac{x^2+16}{8} - \frac{x^2}{4}\right) dx}$$

$$= \frac{\int_0^4 (16x - x^3)\, dx}{\int_0^4 (16 - x^2)\, dx} = \frac{\left. 8x^2 - \frac{x^4}{4} \right|_0^4}{\left. 16x - \frac{x^3}{3} \right|_0^4}$$



$$= \frac{128 - 64}{64 - \frac{64}{3}} = \frac{64 \cdot 3}{128} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^4 \int_{x^2/4}^{\frac{x^2-16}{8}} y\ dy\ dx}{\int_0^4 \int_{x^2/4}^{\frac{x^2+16}{8}} dy\ dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^4 \left\{ \left(\frac{x^2+16}{8}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \right\} dx}{\int_0^4 \left(\frac{x^2+16}{8} - \frac{x^2}{4}\right) dx}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\int_0^4 \left(\frac{x^4 + 32x^2 + 256}{64} - \frac{x^4}{16}\right) dx}{\frac{1}{8}\int_0^4 (16 - x^2)\, dx}$$

$$= 4 \frac{\frac{1}{64}\int_0^4 (32x^2 + 256 - 3x^4)\, dx}{\left. 16x - \frac{x^3}{3} \right|_0^4}$$

$$
=\frac{1}{16}\frac{\left|32\frac{x^3}{3}+256x-\frac{3x^5}{5}\right|_0^2}{\frac{128}{3}}
$$

$$
=\frac{3}{16\times 128}\left\{\frac{32\times 64}{3}+256\times 4-256\times\frac{12}{5}\right\}
$$

$$
=\frac{3}{16\times 128}\times 256\left\{\frac{8}{3}+4-\frac{12}{5}\right\}=\frac{3}{8}\times\frac{40+60-36}{15}
$$

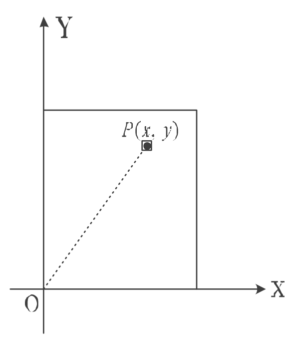
$$
=\frac{3}{8}\times\frac{64}{15}=\frac{8}{5}
$$

نو $(\frac{3}{2},\frac{8}{5})$ د غوښتل شوې سيمې د ثقل مرکز دی.

٤. مثال : د يو مربعي لوښي د a د څنډې کتله پيداکړئ که چېرې له راس څخه د کثافت توپير د واټن د مربع په څېر وي.

حل : فرضوو چې مربع داسې په پام کې نيول شوی دی چې دهغه يو راس په مبدا کې دې ، يوه څنډه يې د x د محور په امتداد او بله څنډه يې د y دمحور په امتداد دی. پدې فرض کولو چې p(x,y) د dx dy په يوې کوچنۍ سيمه کې يوه نقطه ده. نو

$$
op^2 = x^2 + y^2
$$



د کوچنۍ سيمې کثافت $k(x^2+y^2)$ دی چېرته چې k دتناسب ثابت دی. ندې کبله غوښتل شوې مساحت :

$$\int_0^a \int_0^a k\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a k \left| \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right) \right|_0^a dy = k\int_0^a \left(\frac{a^3}{3} - ay^2\right) dy$$

$$= k \left| \frac{y^3}{3} y + a\frac{y^3}{3} \right|_0^a = k\left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) = \frac{2ka^4}{3}$$

واحد مربع ده.

۵. مثال : یو نازکه لوښي چې یو شانتی پریروالي او کثافت لري یوه سیمه پوښوي چې د xy- په مستوي کې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي پواسطه چاپیره شوې ده ، I_y, I_x او I_0 لاسته راوړئ.

حل : د فرضیې پر بنسټ ρ ثابت دی ، لدی امله مونږ لرو چې

$$I_x = \iint_R \rho\, y^2\, dA = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \rho\, y^2\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^a \int_0^b \rho\, y^2\, dy\, dx = 4\int_0^a \rho \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^b dx$$

$$= \frac{4}{3}\rho \int_0^a b^3\, dx = \frac{4}{3}\rho \left| b^3 x \right|_0^a = \frac{4}{3} ab^3 \rho$$

$$I_y = \iint_R \rho\, x^2\, dx\, dy = 4\int_0^b \int_0^a \rho\, x^2\, dx\, dy$$

$$= 4\int_0^b \rho \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a dy = \frac{4\rho}{3} \int_0^b a^3\, dy$$

$$= \frac{4}{3}\rho \left| a^3 y \right|_0^b = \frac{4}{3} a^3 b\, \rho$$

$$I_0 = 4\int_0^a \int_0^b \rho(x^2+y^2)\, dy\, dx = I_x + I_y$$

$$= \frac{4}{3}\rho\, ab\,(a^2+b^2)$$

۱۲ . ۹ پوښتنې

۱. د $y = x^2$ پېرابولا او د $y = x + 2$ مستقیم خط پوسیله راچاپېره شوې سیمې مساحت لاسته راوړئ.

۲. د $y^2 = 4 - x$ او $y^2 = 4 - 4x$ پېرابولا وو پواسطه د راچاپېره شوی سیمې مساحت پیداکړئ.

۳. د $x^2 = 4y$ او $8y = x^2 - 16$ پوسیله د راچاپېره شوی سیمي مساحت پيداکړئ.

٤. د $r = 2$ دایرې نه د باندې او د $r = 2(1 + \cos\theta)$ پشوګی (کار دیوید) دننه سیمی مساحت پیداکړئ.

۵. د $r = 4\sin\theta$ دایرې دننه او د $r^2 = 8\cos 2\theta$ پروانې(lemniscate) د باندې سیمی مساحت پیداکړئ.

٦. دa په شعاع د یوی دایروې پوړ (طبقي) کتله پیداکړئ که چېرې دهغه کثافت په هره نقطه کې ددې نقطې نه د دایرې تر مرکز پورې د واټنk خلې (kچنده) وي.

۷. د r په شعاع د یودایروې لوښي کتله پيدا کړئ که چېرې دهغه د کثافت توپیر له یوې نقطې نه تر محیط پورې د واټن د مربع په څېروي.

۸. د دائروي نیمايي پوړ (طبقي) د ثقل مرکز پیداکړئ چې هغه کثافت د p په هره نقطه کې kr^2 وي.

(k- کوم ثابت دی)

۹. د $y^2 = x^2(2 - x)$ څرخ (Loop) پواسطه راچاپېره شوې سیمی مساحت لپاره I_x, I_y او I_0 پیداکړئ.

۱۰. د $r = 2(\sin\theta + \cos\theta)$ دایرې د مساحت لپاره I_x او I_y پيدا کړئ.

۱۱. په لومړي اکتانت octant (حجره)کې د $z = 0$ او $z = x + y - 2$ مستویانو په مینځ کې او د $x^2 + y^2 = 16$ استوانې دننه حجم پیداکړئ.

۱۲. د $x^2 + y^2 = 4$ استوانې اود $y + z = 4$ او $z = 0$ مستویانو پواسطه راچاپېره شوی حجم پیداکړئ.

۱۲ . ۱۰ . ۱ درې ګوني انتیګرالونه

د مخه مونږ ددو متحوله تابعګانو لپاره د یوه دوه ګوني انتیګرال نظریه بیان کړه. پدې برخه کې به مونږ د یوې درې متحوله تابع لپاره درې ګونی انتیګرال ترڅېرنې لاندې ونیسو.

حال داچې د $\iint_R f(x,y)\,dA$ یو دوه ګونی انتیګرال د xy په مستوي کې د R دیوې تړلې سیمې دپاسه تاکل کېده ، خو د f(x,y,z) یوې تابع یودرې ګونی انتیګرال د S په یوې تړلې درې بعدیزې سیمی دپاسه په پام کې

نیول کیږي. مونږ په دا فرض کړو چې S د کوم مناسب لوی بکس (مستطیل دوله متوازي السطوح) چې ضلعې د مختصاتو له مستوي ګانوسره موازي ضلعې لري له دننه څوا راچاپیره شوی دی. دغه مونږ باوري کوي چې د S سیمه په نټاکلې دول کوم نوري ته غزیدلی نشی.

ددرې ګونی انتیګرال دتعریف کولولپاره مونږ د S سیمه د $s_n,......,s_3,s_2,s_1$ په کوچنیوسیموباندې د $\Delta v_n,......,\Delta v_3,\Delta v_2,\Delta v_1$ حجمونوپه لرلو مختصاتودمستویانوسره دموازي مستویانو پواسطه ویشو. که چیرې $(x_i,y_i,z_i)\in s_i$ ، نو مونږ به د $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$ مجموعه سرته ورسوو کومې ته چې د ریمان(Riemann) مجموعه وایي.

سربیره پردی $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$ د $\iiint_S f(x,y,z)\,dv_i$ په توګه تعر یف شوی دی.

یادونه : درې ګوني انتیګرالونه د یوګونو او دوه ګونو انتیګرالونود ډیرو ځانګړتیاووڅخه بهره مند دي.

لکه څنګه چې یودوه ګوني انتیګرال د دوه ساده انتیګرالونو نیولو پواسطه لاسته راوړلی شو ، نو یو درې ګونی انتیګرال کولای شو چې د دریو ساده انتیګرالونو نیولو پواسطه دلاندني قضیې په کارولو کومه چې دلته یې له کوم ثبوت څخه مونږ ته راکړل شویده لاسته راوړو.

قضیه : فرض کړئ چېS یو مستطیل دوله بکس ده ، چې د $a\le x\le b\,,c\le y\le d\,,k\le y\le \ell$ نا مساواتونو په واسطه تعریف شویدی.

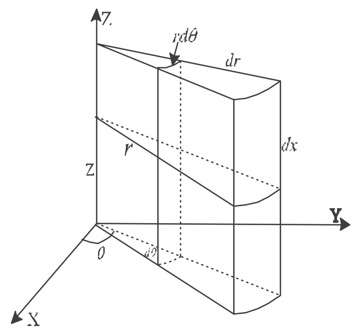
که چیرې $f(x,y,z)$ د S په سیمه باندې متمادي وي ، نو

$$\iiint_s f(x,y,z)\,dv=\int_a^b\int_c^d\int_k^\ell f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

بله داچې ،د ښي خوا څو ځلي(تکراری) انتیګرال د پنځو نورو څوځلي انتیګرالونو سره عوض کېدلی شي او پایلې یې په نوبتي دول د انتیګرال نیولوله ترتیب څخه لاسته راځي.

۱۲ . ۱۰ . ۲ په استوانوی مختصاتوکې دری ګونی انتیګرال

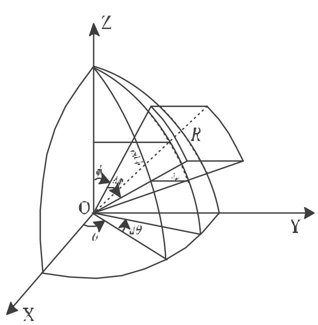
په استوانوي مختصاتو کې د دری ګوني انتیګرال د تعریف لپاره مونږ لکه په مستطیلي مختصاتو کې د درې ګوني انتیګرال په څیر چې Δv په لرلو سره د یو متوازي السطوح دیوحجم په څیر ، $rd\theta,dr$ او dz دابعادو په لرلو چې په شکل کې ښودل شوي دي په پام کې نیولوسره کړنه کوو او لاندې کښله نو



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i,\theta_i,z_i)\,\Delta v_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i,\theta_i,z_i)\,r_i.\Delta z_i.\Delta r_i.\Delta\theta_i$$

په استوانوی مختصاتوکي د دري ګوني انتیګرال په توګه تعریف شوی دی او د $\iiint_S f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$ په واسطی سره ښودل کیږي چیرته چي دانتیګرال نیولو حدونه ټاکل شوی دي د S په سیمه کي شامل دی.

۱۲ . ۱۰ . ۳ په کروي مختصاتو کي دري ګونی انتیګرال



په کروي مختصاتو کي ددري ګونی انتیګرال دتعریف لپاره مونږ لکه په مستطیلي مختصاتو کی د دري ګوني انتیګرال په شان چی Δv په لرلو سره د یو متوازي السطوح دیو حجم په $\rho\sin\phi\, d\theta$, $\rho d\phi, d\rho$ دابعادو په لرلو چي په شکل کي ښودل شوي دي په پام کي نیولو سره کړنه کوو ابعاددي او لدي کبله

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i,\theta_i,\phi_i)\,\rho_i^2\sin\phi_i\,\Delta\rho_i\,\Delta\phi_i\,\Delta\theta_i$$

په کروي مختصاتو کي د دري ګوني انتیګرال په توګه تعریف شوی دی او د

$$\iiint_S f(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

پواسطه بنودل کیږي چیرته چي د انتیګرال نیولو حدونه ټاکل کیږي دSپه سیمه کي شامل دي.

۱۲ . ۱۰ . ۴ د دري ګوني انتیګرال تطبیقات

(i) حجم : که چیرې $\rho(x,y,z)=1$ نو $\iiint_S f(x,y,z)dv=\iiint_S dv$ د S د سیمی د حجم د اندازه کیدلو لپاره ترینه کار اخیستل کیږي.

(ii) کتله: ددوه ګوني انتیګرال د حالت په شان که چیرې $\rho=\rho(x,y,z)$ کثافت وي نو د جسم کتله د دري

$$\iiint \rho\, dv$$

ګوني انتیګرال پوسیله لاسته راځي.

(iii) د ثقل مرکز : د (x,y,z) ثقل مرکز د

$$\bar{x}=\frac{\iiint_S x\,\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_S \rho(x,y,z)\,dv}=\frac{\iiint_S x\,\rho(x,y,z)\,dv}{S}$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint_S y\,\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_S \rho(x,y,z)\,dv}=\frac{\iiint_S y\,\rho(x,y,z)\,dv}{S}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_S z\rho(x,y,z)\,dv}{\iiint_S \rho(x,y,z)\,dv}=\frac{\iiint_S z\,\rho(x,y,z)\,dv}{S}$$

پواسطه ورکول کیږي.

(iv) انرشیا (عطالت) مومنت : نظر د x محورته، دy- محورته اود z محورته انرشیا مومنت په ترتیب سره

$$I_x = \iiint \rho(x,y,z)\,(y^2+z^2)\,dv$$
$$I_y = \iiint \rho(x,y,z)\,(z^2+x^2)\,dv$$
$$I_z = \iiint \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dv$$

دی او د انرشیا مومنت نظر مبدا ته عبارت دی له

$$I_0 = \iiint \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2+z^2)\,dv$$

۱۲ . ۱۰ .۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال : د $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} x\,yz\,dz\,dy\,dx$ انتیگرال قیمت معلوم کړی.

حل : مونږ لرو چې

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} x\,yz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{2-x} x\,yz\,dz\right\}dy\right]dx$$
$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\left|\frac{xyz^2}{2}\right|_{z=0}^{2-x}\right\}dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}\,dy\right]dx$$
$$= \int_0^1\left[\left|\frac{xy^2(2-x)^2}{4}\right|_{y=0}^{1-x}\right]dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (4x-12x^2+13x^3-6x^4+x^5)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left|2x^2-4x^3+13\frac{x^4}{4}-6\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{13}{240}$$

۲. مثال : د $\rho = a$ کرې نه د $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{6}$ مستویانو پوسیله را جدا شوی حجم په ځومړی حجره(برخه) کې پیداکړئ.

حل : $\rho = a$ یوه کره ده چې دهغې مرکزپه مبدا کې او شعاع یې د a سره مساوي ده. په لومړی حجره کې ϕ له 0 څخه تر $\pi/2$ پورې او ρ له 0 نه تر a پورې بدلون کوی. له همدې کبله غوښتل شوی حجم د پواسطه راکړشویده ، یعني ، $\iiint_S dv = \int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

$$\iiint_S dv = \int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6}\left[\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^a \rho^2 \sin\phi \, d\rho\right\} d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6}\left[\int_0^{\pi/2}\left|\frac{1}{3}\rho^3 \sin\phi\right|_{\rho=0}^{a} d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6}\left[\left\{\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}a^3 \sin\phi\right\}_{d\phi}\right] d\theta = \int_0^{\pi/6}\left[\left|-\frac{1}{3}a^3\cos\phi\right|_{\phi=0}^{\pi/2}\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6}\frac{1}{3}a^3 \, d\theta = \frac{1}{3}a^3 \left|\theta\right|_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}a^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{18}a^3\pi$$

۳. مثال : د درې ګوني انتیګرال پوسیله د څلور وجهی دحجم مرکز پیدا کړئ چې د 4x+3y+z=12 مستوي اود کارډینات دمستویانو پواسطه راچاپیره شوی وي .

حل : فرضوو چې $\rho = k$ د حجم کثافت دی(k ثابت دی).

$$\text{کتله} = m = \int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}\int_0^{(12-4x-3y)} k \, dz \, dy \, dx$$

$$= k\int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}(12-4x-3y)\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^3\left|\frac{(12-4x-3y)^2}{-6}\right|_0^{\frac{12-4x}{3}}dx$$

$$= \frac{k}{6}\int_0^3(12-4x)^2\,dx = \frac{k}{6}\left|\frac{(12-4x)^3}{-12}\right|_0^3 = 24k$$

$$mx = \iiint k\,x\,dz\,dy\,dx = k\int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}\int_0^{12-4x-3y}x\,dz\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}x(12-4x-3y)\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^3\left|x\frac{(12-4x-3y)^2}{-6}\right|_0^{\frac{12-4x}{3}}dx$$

$$= \frac{k}{6}\int_0^3 x(12-4x)^2\,dx = \frac{k}{6}\int_0^3(144x-96x^2+16x^3)\,dx$$

$$= \frac{k}{6}\left|72x^2-32x^3+4x^4\right|_0^3 = \frac{k}{6}(108) = 18k$$

ځرنګه چې $\bar{x} = \frac{mx}{x}$ دي ، نو لدی امله $\bar{x} = \frac{18k}{24k} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{k}{6}\left|72x^2-32x^3+4x^4\right|_0^3 = \frac{k}{6}(108) = 18k$$

$$\therefore \quad x = \frac{18k}{24k} = \frac{3}{4}$$

$$my = \iiint k\;y\,dz\;dy\;dx$$

$$= \int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}k\;y(12-4x-3y)\,dy\;dx$$

$$= k\int_0^3\left|6y^2-2xy^2-y^3)\right|_0^{\frac{12-4x}{3}}dx$$

$$= \frac{k}{54}\int_0^3(12-4x)^3\,dx = \frac{k}{54}\left|\frac{(12-4x)^4}{-16}\right|_0^3 = 24k$$

$$\therefore y = 1$$

$$mz = \iiint k\ z\,dz\,dy\,dx = \frac{k}{2}\int_0^3\int_0^{(12-4x)/3}(12-4x-3y)^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^3\left|\frac{(12-4x-3y)^3}{-9}\right|_0^{\frac{12-4x}{3}}dx$$

$$= \frac{k}{18}\int_0^3(12-4x)^3\,dx = \frac{k}{18}\left|\frac{(12-4x)^4}{-16}\right|_0^3$$

$$= \frac{k}{18}.\frac{144\times144}{16} = 72k$$

$$\therefore\ z = \frac{72k}{24k} = 3$$

نولدی کبـه $(3/4,1,3)$ نقطـه دحجم مرکزدی.

۱۰.۱۲ پوښتنې

۱. لاندې درې ګوني انتیګرالونه لاسته راوړئ.

$$(i)\qquad \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,y\,z\,dz\,dy\,dx$$

$$(ii)\qquad \int_0^4\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\int_{y-x}^{y-x} y\ dz\,dy\,dx$$

$$(iii)\qquad \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\,r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$$(iv)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^5 r^4\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

۲. که چیرې $f(x,y,z) = 3(x^2y + y^2z)$ ، د f درې ګونی انتیګرال په مستطیلي سیمی بـاندی چې د z=2 x=1, x=3, y=-1, y=3, او z=4 مستویانو پواسطه راچاپیره شوې وي لاسته راوړئ.

۳. د $f(x,y,z) = xy^2z^3e^{xyz}$ انتیګرال د $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$ دپاسه لاسته راوړئ.

٤. د درې ګوني انتیګرال په کار ولوسره د هغې سیمی حجم پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو سطحو پواسطه راچاپیره شوې وي.

$$(i) \qquad x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ \ ,\ \ 6x+4y+3z=12$$
$$(ii) \qquad z=6\sqrt{y}\ ,\ z=\sqrt{y}\ ,\ \ y=x\ ,\ y=4\ ,\ x=0$$

۵. د جسم حجم پیدا کړئ چې دلاندې خوانه د $z=4-x^2-4y^2$ سطحې پواسطه او دپورته خوانه دxy مستوي د R دسیمې چې د x=0 ، y=0 او x+2y-3=0 مستویانوپواسطه تاکل شویده راچاپیره شوې دي.

٦. د سنترويیدحجم پیداکړئ چې لاندې خوانه د $z^2=xy$ اوپورته خوانه د x=4 , y=0 , y=x مثلث دي.

٧. د یوې قایمې دایروي استواني چې شعاع یې a او لوړوالی یې h وي کتله او د ثقل مرکزیې پیداکړئ که چېرې دحجم کثافت دقاعدې نه د هغې د واټن په څیر بدلون وکړي.

۱۲. بیلابیلې پوښتنې

۱. (i) که چېرې $f(x,y)=xy+xe^{y/x}$ وي وي، ثبوت کړئ چې

$$xf_x+yf_y=xy+f(x,y)$$

(ii)که چېرې $f(x,y)=\ln(e^x+e^y)$ وي ، ثبوت کړئ چې $f_x+f_y=1$

(iii) که چېرې $f(x,y,z)=x-\dfrac{x-y}{y-z}$ ، ثبوت کړئ چې $f_x+f_y+f_z=1$

۲. که چېرې $u=x^y$ ، ثبوت کړئ چې $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}$

۳. که چېرې $z=\dfrac{1}{t},y=t-1,x=t^2,u=e^x\sin yz$ وي نو $\dfrac{du}{dt}$ لاسته راوړئ.

٤. دسطحې لپاره چې د $x=(3-\cos\phi)\cos\theta$ ، $y=(3+\cos\phi)\sin\theta$ ، $z=\sin\phi$ $0\le\theta<2\pi\ ,\ -\pi<\phi\le\pi$ پواسطه تعریف شوې وي ، پارامتریک منحني ګانې ښیې د کومو لپاره چې ϕ ثابت او د θ تحول(بدلون) په مستوي ګانو کې چې دایرې د xy مستوي سره موازي دي.همدارنګه پارامتریک

منحني گاني ښيي دکومو لپاره چي θ ثابت ده او د ϕ بدلون په مستوي گانو كي چي دZ له محور نه تيريږى

واقع دى. ددى سطحي په يوه نقطه كي نارمل ويكتور پيداكړئ د كومي لپاره چي $\theta=\dfrac{\pi}{4},\phi=\dfrac{2\pi}{3}$ ده.

۵. وښايئست كه چيرې $4a^2$ $x^2+y^2+z^2=$ او $x^2-(y-a)^2=a^2$ د (x_1,y_1,z_1) په نقطه كي يو بل

پرې كړي د تقاطع د زاويې θ اندازه د $\cos\theta=\dfrac{y_1}{2a}$ پواسطه راكړ كيږي.

٦. وښايئاست چى $x^2+y^2+z^2=18$ كره او $x^2+z^2=(y-6)^2$ مخروط ددوى دتقاطع په اوږدو كى مماس دي.

٧. فرض كړئ چي دD سيمه د $x^2+9y=36$ پارابولا او د $2x+3y=12$ مستقيم خط پوسيله راچاپيره شوې ده. د

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy \qquad \text{او} \qquad \iint_D x^2y\,dy\,dx$$

انتيگرالونو قيمتونه لاسته راوړئ.

٨. په استوانوي مختصاتوكي دحجم اودجسم دمركزدټاكولپاره دري گوني انتيگرال وكاروى چي له پورته خوا نه د $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ نيمي كرې ، دلاندې خوانه د xy مستوي او په اړخيز(افقي) دول د $x^2+y^2=9$ استواني پوسيله چاپيره شوې وي.

٩. د

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

انتيگرال دټاكلو لپاره كروي مختصات وكاروئ.

١٠. كه چيرې $y=\cos^{-1}\dfrac{1-xy}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^{1/2}}$ ، وښايئاست چي

.

$$du=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$$

١١.كه چيرې $z=f(u,v)$, $u=x+ay$, $v=x-ay$ ، ثبوت كړئ چي

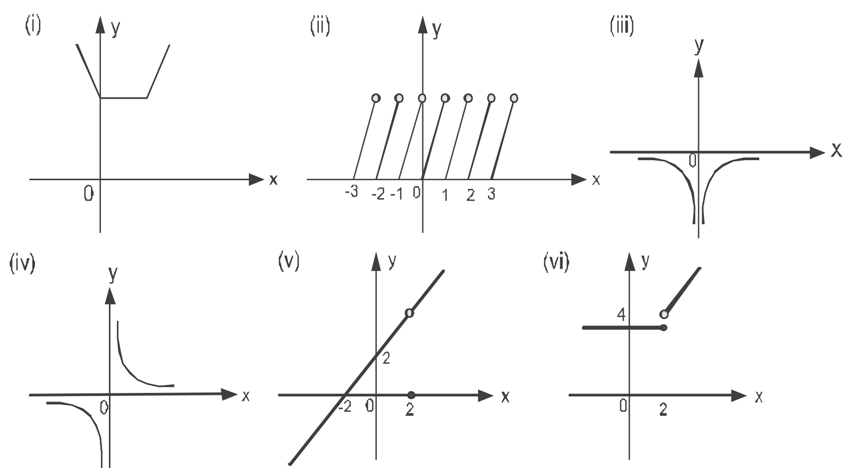
$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\frac{1}{a}.\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

ځــوابــونــه

۱.۱. تمرین

۱. (i): $|x-5|<2$ ، (ii): $|f(a)-l|<\in$ ، ۵. (i): لاندېنی (یاتحتانی) سرحد $=1$ ، پاسنی (یافوقانی) سرحد $=\frac{4}{3}$. (ii) : لاندنی (تحتاني) سرحد $=-5$ ، پاسنی (یافوقانی) سرحد $=3$. (iii) : محدوده نده . ۷. (i) : $|-2,2|$ ، ۷. (ii): $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ ، (iii) : $(-1,1)$.

۸.



۲.۱. تمرین

۱. (i): 1 ، (ii) : $\frac{1}{2}$ ، (iii): ∞ ، (iv) : $\frac{1}{2}$ ، (v): $\frac{a}{b}$ ، (vi): 0 ، (vii): 1 ، $(viii)$: لیمټ وجودنلری ، (ix) : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، (x) : $\frac{1}{2}$. ۲. (i) : لیمټ وجودنلری ، (ii) : لیمټ وجودنلری ، (iii) 0 ، (iv): 1 ، (v): ∞ ، (vi): $\frac{1}{e}$ ، (vii): $\frac{1}{e}$ ، $(viii)$: 0 ، (ix) : ∞ ، (x) : 2 . ۳. (i): 2 ، (ii) : ∞ ، (iii): $3,3$ ،

(iv): 1 ، (v): وجودنلری ، (vi): $c=\frac{7}{2}$ ، (vii): 1 ، $(viii)$: 1 ، (ix) : وجودنلری ،
(x) : $3,-2,-2,3$.

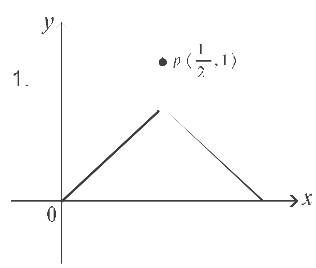
۱.۳. تمرین

۲. متمادی ده ، ٤. متمادی ده ، ٥. متمادی نده ، ٦. متمادی نده ، ۷. متمادی ده ، ۹. متمادی ده ،
۱۱. (i): متمادی ده ، (ii): متمادی نده ، (iii): متمادی نده ، (iv): متمادی ده ، (v): متمادی نده ،
۱۲. دټولو x لپاره متماي ده پرته لدی چې کله x یوتام عددوی ، ۱۳. (i): $x=10$ ، (ii) : $x=1,2$.

۱٤. (i): په $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ کې غیرمتمادی ده ، $n\in Z$ ، د R په هره بله نقطه کې متمادی ده ،
(ii): په $x=0$ کې غیر متمادی ده ،په $R-\{0\}$ بانّدی متمادی ده ، (iii): په R بانّدی متمادی ده ،

۱٥. (i): $c=\frac{3}{2}$ ، (ii): $b=-8,a=3$ ،

۱. بیلابیلی پوښتنی



۲. 0 ، ۳. $\frac{1}{2}$ ، ٤. 1 ، ٥. متمادی ده ، ٦. متمادی ده ، ۸. $b=1,a=2$ ، ۹. متمادی نده ، ۱۰. متمادی ده ، ۱۲. (i): $\frac{1}{2}$ ، (ii)، (iii) لیمټ وجودنلري ، ۱۳. $-\frac{1}{2}$ ،
۱٤. $f'(4-0)=4$, $f'(4+0)$ وجودنلري .

۲.۱. تمرین

۱. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، ۲. $\frac{1}{3}$ ، ۳. (a) متمادی ده (b) مشتق نلري ، ۷. دمشتق نیولو وړنده ، ۸. 2.926 ، ۹. 0.46977 ، ۱۰. (i): $v=32,64,96,\ a=32$ (ii): $v=-\frac{1}{4},-\frac{1}{9},-\frac{1}{16},\ a=\frac{1}{4},\frac{2}{27},\frac{1}{32}$.

۲.۲. تمرین

۱. (i): $3x^2-14x+5$ (ii): $2pnx^{2n-1}+nqx^{n-1}$ (iii): $\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$ ،

۲. (i): $(\frac{1}{2}+n)x^{n-\frac{1}{2}}+x^{n-1}$ ، (ii): $\frac{-(ax+3b)}{2x^{5/2}}$ ، (iii): $6x^5+55x^4+168x^3+270x^2+370x+175$ ،

۳. (i): $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ ، (ii): $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$ ، (iii): $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ ، ٤. (i): $\frac{2nx^{n+1}}{(x^n+1)^2}$ ،

(ii): $\frac{a(a-\sqrt{a^2-x^2})}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$ ، (iii): $\frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$ ، (iv): $\frac{2x(\sqrt{x^4-1}-x^2)}{\sqrt{x^4-1}}$ ، (v): $\frac{2(x^2+6x+3)}{x^2(x+1)^2}$ ،

٥. (i): $-\frac{3x^2+10xy}{5x^2+12y}$ ، (ii): $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ، (iii): $\frac{b^2x}{a^2y}$ ، (iv): $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ ، ٦. (i): $\frac{2t}{1-t^2}$ ، (ii): $\frac{1}{t}$ ، (iii): $\frac{b}{a}(\frac{t^2-1}{2t})$ ، (iv): $\frac{9t+5}{4}$ ، (v): $\frac{t^4+2t^2-1}{2t}$.

۲.۳. تمرین

۱. (i): $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ ، (ii): $xa^x\cos x+x\sin xa^x\ln a+a^x\sin x$ ،

(iii): $\frac{\sec h^2x}{\sqrt{1+\tanh^2 x}}$ ، (iv): $\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ ، (v): $\frac{-2x^2}{1+x^2}+\ln(1-x^2)$ ،

۲. (i): $e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\arctan\frac{b}{a})$ ، (ii): $\frac{e^{ax}(2ax-1)}{2x\sqrt{x}}$ ،

:(iii) $e^{ax}(\sin 2x+a\sin^2 x)$ ، :(iv) $\frac{2\cos x-1}{\sin x(2-\cos x)}$ ، :(v) $\ln a\cdot\cos x\cdot a^{\sin x}$

٣. :(i) $\cosh^3 x$ ، :(ii) $2a^{2x}\cos 2x+\sin 2x\ln a$ ، :(iii) $\frac{-2x}{\sqrt{a^4-x^2}}$ ،

:(iv) $x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right]$ ،

٤. :(i) $\frac{e^x(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\cos\sqrt{ax^2+bx+c}+e^x\sin\sqrt{ax^2+bx-c}$ ،

:(ii) $\frac{2x^4}{(2x^2+3)\sqrt{4x^2-5}}+3x^2\arctan\sqrt{4x^2+5}$ ، :(iii) $\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ ، :(iv) $\frac{1}{1+e^x}$ ،

:(v) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left\{\frac{-x}{x+1}2x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}$ ، ٥. :(i) $\cot\frac{\theta}{2}$ ، :(ii) $\tan\frac{3t}{2}$ ، :(iii) $\tan t$ ،

٦. :(i) $\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$ ، :(ii) $\frac{\cos y+y\cos x}{x\sin y-\sin x}$ ،

٧. :(i) $(\cos x)^{\ln x}\left\{-\tan x\ln x+\frac{1}{x}\ln\cos x\right\}$ ، :(ii) $-\frac{my}{nx}$ ،

٨. :(i) $\frac{x^{\sin x-1}\{\sin x+x\cos x\ln x\}}{(\sin x)^{x-1}\{x\cos x+\sin x\ln\sin x\}}$ ، :(ii) $\frac{x\sin 2x}{2\ln x}$ ، :(iii) $-\frac{1}{2}$ ، :(iv) $-\frac{1}{2}$

٩. :(i) $(\tan x)^{\tan x}\sec^2 x(1+\ln\tan x)+x^x(1+\ln x)$ ، :(ii) $\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ ،

١٠. :(i) $\frac{2}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ، :(ii) $\frac{-2}{1+x^2}$ ، :(ii) $(\tan x)^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{x\ln x}+\sec^2 x\ln\ln x\right]$ ،

١٢. $\frac{\sin x}{1-2y}$.

۲.٤. تمرين

۱. (i): $210x^4$ ، (ii): $11+6\ln x$ ، (iii): $-x^5\cos x-15x^4\sin x+60x^3\cos x+60x^2\sin x$ ، (iv): $(x^3+9x^2+18x+6)^{ex}$ ، ۲. $\dfrac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}$ ،

۸. (i): $\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left\{\dfrac{9\cdot 2^n}{(2x+3)^{n+1}}-\dfrac{8}{(x+2)^{n+1}}\right\}$ ، (ii): $(-1)^n n!\left\{\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{2^n}{(2x+1)^{n+1}}\right\}$ ،

۹. $(-1)^n n!\left\{\dfrac{16}{(x12)^{n+2}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right\}$ ،

۱۰. (i): $\dfrac{1}{4}\left\{2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-4^n\cos\left(3x-\dfrac{n\pi}{2}\right)+6^n\cos\left(6x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

(ii): $\dfrac{1}{16}\left\{2\cos\left(x-\dfrac{n\pi}{2}\right)-3^n\cos\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-5^n\cos\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$ ،

(iii): $\dfrac{1}{4}(a^2+9)^{n/2}e^{ax}\sin(3x+n\tan^{-1}\dfrac{3}{a})+\dfrac{1}{4}(a^2+1)^{n/2}e^{ax}\sin(x+n\tan^{-1}\dfrac{1}{a})$

۱۱. $10!\left\{\dfrac{1}{(x+1)^{11}}-\dfrac{1}{(x+2)^{11}}+\dfrac{1}{(x-1)^{11}}\right\}$

۲.۵. تمرين

۲. $y_{2n+1}(0)=0\,,\,y_{2n}(0)=(-1)^{n-1}2^{2n-1}\{(n-1)!\}^2$ ، ۳. $y_n(0)=0$ كه چيرى n تاق وي ، $y_n(0)\neq(n-2)^2(n-4)^2......6^2.4^2.2^2.2$ كه چيرى n جفت وي .

٤. (i): $(-1)^{n+1}.2(n-3)!x^{-n+2}$ ،

(ii): $e^x\{\ln x+{}^nC_1x^{-1}-{}^nC_2x^{-2}+{}^nC_3 2!x^{-3}+......+(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\}$

(iii): $3^n.x^2\cos\left(3x+4+\dfrac{n\pi}{2}\right)+2nx.3^{n-1}\sin\left(3x+4+\dfrac{n\pi}{2}\right)-$

$$-n(n-1)3^{n-2}\cos\left(3x+4+\frac{n\pi}{2}\right)$$

:(iv) $$x^3 si\left(3x-\frac{n\pi}{2}\right)-3nx^2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-3(n^2-n)x.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+n(n^2-3n+2)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

۷. که چیری n تاق وي ، $y_n(0)=m(1^2+m^2)(3^2+m^2)\ldots\ldots\left[(n-2)^2+m^2\right]$ ،
که چیری n جفت وي ، $y_n(0)=m^2(2^2+m^2)(4^2-m^2)\ldots\ldots\left[(n-2)^2+m^2\right]$.

۸. $y_{2n}(0)=0, y_{2n+1}(0)=(-1)^n(2n)!$

۹. که چیری n تاق وي ، $y_n=m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\ldots\left[m^2-(n-2)^2\right]$ ، او
که چیری n جفت وي ، $y_n=m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\ldots\left[m^2-(n-2)^2\right]$

۲. بیلابیلی پوښتنې

۱. متمادی ده خوداشتقاق ورنده . ۲. وجودنلری . ٤. داشتقاق ورده . ٦. $a=2$

۷. $\frac{2ab}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$ ، ۸. $\frac{1}{2}$ ،

۱۰. $$x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x-\frac{\tan x}{x}\right)+(\sin x)^{\cos x}\left\{-\sin x\ln\sin x-\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}$$

۱۱. $$\frac{2ax^2}{x^4-a^4}$$

۱۲. $$\sin x\, x^{\sin x}(\sin x)^{\ln x}\left\{\cot x+\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x+\cot x\ln x+\frac{1}{x}\ln\sin x\right\}$$

۱۳. $$\frac{1}{2}.5^{n/2}e^{2x}\cos\left(x+n\arctan\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}(13)^{n/2}x^{2x}\cos\left(3x+n\arctan\frac{3}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}(29)^{n/2}e^{2x}\cos\left(5x+n\,arc\tan\frac{5}{2}\right)$$

۱۶. $\frac{2\sin x\sec^4 x}{\cos\sin x}$ ، ۱۷. 1 ، ۱۸. 1 ، ۱۹. $b=-2\,,a=3$ ، ۲۱.
$f'(0)=0$ ، ۲۲. وجودنلری .

۳.۱. تمرین

۱. (i): $c=0$ اتباری (یاقانونی) ده ، (ii): $c=-2$ اتباری (یاقانونی) ده ، (iii): قانونی نده ،
(iv): قانونی نده . ۲. (i): شونی ده ، (ii): شونی ده . ۳. حقیقت نلری . ۴. (i): 2
،

(ii): $\cos^{-1}\frac{\sin b-\sin a}{b-a}$ ، (iii): ناشونی (یاداجرا) ورنده ، ۵. $(0.8808, 0.7711)$ ، ۷.
$\frac{\pi}{4}$،

۸. $\frac{7-\sqrt{31}}{6}$ ، ۹. $\ln 1.5=0.4055$.

۳.۲. تمرین

۴. په $\left[-\frac{1}{3},\infty\right]$ او $(-\infty,-5)$ کې متزایده ده اوپه $\left[-5,-\frac{1}{3}\right]$ کې متناقصه ده .

۵. په $-1\le x\le 1$ کې متزایده اود $x<-1$ او $x>1$ لپاره متناقصه ده .

۳.۳. تمرین

۱. (i):
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+......-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+......$$

(ii):
$$\tan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+......$$

(iii):
$$\sec x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+.......$$

۲. (i):
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n)!} + \ldots\ldots$$

(ii):
$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots\ldots\ldots$$

(iii):
$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots \right)$$

(iv):
$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

۳.
$$e^{ax} \cos bx = 1 + ax + \frac{(a^2 - b^2)}{2!} x^2 + \frac{a(a^2 - 3b^2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} (a^2 + b^2)^{n/2} e^{\theta x} \cos\left(b\theta x + n \, arc\tan \frac{b}{a} \right) \quad 0 < \theta < 1$$

۶.
$$\sin x = 1 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2!} + \frac{(x - \pi/2)^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots$$

۷.
$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots\ldots\ldots$$

۴.۳. تمرین

۱. (i): -1 ، (ii): -2 ، (iii): 1 ، (iv): $\cos a$ ، (v): $-\frac{1}{6}$ ، (vi): $\frac{1}{\pi}$ ، (vii): 2 ، (viii): 2

۲. (i): 1 ، (ii): -1 ، (iii): 1 ، (iv): $\frac{2}{9}$ ، (v): -1 ، (vi): -2

۳. (i): 1 ، (ii): 0 ، (iii): 1 ، (iv): 1 ، (v): 0

٤. (i): 1 ، (ii): 0 ، (iii): $\ln a$ ، (iv): 0 ، (v): $\frac{2}{\pi}$ ، (vi): 1

٥. (i): 0 ، (ii): $\frac{1}{2}$ ، (iii): $-\frac{1}{2}$ ، (iv): $-\frac{1}{2}$ ، (v): 0 ، (vi): $-\frac{1}{2}$

۶. $b=\frac{3}{2}\ ,\ a=\frac{5}{2}$

۵.۳. تمرین

۱. (i): 1 ، (ii): $e^{-1/2}$ ، (iii): 1 ، (iv): 1 ، (v): $e^{1/6}$ ، (vi): 1

۲. (i): $e^{2/\pi}$ ، (ii): e ، (iii): 1 ، (iv): $e^{-1/2}$ ، (v): e ، (vi): $\frac{1}{e}$

۳. (i): $e^{1/3}$ ، (ii): $-\frac{1}{2}$ ، (iii): $-\frac{e}{2}$ ، (iv): $-\frac{2}{3}$ ، (v): 1 .

۳. بیلابیلی پوښتنې

۴. $\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$ ، ۵. $3\frac{1}{3}$ ، ۱۱. (i): -2 ، (ii): 1 ، ۱۲. $c=1, b=2, a=1$

۱۳. $-\frac{1}{2}$ ، ۱۵. (i): $\frac{1}{e}$ ، (ii): 3 ، ۱۶. په $(-\infty,2)$ او $(3,\infty)$ کې متزایده او $(2,3)$ کې متناقصه ده.

۱.۴. تمرین

۱. $9x^2-12xy+4y^2-24x-36y-36=0$ ، ۲. $9y^2+48x+90y+353=0$ ،

۳. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$ ،

۴. $(a): a=3, b=2, (0,\pm3),\ (b): (0,\pm\sqrt{5}),\ (c): \frac{8}{3}, \left(\pm\frac{4}{3},\pm\sqrt{5}\right),\ (d): \frac{\sqrt{5}}{3}$

۵. $(a):\ a=2\ , b=\frac{7}{2}\ , c=\frac{1}{2}\sqrt{65}\ ,\ e=\frac{1}{4}\sqrt{65}$

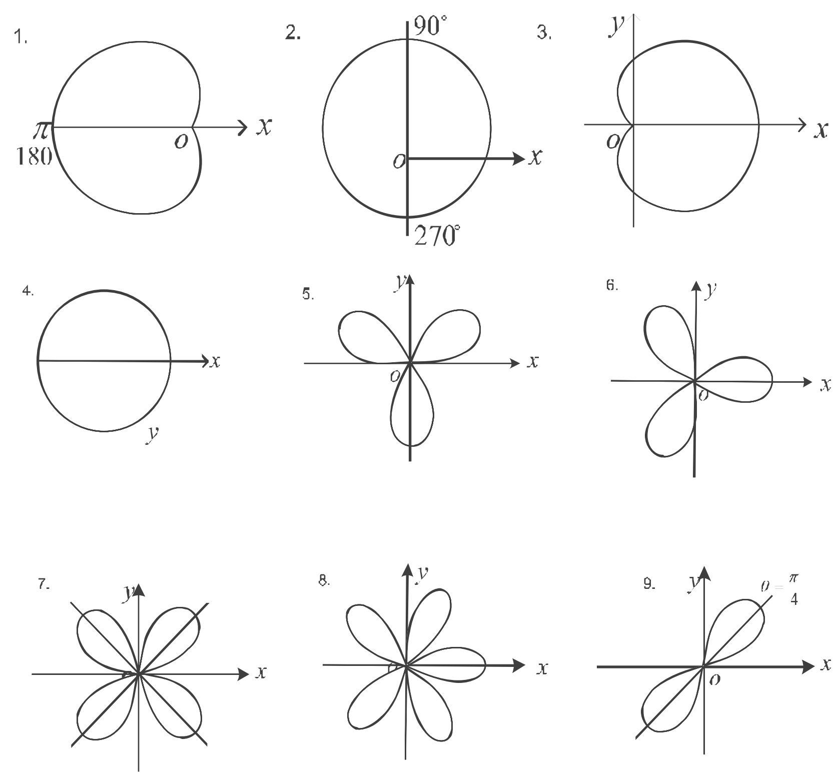
$(b):$ $\left(0,\pm\frac{1}{2}\sqrt{65}\right)$ محراق ، $\left(\pm\frac{49}{8},\pm\frac{1}{2}\sqrt{65}\right)$ او $(0,\pm2)$ څوکی(پړاسونه)

$(c): \frac{49}{4}$ $\qquad$ $(d): 7y-4x=0 \text{ and } 7y+4x=0$

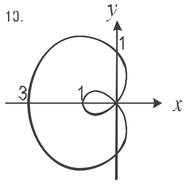
۶. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ ، ۷. $\frac{4(x-4)^2}{69}-\frac{(y-7/2)^2}{25}=-1$ ، ۸. (i): $2x-3y=0\,,\,x+y=0$ ،
(ii): $2x+3y=0\,,\,x+y=0$ ، (iii): $y=\pm ix \;,\; y=\pm x$ ، ۹. $(4\,,0)\,,(-4,\,0)$ ،

۱۰. پارابولا .

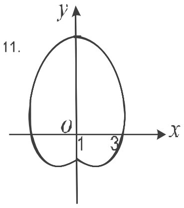
۴. ۲. تمرین



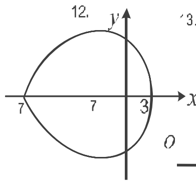
10.



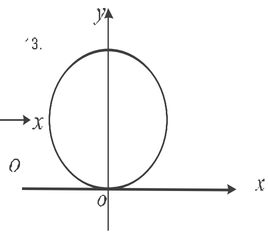
11.



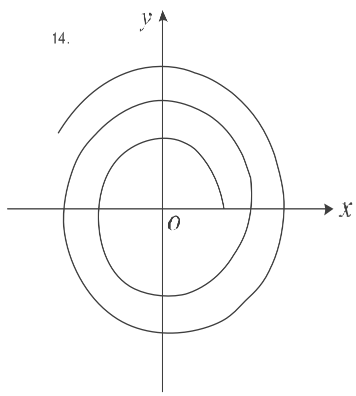
12.



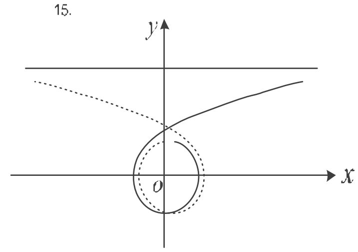
13.



14.



15.



۴. ۳. تمرین

۴.۴. تمرین

۱. (i): $4x\pm 2y-a=0\,,\ 2x\pm 4y=3a$ ، (ii): $x\cos^3\theta+y\sin^3\theta=c$،
$x\sin^3\theta-y\cos^3\theta+2c\cot 2\theta=0$

۲. $(-p\sec\alpha\,,-2a\tan\alpha)$, $a\sin^2\alpha+p\cos\alpha=0$

۳. $(a\cos\theta)^{\frac{m}{m-1}}+(b\sin\theta)^{\frac{m}{m-1}}=p^{\frac{m}{m-1}}$ ، ٤. $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

۸. $x+y=\frac{1}{2}a\pi$, $x-y=\frac{1}{2}a\pi-2a$ ،

۱۱. (i): $\arctan\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a^{1/3}b^{1/3}}{a^{2/3}-b^{2/3}}\right)\right]$, $\frac{\pi}{2}$ ، (ii): $\arctan(2^{4/3})$

۴. ۵. تمرین

.۱۰ $\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

۴. ۶. تمرین

.۱ (i): $\frac{\theta}{2}$ ، (ii): $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$ ، (iii): $\pi-\theta$ ، .۳ (i): $\frac{\pi}{2}$ ، (ii): $\frac{\pi}{2}$ ، (iii): $\tan^{-1}(-3\sqrt{3})$ ، (iv): $\frac{\pi}{2}$ ، (v): $\arctan(-3)$ ، .٦ (i): په $(5,-1)$کي افقي په $(4,-2)$کي عمودی ده ، (ii): په $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ او $\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$ کي عمودی ده ، اوپه $\left(\frac{1}{2},\frac{4\pi}{3}\right)$ ، $(2,0)$او $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ کي عمودی ده .

۴. ۷. تمرین

.۱ $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{r^2}{a^2b^2}$ ،

.۳ (i): $a^2p=r^2$ ، (ii): $r^3=2ap^2$ ، (iii): $r^4=(b^2-a^2+2ar)p^2$ ، (iv): $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{a^2}{r^4}$ ، (v): $r^4=p^2\left[a^2m^2+(1-m^2)r^2\right]$ ، (vi): $p=r\sin\alpha$ ، (vii): $p^2=ar$ ، .٤ $pa^m=r^{m+1}$.

٤. بیلابیلی پوښتنې

.۲ $(6,-4\sqrt{3})$ ، .۳ هیپربولا ، .٤ $y=-\frac{1}{3}x\,,y=-2x\ or\ y=2x\,,y=\frac{1}{3}x$ ،

.٥ $2ab\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_3-\phi_2}{2}\sin\frac{\phi_3-\phi_1}{2}$ ، .٦ $13x-16y=2a$ او $16x-13y=9a$.

۵ .۱. تمرین

.۱ (i): $x=\pm a\ ,\ y=\pm a$ ، (ii): $x=1\ ,\ y=1$ ، (iii): $x=\pm 1\ ,\ y=0$

۲. (i): $x=\pm a$ ، (ii): $x=0$, $y=0$ ،

(iii): $y=-x+\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}$, $y=x+\frac{1}{4}$

(iv): $y-x-1=0$, $y+x-1=0$, $2y+x=0$

(v): $y=x+\frac{5}{3}$, $y=-x+5$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{25}{6}$

(vi): $y=x+4$, $y=2x-2$, $y=2x-3$

(vii): $y=-x+1$, $y=x+\frac{(3\pm\sqrt{5})}{2}$

(viii): $x\pm y=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm 1$, $y=\pm 1$

(ix): $x+y=0$, $y=x$, $y=x+1$

(x): $y=x-a$ ، (xi): $y=x$, $y=-2x$, $y=-2x-1$

(xii): $y=x$, $y=-x$, $y=-x-1$ ، (xiii): $y=x\pm a$, $x=\pm a$

۵. ۲. تمرین

۱. $r\sin\theta=a$ ، ۲. $4a=r(\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta)$, $-4a=r(\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta)$

۳. $r(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{a}{2}$, $r=(\cos\theta+\sin\theta)=-\frac{a}{2}$

۴. $r\cos\theta-2a$ ، ۵. $r\sin\theta-a$ ، ۶. $\frac{a}{n}\sec k\pi=r\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)$ ،

۷. $r\sin\theta=2a$ ، ۸. مجانب نلری ، ۹. $a-b=r\cos\theta$, $a+b=r\cos\theta$ ،

۱۰. $a=-r\cos\theta$, $a=r\cos\theta$.

۵. ۳. تمرین

۲. اعظمی قیمت $=54$ اصغری قیمت $=50$ خورالوی قیمت $=70$ خوراکوچنی قیمت $=0$ ،

۳. (i): په $x=-2$ کې اصغری ، په $x=2$ کې اعظمی ، (ii): په $x=1$ کې اعظمی ،په $x=6$ کې اصغری ، (iii): په $x=1$ کې اصغری ، ٤. په $x=\frac{\pi}{3}$ کې اعظمی ، اواعظمی قیمت $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ،

٦. (i): په $x=-\frac{\pi}{2}$ او $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ کې اعظمی ، اوپه $x=\frac{\pi}{2}$ او $x=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ کې اصغری ، (ii): په $x=-\frac{\pi}{2}$ او $x=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کې اعظمی ،اوپه $x=\frac{\pi}{2}$ او $x=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ کې اصغری ، (iii): په $x=a+\frac{\pi}{4}$ کې اعظمی ،اوپه $x=a+\frac{3\pi}{4}$ کې اصغری .

۷. $\frac{c^2}{a+b}=$اعظمی ، ۹. په $x=e$ کې اعظمی ، ۱۰. (i): $\left(\frac{1}{3},+\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$ ،

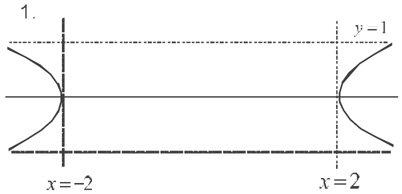
(ii): $(0,0),(1,0),(-1,0)$ ، ۱۲. په $x<1$ کې دپاسه مخامخ کیږی ،اوپه $x>2$ کې دلاندی مخامخ کیږي ، ۱۳. $(6,9)$ ، ۱۸. $\pi r^2(1-\sqrt{5})$ ، ۲۱. $Rs.1.60$ ، ۲۲. $12\times12\times9$.

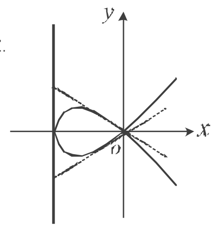
۵. ۴. تمرین

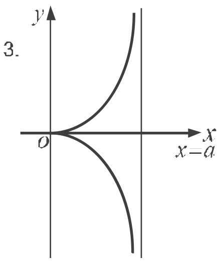
۱. $y=x-1$ ، ۲. (i): غوټه (پاپرسوب) ، (ii): غوټه (پاپرسوب) ، ۳. (i): په $(0,0)$ کې څوکه، (ii): په $(1,-1)$ کې څوکه ، (iii): $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ غوټې ، ٤. (i): داول ډول خانګړتیا ، (ii): ددوهم ډول خانګړتیا ، (iii): داول ډول خانګړتیا ، (iv): داول ډول دوه برخه ایزی څوکې ،

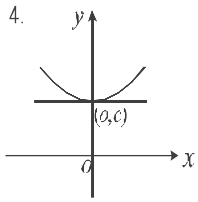
۵. (i): $x+y=3$, $x-y+1=0$ ، (ii): $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x-a)$, $y-a=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}x$ او $y-a=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(x-2a)$.

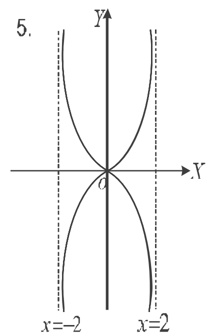
۵.۵. تمرین

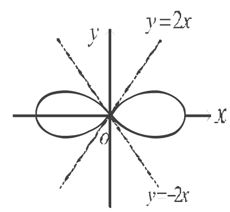
1.


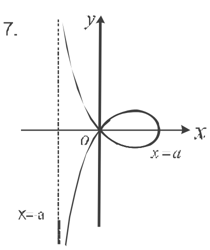
2.


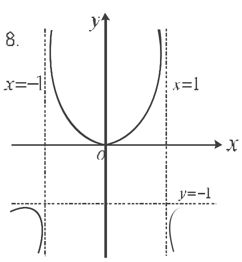
3.


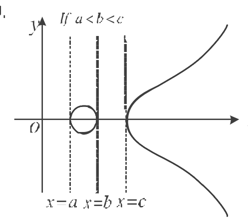
4.


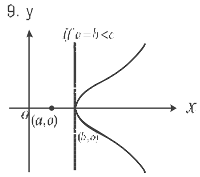
5.


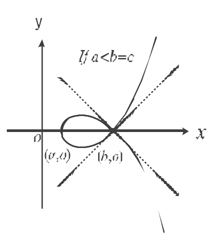
6.


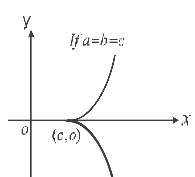
7.


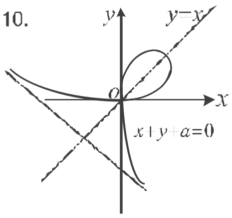
8.


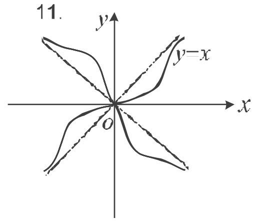
9.


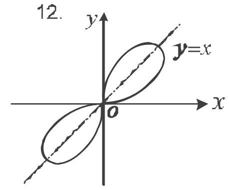
9.


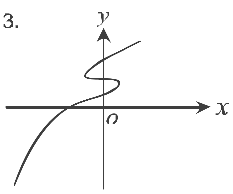


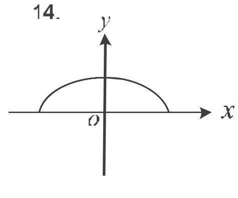


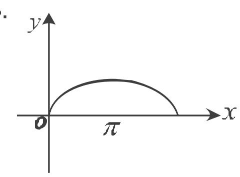
10.


11.


12.


13.


14.


15.


٥. ٦. تمرين

١. (i): $\frac{y^2}{c}$ ، (ii): $\frac{\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^{3/2}}{a^x(\ln a)^2}$ ، (iii): $\frac{2(x+y)^{3/2}}{\sqrt{a}}$ ،

٢. (i): $2a\sqrt{2}(1+\cos t)^{1/2}$ ، (ii): $2a\,e^t$ ، (iii): $3(axy)^{1/3}$ ،

٣. (i): $\frac{a(\theta^2+1)^{3/2}}{\theta^2+2}$ ، (ii): $\frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ ، (iii): $\frac{a(1+\theta^2)^{3/2}}{\theta^4}$ ، ٤. (i): $\frac{1}{2}$ ،

(ii): $\frac{4}{7}$ ، (iii): 1 ، ٥. (i): $\frac{4}{3}\sqrt{2r}$ ، (ii): $\frac{a^2b^2}{p^3}$ ، (iii): $\frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$ ، ٨.

$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

٥. ٧. تمرين

٣. $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$ ، ٦. $\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}a\right)^2=\frac{1}{2}a^2$.

۵ .۸. تمرین

۱. $x-0$ او $x=a$ ، ۲. (i): $x^2+y^2=p^2$ ، (ii): $x^2(u^4-g^2x^2-2u^2gy)=0$ ،

۳. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$ ، ۴. $x^{n/n-1}+y^{n/n+1}=c^{n/n+1}$.

۵. بیلابیلی پوښتنې

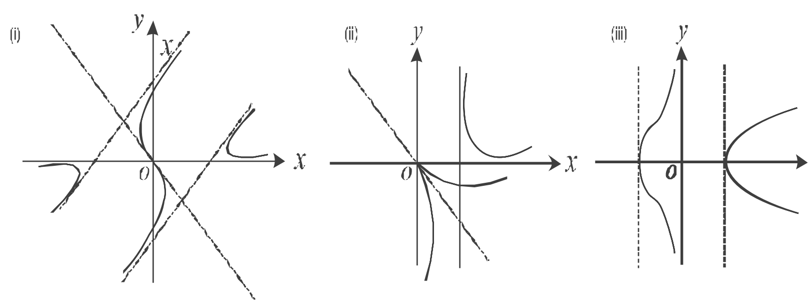
۱. (i): $y=2x$, $y=x-1$, $y=-x-2$ ، (ii): $y=-x$, $y=\pm1$, $x=\pm1$ ،

(iii): $y=0$ ، ۵. $x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3-x+6y=0$ ،

۶. په $x=2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ کې اعظمي ده ،اوپه $x=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$ کې اصغري ده ،

۷. په $x<-1$ ، $x>1$ کې پورته خواته محدب ده ، په $-1<x<1$ کې لاندې خواته محدب ده ، اوپه $(-1,2e)$ او $\left(1,\frac{10}{e}\right)$ کې انعطاف نقطه ده ،

11. (i)



۱۲. $2a(t^2+1)^{3/2}$ ، ۱۴. $r=2a\cos\theta$.

۱.۶. تمرین

۱. $\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{4}x^4-2x^3-9x$ ، ۲. $\tan x-x$ ، ۳. $x-2\,arc\tan x$ ، ۴. $\frac{1}{4}arc\tan\frac{x}{4}$ ،

۵. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|$ ، ۶. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right|$ ، ۷. $\sqrt{2}\sin x$ ، ۸. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$ ، ٩. $-\frac{1}{2}\cot x$ ، ١٠. $x-\frac{1}{2}\sin 2x$ ، ١١. $\frac{x\sqrt{x^2-16}}{2}-8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|$ ،

١٢. $\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}-8\sin^{-1}\frac{x}{4}$ ، ١٣. $\frac{x\sqrt{25+x^2}}{2}+\frac{25}{2}\ln\left|x-\sqrt{25+x^2}\right|$ ،

١٤. $-\cot x-\tan x$ ، ١٥. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4+\sqrt{16-x^2}}\right|$.

٢.٦. تمرين

١. (i): $\sin\sqrt{x^2-5}$ ، (ii): $2e^{\sqrt{x+1}}$ ، (iii): $e^{\sin^{-1}x}$ ، (iv): $-2\cos\sqrt{x}$ ، (v): $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8x+5}$ ، (vi): $\frac{1}{3}\left(2x^2+8x-1\right)^{3/2}$ ، (vii): $-\frac{20}{3}\ln\left|2-3x^{1/4}\right|$ ، (viii): $\arctan x^{1/3}$ ،

٢. (i): $\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$ ، (ii): $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{a^2}$ ، (iii): $\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$ ،

(iv): $\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}$ ، (v): $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$ ، (vi): $\sinh^{-1}\frac{x}{a}$ ،

(vii): $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ ، (viii): $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}$ ، (ix): $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ ،

٣. (i): $-\arctan\cos x$ ، (ii): $\tan x-\sec x$ ، (iii): $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ ، (iv): $\tan^2\sqrt{x}$ ،

(v): $\ln(\ln\sin x)$ ، (vi): $-\frac{1}{3}\ln(2+3\cos x)$ ، (vii): $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right)$ ،

(viii): $\frac{1}{4}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)\right|$ ، ٤. (i): $\arctan e^x$ ، (ii): $\ln(\sin\theta-\cos\theta)$ ، (iii): $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$ ،

(iv): $\frac{1}{9}\cos^9 x-\frac{1}{7}\cos^7 x$ ، (v): $\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{1}{9}\sin^9 x$ ، (vi): $\frac{1}{2}[\ln(\sec x)]^2$ ،

(vii): $-2\sqrt{1+\cos^2 x}$ ، (viii): $\frac{1}{3}(\sin^3 x-\cos^3 x)$ ،

٥. (i): $\frac{2}{3}\ln\left|\left(3\sqrt{\sin x}+4\right)\right|$ ، (ii): $x\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\ln|\sin(x-\alpha)|$ ،

(iii): $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right|$ ، (iv): $\frac{1}{5}\ln|5\tan x+1|$ ، (v): $\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|$ ،

(vi): $\sin e^x$ ، (vii): $\arctan\sin x$ ، (viii): $e^{\sin^2 x}$ ، (ix): $\frac{1}{2}\ln|\sec 2x+\tan 2x|$

،

(x): $\frac{(e^x+a)^{n+1}}{n+1}$ ، (xi): $e^{\sin x}$.

٣.٦. تمرين

١. (i): $-x\cos x+\sin x$ ، (ii): $\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4$ ، (iii): $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 2x$ ،

(iv): $-\arcsin x\sqrt{1-x^2+x}$ ، (v): $-x\cot\frac{x}{2}$ ،

٢. (i): $\frac{1}{2}\{x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)\}$ ، (ii): $-2e^{-\sqrt{\frac{1}{x}}}\left(x+2\sqrt{x}+2\right)$ ،

(iii): $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$ ، (iv): $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ ،

(v): $\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)$ ، (vi): $\frac{ae^z}{b^2+1}\{b\sin bz+\cos bz\}$ كله جي $z=\ln\frac{x}{a}$ ،

٣. (i): $-e^x\cot\frac{x}{2}$ ، (ii): $\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx+c-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ ، (iii): $\frac{1}{2}\left\{-\operatorname{cosec}x\cot x+\ln\left|\operatorname{cosec}x-\cot x\right|\right\}$ ، (iv): $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ ،

(v): $\frac{1}{2}x\cos^{-1}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

٤. (i): $\frac{x}{\ln x}$ ، (ii): $\frac{e^x}{2+x}$ ، (iii): $\sin^{-1}x\,\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}$ ،

(iv): $e^x\frac{x-1}{x+1}$ ، (v): $2x\tan^{-1}x-\ln(1+x^2)$ ،

(vi): $\frac{1}{3}x^3\left\{(\ln x)^3-(\ln x)^2+\frac{2}{3}\ln x-\frac{2}{9}\right\}$ ، (vii): $\frac{1}{4}\{\cosh 2x\sin 2x-\sinh 2x\cos 2x\}$ ،

(viii): $e^x\ln x$ ، (ix): $\frac{e^{5x}}{34}\{3\sin 3x+5\cos 3x\}$.

٤.٦. تمرين

١. (i): $2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{1}{x-1}$

(ii): $\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

(iii): $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|$

(iv): $\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|$ ، (v): $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+1}\right|$

٢. (i): $\frac{3}{4}\ln|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$

(ii): $-\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{4}{15}\ln|x-2|+\frac{9}{10}\ln|x+3|$

(iii): $\frac{1}{8}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}$

:(iv) $\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{10}\ln|x^2-4|+\frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

:(v) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}$

۳. :(i) $\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x-1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

:(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{x^2+2x-3}$

:(iii) $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5|-\arctan(x-2)$

:(iv) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)^2}$ ، ٤. :(i) $\frac{-1}{1+e^x}$ ،

:(ii) $\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)-\ln(2-\sin x)-\frac{1}{2}\ln(3+\sin x)$ ، :(iii) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right)$ ،

:(iv) $-\frac{3}{2}x+\frac{35}{36}\ln|9e^{2x}-4|$ ، :(v) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1}{2(1+\sin x)}$

۵. :(i) $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}-\frac{1}{2(1+\cos x)}$ ، :(ii) $\ln\left|\frac{\tan x-2}{\tan x-1}\right|$ ،

:(iii) $\frac{1}{14}\ln|1-\cos x|+\frac{1}{2}\ln|1+\cos x|-\frac{4}{7}\ln|3-4\cos x|$ ، :(iv) $\frac{1}{a}\ln\frac{e^x}{a+be^x}$.

۵.۶. تمرين

۱. :(i) $-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ ، :(ii) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ،

:(ii) $\frac{(x-2)\sqrt{x^2+4x+5}}{2}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(x+2)$

:(iii) $\frac{4x+3}{8}\sqrt{2x^2+3x+4}+\frac{23\sqrt{2}}{32}\sinh^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{23}}$

.٢ :(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{4x-3}{\sqrt{41}}$ ، :(ii) $\sin^{-1}(2x-5)$ ، :(iii) $2\sqrt{x^2+x+1}+2\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ،

:(iv) $\sqrt{4+5x-x^2}+\frac{7}{2}\sin^{-1}\frac{2x-5}{\sqrt{41}}$ ،

:(v) $-\frac{1}{3}(1-x-x^2)^{3/2}+\frac{2x+1}{8}\sqrt{1-x+x^2}+\frac{5}{16}\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$

.٣ :(i) $\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-1}{2}}$ ، :(ii) $\ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}\right|$ ، :(iii) $\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{2x+10}-\sqrt{7}}{\sqrt{2x+10}+\sqrt{7}}$ ،

:(iv) $\frac{2}{7}(x+2)^{7/2}-2(x+2)^{5/2}+6(x+2)^{3/2}-10(x+2)^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}\right|$ ،

.٤ :(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{2(x-1)}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2(x-1)}}{x+\sqrt{2(x-1)}}$

:(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{2(x+2)}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+3-\sqrt{2(x+2)}}{x+3+\sqrt{2(x+2)}}$

:(iii) $\sqrt{2}\arctan\frac{x-2}{\sqrt{2(x-1)}}$ ، :(iv) $2\tan^{-1}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

.٥ :(i) $-\frac{1}{\sqrt{7}}\sinh^{-1}\frac{1-4x}{\sqrt{3}(3+2x)}$ ، :(ii) $-\frac{1}{\sqrt{40}}\sinh^{-1}\frac{7+x}{1-3x}$ ،

:(iii) $-\sinh^{-1}\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ ، :(iv) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}\right|$

.٦ :(i) $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2-4x-5}+\frac{15}{2}\cosh^{-1}\frac{x-2}{3}$ ،

:(ii) $(3-x)\sqrt{3-2x-x^2}+9\sin^{-1}\frac{x-1}{2}$ ، (iii): $\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}\,x}{2\sqrt{9+x^2}}-\ln\frac{\sqrt{9-x^2}+\sqrt{5}}{\sqrt{9+x^2}-\sqrt{5}}\right\}$ ،

(iv) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ ،

۷. (i) $-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\sin^{-1}x$

(ii) $6\left\{\frac{1}{7}x^{7/6}-\frac{1}{5}x^{5/6}-\frac{1}{3}x^{1/2}-x^{1/6}-arc\tan x^{1/6}\right\}$

(iii) $\sqrt{x^2+1}-\frac{3}{\sqrt{5}}\sinh^{-1}\frac{1-2x}{x-2}$

(iv) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{2}\,x}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}(2x-1)}$

(v) $x+3x^{2/3}+6x^{1/3}-6\ln\left|x^{1/3}-1\right|$

۶,۶. تمرین

۱. (i) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$

(ii) $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x$

(iii) $-\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{8}\cos^8 x$ (iv) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$

۲. (i) $\frac{1}{8}\cos^5 x\sin x+\frac{7}{48}\cos^5 x\sin x+\frac{35}{192}\cos^3 x\sin x+\frac{105}{384}\cos x\sin x+\frac{105}{384}x$

(ii) $-\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x-\frac{5}{24}\sin^3 x\cos x-\frac{15}{48}\sin x\cos x+\frac{15}{48}x$

۳. $\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x+\frac{4}{15}\sec^2 x\tan x+\frac{8}{15}\tan x$

٤.

$$\int x^n e^{ax}dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{a-1}e^{ax}dx$$

$$\int x^5 e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^6}\{a^5x^5 - 5a^4x^4 + 20a^3x^3 - 60a^2x^2 + 120ax - 120\}$$

٥. (i) $\frac{4}{\sqrt{3}}arc\tan\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) - x$

(ii) $\frac{1}{8}\ln\left|2\tan^2\frac{x}{2} - \tan^4\frac{x}{2}\right|$ (iii) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\tan x/2 - 1}{3\tan x/2 + 9}\right|$

(iv) $-\frac{1}{4}\cot^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\tan\ \frac{x}{2}\right|$

(v) $\frac{1}{\sqrt{5}}arc\tan\frac{3\ \tan x/2 + 1}{\sqrt{5}}$ (vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\tan x/2 + 2 - \sqrt{3}}{\tan x/2 + 2 + \sqrt{3}}\right|$

٦. بیلابیلی پوښتنې

١. (i) $\ln\left|e^x + e^{-x}\right|$ (ii) $-\cos 2\sqrt{x}$

(iii) $\frac{4}{5}x^{5/4} - x + \frac{4}{3}x^{3/4} - 2x^{1/2} + 4x^{1/4} - 4\ln(1 + x^{1/4})$

٢. (i) $\sqrt{2}\arcsin(\sin x - \cos x)$ (ii) $-\frac{4}{3}\left(1 + \sqrt{\cos x}\right)^{3/2}$

(iii) $-\frac{1}{9}\{\sqrt{1-9x^2} + (\cos^{-1}\ 3x^3)\}$

٣. (i) $\cos ec^{-1}\ (\cos\ x + 1)$ (ii) $1/2\,x^2$

٤. (i) $2\ \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$ (ii) $x(\sin^{-1}x)^2 + 2\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} - 2x$

٥. (i) $\ln\left|x+2\right| + \ln\left|x^2+3\right| - \frac{2}{x^2+3}$

(ii) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}\right|$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}+x$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$

٦. (i) $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}\right|$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right|$

(iii) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(\sin x-\cos x)$ (iv) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}$

(v) $-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\tan^{-1}x+\frac{x}{4(1+x^2)}$

(vi) $a\left\{\frac{x}{a}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right\}$

٧. ١. تمرين

١. ، ٢. $\frac{b^2-a^2}{3}$ ، ٣. 8 ، ٤. $\ln\frac{b}{a}$ ، ٥. $2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$ ،

٦. $\sin b-\sin a$ ، ٧. $\sinh b-\sinh a$ ، ٨. $\frac{b-a}{2}-\frac{1}{4}(\sin 2b-\sin 2a)$ ،

٩. $\frac{b-a}{2}+\frac{1}{4}[\sin 2b-\sin 2a]$ ، ١٠. 1 ، ١١. $\frac{1}{10}$ ، ١٢. $\frac{\pi}{4}$ ، ١٣. $\frac{1}{2}$ ،

١٤. $2e^{(\pi-4)/2}$ ، ١٥. $\frac{1}{2}\ln 2$

٧. ٢. تمرين

١. (i) 4 ، (ii) $2-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، (iii) $\frac{128}{3}$ ، ٥. $\frac{\pi^2}{2ab}$ ، ٧. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ ،

٩. (i) π ، (ii) $\frac{\pi^2}{2}-\pi$ ، ١٠. (i) 0 ، (ii) $\frac{\pi}{2}$

٧. ٣. تمرين

١. (i) $-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5x}{32}$

(ii) $\frac{\tan^6 x}{6}-\frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^2 x}{2}-\ln|\sec x|$

(iii) $-\frac{1}{7}\operatorname{cosec}^7 x\cot x+\frac{6}{35}\operatorname{cosec}^5 x\cot x-\frac{8}{35}\operatorname{cosec}^3 x\cot x+\frac{16}{35}\cot x$

٢. (i) $\frac{1}{8}\sin^3 x\cos^5 x+\frac{5}{48}\sin^3 x\cos^3 x-\frac{5}{64}\sin^3 x\cos x+\frac{5}{128}(x-\sin x\cos x)$

(ii) $\frac{1}{5}\sec^5 x-\frac{1}{3}\sec^3 x$ (iii) $\frac{2-3\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos x}+\frac{3}{2}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

٣. (i) $\frac{3\pi}{32}$ (ii) $\frac{3\pi}{16}$ (iii) $\frac{2}{9}$ ٤. (i) $\frac{16}{3003}$ (ii) $\frac{5\pi}{2048}$

٥. (i) $\frac{3\pi-8}{12}$ (ii) $\frac{3\pi-8}{32}$

٧.

$$\int (a^2+x^2)^{5/2}dx=\frac{1}{6}x(a^2+x^2)^{5/2}+\frac{5}{24}a^2x(a^2+x^2)^{3/2}$$
$$+\frac{5}{16}a^4\left[x\sqrt{a^2x^2}+a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

٨. $\frac{q^n\lfloor n\,(p+q)!}{\lfloor qn+p+1\,(p+1)}$ ٩. $\frac{16}{35}$ ١٠. $\frac{\pi a^6}{32}$

١١.

$$\int x^n e^{ax}dx=x^n\frac{e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$
$$\int x^n e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^4}(a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6)$$

۱۳. $\frac{1}{3}$ ۱۵. $\frac{5\pi a^4}{128}$

۱۷. $\frac{(2m+1)\,(2m-1)\,.....3}{(m+2)\,(m+1)........3}\,a^{m+2}\,\frac{\pi}{2}$ (i) $\frac{\pi\, a^3}{2}$ (ii) $\frac{21\pi a^6}{16}$

۷. ۴. تمرین

۱. $\frac{\pi}{4}$ ، ۲. 1 ، ۳. $\frac{\pi}{4}$ ، ۴. $\frac{1}{2}$ ، ۵. $-\frac{1}{4}$ ، ۶. -2 ، ۷. $-\frac{1}{4}$ ،

۸. Divergent ، ۹. Divergent ، ۱۰. $\pi \ln 2$ ، ۱۱. $\frac{\pi}{4}$ ، ۱۲. $\frac{\pi}{2ab\,(a-b)}$ ،

۱۳. $\ln 2$ ، ۱۴. 0 ، ۱۵. π ، ۱۶. Divergent ، ۱۷. 0 ، ۱۸. 0 ، ۱۹. $\frac{\pi}{3}$ ،

۲۰. Divergent ، ۲۱. Divergent ، ۲۲. $\frac{2e^3}{9}$ ، ۲۳. Divergent ، ۲۴. $\frac{9}{2}$ ،

۲۵. 2 ،

۷. بیلابیلې پوښتنې

۱. $\frac{2}{3}(b^{3/2}-a^{1/2})$ ، ۲. (i) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ ، ۵. $\pi \ln 2$

۸.

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+2bx+c}}{an}$$
$$\frac{b\,(2n-1)}{an}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax^2+2\,bx+c}}\,dx - \frac{c\,(n-1)}{an}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{ax^2+2\,bx+c}}$$

۹. (i) $2^{3/4}$ (ii) Divergent (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) Divergent ، ۱۰. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ،

۱۳. 6 ، ۱۴. (i) $\frac{32}{21}$ (ii) $\frac{5\pi}{27}$ ،

٨. ١. تمرين

١. (i) $\cosh\frac{x}{c}$ (ii) $\sqrt{\frac{4a+9x}{4a}}$ (iii) $\frac{x^2+a^2}{2ax}$ ،

٤. $a\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ ، ٥. $a\,(\beta-\alpha)$ ، ٧. $6a$ ، ٨. $4a\sin\alpha$ ، ٩. $8a$ ،

١٠. $8a$ ، ١١. $8+\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ ،

٨. ٢. تمرين

١. $s=a\{\tan\varphi\sec\varphi+\ln(\tan\varphi+\sec\varphi)\}$ ،

٣. $s=4a\left[2\sin\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]$ ٤. $s=\sqrt{2}\,e^{\pi/4}(e^{-\varphi}-1)$

٥. $s=4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{3}\right)$ ٦. $s=\frac{a\sqrt{1+k^2}}{k}\left[e^{k(\varphi-\tan^{-1}\frac{1}{k})}-1\right]$

٨. ٣. تمرين

٢. $\frac{\pi r^2}{2}-a\sqrt{r^2-a^2}-r^2\sin^{-1}\frac{a}{r}$ ، ٣. $\frac{16}{15}$ ، ٤. $a^2(\pi+2)$ ، ٥. $\frac{8a^2}{15}$ ،

٦. 4π ، ٧. $\frac{3\pi a^2}{8}$ ، ٨. $\frac{16}{3}$ ، ٩. πa^2 ، ١٠. $\frac{16a^2}{3}$ ، ١١. $a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ ،

١٢. $\frac{1}{3}$ ، ١٣. $\left(2\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$ ، ١٤. $\frac{32}{3}$ ،

٨. ۴. تمرين

١. $\frac{3}{2}a^2\pi$ ، ٢. $\frac{\pi a^2}{12}$ ، ٣. a^2 ، ٤. $\frac{\pi a^2}{4m}$ ، ٥. $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$ ،

٧. $\frac{5}{2}a^2$ ، ٨. $\frac{1}{2}\pi a^2$ ، ٩. $\frac{1}{3}\pi a^2$ ، ١٠. $2a^2\left(\frac{3}{4}-2\right)$ ، ١١. $\left(\frac{5}{4}\pi-2\right)a^2$ ، ۱۲. $\frac{1}{2}\pi a^2$ ،

۸. ۵. تمرین

۱. $\frac{4}{3}\pi a^3$ ، ۲. $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ، ۳. $2\pi a^3\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)$ ، ٤. $\frac{4}{5}\pi a^3$ ، ۷. $\frac{128}{15}\pi a^3$ ،

۸. $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$ ، ۹. $\frac{32}{105}\pi a^2$ ، ۱۱. $24\pi^2 a^2$ ، ۱۲. (i) 80π (ii) 128π

(iii) $56\sqrt{2}\pi\, cu.\, unit$ ، ۱۳. $\frac{2\pi}{3}r^3+\frac{a\pi}{3}(3r^2-a^2)$, $\frac{2\pi}{3}r^3-\frac{a\pi}{3}(3r^2-a^2)$ ،

۱٤. $\frac{256}{3}\sqrt{3}\, cubic\ unit$ ، ۱٥. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ ، ۱٦. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$

۸. ۶. تمرین

۱. $\pi a^2\left\{3\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$ ، ۲. $\frac{99}{2}\pi$ ، ۳. $\frac{\pi}{27}[10\sqrt{10}-1]$ ، ٥. $2\pi r\,(r_2-r_1)$ ،

۸. $\frac{32}{3}\pi a^2$ ، ۹. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}(13\sqrt{13}-1)$ ، ۱۱. $\frac{672\pi}{\sqrt{10}}$ ، ۱۲. 3π ، ۱۳. $\frac{32}{5}\pi a^2$ ،

۱٤. $4\pi^2 a\,(a\cos\alpha+p)$ ،

۸. ۷. تمرین

۱. $\frac{8\pi a^3}{3}$, $\frac{32}{5}\pi a^2$ ، ۲. $v-\frac{4}{3}\pi a^3$, $s-4\pi a^2$ ، ٥. $\frac{\pi a^3}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)-\frac{1}{3}\right\}$ ،

٦. $(4-2\sqrt{2})\pi a^2$ ،

۸. بیلابیلی پوښتنې

۷. $4a^2$ ، ۹. $a\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$ ، ۱۰. $\frac{5}{4}\pi a^2$ ، ۱۱. $2\pi^2 a^2 b$ ، ۱٤. $\frac{3}{2}a^2$ ،

۱٥. $\frac{b^2+ab+b^2}{b+a}$ ، ۱٦. $\frac{16}{3}\pi$ ، ۱۸. $a^2(\pi+2)$ ،

٩. ١. تمرين

١. $2x+3y=0\ ,\ 3x-5y+8=0$ ، ٢. $2x-5y-3=0\ ,\ 5x+y-7=0$ ،

٣. $2x-3=0\ ,\ 5y+4=0$ ، ٤. 2 ، ٥. -3 ، ٦. $1\ ,\ \frac{159}{9}$ ،

٧. *Parabola , vertex* $\left(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{25}\right)$ ، ٨. *Parabola vertex* $\left(-1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ ،

٩. *Parabola vertex* $(1\ ,\ -3)$ ، ١٠. *Ellipse centre* $(1\ ,\ -1)$ ،

١١. *Ellipse centre* $(1\ ,\ 3)$ ، ١٢. *Ellipse centre* $(-3\ ,\ 1)$ ،

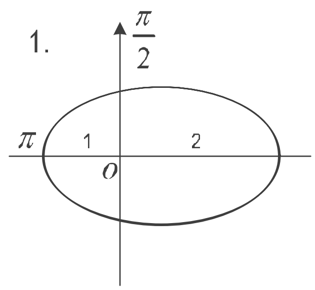
١٣. *Hyperbola centre* $(-3\ ,\ 1)$ ، ١٤. *Hyperbola centre* $(-2\ ,\ -3)$ ،

١٥. *Hyperbola centre* $(1\ ,\ 2)$ ، ١٦. *Parabola* ، ١٧. *Parabola* ،

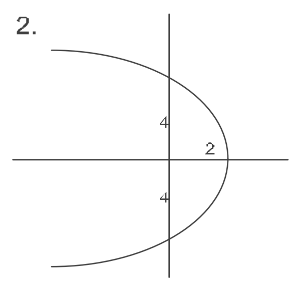
١٨. *Hyperbola* ، ١٩. *Ellipse* ، ٢٠. *Hyperbola* ،

٩. ٢. تمرين

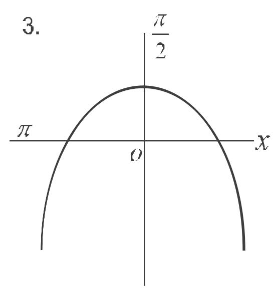
1.



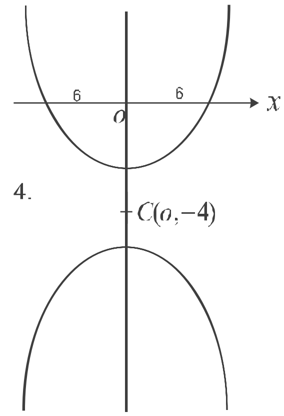
2.



3.



4.



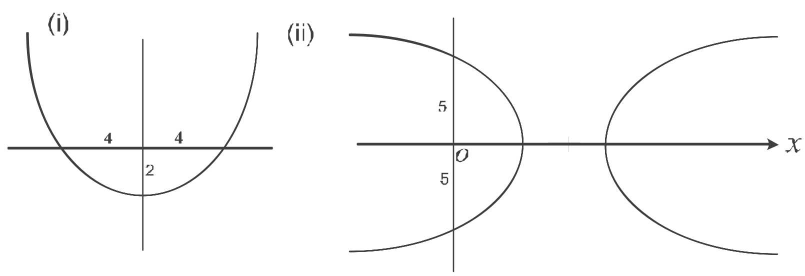
۵. $x^2 = 2(y+\frac{1}{2})$ ،

۹. بیلابیلې پوښتنې

۱. $x/2$ ، ۳. -12 ، ۴. (i) *Ellipse centre* $(2,-1)$ (ii) *Hyperbola centre* $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ ،

۵. *Ellipse centre* $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ ،

۶.



۱۰. ۱. تمرین

۲. $\left(\frac{19}{8}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$ ، ۳. $2:3$ ، ۴. 1,0,0;0,1,0;0,0,1 ، ۵. 90° ، ۱۰. $\frac{\pi}{2}$

$(ii)\ \dfrac{\pi}{3}\quad (iii)\ \dfrac{\pi}{2}$ ، ١١. $\dfrac{4}{\sqrt{29}}, \dfrac{3}{\sqrt{29}}, \dfrac{-2}{\sqrt{29}}$ ، ١٤. $8x+2y+24z+9-k=0$ ،

١٥. 90° ،

١٠. ٢. تمرين

١. (i) $5x+2y-3z-17=0$ (ii) $x+2y-3z+4=0$ ،

٢. $\theta=\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{3}z=\dfrac{5}{3}\ ,\ \dfrac{3}{\sqrt{50}}x-\dfrac{4}{\sqrt{50}}y+\dfrac{5}{\sqrt{50}}z=0$ ،

٣. $x+5y-6z+19=0$ ، ٤. (i) $\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\dfrac{\pi}{3}$ ، ٥. $x-y+4z=13$ ،

٦. $10x-8y-3z+40=0$ ، ٧. $3x+4y-5z=9$ ، ٨. $1x+my+nz=7$ ،

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=7 \quad \text{او} \quad -\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{z}{\sqrt{3}}=7$$

٩. $19x-18y-16z+95=0$ ، ١٠. (i) $2x+3y+4z=4$ (ii) $x+y+z=2$ ،

١١. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{2z}{5}=1\ ,\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{c}=1$ ، ١٣. $20x-15y+12z=60\ ,\ x=0,\ y=0\ ,\ z=0$ ،

١٤. (i) $19x+8y+4z=21$ (ii) $38x+31y-13z=60$ (iii) $2x+9y-11z=12$ ،

١٥. $3x^2+3z^2-4xy+8xz-4yz-12x+6y-12z+9=0$ ،

١٠. ٣. تمرين

١. $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ ، ٢. (i) $(-19,-16,35)$ (ii) $(5,8,-4)$ ،

٣. $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+2}{2}\ ,\ (0,4,0)\sqrt{29}$ ، ٤. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ ،

٥. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$ ، ٦. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}};\ \dfrac{x+1/3}{1}=\dfrac{y+2/3}{2}=\dfrac{z}{3}$ ،

٧. $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{5}$ ، ١٠. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}, \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ ، ۱۱. $\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{x-5}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ ، ۱۲. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{0}$, ،

۱۳. 90° ،

۱۰. ۴. تمرین

۳. $x+y+z=3$ ، ۴. $x+10y-8z=84$ ، ۵. $y-4z=7\ ,\ x-z=1,\ 4x+y=11$ ،

۷. $8x-4y-z=0$ ، ۸. $3x+2z=5\ ,\ 5x+2y=5\ ,\ 3y-5z+5=0$ ،

۹. $2-16y+11z=0$ ، ۱۰. $(-2\ ,3\ ,-8)$ ، ۱۱. $None$ ،

۱۳. $\frac{x-5}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{1}$ ، ۱۴. $\sqrt{78}\ ,(0\ ,1\ ,2)\ ,(2\ ,8\ ,-3)$ ،

۱۵. $8x-6y-15z=19$ ، ۱۶. 13 ،

۱۰. ۵. تمرین

۱. $14\ ,117x+4y-41z-490=0=9x-4y-z-14$ ، ۲. $\pm\frac{dc'-d'c}{\sqrt{(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2}}$ ،

۳. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,11x+2y-7z+6=0=7x+y-5z+7$ ، ۴. $4\sqrt{3}\ ,\ x=y=z$ ،

۵. $(3\ ,5\ ,7)\ ,(-1,-1,-1)\ ,\ 2\sqrt{3},\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{4}$ ،

۶. $9\ ,32x+34y+13z-108=0\ ,4x+11y+4z-27=0$ ، ۷. $(-7,-1,-9)$ ،

۸. $\frac{11}{\sqrt{342}}\ ,13x-82y+55z-109=0=10x-29y-16z$ ،

۱۰. بيلابيلې پوښتنې

۱. $-2:1\ ,-1:2$ ، ۳. $5y-9z=13$ ،

۱۱. ۱. تمرین

۱. (i) $2x-3y=-21\ ,\ 2x+6z=-21\ ,\ y-2z=7\ ,\ -\frac{7}{2}\ ,\ 7\ ,\ -\frac{21}{2}$

(ii) $0,0; 0,2, y^2+z^2-2z=0, x^2+z^2-2z=0, x^2+y^2=0$

(iii) $\pm 2, \pm 2, \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}; y^2+z^2+5z-4=0, x^2+z^2-2xz+5z-4=0,$
$x^2+y^2-4=0$

۲. $-12, -6, 6; y-z+6=0, x-2z+12=0, x+2y+12=0$ ،

۳. (i) $x-\text{intercepts } 3, -1, y-\text{intercept } \frac{3}{4}, -1, \text{no } z-\text{intercept}$

(ii) $x-\text{intercepts } 3, -1, y-\text{intercept } \pm 1, z-\text{intercept } \pm\sqrt{3}$ ،

٤. (i) $xz=1$ *hyperbola* (ii) *No trace* ،

٥. (i) $\pm 2, \pm 2, \pm 4$ (ii) $\pm 4, \pm 2, \pm i$ (iii) $0,0,0$ (iv) $\pm 1, \pm 1, \pm 1$ ،

۱۱. ۲. تمرين

۱. (i) $x^2-2(y^2+z^2)=1$ (ii) $x^2+y^2-2z^2=1$ ،

۲. (i) $x=z^2+y^2-a^2$ (ii) $x^2+y^2=(z^2-a^2)^2$ ،

۳. (i) $x^2+2y^2+2z^2=8$ (ii) $x^2+2y^2+z^2=8$ ،

٤. (i) او (ii) $6x^2+6y^2+6z^2=7$ ، ٥. (i) $x=y^2+z^2$ (ii) $x^2+y^2=z^2$ ،

٦. x *or* $y-axis, x^2+y^2=a^2, z=0$ ، ۷. $z-axis, x^2+4z^2=16, y=0$ ،

۸. $y-axis, z=\frac{1}{y}, x=0$ ، ۹. $x-axis, x^2-4y^2=8, z=0$ ،

۱۰. $4x^2-9y^2-9z^2-24x+36=0$ ،

۱۱. ۳. تمرين

۱. (i) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-13=0$ (ii) $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ ،

۲. (i) $(-1, 2, 3), 3$ (ii) $(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}), 0$ ،

۳. (i) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ (ii) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$ ، ٤. $x^2+y^2+z^2+\frac{px}{l}+\frac{py}{m}+\frac{pz}{n}=0$ ، ٧. $x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0$ ،

٨. $3(x^2+y^2+z^2)-12x+6y+6z-32=0$ ، ٩. (i) $x+3y+2z-19=0$

(ii) $4x+9y+14z-64=0$ ، ١٢. $ax^{-1}+by^{-1}+cz^{-1}=2$ ،

١١. ٤. تمرين

١. (i) $3(x^2+y^2+z^2)-2x-3y-4z-22=0$

(ii) $\gamma(x^2+y^2+z^2)=z(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)$ ،

٢. $\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ، ٣. $-(3-\sqrt{3})$, $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ ،

٤. $x^2+y^2+z^2+5x-6y+7z-8=0$ ،

٥. $x^2-y^2+z^2-2x+2y-4x+2=0$ او $x^2-y^2+z^2-6x-4y+10z+22=0$ ،

٦. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-5z-5=0$ او $5(x^2+y^2+z^2)-2x-4y-5z+1=0$ ،

٧. $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$ ، ٨. $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+2=0$ ،

٩. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0$ ،

١٢. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z\_11=0$ او $5(x^2+y^2+z^2)-4x-8y-12z-13=0$ ،

١١. ٥. تمرين

١. $9x^2+4y^2+13z^2-18xz-8yz=36$ ، ٢. $x^2+y^2+xy-x-y=0$ ،

٣. $4(3x-2z)^2+(3y+z)^2=9$ ، ٤. $a(p-my-nz)^2+l^2by^2+l^2cz^2=l^2$ ،

٦. $x^2+y^2-8x-12y+27=0$ ،

٧. $26x^2-29y^2+5z^2-4xy+10yz-20zx+150y+30z+75=0$ ،

٨. $5x^2+5y^2+8z^2-8xy+4xz+4yz-6x-42y-96z+225=0$ ،

٩. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$ ،

تمرين ١١. ٦.

١. $2x^2-3y^2-5z^2-3yz-6xz+z-1=0$ ، ٢. $a^2(y^2+z^2)=b^2x^2$ ،

٣. $y^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=(z-y)^2$ ، ٤. $5x^2+3y^2-z^2-2xy-6yz-4zx+6x+8y+10z=26$ ،

٦. $3x^2-4y^2+5z^2=0$ ، ٧. (i) $x^2-y^2-z^2=0$ (ii) $p(ax^2+by^2)=2z(lx+my+nz)$

(iii) $2x^2+y^2-5xy-3yz+4zx=0$ ،

٨. $17x^2-7y^2+7z^2+32xy+48yz-24zx-18x-114y-52z+118=0$ ،

٩. $4x^2+40y^2+19z^2-48xy-72yz-36zx=0$ ،

تمرين ١١. ٧.

١. Sphere , center $\left(\frac{1}{2},-2,-\frac{3}{2}\right)$, radius $\frac{5}{2}$

٢. Ellipsoid of revolution center $(2,0,0)$ ، ٣. Elliptic paraboloid ،

٤. Hyperbolic paraboloid ، ٥. Sphere , center $(1,0,0)$, Radius 1 ،

٦. Hyperboloid of two sheets ، ٧. Hyperboloid of one sheet ،

٨. Cone ، ٩. Hyperboloid of one sheet ،

تمرين ١١. ٨.

١. (i) $\left(5,\tan^{-1}\frac{4}{3},5\right),\left(5\sqrt{2},\tan^{-1}\frac{4}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $\left(2,\frac{5\pi}{6},-2\right),\left(2\sqrt{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5},\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}2,-2\right),\left(3,\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}2,\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

(iv) $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{8},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ ، ٢. (i) $\left(2\sqrt{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\,,\,2\right)$, $(\sqrt{3},3,2)$ (ii) $\left(0\,,\,\frac{\pi}{11}\,,\,1\right)$, $(0,0,1)$

(iii) $\left(2\sqrt{3}\,,\,\frac{\pi}{3}\,,\,-2\right)$, $(\sqrt{3},3,-2)$ ،

٣. (i) $\left(\sqrt{34}\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)$, $(0,3,5)$ (ii) $\left(\sqrt{37}\,,\,\pi\,,\,\pi-\tan^{-1}\frac{1}{6}\right)$, $(1,0,6)$

(iii) $\left(5\,,\,arc\cos\frac{4}{3}\,,\,arc\sin\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{16}{5}\,,\,\frac{12}{5}\,,\,3\right)$ ،

٤. (i) $x^2+y^2+z^2-5y=0$ (ii) $x^2+y^2+z^2-3z=2$

(iii) $(x^2-y^2)\,(x^2+y^2-z^2)=a^2(x^2+y^2)$ ،

٥. (i) (a) $\rho^2(\cos 2\phi-\sin 2\phi\,\sin^2\phi)=4$ (b) $r^2(1+\sin 2\theta)-z^2+4=0$

(ii) (a) $\rho^2\sin^2\phi+2\rho\cos\phi=6$ (b) $r^2+2z=6$ ،

١١. ٩. تمرين

٤. $A=139^\circ 46.49'\,,\,c=69^\circ 14.6'\,,\,b=71^\circ 18.05'$ ، ٥. جنوب غرب $15^\circ 52.5'$ ،

٦. جنوب غرب $2^\circ 13.6'$ ، ٧. جنوب غرب $9^\circ 46.7'$ ،

٨. شمال غرب $7^\circ 39.4'$ ،

١١. بيلابيلي بوبنتني

٢. spheres $2(x^2+y^2+z^2)\pm 2\sqrt{2}\,r(x+y+z)+r^2=0\,,\,8$ ،

٦. $xy\pm yz\pm zx=0$ ، ٩. شمال شرق $26^\circ 49.4'$ ،

١٠. $x^2+7y^2+z^2+8xy+8yz-16zx=0$ ، ١١. $4(3x-2z)^2+(3y+z)^2=9$ ،

١٢. ١. تمرين

١. (i) $f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (ii) $f_x=y^2.x^{y^2-1}\,,\,f_y=2yx^{y^2}\ln x$ ،

$f_x = \dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)\,(x + y)}\ ,\ f_y = \dfrac{y^2 + 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)\,(x + y)}$ (iii)

$f_x = \dfrac{\sec^2(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y)}{1 + x^2}\ ,\ f_y = \dfrac{\sec^2(\tan^{-1}x - \tan^{-1}y)}{1 + y^2}$ (iv)

، $f_x = -\dfrac{y}{x^2}\cos(\dfrac{y}{x})e^{\sin(y/x)}\ ,\ f_y = \dfrac{1}{x}\cos(\dfrac{y}{x})e^{\sin(y/x)}$ (v)

٣. (i) $\dfrac{4y}{(x - y)^3}\ ,\ -\dfrac{2(x + y)}{(x - y)^3}\ ,\ \dfrac{4x}{(x - y)^3}$

(ii) $ye^{x^y}\ ,\ x^{y-2}(yx^y + y - 1)\ ,\ e^{x^y}x^{y-1}\,[1 + (1 + x^y)\ln x^y]\ ,\ e^{x^y}(1 - x^y)\,(\ln x)^2$

(iii) $12ax^2 + 4hy^2\ ,\ 4hx^2 + 12by^2\ ,\ 8hxy$ ،

١٢. ٢. تمرين

١. -3.84 ، ٢. 0.03 ، ٣. 1.5% ، ٤. 0.093 ، ٥. 3.25% ، ٦. 2% ،

٧. $48\,ft^2/\sec$ ،

١٢. ٣. تمرين

١. $7t^2$ ، ٢. $x + 2y\ ,\ -3 - 16y$ ، ٣. (i) $-\dfrac{3x^2 + y^2}{2xy}$ (ii) $\dfrac{y(\cos xy - e^{xy} - 2x)}{x(x + e^{xy} - \cos xy)}$

(iii) $\dfrac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$ ، ٤. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$ ،

٨. $2ry(y + 3x^2) + 2x(2y + x^2)\ ,\ -2y(y + 3x^2) - 2xs(2y + x^2)$ ،

١٢. ٤. تمرين

١. (i) $\dfrac{1 - e^2}{6e}$ (ii) $\dfrac{9}{\sqrt{13}}$ ، ٢. $\dfrac{48}{5}$ ، ٣. $-\sqrt{3}$ ،

٤. $2ai + 2bi\ ,\ 2\sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ -2bi + 2ai$ ، ٥. $-\dfrac{9}{\sqrt{11}}$ ، ٦. $-\dfrac{3}{4}$ (I) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

(ii) $[0, -\frac{3}{4}]$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) $\underline{i}$ ، ٧. (a) $-\frac{90}{7}$ (b) $12\underline{i}+14\underline{i}-12\underline{k}$

(c) 22 ،

١٢. ٥. تمرين

١. $6x-3y+2z=11$ ، ٢. $15x-4y+18z=17$ ،

٣. $\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(4\frac{\sqrt{2}}{5}, -\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $3x+2y+\sqrt{6}z=-2$ ،

٤. $x+z+4=0$ ، ٥. $3x+4y=5a$ ،

٦. $\frac{x-x_1}{ax_1}=\frac{y-y_1}{by_1}=\frac{z-z_1}{cz_1}$, $axx_1+byy_1+czz_1=1$ ، ٧. $\frac{\pi}{3}$ ،

١٠. $4x+6y+3z=5, 2x-12y+9z=5$ ، ١٣. $a=3, b=-1$ (*There are many values* ،

١٢. ٦. تمرين

١. 1 ، ٢. 9 ، ٣. $\frac{1}{2}e-1$ ، ٤. $\frac{7}{60}$ ، ٥. $\frac{32}{3}$ ، ٦. $\frac{\pi}{4}\ln 3$ ، ٧. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$ ،

٨. $49\frac{\pi}{32}$ ، ٩. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7\pi^2}{283}$ ، ١٠. $\frac{1}{3}$ ،

١٢. ٧. تمرين

١. $\frac{9}{2}unit^2$ ، ٢. $8unit^2$ ، ٣. $\frac{32}{3}unit^2$ ، ٤. $(\pi+8)$ ، ٥. $\left(\frac{8}{3}\pi+4\sqrt{3}-4\right)$ ،

٦. $\frac{2k\pi a^3}{3}$ ، ٧. $\frac{3}{2}k\pi r^4$ ، ٨. Rectangular coordinates $\left(0, \frac{8a}{5\pi}\right)$ ،

٩. $\frac{416}{231}A, \frac{32}{21}A, \frac{64}{231}A$ ، ١٠. $I_x=I_y=\frac{3}{2}A$ ، ١١. $\frac{128}{3}+8\pi$ ، ١٢. 16π ،

۱۲. ۸. تمرین

۱. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) 136 (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 2500π ، ۲. 24 ، ۳. $\frac{11}{8}-2e$ ،

٤. (i) 4 (ii) 64 ، ٥. $\frac{9}{4}$ ، ٦. $\left(3, \frac{9}{5}, \frac{9}{8}\right)$ ، ۷. $\left(0, 0\frac{2}{3}h\right), \frac{1}{2}kh^2\pi a^2$ ،

۱۲. بیلابیلي پوښتنې

۳. $2te^x \sin yz + ze^x \cos yz - ye^x \cos yz\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ، ٤. $-\underline{i}-\underline{i}+\sqrt{6}\underline{k}$ ، ۷. $74\frac{2}{35}$ ،

۸. $\left(0, 0\frac{1107}{488}\right), \frac{122}{3}\pi$ ، ۹. $\frac{64}{9}\pi$ ،

* * * * * * *

علمي سرچيني(موخذونه)

۱. مورای . ر . سپيجيل" لوړو محاسباتو کلکولس" مکګرو – د سنګاپور د کتابونو غټه کمپنی.

۲. سمارت و . م . " کروي ستوروپيژندنه" چاپولو ځای د کمبريج پوهنتون(1965) .

۳. بناغلی ا . و . " تحليلي هندسه او کلکولس" نيويارک ماسميلان کمپنی.

۴. پتر . اچ . سيلبي . " تحليلی هندسه" هارکورت نيويارک د جانوويچ د چاپولو ځای.

۵. هو وارد انتن "کلکولس" جانويلي او سنس، د نيويارک چاپخاني مل (ضميمه).

۶. تام . م . اپوستال، "کلکولس دويم جلد" جانويلی او سنس، دنيويارک چاپخاني مل (ضميمه).

۷. تام .م . اپوستال ، "رياضي انالیز" د پاکستان اساسي عامه کتابتون.

۸. سمت . ث " د هندسی مختصاتو مخروطي مقاطع برخي" لندن ماسميلان کمپنی . لميټد.

۹. مسکای، ا.د.او. لويس تافت "عملي رياضي اول جلد" لندن بناغلی اسحق پتمن او سونس لميټد.

د ژباړن لنډه پېژندنه

پوهندوی سید شیراقا(سیدي) د سید قابل شاه حسني مشهور په معلم پاچا زوی او د سید شریف شاه مشهور په غونډي پاچاه لمسی، په ۱۳۲۵ لمریز کال د تلې د میاشتې په (۱۶) نېټه د لغمان ولایت د الینګار ولسوالی د خواجه خېل (نیازي) قریې د غونډۍ په کلي کې سترګې په دې فاني نړۍ کې پرانیستې دي.

استاد خپلې لومړنۍ زده کړې د سنګره په لومړنۍ ښوونځي کې، منځنۍ زده کړې د ابن سینا منځنۍ ښوونځي کې، د لیسې د دورې زده کړې یې د کابل په دارالمعلمین کې سرته رسولې دي او لوړې زده کړې یې د لسانس په سویه د کابل پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي د رياضي او فزیک څانګه کې پای ته رسولي دي، خو د ځینو ستونزو له امله استاد په دې ونه توانېده چې نورې زده کړې هم وکړي.

استاد د معلمۍ مقدسې دندې برسېره د کندز، ننګرهار او کندهار په ولایتونو کې د پوهنې لوی مدیر په توګه او د تعلیم او تربیې وزارت د ثانوي زده کړو په ریاست کې دعلمي او مسلکي غړي په توګه دنده اجرا کړې ده.

وروسته په کال ۱۳۶۱ لمریز کې د ننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي د رياضي او فزیک په څانګه کې د استاد په توګه تقرر لاسته راوړی دی او تر اوسه پورې په همدغه پوهنځي کې د رياضي استاد په توګه دنده لري.

زه ورته د اوږد او خوشحاله عمرغوښتونکی یم

په خورا درنښت

انجنیر مجیب الرحمَن (سیدي)

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 250 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism and Agriculture (96 medical textbooks funded by German Academic Exchange Service, 140 medical and non-medical textbooks funded by German Aid for Afghan Children, 6 textbooks funded by German-Afghan University Society, 2 textbooks funded by Consulate General of the Federal Republic of Germany, Mazar-e Sharif, 1 textbook funded by Afghanistan-Schulen, 1 textbook funded by SlovakAid, 1 textbook funded by SAFI Foundation and 3 textbooks funded by Konrad Adenauer Stiftung) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic and Kabul Medical universities. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:
"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit ".

We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 140 medical and non-medical textbooks so far.

I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me from 2010 to 2016 in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Acting Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister Prof Abdul Tawab Balakarzai, Administrative & Financial Director Ahmad Tariq Sediqi, Chancellor of Nangarhar University, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project .

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Fahim Habibi and Fazel Rahim Baryal in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul, Afghanistan, May, 2017
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.de

Message from the Ministry of Higher Education

In history, books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science, and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of higher education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers and authors, and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty, and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to German Aid for Afghan Children and our colleague Dr. Yahya Wardak that have provided opportunities for publishing this book.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof. Dr. Farida Momand
Acting Minister of Higher Education
Kabul, 2017

Book Name Calculus & Analytic Geometry II
Author Prof Zia-ul-Haq
Translator Assist Prof Sayed Sher Aqa Sayedy
Publisher Nangarhar University, Education Faculty
Website www.nu.edu.af
Published 2017, First Edition
Copies 1000
Serial No 236
Download www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul
Office 0756014640
Email textbooks@afghanic.de

Printed in Afghanistan 2017

Sahar Printing Press

ISBN 978-9936-620-40-7