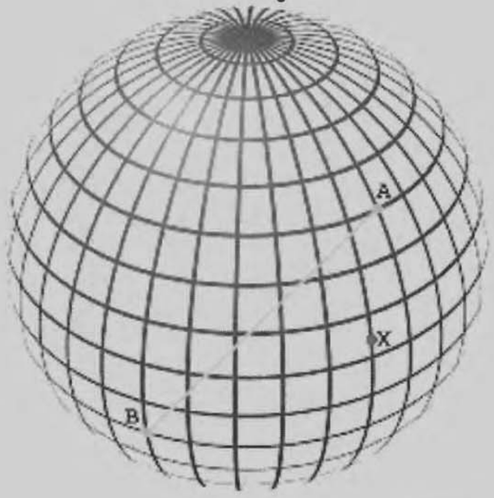
ننګرهار ښوونې او روزنې پوهنځی

کلکولس او تحلیلي هندسه
(لومړی ټوک)



پوهندوی سید شیر آقا سیدي

١٣٩٦

کلکولس او تحلیلي هندسه (لومړی ټوک)

Calculus & Analytic Geometry I

پوهندوی سید شیر آقا سیدي

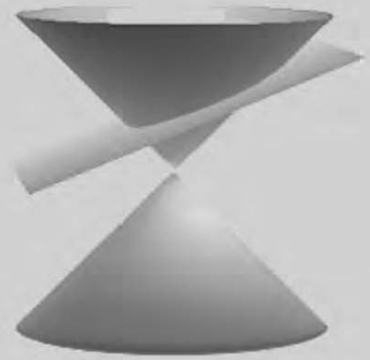
١٣٩٦

Nangarhar Education Faculty

Afghanic

Assist Prof Sayd Sher Aqa Sayedy

Calculus & Analytic Geometry I

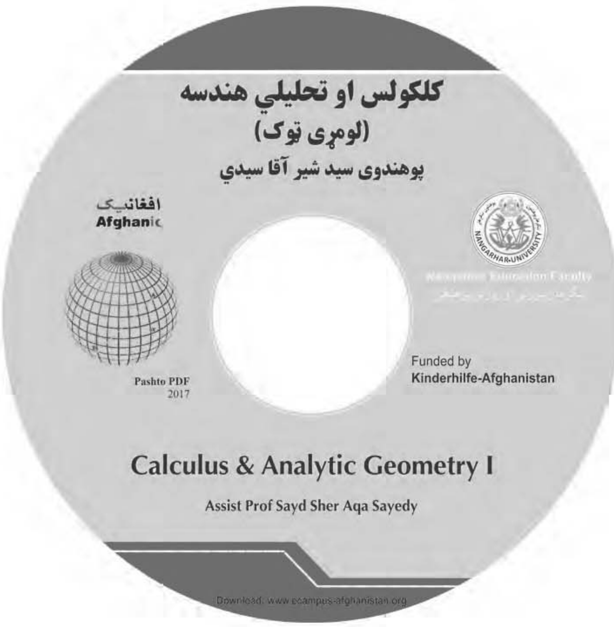


Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

ISBN 978-9936-620-39-1

Not for Sale

2017



کلکولس او تحلیلي هندسه
(لومړی ټوک)
پوهندوی سید شیر آقا سیدي
افغانیک
Afghanic
Pashto PDF
2017
Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan
Calculus & Analytic Geometry I
Assist Prof Sayd Sher Aqa Sayedy
Download: www.ecampus-afghanistan.org

بسم الله الرحمن الرحیم

کلکولس او تحلیلي هندسه
(لومړی ټوک)

پوهندوی سید شیر آقا سیدي

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ایف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:

د کتاب نوم	کلکولس او تحليلي هندسه (لومړی ټوک)
ليکوال	پروفېسور ضياؤ الحق
ژباړن	پوهندوی سيد شير آقا سيدي
خپرندوی	ننگرهار پوهنتون، ښوونې او روزنې پوهنځی
وېب پاڼه	www.nu.edu.af
د چاپ کال	۱۳۹۶، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۲۳۵
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org
چاپ ځای	سهر مطبعه، کابل، افغانستان

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Froes کورنۍ يوې خيريه ټولنې لخوا تمويل شوی دی.
اداري او تخنيکي چارې يې په آلمان کې د افغانيک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او ليکنې مسئوليت د کتاب په ليکوال او اړونده پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبيق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤليت نه لري.

د تدريسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړيکه ونيسئ:
ډاکتر يحيی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کابل
تيليفون ۰۷۵٦۰۱٤٦٤۰
ايمېل textbooks@afghanic.de

ای اس بي ان ٩٧٨-٩٩٣٦-٦٢٠-٣٩-١

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تـاریخ پـه مختلفـو دورو کـې کتـاب د علـم او پـوهې پـه لاسته راوړلـو، سـاتلو او خپرولـو کـې ډیـر مهـم رول لوبـولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جـوړوي چـې د زده کـړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې املـه د نړیوالـو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولـو سره بایـد نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه لـه کـومي مننـه کـوم چـې دوامـداره زیـار یـې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړونـدو څـانګو کـې درسي کتابونـه تـألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کـړی دی او د پـوهې موتـور یـې پـه حرکـت راوسـتی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تـر څـو پـه خپلـو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مـواد برابـر او چـاپ کـړي، چـې لـه چـاپ وروسته د ګرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کـړو د کیفیـت پـه لوړولـو او د علمي پروسې په پرمختګ کې یې نېک ګام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپلـه دنـده بـولي چـې د ګرانـو محصـلینو د علمـي سـطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسي مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کې د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او زموږ همکار ډاکـتر یحیـی وردک څخه مننه کوم چې د دې کتاب د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چې نوموړې ګټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومـومي تـر څـو پـه نـیـږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو سرپرست وزیره

کابل، ۱۳۹۶

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لويو ستونزو څخه ګڼل کېږي. يو زيات شمير استادان او محصلين نويو معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

تر اوسه پورې موږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البيروني، کابل، کابل طبي پوهنتون او کابل پولي تخنيک پوهنتون لپاره ۲۵۰ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالیزم او زراعت پوهنځيو (۹٦ طبي د آلمان د علمي همکاريو ټولنې DAAD، ۱۴۰ طبي او غير طبي د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې Kinderhilfe-Afghanistan، ٦ کتابونه د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې DAUG، ۲ کتابونه په مزار شريف کې د آلمان فدرال جمهوري جنرال کنسولګري، ۱ کتاب د Afghanistan-Schulen، ۱ د صافي بنسټ لخوا، ۱ د سلواک ایډ او ۳ نور کتابونه د کانراد ادناور بنسټ) په مالي مرسته چاپ کړي دي.

د يادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړونده پوهنتونونو او يو زيات شمېر ادارو او مؤسساتو ته په وړيا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.afghanistan-ecampus.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کولای شئ.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتيژيک پلان کې راغلي دي چې:

"*د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کيفيت او زده کوونکو ته د نويو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړينه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د ليکلو فرصت برابر شي د تعليمي نصاب د ريفورم لپاره له انګريزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړين دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلين او استادان نشي کولای عصري، نويو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پيدا کړي.*"

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هيواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړينه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او چپټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زمونږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یاد شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د مؤلفینو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مؤلف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

له افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی، دوی تر دې مهاله د ننګرهار پوهنتون د ۱۴۰ عنوانه طبي او غیرطبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه اخیستی دی.

په ځانګړې توګه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او CIM (Center for International Migration & Development) څخه، چې زما لپاره یې له ۲۰۱۰ نه تر ۲۰۱٦ پورې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړي وو، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو له وزیرې پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنمل دیپلوم انجنیر عبدالتواب بالاکرزی، مالي او اداري رئیس احمد طارق صدیقي، د ننګرهار پوهنتون رئیس، د پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مؤلف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو-کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، فهیم حبیبي او فضل الرحیم بریالځخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، مې ۲۰۱۷

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵٦۰۱۴٦۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.de

مخکنۍ خبرې

سبحانک لاعلم لنا الاماعلمتنا

الحمدلله رب العالمین وصلوة واسلام علی خیر الناصرین محمدواله واصحابه اجمعین.

زمونږ په هیواد کې په ملي ژبو د علمي کتابونو تالیف او ژباړونه تر ټولو زیاته اړتیا لیدل کیږي ځکه په تیر وخت کې په ملي ژبو په ځانګړې توګه په پښتو ژبه علمي کتابونه دعلماو اوپوهانو له خوا لیکل شوي ندي که لیکل شوي هم دي له هغو سره د چاپولوامکان موجودنه وه.

دا چې نن له یوې خوا تخنیکي او الکترونیکي(کمپیوټري سیستم)وسایلو انکشاف موندلی دی او له بلې خوا د معارف په انکشاف کې درسي او مرستندویه درسي کتابونو ته تر ټولو زیاته اړتیا لیدل کیږي نو لدی امله د درسي کتابونو تالیف او ژباړه ترټولو مهمو اړتیاو څخه شمېرل کیږي او دا نیمګړتیا او تیشه زمونږ په تاتوبي کې دپخوانه شتون لري. لدی سببه د درسي کتابونو تالیف او ژباړلوته په علمي ترفیعاتو کې هم ځای ورکړ شوی او یو ځانته، ارزښت لري ترڅو چې په دې ډول له یوې خوا درسي پروسه چټکه، پیاوړې او اغیزمنده شي اوله بلې خوا نه استادان ورڅخه په علمي ترفیعاتو کې د اصلی اثارو په توګه ګټه واخلي.

د دغو ټکو په پام کې نیولو سره ماته دښوونې او روزنې پوهنځي د ریاضي څانګې په $\frac{۱۳۳}{۱۳۸۶/۸/۲۱}$ ګڼه غونډه کې د پوهنمل علمي رتبې څخه پوهندوی علمي رتبې ته د ارتقا په موخه د یو درسي کتاب ژباړه د Calculs and Analytic Geometry په نوم چې د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department,Geverment Shalimar college, Baghbanpure –Lahor - Pakistan

له خوا تالیف اود ch.Ahmad Najib له خوا په 2006 زیږیز کال کې چاپ شوی دی د ژباړې دپاره راکړشو، ترڅو چې دا کتاب د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد پوهاند دوکتورسید قیوم شاه (باور) ترلارښوونې لاندې په پښتو ژبه وژباړم.

ما د ریاضي څانګې دغه پریکړه ومنله اوهغه مې سرته ورسوله، اودا کتاب چې(۱۲) څپرکي لري او (۶۴۷) مخونو کې لیکل شویدی په پوره امانت داری سره د نوموړي استاد په مشوره او لارښوونه وژباړه. دا واقعیت دی چې له یوې خوا ژباړه یو ستونزمند کاردی اوله بلې خوا نه د انګریزی ژبې د ځینو اصطلاحاتو او مفاهیمو دپاره په پښتو ژبه کې ډیر کم اصطلاحات پیدا کیږي چې په ریاضیاتوکې مروج او خلک ورسره اشناوي ما زیار ایستلی دی چې تروسه وسه پوري د مفاهیمو لپاره پښتو کلیمات او مفاهیم راوړم او هغه په مناسب ځای کې ځای پر ځای کړم او پدې

برخه کې مې د خپل لاربنود استاد څخه برسیره د څانګې د غړو استادانو نه مشوره اونظر هم اخیستی دی ما پدی ژباړه کې ډیر څه زده کړل، څه مې له کتاب څخه او څه مې د لاربنود استاد څخه. په ربښتیا سره زما لاربنود استاد له ماسره سختې ستونزی وګاللي او ماته یې ډیر شیان لکه په محتوا کې د کلیماتو ځای پر ځای کول او د معلوماتونو زیاتول او داسې نور رازده کړل. زه د خپل لاربنود ښاغلي پوهان دوکتور سید قیوم شاه (باور) د کابل پوهنتون د طبعی علومو پوهنځي ریاضي څانګې استاد څخه چې له ما سره یې زیاتې ستونزې ګاللي او نیکې لاربنوونې یې راته کړیدي د زړه له کومې قدرداني او مننه کوم او دده دا لاربنوونې به د تل لپاره د ځان سره وساتم او ده ته د لوی څښتن څخه لابریالیتوبونه اوښه روغتیا غواړم. همدارنګه دښاغلو پوهاند دیپلوم انجنیر عبدالحق(ایمل) او پوهنوال دیپلوم انجنیرمحمد همایون(ناصري) دکابل پوهنتون طبعی علومو پوهنځي ریاضي څانګې استادانو څخه چې د کتاب په ترتیب، تنظیم او اصلاح، اوهم دمفاهیمو په زیاتولو، کمولو او ځای پرځای کولو کې یې له ماسره ډیره مرسته کړیده خپله خوښي څرګندوم او دوی ته د سپیڅلي او مهربانه ذات څخه د ښه ژوند د خوشحالي غوښتوونکې یم.

پدی ډول د خپل میتودیک استاد پوهاند محمدظاهر(امیري)د ننګرهار پوهنتون دښوونې او روزنې پوهنځي د بیولوژي څانګې استاد څخه هم یوه نړی مننه کوم.

پدی برخه کې د پښتو ژبې اوادبیاتو څانګې استاد ښاغلي پوهنوال شاه ولي خان څخه چې ددې کتاب د پښتو کلیمو او جملو په سمون اوپرځای لیکلو کې پوره مرسته کړیده د زړه له کومې قدرداني او مننه کوم.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې (Kinderhilfe-Afghanistan) او د هغه له مشر ډاکتر اېروس څخه مننه کوم چې زما د کتاب د چاپ مالي لګښت یې پر غاړه واخیست. همداراز له ښاغلي ډاکتر یحیی وردګ څخه هم مننه کوم چې د دې کتاب د چاپ لپاره یې زمینه برابره کړېده.

په اخرکې د پوهنیارسید ذاکرحسین فرهاد(سیدي) د کابل پولیتخنیک پوهنتون د الکتروتخنیک پوهنځي استاد، پوهیالی سیدلمسون(سیدي) د پکتیا پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي ریاضي څانګې استاد، سید سمون ساحل(سیدي) د ننګرهار پوهنتون د انجنیري پوهنځي زده کړیالی او وصلت(ربښتیانې) د حربي پوهنتون د اکادمی پوهنځی د لومړي کال زده کړیالي څخه چې ددې ژباړې په لیکلو، ترتیبولو او د شکلونو په رسمولو کې نه هیریدونکې هلې ځلې کړیدي له زړه نه خوښي ښکاره کوم او دوی ته په دواړه کونینو کې له لوی څښتن تعالی څخه خوشحالي او بریالیتوبونه غواړم.

په خورا درنښت

ژباړونکې: سید شیراقا (سیدي)

تقريظ

زمونږ په هيواد کي په ملي ژبو د علمي کتابونو تاليف او ترجمو ته يوه ستره اړتيا ده، ځکه چي له يوې خوا له ډېر وخت څخه په ملي ژبو علمي کتابونه ندي راپاتي شوي او له بلي خوانه په روان حالت کي په ملي ژبو باندي د علمي کتابو ليکني او ژباړني ته ځوک زړه نه ښه کوي. نو لدي امله د درسي کتابو تاليف او ترجمه د ډېرو سترو اړتياوو څخه ګڼل کيږي او دا نيمګړتيا زمونږ په ګران هيواد کي په دوامداره توګه شتون لري، نو ځکه د درسي کتابونو تاليف او ژباړلو ته په علمي ترفيعاتو کي هم يو ځانګړی امتياز ورکړشويدی تر څو چي په دې توګه درسي پروسه چټکه،پياوړی او اغيزمنده شي او هم استادان ورځينی په علمي ترفيعاتو کي د اصلي اثارو په توګه ګټه واخلي.

پدي لړکي پوهنمل سيدشيراقا(سيدي)د ننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځی د رياضي څانګي استاد ته دنده وسپارل شوه چي يو درسي کتاب

Calculs and Analytic Geometry for B.A/ B.Sc
Prof. Zia-ul-haq, په نوم چي د

Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college, Baghbanpura-Lahor-Pakistan

له خوا تاليف دی اود ch.Ahmad Najib له خوا په 2006 زيږديز کال کي چاپ شويدی د ژباړی لپاره وسپارل شو، تر څو له يوې خوا يو درسي کتاب وژباړل شي اوله بلی خوا نوموړي استاد دا ژباړه د پوهندوی علمي رتبې لپاره د اصلي اثر په توګه وکاروي.

دا کتاب دننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځی د I انالیز، II انالیزاوIII انالیز له مفرداتو سره او هم د تحليلي هندسی له مفرداتو سره سمون لري.

دا کتاب (۱۲) څپرکي لري په لومړی څپرکي کي حقيقي عددونه، حدونه او متماديت په دوهم څپرکي کي مشتقونه په دريم څپرکي کي د منځني (وسطي) قيمت دعوی په څلورم څپرکي کي دمستوي لومړي ترتيب منحني ګانې په پنځم څپرکي کي د مستوی دويم ترتيب منحني ګانې په شپږم څپرکي کي د مشتق معکوس (انتيګرال نيولو تخنيکونه) په اوم څپرکي کي معين انتيګرالونه په اتم څپرکي کي دقوسونو اوږدوالی او دمستوي سطحو، حجمونو او د دوراني سطحو ټاکل په نهم څپرکي کي دوه بعديزه هندسه په لسم څپرکي کي اوله دری بعديزه هندسه (خطونه او مستوی ګانې) په يوولسم څپرکي کي دری بعديزه هندسه II (دويمه درجه سطوح) او په دولسم څپرکي کي

دڅو متحولینو محاسبه شامل دي. پدی لړکې یادونه کوم چې هر څپرکي حل شوي مثالونه او پوښتنې یا نا حل شوي تمرینات او د پوښتنو ځوابونه هم لري.

نوموړې دا کتاب په ښه امانت دارۍ او په روانه ژبه په پښتو ژبه ژباړلی دی او هڅه یې کړیده چې د ژباړې ټول نورمونه پکښې مراعات او وساتي.

زه د پوهنمل سید شیراقا (سیدي) دا علمي کار، پوهندوی علمی رتبې ته د ترفیع کولو لپاره د اصلي اثر په توګه کاملا کافي ګڼم او لوړو مقاماتو ته یې د منلو سپارښتنه کوم.

پوهنمل سیدشیراقا (سیدي) ته پدی لاره کې لازیات بریالیتوبونه غواړم تر څو زموږ دهیواد لوړې زده کړی په همدې توګه نور هم پسې غني شي.

دبریالیتوبونو په هیله

پوهاند دوکتور سید قیوم شاه (باور)

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تقریظ

دا يو روڼ حقيقت دې چې زمونږ په ګران هيواد کې ه يوی خوا کوم علمي کتابونه چې په ملي ژبو باندې په تيرو وختونو کې ليکل شوی وه هغه يا له منځه تللي يا خو د استفادی وړندي، او بلې خوا د کتابونو تاليف اوژباړل يو ستونزمن کار دی. نو لدی امله په ګران هيواد کی په ملي ژبو باندې دکتابونو تاليف او ژباړې ته په ځانګړی توګه په پوهنتونونو کې په ملي ژبو باندې د درسي کتابونو تاليف او ژباړلو ته خورا زياته اړتيا ليدل کيږي نو ځکه د درسي کتابونو تاليف او ژباړل په علمي ترفيعاتو کې ځانته ارزښت لري. تر څو جې له يوی خوا درسي پروسه چټکه او اغيزمنده شي اوله بلی خوا نه استادان په علمي ترفيعاتو کې له هغې نه داصلي علمي اثر په توګه ګټه واخلي.

پدی لړکې د ننګرهار پوهنتون دښوونې او روزنې پوهنځي رياضي څانګې استاد د پوهنمل سيد شيراقا(سيدي) د Calculs and Analytic Geometry نومی کتاب چې په (١٢) څپرکو کې د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college,

له خوا په 2006 زيږديز کال کې په انګريزی ژبه ليکل شوی په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی ترڅو چې د ننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي اړتيا ورباندې رفع شي.

نوموړي دا کتاب په پښتو ملي ژبه پ ډيره ساده او روانه توګه په پوره امانت داري سره د متن په مطابق ژباړلي دی او هم دليکنې نورمونه يې مرعات او په پام کې نيولي دي زه دده دا علمي کار تائيدوم او د پوهندوی علمي رتبی ته د ترفيع کولو لپاره يې کافي بولم او لوړو مقاماتو ته يې د منلو غوښتنه کوم په درنښت.

پوهاند عبدالحق ايمل

د کابل پوهنتون د رياضياتو استاد

تقريظ

پدې پوهېږو چې په ګران هېواد کې په ملي ژبو باندې د کتابونو تاليف او ژباړې ته ستره اړتيا ده، په ځانګړې توګه په علمي تحصيلي موسساتو او پوهنتونونو کې په ملي ژبو باندې د درسي کتابونو نه شتون ددې امل دی چې درسي پروسه په چټکې سره په مخ تللی نشي او اغېزه يې کمه ده، نو ددې دپاره چې درسي پروسه په چټکی سره په مخ لاړه شي، پياوړې او اغېزمنده شي نو بايد په ملي ژبو باندې درسي کتابونه تاليف او وژباړل شي چې له يوې خوا د زده کړيالو ستونزه حل او له بلې خوا نه استادان ورځخه په علمي ترفيعاتو کې د اصلي اثارو په توګه ګټه واخلي. نو پدې بنسټ دننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي رياضي څانګې استاد پوهنمل سيدشيراقا (سيدي) دCalculs and Analytic Geometry نومی کتاب چې په (۱۲) څپرکو کې د

Prof. Zia-ul-haq, Head of Methmatics Department, Geverment Shalimar college

له خوا په 2006 زيږديز کال کې ليکل شوی په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی تر څو چې د اړونده څانګې اړتيا ورباندی رفع شي.

نوموړی کتاب استاد سيدشيراقا په پوره امانت داری سره د متن په مطابق په پښتو ملي ژبه په ډېرو ساده کلماتو او روانو جملو سره ژباړلی دی او برسېره پدې نوموړي د ليکنې نورمونه مراعات او په پام کې نيولي دي.

زه د استاد دا علمي کار تائيدوم او دپوهندوی علمي رتبې ته د ترفيع کولو لپاره يې کافي بولم او لوړو مقاماتو ته يې دمنلو وړانديز کو په درنښت.

پوهنوال محمد همايون (ناصري)

د کابل پوهنتون د رياضياتو استاد

دپښتوژبې تائيدي تقريظ

د ښووني اوروزني پوهنځي محترم رياست ته !

د پوهنمل سيدشيراقا (سيدي) د کلکولس اوتحليلي هندسي (Calculus and Analytic Geometry) ترسرليک لاندې درسي کتاب چې په (۱۲)څپرکواو(۷۲۴)مخونوکې دپوهندوې علمي رتبې ته دترفع کولولپاره په روانه خوږه پښتوژبه په پوره امانت دارۍ سره داصل کتاب په مطابق ژباړل شوې، ليک، نښې داړتياسره سمې کارولې، هغه اصطلاحات اوکړنې چې په پښتو ژبه کې شتون لري کارولي دي. نوموړي اثرتربياکتنې وروسته چې دکومو تيروتنو د سمون وړانديز يې شوی وو، سمون پکې راوستل شوی اوس اثر د ژبني لحاظه په بشپړدول اصلاح شوی. دپښتو ژبې د ادبياتو له پلوه نوموړی ژباړل شوی اثر له پوهنمل علمي رتبې څخه پوهندوی علمي رتبې ته دلوړيدو لپاره کافي بولم او مقاماتو ته يې وړانديز کوم.

په درنښت

پوهنوال شاولي خان

د ادبياتوپوهنځي استاد

لړلیک

دویم څپرکي

مشتقونه

دریم څپرکی

د مینځني(وسطی) قیمت دعوی

ناڅرګندې بڼه(غیرمعین)شکلونه

څلورم څپرکي

دمستوي دلومړي ترتیب منحني ګاني

پنځم ځپرکي

د مستوي دویم ترتیب منحنی ګاني

شپږم څپرکی

دمشتق معکوس

(دانتیګرال نیولو تخنیکونه)

سـریـزه

د لوی اومهربانه څښتن څخه چې د ټول جهان دمخلوقاتو پیداکوونکی، روزونکی، پالونکی دی اویوی مرتبې ته د خپل مخلوق لوړیدل اوټیټیدل، هستی اونیستی دا ټول ده پوری اړه لري په ما باندی یې دا پیرزوینه او لوریدنه وکړه دکلکولس او تحلیلي هندسې (Calculus and Analytic Geometry)نومی کتاب چې په انګریزي بین المللي ژبه دپاکستان دولت د شالیمارکالج دریاضي څانګې امر پروفیسورضیاوالحق خان له خوا داجتماعي اوبشري علومو- دساینسي علومودلسانس دوری لپاره تالیف اوپه (2006) زیږیزکال کې (ch-Najib Ahmad) له خوا چاپ شوی دی دننګرهارپوهنتون دښوونې اوروزنې پوهنځي دریاضي څانګې دپریکړې په مطابق په پښـتـوملې ژبه له پوهنمل علمي رتبې څخه پوهندوی علمي رتبې ته دپورته کیدلو(ارتقاکولو) په موخه په پوره امانت داری سره داصل کتاب په مطابق وژباړه، پدې ژباړه کې می کوښښ کړیدی چې د ریاضي مفهومونه په ساده، روانواومروجو کلیماتو اوجملوکې وکاروم اوپدې ژباړه کې له اړتیا پرته داضافي کلیمواوجملوله کارولوڅخه مخنیوی شویدی.

پدی ژباړه کې ما دوه ګټې کړي دي، یومې دریاضي دڅانګې راسپارل شوې دنده سرته ورسوله او بله مې په پښتوژبه یوه علمي ننبه(اثر) چې خورا اوچته محتوا لري. د ښوونې او روزنې پوهنځي دریاضي اوفزیک څانګو، دساینس پوهنځي دریاضي اوفزیک څانګواود انجنیري پوهنځي ته درسي پروګرامونوسره پوره مطابقت اوسمون لري. برسیره پردی داکتاب داقتصاد پوهنځي، کمپیوټرساینس پوهنځي، کیمیا اوبیولوژي څانګو، کرنې او وترنري پوهنځیو زده کړیالیو(محصلینو) لپاره یوښه درسی مرستندوی (ممد) ګڼل کیږي، دننګرهار اود هیواد ټولوپوهنتونود ریاضي اوفزیک څانګوزده کړیالیواو نورو مینه والوته وړاندې کوم اویادونه کوم چې داکتاب د مولف له خوا په (۱۲) څپرکو او(۶۴۷) مخونو کې لیکل شویدی چې د لومړي، دویم اودریم څپرکو موضوعګانی په I انالیزکې، همداډول د څلورم، پنځم اونهم څپرکوموضوعګانې دتحلیلي هندسې په لومړی برخه کې، همداشانتی دشپږم، اوم او اتم څپرکوموضوعګانې په II انالیزکې، پدی ډول دلسم اویوولسم څپرکوموضوعګانې د تحلیلی هندسې په دویمه برخه کې اوهم په تفاضلي هندسه کې لوستل کیږي اودولسم څپرکي دځومتحوله تابعګانواودهغوی په اړوند محاسبوپوری اړه لري.

سره ددی چې ژباړه یوستونزمن کاردی خوبیاهم ماکوښښ کړیدی چې د مفاهیمو لپاره پښتوکلیمات اوجملې وکاروم چې پدې برخه کې مې دلارښود استاد برسیره دمختلفو دکشنری ګانواود ریاضي څانګې دغړواستادانو اود پوهنتون دنورواستادانوڅخه پوره مرسته اومشورې غوښتې دي.

په اخرکې زیاتوم څنګه چې کلکولس اوتحلیلي هندسه دطبعي علومو، انجنیري علومواوداسی نوروااساس جوړوي اوپه زیاتو څانګو کې دنظري اساس په توګه کارکوي نوباید کلکولس اوتحلیلي هندسه په درسي پروګرامونوکې دارنګه ترتیب اوتنظیم ومومي ترڅوچې پردې وتوانیږوپه نظري اوهم عملي اوتطبیقي موخو په ټولوساحوکې لکه څنګه چې نړۍ والو ګټه اخیستی ده مونږهم دهغوپه شان ګټه واخلو. دټولوافغانانو د یووالي او نیکمرغۍ په لور.

په خورادرښت

د دریمې ګڼې خپور شوي کتاب لپاره مولف سریزه

دریمه ګڼه خپور شوي کتاب چې د تاسو په لاسونو کې دی. دکتاب په بیا کره کولو کې دپاکستان د پول پول پوهنتونونو له خوا د لسانس دوري تولګیو لپاره د نوواساسي لاربښوونو(Sylla bus) سره سم لازم وړاندیزونه په پام کې نیول شویدي. لاندني زیاتوني پکې رامنځته کړیدي

(i) . د نامساواتونو او مطلقه قیمت د پوښتنو حل.

(ii). دبدلوني اړونده ارزښتونه(قیمتونه) په تجارت او اقتصاد کې،دنیوټن دافسون فورمول کارول.

(iii) . عددی انتیګرال نیول. دبیټا او ګاما تابعګانې.

(iv) . د دوه متحوله تابعګانو اعظمی او اضغري نقطې.

زه د خپلو ټولو هغو همکارانو او ملګرو څخه خوښ او منت باره یم چې له ماسره یې ددې ګڼې کتاب په سمون کې په یوډول یا په بل ډول مرسته کړیده.

زه به له ټولو هغو لوستونکو څخه ډیر خوښ شم چې په دغه درسی کتاب کې غلطي او خطاګانې په نښه او دهغوی د سمون لپاره اړونده وړاندیزونه وړاندې کړي.

ضیاوالحق

موخې

ماته د Calculus and Analytic نومی کتاب ژباړه د پروفیسورضیاؤالحق خان له خوا لیکل شوی اوپه 2006 زیږیزکال کې چاپ شوی دی دلاندې موخوپه بنسټ راسپارل شویده:

۱. څنګه چې دایو درسي کتاب دی داجتماعي اوبشري علومو- دساینسي علومودلسانس دوری لپاره تالیف اوموضوعات یې دښووني اوروزني پوهنځي- دساینس پوهنځي انالیزI ، انالیزII- تحلیلي هندسی دلومړی اودوهمی برخوله مفرداتوسره سمون لري اوهم دانجنیري دمفرداتو په مطابق ده- داقتصاد اوکرنې پوهنځیو لپاره یوښه درسي مرستندوی دی لدی سببه ژباړل یې دځانګې اود زده کړیالیو د ګټې اخیستنې لپاره ضروري ګڼل کیږي.

۲. زمونږ په هیواد کې په ملي ژبو دعلمي کتابونو تالیف اوژباړی ته ستره اړتیا ده څکه له یوې خوا د تیر وخت څخه په ملي ژبو علمي کتابونه راپاتې ندي اوله بل پلوه په روان حالت کې په ملي ژبوباندی د علمي کتابونولیکنې اوژباړنې ته څوک زړه نه ښه کوي نولدی امله د درسي کتابونوتالیف اوژباړنه د ډیروستروارتیاوو څخه ګڼل کیږي.

۳. زمونږ په ګران هیواد کې د درسي کتابونود نه شتون او نیمګړتیا پروسه په دوامدره توګه شتون لري نوځکه د درسي کتابونو تالیف اوژباړلوته په علمي ترفیعاتو کې هم یوځانګړې امتیاز ورکړشویدی ترڅو چې پدې ډول درسي پروسه چټکه- پیاوړې اواغیزمنده شي اوهم استادان ورځینې په علمي ترفیعاتو کې داصلي اثارو په توګه ګټه واخلي پدې پاملرنې سره ماته هم د پوهنمل علمي رتبې څخه دپوهندوې علمي رتبې ته د ارتقا کولولپاره ددي کتاب ژباړه راوسپارل شوه ترڅوچې هغه په پښتو ملي ژبه د اصل کتاب په مطابق په ډیرې امانت دارۍ سره وژباړم.

لومړی څپرکی

حقیقــي عدودنه

حدونه او متمــادیت

۱,۱ سریزه:

کلکولس د فزیکي مقدارونو بدلونونوپه تحلیل کي کارول کیږي. کلکولس په اولسمه پیړی کي د منحني په یوه نقطه کي د مماس پیدا کولو، دمنحني په تحلیل کی د یو قوس داوږدوالي پیداکولو، د یوجامد جسم د یوې ناحي مساحت او د حجم په ټاکلو، اوداسي نورو اړونده مسا ئلو کي، پراختیا موندلی ده. د مقدارونو لکه مسا حت، اوږدوالي، حجم، او داسي نورو دښودلو (نمایش) لپاره عدودونو ته اړتیا ده. له دې سببه مونږ وایو چې د کلکولس مضمون ددې لپاره مېنځ ته راغلی چې عددونه راټول او ډول ډول عملیات د دوی پواسطه ددوی په مېنځ کې په اساسي ډول سرته ورسوي. په ځانګړي ډول د کلکولس مضمون دا په ګوته کوي او پدې بحث کوي چې دلېمټ عمیله څه ته وايي، چې الجبري جمع او ضرب، او د هغوی معکوس، تفریق او تقسیم عملیو سره اړیکه ولري، او د بدلون د لحظوي قیمت یوې مهمې نظریې یوه توسعه ده ،چې دا خپله یوه لېمټي نظریه ده. په واقعیت کې دا د انسا ني پوهې هغوټولو څانګو ته چې په ورته ډول سره ترینه کار اخیستل کیږي عملي بڼه پیدا کوي. له دې سببه دا په هندسه، میخا نیک او نظر ي فزیک په نورو برخو کې او هم په بشري علوموکې لکه په اقتصاد او اروا پو هنه کې کارول کیږي. له دې کبله مو ږ په کلکولس کې خپله لوستنه د حقیقي عدودونو په اړوند په یو لنډ بحث سره پیل کوو.

۱,۲,۱ دحقیقي عددونو سېستم

طبیعي عددونه: د ... ... ,1,2,3 عددونه، کوم چې مونږ ئې دمعلومو شیانو د شمېرنې لپاره کا روو طبیعي عدودنه یا مثبت تام عدونه یې بولي. د طبیعي عددنو سټ دN پواسطه ښودل کیږي.

تام عددونه: دتامو مثبتو عددونو سټ، 0 او منفي تام عددونه د تام عددونو د سټ په شان پېژندل شویدی. دا د I یا Z پوسیله ښوودل کیږي.

ناطق عددونه: د $\frac{p}{q}$ شکل ټول عددونه، چېرته چې p او q تام عددونه وي، او q صفر نه وي ناطق عددونه ګڼل کیږي او د Q پوسیله ښودل کیږي.

غیرې ناطق عددونه: هغه عددونه چې د تاموعددونود خارج قسمت په توګه افاده شوي نه وي غیرې ناطق عددونه بلل کیږي لکه، $\sqrt{5},\sqrt{2}$ ، π ..... او داسی نور.

حقیقي عددونه: ناطق او غېرې ناطق عددونو سټ ته حقیقي عددونه وايي او دا د R پوسیله ښودل کیږي.

۱. ۲. ۲ دحقیقي عددونو اکسیومونه

د ټولو حقیقي عددونوسیټ R د جمعي (+) او ضرب (·) دوه ګونو عملیو سره یوځای خالي سټ نه دی، په کوم کي چي ((+))او((·))لاندی اکسیومونه صدق کوي.

۱. د $a,b \in R$ ټولو حقیقي عددونو لپاره، $a + b = b + a$ ، (د جمعي تبادلوی قانون).

۲. د $a,b,c \in R$ لپاره، $(a-b)+c = a+(b+c)$ ، (د جمعي اتحادي قانون)

۳. د $0 \in R$ یو عنصر شتون لري دا رنګه چي د $a \in R$ ټولو لپاره، $a+0=0+a=a$ ، صفر ته د R جمعي عینیت عنصر وایي.

٤. د $a \in R$ هریو عنصر لپاره د $-a \in R$ یوعنصر دارنګه شتون لري چي $a+(-a)=(-a)+a=0$ ، $-a$ ته د a جمعي معکوس عنصر وایي.

٥. $a,b \in R$ ټولو لپاره ، $a \cdot b = b \cdot a$ ، (د ضرب تبدیلي قانون)

٦. د $a,b,c \in R$ ټولو لپاره $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ، د ضرب اتحادي یا انجمني قانون)

۷. د $1 \in R$ یو عنصر شتون لري دارنګه چي د ټولو $a \in R$ لپاره $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ، 1 ته د R حقیقي عددونو ضربي عینیت عنصر وایي.

۸. د هر $a \in R$ لپاره، چي $a \neq 0$ ، په دي برخه کي $\frac{1}{a} \in R$ یودارنګه عنصر وجود لري چي

$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$ ، $\frac{1}{a}$ ته د a ضربي معکوس وایي.

یادونه کوو چي د صفر (0) ضربي معکوس شتون نه لري.

۹. دټولو $a,b,c \in R$ لپاره ،

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

توزیعي قانون دی.

۳,۲,۱ د حقیقي عددونو د ترتیب ځانګړتیاوی (خاصیتونه)

په حقیقي عددونه کی لاندی خاصیتونونه صدق کوي.

۱. که چیری $a,b,c \in R$ او $a < b$ او $b < c$ نو $a < c$ (انتقالي قانون)

۲. دټولو $a,b \in R$لپاره په لاندي دول یواځي یو صدق کوي.

$a < b$ یا $b < a$ یا $a = b$ (تنا ظري Tracheotomy قانون)

۳. که چیری $a < b$ نو $a + c < b + c$ د $a,b,c \in R$ټولو حقیقي عددونولپاره.

٤. که چیری $a < b$ او $c > 0$ نو $a \cdot c < b \cdot c$.

٥. که چیری $a < b$ او $c < 0$ نو $a \cdot c > b \cdot c$.

۶. که چېرې $a > b$ او $c > d$ نو $a + c > b + d$ د $a,b,c,d \in R$ ټولو حقیقي عددونو لپاره.

۷. که چېرې $a > b$ نو $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, $a,b \in R$ د ټولو لپاره. $-\frac{4}{7} \geq 0$

۸. که چېرې $a > b$ نو $a > \frac{a+b}{2} > b$ د $a,b \in R$ د ټولو لپاره.

۹. که چېرې $a \cdot b > 0$ نو a او b دواړه يو شانتي علامې لري او که چېرې $a,b < 0$ ، نو a دb سره مختلفي علامې لري.

۴,۲,۱ دغير ناطقوعددونو شتون

دعوى: د x كوم ناطق عدد شتون نلري چې $x^2 = 2$.

ثبوت: كه ممكن وي، فرضووچې $\frac{p}{q}$ دارنگه يو ناطق عدد دی چې

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

مونږ په پام کې نيولی شوچې $\frac{p}{q}$ د ده تر ټولو کوچنی مقدار دی نو،

$$p^2 = 2q^2 \qquad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

پدې پوهيدو چې p^2 يو تام جفت عدد دی نو p هم جفت دی (که چېرې p تاق وي نو د هغه مربع هم تاق دی)، فرض کړئ چی $p = 2r$، چیرې چې r یو تام عدد دی .په (۱) کې د p د دغه قيمت په اینبودلو مونږ لاس ته راوړو چې $4r^2 = 2q^2$ یا $q^2 = 2r^2$.
پدې ښودلو سره q هم جفت دی. ځکه نو p او q لکه 2 يو شريک ضربي عامل (يا فکتور) لري کوم چې زمونږ د فرضيې خلاف دی. لدې امله پدې برخه کې د x کوم ناطق عدد وجود نلري دارنگه چې $x^2 = 2$.

۵,۲,۱ مطلقه قيمتونه

مطلقه قيمت يا د a يوحقيقي عدد دځرنگه والي اندازه د $|a|$ پواسطه ښودل کيږي او په لاندې ډول ځرکندیږي.

$|a| = a$ ، که چېرې $a \geq 0$

$= -a$ ، که چېرې $a < 0$

مثال: $|5| = 5$ ، ځکه چې $5 \geq 0$.

$|-\frac{4}{7}| = -(-\frac{4}{7}) = \frac{4}{7}$ ، ځکه چې $-\frac{4}{7} < 0$.

$|0| = 0$ ، ځکه چې $0 \geq 0$.

یادونه: داسی سمبولونه لکه $+a$ او $-a$ غولوونکي دي، ځکه چې دا ستونزمنه ده چې وټاکل شي چې $+a$ مثبت دی او $-a$ منفي. که څه هم، دا دو مره ضروري نده، ځکه چې خپله a ښودلی شي چې يو مثبت يا يومنفي عدد دی. په حقیقت کې، که چېرې a خپله منفي وي نو $-a$ مثبت دی او $+a$ منفي دی. ددې یادونو په پام کې نیولو سره، د هر a لپاره دا په روښتیا سره ښودلی شو چې $a \geq 0$.

مطلقه قیمت لاندې ځانګړتیاوې لري.

دعوی: که چېرې $a,b,x \in R$، نو

(i) $|a| = |-a|$

(ii) $-|a| \leq a \leq |a|$

(iii) که چېرې $a \geq 0$ نو $|x| \leq a$ که چېرې یواځې اوتنها یواځې $-a \leq x \leq a$

(iv) $|a+b| \leq |a|+|b|$

(v) $|a-b| \leq |a|+|b|$

(vi) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(vii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad |b| \neq 0$

(viii) $|a-b| \geq ||a|-|b||$

ثبوت:

(i) که چېرې $a > 0$، نو $-a < 0$؛ او $|a| = a = -(-a) = |-a|$ که چېرې $a < 0$، نو $-a > 0$ او $|a| = -a = |-a|$ که چېرې $a = 0$، نو $|0| = 0 = |-0|$

(ii) که چېرې $a \geq 0$، نو $|a| = a$، او مونږ لرو چې $-|a| = -a \leq a = |a|$

که چېرې $a < 0$، نو $|a| = -a > 0$، او مونږ لرو چې $-|a| = a < 0 < -a = |a|$

ددې سببه، $-|a| \leq a \leq |a|$

(iii) فرض کړئ چې $|x| \leq a$، نو $-|x| \geq -a$ ، خو یا $x = |x|$ یا $x = -|x|$.

لدې سببه $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

یعنی، $-a \leq x \leq a$.

ددی په پام کې نیولو سره چې $-a \leq x \leq a$، نو که چېرې $x \geq 0$ مونږ لرو چې $|x| = x \leq a$ او که چېرې $x < 0$، مو نږ لرو چې $|x| = -x \leq a$، په دې حالت کې $|x| \leq a$، نولدی امله دا پایله (نتیجه) ده.

(iv) څنګه چې یا $a = |a|$ یا $a = -|a|$

مونږ لرو چي $-|a|\le a\le|a|$ په ورته ډول $-|b|\le b\le|b|$.

د دغو دواړو نامساواتونو په جمع کولو، لاس ته راځي چي $-\left[|a|+|b|\right]\le a-b\le|a|+|b|$.

د (iii) رابطې څخه لاسته راوړو چي $|a+b|\le|a|-|b|$.

(v) په (iv) کي د b په ځای د $-b$ په وضع کولو، مونږ لاسته راوړو چي $|a-b|\le|a|+|b|$

(vi) $(-a)^2, |a|^2=a^2$ یا 0 مطابقت کوي د $a>0$، $a<0$ یا $a=0$

ځنګه چي په ټولو حالتونو کي $|a|^2=a^2$.

اوس $|a\cdot b|^2=(a\cdot b)^2=a^2b^2=|a|^2\cdot|b|^2=(|a|\cdot|b|)^2$

لدي سببه $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

(vii) $\left|\frac{a}{b}\right|^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}=\frac{|a|^2}{|b|^2}=\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2$،

لدي امله، $b^2\neq0$، $\left|\frac{a}{b}\right|^2=\frac{|a|^2}{|b|^2}$.

(viii) $|a-b|^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\ge|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|$

ځکه چي، $-ab\ge-|ab|$، $=(|a|-|b|)^2$

لدي امله، $|a-b|\ge|a|-|b|$.

۶,۲,۱ پولي(سدونه) او محدود سیټونه

تعریف: فرضوو چي S د حقیقي عددونو یو نا خالي فرعي سټ دی. $M\in R$ عنصر ته د S سټ پورتنی پوله (سد)وایي که چیرې $x\in s$ ټولو لپاره $x\le M$.

$m\in r$ یو عنصر ته د S لاندني پوله (سد) وایي که چیرې $x\in S$ ټولو لپاره $m\le x$.
که چیرې S یو پورتنی سد ولري، نو وایي چي S له پاس خوا نه محدود دی. او که چیرې S یوه لاندینی سد ولري ، نو وایي S له لاندې خوانه محدود دی. یو سټ ته محدود وایي که چیرې هغه پاس خوا نه محدود وي او همغه شانتي له لاندې خوانه هم محدود وي .

مثال: فرض کړی چي $s=\{1،2،3،.............10\}$ یو محدود سټ دي نو $M\ge10$ ټول حقیقي عددونه د S یو پاسني پوله سد دی او $m\le1$ ټول حقیقي عددونه د S یو لاندېنی پوله دی.
لدې سببه S یو محدود سټ دی.

تعریف: فرض کړی چي S د R حقیقي عددونو یو ناخالي فرعي سټ دی. که چیرې S له پاس خوا محدود وی ، نو M یو پاسني سد ته ترټولو کوچني پاسني سد (lub) یا د **S** پورتني سرحد (supremum) وایې که چیرې M د S له هرپورتني سرحد څخه کوچني وي.

که چیرې S له لاندې خوا محدود وي ، نو د S ښکتنی m یو پوله ته ترټولو لوی لاندېنی یا ښکتنی پوله (glb) یا د s تحتاني سرحد (infimum) وایي که چیرې m د s له هر لاندېني سرحد څخه لوی وي.

پورتنی یا فوقانی سرحد (supreme) **ځانګړتیا:** د حقیقي عددونو هر نا خالي سټ چې له پورته، خوا محدود وي پورتنی سرحد لري.

ښکتنی یا تحتاني سرحد (infimum) **ځانګړتیا:** د حقیقي عددونو هر نا خالي سټ چې له لاندې خوا محدود وي ښکتنی سرحد لري .

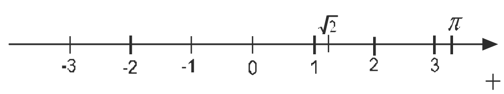
مثال: د $\{1,2,3.,.................10\}$ سټ (10) لکه پورتنی سرحد او(1) لکه ښکتنی سرحد

د $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},..............,\frac{1}{n},.........\right\}$ سټ ، (1) لکه پورتنی سرحد او (0) لکه ښکتنی سرحد دی.

یادونه: باید دا یادو نه وکړو چې د پورتنیو(ښکتنیو) سرحدونوځانګړتیاوی ناطقو عددونو په سټ کې صدق نکوي.

۱,۲. ۷ د حقیقي عددونو هندسي ښودنه

په تحلیلي هندسه کې، ښستیز ګام د حقیقي عددونو او په یو خط باندې د نقطو تر مېنځ د یوې اړیکې جوړول دي. د داسې کړنې لپاره، مونږ په اختیاري ډول د یو خط په اوږدو کې یو لوری چې یو ته مثبت او بل ته منفي وایې ټاکو. دا دودیزه (یا معمول) ده چې مثبت جهت د یو غشي لرونکي تیر پواسطه ښودل کیږي، لکه چې په لاندې شکل کې ښودل شویدی. وروسته مونږ په خط باندې یوه نقطه چې مبدا ورته وایي ټاکو، او د اوږدوالي یو واحد د واټنونو د اندازه کولو لپاره غوره کوو.



هر حقیقي عدد پورې مونږ دخط یوه نقطه مربوطولی شو لکه په لاندې څرګندونو کې:

۱. د r هر مثبت حقیقي عدد پورې هغه نقطه مربوطیږي چې د r واحدونو په یو واټن له مبدا څخه په مثبت لور کې واقع وي.

۲. د r− هر منفي حقیقي عدد پورې یوه نقطه مربوطیږي چې د r واحدونوپه یو واټن له مبدا څخه منفي لور کې واقع وي.

۳. مبدا د صفر (0) عدد پورې مربوطیږي.

هغه حقیقي عدد چې په خط باندې په یوې نقطې پورې مربوطیږي د نوموړې نقطې د مختصې په نوم یادیږي، او خط ته د مختصاتو یا وضعیه کمیاتو خط یا ځینې وخت د حقیقي عددونو خط وایي. لدې ځانګړتیاوو څخه چې د حقیقي عددونو او د حقیقي عددونو د خط تر منځ اړیکې جوتوي، څرګنده ده چې هر حقیقي عدد د یوې ځانګړې نقطې سره مطابقت لري او هره نقطه د یوه ځانګړي حقیقي عدد سره مطابقت لري. ددغه حقیقت

دځرګندونو لپاره مونږ داسی وایو چې حقیقي عددونه اود اعدادو په خط باندې نقطی یو په یو (one-to-one) مطابقت لري.

انتروالونه: د حقیقي عددونو ټاکلو سټونو ته انتروالونه وایي. په هندسي ډول، یو ټوټه(انتروال) یو قطعه خط دی.

فرضوو چې $a,b \in R$ او $a < b$.

۱. د $\{x|a \le x \le b\}$ سټ ته یو تړلی انتروال وایي اود $[a,b]$ پواسطه ښودل کیږی.

۲. د $\{x|a < x < b\}$ سټ ته یو خلاص انتروال وایي او د (a, b) یا $]a, b[$پواسطه ښودل کیږی.

۳. د $\{x|a \le x < b\}$ سټ له کیڼې خوا تړلی او له ښي خوا خلاص یو انتروال دی او $[a,b)$ یا $[a, b[$ پواسطه ښودل کیږي.

٤. $\{x/a < x \le n\}$ سټ د کیڼي خوا خلاص او له ښي خوا تړلي یو انتروال دي او $(a , b]$یا $]a, b]$ پواسطه ښودل کیږي.

یادونه: په یو خلاص انتروال کې د هغوی دځوکونقطې دواړه شا ملې دي حال دا چې په یوه تړلي انتروال کې د ځوکو نقطې دواړه شا ملې نه دي.

یو انتروال کېدای شي چې تر لا یتنا هي پورې یا مثبت یا منفي لورته غزول شوی وي.

لاندې جدول د ممکنه انتروالونو دډولو نویا قسمونو یو مکمل لست راپه ګوته کوي.

جدول

د انتروال نخښه (علامه)	د سیټ نخښه (علامه)	هندسي تصویر
$[a,b]$	$\{x\|a \le x \le b\}$	
(a,b)	$\{x\|a < x < b\}$	
$[a,b)$	$\{x / a \le x < b\}$	
$(a,b]$	$\{x\|a < x \le b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x\|x \le b\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x\|x < b\}$	
$[a,+\infty)$	$\{x\|x \ge a\}$	
$(a,+\infty)$	$\{x\|a < x\}$	
$(-\infty,+\infty)$	$\{x\|x \in R\}$	

یادونه: د یو تړلي انتروال په هندسي ښودنه کې، د پای ټکي دڅوکی نقطې دډکوټکو (Solid dots) پو اسطه ښودل کېږي حال دا چې د خلاص انتروال د پای یا څوکې نقطې په خلاصویا منځ خالي ټکو (open dots) ښودل کېږي .

مجاورت (Neighborhood): د x تولو نقطو سټ ته که $|x-a|<\delta$ چېرې چې $\delta>0$، د a نقطې یو مجاورت وائي. د x د ټولو عددونو سټ ته که $0<|x-a|<\delta$ ، په کوم کې چې x = a ځانګړی یا استثنا شوی دی، د δ یو له منځه تللی د a مجاورت (deleted) وایي.

۸,۲,۱ تابع

پدې برخه کې مو نږ یو د ریا ضیاتو له بنسټیزو مفهومونو څخه چې د تابع په نوم یادېږي تر بحث لاندې نیسو.

تعریف: تا بع یوه قاعده ده چې د A سټ د هر یوه عنصر اړیکه یواځې او یواځې د B سیټ د یوه عنصر سره ټاکي.

نو یوه تا بع د A نا خالي سټ، B نا خالي سټ او f اړونده یو قانون کوم چې هر عنصر $x\in A$ ته یو اځې یو عنصر $y\in B$ ته ارتباط ورکوي ده او $F:A\to B$ په شان یې لیکي او دا سې نو ښتل کېږي: f له A څخه تر B یوه تا بع ده یا f تر B پورې A په اړیکه کې کوي.

د A سټ ته دتابع دومین یا تعریف ساحه وایي. که چېرې x د f یوې تا بع په دومین کې یو عنصر وي نو په هغه صورت کې کوم عنصر چې f د x سره په اړیکه کې کوي د f(x) سمبول په وا سطه ښودل شوی ده (وائي چې x د f څخه) او د f لاندې د x تصویر (image) یا په x کې د f(x) قیمت نومول شوی ده. د f(x) ټولو ممکنه قیمتونو سټ چې د x قیمتونو ته دډومین د پاڅه بدلون مومی د f رینج یا دقیمتونو ساحه نومان شوی ده.

مثال: که چېرې $f(x)=2x^2-1$ وي، نو

$$f(4)=2\cdot4^2-1=31$$
$$f(0)=-1$$
$$f(t)=2t^2-1$$

او

$$f(k-1)=2(k+1)^2-1=2(k^2+2k+1)-1$$
$$=2k^2-4k+1$$

یادونه: x ته کله کله مستقل متحول او f(x) ته تا بع متحول ویل کېږي.

سورجېکټیف تابع: فرض کړئ چې $f:A\to B$ یوه تا بع ده که چېرې f د قیمتونو ساحه (Range)، B وي، نو f ته، onto یا سورجکټیف تا بع وایي.

انجېکتيف تابع: فرضوو چې $f:A\to B$ يوه تابع کله چې د A منفرد يا ځانګړي عناصر د f تر قانون لاندې ځانګړي تصويرونه ولري يعني $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ، چېرې چې $x_1, x_2 \in A$ ، نو f ته يو په يو (one-one)انجيکتيف تابع وايي.

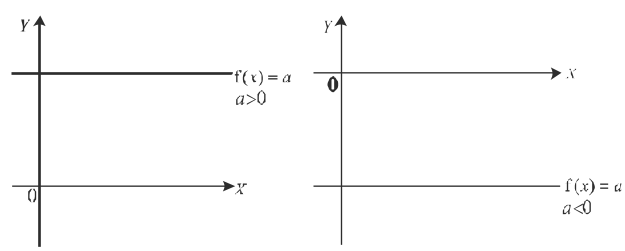
بای جېکتيف تا بع: د $f:A\to B$ يوه تابع کومه چې انجيکتيف (one-one) او ثورجيکتيف (onto) دواړه وي نو بای جېکتيف تا بع يا يوپه يو مطابقت ورته وايي.

يونواخت (Monotonic) تا بع: فرض کړئ چې $f:R\to R$ يو ه تا بع ده. f ته ويل کېږي چې په يونواخته ډول ډېرېښت مومي (تزايد کوي) که چېرې د x_1, x_2 ټولو قېمتونو لپاره چې د f په ډومين کې شامل دي $(x_1, x_2 \in domain\, of\, f)$، $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ،او ويل کېږي چې f په يو نواخته ډول کمښت مومي (تناقص کوي) که چېرې د x_1, x_2 ټولو قېمتونو لپاره چې د f په ډومين کې شا مل دي $(x_1, x_2 \in domain\, of\, f)$، $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ وي. په يو نو اخته ډول متزايدو او په يو نوا خته ډول متنا قصو توا بعو ته مو نوټو ني تو ابع وا يي. يعنی ، $f(x)=x^2$ په يو نواخته ډول متزايده تا بع ده.

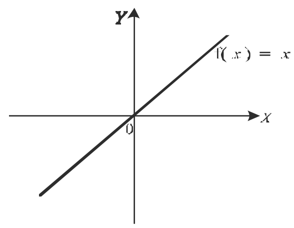
۱.۲.۹ دځينو توابعو ګرافونه

مونږ د يوی تا بع $f(x)$ ګراف معرفي کوو چې دا $y = f(x)$ معادلې ګراف دی. يوه تا بع $f(x)$په پام کې ونيسی نو، د x هر منل شوي قېمت لپاره، مونږ يوازې د y يو تا کلی قېمت په لا س راوړو، په دې صورت کې (x, y)يو مرتبه جوړه ترسترګو کېږي. د ټولو دارنګه نقطو يوځاي کولو ته د تا بع ګراف وا يي يعنې د يو ګراف په پا ڼه باندې د ټولو دارنګه نقطو نښه کولو په وا سطه، مو نږه ګراف يا يو منحني چې تا بع جوتوي (ښيي) لاسته راوړو. په عمل کې، مونږ ځينې نقطې په نښه کوو او دوی يود بل سره په ازاد ډول د لاس پوسيله د ګراف لاسته راوړلو لپاره يو ځا ي کوو.

۱. **مثال:** د يو ې ثابتې تا بع ګراف چې د $f(x) = a$ په وا سطه تعريف شوی دی.



۲. مثال: د $f(x) = x$ عينيت تابع ګراف.



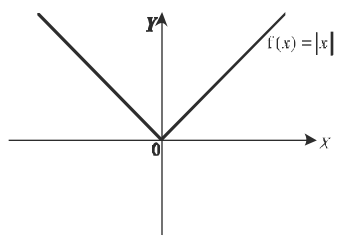
۳. مثال: د $f(x) = |x|$ تا بع ګراف رسم کړئ.

حل: د تعريف پر بنسټ د $f(x) = |x|$ ګراف د $y = |x|$ معادلې ګراف دی يا په معادل ډول

که چېرې $x \geq 0$، $y = x$

که چېرې $x < 0$، $y = -x$

د $x \geq 0$ لپاره ګراف د $y = x$ خط سره او د $x < 0$ لپاره ګراف د $y = -x$ خط سره برابرېږي.



۴. مثال: د $[x]$ ګراف رسم کړئ چېرې چې $[x]$ بشپړتام معنی ورکوي لوي د x څخه ندی.

په څرګند ډول کله چې $0 \leq x < 1$ نو $y = 0$.

پدې ډول، $[0] = [0.1] = 0 .... [0.999] = 0$ او داسې نور. خو کله چې $x = 1$ نو $y = [1] = 1$

څکه نو ګراف يو ناڅاپه پورته کېږي (يا خيزوهي).

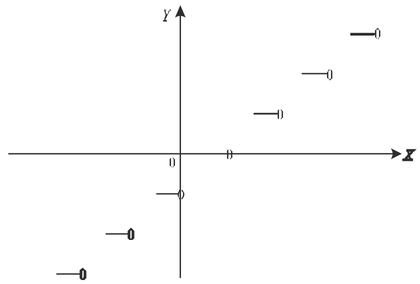
همدارنګه کله چې، $1 \leq x < 2$، نو $y = 1$.

پدې ډول $[1] = 1, [1.1] = 1, \cdots [1.999] = 1$ اوداسې نور.

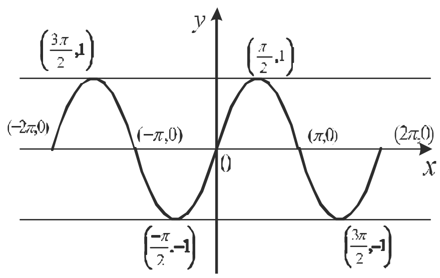
خو، کله چې $x = 2$، نو $y = [2] = 2$.

نو، پدې ځای کې ګراف هم جمپ ياخيز وهي.

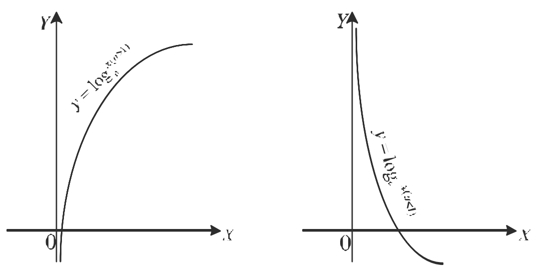
نو ، پدې وخت کې د x په بشپړ قېمتونو خيزونه شتون لري.



۵. مثال: د $f(x)=\sin x$ گراف رسم کړئ؟



۶. مثال: $f(x)=\log_a^x$ گراف رسم کړئ.



۲,۱ پوښتنې

۱. لاندې افادې د مطلقه قیمت (modulus) په علامو کې څرګندې کړئ.

$(i)\quad -3<x<7$ $\qquad\qquad (ii)\quad 1-\varepsilon<f(a)<1+\varepsilon$

۲. ثبوت کړئ چې

$\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$ ، $a,b\subset R$ ټولو لپاره

۳. وښایاست چې د $\{x / x^2 < 2\}$ سټ کوچنی پورتنی (فو قاني) برید یا سد، $\sqrt{2}$ دی.
۴. ثبوت کړئ چي $\sqrt{3}$یو ناطق عدد دی.
۵. دلاندې سټونو پورتنی سر حد (supremum) او لاندېنی سرحد (infimum) وټاکئ.

$(i)\quad \left\{\frac{2n+2}{2n+1},\quad n \in N\right\}$

$(ii)\quad \{x| -5 < x < 3\}$

$(iii)\quad \{x| x = (-1)^n \cdot n,\quad n \in N\}$

۶. که چېرې $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، و ښایاست چې $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{x-1}{x+1}$.

۷. د لاندې تا بعګانو لپاره د تعریف ساحې وټاکئ.

$(i)\quad f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$(ii)\quad f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$(iii)\quad f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

۸. د لاندې تا بعګانو ګرافونه رسم کړي.

$(i)\quad f(x) = |x| + |x-1|$ ، $x \in R$ لپاره

$(ii)\quad f(x) = x - [x]$ ، $x \in [-3,3]$

$(iii)\quad f(x) = \frac{1}{x}$ ، که چېرې $x < 0$

$f(x) = -\frac{1}{x}$ ، که چېرې $x > 0$

$(vi)\quad f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$

$(v)\quad f(x) = x+2$ ، $x \neq 2$

$= 6$, $x = 2$

$(vi)\quad f(x) = 1$ ، $x \leq 2$

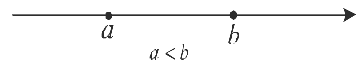
$= x+2$ ، $x > 0$

۱,۳,۱ الف. نامساواتونه

تعریف:

که چېرې a او b حقیقي عددونه وي، نو د $a < b$ معنی دا ده چې $b - a$ مثبت دی.
د $a \leq b$ معنی دا ده چې $a < b$ یا $a = b$ دی.

د $a < b$ نا مساوات، داسي لوستل کېږي چې a د b نه کو چنی دی. همدارنګه د $a < b$ پشان لیکل کېدای شي، کوم چې دارنګه لوستل کېږي: b د a نه لوی دی.



[1]

په هندسي ډول، د $a < b$ نامساوات دا په ډاګه کوي چې b دمختصاتو په خط باندي د a ښي خواته پرته دی. په ورته ډول $a \leq b$ داسي لوستل کېږي چې a کوچنی یا مساوي د b سره دی. همدارنګه د $b \geq a$ په شان لیکل کېدای شي، چې b لوی یا مساوي د a سره دی لوستل کېږي.

د بېلګې په توګه $7 < 2$، $2 < 7-$ ، $3 \geq 8$ او $5 \geq 5$ صحیح نا مساوا تونه دي.
دa عدد غېرمنفي ده که چېرې $a \geq 0$ وي او غېر مثبت ده که چېرې $a \leq 0$.

یادونه: که چېرې b, a او c حقیقي عددونه وي مونږ لیکلای شو چې
$a < b < c$ کله چې $a < b$ او $b < c$.
د نا مسا واتونو لاندېني خاصیتونه په کلکو لس کې خورا زیاد کارول کېږي.
د ریاضي ساده قوانینو په کارولو مونږ هغه ثبوت کولی شو.

۱. ۳. ۱ ب. دعوی

د d, c, b, a حقیقي عددونو لپاره

۱. که چېرې $a < b$ او $b < c$ نو $a < c$
۲. که چېرې $a < b$ او c یو حقیقي عدد وي نو $a + c < b + c$.
۳. که چېرې $a < b$ او $c < d$ نو $a + c < b + d$.
٤. که چېرې $a < b$ او $c > 0$ نو $ac < bc$.
٥. که چېرې $a < b$ او $c < 0$ نو $ac > bc$.
٦. که چېرې $0 < a < b$ نو $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.
٧. که چېرې $0 < a < b$ او $0 < c < d$ نو $ac < bd$.
٨. که چېرې $0 < a < b$ او n یو مثبت تام عدددي نو $a^n < b^n$.
٩. که چېرې $0 < a < b$ او n یو مثبت تام عدددي نو $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

۱. یادونه: د $a > 0$ معنی دا ده چې a یو مثبت عدد دی او $a < 0$ معنی دا ده چې a یو منفي عدد دي.

۲. یادونه: ىیو عدد چې دهغه مربع a وي ویل کېږي چې د a مر بع یوجذردی. په الجبر کې دا مو زده کړي دي چې هر غیري منفي عدد په حقیقت کې یو غېرې منفي جذر لري مونږ دغه مربع جذر د $\sqrt{a}$ پواسطه ښیو. د بېلګې په ډول، 9 عدد دوه مربع جذرونه لري 3– او 3. څرنګه چې 3 غېرې منفي مربع جذر دي ، نو مو نږ لرو.

$$\sqrt{9} = 3$$

پدې ځای کې یوه عمومي غلطي د $\sqrt{a^2}=a$ په لیکلو کې شتون لري، که څه هم دغه مساوات صحیح دی کله چې a نا منفي وي، دا دمنفي a لپاره غلط دی.

دبېلګې په ډول که چېرې $a=-4$ نو

$$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-4)}=\sqrt{16}=4\neq a$$

هغه یوه پایله چې د ټولو a ګڼو لپاره سمه ده په لاندې دعوی کې راکړل شوې ده.

۱. ۳. ۱. ج. دعوی

د a هر حقیقي عددلپاره

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

ثبوت: څرنګه چې $a^2=(+a)^2=(-a)^2$، د $+a$ او $-a$ عددونه، a^2 مربع جذرونه دي، که چېرې $a\geq0$، نو $+a$ د a^2 نامنفي مربع جذر دی او که چېرې $a<0$، نو $-a$ د a^2 غېرې منفي مربع جذر دی، څرنګه چې $\sqrt{a^2}$ د a^2 په غېرې منفي مربع جذردلالت کوي ، مونږ لرو چې

$\sqrt{a^2}=+a$، که چېرې $a\geq0$

$\sqrt{a^2}=-a$، که چېرې $a<0$

کوم چې $\sqrt{a^2}=|a|$ دی.

نوټ: د a یو عدد مطلقه قیمت په هندسي ډول د مختصاتو په یو خط باندې له مبدا څخه د واټن په مفهوم دی. د بېلګې په ډول، که چېرې $|a|=3$، نو a د 3 واحدو په واټن له مبدا څخه واقع دی، کوم چې $a=3$ یا $a=-3$ دی.

لاندې پایله به په راتلونکو برخو کې ډېره ارزښتناکه وي.

۱. ۳. ۱. د. دعوی

د x او a هر حقیقي عدد اود k هر مثبت عدد لپاره

۱. $|x-a|<k$ که چېرې یواځې او تنها یواځې $a-k<x<a+k$.

۲. $|x|<k$ که چېرې یواځې اوتنها یواځې $-k<x<k$.

ثبوت:

فرض کړئ چې $|x-a|<k$

پدې پورې اړوند چې $x-a$ یا مثبت یا منفي دی د $|x-a|<k$ نا مساوات کېدای شي چې لکه د $x-a<k$ یا $-(x-a)<k$ په ډول ولیکل شي.

د $x-a<k$ څخه

$$x<k+a \qquad \ldots..(۱)$$

د $-(x-a)<k$ څخه

$$-x+a<k$$

یعنی

$$x-a>-k$$

$$a-k<x \quad \text{یا} \quad x>a-k \qquad \ldots..(۲)$$

د(۱) او (۲) رابطو څخه

$$a-k<x<a+k$$

په معکوس ډول فرض کړي چې $a-k<x<a+k$

$$\therefore \quad a-k<x$$
$$a-x<k$$

یا

$$-(x-a)<k \qquad \ldots..(۳)$$

د $x<a+k$ څخه

$$x-a<k \qquad \ldots..(۴)$$

د (۳) او (۴) څخه په لاس راوړو چې

$$|x-a|<k$$

د (ii) ثبوت لپار ه په (i) کي فقط $a=0$ ونیکئ.

۱. ۳. ۲ ه. حل شوي مثالونه

۱. مثال: $(x+2)(x-5)>0$ حل کړي.

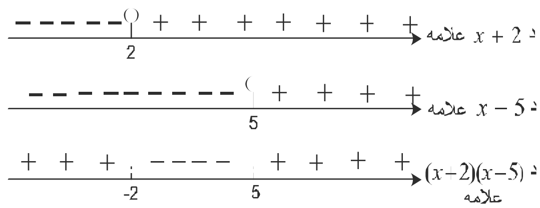
حل: حلونه د x هغه قېمتو نه دي د کومو لپاره چې د $x+2$ او $x-5$ فکتورونه یو شا نته علامي لري.

که چېرې $x+2>0$ او $x-5>0$ نو $x>5$.

که چېرې $x+2<0$ او $x-5<0$ نو $x<-2$.

په دې صورت کې د حل سټ $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$ دی.

په هندسي ډول



۲. مثال: د $1 \le \frac{4}{2-x}$ نا مساوات حل کړئ.

حل:

$$\frac{4}{2-x}\le 1$$

$$\frac{4}{2-x}-1\le 0$$

یا

$$\frac{2+x}{2-x}\le 0$$

ځرنګه چې $x+2$ او $2-x$ مخالفې علامې لري.

که چېرې $2+x<0$ او $2-x<0$

$2<x$ او $x>-2$

$x>-2$

که چېرې $2+x<0$ او $x-2>0$

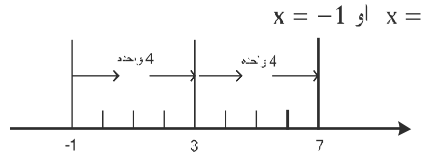
$2>x$ او $x<-2$

$x<-2$

پدې ډول د حل سټ $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ دی.

۳. مثال: $|x-4|=4$ حل کړئ.

حل: (په هندسي حل) په هندسي حل کې x ټول شاملېږي چې 4 واحده د 3 نقطې څخه لرې وي. پدې برخه کې د x دوه بوله قیمتونه دي $x=7$ او $x=-1$



الجبري حل:

په دي اړوند چي $x - 3$ مثبت يا منفي دی د $|x-3| = 4$ معادله کېدای شي چي د

$$-(x-3) = 4 \quad \text{يا} \quad -(x-3) = 4$$

پشان و ليکل شي.

ددواړو معادلو د حل کولو څخه لاسته راوړو چي

$$x = -1 \quad \text{او} \quad x = 7$$

کوم چي دهندسي لاسته راغلي حل سره ورته دی.

۴. مثال: د x لپاره $|5-2x| \geq 4$ حل کړئ.

حل: په دې اړوند چي $5 - 2x$ يا مثبت يا منفي دی، راکړل شوی نا مساوات معادل دی له $5-2x \geq 4$ يا $-(5-2x) \geq 4$ سره.

که چېري

$$5-2x \geq 4$$
$$-2x \geq 1-$$
$$x \leq \frac{1}{2} \quad \text{يا} \quad 2x \leq 1$$

که چېري

$$-(5-2x \leq 4$$
$$-5+2x \geq 4 \qquad\qquad 2x \leq 1$$
$$x \leq \frac{9}{2} \quad \text{يا} \quad 2x \geq 9$$

په دي صورت کي د حل سټ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, -\infty\right)$ دی.

۱. ۲ الف. پوښتنې

۱. کوم يودلاندېنيو نامساواتونوڅخه هروخت صحيح دي که چېري $a \leq b$؟

(a) $a-3 \leq b-3$ (ځواب صحيح دی)

(b) $-a \leq -b$ (ځواب غلط دی)

(c) $3-a \leq 3-b$ (ځوا ب غلط دی)

(d) $6a \leq 6b$ (ځواب صحيح دی)

(e) $a^2 \leq ab$ (ځوا ب غلط دی)

(f) $a^3 \le a^2 b$ (ځوا ب صحیح دی)

۲. لاندې نامساوا تونه حل کړئ.

(a) $4+5x \le 3x-7$ (ځواب : $(-\infty,-\frac{11}{2})$)

(b) $3 \le 4-2x < 7$ (ځواب : $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$)

(c) $\frac{x}{x-3} < 4$ (ځواب : $(-\infty,3)\cup(4,-\infty)$)

(d) $\frac{3x+1}{x-2} < 1$ (ځواب: $(-\frac{3}{2},-2)$)

(e) $x^2-9x+20 \le 0$ (ځواب: $[4,5]$)

(f) $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$ (ځواب: $(-8,0)\cup(4,+\infty)$)

۳. لاندې نامساواتونه ددې فرضیې پر بنسټ چې ټول د بحث وړمتحولونه مثبت دي ثبوت کړئ. هغه شرطونه څرګند کړئ ترکومو لاندې چې د مساوات علامه شتون پیدا کوي.

(a) $a+\frac{1}{a} \ge 2$ (ځواب: $a = 1$)

(b) $(c+d)^2 \ge 4cd$ (ځواب: $c = d$)

(c) $(a+5b)(a-2b) \ge 9b(a-b)$ (ځواب: $a = b$)

(d) $\frac{a+3b}{3b} \ge \frac{4a}{a+3b}$ (ځواب: $a = 3b$)

۴. د جدولونو د کارولو څخه په غیر، ثبوت کړئ چې

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{6} < \sqrt{3}+\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{19}+\sqrt{21} > \sqrt{17}+\sqrt{23}$

(c) $\sqrt[3]{23} > 2\sqrt{2}$

۵. لاندې معادلې د x لپاره حل کړئ.

(a) $|6x-2| = 7$ (ځواب: $-\frac{5}{6}, \frac{3}{2}$)

(b) $|6x-7| = |3+2x|$ (ځواب: $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$)

(c) $|9x|-11 = x$ (ځواب: $\frac{11}{10}, \frac{11}{8}$)

(d) $\left|\frac{x-5}{2-x}\right| = 6$ (ځواب: $1, \frac{17}{5}$)

٦. لاندې معادلې د x لپاره حل کړئ.

$(a)\quad |x+6|<3$ (ځواب: $(-9,-3)$)

$(b)\quad |5-2x|\ge 4$ (ځواب: $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{9}{2},+8)$)

$(c)\quad \left|\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|<1$ (ځواب: $(0,+\infty)$)

$(d)\quad |x+3|<|x-8|$ (ځواب: $(-\infty,\frac{5}{2})$)

٧. که چېرې a, b, c او d مثبت عددونه وي دارنګه چې $a<b$ او $c<d$، نو ثبوت کړئ چې $ac<bd$.

۱. ۴. ۱ د یوې تابع لېمټ

لېمټونه دیوې تابع دځانګړتیاوو(مسلکونو، عادتونو) د روښانولو لپاره چې څرنګه دیو مستقل متحول په توګه دیوټاکلی قیمت په شاوخوا خوځښت کوي(ځای بدلوي) کارول کیږي. دموخې د رو ښانه کولو لپاره، د $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ تا بع په پام کې نیسو، چېرې چې x په رادیان سره دی که څه هم دا تا بع په $x=0$ کې نه تعریف کیږي، خو بیا هم دا د دې پوښتنې کولو یو احساس رامنځته کوي چې د $f(x)$ په قېمتونو څه پېښیږي ، چې کله x د x د محور په اوږدو کې د $x=0$ په شاوخوا کې حرکت کوي. دغې پوښتنې ته دځوا ب ورکولو لپاره، مو نږ د حساب ماشین څخه ګټه اخلو چې د x قېمتونه د x محور په اوږدو کې د $x=0$ په شاوخوا کې دنقطو یو پرله پسې بدلونونه لاسته راوړو. د پایلو څخه دا جوتیږي چې $f(x)$ قېمتونه 1 ته تقرب کوي. مونږ دیو عدد ته د $\frac{\sin x}{x}$ کله چې **x** صفر ته تقرب وکړي لېمټ وایو اومونږ لیکو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

باید یادونه وکړوچې د یوې تابع لېمټ لکه چې مستقل متحول یو نقطې ته نژدې کیږي، په هاغې نقطه کې د تا بع قېمت پورې اړه نلري.

۱. ۴. ۲ تعریف

فرض کوو چې $f(x)$ د هر x لپاره په یو خلاص انتروال کې په کوم کې چې د a عدد پکښې شا مل وي تعریف شوې ده، د ځانګړتیا په پام کې نیولو سره چې ممکن $f(x)$ د a په نقطه کې تعریف شویده او یا نه ده. مونږ وایو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

که چېرې د $\varepsilon > 0$ راکړل شوی عدد لپاره ، موږ یو عدد $\delta > 0$ پیدا کړو.
$|f(x) - l| < \varepsilon$ کله چې $0 < |x - a| < \delta$.

یو اړخيز لېمټونه: کله چې x د هغو قېمتونو په مینځ کې چې له a څخه لوی دي a ته نږدې کېږي (تقرب وکړي)،پدی ترڅ کی x د ښي خوانه a ته نژدې شوی دی اودا داسې لیکل کېږي$x \to a + 0$. په ورته ډول که چېرې x دهغو قېمتونوپه مینځ کې چې له a څخه کوچني وي$x \to a$، پدې ترڅ کې موږ وایوچی x له کېڼې خوانه a ته نږدې شوی دی اودا داسې لیکل کېږي $x \to a - 0$.

دښي اړخ لېمټ: ویل کېږي چې د f (x) تا بع د ښي خوا لېمټ l_1 لري کله چې x د هغو قېمتونو په مینځ کې چې د a څخه لوی وي a ته نږدې کېږي$(x \to a + 0)$ که چېرې دهر $\varepsilon > 0$ لپاره یوه $\delta > 0$ شتون ولري داسې چې
$|f(x) - l_1| < \varepsilon$ کله چې $a < x \leq a + \delta$.
دغه لېمټ د

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l_1 = f(a + 0)$$

پواسطه ښودل کېږي

د کېڼ اړخ لېمټ: ویل کېږي د f (x) تا بع ته د کېڼ اړخ لېمټ l_2 لري کله چې a ته x د x د هغو قېمتونو په مینځ کې چې د a څخه کوچني وي a ته نږدې کېږي ($x \to a - 0$) که چېرې هر $\varepsilon > 0$لپاره یوه$\delta > 0$ شتون ولري داسې چې $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ کله چې $a - \delta \leq x < a$ ؟
دغه لېمټ د:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l_1 = f(a - 0)$$

دا روښانه ده چې f(x) به د l لېمټ ولري کله چې $x \to a$ ،که چېرې یواځې او تنهایواځې د ښي اړخ او کېڼ اړخ لېمټونه شتون ولري او مسا وي وي، یعنې

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال: ثبوت کړئ چې $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

حل: فرض کړئ چې $\varepsilon > 0$ راکړل شویدی، موږ غواړو چې $\delta > 0$ لاسته راوړو دارنگه چې که چېرې
$|f(x) - 5| < \varepsilon$ نو $0 < |x - 3| < \varepsilon$
اوس

$$|f(x)-5| = |2x-1-5| = |2x-6|$$
$$= 2|x-3|$$

دا به تر ε کوچنی وي که چېرې $2|x-3|<\varepsilon$ یا $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$.

لدې امله $|f(x)-5|<\varepsilon$ که چېرې $0<|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

د $\varepsilon>0$ په فرضولو مونږ لاسته راوړو چې $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

لدې امله $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$

۱. ۴. ۳ دعوی: (د لیمټ ځانګړتیوب):

که چېرې د $\lim_{x\to a} f(x)$ شتون ولري، نو ځانګړی دی.

ثبوت: که چېرې دا شوني وي چې $\lim_{x\to a} f(x)=A$ او $\lim_{x\to a} f(x)=B$ چېرته چې $A\neq B$ اوله دې سببه $|A-B|\neq 0$.

$\varepsilon=\frac{1}{3}|A-B|>0$ و ټاکې.

نود لیمټ دتعریف پربنسټ، د $\varepsilon>0$ په مطابق د $\delta_1>0$ او $\delta_2>0$ دوه حقیقي عددونه شتون لري دارنګه چې:

$|f(x)-A|<\varepsilon$ کله چې $0<|x-a|<\delta_1$

او $|f(x)-b|<\varepsilon$ کله چې $0<|x-a|<\delta_2$

لاسته را ځي.

فرض کړئ چې $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

نو په ښکاره ډول $|f(x)-A|<\varepsilon$ او $|f(x)-B|<\varepsilon$ کله چې $0<|x-a|<\delta$

اوس د $0<|x-a|<\delta$ لپاره لرو چې

$$|A-B| = |A-f(x)+f(x)-B| \le |A-f(x)|+|f(x)-B| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|A-B|$$

په پایله کې د $0<|x-a|<\delta$ لپاره $|A-B|<\frac{2}{3}|A-B|$ کېږي. دا بې معنی ده. ځکه نو د $A\neq B$ فرضیه صحت نه لري. په نتیجه کې $A=B$.

ځکه نو که چېرې $\lim_{x\to a} f(x)$ شتون ولري، نو دا ځانګړی دی.

د لیمټونو بنسټیزې ځانګړتیاوې په لاندېنې دعوی کې راکړل شوي دي کېداې شي چې د ستونزمنو مسا ئلو په حل کې وکارول شي.

۱. ۴. ۳ دعوی:

راځي چې د lim $\lim_{x\to a}$، $\lim_{x\to -0}$، $\lim_{x\to +0}$، $\lim_{x\to +\infty}$ یا $\lim_{x\to -\infty}$ لیمټونو په حیث قبول کړو.

که چېرې $L = \lim f(x)$ او $L_2 = \lim g(x)$ ، نو.

$$(a) \qquad \lim[c\,f(x)] = c\lim f(x) = cL$$

$$(b) \qquad \lim[f(x)+g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = L_1 + L_2$$

$$(c) \qquad \lim[f(x)-g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = L_1 - L_2$$

$$(d) \qquad \lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$(e) \qquad \lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \qquad L_2 \neq 0.$$

$$(f) \qquad \lim\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

$L_1 > 0$ که چېرې n جفت وي .

په بل عبارت دا دعوی مو نږ ته وايي چې:

a) يو ثابت فکتور کو لی شود لیمټ علامی له مینځ څخه راوباسو.
b) د يوې مجموعي لیمټ د لیمټونو مجموعه ده.
c) د يوتفا ضل لیمټ د لیمټونو تفا ضل دی.
d) د يو ضرب دحاصل لیمټ د لیمټونودضرب حا صل دی.
e) د يو حا صل تقسيم لیمټ د لیمټونو حا صل تقسيم دی پدې شرط چې د مخرج لیمټ صفر نه وي.
f) د يو n- ام جذر لیمټ د لیمټ n - ام جذر دی.

يادونه: که څه هم چې د (b) او (c) پايلې د f او g دوه تا بع ګانو د حالت لپاره بيان شوې دي، دغه پايلې هرشمېر تا بع ګانو لپاره په ښه دول صحت لري.

سندويچ (Sandwiching) دعوی: فرض کړئ چې h, g,f تا بع ګانې د $0 < |x-a| < k$ په انتروال کې تعريف شوې دي.

که چېرې په دی انتروال کې $f(x) \le g(x) \le h(x)$ او

$$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$$

وي ، نو

$$\lim_{x\to a} g(x) = l$$

دغه پايلې بنسټيز ارزښت لري خو ددوی څرګند ثبوتونه ددې کتا ب د موخو څخه ندي.

۱ . ۴ . ۴ نامعين لیمټونه او په نا متناهي کې لیمټونه

مو نږ وا يو چې

i. $x \to \infty$ ، که چېرې x بې له کوم محدوديت څخه ډېرښت (تزايد) ومومي.

.ii $x \to -\infty$ که چېرې x منفي وي او $|x|$ بې له کوم محدودیت څخه ډېرښت مومي.

.iii $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$، که چېرې د هر $\varepsilon>0$ په مقابل کې، د $k>0$ یو حقیقي عدد شتون ولري دارنګه هغه د ټولو $x<k$ لپاره $|f(x)-l|<\varepsilon$.

.iv $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$، که چېرې چې د هر $\varepsilon>0$ په مقابل کې، د $k<0$ یو حقیقي عدد شتون ولري دارنګه هغه د ټولو $x<k$ لپاره $|f(x)-l|<\varepsilon$.

.v $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$، که چېرې د k (که لوی هم وي) هر مثبت عدد په مقابل کې، د $\delta>0$ یو حقیقي عدد شتون ولري چې له کبله یې هرکله چې $0<|x-a|<\delta$، $f(x)<k$ کیږي.

.vi $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$، که چېرې د k هر منفي عدد په مقابل کې، د $\delta>0$ یو حقیقي عدد شتون ولري چې له کبله هر کله چې $0<|x-a|<\delta$ وي $f(x)<k$ کیږي.

.vii $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$، که چېرې د $m>0$ هر حقیقي عدد په مقابل کې، د $n>0$ یو حقیقي عدد شتون ولري څو چې هرد ټولو $x>n$ لپاره $f(x)>m$ شي.

مثال: وښایاست چې $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$

حل: که چیرې k یو اختیاري ټاکل شوی مثبت عدد وي داسې چې $f(x)>k$، نو

$$f(x)>k \Rightarrow \frac{1}{x^3}>k$$
$$\Rightarrow x^3<\frac{1}{k}$$
$$\Rightarrow x<\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$$

او س که چېرې مونږ $\delta=\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$ و ټا کو، نو k اختیاري ټا کل شوي مثبت عدد لپاره، د $\delta>0$ یو عدد شتون لري دارنګه چې هغه $f(x)>k$ کله چې $|x-0|<\delta$.

لدې امله د تعریف په بنسټ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$.

۱. ۴. ۵ ځيني مهم لیمټونه

۱. $\lim\limits_{n\to a}(1+\frac{1}{n})^n$ چېرې چې n يو مثبت تا م عدد دی.

فرض کړئ چې

$$S_n=(1+\frac{1}{n})^n$$
$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+.....+\frac{n(n-1)n-2)........1}{1\cdot 2\cdot 3......n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

د مثبت تا م اند کس لپاره د بينو ميل د دعوی په واسطه

$$=1+1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$
$$+....+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3...n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{2}{n}).......+(1-\frac{n-1}{n})$$

هغه چې د n + 1 مثبت حدونو مجموعه ده.

$$S_{n+1}=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$$
$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}(1-\frac{1}{n-1})+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{2}{n+1})$$
$$+.......+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3.........(n+1)}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n-1}).........(1-\frac{n}{n+1})$$

هغه چې د n + 2 مثبت حدونو مجموعه ده.

ځرنګه چې $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$, $1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$، ..... او داسې نور. لدې څخه ځرګندیږي چې د S_{n+1} په توسعه کې هر حد په S_n کې تر اړونده حده لوی دی. پدې ډول د n هر مثبت تام قیمت لپاره $S_{n+1}>S_n$. لدې امله S_n يو نو اخته متزايده سلسله ده. اوس مو نږ ښيو (ښاو) چې S_n محدوده ده.

$$S_n=(1-\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+........$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3.........n}(1-\frac{1}{n})(1-(\frac{2}{n}).........(1-\frac{n-1}{n})<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+......+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3.........n}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+..........+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

په دې ډول 3 د S_n لپاره یو پورتنی سرحد دی. مونږ ولیدل چې S_n په یونواخته ډول ډیرښت مومي او پورته خوا نه محدوده ده او، لدې امله دا کو چني پورتنی سرحد لري. پدې ډول کو چني پورتنی سرحد تر 3 کو چني او تر 2 لوی دی او e پواسطه ښودل کیږي. په پایله کې

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \quad .۲$$

x کله چې لایتناهي ته نږدې کیږي کسري یا منفي قیمتونه واخلي.

لومړی حالت: فرض کړي چې $x\to+\infty$ ، څنګه چې x مثبت دی، پدی برخه کی د n یو مثبت تام عدد دارنګه شتون لري چې

$$n\le x<n+1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$$

یا

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

یا

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}\ge(1+\frac{1}{x})^{x}>(1+\frac{1}{n+1})^{n}$$

که چیرې $x\to\infty$ ، دا څرګنده ده چې $n\to\infty$

اوس

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}(1+\frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e$$

او

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})}\right)$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})}=\frac{e}{1}=e$$

د سندویچ دعوی په بنسټ

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

دویم حالت: فرض کړي چې $x = -(t+1)$ چې له دې امله د $t\to+\infty$ په شانتي $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{t+1}{t})^{t+1} = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{t})^t(1-\frac{1}{t})\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{t})^t \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{t}) = e\cdot 1 = e$$

له دې امله

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

۳. $\lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

فرض کړئ چې $z = \frac{1}{x}$

پدې دول کله چې $z\to0$, نو $x\to\infty$.

$$\therefore\quad \lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

۴. $\lim_{z\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

فرض کړئ چې $a^x-1=y$ کله چې $x\to0$ نو $y\to0$ او $a^x = 1+y$

$$x\log a = \log(1+y) \to x = \frac{\log(1-y)}{\log a}$$

له دې کبله

$$\therefore\quad \frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{(\frac{1}{\log a})\log(1+y)} = \frac{y\log a}{\log(1-y)}$$

$$= \frac{\log a}{\frac{1}{y}\log(1+y)} = \frac{\log a}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\left(\log a\cdot\frac{1}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}\right)$$

$$=\log a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\log a\frac{1}{\log e}$$

$$=\log_e^a=\ln a$$

۵. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

۶. $\lim\limits_{n\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\cdot a^{n-1}$

زده کوونکي ددغودوولیمتونو د ثبوت سره اشنا دي.

۱. ۴. ۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال: ثبوت کړئ چې $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

حل:

$$|f(x)-\cos a|=|\cos x-\cos a|$$

$$=\left|-2\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$=|-2|\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{x-a}{2}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|$$

$$<2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right| \quad \left|\because\ |\sin x|<x\right.$$

$$=|x-a|$$

له دې امله $\varepsilon > \left| f(x) - \cos a \right|$ کیږي که چیرې $0 < \left| x - a \right| < \varepsilon = \delta$

$$\therefore \quad \varepsilon = \delta$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

۲. مثال: د $\lim_{x \to 2} f(x)$ پیدا کړئ که چیرې

$$f(x) = x + 1 ، \quad x \le 2$$
$$= 2x - 3 ، \quad x > 2$$

حل:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2} (x+1) = 2 + 1 = 3$$

او

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x+3) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

څرنګه چې $\lim_{x \to 2-0} f(x) \neq \lim_{x \to 2-0} f(x)$, نو $\lim_{x \to 2} f(x)$ شتون نه لري.

۳. مثال: که چیرې $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ ، ددې لیمټ کله چې $x \to 1$ کړی وي پیدا کړئ.

حل: کېڼي خوا لیمټ

$$L.H. \lim = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2^{\frac{1}{1-h-1}} = \lim_{h \to 0} 2^{-\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2^{1/h}} = 0$$

او ښي خوا لیمټ

$$R.H. \lim = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{h \to 0} 2^{\frac{1}{1+h-1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2^{\frac{1}{h}} = \infty$$

لدې امله f(x) څه وخت چې $x \to 1$ لیمټ نلري.

۴. مثال: د $\lim_{x \to \infty} = (1 + \frac{2}{x})^x$ وټاکئ.

حل:

$$\lim_{x \to \infty} = (1 + \frac{2}{x})^x$$

$$= \lim_{x \to \infty} = (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right]^2$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

۵. مثال: د $\lim_{x\to 1+0}\frac{x^{2}-1}{\sqrt{x^{2}-1}}$ وټاکئ.

حل:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^{2}-1}{\sqrt{x^{2}-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2}-1}{\sqrt{(1+h)^{2}-1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h-h^{2}}{\sqrt{2h+^{2}}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{2h+h^{2}}=0$$

۶. مثال: فرض کړئ چي $f(x)=x^{2}-1$ كه چېرې $x\leq 2$

$=\sqrt{x+7}$ كه چېرې $x>2$

د $\lim_{x\to 2}f(x)$ وټاکئ.

حل: د کيڼي خوا لېمټ

$$L.H.\ \lim=\lim_{x\to 2-0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^{2}-1)=4-1=3$$

او ښي خوا لېمټ

$$R.H.\ \lim=\lim_{x\to 2+0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=3$$

ځکه نو

$$\lim_{x\to 2}f(x)=3$$

۷. مثال: فرض کړئ چي

$$f(x)=x+2 \qquad ، x\leq -1$$

$$=ax^{2} \qquad ، x>-1$$

a دارنګه لاسته راوړئ چي د $\lim_{x\to -1}f(x)$ شتون ولري.

حل:

$$\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+2)=-1+2=1$$

او

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} ax^2 = a(-1)^2 = a$$

څرنګه چې د $\lim_{x \to -1} f(x)$ شتون لري، مونږ لرو چې

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x)$$

$$\therefore \quad a = 1$$

۳,۱ پوښتنې

۱. د لاندې لیمټونو قیمت وټاکي.

$(i)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

$(ii)\quad \lim_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$

$(iii)\quad \lim_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^2} \right]$

$(iv)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

$(v)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

$(vi)\quad \lim_{x \to 0} (x \sin \dfrac{1}{x})$

$(vii)\quad \lim_{x \to \pi} \dfrac{tag(\sin x)}{\sin x}$

$(viii)\quad \lim_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$

$(ix)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

$(x)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} tag \dfrac{x}{2}$

۲. د لاندې لیمټونو قیمت وټاکئ.

$(i)\quad \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}$

$(ii)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$

$(iii)\quad \lim_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$

$(iv)\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

$(v)\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{a^2-1}{x}$

$(vi)\quad \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x} \right)^x$

$(vii)\quad \lim_{x \to \infty} (1 - \dfrac{1}{x})^x$

$(viii)\quad \lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$

$(ix)\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^{3/2}}$

$(x)\quad \lim_{x \to \infty} \left[\dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{x+5} \right]$

۳. د لاندې لیمټونو قیمت وټاکئ.

(i) $\lim_{x\to 2-0} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$ (ii) $\lim_{x\to 1-0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$

۴. (i) فرض کړئ چې $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ ، $f(2-0)$ او $f(2+0)$ پیدا کړئ.

(ii) فرض کړئ چې

$$f(x) = 1-x\,،\quad x>0$$
$$= 1\,،\quad x=0$$
$$= 1-x\,،\quad x<0$$

lim f(x) پیدا کړئ کله چې $x\to 0$.

(iii) فرض کړئ چې

$$f(x)=\sin x\,،\quad x\le 0$$
$$= x-1\,،\quad x>0$$

lim f(x) پیدا کړئ کله چې $x\to 0$..

۵. (i) فرض کړئ چې

$$f(x)=2x+3\,،\quad 0<x<2$$
$$= cx\,،\quad x\ge 0$$

د c قیمت پیدا کړئ که چیرې د f(x) لیمټ کله چې $x\to 2$ وي شتون ولري.

(ii) د f(x) قیمت وټاکئ که چیرې

$$f(x)=\cos x,\quad x\le 0$$
$$=1-x,\quad x>0$$

(iii) فرض کړئ چې

$$f(x)=x^2,\quad x\le 1$$
$$=x^2,\quad x>1$$

د f(x) لیمټ پیدا کړئ کله چې $x\to 1$.

(iv) د f(x) لیمټ پیدا کړئ کله چې

$$f(x)=\sqrt{x^2-1},\quad x\le 2$$

$$= \sqrt{x+7}, \qquad x > 2$$

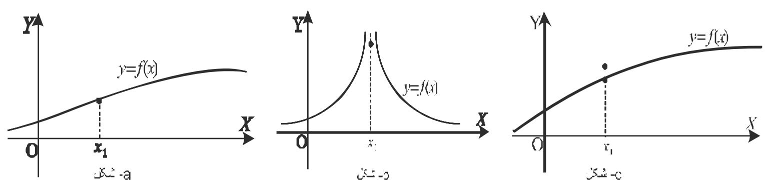
(v) فرض کړئ چې

$$f(x) = 3 \text{ ،} \qquad x \le -2$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 \text{ ،} \qquad -2 < x < 2$$
$$= 3 \text{ ،} \qquad \text{،} \qquad x \ge 2$$

$f(-2-0)$, $f(-2+0)$, $f(2-0)$ او $f(2-0)$ لاسته راوړئ.

۱. ۵. ۱ متماديت

يو متحرک فزيکي شی چې په ځينو نقطو کې له منځه نه ځي او په ځينو نورو ځايونو کې ځرګندېږي چې خپل حرکت نه دوام ورکړي. ځکه نو موږ وينو چې ديو متحرک شي مسير يو ځانګړی، غېرمتقاطع منحني، په بی له خاليګاو، يا په غېر له سوريو ځخه دی. دارنګه منحني ګا نو ته متمادي منحني ګان ويلای شو. مخکی مونږ يوځرګند تعريف په ګوته کړ، ځينې کرنلارې په پام کې نيسو په کومو کې چې منحنيات غيرمتما دي دي.



کوم منحني ګان چې په پورته شکل کی ښودل شويدي په $x = x_1$ کې غېرې متمادي دي د (a) په شکل کې منحني د x_1 په نقطه کې يوسوری لري ځکه نو د $f(x)$ تابع په هغه کې نه تعريفېږي. د (b) په شکل کې تا بع په x_1 کې تعريفېږي خو د $f(x)$ لېمټ شتون نلري. ددی علت پواسطه په ګراف کې يو سوری يا واټن رامنځته کېږي.

د c شکل لپاره، د $f(x)$ تابع په x_1 کې تعريف شويده او $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ شتون لري خو بيا هم ګراف د x_1 په نقطه کې توپه والی (شکستګي) لري ځکه نو

$$\lim_{x\to x_1} f(x) \neq f(x_1).$$

ددې بحث پر بنسټ، مو نږ وليدل چې د $y = f(x)$ تابع ګراف يو توپه والی يا نه پرله پسې والی لري که چېرې د لاندېنيو شرطونو نه کوم يو پېښ شي:

(i) د $f(x)$ تا بع د x_1 په نقطه کې تعريف شوې نه وي.

(ii) د $\lim_{x \to x_1} f(x)$ شتون ونه لري.

(iii) د f(x) تابع د x_1 په نقطه کې تعریف شوی وي او $\lim_{x \to x_1} f(x)$ شتون ولري، خو د x_1 په نقطه کې د f(x) د تابع قیمت او د f(x) لیمټي قیمت کله چې $x \to x_1$ توپیر ولري. دغه د راتلونکي تعریف ورانديز کوي.

۱. ۵. ۲ تعریف

د $f(x)$ یوی تا بع ته د x_1 په نقطه کې متما دي وايي که چېرې راتلونکي شرطونه صدق وکړي:

۱. $f(x_1)$ تعریف شوی وي

۲. $\lim_{x \to x_1} f(x)$ شتون ولري او

۳. $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$

که چېرې ددې شرطونو څخه یو یا زیات چې په دې تعریف کې په پام کې نیول شوېدي سم نه وي، نو $f(x)$ ته په x کې نامتمادي وايي. او x ته د $f(x)$ نا متمادیت یوه نقطه وايي. که چېرې $f(x)$ د (a,b) خلاص انتر وال په ټولو نقطو کې متما دي وي نو $f(x)$ ته په (a,b) کې متمادي وايي. یوه تا بع چې په $(-\infty,\infty)$ انتروال کې متمادي وي ویل کېږي چې نوموړی تابع په هرځای کې متما دي ده یا په ساده ډول متما دي ده.

مثال: فرض کړئ چې $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ او

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ = 3, & x = 2 \end{cases}$$

f(x) او g(x) دواړه په 2 کې نا متمادي دي؛د f(x) تابع لدی سببه څکه په f(2) کې د تعریف وړنده او د g(x) تابع لدی سببه څکه په g(2) = 3، کله چې

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{2x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

په دې ډول

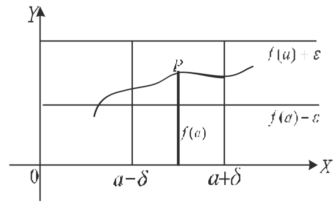
$$\lim_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$$

۳,۵,۱ د متما دیت هندسي څرګندوالی

د f(x) تابع ګراف رسم کړئ. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ نا مساوات د $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$ سره معادل دی.

په ورته ډول $|x-a| < \delta$ د $a-\delta < x < a+\delta$ سره معادل دی.

د $x=a-\delta, y=f(a)+\varepsilon, y=f(a)-\varepsilon$ او $x=a+\delta$ خطونه رسم کړئ.



د مستطیل مرکز چې ددغو خطونو پواسطه ښودل شویدی $P(a,f(a))$ دی. د f(x) متمادیت په x = a کې پکار دی چې د هر $\varepsilon>0$ لپاره $\delta>0$ یو عدد دارنګه شتون لري چې د f(x) ګراف د $x\in(a-\delta,a+\delta)$ ټولو لپاره د مستطیل دننه پاتې کیږي.

په $(\varepsilon-\delta)$ کې د تابع د متمادیت تعریف په لاندې ډول دی:

تعریف: فرض کړئ چې f(x) د R څخه تر R پورې یوه تابع ده f(x) ته د a په یوه نقطه کې چې د f په دومین کې شامل ($a\subset$ f دومین) دی متمادي وایي که چیرې لاندینی شرطونه صدق وکړئ.

۱. د a نقطه په یو خلاص انتر وال کې د f په دومین کې شا مل ده.

۲. هر $\varepsilon>0$ لپاره، د $\delta>0$ یو عدد شتون ولري دارنګه چې $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ، کله چې $|x-a|<\delta$.

د ښي اړخ او کيڼ اړخ د لیمیټونو په حدونو کې مونږ ویلی شو چې f(x) تابع په x کې متمادي ده که چیرې

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$$

۴,۵,۱ د یوې خوا متما دیت

د f(x) یوې تابع ته له کیڼې خوا څخه د a په نقطه کې متمادي وا یي که چیرې

۱. $f(a)$ تعریف شوې وي.

۲. $\lim_{x\to a-0} f(x)$ شتون ولري، او

۳. $\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

په ورته ډول د f(x) یوې تابع ته د ښي خوا څخه د a په نقطه کې متمادي وا یي که چیرې

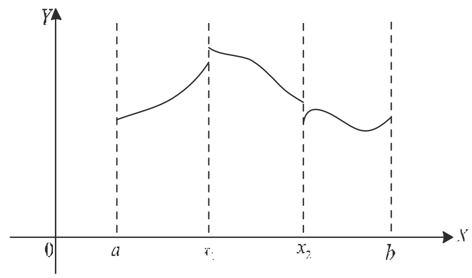
۱. $f(a)$ تعریف شوې وي.

۲. د $\lim_{x\to a-0} f(x)$ شتون ولري، او

۳. $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

۵,۵,۱ ټوټه ایز (منفصل) متمادیت

یوې تا بع ته د $a \le x \le b$ په انټروال کې ټوټه ایزه متمادي یا ټو ټه ټوټه متما دي وایي که چېرې نوموړی انټروال په یو شمېر فرعي انټروالونو د ویش وړ وي چې په کوم یود هریوه کې چې تابع متمادي وي او د ښي اړخ او کیڼ اړخ ټاکلي لیمټونه یکې شتون ولري، دارنګه یوه تا بع په یوه ټاکلي شمېر نا متمادیتونه لري. د یوې تابع یو مثال کوم چې په ټوټه ایز ډول په $a \le x \le b$ کې متمادي ده په ګرافیکي ډول په لاندې شکل کې ښودل شویدی.



دا تا بع په x_1 او x_2 کې نامتمادي ده.

۶,۵,۱ د متما دي تا بع ګانو ځانګړتیاوې

د متمادي تابع ګانو سټ زیات په زړه پورې ځانګړتیاوې لري چې په عمومې ډول تابع ګانې ترې برخه مندې نه دي. دځینو دغو ځانګړتیاووثبوتونه زمونږ د دې کتاب له موخو څخه ندي. مونږ لاندې، بې له ثبوتونو څخه ، د متمادي تابع ګانو ځیني ځانګړتیاوې بیان کړې دي.

۱. که چېرې f او g تابع ګانې په a کې متمادي وي، نو

a) $f + g$ په a کې متمادي ده

b) $f - g$ په a کې متما دي ده

c) $f \cdot g$ په a کې متمادي ده

d) $\frac{f}{g}$ په a کې متما دي دي که چېرې $g(a) \neq 0$ او په a کې نا متمادي دي، که چېرې $g(a) = 0$ وي.

۲. فرض کړی چې f او g د R څخه R پورې تابع ګانې دي. که چېرې f په a کې متمادي وي او g په $f(a) = b$ کې متمادي وي، نو د gof مر کبه تابع په a کې متمادي ده.

۳. که چېرې $f(x)$ د a په نقطه کې متمادي وي، نو $|f(x)|$ هم په هغې نقطه کې متما دي ده.

۴. منځني قیمت قضیه: فرض کړئ چې $f(x)$ په $[a,b]$ کې متمادي دي او $c \in R$ دارنګه چې $f(a) < c$ او $f(b) > c$. نو لږ تر لږه د $x_0 \in [a,b]$ یوه نقطه دارنګه شتون لري چې $f(x_0) = c$.

۵. د محدودوالي قضيه: که چيرې $f(x)$ په $[a,b]$ کې متمادي وي نو دا په هغه ځاي کې محدوده شويده.

۶. اعظمي قيمت قضيه: که چيرې $f(x)$ په $[a,b]$ کې متمادي وي او M او m په تر تيب سره په دې انتروال کې د $f(x)$ د پورته خوا او لاندې خوا سرحدونه وي، نو $f(x)$ لږ تر لږه هر يو د M او m قيمتونوځخه په $[a,b]$ کې غوره کوي. يعنې، د $x_1, x_2 \in [a,b]$ دارنګه شتون لري چې $f(x_1)=m$ او $f(x_2)=M$.

۷،۵،۱ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $f(x)=|x-3|$ تابع متمادیت په $x = 3$ کې وڅېړئ.

حل:

$$f(3)=|3-3|=0$$

د کيڼې خوا لیمټ :

$$\lim_{x\to 3-0}|x-3|=\lim_{h\to 0}|3-h-3|=\lim_{h\to 0}|-h|=0$$

ديښې خوا لیمټ :

$$\lim_{x\to 3+0}|x-3|=\lim_{h\to 0}|3+h-3|=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{h\to 3+0}f(x)=f(3)$$

لدې سببه $f(x)$ په $x = 3$ کې متمادي ده.

۲. مثال: د $f(x)$ تابع متماديت په $x = a$ کې وڅېړئ که چيرې

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a}-a, & 0<x<a\\ 0, & x=a\\ a-\dfrac{a^2}{x}, & x>a\end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2}{a}-a\right)=a-a=0$$

او

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a}\left(a-\frac{a^2}{x}\right)=a-a=0$$

ځرنګه چې

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)$$

نو د $f(x)$ تابع په $x = a$ کې متمادي ده.

۳. مثال: وښایاست د $f: R \to R$ تابع چې د

$f(x) = x$ ، پواسطه راکړشوې ده ، x غیرې ناطق دی.

$f(x) = 1 - x$ ، پواسطه راکړشوې ده ، x ناطق دی.

په $x = \frac{1}{2}$ کې متمادي ده.

حل: $\frac{1}{2}$ گویا یعنې **(ناطق)** دی.

څرنگه چې $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

او

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} (1-x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

لدې امله کله چې $x \to \frac{1}{2}$ ، د $f(x)$ لیمټ شتون لري او په $x = \frac{1}{2}$ کې د $f(x)$ له قیمت سره مساوي دی.

په نتیجه کې $f(x)$ په $x = \frac{1}{2}$ کې متمادي ده.

۴. مثال: د $f(x)$ تابع د نامتمادیت نقطې چې د

$$\begin{aligned} f(x) &= x+4, \quad ، \quad \text{که چیرې} \quad -6 \le x < -2 \\ &= x, \quad ، \quad \text{که چیرې} \quad -2 \le x < +2 \\ &= x-4, \quad ، \quad \text{که چیرې} \quad 2 \le x \le 6 \end{aligned}$$

په واسطه تعریف شوې وي وټاکې.

حل: دا څرګنده ده چې $f(x) = x + 4$ د $-6 \le x \le -2$ لپاره متمادي ده، $f(x) = x$ د $-2 \le x < 2$، لپاره متمادي ده، او $f(x) = x - 4$ د $2 \le x \le 6$ لپاره متمادي ده. نو موږ به د $x = -2$ او $x = 2$ نقطې تر بحث لاندې ونیسو.

$$f(-2) = -2$$
$$\lim_{x\to-2-0} f(x) = \lim_{x\to-2-0} (x+4) = -2+4 = 2$$
$$\lim_{x\to-2+0} f(x) = \lim_{x\to-2+0} x = -2$$
$$\lim_{x\to-2-0} f(x) \ne \lim_{x\to-2+0} f(x)$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ شتون نه لري او له دې امله f(x) په $x = -2$ کې نا متمادي ده.

اوس په $x = +2$ کې

$$f(2) = 2 - 4 = 2$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} x = 2$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} = 2 - 4 = -2$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} f(x)$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود نه لري او له دې امله f(x) په $x = 2$ کې نامتمادي ده.

ځکه نو $x = -2$ او $x = 2$ د f(x) تابع د نامتماديت نقطې دي.

۵. مثال: د لاندېنيو تابعګانو متماديت په $x = 0$ کې امتحان کړئ.

(i). $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ، کله چې $x \neq 0$

$= 1$ ، کله چې $x = 0$

(ii). $f(x) = \frac{sin3x}{sin2x}$ ، کله چې $x \neq 0$

$= \frac{3}{2}$ ، کله چې $x = 0$

حل: (i). $f(0) = 1$

او

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ځرنګه چې $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ ، تا بع په $x = 0$ کې نامتما دي ده .

(ii). $f(0) = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ځرنګه چې $\lim f(x) = f(0)$ ، تا بع په $x = 0$ کې متمادي ده.

۶. **مثال:** هغه انټروالونه پیداکړئ کومو کې چې د $f(x)=\frac{x^2-5}{x-1}$ تابع متمادي ده. همدارنګه د نامتمادیت نقطې پیداکړئ.

حل: $f(x)=\frac{x^2-5}{x-1}$ تابع په $x=1$ کې نه تعریف کیږي، له دې سببه $x=1$ د نامتمادیت یوه نقطه ده.

د کسرصورت x^2-5 د R په ټولو نقطو کې متمادي ده او په ورته ډول سره د کسر مخرج $x-1$.

څکه نو f(x) د $R-\{1\}$ په هره نقطه کې متمادي ده یعني f(x) په $(-\infty,1)$ او $(1,\infty)$ کې متما دي ده.

۴،۱ پوښتنې

۱. ثبوت کړئ چې f(x) په $x=2$ کې متمادي ده چېرته چې

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}, \qquad x\neq 2$$

$$=12, \qquad x=2$$

۲. په $x=1$ کې د f(x) د تابع متمادیت وڅېړئ چېرته چې

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, \qquad x\neq 1$$

$$=3, \qquad x=1$$

۳. ثبو ت کړئ چې $\sin^2 x$ د د ټولو $x\in R$ لپاره متمادي ده.

۴. په $x=a$ کې د f(x) تابع متمدیت وڅېړئ که چېرې

$$f(x)=(x-a)\cos\frac{1}{x-a}, \qquad x\neq a$$

$$=0, \qquad x=a$$

۵. فرض کړئ چې

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}, \qquad x\neq 0$$

$= 0,$ $x = 0$ ، که چیرې

دهغې متمادیت په $x = 0$ کې وڅیړئ.

۶. په $x = 1$ کې د $f(x) = x - |x|$ متمادیت وڅیړئ.

۷. په $x = 0$ او 1 کې د $f(x) = |x| + |x-1|$ متمادیت وڅیړئ.

۸. وښایاست چې د $f, (0,1] \to R$ تا بع چې $f(x) = \frac{1}{x}$ پواسطه ښودل شوې ده په $(0,1]$ کې متمادي ده. آیا f(x) پدې انټروال کې محدوده ده؟ شرحه یې کړئ.

۹. فرض کړئ چې

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= 0, \qquad \text{کله چې } x = 0$$

په $x = 0$ کې دهغې متمادیت وڅیړئ. ، $[p.u.1986,89]$

۱۰. فرض کړئ چې

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= 0, \qquad \text{کله چې } x = 0$$

وښایاست چې f(x) په $x = 0$ کې متمادي ده. $[P.U.1985]$

۱۱. لاندېنو توابعو متمادیت په $x = 0$ کې وڅیړئ

$$(i) \quad f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= e^2\text{،} \qquad \text{کله چې } x = 0$$
$$(ii) \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{x}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= 1\text{،} \qquad \text{کله چې } x = 0$$
$$(iii) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= 1\text{،} \qquad \text{کله چې } x = 0$$
$$(iv) \quad f(x) = x^2 tag^{-1}\frac{1}{x}\text{،} \qquad \text{کله چې } x \neq 0$$
$$= 1\text{،} \qquad \text{کله چې } x = 0$$

$(v)\quad f(x) = [x]\sin\frac{1}{x},\qquad$ کله چې $x \neq 0$

$= 1$ ، کله چې $x = 0$

۱۲. د $f(x) = x - [x]$ تا بع متماديت نقطې د ټولو $x \in R$ لپاره څرګندې کړئ.

۱۳. د $f(x)$ تابع نامتماديت نقطې پيداکړئ چې د

$(i)\quad f(x) = x^3 - 6x$ ، کله چې $x < 1$

$= -4 - x^2$ ، کله چې $1 \leq x \leq 10$

$= 6x^2 + 46$ ، کله چې $x > 10$

$(ii)\quad f(x) = x + 2$ ، کله چې $0 \leq x < 1$

$= x$ ، کله چې $1 \leq x < 2$

$= x + 5,$ کله چې $2 \leq x < 3$

پواسطه تعريف شويدي.

۱۴. دلاندنيو توابعو لپاره هغه انټروالونه وټا کې په کومو کې چې دوی په هغو باندې متمادي وي. همدارنګه هغه نقطې وټا کې په کومو کې چې هغوی نامتمادي وي.

$(i)\quad f(x) = tagx$

$(ii)\quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$(iii)\quad f(x) = \sin x$ ، کله چې $x \leq \frac{\pi}{4}$

$= \cos x,$ کله چې $x > \frac{\pi}{4}$

۱۵. b, a او c پيدا کړئ چېرې چې لاندني توا بع د ټولو $x \in R$ لپاره متما دي وي

$(i)\quad f(x) = cx^2$ ، کله چې $x \leq 2$

$= 3$ ، کله چې $x > 2$

$(ii)\quad f(x) = 1$ ، کله چې $x \leq 3$

$= ax + b$ ، کله چې $3 < x < 5$

$= 7$ ، کله چې $x \geq 5$

۱. بيلابيلې پوښتنې

۱. د هغې تابع ګراف رسم کړئ چې په لاندې ډول تعريف شوې وي

$(i) \quad f(x) = x, \qquad 0 \le x < \frac{1}{2}$ کله چې

$= 1, \qquad x = \frac{1}{2}$ کله چې

$= 1 - x, \qquad \frac{1}{2} < x \le 1$ کله چې

۲. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ وټاکئ.

۳. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \tan \frac{x}{2}$ وټاکئ.

۴. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ د ساین سلسلې په کارولو وټاکئ.

۵. د f(x) متمادیت په مبدا کې شرحه کړئ کله چې

$f(x) = x \lim \sin x, \qquad$ د $x \neq 0$ لپاره

$= 0, \qquad$ د $x = 0$ لپاره

۶. د $\tanh \frac{x}{2}$ متمادیت په x = 0 کې شرحه کړئ.

۷. ثبوت کړئ چې f(x) د ټولو $x \subset R$ لپاره غیرې متمادې ده که چېرې

$f(x) = 0, \qquad$ کله چې x غیرنسبتي (ناګنګ) وي

$= 1, \qquad$ کله چې x نسبتي (ګو یا) وي

۸. د a او b ثوابت دارنګه پیدا کړئ چې. [P.U.1990, 1991]

$f(x) = x^2, \qquad x < -1$ کله چې

$= ax + b, \qquad -1 \le x < 1$ کله چې

$= x + 5, \qquad x \ge 1$ کله چې

تابع د ټولو $x \subset R$ لپاره متمادي وي.

۹. د f(x) تابع متمادیت په x = 1 او 2 کې شرح کړئ چېرته چې

$f(x) = x + 2, \qquad 0 \le x < 1$ کله چې

$= x, \qquad 1 \le x < 2$ کله چې

$= x + 5, \qquad 2 \le x \le 3$ کله چې

[P.U.1987]

۱۰. فرض کړئ چې

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{x}, \qquad \text{کله چې } x\neq 0$$
$$=x, \qquad \text{کله چې } x=0$$

د f(x) متما دیت په x = 0 کې وڅېرئ. [P.U.1988]

۱۱. د لاندې معا دلو ګرافونه رسم کړئ.

$(i)\quad |x|=|y| \qquad (ii)\quad y=|x|+x$

۱۲. د

$$(i)\ \lim_{x\to 0-0}\frac{x}{x-|x|},$$
$$(ii)\ \lim_{x\to 1}x[x],$$
$$(iii)\ \lim_{x\to 0}\tanh\frac{1}{x}.$$

قیمتونه وټاکئ.

۱۳. c دارنګه پیدا کړئ چې:

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}, \qquad \text{کله چې } 0\leq x\leq 1$$
$$=c, \qquad \text{کله چې } x=1$$

تا بع په $x\in[0,1]$ کې د ټولو لپاره متمادي وي.

۱۴. f(4 − 0) او f(4 + 0) پیدا کړئ که چېرې

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-3x-4}, \qquad \text{کله چې } x>4$$
$$=4, \qquad \text{کله چې } x\leq 4$$

وي.

دويم څپرکی

مشتقونه

۱,۱,۲ سریزه

د ډيفرنشيل کلکولس موضوع اساساً دمنحني په يوه نقطه کی يو مماس د ټاکلو هندسي مسالې نه سرچينه اخيستې ده. ډيرو فزيکي پيښو (بريدو)د مقدارونو بدلونونه ، ديوه راکټ چټکتيا، د پیسو انفلاسيون(دپيسو د ارزښت ټيټېدل) د يو برقي سګنال ولتيج اوداسی نور پکې شاملوي. پدې څپرکي کې به مونږ د مشتق مفکوری ته انکشاف ورکړو، کوم چې د بدلون دارزښتونو د مطالعې لپاره رياضيکې بنسټيزالات او اسباب دی.

۱,۲,۲ مشتق

فرضوو چې f(x) په (a,b) کې د x_0 په هره نقطه کې تعريف شوی ده. د f(x) مشتق د $x=x_0$ په نقطې کې که چيرې دا ليمېټ شتون ولري په لاندې ډول تعريفيږي،

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نوموړی مشتق په راز راز نورو ورته طريقو سره تعريفولای شو، د مثال په توګه،

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

په ټاکلی (معين) ډول د مشتق وړتابعګاني : هغې تابع ته وايي چې په يوه نقطه کې په معين ډول د مشتق وړ وي،که چيرې په هماغه نقطه کې دا مشتق موجود او معين وي .

۲,۲,۲ يو اړخيز مشتقونه

په$x=x_0$کې د f(x) د ښي آړخ يا ښي لاس مشتق پدې ډول تعريفيږي :

$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

که چيری دغه لميټ شتون ولری . دا په ياد ولرئ چې پدې حالت کې $h\,(=\Delta x)$ يواځې مثبتو قيمتونو ته محدود شوی دی په همدی ډول دا صفر ته نږدې کيږي.

په ورته ډول ، د $x=x_0$ په نقطه کې د f(x) کيڼ آړخ يا چپ لاس مشتق پدې ډول تعريفيږي :

$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

که چيری دغه لميت شتون ولري. پدې حالت کې h منفي قيمتونو ته محدوديږي په همدی ډول دا صفر ته نږدې کيږي.

د f(x) یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کې یو مشتق لري که یواځې اوتنها یواځې $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ وي.

۳,۲,۲ د تفاضل ورتیا(قابلیت) او تفاضلونه

د f(x) تابع ته د f(x) د تعریف د (a,b) انتروال د x په یو نقطعه کې د تفاضل وړ تابع وایي ،که چیرې د [f(x+Δx) – f(x)] بدلون، په نوموړې تابع کې کومه چې په x کې د Δx بدلون (تغیر) سره اړیکه لري د دې وړ وي چې لاندې شکل سره ځرګنده شي:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + \epsilon\,\Delta x$$

چیرې چې A په Δx پورې اړه نه لري او ϵ د Δx یوه تابع ده او صفر ته تقرب کوي ځنګه چې $\Delta x \to 0$.

Δx د یوه خورا کوچني اصل په پام کې نیولو سره موږ وینو د Δf خورا کوچني اصلی برخه $A\Delta x$ ده. دغې اصلي برخې ته د f(x) تفاضل وایي او د d f(x) او یا په ساده ډول د df په توګه ښودل کیږي . که چیرې y ، f(x) په ګوته کړي، نو همدارنګه نوموړی تفاضل په dy سره ښودل کیږي . A د تفاضل ضریب یا د f مشتق دی.

۴,۲,۲ د تفاضل د ورتیا لپاره شرط (condition for differentiability)

دعوی: د f(x) لپاره چې په یوه راکړل شوي نقطه کې د مشتق وړ وي اړین او د بسنې وړ شرط دادی چې دا په هماغه نقطه کې یو معین مشتق ولري .

فرضوو چې f(x) د x په نقطه کې د تفاضل وړ ده. موږ لروچې

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

یا

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

که چیرې $\Delta x \to 0$. په لیمېټ کې موږ په پام کې نیسو چې $f'(x) = A$.

نوادلدې کبله f(x) د x په نقطه کې په ټاکلي توګه د مشتق وړ ده؛ چې مشتق له A څخه عبارت دی.

فرضوو چې f(x) د x په نقطه کی د f'(x) یو ټاکلی مشتق لري نو لدې امله ځرنګه چې $\Delta x \to 0$

$$lim\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)\,.$$

ځنګه چې $\Delta x \to 0$. موږ نیکلای شو چې

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \epsilon$$

لدې امله $\varepsilon \to 0$ لکه ځنګه چې $\Delta x \to 0$ ،او موږ $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x\, f'(x) + \epsilon\,\Delta x$ لاس ته راوړو. په دې ډول f(x) د x په نقطه کې د تفاضل وړ ده.

۵,۲,۲ په يوانتروال کي د تفاضل وړتيا

که چیري یوه تابع د یو انتروال په ټولو نقطو کي یو مشتق ولري، دي تابع ته په نوموړي انتروال کي د تفاضل وړ تابع وایي . په ځانګړي ډول که چیري f(x) د $a \le x \le b$ په یو تړلي انتروال یعني [a,b] کي تعریف شوی وي، نو f(x) په انتروال کي د تفاضل وړ ده که چیری د هر x_0 لپاره $f'(x_0)$ شتون ولري لدی امله $a < x_0 < b$ او که چیری $f_+'(x_0)$ او $f_-'(x_0)$ دواړه شتون ولري.

که چیري یوه تابع پرله پسي مشتق ولري دې ډول تابع ته ځیني وخت په پرله پسي ډول د تفاضل وړ تابع وایي.

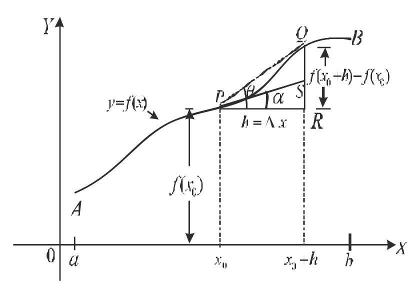
د تفاضل حصوي وړتیا: یوه تابع ته د $a \le x \le b$ په انتروال کي په حصوي ډول د تفاضل وړ تابع وایي که چیرې f(x) په حصوي ډول پرله پسي (متمادي) وي .

تفاضل نیونه (دیفرنسیل نیونه): د مشتق د لاس ته راوړلوپروسي ته دیفرنسیل نیونه وایي . دا اکثر هغه وخت ګټور وي چي کله د یفرنیسل نیونه د یوې عملیي په توګه وبلل شي کومه چي،کله د f په تابع تطبیق شي، د f' یوه نوې تابع رامنځ ته کړي . په کوم حالت کي چیرته چي x یومستقل متحول دی، د دیفرنیسیل نیوني عملیه اکثره وخت د [ ] $\frac{d}{dx}$ سمبول پواسطه ښودل کیږي . کوم چي د [ ] مشتق نظر x ته لوستل کیږي . د بیلګي په توګه(دمثال په ډول) $\frac{d}{dx}[x^2+1]$ $[x^2+1]$

وړاندینه د مشتق نظر x ته لوستل کیږي، او $\frac{d}{dx}[x^2+1] = 2x$ $[x^2+1]$ مشتق نظر x ته

۶,۲,۲ د مشتق ګرافیکي ښودنه(نمایش)

فرضوو چي $y = f(x)$ ګراف د APQB منحني پواسطه په لاندې شکل کي ښودل شوی دی.



که چیری د P نقطه $(x_0, f(x_0))$ وي اود Q نقطه $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ وي، د خارج قسمت توپیر

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \tan\theta$$

د قاطع(سیکېنټ) د خط مېل دی چي د منحني د P او Q نقطي سره یو ځای کوي . څرنګه چي $\Delta x \to 0$

په همدارو دغه قاطع خط د PS مماسي (تنجېټ) خط ته د منحني P په نقطه کي نږدیکت(تقرب) کوي. نو

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{SR}{PR} = \tan \propto$$

منحني ته د P په نقطه کي د مماس د خط میل دی.

په یاد ولري چي SR د dy ډیفرنسیل دی، چیرته چي RQ د Δy څخه عبارت دی . PR=Δx د لمیت د نیولو په حالت کي د $\Delta x = dx$ په شان پاتي کیږي.

د y = f(x) په کومه نقطه کي چیرته چي $x = x_0$ دی د مماس دخط معادله په لاندي ډول ده

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

۷,۲,۲ د بدلوني ارزښت (Rate of change)

که چیري (x_0, y_0) او (x_1, y_1) د y = f(x) په ګراف باندی نقطي وي، نوموړی تعریفوو چي $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ منځنی قیمت دی په کوم کي چي y د x سره د $[x_0, x_1]$ په انټروال کي بدلون مومي.

پواځي لکه چي موږ د یو وخت په انټروال کي د متحرکي ذري منځني چټکتیا او په یوی ځانګړي نقطه د وخت کي آني (لحظوي) چټکتیا ترمنځ توپیر په ګوته کوو. نو موږ په یو انټروال کي د y د x سره د بدلون منځنی قیمت او په یوه نقطه کي د x سره د y دبدلون لحظوي قیمت تر منځ توپیر په ګوته کوو.

که چیري y = f(x) اود f د x_0 په نقطه کي د ډیفرنسیل وړ وي، نو موږ تعریفو چي $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$ لحظوي قیمت دی په کوم کي چي y د x سره د x_0 په نقطه کي بدلون مومي.

که چیري $f'(x_0) > 0$ ، نو y په $x = x_0$ کي ډیریښت مومي(متزاید دی) او که چیري $f'(x_0) < 0$ نو y په $x = x_0$ کي کمیږي (متناقص دی).

مثال: د $y = x^2 + 1$ منحني لپاره (a). د 3, 5 په انټروال کي x سره د y د بدلون منځنی قیمت.(b). د x = 3 په نقطه کي x سره د y د بدلون لحظوي قیمت لاس ته راوړي.

a) حل: منځنی قیمت په کوم کي چي y د x سره بدلون مومي عبارت دی د $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. دلته $x_0 = 3$ او $x_1 = 5$. دy قیمتونه د x د دغو قیمتونو مطابق عبارت دي له $y_0 = (3)^2 + 1 = 10$ او $y_1 = (5)^2 + 1 = 26$ ،
نو د [3, 5] په انټروال کی د y بدلون منځنی قیمت مساوي کیږي له $8 = \frac{16}{2} = \frac{26-10}{5-3} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

په دی ډول وبلای شو چي په منځني بدلون کي، د [3,5] په انټروال کي د x د هر واحد د ډیریدو له کبله y د 8 واحدو په اندازه ډیریږي .

(b

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$$

نو د y د بدلون لحظوي قیمت د x =3 په نقطه کې په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=3} = 2x\Big|_{x=3} = 6$$

ځکه نو وېلای شو چې د x = 3 په نقطه کی، y دمخکي په شان شپږ ځله چټک د x نه ډېرښت مومي.

۸،۲،۲ دیوې تابع متمادیت (پرله پسې والی) Continuity of a function

د f یوه تابع د c په یوه نقطه کې متمادي بلله کېږي که چېرې لاندې شرطونه پکې صدق وکړي .

1. f(c) تعریف شوې وي
2. د $\lim_{x\to c}$ f(x) شتون ولري
3. $\lim_{x\to c}$ f(x) = f(c)

که چېرې پدغه تعریف کې د پورته شرطونونه یو یا ډېر سمون ونلري، نو ویل کېږي چې د f تابع د c په نقطه کې غیر متمادي ده او c ته د f تابع دغیرمتمادیت نقطه وایي . که چېرې f د (a,b) خلاص انټروال په ټولو نقطو کې متمادي وي نو ویل کېږي چې f د (a,b) په انټروال کی متمادي دی. هغه یوه تابع چې په $(-\infty,-\infty)$ انټروال کی متمادي وي نو ویل کېږي چې نوموړې تابع په هر ځای کی متمادي ده او یا په ساده ډول متمادي ده.

۹،۲،۲ د یوې مشتق وړ تابع متمادیت

قضیه: که چېرې یوه تابع په ټاکلی ډول په یوه نقطه کې د مشتق وړ وي، دا په همغه نقطه کې متمادي ده.

فرض کړو چې f(x) د x = c په نقطه کې په ټاکلی ډول د مشتق وړتیا لري، نو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ یو ټاکلی لیمت نه کله $h \to 0$چې $f'c$ سره ښودل کېږي نږدې کېږي

موږ لرو چې

$$f(c+h)-f(c) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h$$

$$\therefore \quad \lim\{f(c+h)-f(c)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(c)\cdot 0 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} f(c-h) = f(c)$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} f(x) = f(c)$$

نولدې امله $f'c$ د x = c په نقطه کې متمادي ده .

یادونې (Remarks): دغه قضیه ممکن په لاندې ډول بیان شي. د یوی تابع لپاره په کومه نقطه کې چې په ټاکلې توګه د مشتق وړ وي اړین شرط دا دی چې په هماغې نقطه کې متمادي وي.

په قطعی ډول سره د دغې قضیې معکوس سم ندی، یعني د متمادیت شرط د مشتق نیوني د وړتیا لپاره کافي ندی .

د $f(x) = |x|$ تابع په پام کې ونیسئ

د متمادیت د ارزوني (امتحان) لپاره، موږ د ϵ کوم مثبت عددپه پام کې نیسو، موږ لروچې

$|f(x)-f(0)|=|x|<\varepsilon$ کله چې $|x|\le\delta$

δ د ϵ کوم کوچنی عدد دی، او لدې امله $f(x)$ د $x = 0$ لپاره متمادي ده.
اوس فرض کوو چې $f(x)=|x|$ د $x = 0$ په نقطه کې د مشتق نیوني ورتیا لري، نو لرو چې

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+0}\frac{|h|}{h}=1$$

او

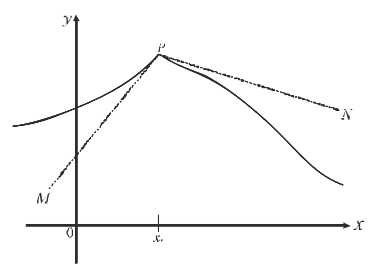
$$f'_{-}(0)\lim_{h\to 0-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-0}\frac{|h|}{h}=-1$$

$$f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$$

ځکه نو $f'(0)$ شتون نلري.
نولدې کبله یوه تابع امکان لري چې د x په کوم یوه قیمت کې چې د مشتق وړ نه وي متمادي دي.

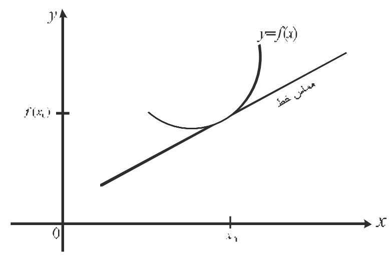
هغه حقیقت چې یوه تابع کېدای شي په کومه یوه نقطه کې متمادي وي او د دی سره سره د دیفرینسل وړ نه وي په گرافیکي ډول په لاندې شکل کې ښودل شوې ده.



پدې حالت کې هلته د p په نقطه کې دوه مماس خطونه چې د PM او PN سره ښودل شوي دي موجود دي. د دغو مماس خطونو مېلونه په ترتیب سره عبارت دي له $f'_{-}(x_0)$ او $f'_{+}(x_0)$

۱۰,۲,۲ نژدیکیتونه یا تقاربونه (Approximations)

فرضوو چې $f(x)$ د x_0 په نقطه کې د دیفرنیسل وړ ده، نو د $y = f(x)$ منحني د x_0 په نقطه کې مماس خط په $y = f(x)$ باندې x_0 ته نژدې یو ښه مناسب نږدېوالی (تقارب) دی.



څرنګه چې د مماس خط د $(x_0, f(x_0))$ نقطې څخه تېرېږي او د $f'(x_0)$ میل لري، نو د نقطې د میل معادله عبارت ده له

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

یا

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

x_0 ته نږدې د x قېمتونو لپاره ، د دغه مماس خط د y لوړوالی به په دقیقه توګه د f(x) د منحني لوړوالي ته نږدې شي،کوم یو څخه چې x_0 ته نږدې د x لپاره د $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ نژدیوالی لاس ته راځي.

که چېرې مونږ $\Delta x = (x - x_0)$ فرض کړو نو $x = x_0 + \Delta x$ کېږي نو مونږلاسته راوړو چې

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

کوم چې صفر ته نږدې Δx لپاره یو ښه نژدیوالي دی. دغې پایلې ته، x_0 ته نږدې د f خطي نژدیوالي (تقارب) وایي.
پدې پاینه کې چې د $f(x_0 + \Delta x)$ محاسبه ستومانوونکې وي، خو د $f(x_0)$ او $f'(x_0)$ محاسبه ستومانوونکې نه ده، نودغه فارمول مونږ ددې وړ ګرځوي چې د $f(x_0)$ او $f'(x_0)$ قېمتونه چې $f(x_0 + \Delta x)$ ته نژدیوالي وکوي استعمال کړو.

مثال: د $\sqrt{1.1}$ لپاره نژدیکیت (تقریب) لاسته راوړئ.

حل: که چېرې مونږ فرض کړو چې $f(x) = \sqrt{x}$ ، نود مثال څخه څرګندېږي چې د $f(1.1)$ نږدېوالی غوښتل شوی دی یعنې:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اوس $x_0 = 1$ او $x_0 + \Delta x = 1.1$

$$\therefore \quad '\Delta x = 0.1$$

له $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ څخه،مونږ لاسته راوړو چې

$$f(1.1) \approx f(1) + f'(1)(.1)$$

یا

$$\sqrt{1.1} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(.1)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{2}$$

$$= 1 + 0.5 = 1.05$$

۱۱،۲،۲ د خطا زیاتېدنه (Eror Propagation)

مونږ پوهیږو چې $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$
لدې ځینې مونږ لاس ته راوړلی شو

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

څنګه چې مونږ پوهیږو $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ نومونږ لاس ته راوړو چې $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$
که چېرې مونږ د x_0 څخه اندس لرونکي متحول (سب سکریپت) لرې کړو او $\Delta x = dx$ په پام کې ونیسو نومونږ لیکلای شو $\Delta y = dy$
دغه فارمول د خطاو د زیاتېدنې په څېړنه (مطالعه) کې کارول کېږي. فرض کړئ چې یو څېړونکی یو فزیکي مقدار اندازه کوي. په آله کې د محدودیتونو او نورو فکتورونو له امله به څېړونکی ونشي کولی چې تل د مقدار د x حقیقي قیمت تر لاسه کړي. خو د $x + \Delta x$ قیمت به لاس ته راوړي، چېرته چې Δx د اندازه کېدنې یوه خطا ده، په پایله کې لاس ته راغلی قیمت ممکن وروسته د y د کوم بل مقدار په محاسبه کې وکارول شي. پدې طریقه د اندازه کېدنې خطا Δx د y په محاسبه شوی قیمت کې یوه د Δy خطا منځ ته راتلل زیاتوي.

مثال: د یوې کرې شعاع د $0.02cm$ اندازه کېدنې د ممکنه خطا په صورت کې 50cm اندازه کړل شوېده. د کرې د حجم محاسبوي ممکنه خطا وټاکئ.

حل: د کرې حجم عبارت دی له

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

مونږ ته د نوموړي شعاع په اندازه کېدوکي خطا $\Delta r = \pm 0,02cm$ راکړل شوي ده او مونږ غواړو چې په حجم (V) کې يې خطا (ΔV) لاس ته راوړو. که چېرې مونږ فرض کړوچې Δr کوچنی او $dr = \Delta r$ نو کېدای شي چې ΔV د dV سره نږدې شي. په پایله کې

$$\Delta V \approx dV = 4\pi r^2 dr$$

د $r = 50$ او $dr = 0,02$ قېمتونو په وضع کولو سره، مونږ لاس ته راوړو چې

$$\Delta v \approx 4\pi(2500)(\pm 0,02)$$
$$\approx \pm 628,32cm^3$$

ددی پربنسټ په نوموړي حجم کې ممکنه خطا تقریباً $\mp 628,32cm^3$ ده.

نسبي خطا او د خطا سلنه (فيصدي): که چېرې د يو مقدار حقيقي قېمت q او د اندازه کېدني يا محاسبې خطا Δq وي نو $\Delta q/q$ د اندازه کېدني يا محاسبې دنسبي خطا څخه عبارت ده، او کله چې د سلنې په ډول وښودل شي نو د خطا د سلنې په نوم يادېږي، په عملي برخه کې، د q ريښتونی قېمت معلوم نه وي، نو پرځای یې د q اندازه شوی یا محاسبه شوی استعمالېږي، او نسبي خطا د $\Delta q/q$ ته نږدې کېږي.

مثال: په وروستني مثال کې د کرې لپاره نسبي خطا.

نسبي خطا په r کې $\quad r \approx \dfrac{dr}{r} = \dfrac{\pm 0,02}{50} = \pm 0,0004$

نسبي خطا په V کې $\quad v \approx \dfrac{dV}{V} = \dfrac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\dfrac{dr}{r}$

$$= 3.\frac{\mp 0,02}{50} = \mp 0,0012$$

په دی ډول په شعاع کې د خطا سلنه تقریباً $\pm 0,04\%$ ده، او په حجم کې د خطا سلنه په تقريبي ډول $\pm 0,12\%$ ده.

۱۲,۲,۲ چټکتیا(سرعت) او تعجيل

په عمل کې، چټکتيا په يو شيبه کې د وروستي وخت په کوم لنډ انتروال کې نظر په پام کې نيول شوی شيبې ته د واټن د اندازه کېدني پوسيله محاسبه کېږي. د چټکتيا د محاسبې دا طريقه کېدلی نشي چې په روښانه توګه دقيقه وي، دموخې لپاره د مختلفو عاملينو د اندازه کېدني لپاره ممکن له ډول ډول انتروالونو څخه کار واخېستل شي. په حقيقت کې دا د واقعي چټکتيا يواځېنی تقريبي قېمت دی او ځينی نور تقريبي قېمتونه هغه ټول دي چې مونږ ورته په عمل کې ضرورت لرو. د انتروال کوچنی والی، واقعي چټکتيا ته يو ښه نزديوالی دی.

په کومه شيبه کې د حرکت لرونکي ذرې د چټکتيا سمه معنی يواځې د مشتق عمليې څخه د کار اخيستنې پوسيله ترلاسه کېدلای شي.

د چټکتیا په هکله څرګندونه: د ذرې حرکت د یو مستقیم خط په اوږدو کې په تحلیلي ډول سره د یوې تابعوي معادلې په وسیله ښودل کېږي.

$$S = f(t)$$

چېرته چې S په خط باندی د 0 له ټاکل شوې نقطې څخه د t په وخت کې واټن په ګوته کوي. فرضووچې p د t په کوم راکړل شوي وخت کې د ذرې حالت دی، او فرضوو چې Q د Δt د لنډ انتروال څخه وروستی حالت دی، او فرضوو چې $PQ = \Delta S$.

د $\Delta s/\Delta t$ نسبت په دغه انتروال باندی منځنې چټکتیا ده اود p په نقطه کې حقیقي چټکتیا ته نږدېوالی یو تقریب دی. مونږ پوهېږو چې تر ټولو خورا ښه تقریب د Δt دخورا کوچنې قیمت دپام کی نیولو پواسطه لاس ته راځي.

مونږ په پایله کې د p په نقطه کې دچټکتیا اندازه څرګنده کړیده چې له

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{یعنې} \quad \frac{ds}{dt}.$$

سره مساوي ده. لدی امله که چېرې چټکتیا په v سره وښیو، مونږ لروچې

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

د تعجیل په هکله څرګندونه:

فرضوو چې v د t په کوم راکړل شوي وخت کې چټکتیا دی، او فرضوو چې $v+\Delta v$ د Δtوخت د کوم یولنډانتروال وروستې چټکتیا ده، Δv د Δt وخت په اوږدو کې د چټکتیا بدلون دی.

د $\Delta v/\Delta t$ نسبت دΔt د انتروال په اوږدو کې منځنی تعجیل دی او د t په وخت کې د حقیقي تعجیل یو نزدیوالی (تقریب) دی. د Δt . کوچنې قیمتونه به د t په وخت کې د چټکتیاتر ټولو ښه تقریب وي مونږ په پایله کې د تعجیل اندازه پدې ډول څرګندوو:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{یعنې} \quad \frac{dv}{dt}\left(=\frac{d^2S}{dt^2}\right)$$

مثال: چټکتیا او تعجیل لاس ته راوړئ .

(i) په سر یا په شروع کې، (ii) ددریو ثانیو په پای کې چې د ذرې د حرکت معادله د $s = t^2 + 2t + 3$ سره راکړل شوې دي.

حل:

$$s = t^2 + 2t + 3$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t + 2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 2$$

په $t = 0$ کې لومړنی چټکتیا 2 ده او تعجیل یې هم 2 دی . د دریو ثانیو په پای کې چټکتیا 8 او تعجیل 2 دی.

۱۳,۲,۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: فرض کړئ چې

$$f(x) = \frac{3+x}{3-x}, \qquad x \neq 3$$

د تعریف پر بنسټ $f'(2)$ وڅېړئ.

حل:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(2+h) - f(2)\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{5-h}{1-h} - 5\right\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{6h}{1-h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6}{1-h} = 6
\end{aligned}$$

۲. مثال: فرضوو چې

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \quad ، \ 0 \le x \le 1 \quad \text{که چېرې} \\
&= 2x - 1 \quad ، \ 1 \le x \le 2 \quad \text{که چېرې}
\end{aligned}$$

د $x = 1$ په نقطه کې د f متمادیت او د مشتق نیوني ورتیا وڅېړئ.

حل :

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x = 1$$

او

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (2x-1) = 2-1 = 1$$

همدارنګه $f(1) = 1$.

$\therefore$ په $x = 1$ کې د $f(x)$ قیمت سره = دښي لاس لیمت سره = دکیڼ لاس لیمت
نو لدې کبله $f(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

د $x = 1$ په نقطه کې ددې د مشتق نیوني د ورتیا لپاره

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)-1-(2-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+2h-1-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

$$\therefore\ f'_-(1)\neq f'+(1)$$

نو لدې امله $f(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې د مشتق وړنده.

۳. مثال: فرضوو چې

$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$ که چېرې

$= 0$ ، $x = 0$ که چېرې

وښاياست چې $f(x)$ د $x = 0$ په نقطه کې متمادي او د مشتق وړ ده.

حل:

$f(0) = 0$

او

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$$
$$=0$$

ځکه چې $\sin\frac{1}{x}$ يوه محدوده شوې تابع ده،

ځرنګه چې $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$، نو $f(x)$ په $x = 0$ کې متمادي ده.

اوس د $x = 0$ کې يې د مشتق نيوني د وړتيا نياره

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{0-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(0-h)^2\sin(\frac{1}{0-h})}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(-\frac{1}{h})}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

او

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 \sin(\frac{1}{0+h})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h.\sin \frac{1}{h} = 0$$

ځرنگه چې $f'_-(0) = f'_+(0)$ ، نو د f(x) تابع د x = 0 په نقطه کې د مشتق وړ ده.

۴. مثال: که چیرې $y = f(x) = x^3 - 6x$ وي ، (a). Δy؛ (b). dy، (c). $\Delta y - dy$ لاسته راوړئ.

(a).

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= \{(x+\Delta x)^3 - 6(x+\Delta x)\} - \{x^3 - 6x\}$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 6x - 6\Delta x - x^3 + 6x$$
$$= (3x^2 - 6)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

(b).

$dy =$ د Δy له اساسي برخې سره $= (3x^2 - 6)\Delta x$

$$= (3x^2 - 6)dx$$

په یاد ولرئ چې $f'(x) = 3x^2 - 6$ او $dy = (3x^2 - 6)dx$

یعني $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6$. پدې باید ټینګار وشي چې dy او dx په قطعي ډول سره کوچني ندي.

(c). له (a) او (b) څخه پوهیږو چې

$$\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \epsilon\Delta x$$

پدې ځای کې $\epsilon = 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$

په یاد ولرئ $\epsilon \to 0$ لکه چې $\Delta x \to 0$ یعني $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0$ لکه $\Delta x \to 0$

نو لدې امله $\Delta y - dy$ نسبت Δx ته د لوړ ترتیب یو ډیر کوچنی عدد دی.

پدې حالت کې Δx کوچنی دی، dy او Δy تقریباً سره مساوي دي.

۵. مثال: د $y = x^2 - 7x + 3$ منحني میل او د مماس معادله د (7,3) په نقطه کې لاس ته راوړئ.

حل:

$$y = x^2 - 7x + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x - 7$$

په (7,3) نقطه کې د مماس مېل عبارت دی له:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=7}=14-7=7$$

په (7,3) نقطه کې د مماس معادله عبارت ده له:

$$y-3=7(x-7)$$

یا

$$yx-y-46=0$$

۶. مثال: که چېرې $s=t^2(t-1)$ وي، د 1.2 ثانیو په پای کې چټکتیا او تعجیل لاس ته راوړئ .

حل:

$$s=t^3-t^2$$
$$V=\frac{ds}{dt}=3t^2-2t$$

$\therefore$ په t = 1 کې چټکتیا عبارت ده له : $v_1=3-2=1$

په t = 2 کې چټکتیا عبارت دي له : $v_2=12-4=8$

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=6t-2$$

$\therefore$ په t = 1 کې تعجیل : $a_1=6-2=4$

په t = 2 کې تعجیل : $a_2=12-2=10$

۲,۲ پوښتنې

۱. د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع لپاره، دتعریف له مخې $f'(x)$ لاس ته راوړئ.
۲. فرض کړئ چې $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ، د تعریف له مخې $f'(5)$ قیمت وټاکئ.
۳. فرض کړئ چې

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{2},\ x\neq o$$
$$=0,\qquad x=0$$

(a). ایا f (x) په x = 0 کې متمادي ده ؟
(b). ایا f (x) په x = 0 کې یو مشتق لري ؟

۴. وښایاست چې د f(x) تابع

f(x) = 2 − x ، وي $x<0$ که چېرې
$=2+x$ ، وي $x\geq 0$ که چېرې

په x = 0 کې د مشتق ور نده .

۵. وښایاست چې د f(x) تابع

$f(x) = 1 + x$ که چېرې $x < 2$ وي،
$= 5 - x$ که چېرې $x \geq 2$ وي،
د $x = 2$ په نقطه کې مشتق نه لري.

۶. وښيي چې
$f(x) = x^2 - 1$ که چېرې $x \geq 1$ وي،
$= 1 - x$ که چېرې $x < 1$ وي،
په $x = 1$ کې مشتق نلري.

۷. د $x = c$ په نقطه کې د $f(x) = |x - 4|$ د ديفرنيسيل نيوني ورتيا وڅيرئ .

۸. د تفاضلونو څخه په استفادې $\sqrt[3]{25}$ په تقريبي ډول امتحان کړئ.

۹. د تفاضلونو څخه په استفادې $\cos 62°$ په تقريبي ډول لاسته راوړئ.

۱۰. د 1 ، 2 او 3 ثانيوپه پای کې چټکتيا او تاجعيل د لاندې رابطو لپاره لاس ته راوړئ .

$(i) \quad S = 16t^2$

$(i) \quad S = \dfrac{1}{t+1}$

۱,۳,۲ د x^n مشتق

فرضوو چې $y = x^n$ ، چېرته چې n کوم حقيقي ثابت عدد دی .
فرضوو چې په x کې د Δx د دبروالي په شان په y کې Δy دبروالی دی.

$$\therefore \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$
$$= \lim_{(x+\Delta x) \to x} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$
$$= n \cdot x^{n-1}$$

څکه نو،

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

۲,۳,۲ د مشتقونو ځانګړتياوې

له تعريف څخه ديوې تابع د مشتق دلاس ته راوړلو پروسه (عمليه) بې له يو څو ساده ډولونو څخه ډېره اوږده او ستونزمنه ده. د ځانګړتياوو (خواصو) په کارولو سره کوم چې موټر يې د قضيو په بڼه چې د ډېرو تابع ګانو ديفرنسيل نيونه ساده کوي دتاسيس وړانديز کوو.

1. دعوی: که چیرې c کوم ثابت او f(x) د x کومه د مشتق ور تابع وي، نو cf(x) هم د x یو مشتق ور تابع ده او

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

ثبوت: فرضوو چې y = c f(x)، که چیرې په x کې د Δx د ډېروالي په شان Δy په y کې ډېروالی دی

$$\therefore \quad y + \Delta y = cf(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = cf(x+\Delta x) - cf(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= c\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

نو له دې کبله

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

یادونه: په عبارت سره، د c یو ثابت فکتور کولی شو چې د مشتق دعلامې مخې ته انتقال کړو .

مثال :

$$\frac{d}{dx}\left[4x^8\right] = 4\frac{d}{dx}(x^8) = 4\left[8x^7\right] = 32x^7$$

2. دعوی: که چیرې f (x) او g(x) د x اشتقاق ور تابعګانې وي، نو $f(x) \pm g(x)$ هم د x د اشتقاق وړ تابعګانې دي او

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \pm \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

ثبوت: فرض کړئ چې $y = f(x) \pm g(x)$ که چیرې په x کې د Δx ډېروالي په څیر د y اړونده ډېروالی (تزاید) Δy وي ، نو لیکلی شو چې.

$$\therefore \quad y + \Delta y = f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)$$

نو لدې کبله،

$$\Delta y = f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - [f(x) \pm g(x)]$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \pm [g(x+\Delta x) - g(x)]$$

او

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) \pm [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

څرنګه چې f(x) او g(x) د اشتقاق وړ دي نو

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

شتون لري او همداشان y د اشتقاق وړ دی .

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

يادونه: لنډه دا چې، د یوی مجموعي مشتق د مشتقونو له مجموعی سره مساوي دی، او د يو تفاضل مشتق د مشتقونو له تفاضل سره مساوي دی.

مثال:

$$\frac{d}{dx}[x^4 + x^2] = \frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2 = 4x^3 + 2x$$
$$\frac{d}{dx}[x^4 - x^2] = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}x^2 = 4x^3 - 2x$$

ددويمي دعوی پایله کولی شو چې د تابعګانو دهر ټاکلی شمېر لپاره وغزوو. لدي امله که چېرې $f_1(x)$

$f_n(x), \ldots\ldots, f_3(x), f_2(x)$ د اشتقاق وړ تابعګاني وي

$$\frac{d}{dx}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots\ldots \pm f_n(x)] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] \pm \frac{d}{dx}[f_2(x)] \pm \ldots\ldots \pm \frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

3. دعوی: که چېرې f(x) او g(x) د x اشتقاق وړ تابعګاني وي، نوپدی صورت کې د f(x) · g(x) ضرب حاصل او

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{d}{dx}[g(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)].g(x)$$

ثبوت: فرض کړئ چې $y = f(x) \cdot g(x)$

فرض کړئ چې د y تزايد Δy د x تزايد Δx سره مطابقت لري، نو

$$\therefore \quad y + \Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)$$

د $f(x-\Delta x)\cdot g(x)$ په جمع کولو او تفریق کولو څخه مونږ لاس ته راوړو چې

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\cdot g(x) + f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\cdot g(x) + f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x-\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\cdot\frac{d}{dx}[f(x)]$$

ځکه $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ او $\lim_{\Delta x\to 0} g(x) = g(x)$ ، داځکه چې g(x) د Δx پورې کومه اړه نلري.

لدي امله

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\cdot\frac{d}{dx}[f(x)]$$

یادونه: لنډه دا چې، د دوه تابعګانو دضرب حاصل مشتق د لومړي تابع ضرب د دویمی تابع مشتق سره او د دویمي تابع ضرب د لومړي تابع دمشتق له مجموعې سره مساوي دی .

مثال: که $y = (4x^2-1)(7x^3+x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ .

$$\frac{d}{dx} = (4x^2-1)\frac{d}{dx}(7x^3+x) + (7x^3+x)\cdot\frac{d}{dx}(4x^2-1)$$

$$= (4x^2-1)(21x^2+1) + (7x^3+x)(8x)$$

$$= 84x^4 + 4x^2 - 21x^2 - 1 + 56x^4 + 8x^2$$

$$= 140x^4 - 9x^2 - 1$$

4. دعوی: که چیرې f(x) او g(x) د x اشتقاق وړتابعګاني وي او $g(x)\neq 0$ نو $\frac{f(x)}{g(x)}$ هم د x یوه د اشتقاق وړ تابع ده او

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: فرض کړئ چي

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\ ،\qquad g(x)\neq 0$$

فرض کړئ چي د y تزاید Δy د x تزاید Δx پورې اړه لري.

$$\Delta y-y=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x-\Delta x)}$$

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

صورت کي د f(x) ، g(x) په جمع او تفریق کولو موږ لاس ته راوړو چي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{g(x)\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

څنګه چي f(x) او g(x) د اشتقاق وړ دي $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ شتون لري او له همدي کبله y د اشتقاق وړ دی

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}$$

څرنګه چي f(x) او g(x) افادی Δx پورې کومه اړه نلري

نو $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x)$ ، $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)=g(x)$ او $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

یادونه: لنډه دا چي، د دوه نسبتي تابعګانو مشتق، د مخرج ضرب د صورت مشتق سره منفي صورت ضرب د مخرج مشتق سره بیا د ټولو ویش د مخرج په مربع سره مساوي دی.

مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که چیری $y=\frac{5x^3+x^2}{x^2+2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{5x^3+x^2}{x^2-2}\right]=\frac{(x^2+2)\cdot\frac{d}{dx}(5x^3-x^2)-(5x^3+x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+2)(15x^2+2x)-(5x^3+x^2)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{15x^4+2x^3-30x^2-4x-10x^4-2x^3}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{5x^4+30x^2+4x}{(x^2+2)^2}$$

5. دعوی: که چیرې $y=f(u)$ د u یوه اشتقاق وړ تابع وي او $u=g(x)$ د x یوه اشتقاق وړ تابع وي نو $y=f[g(x)]$ د x یوه اشتقاق وړتابع ده او

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ثبوت: $y=f[g(x)]=f(u)$ چیرته چې $u=g(x)$ ده.
فرض کړئ چې د u تزاید Δu د x تزاید Δx پورې اړه لري

$$\therefore\quad u+\Delta u=g(x+\Delta x)$$

یوځلی بیا، فرض کړئ چې د y تزاید Δy د u تزاید Δu پورې اړه لري

$$\therefore\quad y+\Delta y=f(u+\Delta u)$$

په پښله کې لکه څرنګه چې Δx د x یوتزاید دی نو Δy د y تزاید ټاکل شوی دی. د x دیوی اشتقاق وړ تابع په شتون سره، u د x یوه متمادي تابع ده. لدې امله د $\Delta x\to 0$ په شان $\Delta u\to 0$ کوي.
اوس

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې y د u یوه د اشتقاق وړ تابع ده او u د x یوه د اشتقاق وړ تابع ده. لدې کبله مونږ لاس ته راوړو چې $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}$ او $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$ ، له دی امله

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

څکه نو y د x یوه اشتقاق وړ تابع ده او $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

د ثبوت بله بڼه: څنګه چې g په x کې د دیفرنشیل وړ ده او $u=g(x)$، لدې څخه څرګندېږي چې

$$\Delta u=g'(x)\cdot\Delta x+\epsilon_1\Delta x \qquad (A)$$

$$y=f[g(x)]=f(u)$$

چیرې چې $\epsilon_1\to 0$ څنګه چې $\Delta x\to 0$. او څرنګه چې په $u=g(x)$ کې د دیفرنشیل وړ ده ، لدې څخه څرګندېږي چې

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta u+\epsilon_2\Delta u \qquad (B)$$

پدې ځای کې $\Delta u \to 0$ څنګه چې $\epsilon_2 \to 0$
په (B) کې Δu فکتور کوو او سربېره پردې د (A) په تعویض کولو لاس ته راځي چې

$$\Delta y = \left[f'(u) + \epsilon_2\right]\left[g'(x)\ \Delta x + \epsilon_1\ \Delta x\right]$$
$$\Delta y = \left[f'(u) + \epsilon_2\right]\left[g'(x) + \epsilon_1\right]\ \Delta x$$

که چېرې $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'(u) + \epsilon_2\right]\left[g'(x) + \epsilon_1\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

څرنګه چې $\epsilon_1 \to 0$ ، $\epsilon_2 \to 0$ لکه چې $\Delta x \to 0$ ، له (C) څخه څرګندېږي چې

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x)$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

یادونه: لنډه دا چې، د $f[g(x)]$ مشتق د دننه تابع په ټاکل شوي ارزښت د بیروني تابع مشتق ضرب د داخلي تابع مشتق .

مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/2}$

فرض کړئ چې $U = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ، نو $y = U^{1/2}$

اوس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(U^{1/2}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ U^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) - \left(x^2-1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}\right)^{-1/2} \frac{(x^2+1)\ 2x - \left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{1/2} \cdot \frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^{1/2}\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

6. دعوی: فرض کړئ چې $y = f(x)$ د x یوه تابع ده چې په دومین کې یې د اشتقاق وړ ده .
فرض کړئ چې هغه د $x = f^{-1}(y) = g(y)$ معکوس تابع لري. نو x په همځو نقطو کې د y یوه
د اشتقاق وړ تابع ده، په کوم ځای کې چې $\frac{dy}{dx} \neq 0$ او $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ثبوت: فرض کړئ چې د x تزاید Δx دی او د y اړونده تزاید Δy دی ځنګه چې د $y = f(x)$ څخه ټاکل شوی دي. نو د x تزاید Δx د y تزاید Δy پورې اړه لري لکه چې د $x = g(y)$ څخه ټاکل شوی دی. اوس

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ځرنګه چې y د x یوه داشتقاق وړ تابع ده، لدې کېله،

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dy}{dx}$$

همدارنګه $\Delta y \to 0$ په همدی دول $\Delta x \to 0$ ، ځکه چې y د x د اشتقاق وړ تابع دي، داد x یوه متمادي تابع ده.
ځرنګه چې$\frac{dy}{dx} \neq 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

لدې امله x د y یوه د اشتقاق وړ تابع ده او $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

مثال: فرض کړئ چې $y = x^2$، لدې امله $x = \sqrt{y}$ د $y = x^2$ څخه، $\frac{dy}{dx} = 2x$
د $x = \sqrt{y}$ څخه،

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{dy/dx}$$

7. دعوی: فرض کړئ چې $x = f(t)$ او $y = g(t)$ دواړه د t متحول پرامتر اشتقاق وړ تابعګانې دي، نو
$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} =$ ، $f'(t) \neq 0$

ثبوت: $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ فرض کړئ چې $x = f(t)$، $t = h(x)$ یوه معکوس تابع لري
که چیرې $f'(t) = \frac{dx}{dt} \neq 0$
نو $y = g(t) = g[h(x)]$ یوه تابع تابع ده.
لدې امله

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$ .... (5 دعوی)

همدارنگه

(6 دعوى) ....

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

نولدي امله

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

مثال: $\frac{dy}{dx}$ پيداكړئ كه $x=t^2+3t$ ، $y=16t^3$

$x=t^2+3t$ څخه، $\frac{dx}{dt}=2t+3$

$y=16t^3$ څخه، $\frac{dy}{dt}=48t^2$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{48t^2}{2t+3}$$

۳,۳,۲ ضمني ديفرنسيل نيونه

په پخوانيو برخو كې موږ د $y = f(x)$ شكل منحنيوته مماسي خطونه ومونډل. پدې برخه كې به موږ وښيو چې هغو منحنيو ته مماس خطونه څرنگه موندلی شو د كومو معادلې چې y په څرگند ډول د x يوې تابع په شان نه تشريح كوي .
د

$$xy=1 \qquad ....(1)$$

معادله په پام كې ونيسی .

د $\frac{dy}{dx}$ لاس ته راوړلو لپاره يوه طريقه دا ده چې دغه معادله په بل ډول لكه

$$y=\frac{1}{x} \qquad ....(2)$$

وليكو، دكوموچې ضمني معنى پدې ډول ده.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

خوبیاهم پدی برخه کې بل امکان شته دی. مونږ کولی شو د (1) رابطې د دواړو خواوو دېفرنشیل پیداکړو، د x په حدونو کې د y حلولو څخه دمخه y د x یوی دېفرنشیل وړ تابع په شان چلند کوو.

پدې نژدې والي سره مونږ لاس ته راوړو چې،

$$\frac{d}{dx}[xy]=\frac{d}{dx}[1]$$

$$x\frac{d}{dx}[y]+y\frac{d}{dx}[x]=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

که چېرې مونږ (2) رابطه په وروستي افاده کې عوض کړو نو لاسته راوړو چې

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

کومه چې د پخوانی پایلې سره سمون لري. د مشتق د لاسته راوړنې دغې کړنلارې ته ضمني دیفرنشیل نیونه وایي . په ځانګړې توګه ددې ګړنلارې څخه هغه وخت کار اخیستل کیږي چې په ځرګند ډول د y حل د x په حدونو کې امکان ونه لري او یا ستونزمن وي.

مثال: د مماس دخط مېلان د (4,0) په نقطه کې د $7y^4+x^3y+x=4$ ګراف ته پیداکړئ .

مونږ په ضمني ډول دیفرنشیل نیسو،

$$\frac{d}{dx}\left[7y^4+x^3y+x\right]=\frac{d}{dx}[4]$$

$$\frac{d}{dx}\left[7y^4\right]+\frac{d}{dx}\left[x^3y\right]+\frac{d}{dx}[x]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[7y^4\right]+x^3\frac{d}{dx}[y]+y\frac{d}{dx}\left[x^3\right]+\frac{d}{dx}[x]=0$$

$$28y^3\frac{dy}{dx}+x^3\frac{dy}{dx}+3x^2y+1=0$$

$\frac{dy}{dx}$ لپاره په حل کولو . مونږ لاس ته راوړو

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y+1}{28y^3+x^3}$$

د (4,0) په نقطه کې مونږ $x=4$ ، $y=0$ لرو، دارنګه د (4,0) په نقطه کې د مماس مېل

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=4\\ t=0}} = -\frac{1}{64}$$

دی.

۴,۳,۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y=(x^2-5)\,(x^4+4)$

حل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x^2-5)\,(x^4+4)\right]$$
$$=\left(x^2-5\right)\frac{d}{dx}\left[x^4+4\right]+\left(x^4+4\right)\cdot {}^{d}\!/_{dx}\left(x^2-5\right)$$
$$=\left(x^2-5\right)4x^3+\left(x^4+4\right)\cdot 2x$$
$$=4x^5-20x^3+2x^5+8x$$
$$=6x^5-20x^3+8x$$

۲. مثال: د $\sqrt{x^2-1}$ مشتق پیداکړئ کله چې $x=-1$.

حل:

$$y=\left(x^2+1\right)^{1/2}=U^{1/2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}U^{-1/2}\cdot {}^{d}\!/_{dx}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\;\frac{1}{U^{1/2}}\cdot 2x$$
$$=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{1/2}}$$

کله چې $x=-1$،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1+1)^{1/2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳. مثال: $\frac{dy}{dx}$ وټاکئ، کله چې $x=at^3$ ، $y=2at^2$

حل: د $x=at^3$ څخه، $\frac{dx}{dt}=3at^2$

د $y=2at^2$ څخه، $\frac{dy}{dt}=4at$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4at}{3at^2}=\frac{4}{3t}$$

۴. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ کله چې $x^3+y^3=3axy+K$ $[P.U.\quad 1985]$

حل: پدې ځای کې $x^3+y^3=3axy+K$

نظر x ته د دواړو خواوو په دیفرنشیل نیولو مونږ لاسته راوړو چې

$$\frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right]=\frac{d}{dx}\left[3axy\right]-\frac{d}{dx}[K]$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\right]-\frac{d}{dx}\left[y^3\right]=3ax\frac{d}{dx}[y]+3ay\frac{d}{dx}[x]+0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3ax\frac{dy}{dx}+3ay$$

$$3\left(y^2-ax\right)\frac{dy}{dx}=3\left(ay-x^2\right)$$

نو لدې کېږي

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

۳,۲ پوښتنې

1. دلاندې تابعګانو دیفرنشیل نسبت x ته په لاس راوړئ.

$(i)\quad f(x)=x^3-7x^2+5x-9$

$(ii)\quad f(x)=px^{2n}+qx^n+r$

$(iii)\quad f(x)=x^{3/2}+\sqrt{x}$

2. دلاندې تابعګانو دیفرنشیل نسبت x ته وټاکئ.

$(i)\quad f(x)=x^n\left(1+\sqrt{x}\right)$

$(ii)\quad f(x)=\sqrt{x}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)$

$(iii)\quad f(x)=(x+5)\left(x^2-5x\right)\left(x^2+6x+7\right)$

3. دلاندې تابعګانو دیفرنشیل نسبت x ته وټاکئ.

(i) $\sqrt{a^2+x^2}$

(ii) $\sqrt[3]{x^2+x+1}$

(iii) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2$

4. دلاندي تابعگانو ديفرنشيل نسبت x ته وټاکي

(i) $f(x)=\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$

(ii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$

(iii) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

(iv) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

(v) $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)}$

5. $\dfrac{dy}{dx}$ پيداكړئ، كه چېرې

(i) $x^3+5x^2y+6y^2=9$

(ii) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

(iii) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(iv) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

6. $\dfrac{dy}{dx}$ پيداكړئ، كه

(i) $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\qquad y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$

(ii) $x=at^2,\qquad y=2at$

(iii) $x=a\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=b\dfrac{2t}{1+t^2}$

(iv) $x=4t^2+5,\qquad y=6t^3+5t^2+9$

(v) $x=a\sqrt{\dfrac{t^2-1}{t^2+1}},\qquad y=at\sqrt{\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}$

۱,۴,۲ دمثلثاتي توابعو مشتقونه

(i) د $\sin x$ مشتق

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in R$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\,(x + \frac{h}{2}) \right]$$

خرنگه چي $\cos x$ د x يوه متمادي تابع ده، مونږ لرو چي

$$\lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

او همدارنگه

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

لدي امله

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \, . \, \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= 1 .\ \cos x = \cos x$$

په پايله کي

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

پدی اړوند (cor)

$$\sin x^{0} = \sin \frac{x\pi}{180}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\sin x^0 = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}(x+h)-\sin\frac{x\pi}{180}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi x}{180}+\frac{\pi h}{360}\right)\sin\frac{\pi h}{360}}{h}$$

$$= \frac{\pi}{180}\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{\pi x}{180}+\frac{\pi h}{360}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi h}{360}}{\frac{\pi h}{360}}$$

$$= \lim\frac{\pi}{180}\quad\cos\frac{\pi x}{180}\cdot 1 = \frac{\pi}{180}\cdot\cos\frac{\pi x}{180}$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos x^0$$

په ورته ډول مونږ ثبوتولی شو چې

$(i) \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$(ii) \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$(iii) \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$(iv) \quad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$(v) \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

۲,۴,۲ دمعکوسو مثلثاتي توابعو مشتقونه

(i) د arc sinx مشتق :

فرض کړئ چې $y = \arcsin x$

نو $x = \sin y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

که چیرې $x \neq 1$ نو

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ،}$$

چېرې چې د جذر علامه لکه د cosy په شتني ده. که چېرې مونږ د $y = arc\sin x$ اصلی نسبت (ېځانګه)
په پام کې ونیسو، نو $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ، ځکه نو cosy مثبت دی. لدې امله

$$\frac{d}{dx}(arc\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| <|$$

په ورته ډول مونږ ثبوتولی شو چې

$$(ii) \quad \frac{d}{dx}(arc\cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| <|$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dx}(arc\tan x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dx}(arc\cot x) = \frac{-1}{1+x^2},$$

$$(v) \quad \frac{d}{dx}(arc\sec x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$(vi) \quad \frac{d}{dx}(arc\operatorname{cosec} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| >|$$

۳،۴،۲ د $log_a x$ مشتق

$$f(x) = \log_a x$$

د تعریف پر بنسټ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+\frac{h}{x}) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a\left(1-\frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} \\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} \\
&= \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1-\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] \\
&= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a} = \frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}
$$

چېرې چې $\ln a$ د a طبيعي لوګاريتم معنی ورکوي.

يا

$$
f(x) = \ln|x|, \quad x\in R
$$

$$
f'(x) = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}
$$

د ټولو $x\in R-\{0\}$ لپاره.

۴,۴,۲ د a^x مشتق

$$
f(x) = a^x
$$

د تعریف په واسطه

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \\
&= a^x\log_e a = a^x\ln a
\end{aligned}
$$

پدې اړونډ (cor) که $f(x)=e^x$ نو $f'(x)=e^x\ln e = e^x$.

۵,۴,۲ هايپربوليک تابعګانې

هايپربوليک تابعګانې په لاندې ډول تعريف شوېدي.

د هايپربوليک سين ، $\sin hx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

د هايپربوليک کوسين x = $\cos hx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

د هايپربوليک ټانجنټ x = $\tanh x = \frac{\sin hx}{\cos hx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

د هايپربوليک کوټانجنټ x = $x \neq 0 \quad , \quad \cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

د هايپربوليک سيکنټ x = $x \neq 0 \quad , \quad \sec hx = \frac{1}{\cos hx} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

د هايپربوليک کوسيکنټ x = $x \neq 0 \quad , \quad \operatorname{cosec} hx = \frac{1}{\sin hx} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

دغه تابعګاني ډېرې ګډې ځانګړتياوې د مثلثاتي تابعګانو سره لري . د بېلګې په ډول ، sin hx، د sinx په شان په x = 0 کې صفر (0) قېمت لري او cos hx لکه cosx په x = 0 کې يو (1) قېمت لري.
مونږ په اسانه توګه کولی شو چې لاندېني پايلې ثبوت کړو :

$(i) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$(ii) \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

$(iii) \quad \sec h^2 x = 1 - \tanh^2 x$

$(iv) \quad \operatorname{cosec} h^2 x = \cot h^2 x - 1$

$(v) \quad \sin h\ 2x = 2 \sinh x \cos hx$

۶,۴,۲ دهايپربوليک تابعګانو مشتقونه

د هايپربوليک تابعګانو مشتقونه د دوی د تعريفونو او فورمولونو مطابق په لاندې ډول دي .
ځرنګه چې $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$ او $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$ ، نو

$$\frac{d}{dx}(\sin hx) = \cos hx$$
$$\frac{d}{dx}(\cos hx) = \sin hx$$
$$\frac{d}{dx}(\tan hx) = \sec h^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot hx) = -\operatorname{cosec} h^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx \tan hx$$
$$d(\operatorname{cosec} hx) = -\operatorname{cosec} hx . \cot hx$$

۷,۴,۲ معکوس هایپربولیک تابعګانې

لکه څرنګه چې هایپربولیک تابعګاني د اکسپونېنشل تابعګانو په جملو کې تعریف شوي دي، کټ مټ معکوس هایپربولیک تابعګاني کېدی شي طبیعي لوګاریتم په جملو کې څرګندې شي . د بېلګې په ډول
فرض کړئ چې

$$y = \sin h^{-1} x$$

$$\therefore \quad x = \sin hy$$

$$\therefore \quad x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\therefore \quad 2x = e^{y} - e^{-y}$$

$$\therefore \quad e^{2y} - 2x e^{y} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

څنګه چې $e^{y} > 0$، مونږ مثبت علامه په پام کې نیسو. لدې کبله

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad y = \sin h^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 0$$

په ورته ډول مونږ کولی شوچې لاندې پایلې په لاس راوړو :

$$\cos h^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$$

$$\tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \;, \qquad |x| < 1$$

$$\cot h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \;, \qquad |x| > 1$$

$$\sec h^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{cosec} h^{-1} x = \ln \frac{\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x} \;, \qquad x > 0$$ که چیرې

$$= \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \;, \qquad x < 0$$ که چیرې

۸,۴,۲ دمعکوس هایپربولیک تابعګانو مشتقونه

(i) د $\sin h^{-1} x$ مشتق

فرض کړئ چې $y = \sin h^{-1} x$، نو $x = \sin h^{1} y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 hx}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

په پايله کې

$$\frac{d}{dx}\left(\sin h^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

په بله طريقه (يا قاعده):

$$\frac{d}{dx}\left(\sin h^{-1}x\right) = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

په ورته ډول ثبوتولی شو چې

$$(ii) \quad \frac{d}{dx}\left(\cos h^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x|>1$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dx}\left(\tan h^{-1}x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x|<1$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dx}\left(\cot h^{-1}x\right) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x|>1$$

$$(v) \quad \frac{d}{dx}\left(\sec h^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0<x<1$$

$$(vi) \quad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec} h^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad x>0$$

۹,۴,۲ لوګارېتمي ډيفرنشيل نيونه

په اوله مرحله کې ديوي تابع لوګارېتم نيول کېږي او بيايې ډيفرنشيل نيول کېږي، چې لوګارېتمي ډيفرنشيل نيونه بلل کېږي . لوګارېتمي ډيفرنشيل نيونه اړين وي کله چې تابع د $[f(x)]^{g(x)}$ په بڼه وي، پدې ځای کې

f(x) او g(x) د x تابعګاني دي. ددې میتودڅخه هغه وخت هم کاراخیستل کیږي چې کله دغه تابع دیو ټاکلي شمېر تابعګانو محصول یا پایله وي.

مثال: د x^x مشتق پیداکړئ.

حل: فرض کړئ چې $y = x^x$

د دواړو خواو په لوګارېتم نیولو، مونږ لاس ته راوړو :

$$\log_e y = x\log_e x$$

نظر x ته د دواړو خواوو په دېفرنشیل نیولو، مونږ لاس ته راوړو

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x\ln x\right]$$

$$= x\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot 1 = 1 + \ln x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x)$$

$$= y\ln ex \qquad \because \quad \ln e = 1$$

په پایله کې

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ln x)$$

$$= x^x \ln ex$$

۱۰,۴,۲ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y = \sin^3 x$

حل:

$$y = \sin^3 x = (\sin x)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\sin x)^2\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 3\sin^2\cdot\cos x$$

۲. **مثال:** $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin\sqrt{x}}$

حل:

$$y = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin x}\right) - \sqrt{\sin x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin x}\right)}{\left(\sin\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cos - \sqrt{\sin x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\sin^2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\frac{\cos x\cdot\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin x}}-\frac{\sqrt{\sin x}\cdot\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\sin^2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\cos x\cdot\sin\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\cdot\cos\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sin x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}$$

۳. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پيداکړئ که $y=\frac{1-\cos hx}{1+\cos hx}$

حل:

$$y=\frac{1-\cos hx}{1+\cos hx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos hx)\frac{d}{dx}(1-\cos hx)-(1-\cos hx)\frac{d}{dx}(1+\cos hx)}{(1-\cos hx)^2}$$
$$=\frac{(1+\cos hx)(-\sin hx)-(1-\cos hx)(\sin hx)}{(1+\cos hx)^2}$$
$$=\frac{-\sin hx-\cos hx\cdot\sin hx-\sin hx+\cosh x\cdot\sin hx}{(1-\cos hx)^2}$$
$$=\frac{-2\sin hx}{(1+\cos hx)^2}=\frac{-2\cdot 2\sin h\frac{x}{2}\cos h\frac{x}{2}}{4\cos^4 h\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{-\sin h\frac{x}{2}}{\cos^3 h\frac{x}{2}}=-\tan h\frac{x}{2}\cdot\sec^2 h\frac{x}{2}$$

۴. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پيداکړئ که $y=a\sin^3 t$, $x=a\cos^3 t$

حل: له $x=a\cos^3 t$ څخه

$$\frac{dx}{dt}=a\cdot 3\cos^2 t\frac{d}{dt}(\cos t)$$
$$=3a\cos^2 t\ (-\sin t)$$
$$=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$$

له $y=a\sin^3 t$ څخه

$$\frac{dy}{dt}=a\cdot 3\sin^2 t\cdot\frac{d}{dt}(\sin t)$$
$$=3a\sin^2 t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{\sin t}{\cos t}$$
$$=-\tan t$$

۵. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y=e^{\sin x}$

حل: $y=e^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=e^{\sin x}\cdot\cos x$$

۶. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y=\frac{xe^{2x}}{4x^2+5x+3}$

حل:

$$y=\frac{e^{2x}}{4x^2+5x+3}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4x^2+5x+3)\frac{d}{dx}xe^{2x})-xe^{2x}\frac{d}{dx}(4x^2+5x+3)}{(4x^2+5x+3)^2}$$
$$=\frac{(4x^2+5x+3)(xe^{2x}.2+e^{2x})-xe^{2x}(8x+5)}{(4x^2+5x+1)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}(8x^3+10x^2+6x+4x^2+5x+3-8x^2-5x)}{(4x^2+5x+3)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}(8x^3+6x^2-6x+3)}{(4x^2+5x+3)^2}$$

۷. مثال: $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که $y=x^{\ln x}$

حل: د دواړو خواوو په $\log$ نیولو

$$\ln y=\ln x^{\ln x}=\ln x\cdot\ln x=(\ln x)^2$$

دواړو خواوونه نظر x ته په دیفرنشیل نیولو مونږ لاس ته راوړوچې

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2\ln x\cdot{}^{d}\!/_{dx}(\ln x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx}=2y\cdot\frac{1}{x}\ln x=2x^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\ln x$$
$$=2\cdot x^{\ln x-1}\cdot\ln x$$

۸. مثال: د $\tan^2 x$ دیفرنشیل نظر $\sin x$ ته پیدا کړئ .

حل: $u=\sin x \quad , y=\tan^2 x$

نو مونږ باید $\frac{dy}{dx}$ لاس ته راوړو:

له $y=\tan^2 x$ څخه $\frac{dy}{dx}=2\tan x\cdot\sec^2 x$

له u = sin x څخه $\frac{dy}{dx}=\cos x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}$$
$$=2\tan x\cdot\sec^2 x\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\tan x\cdot\sec^3 x$$

۴,۲ پوښتنې

1. د لاندې افادو دیفرنشیلونه نظر x ته پیداکړئ.

$(i)\quad arc\tan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right) \qquad (ii)\quad x a^x \sin x$

$(iii)\quad \sin h^{-1}(\tan hx) \qquad (iv)\quad \ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)$

$(v)\quad x\ln\left(1-x^2\right)$

2. دلاندې افادو مشتقونه نظر x ته پیداکړئ..

$(i)\quad e^{ax}\sin bx \qquad (ii)\quad \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}$

$(iii)\quad e^{ax}\sin^2 x \qquad (iv)\quad \ln\frac{\sin x}{2-\cos x}$

$(v)\quad a^{\sin x}$

3. د لاندې تابعګانو دیفرنشیلونه نظر x ته پیداکړئ .

$(i)\quad f(x)=\sin hx-\frac{1}{3}\sin h^3 x \qquad (ii)\quad f(x)=a^{2x}\sin 2x$

$(iii)\quad f(x)=\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad (iv)\quad f(x)=x^{\sin x}$

4. $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړئ که

$(i) \quad y = e^x \sin\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\qquad (ii) \quad y = x^3 \, arc\tan\sqrt{4x^2+b}$

$(iii) \quad y = arc \ \sin(ax+b)$ $\qquad (iv) \quad y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$(v) \quad y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

5. $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که

$(i) \quad x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1-\cos\theta)$

$(ii) \quad x = 2\cos t - \cos 2t$

$y = 2\sin t - \sin 2t$

$(iii) \quad x = a(\cos t - t\sin t)$

$y = a(\sin t - t\cos t)$

6. $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که

$(i) \quad y - \cos(x+y) = 0$ $\qquad (ii) \quad x\cos y + y\sin x = 0$

7. $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ کله چې

$(i) \quad y = (\cos x)^{\ln x}$ $\qquad (ii) \quad x^m y^m = a^{m+n}$

8. دلاندې افادو دېفرنشیلونه پیداکړئ.

$(i) \quad x^{\sin x}$ ، ته $(\sin x)^x$ نظر

$(ii) \quad \sin^2 x$ ، ته $(\ln x)^2$ نظر

$(iii) \quad arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$، ته arc cos x^2 نظر

$(iv) \quad arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ، ته $arc\sec\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ نظر

9. $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که

$(i) \quad y = (\tan x)^{\tan x} + x^x$ $\qquad (ii) \quad x^y = e^{x-y}$

10. $\frac{dy}{dx}$ پیداکړئ که

$$(i) \qquad y=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)$$

$$(ii) \qquad y = arc\sin\frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad (iii) \quad y=(\ln x)^{\tan x} \qquad [p.u.1985]$$

11. که چیري

$$y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\ldots\ldots\ldots\infty}}}$$

وي نو ثبوت کړئ چې $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$ پيداکړئ.

12. که چيري

$$y=\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x+\sqrt{\cos x-\ldots\ldots\ldots\infty}}}$$

وي، نو $\frac{dy}{dx}$ پيدا کړئ.

۱,۵,۲ الف. د بدلون اړونده قيمتونه

پدې برخه کي به مونږ د بدلون اړوند(نسبت لرونکي) قيمتونو مسلي وڅيړو. په دارنګه مسايلو کي کوښښ کيږي چې هغه قيمت پيدا شي چې په هغه سره يو مقدار نسبت نورو مقدارونوته چې د بدلون قيمتونه يې معلوم وي پيدا شي. دارنګه کرنې لپاره، مونږ يوه معادله ليکو چې د بحث وړ متحولينو پوري اړه لري او ديفرنشيل يې نيسوچې هغه يوه معادله لاسته راوړل شي کومه چې هغه په هغه قيمت پوري اړه لري چې مونږ يې په لټون کې يو.
دا ميتود له (5) مرحلو څخه جوړشوی دی :

لومړی مرحله: شکل رسم کړئ او مختلف مقدارونه په نښه کړئ .

دويمه مرحله : د بدلون هغه قيمتونه کوم چې پيژندل شويدي يعنی معلوم دي او د بدلون هغه قيمت چې پيدا کيږي مشخص کړئ.

دريمه مرحله : هغه يوه معادله پيداکړئ چې په هغه مقدار پوري اړه لري کوم چې د بدلون قيمت يې هغو مقدارنو ته پيدا کيږي چې د بدلون قيمتونه يې معلوم وي .

څلورمه مرحله: د دغې معادلې د دواړو خواوو ديفرنشيل نظر وخت ته ونيسي او د مشتق لپاره په حل کولوسره به د بدلون نامعلوم قيمتونه ورکړل کيږي.

پنځمه مرحله: دغه مشتق په وړ مناسبه نقطه کې محاسبه کړئ.

۲,۵,۲ ب. حل شوي مثالونه

۱. مثال: یوه 5- پوړیزه زینه، چې مخامخ یودیوال تکیه دی، دهغې قاعده له دیواله څخه دارنګه ښوئیږي(حرکت کوي) ، چې د چټکتیا اندازه یې په هغه شیبه کې چې دزینې قاعده له دیوال څخه $4\,ft$ لرې وي $2\,ft/\sec$ ده. د زینې د څوکې د حرکت چټکتیا د غورځیدلو په شیبه (وخت) کې له دیوال څخه څومره ده.

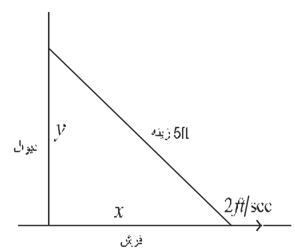
حل: فرض کړئ چې

t = د هغو ثانیوشمیر دی چې دزینې د د ښوئیدلو څخه وروسته پیل کیږي.

x = د زینې له قایدې څخه تر دیواله پورې واټن په فټ سره دی.

y = د زینې د پورتنې څوکې څخه تر ځمکې پورې واټن په فټ سره دی.

په هره شیبه کې هغه قیمت په کوم کې چې قایده حرکت کوي $\frac{dx}{dt}$ دی اوهغه قیمت په کوم کې چې د زینې څوکه حرکت کوي $\frac{dy}{dt}$ دی . مونږ غواړو چې $\frac{dy}{dt}$ پیداکړو کله چې x = 4 وي او په هماغه شیبه کې $\frac{dx}{dt} = 2\,ft/\sec$ راکړل شوی دي.



دپیثاغورث د قضیې پر بنسټ لرو چې

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad ......(1)$$

ددی معادلې د دواړو خواو نظر t ته په دیفریشیل نیولو مونږ لرو چې

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad ....(2)$$

کله چې $x = 4$، مونږ $y = 3$ له (1) څخه په لاس راوړو . له (2) څخه لرو چې :

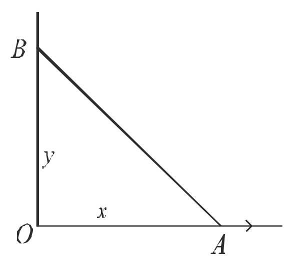
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot 2 \, ft\big/_{sec} = -\frac{8}{3} \, ft\big/_{sec}$$

په ځواب کې منفي علامه موږ ته راښيي چې y کمېږي، کوم نه چې په ظاهري ډول جوتيږي، چې د زينې ځوکه له ديوال څخه لاندې خواته په حرکت کې ده.

۲. مثال: د O له يوې نقطې څخه، دوه موټرونه په عين وخت کې حرکت کو ي، لومړی موټر ختيځ لورته سفر کوي او د t ثانيو څخه وروسته يې موقعيت $x = t^2 + t$ فټه کېږي. او بل موټر شمال لورته سفر کوي او د هغه وهل شوی واټن وروسته له t ثانيو $y = t^2 + 3t$ فټه کېږي .

په کوم قيمت سره د دواړو موټرونو تر منځ واټن وروسته له 5 ثانيوڅخه بدلون مومي؟

حل: وروسته له 5 ثانيو څخه دواړه موټرونه د A او B په نقطوکي دي.



$$x = 5^2 + 5 = 30 \, ft, \quad y = 25 + 15 = 40 \, ft$$

په هغه شيبه کې د دواړو موټرونو ترمينځ واټن

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \, f$$

دی. د $x = t^2 + t$ او $y = t^2 + 3t$ څخه $\frac{dx}{dt} = 2t + 1$ او $\frac{dy}{dt} = 2t + 3$ کېږي کله چې t = 5 sec نو

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot 5 - 1 = 11 \, ft\big/_{sec}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 5 - 3 = 13 \, ft\big/_{sec}$$

موږ د $\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(AB)$ لاسته راوړنه لرو z = AB

له $z^2 = x^2 + y^2$ څخه

$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$
$$z\frac{dz}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$$

دمعلومو قیمتونو په عوض کولوسره مونږ لاس ته راوړو چې

$$50\frac{dz}{dt}=30\cdot 11+40\cdot 13=330+520=850$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{850}{50}=17\,{ft}/_{sec}$$

۳. مثال: په یوه تاکلي شیبه (لحظه) کې د یو مکعب هره څنډه 5 in ده. اوږدوالی او حجم یې د $2\,{in^3}/_{min}$ په قیمت زیاتوالی مومي. په کومه چټکتیا د مکعب د سطحې مساحت زیاتیږي؟

حل: فرض کړئ چې
t = وخت په دقیقې
x = دمکعب څنډو اوږدوالی په انچ
$v=x^3$ = د مکعب حجم او $s=6x^2$ = مکعب د سطحې مساحت.

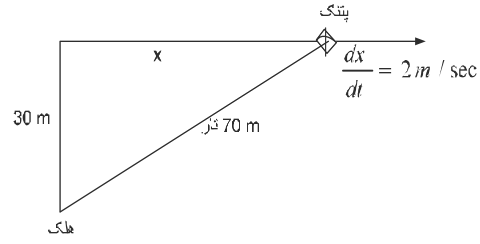
کله چې x = 5 ، $\frac{dv}{dt}=2\,{in^3}/_{min}$. مونږ باید $\frac{ds}{dt}$ پیداکړو کله چې x = 5 ، د $v=x^3$ څخه مونږ لرو

$$\frac{dv}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$$
$$2=2\cdot 5^2\cdot\frac{dx}{dt}=75\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{75}\,{in}/_{min}$$

د $s=6x^2$ څخه مونږ لرو چې

$$\frac{ds}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=12(5)\cdot\frac{2}{75}=\frac{8}{5}\,{in^2}/_{min}$$

۴. مثال: یو هلک یو پتنګ په 30 m لوړوالي الوزولی دی. که چیرې الوزول شوی پتنګ په افقی دول د هلک څخه $2\,{m}/_{sec}$ په اندازه لرې والوزول شي، د تار ورکولو چټکتیا څومره ده کله چې د خوشې شوي تار اوږدوالی 70m وي؟
حل:



فرض کړئ چې t وخت په ثانیه، x له هلک څخه تر پتنګه پورې افقي واټن په متر او z د تار اوږدالی په متر دی. د پیثاغورث (فیثاغورث) قضیې پر بنسټ

$$z^2 = x^2 + 30^2 = x^2 + 900 \quad \ldots(1)$$

کله چې $z = 70m$ ، $\frac{dx}{dt} = 2 m/_{\sec}$ او مونږ باید $\frac{dz}{dt}$ په هماغه شیبه کې پیداکړو.

د (1) رابطې څخه

$$70^2 = x^2 - 900$$
$$x^2 = 4900 - 900 = 4000$$
$$x = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10}m$$

د (1) دواړو خواوو دیفرنشیل نظر x ته نیسو .

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{10}}{70}\cdot 2 = \frac{4\sqrt{10}}{7} m/_{\sec}$$

۵,۲ الف. پوښتنې

1. د یوې کرې شعاع د $\pm 0,02cm$ اندازه کیرې احتمالي خطا په پام کې نیولو سره 50 سانتي متره ده . د کرې د حجم په محاسبه کولوکې احتمالي خطا اټکل کړئ. (ځواب $\pm 62832cm^3$)

2. د یو معکب ضلع د $\pm 5\%$ سلنې ممکنه خطا په شتون سره اندازه شوېده. د دیفرنشیل په کارولو د مربع د مساحت په محاسبه کې احتمالي خطا اټکل کړئ (ځواب $\pm 10\%$)

3. دیو قایم الزاویه مثلث مساحت د H اوږدوالي وتر په لرلو د $A = \frac{1}{4}H^2\sin 2\theta$ فورمول په کارولو محاسبه شویدی ، چېرته چې θ یوه حاده زاویه ده. دخطا تقریب د دیفرنشیل په کارولو د A په محاسبه کولو کې که چېرې H = 4 سانتي متره (په سم ډول) او $\theta = 30° \pm 15'$ وي اټکل کړئ. (خواب $\mp 0,017cm^2$)

4. د دیفرنشیل په کارولو لاندې رابطو لپاره قیمتونه اټکل کړئ.

   (i) $\sin 44^0$ (0,6948 : ځواب)

   (ii) $\sqrt{80.9}$ (8,9944 :ځواب)

5. د ګرمې هوا یو بالون له یوې هوارې ځمکې څخه مستقیماً مخ پورته خوا ته پورته شوی دی چې مسیر یې د پورته کېدو له نقطې څخه د اوږدوالي د معلومولو د آلې په وسیله اندازه شوی دی. په یوه شیبه کې د اندازه کېدو د آلې د لوړوالي زاویه $\frac{\pi}{4}$ ده. د زاویې د زیاتېدو اندازه (قیمت) $0.14 rad/_{\min}$ دی. په کومه چټکتیا سره بالون په هغې شیبه کې پورته کېږي. (ځواب $140 ft/_{\min}$)

6. اوبه د یوه مخروطي ټانک په داخل کې د $9\,{ft^3}/{min}$ قیمت له قراره توییږي. د ټانک پورتنی نقطه لاندې او 10ft لوړوالی لري او دقاعدې شعاع یې 5 ft ده. په کومې تیزۍ سره د اوبو سطحه پورته کیږي کله چې د اوبو ژوروالی 6ft وي؟ $\left({ft}/{min}\ 0.32\right)$

7. یوه زینه چې 20 m اوږدوالی لري مخامخ په دیوال تکیه ده، د زینې لاندې برخه د 2 m/sec په چټکتیا ښوییږي، په کومې تیزۍ سره د زینې پورته خوا د دیوال پاس خواڅخه لاندې ښوییږي کله چې دزینې لاندې برخه د دیوال څخه 12 متره لرې شوې وي. (ځواب $\frac{3}{2}\ \frac{m}{sec}$)

8. د اوبو یو مخروطي ټانک چې 24ft لوړوالی لري راس په ځمکه واقع دی او د قاعدې شعاع یې 10 ft. که چیرې د اوبو جریان د ټانک داخل ته $20\,{ft^3}/{min}$ په اندازه وي، په کومه چټکتیا داوبو سطحه زیاتیږي پداسې حال کې چې د اوبو ژوروالی 20ft وي. (ځواب $\frac{36}{125\pi}\,{ft}/{min}$)

9. په ولاړو اوبو کې یوه تیګه په کراره غورځیږي چې له امله یې دایروي څپې د اوبو په سطحه خپریږي.که چیرې د د دایرې د شعاع ډیریښت د 0.5 m/sec په اندازه وي، په کومې چټکتیا سره د څپې سطحه ډیریږي کله چې د څپې شعاع $20\,{m}/{sec}$ وي. (ځواب : $62.8\,{m^2}/{sec}$)

10. یو هللک خپل پتنګ په بادکې الوزوي چې باد پتنګ شرق خواته د $50\,{ft}/{min}$ په چټکتیا سره یو کوي. هلک دمخه د 200ft په اندازه تار ورکړی دی او پتنګ له لاس څخه 100ft پورته دی. په دغې شیبه کې باید په څومره تیزۍ تار ورکړل شي چې د پتنګ هماغه چټکتیا او الوتنه وساتل شي؟ (ځواب $43.3\,{fit}/{min}$)

11. یوې نجلی یو پتنګ $300\,ft$ په لوړوالي الوزولی د ی، باد پتنګ په افقی ډول له دی څخه $25\,{ft}/{sec}$ په اندازه لرې وړي. په کومې تیزۍ هغه باید تار خوشې کړي کله چې پتنګ لدې څخه 500ft لرې وي؟
(ځواب: $20\,{ft}/{sec}$)

12. فرض کړئ چې یوه مایع له رسوب څخه په مخروطي شکل فلتر کې په تویولوپاکه شویده . د مخروط لوړوالی 16 in اود مخروط د قاعدې شعاع 4 in په پام کې ونیسې. که چیرې د مایع د توئیدلو جریان د مخروط څخه بیرون طرف ته $2\,{in^3}/{min}$ په اندازه وي،کله چې د سطحې ژوروالی (عمق) 8 in وي، نو په کومه چټکتیا د مایع عمق په هماغه شیبه کې بدلون مومي؟ (ځواب : $0.16\,{in}/{min}$)

13. د 13ft لوړوالي درلودونکې یوه زینه په دیوال مخامخ ایښودل شوېده. که چیرې د زینې پورته برخه د دیوال له پاس خوانه لاندې خوا ته د $2\,{ft}/{sec}$ په چټکتیا ښویې شي، په کومې تیزۍ به د زینې لاندې برخه له دیوال څخه لرې حرکت وکړي. کله چې پاسینی برخه 5ft د ځمکې څخه پورته وي؟ (ځواب : ${5}/{6}\ {ft}/{sec}$)

14. یو کروي بالون چې له هواڅخه خالي کیږي چې له امله یې شعاع د $15 \, cm/\min$ ثابت قیمت سره سم کمښت مومي. په کومه چټکتیا باید هوا وایستل شي کله چې شعاع 9cm وي؟ (ځواب: $4860\pi \, cm^3/\min$)

15. له یوه سوري ښوي ټانکرڅخه تویې شوي تېل په دایروي ډول خپاره شوي چې مساحت یې د $6 \, m/\sec$ ثابتې چټکتیاسره ډېرښت مومي. په کومه چټکتیا سره د تويي شوو تېلو شعاع ډېرښت مومي کله چې د هغې مساحت $9m^2$ وي. (ځواب : $0.5642 \, m/\sec$)

16. له یوه نوه دوله جسم څخه شکې داسې تويي شوي چې مخروطي دوله ډیرۍ یې جوړه کړې چې لوړوالی یې تل د قطر سره مساوي وي . که چېرې لوړوالی یې د $5 \, ft/\min$ په یوې ثابتې چټکتیا ډېرښت وموميې، په کومې چټکتیا سره به شګې له نوه دوله جسم څخه تويي شي کله چې د ډیرۍ لوړوالی 10ft شي.
(ځواب : $125\pi \, ft^3/\min$)

17. د p یوه نقطه د هغه خط په اوږدو چې معادله یې y = 2x ده حرکت کوي. د (3,6) په نقطه کې وی . په هغه شیبه کې چې P د (3, 6) په نقطه کې وي د P او (3, 0) نقطې ترمنځ واټن په څومره چټکتیابدلون کوي ، که چېرې په هغې شیبه کې x د 2 unit /sec په اندازه راکم شي؟ (ځواب : ($-4 \, unit/\sec$

18. یوه 13 فوټه زینه یوه کورته مخامخ تکیه شوې ده. کله چې د زینې قاعده په ښویدو پیل کوي، په یوه وخت کې د زینې قاعده د 12 ft په اندازه د کور څخه واټن پیدا کوي، د قاعدې حرکت $5 \, ft/\sec$ دی

(a) وروسته بیا په کومې چټکتیا سره د زینې پورتنې برخه د دیوال لاندې خوا ته ښوئیږی؟ (ځواب ($12 \, ft/\sec$

(b) وروسته بیا د مثلث مساحت چې د زینې ، دیوال او ځمکې پوسیله جوړیږي په کوم قیمت بدلون مومي؟
($-59{,}5 \, ft^2/\sec$ ځواب)

(c) بیا په کومه اندازه د د زینې او ځمکې تر منځ θ زاویه بدلون کوي؟ ځواب : $\left(-1 \, radian/\sec\right)$

19. شګې د انتقالونکي کمربند څخه د $10 \, m^3/\min$ په اندازه د مخروطي دوله ډیرۍ ترپورته برخې تویږي. د شګود ډیرۍ لوړوالي تل د قاعدې د قطر دربو نه تر اته (3-8) چنده وي. په څومره چټکتیا سره (a): لوړوالی او (b): شعاع بدلون کوي کله چې ډیرۍ 4m لوړه وي؟ ځواب په cm ورکړئ
[(a) $11{,}19 \, cm/\min$ (b) $14{,}92 \, cm/\min$ ځواب]

20. یو دوربین یا کمره د یو راکټ الوزونکي له قاعدې څخه په 3000ft نقطه کې ځای پرځای دی. که چېرې راکټ 4000 ft لوړ وي د 880 ft/sec په چټکتیا عمودي ډول پورته کیږي. په هغې شیبه کې د دوربین زاویه باید څومره بدلون وکړي چې راکټ د دوربین د لیدوڅخه لرې نه شي؟ (ځواب: 0.11 (radian/sec

۱,۶,۲ تطبیقات په تجارت او اقتصاد کې

اقتصاد پوهان او تجاران د تولیدي،شیانو په برابرولواورسولو، اعلانونو، قېمتونواوداسې نورو په شان د متحولینو بدلېدو رابطېبوسره علاقمند دي. او څنگه دغه بدلونونه نور متحولین (گټه ، عایدات، اړتیا، انفلاسیون، په کارگمارنه) تر تاثیر لاندې راولي . دارنگه مسئل د مارجېنال څېړلو (انالېز) نه په کټه اخیستو مطالعه کېږي. مارجېنال لغت د اقتصاد له نظره یودبدلون قېمت یا مشتق لپاره د حد معنی ورکوي .
یو اقتصاد پوه یا یو تولیدونکې ته دغه درئ تابعگانې ډېرې ارزښناکې دي:

$C(x)$ = د کوم وخت د دوران په جریان کې د یو تولید واحدونه x د تولیدتول لگښت
$R(x)$= د وخت د دوران په جریان کې د یو تولید واحدونه x له خرڅلاو څخه ټول لاس ته راغلی عاېد
$P(x)$= د وخت د دوران په جریان کې د یو تولید واحدونه x د خرڅلاو پوسیله لاسته راغلې توله گټه
دوی په ترتیب سره د لگښت تابع، عایداتو تابع او گټې تابع نومول شوې دي . که چېرې ټول تولیدشوي واحدونه خرڅ شي، نو دوی پخپلو کې سره په لاندې ډول اړیکې لري

$$P(x) = R(x) - C(x) \qquad ....(1)$$

یعني

مصرف – عایدات = گټه

د $R'(x)$, $C'(x)$ او $P'(x)$ مشتقونو ته په ترتیب سره مارجینل (نهایي) لگښت، مارجینل (نهایي) عاید او مارجینل (نهایي) گټه ویل کېږي. که چېرې تولیدشوي ټول واحدونه خرڅ شي نود دوی ترمنځ اړیکه د (1) رابطې دېفرنشیل نیولوپوسیله ترلاسه کولی شو.

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

نهایي لگښت– نهایي عاید = نهایي گټه

د $P'(x)$, $R'(x)$ او $C'(x)$ مقدارونه نظر x ته د گټې، عاید او لگښت د بدلون لحظوي قېمتونه دي پدې ځای کې x د تولیدشوي او خرڅ شوي تولید رقم دی.
په عمل کې، ډېر وخت $C'(x)$ د $(x + 1)$ ام تولیدي واحد دقېمت په څېر معنی ورکوي. سره لدې چې دا دقیق ندی، خوبیاهم داډېر وخت یو ښه تقریب دی. د دې معنی لپاره دلیل په هغه حقیقت پورې "چې ټل x لوی دی" اړه لري، نو $\Delta x = 1$ په مقاېسوي توگه صفر ته نږدې گڼل کېږي. په پایله کې

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{C(x+1) - C(x)}{1}$$
$$= C(x+1) - C(x)$$

څرنگه چې $C(x+1)$ د $x + 1$ تولیدي واحدونو لگښت دی او $C(x)$ د x تولیدي واحدونو لگښت دی، نوداڅرگندېږي چې $c'(x) \approx c(x+1) - c(x)$ د $(x + 1)$ ام تولیدي واحد اټکلي (تقریبي) لگښت دی، په ورته ډول $R'(x)$ د $(x + 1)$- ام واحد د خرڅلاوڅخه لاسته راغلی تقریبي عایددی او $P'(x)$ د $(x + 1)$ ام واحد د خرڅلاوڅخه لاسته راغلې تقریبي گټه ده.

د x تولیدي واحدونو ټولیز (مجموعي) قېمت $C(x)$ کېدای شي لکه د یوې مجموعې په ډول څرگندشي

$$C(x) = a + M(x) \qquad ....(2)$$

پدې ځای کې a یو قېمت دی، چې سرباری یا اضافي قېمت گڼل کېږي او $M(x)$ یوه تابع ده چې د جوړېدلو قېمت په گوته کوي. په سرباری قېمت کې دکرایې او بیمې ټاکلي قېمتونه شامل دي، په x پورې اړه نه لري؛

حتا که چېرې هېڅ تولید هم نه وي شوی دا بايد ادا (تاديه) شي. په بل اړخ کې، د جوړېدو يا توليدي قيمت M(x) په کوم کې چې د موادو او کارګرانو مزد قیمتونه شامل دي، د تولید شویوشیانو په شمېر پورې اړه لري. اودا د اقتصادیه علم کې په متناسبو ساده شوونګېرنو سره بنودل شوی دی، M(x) په لاندې حالت کې څرګندېدلی شي

$$M(x) = bx + cx^2$$

په (2) رابطه کې ددې په وضع کولو سره لاس ته راځي چې :

$$C(x) = a + bx + cx^2 \qquad ....(3)$$

مثال: د رنګ د فابریکې خاوند په ورځ کې د x ګېلنه تولیدشوې رنګ تولیز قیمت

$$C(x) = 5000 + x + 0.001x^2$$

ټاکلی دی.

(a) د خرڅلاو نهايي لګښت پيداکړئ کله چې د توليداندازه په يوه ورځ کې 500 ګلنه وي.
(b) دنهایي لګښت نه په کاراخیستو سره د 501 ام ګېلن د تولیدتقریبي لګښت معلوم کړئ.
(c) د 501 ام ګېلن حقيقي (واقعي) لګښت پيداکړئ.

حل:

(a) نهایي (مارجینل) لګښت دی:

$$C'(x) = 1 + 0,002x$$

همدارنګه ،

$$C'(500) = 1 + 0,002(500) = 2$$

(b) څرنګه چې $C'(500) = 2$ دی، نو د 501 ام ګېلن د تولید لګښت په تقريبي دول Rs. 2.00 دی.
(c) د 501 ګیلنونود تولید تولیز لګښت مساوي دی په

$$C(501) = 5000 + 501 + 0,001(501)^2 = Rs.5752.001$$

او د 500 ګیلنونود تولید تولیز لګښت دی:

$$C(500) = 5000 + 500 + 0.001(500)^2 = Rs.5750,00$$

نو د 501 ام ګیلن د تولید حقیقي لګښت دی:

$$C(501) - C(500) = Rs.\ 2.001$$

يادونه: که چېرې يو توليدي شرکت ټول توليد شوي شيان هر يويعني (هر قلم) په p روپو خرڅ کړي، نو د ده ټول عايد به R(x) وي:

$$R(x) = px$$

او د ده ټوله ګټه به P(x) وي:

$$P(x) = R(x) - C(x) = p(x) - C(x)$$

په پايله کې که چېرې د لګښت تابع د (3) رابطې پوسيله راکړل شوې وي نو

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \qquad ....(4)$$

په ځینو لاملونو لکه د کارکوونکو شمېر، د شته ماشین آلاتو شمېر، اقتصادی شرايط او رقابت پورې اړوند، به دتوليدي شيانو د شمېر چې توليدي شرکت يې د جوړېدو او خرڅلاو وړتيا لري پورتنی کوم حد شتون

ولري. نو پدې ډول، د يو ټاکلي وخت دوران په جريان کې د x متحول به په (4) رابطه کې$0 \le x \le l$ صدق وکړي.

په $[0, l]$ کې د x قيمت يا قيمتونو د ټاکلو پوسيله هغه چې (4) ترټولو لوړ (اعظمي)حدته رسوي، شرکت ددې وړتيا پيداکوي چې په ګوته کړي دوی څومره شيان بايدتوليد او خرڅ کړي چې ترټولو ډېره ګټه لاسته راوړي. دا په لاندې مثال کې ښودل شوی دی :

مثال: د امپيسيلين څخه جوړ د مايع (شربت) چې د دارو جوړولو يو شرکت له خوا توليدشوی ده. هر واحد په عمده ډول د Rs. 200 په نرخ خرڅ شوی دی . که چېرې د ټول توليد لګښت د x واحدونو لپاره

$C(x) = 500{,}000 + 80x + 0.003x^2$

وي او که چېرې د شرکت توليدي وړتياپه يوې ځانګړې موده کې 30000 واحده وي، نوپه هماغې موده کې بايد څومره واحده امپيسيلين خرڅ شي چې تر ټولو لوړه ګټه تر لاسه کړي؟

حل :

څرنګه چې د x واحدونو خرڅلاو لپاره ټول عايد R(x) = 200x دی، نود x واحدونوګټه P(x) به په لاندې ډول وي:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (500{,}000 + 80x + 0.003x^2) \qquad ....(1)$$

څرنګه چې د توليدترټولوډېره وړتيا 30,000 واحده ده . x بايدد $[0, 30{,}000]$ په داخل کې واقع شي. .

له (1) څخه

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0.006x) = 120 - 0.006x$$

د $\frac{dP}{dx} = 0$ په نيولو سره لاس ته راځي چې $120 - 0.006x = 0$ يا $x = 20{,}000$

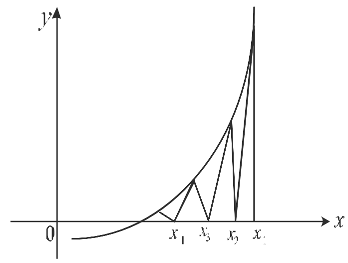
څرنګه چې دغه بحراني نقطه د$[0, 30{,}000]$ په داخل کې واقع ده، نوترټولو ډېره ګټه بايدپه يوې ددغو نقطوکې ($x = 0$ ، $x = 20{,}000$ يا $x = 30{,}000$) واقع شي :

په (1) کې د دغو قيمتونو په وضع کولو جوتيږي چې ترټولوډېره ګټه کله چې $x = 20{,}000$ واحده توليد او په ټاکلې موده کې خرڅ شي $P = \text{Rs. } 700{,}000$ کيږي .

۲,۶,۲ دنيوټن رافسون فورمول

دا يو ميتود دی چې د $f(x) = 0$ معادلې د حل کولو لپاره تر ښه کاراخيستل کيږي. موږ تر هر څه د مخه يادونه کوو چې د $f(x) = 0$ حلونه د x قيمتونه دي چېرې چې د f(x) ګراف د x له محور څخه تيريږي . فرضوو چې x = r هغه حل دی چې موږ يې په لټون کې يو.

که چېرې موږ د r قيمت هيڅ وخت په دقيق ډول تر لاسه نشوکړلی، خو دا امکان شته چې په اټکلي ډول په هغه ځای کې چې د f(x) ګراف رسمولو پوسيله د x محور قطع کيږي اټکل کړو. که چېرې موږ r ته لومړی نژدېوالی x وکڼو، نو موږ کولی شو په عمومي ډول دا اټکل په x کې د y = f(x) مماس خط په اوږدو کې د حرکت پوسيله ځو چې د x محور سره دx_2 په نقطه کې مخامخ شي. ډېری وخت x_2 دx_1 څخه r ته نږدې وي.



د دې لپاره چې ا تكل نور هم سم شي، مونږ كولاى شوهغه پروسه چې د x_1 په نقطه كې $y = f(x)$ مماس خط په اوږدوكې د حركت پوسيله څو چې د x محور سره د x_3 په نقطه كې مخامخ شي تكرار كړو .
په دا ډول كړنه مونږ د $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ قيمتونه رامنځته كولاى شو هغه چې ډېرى وخت r ته نږدې كېږي او نږدې كېږي. د اتكل دغې كړنلارې ته د نيوټن رافسون فورمول يا په اسانه توګه د نيوټن ميتود وايي.

اوس يو فورمول لاس ته راوړو چې هغه به مونږ ته په ګوته كړي چې په څه ډول هر سم شوى اتكل له پخواني اتكل څخه محاسبه كولى شو. د دغې موخې لپاره مونږ پادونه كوو چې دلومړني نزديوالي x_1 په نقطه كې $y = f(x)$ ته د مماس خط چې د نقطې مېل يې جوړ كړى عبارت دى له

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \qquad \ldots\ldots..(1)$$

كه چېرې $f'(x_1) \neq 0$، نو دا خط د x له محور سره موازي ندى او په پايله كې د x محورد $(x_2, 0)$ په نقطه كې قطع كوى . په (1) رابطه كې ددې نقطې د مختصاتو په وضع كولو لاس ته راځى چې:

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

x_2 لپاره په حل كولو، لاس ته راوړو چې :

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

يا

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \ldots\ldots..(2)$$

راتلونكي اتكل هم كېداى شي چې په ډېره اسانې سره لاسته راشي. كه چېرې مونږ x_2 لكه د پيل اتكل او x_3 نوى اتكل ومنو. مونږ په ډېرې اسانى سره كولى شوچې په (2) رابطه كې x_2 د x_1 په ځاى او x_3 د x_2 په ځاى وكاروو . د دې څخه په لاس راځى چې

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \ldots\ldots(3)$$

که چیرې د کوم n لپاره $f'(x_2) \neq 0$. په عمومي ډول که چیرې x_n n ام اټکل وي ، نو دا د (2) او (3) نمونو څخه روښانه ده چې د x_{n+1} سم شوی اټکل د نیوټن د میتود پوسیله په لاندې ډول لاسته راځي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 1,2,3,...... \qquad ......(4)$$

یادونه:
که چیرې د کوم n لپاره $f'(x_n) = 0$ شي. نو دا فورمول کار نه ورکوي ځکه چې دلته په 0 د ویش حالت رامنځته کیږي. په هر حال، دا توقع شته چې دا حالت پیښ شي ځکه چې $y = f(x)$ ته مماس خط د x له محور سره موازي وي کله چې $f'(x_n) = 0$ او همدارنګه دغه مماس خط د x محور نه قطع کوي چې راتلونکي اټکل رامنځ ته کړي.

۳,۶,۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: دنیوټن میتود په کارولو د $x^3 - x - 1 = 0$ حل پیداکړئ.

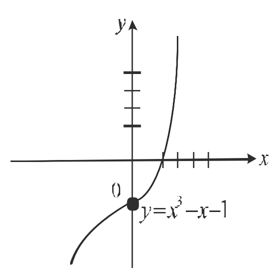
حل: فرض کړئ چې $f(x) = x^3 - x - 1$ ، نو $f'(x) = 3x^2 - 1$ او (4) رابطه لاندې بڼه غوره کوي

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^3 - x_n - x_n^3 + x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$$

یا

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1} \qquad ....(5)$$



د f(x) ګراف څخه مونږ ته څرګندیږي چې راکړل شوی معادله یواځې یو حقیقي حل لري . دا حل د 1 او 2 په مینځ کې واقع دی ځکه چې $f(1) = -1 < 0$ او $f(2) = 5 > 0$. مونږ به $x_1 = 1,5$ د لومړي اټکل په توګه وکاروو. په (5) مسوات کې n = 1 په نیولو او $x_1 = 1,5$ په وضع کولو سره لاس ته راوړو چې

$$x_2 = \frac{2(1.5)^3 + 1}{3(1.5)^2 - 1} = 1.34782609$$

(مونږ دهغه حساب ماشین څخه کار اخیستی چی (9) رقمو نه ښودلی شي). وروسته، په (5) کې n = 2 نیسو اود $x_2 = 1.34782609$ په وضع کولو لاس ته راوړو چي

$$x_3 = \frac{2(1.34782609)^3 + 1}{2(1.34782609)^2 - 1} = 1.32520040$$

که چیري دغی عملیی نه تر هغه پوري دوام ورکړو چي دوه یوشانته اټکلونه یو په بل پسی مینځ ته راشي، نومونږ به لاس ته راوړو چي :

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.34782609$

$x_3 = 1.32520040$

$x_4 = 1.32471817$

$x_5 = 1.32471796$

$x_6 = 1.32471796$

پدې مرحله کی نور ددې پروسې دوام ورکولو ته اړتیا نشته ځکه مونږ خپلی محاسبی پوسیله دقیق حد ته رسیدلي یو، او ټول وروستني اټکلونه به چې لاس ته راځي یو شانته وي. په پایله کې حل په اټکلي ډول

$x = 1.32471796$ دی.

۲. مثال: دنیوټن رافسون میتود په کارولو سره د $x^3 - 5x^2 - 29 = 0$ معادله حل کړئ، سم حل 4 رقمونو پوري څرګندکړئ.

حل: فرض کړئ چي

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 29$$

نو

$$f'(x) = 3x^2 - 10x$$

د نیوټن - رافسون فورمول په بنسټ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 - 29}{3x_n^2 - 10x_n}$$

$$= \frac{2x^3 - 5x_n^2 + 29}{3x_n^2 - 10x_n} \qquad \text{........(1)}$$

$$f(0) = -29,\ f(1) = -33,\ f(5) = -29,\ f(6) = 7$$

د غوښتل شوی حل د 5 او 6 په مېنځ کي واقع دی.

په (1) مساوات کي د n = 1 په نیولو او $x_1 = 5$ په وضع کولو لاس ته راوړو چي :

$$x_2 = \frac{2(5)^3 - 5(5)^2 + 29}{3(5)^2 - 10\cdot(5)} = 6.1600$$

$$x_3 = \frac{2(6.1600)^3 - 5(6.1600)^2 + 29}{3(6.1600)^2 - 10(6.1600)} = 5.7825$$

$$x_4 = \frac{2(5.8725)^3 - 5(5.8725) + 29}{3(5.8725)^2 - 10(5.8725)} = 5.8481$$

$$x_5 = \frac{2(5.8481)^3 - 5(5.8481)^2 + 29}{3(5.8481)^2 - 10(5.8481)} = 5.8482$$

غوښتل شوی حل پوره تر 4 رقمونو پورې 5.848 دی .

۳. مثال: د نیوټن رافسون میتود په کارولو سره د $e^x = 10 - x$ معادلې سم حل تر 4 رقمونو پورې لاسته راوړئ .

حل: فرض کړئ چې $f(x) = e^x + x - 10$ ، نو ئدی کېله $f'(x) = e^x + 1$

$$f(0) < 0 \quad , f(1) < 0 \quad , f(2) < 0 \quad \text{او} \quad f(3) > 0$$

$\therefore$ حل د 2 او 3 په مېنځ کې واقع دی .

د نیوټن د فورمول په بنسټ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n - 10}{e^{x_n} + 1}$$

$$= \frac{x_n e^{x_n} + x_n - e^{x_n} - x_n + 10}{e^{x_n} + 1} = \frac{e^{x_n}(x_n - 1) + 10}{e^{x_n} + 1}$$

د $x_1 = 2$ لپاره e = 2,718 په پام کې نیول کېږي.

$$x_2 = \frac{e^2(2-1) + 10}{e^2 + 1} = 2.073$$

$$x_3 = \frac{e^{2.073}(2.073 - 1) + 10}{e^{2.073} + 1} = 2.0708$$

$$x_4 = \frac{e^{2.0708}(2.0708 - 1) + 10}{e^{2.0708} + 1} = 2.0708$$

تر څلورو عمده رقمونو پورې حل 2.071 دی.

۶,۲ ب. پوښتنې

1. (الف) د یوې کېمیاوي کارخانې خاوند سلفوریک اسید په عمده ډول هر یو واحدد 100 افغانیو په قیمت خرڅوي. که چېرې د ورځنې تول تولید لګښت په افغانیو د x واحدونو لپاره مساوي وي له

$$C(x) = 100{,}000 + 50x + 0.0025x^2$$

او که چېرې د ورځني تولید ډېرې ظرفیت 7000 واحدونه وي، څومره واحده سلفوریک اسید باید تولید او په ورځ کې خرڅ شي چې ګټه لوړه شي؟ (ځواب : 7000)

(ب) د کارخانې خاوند پدې ګټې سره کولی شي چې د ورځني تولید ظرفیت ډېر کړئ ؟ (ځواب : بلی)

2. د x واحدونو تولید ټول لګښت په هفته کې، $C(x)=2000+4x+0.1x^2$ دی .

الف : نهایي لګښت (marginal cost) پیداکړئ کله چې د تولید اندازه 100 واحده وي. (ځواب : 24)
ب : د نهایي لګښت قېمت په کارولو د 101- ام تولیدي واحد لګښت اټکل کړئ. (ځواب : Rs.24)
ج : د 101 - ام تولیدي واحد حقیقي لګښت پیداکړئ. (ځواب : 24.10)
د: فرض کړئ چې جنس هر واحد په 10 افغانۍ خرڅ شوی دی، د نهایي عاېد نهایي ګټې تابع پیداکړئ. (ځواب: $10.6-0.2x$).

3. یوې کارخانې ټاکلې ده چې د دوی x تولیدي واحدونه به په ورځ کې هرواحد په p افغانیو خرڅ کړل شي ، چېرې چې $x = 1000 - p$.
د x تولیدي واحدونو لګښت په ورځ کې $C(x) = 3000 + 20x$ ده ،

(a) د عایداتو تابع R(x) پیداکړئ. (ځواب : $1000x-x^2$)
(b) د ګټې (فایدې) تابع P(x) پیداکړئ. (ځواب : $980x-x^2-3000$)
(c) فرض کړئ چې د تولید ظرفیت په یوه ورځ کې تر 500 واحده دی، څرګند کړئ چې کمپنی باید هره ورځ څومره واحده تولید او خرڅ کړي چې ګټه یې ډېرېښت ومومي. (ځواب : 490)
(d) اعظمي ګټه پیداکړئ . (ځواب : Rs .237100)
(e) په فی واحد باید کوم قېمت چارج (اضافه) شي تر څو اعظمي ګټه لاس ته راشي. (ځواب510 . Rs)

4. $\sqrt{2}$ دنیوټن میتود د کارولو پوسیله د $x^2 - 2 = 0$ معادلې لپاره اټکل کړئ. (ځواب : 1.4142)

5. $\sqrt[3]{6}$ دنیوټن میتود د کارولو پوسیله د $x^3 - 6 = 0$ معادلې لپاره اټکل کړئ. (ځواب : 1.8171)

6. هره یوه لاندېنې معادله یو حقیقي حل لر ي . دا دنیوټن میتود پوسیله اټکل کړئ .

$(a)\quad x^3-x+3=0$	(-1.6717)	ځواب :
$(b)\quad x^5+x^4-5=0$	(1.2244)	

7. هره یوه لاندېنې معادله یو حل لري چې په راکړشوې حالت کې صدق کوي. دا د نیوټن میتود پوسیله اټکل کړئ.

$(a)\ 2x^2+4x-3=0\ ,\ x>0$	(ځواب : 0.5811)
$(b)\ x^4+x-3=0, x<0$	(ځواب : -1.4526)
$(c)\ 2\sin x=x\ ,\quad x>0$	(ځواب : 1.8955)

8. د نیوټن - رافسون میتود په کارولو تر 4 اعشاري رقمونو پورې د $e^x-\sin x=c$ معادلې جذرونه 0.5 ته نژدې پیداکړئ. (ځواب : 0,5885)

9. دنيوټن - رافسون ميتود په کارولو تر دوه اعشاري رقمونو پورې د $e^{x}-3x=0$ معادلې جذر محاسبه کړئ کوم چې د 0 او 1 په منځ کې واقع وي. (ځواب : 0.62)

10. د نيوټن - رافسون ميتود په کارولو تر دريو اعشاري رقمونو دلاندېنيو معادلو جذرونه لاسته راوړئ.

(a) $x^{5}+5x+1=0$ (ځواب : -0.199)

(b) $\sin x=1-x$ (ځواب : 0.511)

۱,۷,۲ دلوړې درجې (ياد عالي ترتيب) مشتقات

فرض کړئ چې $f(x)$ يوه تابع ده. د دې مشتق $f'(x)$ په عمومي ډول سره د x يوه تابع ده. $f'(x)$ کېدای شي د شتقاق ور وي او د $f'(x)$ مشتق ته د $f(x)$ نظر x ته دويم مشتق وايي او د $f''(x)$ په بڼه ليکل کيږي. د $f(x)$ دريم مشتق $f'''(x)$ په بڼه ښودل کيږي اودې ته په ورته ډول نور... پدې ډول

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

او

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$$

او داسې نور.

د $y=f(x)$ پرله پسې مشتقات په لاندې بڼو سره ښودل کيږي

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^{2}y}{dx^{2}},\ \frac{d^{3}y}{dx^{3}},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^{n}y}{dx^{n}},\ldots\ldots\ldots$$

يا

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots\ldots\ldots\ldots f^{(n)}(x),\ldots\ldots\ldots$$

د ليکلو نورې بڼې يې په لاندې ډول دي

$$y_{1},\ y_{2},\ y_{3},\ldots\ldots\ldots y_{n},\ldots\ldots\ldots$$

او

$$y',\ y'',\ y''',\ldots\ldots\ldots y^{(n)},\ldots\ldots\ldots$$

مثال: که چېرې $y=x^{2}.\sin x$ وي، نو $\frac{d^{3}y}{dx^{3}}$ پيداکړئ.

$$y=x^{2}\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=2x\sin x-x^{2}\cos x$$

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^{2}\sin x$$

$$=-x^{2}\sin x+4x\cos x-2\sin x$$

$$\frac{d^{3}y}{dx^{3}}=-2x\sin x-x^{2}\cos x+4\cos x-4x\sin x+2\cos x$$

$$=-x^{2}\cos x-6x\sin x+6\cos x$$

۲,۷,۲ د n - ام مشتق محاسبه

د $(ax+b)^m$، n ام مشتق

فرض کړئ چې $y=(ax+b)^m$

خنګه چې

$$\therefore \quad y_1 = m(ax+b)^{m-1}a = ma(ax+b)^{m-1}$$

$$y_2 = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}$$

$$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}$$

همداشنتې په عمومي ډول

$$y_n = m(m-1)(m-2)......(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$$

1. پاړله: په هغه حالت کې چې، m یو مثبت تام عدد وي، y_n په لاندې ډول لیکلای شو

$$y_n = \frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n}$$

او د m = n په حالت کې، د $(ax+b)^m$، m- ام مشتق د $m!\,a^n$ یو ثابت دی او $y_n = 0$ که چېرې $n > m$.

2. پاړله: $m=-1$ په حالت کې، $y=\dfrac{1}{ax+b}$

$$y_n = (-1)(-2)......(-n)a^n(ax+b)^{-1-n}$$

$$= \frac{(-1)^n(n!)a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

یعني

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{ax+b}\right] = \frac{(-1)^n(n!)a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

3. پاړله: فرضوو چې $y=\ln(ax+b)$

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a(ax+b)^{-1}$$

$$y_n = a\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(ax+b)^{-1}\right]$$

$$= a\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^{n-1}}{(ax+b)^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$$

یعني

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\ln(ax+b)\right] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$$

۳,۷,۲ د sin(ax+b) n ام مشتق

$$y = \sin(ax+b)$$

$$y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin(ax+b+\frac{\pi}{2})$$

$$y_2 = a^2\cos(ax+b+\frac{\pi}{2}) = a^2\sin(ax+b+\frac{2\pi}{2})$$

$$y_3 = a^3\cos(ax+b+\frac{2\pi}{2}) = a^3\sin(ax+b+\frac{3\pi}{2})$$

همداشانتی ، په عمومي ډول سره

$$y_n = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

یعني

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\sin(ax+b)\right] = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

په ورته ډول

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\cos(ax+b)\right] = a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

۴,۷,۲ د $e^{ax}\sin(bx+c)$ n ام مشتق

$$y = e^{ax}\sin(bx+c)$$

$$y_1 = e^{ax}a\sin(bx+c) + e^{ax}\cdot b\cos(bx+c)$$

$$= e^{ax}\left[a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c)\right]$$

فرض کړئ چې $b = r\sin\theta \quad , a = r\cos\theta$

$$\therefore \quad r = \sqrt{a^2+b^2}\ , \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

لدې امله مونږ لرو چې

$$y_1 = re^{ax}\sin(bx+c+\theta)$$

$$y_2 = re^{ax}a\sin(bx+c+\theta) + re^{ax}b\cos(bx+c+\theta)$$

$$= re^{ax}\left[a\sin(bx+c+\theta) + b\cos(bx+c+\theta)\right]$$

$$= r^2e^{ax}\sin(bx+c+2\theta)$$

نولدې کبله په عمومي ډول سره

$$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx+c+n\theta)$$

یعني

$$\frac{d^n}{dx^n} = \left[e^{ax}\sin(bx+c)\right] = r^n e^{ax}\sin(bx+c+n\theta)$$

چېرې چې $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = arc\tan\frac{b}{a}$

په ورته ډول

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]=\left(a^2+b^2\right)^{n/2}e^{ax}\cos(bx+c+\tan^{-1}\frac{b}{a})$$

۵,۷,۲ د a^x n ام مشتق

$$y=a^x$$
$$y_1=a^x\ln a$$
$$y_2=a^x(\ln a)^2$$
$$y=a^x(\ln a)^3$$

همداشانتې په عمومي ډول سره

$$y_n=a^x(\ln a)^n$$

یعنې

$$\frac{d^n}{dx^n}|a^x|=a^x(\ln a)^n$$

پایله : که چېرې $y=e^{ax}$، نو

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{ax}]=a^n\ e^{ax}$$

دالجبري نسبتي تابع n ام مشتق

د هرې الجبري نسبتي تابع n ام مشتق د ټاکلو په کړنلاره کې موږ تابع په قسمي کسرونو باندې تجزیه کړو.
ځینې وخت دې ته هم اړتیا پیدا کېږي چې د ډيموور دعوی (demoivre's theorem) وکاروو کومه چې دارنګه بیان شوېده :

$$(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta,$$

چېرې چې n مثبت یا منفي کوم تام عدد دی، او $i=\sqrt{-1}$

۶,۷,۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: که چېرې $x=a(\cos\theta-\theta\sin\theta)$، $y=(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ وي $\frac{d^2y}{dx^2}$ پیداکړئ .

حل:

$$x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta}=a(-\sin\theta+\theta\cos\theta+\sin\theta)=a\theta\cos\theta$$

او

$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \theta\sin\theta - \cos\theta) = a\theta\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\theta) = \sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\theta\cdot\frac{1}{a\theta\cos\theta} = \frac{\sec^3\theta}{a\theta}$$

۲. مثال: د $\frac{8x-13}{2x^2+7x+6}$ n ام مشتق پيداکړئ.

حل:

$$y = \frac{8x+13}{2x^2+7x+6} = \frac{8x+13}{(2x+3)(x+2)} = \frac{2}{2x+3} + \frac{3}{x+2}$$

$$\therefore \quad y_n = 2\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!2^n}{(2x+3)^{n+1}} + 3\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot n!\,2^{n+1}}{(2x+3)^{n+1}} + 3\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$$

۳. مثال: د $\frac{x}{x^2+a^2}$ n ام مشتق پيداکړئ ؟

حل: مونږ لرو چې

$$y = \frac{x}{x^2+a^2} = \frac{x}{(x-ai)(x+ai)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-ai} + \frac{1}{x+ai}\right]$$

$$\therefore \quad y_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(x-ai)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-ai)^{n+1}}\right\} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left\{\frac{1}{(x-ai)^{n+1}} + \frac{1}{(x-ai)^{n+1}}\right\}$$

د لاس ته راغلي پايلې څخه د i په ازادولوسره ، مونږ ليکو چې

$$x = r\cos\theta\ , \qquad a = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+a^2}\ , \qquad \theta = arc\ \tan\frac{a}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x-ai)^{n+1}} = \frac{1}{r^{n-1}}(\cos\theta - i\sin\theta)^{-(n+1)}$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}}\{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\}$$

او

$$\frac{1}{(x-ai)^{n-1}}=\frac{1}{r^{n-1}}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^{-(n-1)}$$

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\left\{\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta\right\}$$

لدي امله

$$y_n=\frac{(-1)^n n!\cos(n-1)\theta}{r^{n-1}}$$

چېرته چي $r=\sqrt{x^2+a^2}\quad,\ \theta=arc\ \tan\frac{a}{x}$

۴. مثال: د $\sin 2x\sin 3x$ n ام مشتق پيداکړئ.

حل:

$$y=\sin\ 2x\sin 3x=\frac{1}{2}\left(2\sin 2x\sin 3x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 5x\right)$$

$$\therefore\quad y_n=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-5^n\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

۵. مثال: که چېري y = x + tan x وي، ثبوت کړئ چي

$$\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}+2x=2y$$

حل:

$$y=x+\tan x$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=1+\sec^2 x$$

او

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\sec^2 x\tan x$$

$$\therefore\quad \cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}=2\tan x=2y-2x$$

نولدي کبله

$$\cos^2 x\frac{d^{2y}}{dx^2}=+2x=2y$$

۷,۲ پوښتني

۱. د

$(i)\quad x^7 \qquad\qquad (ii)\quad x^5\sin x$

$(ii\,)\quad x^3\ln x \qquad\qquad (iv)\quad x^3 e^x$

دریم مشتق پیداکړئ ؟

۲. که چېرې $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ وي ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ پیداکړئ.

۳. که چېرې y = A sin mx + B cos mx ، ثبوت کړئ چي $y_2+m^2y=0$.

۴. که چېرې y = sin (sinx) ، ثبوت کړئ چي $y_2+\tan x\, y_1+\cos^2 x\, y=0$.

۵. که چېرې $y=\dfrac{\ln x}{x}$ ، وښایاست چي $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

۶. که چېرې y = ln (sin x) ، ثبوت کړئ چي $y_3=\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

۷. که چېرې $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ ، ثبوت کړئ چي $y_2(1)=0$.

۸. د $(iii)\ \dfrac{x}{2x^2+3x+1}$, $(i)\ \dfrac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$ n ام مشتق پیداکړئ .

۹. د $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)}$ n ام تفاضل ضریب پیداکړئ .

۱۰. د

$(i)\quad \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x, \qquad (ii)\quad \sin^2 x\cdot\cos^3 x$

$(iii)\quad e^{ax}\cos^2 x\cdot\sin x$

n اوم مشتق پیداکړئ.

۱۱. د $\dfrac{x^2+4x+1}{x^3+2x^2-x-2}$ n - ام او لسم مشتق پیداکړئ.

۱,۸,۲ د لیبنېڅ دعوی

که چېرې y = U · V ، چېرته چي U او V د x د n ام ترتیب مشتق په لرلو تابعګاني دي ، نو

$$y_n=(UV)_n=\binom{n}{o}U_nV+\binom{n}{1}U_{n-1}V_1+\binom{n}{2}U_{n-2}V_2+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\binom{n}{r}U_{n-r}V_r+\ldots..+\binom{n}{n}UV_n$$

ثبوت : مونږ په دغه دعوی د ریاضکي استقرا پوسیله ثبوت کړو. مونږ لروچي

$$(UV)_1 = U_1V + UV_1 = \binom{1}{0}U_1V + \binom{1}{1}UV_1$$

او

$$(UV)_2 = U_2V + U_1V_1 + U_1V_1 + UV_2 = U_2V + 2U_1V_1 + UV_2$$
$$= \binom{2}{0}U_2V + \binom{2}{1}U_1V_1 + \binom{2}{2}UV_2$$

لدې امله دعوى د n = 1, 2 لپاره سمه ده.
فرضوو چې د n = k لپاره هم نوموړې دعوى سمه ده.

$$\therefore \quad (UV)_k = \binom{k}{0}U_kV + \binom{k}{1}U_{k-1}V_1 + \binom{k}{2}U_{k-2}V_2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad + \binom{k}{r}U_{k-r}V_r + \ldots\ldots\ldots + \binom{k}{k}UV_k$$

نظر x ته د دواړو خوا وو په تفاضل نيولو مونږ لاس ته را وړو چې

$$(UV)_{k+1} = \binom{k}{0}U_{K+1}v + \binom{k}{0}U_Kv_1 + \binom{k}{1}U_Kv_1 + \binom{k}{1}U_{K-1}v_2 + \binom{k}{2}U_{K-1}v_2 + \binom{k}{0}U_{K-2}v_3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \binom{k}{r}U_{K-r+1}v_r + \binom{k}{r}U_{K-r}v_{r+1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{k}{k}U_1v_k + \binom{k}{k}Uv_{k+1}$$

مونږ پوهيږو چې

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$$
$$\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$$

او

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

په خاص ډول د ......r = 1, 2, 3 لپاره

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{1}$$
$$\binom{k}{1} + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{2}$$

او همدارنگه نور

$$(UV)_{k+1} = \binom{k+1}{0} U_{k+1} V + \binom{k-1}{1} U_k V_1 + \binom{k+1}{2} U_{k-1} V_2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{k+1}{r} U_{k-r+1} V_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{k+1}{k+1} U V_{k+1}$$

په پایله کې که چېرې دعوی د n دهر k قیمت لپاره سمه وي، نو دا د n د بل لوی قیمت k+1 لپاره هم سمه ده. نولدې امله دعوی د n دټولو تاموقیمتونو لپاره صدق کوي.

۲.۸.۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $x^3 e^{ax}$ n ام مشتق پیداکړئ .

حل: مونږ لیکو چې $y = x^3 e^{ax}$

$$u = e^{ax} \qquad \therefore \quad u_n = a^n e^{ax}$$

$$\therefore \quad y_n = a^n e^{ax} x^3 + \binom{n}{1} a^{n-1} e^{ax} 3x^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} e^{ax} \cdot 6x + \binom{n}{3} a^{n-3} e^{ax} \cdot 6$$

$$= a^n e^{ax} x^3 + 3n\, a^{n-1} e^{ax} x^2 + 3n(n-1) a^{n-2} e^{ax} x + n(n-1)(n-2) a^{n-3} e^{ax}$$

۲. مثال: که چېرې $y = a \cos (\ln x) + b \sin(\ln x)$ وښایاست چې $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ او
(P.U. 1990)

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) xy_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$ ،

حل: د $y = a \cos (\ln x) + bisn(\ln x)$ څخه نظر x ته په تفاضل نیولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$y_1 = -a \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + b \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad xy_1 = -a \sin(\ln x) + b \sin(\ln x)$$

یوځل بیا په مشتق نیولو مونږ په لاس راوړو چې

$$xy_2 + y_1 = -a \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - b \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y_2 + xy_1 = -\{a \cos(\ln) + b \sin(\ln x)\} = -y$$

نولدې کبله $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$.

دلیبنیځ ددعوی پوسیله n ځلې په تفاضل نیولو لاس ته راوړو چې

$$y_{n+2} x^2 - n y_{n+1} 2x + \frac{n(n-1)}{2} y_n \cdot 2 - y_{n+1} x + n y_n \cdot 1 - y_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + (n^2 - n) y_n - xy_{n+1} + ny_n - y_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y_{n+2} + (2n-1) xy_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

۳. **مثال:** $y_n(0)$ پيداکړئ که چېرې ($y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}$) $(P,U\ \ 1989, 90\ \ \ )$

حل: د $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ په تفاضل نيولو لاس ته راوړو

$$y_1 = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\cdot y_1 = 1$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\,y_1^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

په دويم ځل بيا په تفاضل نيولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$(1+x^2)2y_1\,y_2+2x\,y_1^2=0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\,y_2+xy_1=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

دليبنيځ دعوى پوسيله به n ځلي ديفرينسيل نيولولاس ته راوړو چې

$$(1+x^2)y_{n+2}+n2xy_{n+1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2y_n+xy_{n+1}+ny_n=0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2}+2nxy_{n+1}+(n^2-n)\,y_n+xy_{n+1}+ny_n=0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+n^2y_n=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

په (i)، (ii)، (iii) کې د x = 0 په ايښودلو لاس ته راوړو چې

$$y_1(0)=1$$

$$y_2(0)=0$$

او $y_{n+2}(0)+n^2y_n(0)=0$

په پايله کې

$\therefore$ د $n=1$ لپاره $y_3(0)=-1^2\,y_1(0)=-1^2$

د $n=2$ لپاره $y_4(0)=-2^2\,y_2(0)=-2^2(0)=0$

د $n=3$ لپاره $y_5(0)=-3^2\,y_3(0)=-3^2(-1^2)$

د $n=4$ لپاره $y_6(0)=-4^2\,y_4(0)=-4^2(0)=0$

او همدارنګه $y_{2n}(0)=0$

او n = 5 لپاره $y_7(0)=-5y_5(0)=-5^2(-3^2)(-1^2)=(-1^3)\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2$

په ورته ډول $y_9(0)=(-1)^4\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2$

اوپه عموميت ورکولو سره لاس ته راوړو چې

$$y_{2n+1}(0)=(-1)^n\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2n-1)^2$$

۸,۲ پوښتنې

1. که چېرې $y = e^{\tan^{-1} x}$ وي، نوثبوت کړئ چې

$$(1+x^2)y_{n+2} + \{2(n+1)x-1\}y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

2. که چېرې $y = (arc\sin h\,x)^2$ وي، نوثبوت کړئ چې

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2 y_n = 0$$

وروسته بيا $y_n(0)$ محاسبه کړئ .

3. که چېرې $y = (arc\sin x)^2$ وي، $y_n(0)$ لاسته راوړئ . [P.U.1992]

4. د

$(i)\quad x^2 \ln x \qquad (ii)\quad e^x \ln x$

$(iii)\quad x^2 \cos(3x+4) \qquad (iv)\quad x^3 \sin x$

n ام مشتق پيداکړئ.

5. که چېرې $y = \sin(m\, arc\, \sin x)$ وي، نو ثبوت کړئ چې

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$$ ، $[P.U.85,87,88]$

6. که چېرې $y = \frac{\ln x}{x}$ وي، نو وښاياست چې

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left\{\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{n}\right\}$$ ، $[P.U.1988]$

7. که چېرې $y = e^{m\, arc\sin x}$وي، نوثبوت کړئ چې

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0$$

د y_n قېمت وټاکې کله چې x = 0.

8. که چېرې y = arc tan x وي، نو وښاياست چې $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$.
وروسته لدې دېولو مشتقونو قېمتونه په x = 0 کې وټاکې.

9. د $y_n(0)$ قېمت لاسته راوړئ، که چېرې $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

10. که چېرې $y = \cos m\theta,\ x = \cos\theta$ وي ، m يو تام عدد اوله واحد څخه لوی دي، نو ثبوت کړئ چې

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

۲.   ببلا ببلې (متفرقه) پوښتنې

1. ایا د

$$f(x) = (x-a)\sin\frac{1}{x-a}\ ,\ x \neq 0$$
$$= 0, \qquad x = a$$

تابع متمادي او په $x = a$ کې داشتقاق وړ ده؟

2. د

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$
$$= 0\ , \qquad x = a$$

تابع امتحان کړئ او همدارنګه د مشتق شتون یې په مبدا کې امتحان کړئ .

3. ثبوت کړئ چې $f(x) = x^2$ په $0 \le x \le 1$ کې د تفاضل وړ ده.

4. د

$f(x) = 1 + \sin x$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ چېرې چې

$= 2 + (x - \frac{\pi}{2})^2$ ، $x \ge \frac{\pi}{2}$ چېرې چې

تابع د مشتق نیولو وړتیا د $x = \pi/2$ په نقطه کې وڅېړئ .

5. فرض کړئ چې $f(x) = x$ که چېرې $x > 0$

$= 0$ که چېرې $x = 0$

$= -x$ که چېرې $x < 0$

وښایاست چې $f(x)$ په $x = 0$ کې متمادي ده خو $f'(0)$ شتون نلري.

6. فرض کړئ چې $f(x) = ax + 1$ ، که چېرې $x \ge 1$

$= x^2 + a$ ، که چېرې $x < 1$

د a قېمت پېداکړئ دارنګه چې $f(x)$ په $x = 1$ کې د اشتقاق وړ ده.

7. د $\ln\frac{a + b\tan x}{a - b\tan x}$ مشتق پېداکړئ.

8. د $arc\tan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ تفاضل نظر $\arctan x$ ته په لاس راوړئ.

9. که چېرې $x^{x^{x^{\cdots\infty}}}$ وي، نو ثبوت کړئ چې $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\ln x}$.

10. $\frac{dy}{dx}$ پېداکړئ که چېرې $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$.

11. $\frac{dy}{dx}$ پېداکړئ که چېرې $y = arc\cot(\frac{a}{x}) + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

12. د $\sin x \cdot x^{\sin x}(\sin x)^{\ln x}$ مشتق پېداکړئ.

13. د $e^{2x}\cos x\sin^2 2x$ n ام مشتق پېداکړئ.

14. که چېرې $y = e^{\tan^{-1}x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ وي، نو وښایاست چې :

$(i) \quad (1+x^2)y_{n+2}+\{2(n+1)x-1\}y_{n+1}+n(n+1)y_n=0$

$(ii) \quad (n+2)a_{n+2}-a_{n+1}+n\,a_n=0$

15. که چېرې $y=\sin(m\cos^{-1}\sqrt{x})$ ، نوثبوت کړئ چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{4n^2-m^2}{4n+2}$$

16. د $\tan^2 x$ تفاضل نظر sin sinx ته لاسته راوړئ. [P.U. 1989]

17. د $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ تفاضل نظر $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ته په لاس راوړئ. [P.U. 1985]

18. د $arc\tan\frac{2x}{1-x^2}$ تفاضل نظر $arc\sin\frac{2x}{1+x^2}$ ته په لاس راوړئ. [P.U. 1991]

19. د a او b قیمتونه پیداکړئ څو چې f(x) په x = 1 کې متمادي اود شتقاق وړ وي . پدې ځای کې

$f(x)=x^3$ که چېرې x < 1

= ax+b که چېرې $x\geq 1$

20 . که چېرې $y^{1/m}+y^{-1/m}=2x$ وي، نوثبوت کړئ چې

$(x^2-1)y_{n+2}+(2n-1)x\,y_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$

21. د $f(x)=x|x|$ مشتق ورتیا په x = 0 کې وڅېړئ.

22. $f'(1)$ پیداکړئ که چېرې $f(x)=x^3$ د x < 1 لپاره

$=2x-1$ د $x\geq 1$ لپاره

دریم څپرکی
د منځني(وسطي) قیمت دعوې
ناڅرګنده(غیرمعین)شکلونه

۱,۱,۳ سریزه

په دې څپرکي کې به مونږ ځینې عمومي دعوې ګاني تر بحث لاندې ونیسو، هغه دعوې چې د تابعګانو په کلاس کې د تطبیق وړ وي د عمومي دعوو په شان پیژندل شوي دي، چې د کلکولس په یوه ډېره مهمه برخه کې پکار وړل کیږي. له دوی څخه ، د رول دعوی (Rolle's theorem) ، خورابنسټیزه ده.
یو کسر چې د هغه صورت او مخرج دواړه 0 ته نږدې کیږي لکه څنګه چې **a** ته **x** نږدې کیږي، چې د $x=a$ لپاره $\frac{0}{0}$ تاکلی بڼه غوره کوی. دا به په زړه پورې وي، یادونه وکړو چې د د یفرنشیل ضریب $\frac{dy}{dx}$ تاکنه د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یو کسر د لیمټ تاکلو سره معادل ده، کوم چې د $\frac{0}{0}$ نا معین حالت ګڼل کیږي. دلیمټونو نور حالتونه کوم چې دغو بڼوته دراکمیدو وړ (بدلون وړ) به هم په دې څپرکي کې په پام کې و نیول شي .

۱,۲,۳ د رول دعوی (Rolle's Theorem)

فرض کړئ چې $f(x)$ یوه تابع ده دارنګه

(i) $f(x)$ د هر x له پاره متمادي ده دارنګه چې $a \le x \le b$.

(ii) $f(x)$ د هر x له پاره دمشتق وړده دارنګه چې $a < x < b$ او

(iii) $f(a)=f(b)$.

نو، په دې برخه کې کم څه کم د c یوه نقطه په (a,b) کې شتون لري، چیرته چې $f'(c)=0$ ده.

ثبوت: څنګه چې $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي ده، نو په نوموړي انتروال کې د M یو لوی قیمت او د m یو کوچنی قیمت لري، نو د c او d دوه عددونه دا رنګه چې:

$$f(c)=m \quad , \quad f(d)=M$$

اوس یا

$$M=m \qquad ....(i)$$

یا

$$M \neq m \qquad ....(ii)$$

کله چې لوی قیمت له کوچني قیمت سره د **(i)** حالت په شان پیښ شي، نو تابع یو ثابت ته راکمیږي نو د**x** د هرقیمت لپاره د $f'(x)$ مشتق له صفر (0) سره مساوي کیږي اوله دې امله دعوی له دغه حالت سره سمون لري.
کله چې M او m مساوي نه وي، لکه**(ii)** حالت په شان، کم څه کم یو له دوی باید د $f(a)$ او $f(b)$ د مساوي قیمتونو څخه توپیر ولري، فرض وو $M=f(c)$ له دوی څخه توپیر لري . د **c** عدد چې د a او b څخه توپیر لري، د (a,b) انتروال په داخل کې واقع کیږي.
د $f(x)$ تابع کومه چې د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ ده، په خاص حالت کې، د $x=c$ لپاره د مشتق وړ ده، په دې ډول:

$$lim\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ ، کله چې } h \to 0$$

شتون لري او هغه شان دی کله چې مثبت یا منفي قیمتونو پواسطه $h \to 0$.

لکه څنګه چې $f(c)$ د تابع تر ټولولوی قیمت دی، مونږ لرو چې:

$f(c+h)\leq f(c)$

څنګه چې h مثبت یا منفي قیمت لري.

څکه نو که چېرې $h>0$ ، $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$ ، اوکه چېرې $h<0$ $\frac{f(c-h)-f(c)}{h}\geq 0$

نو کله چې دمثبتو قیمتونوله لوري څخه $h\to 0$ مونږ لرو چې

$f'(c)\leq 0$ ....(iii)

او کله چې د منفي قیمتونوپواسطه $h\to 0$ مونږلرو چې:

$f'(c)\geq 0$ ....(iv)

(iii) او (iv) رابطي به دواړه صحیح وي که چیرې یکی یو(یواځې او تنها یواځې) که چیرې $f'(c)=0$.

ورته دلیلونه صحت لري، که چیرې دا ترټولو یو کوچنی قیمت m وي کوم چې له $f(a)$ او $f(b)$ څخه توپیر لري.

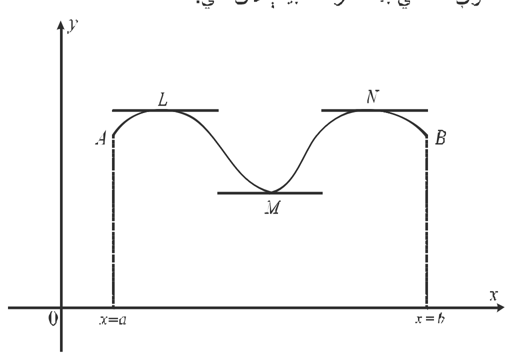
له دې امله دعوی ثبوت شوه.

تبصره: د رول دعوی(Rolle's theorem) مونږ یقیني کوي چې کم څه کم د **c** یو کوچنی حقیقي عدد دا رنګه شتون لري چې $f'(c)=0$. ددې سره سره، په دې ترڅ کې امکان شته چې له یوه څخه سربېره خورا زیات دا رنګه حقیقي عددونه د a او b په منځ کې شتون ولري.

۲،۲،۳ د رول د دعوې هندسي څرګندونه

د رول د دعوې شرطونه څرګندوي چې د $f(x)$ تابع ګراف د $x=a$ او $x=b$ په مینځ کې یو متمادي منحني دی، چې د (a,b) په هره نقطه کې دمماس درلودونکی دی او په $x=a$ او $x=b$ کې مساوي اوردینټ (قایم ترتیبونه) لري، برسېره په دې د $c\in(a,b)$ ځینو نقطو له پاره $f'(c)=0$ په دې دلالت کوي چې د منحني $x=c$ په نقطه کې مماس د x له محور سره موازي دی.

نو له دې امله د رول د دعوې هندسي بڼه دا رنګه بیانېدلای شي:



که چېرې، یو متمادي منحني د A او B انجامي نقطو په منځ کې وي، د A او B په نقطو کې مساوي ترتیبونه لري او په هره منځنۍ نقطه کې مماس لري، نو په دې صورت کې په منحني باندې کم څه کم یوه بله نقطه د A ، B نه په غیر شتون لري، چېرته چې مماس د x له محور سره موازي دی.

مثال: د رول دعوی د x^2-4x+3 تابع له پاره په $1\leq x\leq 3$ انټروال کې امتحان کړئ.

حل: فرض کړئ چې $f(x)=x^2-4x+3$ ، همدا شانته $f(1)=0=f(3)$ کېږي $f(x)$ یوپولینومیل ده چې یوه متمادي او د $1\le x\le 3$ په تړلي انتروال کې د x مشتق وړتابع ده، ځکه نو د رول د دعوی شرطونه سمون لري.
نولدې کبله بېدهلته کم څه کم د $1<x<3$ په خلاص انتروال کې یوه نقطه شتون لري، چېرته چې $f'(x)=0$.
اوس $f'(x)=2x-4$ ، کله چې $x=2$ وي، نو $f'(x)=0$ ، څرنګه چې دغه نقطه $x=2$ د $1<x<3$ تړلی انتروال پورې اړه لري، له دې امله د رول دعوی صحت لري.

۳,۲,۴ د لاګرانج د منځني قېمت دعوی (M.V.T)

فرض کړئ چې $f(x)$ دا رنګه یوه تابع ده چې

(i) $f(x)$ په $a\le x\le b$ انتروال کې متمادي ده.

(ii) $f(x)$ په $a<x<b$ انتروال کې د مشتق وړ ده، نو پدې ځای کې کم څه کم د x یو قېمت شتون لري، چې c ګڼل کېږي او د (a,b) په انتروال کې واقع دی دارنګه چې :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

ثبوت: فرضوو چې $\phi(x)=f(x)+kx$ ،چېرته چې k یو ثابت دی ددې لپاره چې k لاسته راوړو نو دا رنګه کړنه تر سره کوو:

$$\phi(a)=\phi(b)$$

نو

$$f(a)-ka=f(b)+kb$$

پدې ډول

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

څنګه چې kx یوه متمادي او $a\le x\le b$ په انتروال کې یوه مشتق وړ تابع ده، $\phi(x)$ په $a\le x\le b$ انتروال کې د دوه متمادي تابعګانو مجموعه ده په $a\le x\le b$ انتروال کې متمادي ده، برسېره پدې $\phi(x)$ په $a<x<b$ انتروال کې د دوه مشتق وړ تابعګانو مجموعه ده، په $a<x<b$ انتروال کې د مشتق وړ ده.

همدارنګه $\phi(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\phi(b)$

لدې امله $\phi(x)$ د رول Rolle's دعوی په ټولوشرایطو کې صدق کوي. لدې کبله، په (a,b) کې کم څه کم د c یوه نقطه شتون لري دارنګه چې $\phi'(c)=0$.

خو $\phi'(x)=f'(x)+K$

ځکه نو

$$\phi'(c)=f'(c)+K=0$$

$$\therefore\quad f'(c)=-K=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

په پایله کې دعوی ثبوت شوه.

۳ .۲ . ۴ د مینځني قېمت دعوی یوه بله بڼه

فرض کړئ چې $b-a=h$، نو $b=a+h$، په هغه صورت کې نو c کوم چې د a او b په منځ کې یعني د a او $a+h$ په منځ کې واقع دی، د $c=a+\theta h$ په شان لیکلی شو، چېرته چې $0<\theta<1$.

نو

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=f'(a-\theta h)$$

يا

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

دلا ګرانج د منځني قیمت دعوی ده.

په پښله کې که چیرې $f(x)$ په $a\le x\le a+h$ تړلي انټروال کې متمادي وي، او په $a<x<a+h$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي، نو هلته کم څه کم یود θ عدد شتون لري چې د 0 او 1 په منځ کې واقع دی، دارنګه چې

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a-\theta h),\qquad 0<\theta<1$$

دا د لاګرانج د منځني قیمت د دعوی یوه بله بڼه ده.

۵۰۲۰۳ دمنځني قیمت دعوی (M.V.T)هندسي بیان (تعبیر)

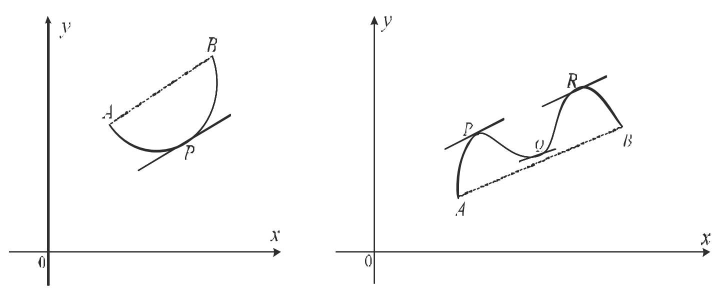
دلاګرانج دمینځني قیمت دعوی شرطونه په ګوته کوي چې د $f(x)$ تابع ګراف د $x=a$ او $x=b$ نقطو په منځ کې یو متمادي منحني دی او په هره منځني نقطه کې مماس لري. ددی منحني د A او B پای (انجام) نقطو مختصات $(a,\ f(a))$ او $(b,\ f(b))$ دي، لدې امله د منحني د AB وترمېل:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

دی. همدارنګه $f'(c)$ د منحني د $x=c$ په نقطه کې د مماس مېل دی، ځکه نو د

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

شرط په $a<x<b$ کې د کوم c له پاره په ګوته کوي چې د منحني $P(x=c)$ په نقطه کې مماس د AB وتر سره موازي دی او د P نقطه په منحني باندې د A او B نقطو سربېره یوه بله نقطه ده. لدې سببه، په هندسي بڼه د لاګرانج د منځني قیمت دعوی کولی شو پدې دول بیان کړو:



که چیرې د A او B انجامي نقطو تر منځ یو متمادي منحني شتون ولري او په هره منځني نقطه کې مماس شتون ولري، نو پدې صورت کې پرمنحني لږ تر لږه یوه بله نقطه د A او B له نقطو څخه برسیره شتون لري، چیرته چې مماس د AB له وتر سره موازي دی.

مثال: د لاګرانج منځني قیمت دعوی د $f(x)=x(x-1)(x-2)$ تابع له پاره په $0\le x\le\frac{1}{2}$ انټروال کې ثبوت کړئ.

حل: پدې برخه کې که $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ، یو پولینوم وي، $f(x)$ په $0\le x\le \frac{1}{2}$ تړلي انتروال کې متمادي اومشتق وړ ده، لدې امله دلاګرانج منحني قیمت دعوی شرطونه صحت لري، باید هلته، لدې امله، په $0<x<\frac{1}{2}$ خلاص انتروال کې لږ ترلږه د c یوه نقطه شتون ولري چېرته چې:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad ......(1)$$

اوس $f(x)=3x^2-6x+2$ او $f(c)=\frac{f(b)-f(b)}{b-a}=\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=\frac{3}{4}$

لدې امله

$$f'(c)=\frac{3}{4}=3x^2-6x+2$$

$$x=1\pm\frac{1}{6}\sqrt{21}$$

دمنفي علامې په پام کې نیولو، مونږ د **x** یو قیمت په لاس راوړو، یعني $1-\frac{1}{6}\sqrt{21}$ د 0 او $\frac{1}{2}$ په منځ کې اود کوم یو له پاره چې (1) معادله صحت ده.

ځکه نو د لاګرانج منځني قیمت دعوی سمه یا ریښتیني ده.

۶,۲,۳ د کوشي د منځني قیمت دعوی (په عمومي ډول M.V.T)

فرض کړئ چې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګاني دي، دارنګه چې:

(i). $f(x)$ او $g(x)$ په $[a,b]$ تړلي انتروال کې متمادي دي.

(ii). $f(x)$ او $g(x)$ په (a,b) خلاص انتروال کې مشتق وړ دي.

(iii). که د (a,b) خلاص انتروال کې $g'(x)\neq 0$، نو په (a,b) خلاص انتروال کې لږ تر لږه د c یوه نقطه شتون لري، دا رنګه چې:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ثبوت: فرض کړئ چې $\phi(x)=f(x)+Ag(x)$، چېرته چې A یو ثابت دی چې دا رنګه لاسته راځي :

$$\phi(a)=\phi(b)$$

نو

$$f(a)+Ag(a)=f(b)+Ag(b)$$

له کبله

$$A=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$\phi(x)$، په $a\le x\le b$ انتروال کې د دوه متمادي تابعګانو مجموعه ده، په $a\le x\le b$ کې متمادي ده. همدا شانتې $\phi(x)$ په $a<x<b$ انتروال کې د دوه مشتق وړ تابعګانو مجموعه ده، په $a<x<b$ کې د مشتق وړ ده. لدې

امله $\phi(x)$ د رول (Rolle’s) دعوی د ټولو شرطونو لپاره صدق کوي. لدې امله، لږ تر لږه د c يوه نقطه په (a,b) انټروال کې شتون لري، څو چې $\phi'(c)=0$.

خو $\phi'(c)=f'(c)+Ag'(c)$

لدې امله $f'(c)+Ag'(c)=0$

څرنګه چې $g'(c)\neq 0$ نو

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=-A=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

پايله کې دعوی ثبوت شوه.

۷,۲,۳ د کوشي منحني قېمت دعوی يوه بله بڼه (Alternative)

که چېرې مونږ $b-a=h$ وليکو دارنګه چې $b=a+h$، نو c کېدای شي چې $c=a+\theta h$ د په ډول وليکل شي، چېرته چې $0<\theta<1$.

د $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-fa)}{g(b)-g(a)}$ معادله کېدای شي چې په د

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)},\quad 0<\theta<1.$$

په څېر وليکل شي

بيه پايله کې که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ په $a\le x\le a+h$ تړلی انټروال کې متمادي وي، په $a<x<a+h$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ دي، او په $a<x<a+h$ انټروال کې $g'(x)\neq 0$، نو پدې ځای کې لږ تر لږه د θ يوعدد شتون لري چې د 0 او 1 په مينځ واقع دی دارنګه:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\Theta h)}{g'(a-\Theta h)}$$

۸,۲,۳ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** د رول **Rolle’s** دعوی د $f(x)=Sin^2x$ تابع له پاره په $[0,\pi]$ انټروال کې وڅېړئ او c وټاکې.

حل: پدې ځای کې

$$f(x)=Sin^2x$$

$$f(0)=0=f(\pi)$$

برسېره پدې $f(x)$ په $0\le x\le\pi$ خلاص انټروال کې متمادي او په $0<x<\pi$ تړلی انټروال کې مشتق وړ ده.

نو د رول دعوی ټول شرايط صدق کوي. بايد هلته، لدې امله، په $[0,\pi]$ تړلی انټروال کې د c يوه نقطه شتون ولري چې $f'(c)=0$.

$$\therefore \quad f'(c) = 2 Sin\, c . \cos c$$
$$= Sin\, 2c = 0$$
$$\therefore \quad 2c = arcSin 0 = Sin^{-1} 0 = 0, \; \pi$$
$$c = 0, \; \frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2} \in (0, \pi).$$

لدې امله د رول دعوی پدې اړوند سمه ده او $c = \frac{\pi}{2}$,

۲. مثال: د رول دعوی قانونیت د $f(x) = 1 - x^{3/5}$ تابع له پاره په $[-1, 1]$ انتروال کې وڅېړئ، که چېرې ممکن وي**c** لاسته راوړئ.

حل: دلته

$$f(x) = 1 - x^{3/5}$$
$$f(-1) = 1 - x^{3/5} = 1 - (-1)^{3/5} = 1 - (-1) = 2$$
$$f(1) = 1 - x^{3/5} = 1 - (-1)^{3/2} = 1 - 1 = 0$$

لدې امله، $f(-1) \neq f(1)$

نو د رول د دعوی شرطونو څخه یو شرط هم صحت نلري.

نو د رول دعوی د تطبیق وړ نده، مونږ نه شو کولی چې c وټاکو.

۳. مثال: دلاگرانج منځني قیمت دعوی پر بنسټ د $f(x) = 2x - x^3$ تابع له پاره په$0 \leq x \leq 1$ انتروال کې c پیدا کړئ.

حل: دلته

$$f(x) = 2x - 3x^3$$
$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 0$$
$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^3 = -1$$

اوس $f'(c) = 2 - 3c^2$

دلاگرانج منځني قیمت دعوی پر بنسټ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

نو

$$\frac{1 - 0}{1 - 0} = 2 - 3c^2$$
$$\therefore \quad 1 = 2 - 3c^2$$
$$\therefore \quad 3c^2 = 1$$
$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0, 1]$$

$\therefore$ $C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ غوښتل شوی قیمت دی.

٤. مثال: د منځني قېمت دعوى نه په ګټې اخيستو سره وښاياست چې د x او y هرحقيقي عدد له پاره $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

حل: فرض کړئ چې $f(t)=\sin t$، اوس $f(t)$ د t هر حقيقي عدد له پاره متمادي او د مشتق وړ ده. مونږ په $[x,y]$ انټروال کې د $f(t)=\sin t$ تابع له پاره د منځني قېمت دعوى څخه کار اخلو، چېرته چې x، y حقيقي عددونه دي لدې امله

$\frac{\sin y-\sin x}{y-x}=\cos z$، چېرته چې $z\in(x,y)$.

دواړه خواوو ته مطلقه قېمت (Modulus) په پام کې نيولوسره ، مونږ لاس ته راوړو چې:

$$\left|\frac{\sin y-\sin x}{y-x}\right|=|\cos z|$$

$$\therefore\quad |\sin y-\sin x|=|y-x|\,|\cos z|$$

$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\,|\cos z|\quad\le|x-y|$$ يا

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$$ ؛ ځکه چې $|\cos z|\le 1$

پدې ډول پايله لاسته راوړو.

٥. مثال: فرض کړئ چې $g(x)=x^3, f(x)=x^2$. د کوشي منځني قېمت دعوى په $1\le x\le 2$ انټروال کې وڅېړئ او همدارنګه c وټاکئ. $[P.u.1993]$.

حل: دلته $f(x)$ او $g(x)$ دواړه په $[1, 2]$ انټروال کې متمادي او په $(1, 2)$ کې د مشتق وړ دي.

لدې امله، $\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$، لاسته راځي چې

$$\frac{4-1}{8-1}=\frac{2c}{3c^2}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{2}{3c}$$

نولدې امله $c=\frac{14}{9}$ او $\frac{14}{9}\in(1, 2)$

نو د کوشي دمنځني قېمت دعوى اود $c=\frac{14}{9}$ لپاره حقيقت لري.

۲،۳ پوښتنې

۱. د رول دعوى صحت د لاندېنيو تابعګانو له پاره وڅېړئ، c پيدا کړئ په کوم ځاى کې چې امکان ولري.

(i). $f(x)=x^2$، په $[-1,1]$ کې.

(ii). $f(x)=x(x+3)e^{-\frac{1}{2}x}$، په $[-3, 0]$ کې.

(iii). $f(x)=1-x^{3/5}$، په $[-1,1]$ کې.

(iv). $f(x)=1-|x|$، په $[-1,1]$ کې.

۲. د رول دعوی کارونه د لاندینیو تابعګانو له پاره وڅېړئ.

(i). $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$، په $[a,b]$ کې، چېرته چې m او n مثبت عددونه دي.

(ii). $f(x)=\ln\dfrac{x^2+ab}{x(a+b)}$، په $[a,b]$ کې، چېرته چې $0\neq[a,b]$.

۳. ایا د رول دعوی د $f(x)=(x)$ تابع له پاره په $-1\leq x\leq 1$ انتروال کې صحت لري؟ که چېري صحت نه لري، ولې؟

٤. د لاګرانج منځني قیمت دعوی پر بنسټ (که ممکن وي) د لاندې تابعګانو لپاره د **c** قیمتونه وټاکئ.

(i). $f(x)=x^2-3x-1$، په $[1,3]$ کې.

(ii). $f(x)=\sin x$، په $[a,b]$ کې.

(iii). $f(x)=x^{2/3}$، په $[-1,1]$ کې.

۵. د $y=k\sin x$ ساین منحني په کومه نقطه کې مماس له هغه وتر سره چې د $(0,0)$ او $(\dfrac{\pi}{2},k)$ نقطې سره نښلوي موازي دی.

٤. د لاګرانج منځني قیمت دعوی په کارولو سره وښایاست چې:

(i) $\left|\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}\right|<|b-a|$، که چېرې $x\neq 0$.

(ii) $|\tan x+\tan y|\geq|x+y|$، د $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ په انتروال کې د x او y ټولو حقیقي عددونو له پاره.

۷. c د کوشي منځني قیمت دعوی د $\cos x$ او $\sin x$ تابع ګانو له پاره په $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ کې پیدا کړئ.

۸. c پیدا کړئ که چېرې د کوشي منځني قیمت دعوی شرطونه د $f(x)=(x-1)(x-2)$ او $g(x)=x(x-2)(x-3)$ لپاره په $[0,\dfrac{1}{2}]$ انتروال کې صدق وکړي.

۹. که چېرې $f(x)=e^x$ او $g(x)=e^{2x}$ د $[0,\ln 2]$ په انتروال کې د کوشي منځني قیمت دعوی شرطونه صدق وکړي، د c قیمت وټاکئ.

۱۰. که چېرې $f(x)=e^x$ او $g(x)=e^{-x}$ په [a, b] کې تعریف شوي وي د کوشي منځني قیمت دعوی شرطونه پکې صدق وکړي، ثبوت کړئ چې c د a او b په منځ کې حسابي وسط دی.

متزایدې او متناقصې تابعګانې

۱۰۳۰۳ مونوتونیک (یونواخته) تابعګانې

تعریف: د $f(x)$ یوه تابع چې د $D\subseteq R$ په یو دومین کې تعریف شوې وي یو نواخته متزایده تابع ګڼله کېږي، که چېرې $x_1,x_2\in D$ ټولو لپاره

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$$

او په دقیق ډول متزایده ګڼله کېږي که چېرې $x_1,x_2\in D$ ټولو لپاره

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

تعریف: $f(x)$ یوه تابع چي د $D \subseteq R$ په یو دومین کي تعریف شوېده یو نواخته متناقصه ګڼله کېږي که چېرې $x_1, x_2 \in D$ د ټولو له پاره

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

او په دقیق ډول متناقصه ګڼله کېږي که چېرې $x_1, x_2 \in D$ د ټولو له پاره

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

یوه تابع کومه یوه چي یا یونواخته متزایده یا متناقصه وي یو نواخته(مونوتونیک) تابع ګڼله کېږي.

۲،۳،۳ د مینځني قیمت له دعوی څخه لاس ته راغلي پایلې

۱. دعوی: که چیرې یوه تابع د(a,b) په انتروال کي د مشتق وړ او دا مشتق په هره نقطه کي د مېنځه تلونکی وي، نو تابع ثابته ده.

ثبوت: فرض کړئ چي f(x) یوه تابع ده او x د (a, b) په انتروال کي کومه یوه نقطه ده. څرنګه چي f' (x) د انتروال په هره نقطه کي شتون لري، د منځني قیمت دعوی پربنسټ په (a, x) کي، د c یوه نقطه د **a** او **x** په مینځ دارنګه شتون لري چي

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

خو

$f'(c) = 0$ ، (فرضیې پربنسټ)

$\therefore$ $f(x) - f(a) = 0$ یا $f(x) = f(a)$ کوم چي ثابت ده.

څرنګه چي x د یوې اختیاري نقطې په څېر په پام کي نیول شوېده، دا جوتوي چي f(x) یوه ثابته تابع ده.

۲. دعوی: که چیرې دوه د ډیفرینشیل وړ تابعګانې د (a,b) په هره نقطه کي مساوي مشتقونه ولري، نو د تابعګانو توپیر د یو ثابت پوسیله په ګوته کېږي.

ثبوت: فرض کړئ چي f(x) او g(x) په (a,b) کي دوه مشتق وړ تابعګانې په دارنګه یوې طریقې سره تعریف شوي دي چي په راکړل شوي انتروال کي د **x** د ټولو قیمتونولپاره $f'(x) = g'(x)$.

اوس، فرض کړئ چي F(x) = f(x) - g(x)

نو په څرګند ډول

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = o$$

$\therefore$ F(x) یوه ثابته تابع ده.

یا $f(x) - g(x) = \text{constant}$

لدې امله د f(x) او g(x) ترمېنځ توپیرد یو ثابت پوسیله ده.

۳. دعوی: فرض کړئ چي f(x) یوه تابع ده، کومه چي په [a, b] کي متمادي او په (a, b) کي د مشتق وړ ده.

(i) که چیرې په (a, b) کي د x د ټولو قیمتونو لپاره $f'(x) > o$ وي، نو f(x) په مونوتونیک ډول تزاید کوي.

(ii) که چیرې په (a, b) کي د x ټولو قیمتونو لپاره $f'(x) < o$ وي، نو f(x) په مونوتونیک ډول تناقص کوي.

ثبوت: فرض کړئ چې x_1 او x_2 په راکړ شوي خلاص انټروال کې دوه نقطې وي دارنګه چې $x_1 < x_2$ نو، په (x_1, x_2) کې د لاګرانج منځني قیمت دعوی په کارولو، موږ لاس ته راوړو چې د **c** یوه نقطه د x_1 او x_2 په مینځ کې شتون لري دارنګه چې

$$f'(c)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

یا

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c) \qquad ......(1)$$

اوس په **(i)** حالت کې کله چې د هر **x** لپاره $f'(x) > o$ **.**

پدې حالت کې $x_2 - x_1$ او $f'(c)$ دواړه مثبت دي او له دا **(1)** ځخه ځرګندیږي چې

$$f(x_2)-f(x_1) > o$$

یا

$$f(x_2) > f(x_1)$$

په پایله کې

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

دا جوتوي چې f(x) تابع په موتونیک ډول تزاید مومي.

په دویم **(ii)** حالت کې کله چې د هر x لپاره $f'(x) < o$ وي.

پدې حالت کې $x_2 - x_1$ مثبت وي او $f'(c)$ منفي وي ، له (i) ځخه داسي ښکاریږي چې.

$$f(x_2)-f(x_1) < o$$

یا

$$f(x_2) < f(x_1)$$

په پایله کې

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

دا جوتوي چې **f(x)** تابع په مونوتونیک ډول تناقص کوي.

۳.۳.۳ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** وښایاست چې $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ په هر انټروال کې په مونوتونیک ډول تزاید کوي.

حل: پدې ځای کې

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

کوم چې تل مثبت دي.

لدې امله **f(x)** په هر انټروال کې په مونوتونیک ډول تزاید مومي.

۲. **مثال:** هغه انټروالونه وټاکي په کومکي چې $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ تابع متزایده یا متناقصه ده.

حل: دلته

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 36 = 3(x^2 - 4x - 12)$$
$$= 3(x+2)(x-6)$$

f(x) تابع متزایده ده که چیرې $f'(x) > o$ وي يعني،

(x+2) (x-6)>o

په پايله کې x+2 او x-6 يو شانتې علامې لري.
نو x<-2 يا x>6
ځکه نو f(x) په $(-\infty, -2)$ او $(6, \infty)$ انتروالونو کې متزايده ده.
او f(x) متناقصه ده که چيرې $f'(x) < o$.
يعنې، (x+2) (x-6) <0 .
لدې ځايه څخه نتيجه کيږي چې x+2 او x-6 خلاف علامې لري.
نو -2 < x < 6
له دې امله f(x) په (-2, 6) انتروال کې متناقصه ده.
۳. مثال: ثبوت کړئ چې که چيرې x>o وي

$$\frac{1}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$$

ثبوت: د [0, x] په انتروال کې د لاګرانج منځني قيمت دعوى په کارولو، مونږ $c \in (0, x)$ لپاره لرو چې.

$$\frac{\tan^{-1} x - \tan^{-1} o}{x - o} = \frac{1}{1+c^2}$$

ځرنګه چې

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} x] = \frac{1}{1-x^2}$$

يا

$$\tan^{-1} x = \frac{x}{1+c^2}$$

اوس که x>c نو $x^2 > c^2$
يا

$$x^2 + 1 > c^2 + 1 > 1$$

يا

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

يا

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x, \qquad \text{د } x>0 \text{ لپاره}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$$

ځکه چې $\tan^{-1}x = \frac{x}{1+c^2}$

لدې کبله پایله ده.

۴. مثال: د x>0 لپاره ثبوت کړئ چې،

$$\frac{x}{x+1} < \mathrm{lm}\,(x+1) < x$$

حل: فرض کړئ چې

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \qquad \text{د } x>0 \text{ لپاره}$$

لدې سببه f(x) یوه متـزایـده تــابع ده.
خو f(0)=0 لدې امــله، د x>0 لپاره

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} > 0 \quad \text{، لپاره } x>0$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) > \frac{x}{x+1} \quad \text{، لپاره } x>0$$

یا

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) \text{، لپاره } x>0 \qquad \text{...........} \quad \text{(i)}$$

اوس $g(x) = x - \ln(x+1)$ په پام کې ونیسی.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > o \text{ ، لپاره } x>0$$

څنګه چې g(x) یوه متزایده تابع ده.
خو g(0)=0

$$\therefore \quad g(x) > 0, \qquad \text{لپاره } x>0$$

$$\Rightarrow x - \ln(x+1) > 0, \quad \text{لپاره } x>0$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) < x, \qquad \text{لپاره } x>0 \qquad \text{.............} \text{(ii)}$$

د (i) او (ii) له ترکیب نه، مونږ لاس ته راوړوچې

$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x,$ لپاره x>0

داغوښتل شوې وه.

۳ .۳ پوښتنې

۱. ثبوت کړئ چې $f(x) = 51 - 6x + 6x^2 - 2x^3$ په مونوتونیک ډول د ټولو $x \notin R$ لپاره متناقصه ده.

۲. وښایاست چې $x - \sin x$ په هر انټروال کې د x لپاره یوه مونوتونیکه متزایده تابع ده.

۳. وښایاست چې $f(x) = \cos^2 x$ په دقیق ډول په $(o, \pi/2)$ انټروال که متناقصه ده.

۴. هغه انټروالونه سره جلا کړئ په کوم کې چې د $f(x)x^3 + 8x^2 + 5x - 2$ تابع متزایده یا متناقصه وي.

۵. هغه انټروالونه سره جلا کړئ په کوم کې چې $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ په مونوتونیک ډول تزاید یا تنقص کوي.

۶. فرض کړئ چې $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 90x + 144$ وښایاست چې $f(x)$ په دقیق ډول د ټولو $x > 2\frac{1}{2}$

او $x < -3$ لپاره متزایده ده او په دقیقه توګه تناقص کوي که چیرې $x \in (-3, 2\frac{1}{2})$.

۷. که چیرې x>o، ثبوت کړئ چې $x - \ln(1+x) > \frac{x^2}{2(1+x)}$.

۸. د x>o لپاره ثبوت کړئ چې

$$2x - \tan^{-1}x > \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$$

۹. که چیرې x>o، وښایاست چې

$$x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2}$$

۱۰. x>o لپاره ثبوت کړئ چې

$$x^2 - 1 > 2x\ln x > 4(x-1) - 2\ln x.$$

د تابعګانو غزیدنه (توسعه)

۳ .۴ .۱ ټایلور دعوی (دلاګرانج باقیمانده بڼې سره)

دعوی: که چیرې f(x) یوه تابع وي دارنګه چې

(i) $f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots\ldots, f^{n-1}(x)$ په [a, a + h] تړلې انټروال کې متمادي وي او

(ii) $f^n(x)$ په (a, a + h) خلاص انټروال کې شتون ولري نو پدې صورت کې د θ یو حقیقي عدد د 0 او 1 په مینځ کې شتون لري دارنګه چې

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

ثبوت: چې د G(x) تابع چې د

$$G(x)=f(x)+(a+h-x)f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+.......$$
$$+\frac{(a-h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(a+h-x)^n}{n!}A \qquad ...(1)$$

پواسطه تعریف شوېده په پام کې ونیسي ،

چیرته چې A یو ثابت دی چې لاسته راوړل کېږي همدا رنګه $G(a)=G(a+h)$. د دې څخه لاسته راځي چې

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+A\frac{h^n}{n!}=f(a+h) \qquad ...(2)$$

اوس د فرضیې له مخې د$f(x)\,,f'(x)\,,f''(x)\,,f'''(x)\,,.....\,,f^{n-1}(x)$ ټولې تابعګانې په [a, a + h] انتروال کې متمادي او په (a, a + h) کې د مشتق وړ دي او هره پولینومېل تابع په هره نقطه کې متمادي او د مشتق وړ ده. څکه نو، د دې څخه لاسته راځي چې G(x) په [a, a + h] انتروال کې متمادي او په (a, a + h) کې د مشتق وړ ده.

همدارنګه د A قېمت لپاره چې د (2) رابطې پواسطه راکړ شوی دی G(a)=G(a + h) .

نولدې کبله G(x) د رول دعوې ټول شرطونه صدق کوي، نو پدې صورت کې θ یو حقیقي عدد د 0 او 1 په مېنځ کې شتون لري دارنګه چې $G'(a+\theta h)=o$.

اوس د (1) په مشتق نیولو لاس ته راځي.

$$G'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{f^{n}(x)-A\right\}$$

$$\therefore\ G'(a+\theta h)=\frac{[a+h-(a+\theta h)]^{n-1}}{(n-1)!}\left\{f^{(n)}(a+\theta h)-A\right\}=o$$

یا

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\quad h^{(n-1)}\left\{f^{n}(a+\theta h)-A\right\}=o$$
$$\therefore\ A=f^{n}(a+\theta h)\ |\because 1-\theta\neq 0|$$

په (2) کې د A د دې قېمت په وضع کولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^2}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

یادونې: د (n+1) ام حد $\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$ د h طاقتوپه زیاتیدونکې(صعودې)انتېګرال کې د f(a + h) ټېلور توسعې ته له n حدونو څخه وروسته د لاګرانج باقیمانده حالت کېل کېږي.

نتيجه يا پايله (cor):

که چيرې مونږ د [0, x] انټروال په پام کې ونيسو، نو.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$$

مکلورين توسعه لکه لاګرانج باقيمانده شکل پوسيله پيژندل شويده.

۲.۴.۳ تيلور دعوی (دکوشی باقيمانده بڼي سره)

دعوی: که چيرې f(x) دارنګه يوه تابع وي چې

(i) $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots\ldots, f^{n-1}(x)$ په [a, a + h] تړلي انټروال باندې متمادي وي او

(ii) $f^{(n)}(x)$ په (a, a + h) خلاص انټروال کې شتون ولري. نو پدې صورت کې θ يو حقيقي عدد د 0 او 1 په مينځ کې دارنګه شتون لري چې

$$f(a-h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots - \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$$

ثبوت: د G(x) تابع

$$G(x) = f(x) + (a+h-x)f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x) + \ldots\ldots$$

$$+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x) + (a+h-x)A, \ldots\ldots(i)$$

پواسطه تعريف شويده په پام کې ونيسئ.

چيرته چې A يو ثابت دی چې لاسته راوړل کيږي پدې ډول چې G(a)=G(a + h).

د دې ځخه لاسته راځي چې

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) - \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + hA \qquad \ldots\ldots(ii)$$

اوس، د فرضيې له مخې، $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots\ldots, f^{n-1}(x)$ ټولې تابعګانې په [a, a + h] انټروال کې متمادي او په (a, a + h) کې مشتق وړ دي او هر پولينومېل تابع په هره نقطه کې متمادي اود مشتق وړ ده. نو د دې ځخه ځرګنديږي چې G(x) په [a, a + h] کې متمادي او په (a, a + h) کې مشتق وړ ده او همدارنګه G(a)=G(a + h).

له دې ځخه ځرګنديږي چې G(x) د رول د دعوی ټول شرطونه صدق کوي. نو پدې صورت کې د θ يو حقيقی عدد د 0 او 1 په مينځ کې دارنګه شتون لري چې $G(a+\theta h) = 0$.

اوس د (i) په مشتق نيولو لاس ته راځي چې.

$$G'(x) = \frac{a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - A$$

ځنګه چې $G'(a+\theta h) = o$ لرو چې

$$\frac{\left[a+h-(a-\theta h\right]^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a-\theta h) - A = o$$

$$A = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta h) \qquad \text{يا}$$

په (ii) کې د A د دې قيمت په وضع کولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$f(a+h)= f(a)+hf'(a-\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$$

یادونه: د (n+1)- ام حد $\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$ دh طاقتوپه صعودي انتېګرال کې د f(a + h)تایلور توسعي n حدونو څخه وروسته د کوشي باقیمانده حالت کنل کیږي.

نتیجه: که چیرې مونږ $[0,x]$ انتروال په پام کې ونیسو، نو

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(\theta x)$$

د کوشي باقیمانده حالت سره د مکلورین توسعې په نامه یادیږي.

۳.۴.۳ د تایلور سلسله

دتیلور د f(x) یوې تابع توسعه په [a, a + h] انتروال کې د لاندې رابطې پوسیله لاسته راځي

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+R_n$$

چېرته چې $R_n=\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$ او $0<\theta<1$

اوس، که چیرې f(x) د [a, a + h] انتروال په ټولو ترتیبونوکي متمادي مشتقونه ولري او $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$، نومونږ لروچې

$$f(a+h)=f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+......+\frac{h^n}{n!}f^n(a+.........$$

دا سلسله د h یوې طاقت لرونکې سلسلې په شان د f(a + h) توسعې لپاره د تایلور سلسلې په توګه پیژندل کیږي.

۳.۴.۴ د مکلورین سلسله

د f(x) یوې تابع د مکلورین توسعه د [o, x] په یو انتروال کې د

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f'(0)+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+R_n$$

پواسطه راکړل شویده ،چېرته چې $R_n=\frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(\theta x)$ او $0<\theta<1$

اوس، که چیرې f(x) په ټولو ترتیبونو کې متمادي مشتقونه ولري او $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$، مونږ لروچې

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+......$$

دا سلسله د x یوې طاقت لرونکې سلسلې په شان د f(x) توسعې لپاره د مکلورین سلسلې په توګه پیژندل کیږي.

۵.۴.۳ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د مکلورین فورمول د $f(x)=\sqrt{1+x}$ تابع لپاره له دوه حدونو وروسته باقي له ماندې سره ولیکئ.

حل: دلته

$$f(x)=\sqrt{1+x}, \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \qquad f''(\theta x)=\frac{-1}{4(1+\theta x)^{3/2}}$$

لدې امله د مکلورین دعوې سره له باقیماندې د دوو حدونو وروسته ده

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)$$

$$\therefore\ \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+\theta x)^{3/2}}$$

۲. مثال: د $\sin x$ توسعه ومومئ؟

حل: دلته

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1$$

$$f^{IV}(x)=\sin x \qquad f^{IV}(0)=0$$

او داسې نور.

په عمومي ډول $f^{n}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$.

د $R_n=\frac{x^n}{n!}.f^{n}(\theta x)$ د **n** حدونو څخه وروسته باقیماند ده. نولدې امله

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!}\sin(\theta x+\frac{n\pi}{2})=0$$

په همدې ډول f(x)=sin x کېدای شي په یوې نامحدودې سلسلې کې توسعه وکړي.
څکه نو د مکلورین دعوی پواسطه

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.........$$

$$\therefore \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+.....$$

۳. مثال: د $\ln(1+x)$ توسعه پیدا کړئ.

حل: فرض کړئ چي $f(x)=\ln(1+x)$ چیرته چي x > -1 ، نو

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

د مکلورین توسعي پواسطه مونږ لرو.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(0)$$
$$+R_n \qquad ....(1)$$

۱ حالت: کله چي $0 \le x \le 1$

پدي حالت کي R_n د n حدونو څخه وروسته د لاګرانج باقیمانده په بڼه پہ کي نیولو سره، مونږ لروچي

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{n}(\theta x)$$
$$=\frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!\theta^n\frac{1}{(1+\theta x)^n}$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\theta^n\frac{1}{(1+\theta x)^n}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

ځرنګه چي اوس $0<\dfrac{x}{1+\theta x}<1$

څکه نو $0 \le x \le 1$ او $0<\theta<1$

$\therefore$ $|R_n|<\dfrac{1}{n}$ او همدارنګه $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

۲ حالت: کله چي $-1<x<0$

پدي حالت کي ضرور نده چي $\dfrac{x}{1+\theta x}$ له 1 څخه کوچني وي.

لدي امله مونږ R_n د کوشی باقیمانده بڼي په څیرپه پہ کي نیسو. یعني،

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$$

$$= \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\theta^n}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1} x^n \theta^n (\frac{1-\theta}{(1+\theta x)}) \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

اوس څرنګه چې $1 > \left|(\frac{1-\theta}{(1+\theta x)})\right|$ او $\left|(\frac{1}{(1+\theta x)})\right| < \frac{1}{1-|x|}$

$$R_n < \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

څرنګه چې $\lim_{n\to 0} R_n = 0$ لدې امله $|x| < 1$

خو $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-1, f'''(0)=2,$ او داسې نور.

د $f(x) = \ln(1+x)$ په اېښودلو او په (i) کې ددې قیمتونو په وضع کولو مونږ لاسته راوړوچې

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots..$$

یادونه: په ډیرو حالتونو کې، دا خورا ګرانه ده چې $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ وښودل شي. څکه نو، مونږ د مثلو لپاره دا په نم کې نیولې ده. پدې فرض کولو چې راکړل شوي تابع د هر ترتیب مشتق لري، مونږ ممکن دي ته په رواجي ډول توسعه ورکړو.

٤مثال: د ټایلور دعوی په کارولو ثبوت کړئ چې :

$$\ln\sin(x+h) = \ln\sin x + h\cot x - \frac{1}{2}h^2\cos ec^2 + \frac{1}{3}h^3\cot x\cos ec^2 x + \ldots\ldots$$

[P.U.1985, 87, 89]

حل: فرضوو چې

$$f(x+h) = \ln\sin(x+h)$$

نو

$$f(x) = \ln\sin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \cot x$$

$$f''(x) = -\cos ec^2 x$$

$$f'''(x) = -2\cos ecx(-\cos ecx\cdot\cot x)$$

$$= 2\cos ec^2 x\cdot\cot x$$

د ټایلور دعوی پواسطه

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots\ldots..$$

لدي امله،

$$\ln\sin x(x+h)=\ln\sin x+h\cot x-\frac{1}{2}h^2\operatorname{cosec}^2x$$
$$+\frac{1}{3}h^3\operatorname{cosec}^2x\cdot\cot x+............$$

۴,۳ پوښتنې

۱. د

(i) cosx (ii) $tagx$ (iii) $\sec x$

توسعه (یا غزیدنه) پیدا کړئ.

۲. د

(i) e^x (ii) $e^{\sin x}$ (iii) $\ln(1-x)$ (iv) a^x

توسعه پیدا کړئ. [P.U.1986]

۳. د مکلورین فورمول په واسطه د $f(x)=e^{ax}\cos bx$ د توسعي څلور لومړني حدونه ،پیدا کړئ او د n حدونوڅخه وروسته باقیمانده ولیکئ.

۴. د ټایلور دعوی پربنسټ ثبوت کړئ چي

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\frac{1}{1+x^2}-\frac{h^2x}{(1+x^2)^2}+\frac{(3x^2-1)h^3}{3(1+x^2)^3}+.....$$

۵. د مکلورین دعوی په کارولو ثبوت کړئ چي

$$\ln(\sec x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+..........$$

۶. $\sin x$ ته د $(x-\frac{\pi}{2})$ صعودي ټاقتونو کي توسعه ورکړئ.

۷. د $\sin^{-1}x$ توسعه پیدا کړئ.

۸. ټایلور دعوی په کارولو ثبوت کړئ چي

$$(a+b)^m=a^m+\frac{m}{1!}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2+.....$$

د m هر حقیقي عدد لپاره، $a>0$، $-a<b<a$. [P.U.1986]

۹. ثبوت کړئ چي

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)|+.....+$$
$$\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a+x-a\theta)$$

ټول هغه حالتونه چي رامنځته کیږي په پام کي ونیسئ.

۱۰. د تاکلیو حالتونو لاندې ثبوت کړئ چې

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+h\theta)$$

چیرته چې $0<\theta<1$. همدارنګه ثبوت کړئ چې دθ لیمتي قیمت، کله چې h په لایتناهي ډول تناقص وکړي $\frac{1}{2}$ دی.

۱۱. وښایاست چې د θ عدد کوم چې د تایلور دعوی سره د n حدونو وروسته د لاګرانج باقیمانده بڼې په حالت کې پېښېږي د $h\rightarrow 0$ په شان د $\frac{1}{n-1}$ لیمټ ته تقرب کوي که چیرې $f^{n}(x)$ په x = a کې متمادي او د صفر خلاف وي.

۳ .۱.۵ ناټاکلې بڼې (شکلونه)

د $\frac{f(x)}{g(x)}$ خارج قسمت لیمټ چې $x\rightarrow a$، په عمومي ډول د $\frac{f(a)}{g(a)}$ سره مساوي دی. پدې حالت کې f (a) او g(a) دواړه صفر دي، خارج قسمت یې د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي کوم چې بې معنا دي. په ورته ډول، که چیرې $\lim f(x)$ او $\lim g(x)$ څنګه چې $x\rightarrow\infty$ د ∞ سره مساوي شي، خارج قسمت $\frac{\infty}{\infty}$ شکل غوره کوي، د $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ حالتونو ته نامعیني بڼې وایي، $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0 , 1^∞ او∞^0 نور نامعین شکلونه یا ناټاکلې بڼې دي. موږ ممکن دا بڼې د لوپیټال L. Hospital's قانون پواسطه ارزیابي کړو.

۲.۵.۳ دعوی(لوپیټال قانونL. Hospitals's Rule)

فرض کړئ $f(x)$ او $g(x)$ د x = a او f(a) = 0 = g(a) په ګاونډیو(مجاورو) نقطو کې متمادي او د اشتقاق وړ دي. نو،

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ثبوت:

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+R_n}{g(a)+hg'(a)+\frac{h^2}{2!}g''(a)+....+R'_n}$$

چیرته چې R_n او R'_n د تایلور په دعوی کې له n حدونو وروسته باقیمانده دي.

$$\lim_{h\rightarrow 0}\frac{hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+R_n}{hg'(a)+\frac{h^2}{2!}g''(a)+....+R'_n}$$

څکه چې f(a) = 0 = g(a)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a)+\frac{h}{2!}f''(a)+ \quad \text{د h لوی تاقت حدونه}}{g'(a)+\frac{h}{2!}g''(a)+ \quad \text{د h لوی تاقت حدونه}}$$

پایله:

که چیری $f'(a)$ او $g'(a)$ دواړه صفر وي، مونږ کولی شو د ارګومنت په تکرارولو سره ثبوت کړو چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

په عمومي صورت کي که چیری د $f(x)$ او $g(x)$ لومړني $(n-1)$ مشتقونه په $x = a$ کي د صفر سره مساوي وي دوي او د n ام مشتقونه معین او دواړه په $x = a$ کي له مینځه تلونکي نه وي، نو

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$$

احتیاط (Caution) :

$\frac{f(x)}{g(x)}$ خارج قسمت قانون پربنسټ دیفرینسیل نه نیول کیږي خو د $f(x)$ او $g(x)$ په جلا جلا دول دیفرینسیل نیول کیږي.

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ وڅیړئ.

حل: پدي ځای کي $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ او $g(x) = \sin x$

او کله چي $x \to 0$ نو $f(x) = 0 = g(x)$، دا د $\frac{0}{0}$ شکل دی،

$\therefore$ د لوپیتال قانون پواسطه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

۳.۵.۳ د $\frac{\infty}{\infty}$ نا ټاکلي بڼه (شکل)

دعوی: که چیری $\lim_{x\to a} f(x)$ او $\lim_{x\to a} g(x)$ دواړه نامعین وي، نو

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ثبوت: مونږ لرو چي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \qquad (\text{شکل}\ \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}}{\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left[\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\right]^2$$

فرض کړئ چې $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ دی

اوس دري حالته منځ ته راځي.

(i) ℓ نه صفر او نه نامعین دی.

$\therefore$ له (1) څخه لرو چې

$$\ell = \ell^2 \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

په پایله کې ،

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(ii) $\ell = 0$

$$\ell + 1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) + g'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} + 1$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(iii) $\ell = \infty$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

پدي ډول په دریواړو حالتونو کې، مونږ لرو

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: $= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$ حساب کړئ.

حل: $\ln\sin 3x$ او $\ln\sin x$ څنګه چې $x\to 0$ ، لایتناهي ته نږدې کیږي

∴ دا د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل دی.

∴ د لوپیټال قانون پر بنسټ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x.\cos 3x}{\sin 3x\cos x}\quad (\text{شکل دی } \tfrac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(-3\sin x\cdot\sin 3x+\cos x\cdot\cos 3x)}{-\sin 3x\cdot\sin x+3\cos x\cdot\cos 3x}$$

$$=\frac{3(0+1)}{0+3\cdot 1}=\frac{3}{3}=1$$

۴.۵.۳ د $0.\infty$ او $\infty-\infty$ ناټاکلي شکلونه(بڼې)

(i) ددي لپاره چې $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$ محاسبه کړو کله چې $\lim_{x\to a}f(x)=0$ او $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ ، نوموږ لیکو چې:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}$$

کوم چې $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ شکل دی او د مخکېني میتود په وسیله ټاکل کېدای شي.

(ii) ددي لپاره چې $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$ محاسبه کړو کله چې $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ او $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ ، موږ لیکو چې

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

کوم چې $\frac{0}{0}$ شکل دی او د مخکېني میتود په وسیله ټاکل کېدای شي.

۵.۵.۳ حل شوي مثالونه

۱ مثال: $\lim_{x\to 0} x\ln\tan x$ محاسبه کړئ.

حل: د $x \to 0$ په شان $\ln\tan x \to \infty$ او $x \to 0$.

دا د $0\cdot\infty$ شکل دی، مونږ لیکلي شو چې:

$$\lim_{x\to 0} x\ln\tan x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x}{\cos 2x\cdot 2} = 0$$

۲ مثال: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ محاسبه کړئ.

حل: دا $\infty-\infty$ شکل دی، مونږ لیکو چې

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \qquad \text{،} \quad \left(\text{شکل ده } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1} \qquad \text{،} \quad \left(\text{شکل ده } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x} = \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2}$$

۳ مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\ln(1+x)}{x^2}$ محاسبه کړئ؟ -

حل: دا $\frac{0}{0}$ شکل دی، پدې صورت کې مونږ لیکلی شو چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x+\cos x-\frac{1}{1+x}}{2x} \qquad \text{،} \quad \left(\text{شکل دی } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-x\cos x - \sin x - \sin x + \dfrac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

٤مثال: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x^2}{\cot x^2}$ محاسبه کړی.

حل: دا $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل دی، نو پدې صورت کې مونږلرو چې

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{\cot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\operatorname{cosec}^2 x^2 \cdot 2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x^2 \cos x^2 \cdot 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} (-2\sin x^2 \cos x^2) = 0$$

٥ مثال: که چیرې $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ معین وي نو د a قیمت او لیمت پیدا کړی.

[P,U.1985]

حل: د $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ د $\dfrac{0}{0}$ بڼه لري.

$\therefore$ دا مساوي کیږي له:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + a\cos x}{3x^2} \qquad \ldots.(i)$$

دده مخرج $\longrightarrow 0$

1 ددې لپاره چې د (i) څخه یو ټاکلي لیمټ لاسته راوړو، د $x \to 0$ په شان د کسر صورت $2\cos 2x + a\cos x$ باید صفر ته تقرب وکړي(\ ).

$$\therefore \quad 2 + a = 0 \qquad\qquad \therefore a = -2$$

د **a** پدې قیمت لرلو سره مونږ لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos x}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x + 2\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x + 2\cos x}{6}$$

$$= \frac{-8+2}{6} = -1$$

۵.۳ پوښتنې

۱- لاندې رابطې محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x} \qquad (iv)\quad \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$(v)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{\sin^{3}x} \qquad (vi)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin(\frac{\pi}{x})}$$

$$(vii)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-2\cos x+e^{-x}}{x\sin x} \qquad (viii)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^{2})}{\ln\cos x}$$

۲. لاندې رابطې محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(1+x)}{x} \qquad (ii)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(1-\frac{1}{x})}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2\ln(1+x)}{x\sin x} \qquad (iv)\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin^{2}x}{\cos 3x+1}$$

$$(v)\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^{2}}} \qquad (vi)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}}-1}{\cos x-1}$$

$$(vi)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^{2}}-1}{\cos -1}$$

۳. لاندې رابطې محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{2}}{x}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^{x}-e^{a})}$$

$$(iv)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\tan x)}{\ln x}$$

$$(v)\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln(x-\ln x)}$$

۴. لاندې رابطې محاسبه کړئ.

$(i)\ \lim\limits_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ $\qquad (ii)\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

$(iii)\ \lim\limits_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1)$ $\qquad (iv)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\ln(\sin x)$

$(v)\ \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ $\qquad (vi)\ \lim\limits_{x\to 0} x\tan(\frac{\pi}{2}-x)$

۵. لاندې رابطې محاسبه کړئ.

$(i)\ \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$ $\qquad (ii)\ \lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$

$(iii)\ \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})$ $\qquad (iv)\ \lim\limits_{x\to 2}\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\ln(x-1)}\}$

$(v)\ \lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$ $\qquad (vi)\ \lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$

٦. **مثال:** د a او b قیمتونه په ترتیب سره پیدا کړئ که چیرې

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}$$

بنایي چې د یو 1 سره مساوي وي.

۳. ۶. ۱ د 0^{∞} ، 1^{∞} ، ∞^{0} ناټاکلي شکلونه(بڼې)

د $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\}^{g(x)}$ ټاکلو لپاره کله چې

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ او $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ او $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ او $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

مونږ $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ لیکو، نوپدې صورت کې $\ln y=g(x)\ln f(x)$

د دریو حالتونوڅخه په هر یو کې ؛ مونږ وینو چې ښي خوا نامعین شکل د $0\cdot\infty$ قبول شویدي او د دوی لېمتونه بنایي لدې امله د مخکېني برخي راکړ شوي میتود پواسطه ټاکل کېږي.

فرض کړئ چې $\lim\limits_{x\to a}\{g(x)\,.\ln f(x)\}=l$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}\ln y=\ell$ یا $\ln(\lim\limits_{x\to a} y)=\ell$ یا $\lim\limits_{x\to a} y=e^{\ell}$

څکه نو

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\ell}$$

د لنډوالي لپاره، مونږ داسې وايو چې $[f(x)]^{g(x)}$ په ترتيب سره د $\infty^0, 1^\infty, 0^0$ نامعين شکلونه د $x = a$ لپاره په پام کې نيول شويدي . د ځينو ليمټونو په ټاکلو کې مونږ شايد د ځينو تابعګانو توسعه وکاروو. دا په لاندې راکړ شويو مثالونو کې ښودل شويدي.

۳ . ۶ . ۲ حل شوي مثالونه

۱. مثال: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$ محاسبه کړئ .

حل: فرض کړئ چې $y = (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$

$$\therefore \quad \ln y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ln \cos x$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\ln y) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos x}{\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - x}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{-2}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^2}{\cot x} \quad \left(\text{شکل } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{-\cos ec^2 x} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x} = e^0 = 1$$

۲ مثال: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ محاسبه کړئ.

حل: فرض کړئ چې $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore \quad \ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + x)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

۳. مثال: $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\sin 2x}$ محاسبه کړئ. [P.U.1987]

حل: فرض کړئ چې $y = (\cot x)^{\sin 2x}$

$$\therefore \quad \ln y = \sin 2x \cdot \ln \cot x$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \ln y = \lim \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{\sin 2x}} = \lim \frac{\ln \cot x}{\operatorname{cosec} 2x} \qquad (\text{شکل } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x)}{-2\operatorname{cosec} x \cdot \cot 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan 2x}{2\cot x \cdot \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \tan 2x}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(\tan 2x) = 0$$

په نتیجه کې

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\sin 2x} = e^0 = 1$$

٤. مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$ محاسبه کړئ. [P.U.1986]

حل: فرض کړئ چې $y = (1-\sin x)^{\cos x}$

$$\therefore \quad \ln y = \cos x \cdot \ln(1-\sin x)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\ln y) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\sin x)}{\sec x} \qquad (\text{شکل } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{1-\sin x}(-\cos x)}{\sec x \tan x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^3 x}{(1-\sin x)\sin x} \qquad (\text{شکل } \frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{(1-\sin x)\cos x - \sin x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x\cdot\cos x}{(1-2\sin x)} = 0$$

په نتيجه کې

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{\cos x} = e^0 = 1$$

۵. مثال: توسعې پکارولو په سره $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x^{5/2}}$ محاسبه کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x^{5/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}......\}^{\frac{1}{2}}}{x^{5/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}\{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\ ......\}^{\frac{1}{2}}}{x^{5/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-.....\}^{1/2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-[1-1/2(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+.....)+.....]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{12}x^2 + \text{د } x \text{ لوړ طاقت}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{12}\ \text{د } x \text{ سره قیمتونه}\right) = \frac{1}{12}$$

۶.۳ پوښتنې

۱. لاندني لېمتونه محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to a}(x-a)^{x-a}$$
$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$
$$(iv)\quad \lim_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\tan x}$$
$$(v)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin hx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$(vi)\quad \lim_{x\to 0}(\tan x)^{\sin 2x}$$

[P.U 1988]

۲. لاندني لېمتونه محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$$
$$(ii)\quad \lim_{x\to 1}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(x-1)}}$$
$$(iii)\quad \lim_{x\to 0} x^{\sin x}$$
$$(iv)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x}$$
$$(v)\quad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$$
$$(vi)\quad \lim_{x\to 1}\left(\tan \pi x/4\right)^{\tan \pi x/2}$$

[P.U 1988]

۳. د توسعې میتود په کارولو لاندېني لېمتونه محاسبه کړئ.

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e^x}{x}\quad [P.U 1985]$$
$$(iv)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x-x^2}{x^2+x\ln(1-x)}$$
$$(v)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

۴. ثبوت کړئ چې .

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^{3/5}-(1-x^2)^{3/5}}{\sin^{3/5}(x-1)}=1=2^{3/5}$$

۳. بیلابیلې پوښتنې

۱. ثبوت کړئ چې د $4x^3-3x^2+2x-1$ معادله د 0 او 1 ترمنځ یو جذر لري.

۲. θ په $a \le x \le a+h$ کې د e^x تابع لپاره د لاګرانج د منځني (وسطي)قیمت دعوی پواسطه لاسته راوړئ اوثبوت کړئ چې

$$0<\frac{1}{h}\ log\frac{e^h-1}{h}<1$$

۳. د لاندې تابع لپاره د رول دعوه ثبوت کړئ

$$f(x)=2x^3+x^2-4x-2$$

۴. د منځني قیمت دعوی c پیدا کړئ که چېرې $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3),\ \ a=0,\ b=4$.

۵. که د [0, 4] انتروال کې $f(x)=x^2-2x,\ g(x)=x^3-3x$، ثبوت کړئ چې f'(x) ا g'(x)په (0, 4) کې د x=1 نقطه کې دواړه له منځه ځي، خو د کوشي د منځني قیمت دعوی سره لرې هم د تطبیق

ور نده پدې حالت کې د c ثابت وټاکئ.

۶. که f(x) په [a, b] کې د ډیفرینسیل وړ وي او که f′(x) په [a, b] کې په سمه توګه کمښت ومومي، نو ثبوت کړئ چې

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

څرنګه دغه پایله بدلون مومي که چیرې $f'(x)$ په [a, b] انتروال کې په سمه توګه ډېرښت ومومي؟

۷. فرض کړئ چې f(x) یوه تابع د [a, b] په انتروال کې متمادي ده او د $x \in (a, b)$ ټولو لپاره f′(x)=0 . ثبوت کړئ چې f(x) ثابت دی. د دې ثبوت لپاره له $\sin^2 x + cos^2 x = 1$ څخه ګټه واخلئ.

۸. که چیرې د f(x)، g(x) او h(x) تابعګانې په [a, b] کې متمادي او په (a, b) کې د مشتق وړ وي، نو وښایاست چې هلته د $c \in (a\ b)$ یوه نقطه شتون لري دارنګه چې

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

په پایله کې د منځني قیمت دعوی او د کوشي د منځني قیمت دعوی استنباط کړئ.

۹. وښایاست چې $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a) + \frac{1}{6}\ h^3 f'''(a+\theta h)$، چیرته چې $1 > \theta > 0$. د اړینو شرایطو په ویلو سره ثبوت کړئ چې د θ لیمټ کله چې $h \to 0$ وکړي $\frac{1}{4}$ دی.

۱۰. ثبوت کړئ چې $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)$ که چیرې دا شتون ولري.

۱۱. د

$$(i)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos hx - \cos x}{x \sin x} \qquad [P.U.1983]$$

لیمت وټاکئ.

۱۲. د a , b او c قیمتونه لاسته راوړئ کله چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2\,.$$

۱۳. د $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x+\ln(1-x)}{x\tan^2 x}$ وټاکئ کله چې $x \to 0$ ته وکړي.

۱۴. ثبوت کړئ چې

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{\pi^2(x-1)^2} - \frac{1}{\sin^2 \pi x}\right\} = -\frac{1}{3} \qquad [P.U.1986]$$

۱۵. د

$$(i)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \qquad [P.U.1984,86,89]$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x} \qquad [P.U.1984]$$

قیمتونه لاسته راوړئ.

۱۶. هغه انتروال وټاکئ په کوم کې چې د $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 16x + 1$ تابع ډېرښت (تزاید) یا کمښت (تناقص) مومي. [P.U.1985]

څلورم څپرکی

د مستوي لــومــړی تــرتــیــب منحني ګــانــې

۱,۱,۴ ســـریــزه

د شپاړسمې پیړی نه مخکی، الجبره او هندسه ددوه ځانګړو مضمونونو په حیث څیړل کېدل. رین دیکارت (Rene Decartes) د (1556-1650) وه چې هغه د لومړي ځل لپاره روښانه کړه چې دا دواړو مضمونونه یو ځای کېدای شي، او هر مضمون د بل د څرګندوني لپاره مرسته کولای شي. ددغو دواړو مضمونونو یو ځای کېدو ته تحلیلي هندسه (Analytic Geometry) وایي.

مونږبه پدې څپرکي کې د مستوي د ځینو منحني ګانودځانګړتیاوو(خاصیتونو) دڅیړلولپاره محاسبې وکړوو. زده کوونکي د پخوا نه د وضیعه کمیاتو د سیستم او ځینو منحنیاتو د معادلو سره اشنا دي. په هرحال ،پدې قسمت کې مونږ په یوی چټکتیا سره بیاځیرنه لرو.
مستوي په څلورو ربعو (یا حجرو) باندې د $x'ox$ او $y'oy$ دوه خطونو پواسطه چې یو په بل عمود دي ویشل شوی دی . $x'ox$ افقي خط ته د x محور وايي او $y'oy$ عمودي خط ته د y محور وايي
o ته مبدا وايي او په مستوي کې د هري نقطې (x,y) وضیعه کمیات (مختصات) د نقطې اړونده فاصلی د x له محور او د y له محور څخه دي . د y,x یوه معادله لکه $y=f_{(x)}$ یا $g(x,y)=0$ په مستوي کې یو منحني ښیـــي.

۱,۲,۴ نـقـطــه او مسستقیم خـــط

1. د (x_1,y_1)او (x_2,y_2) دوه نقطو تر مینځ واټن $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}$ ده.
2. د (x_1,y_1) او (x_2,y_2) نقطو وصل شوي خط مېل $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ دی.
3. د R نقطې مختصات کوم چې د $P(x_1,y_1)$ او $Q(x_2,y_2)$ دنقطو وصل شوي خط د $r=\dfrac{PR}{RQ}$ په نسبت ویشي. $\left(\dfrac{x_1+rx_2}{1+r},\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$ دي .
4. که چېرې $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ او $C(x_3,y_3)$ د یو مثلث راسونه وي، نو د هغه مساحت

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

دی .

5. د $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ او $C(x_3,y_3)$ نقطو لپاره شرط چې هم خط (Collinear) نقطو لپاره

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

دی.

6. د x او y یوه لمړی درجه معادله، یعني ، $Ax+By+C=0$ چېرته چې د B, A او C ثوابت په عین وخت کې ټول صفر ندي، یومستقیم خط ښيي. ددي معادلی ځانګړی شکلونه عبارت دي له :

a). دمېل،د تقاطع دشکل $y=mx+c$ ، چېرته چې m د خط مېل او c د y له محورسره تقاطع ده .

b). د تقاطع شکل معادله $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ، چېرته چې a د x له محورسره تقاطع او b د y له محور سره تقاطع ده .

c). د نارمل شکل معادله $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ، چېرته چې p له مبدا څخه تر خطه پورې د نارمل اوږدالی ده او α زاویه ده کوم چې نارمل يې د x له محور سره جوړوي .

d). د مېل نقطې دشکل $y-y_1=m(x-x_1)$ معادله، چېرته چې m د خط مېل ده او (x_1,y_1) د خط یوه نقطه ده.

e). دورته شکلونومعادلې

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$$

چېرته چې θ دخط مېلان ده او r د (x,y) له عمومي نقطې څخه د (x_1,y_1) تر ټاکلې نقطې پورې واټن مستقیم خط ده.

7. د $y=m_1x+c_1$ او $y=m_2x+c_2$ دوه خطو تر مینځ زاویه

$\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}$ یا $\tan^{-1}\frac{m_2-m_1}{1+m_1.m_2}$ ده .

8. د $y=m_1x+c_1$ او $y=m_2x+c_2$ دوه حطونه:

(a) موازي دي که چېرې $m_1=m_2$.

(b) عمود دي که چېرې $m_1m_2=-1$.

9. د $a_1x+b_1y+c_1=0$ ، $a_2x+b_2y+c_2=0$ او $a_3x+b_3y+c_3=0$ درې خطونه یوپه بل باندې منطبق دي که چېرې:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

10. د $P(x_1-y_1)$ نقطې عمودي واټن د $ax+by+c=0$ له خط څخه $\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ دی.

11. که چېرې $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x-b_2y+c_2=0$ دوه خطونه وي نو $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$ یو خط دی کوم چې ددواړو خطونو له تقاطع څخه تېرېږي.

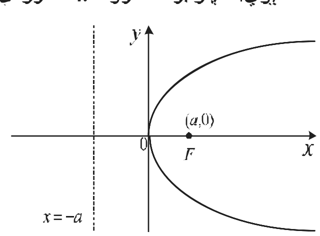
۲,۲,۴ دایره

یوه دایره د نقطو سټ دی دکومو واټن چې له یوی ټاکلي نقطې څخه ثابت وي. ټاکلي نقطې ته د دایرې مرکز وایي او ثابت واټن ته د دایرې شعاع وایي.

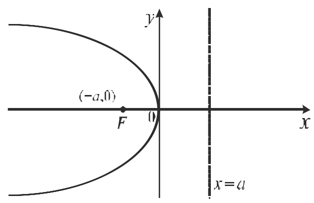
1. د یوی دایرې معادله چې مرکزیې (h,k) او شعاع یې r وي $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.
2. د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ معادله یوه دایره ښیي چې مرکز یې $(-g,-f)$ اوشعاع یې $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.
3. $x=a\cos\theta$ او $y=a\sin\theta$ دیوې دایرې پارامتریک معادلې دي د کومې چې مرکز په مبدا کې اوشعاع یې a ده.
4. که چیرې د (x_1,y_1) یوه نقطه د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ دایرې څخه د باندې وي. د مماس اوږدوالی د (x_1,y_1) له نقطې څخه تر دایرې پورې $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ دی.
5. د P دنقطو سټ، کله چې د مماسونو اوږدوالی له P څخه تر دوه دایرو مساوي وي د دوارو دایرو د جذري محور په نوم یادیږي.
6. که چیرې $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ او $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ دوه دایرې وي، د دوی جذری محور معادله $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+(c_1-c_2)=0$ ده.
7. که چیرې $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ او $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ دوه دایرې وي، نو $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+k(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$ ، $k\neq-1$ د یوی دایرې معادله ده چې د دوارو دایرو د تقاطع څخه تیریږي.
8. د $y=mx+c$ خط لپاره شرط چې د $x^2+y^2=a^2$ دایرې سره مماس وي؛ $c^2=a^2(1+m^2)$ دی.

۳,۲,٤ پارابولا

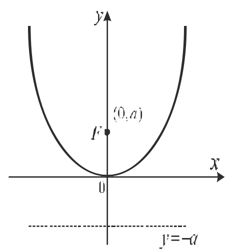
یو پارابولا په مستوي کې د P دټولو نقطو سټ دی، چې په مستوي کې د یوې ثابتې نقطې او له یو ثابت خط څخه مساوي واټن لري خو په خط باندې واقع ندي.
ثابت خط ته د پارابولا هادي او ثابتې نقطې ته د هغه محراق وایي. کوم مستقیم خط چې له محراق څخه تیریږي او په هادي باندې عمود وي دپارابولا محوریې بولي. کومه نقطه، چیرته چې د پارابولا له محور سره مخامخ کیږي، هغې ته د پارابولا راس وایي.
د پارابول معادله: د یو پارابول معادله ساده ده که چیرې د وضیعه کمیاتو محورونه داسې وټاکل شي چې راس په مبدا کې وي او د پارابولا محور د x دمحور یا د y دمحور په امتداد وي.
هغه څلور احتمالــه دموقعیت دټاکـــــلو دا ډول دي چې مـحـراق په $(a,0)$ کې $a>0$، راس په مبدا کې وي، پارابــولا د x مثبت لـور ته خلاصیږي. د پارابولا محورد x محوردی. معادله یې $y^2=4ax$ ده.



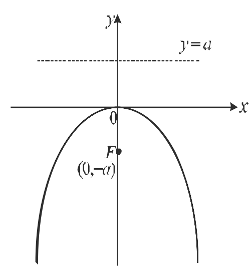
که محراق په $(-a,0)$ ، $a>0,$ راس په مبـــدا کې وي، پړبولا د x منـفي لور ته خلاصیږي. د پړابولا محور د x محــور دی. معادله یي $y^2=-4ax$ ده.



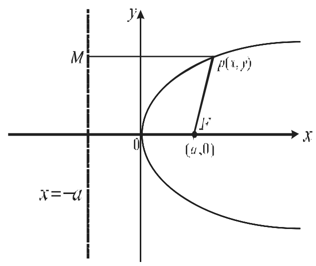
که مــحـراق په = P rÆ:rÆ= ، راس په مبدا کې وي، پارابــولا د y مثبت لور ته خلاصیږي. د پړابولا محور د y مــحور دی. معادله یي $x^2=4ay$ ده.



که مــحـراق په= P rÆ:rÆF = ، راس په مبدا کې وي، پړابــولا د y منفي لـــورته خلاصیږي. د پړابولا محور د y محور دی. معادله یي $x^2=-4ay$ ده.



د موضوع د روښانه کـــــولو لپاره چې پورتني معادلې څرنګه لاس ته راغلــي دي، مونږ لومړی معادله یعنې $y^2=4ax$ دلته لاسته راوړو. پدې حالت کې، راس په مبدا کې دی او محراق په $(a,0)$ کې دی. څنګه چې راس د محراق او هادي څخه مساوي واټن لري. لدې څخه څرګندیږي چې د هادي (یا موجه خط) $x=-a$ معادله لري.



فرض کړئ چې $P(x,y)$ په نوموړي پارابولا باندې کومه نقطه ده. څنګه چې P له محراق او له هادي څخه مساوي ده، نو د PF او PM واټنونه په پورتني شکل کې مساوي دي؛ یعنې

$$|PF| = |PM|$$

چېرته چې $M(-a,y)$ له P څخه تر محراق پورې د عمود پای(بیخ) نقطه ده. لدې امله

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

یعنې

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

یعنې

$$y^2 = 4ax$$

په معکوس دول، د $P(x,y)$ هره نقطه چې په پورتني معادله کې صدق کوي د $|PF|=|PM|$ حالت هم صدق کوي (دمرحلو په سده کولو کې په شاه ته تګ نه کار اخلي)، کوم چې له محراق اوله هادي څخه د P مساوي والی په ګوته کوي، لدې سببه، هره نقطه چې د $y^2 = 4ax$ په معادله کې صدق کوي، په پارابول باندې پرته ده.

یادونه: د $(at^2, 2at)$ نقطه د t ټولو قیمتونو لپاره د $y^2 = 4ax$ په پارابول باندې پرته ده.

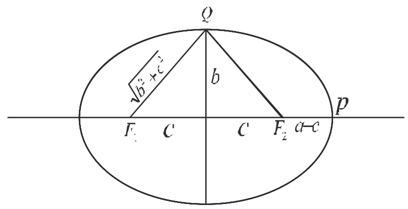
$$\therefore x = at^2$$

$$y = 2at$$

وروستي دواړه معادلې د $y^2 = 4ax$ پارابول پارامتریک معادلې دي.

۴،۲،۴ بیضــوي

یوه بیضوي په مستوي کې د ټولو نقطو سټ دی، چې د واټنونو مجموعه یې له دوه مستقرو (ثابتو) نقطو څخه یو راکړل شوی مثبت ثابت وي.
دوه ثابتو نقطو ته محراق وایي، او د مستقیم خط منځنی نقطې ته چې محراقونه سره نښلوي د بیضوي مرکز وایي. هغه مستقیم خط ته چې د محراقونو څخه تېرېږي او د بیضوي یو سر د بل سره نښلوي لوی (Major) قطر وایي، هغه مستقیم خط ته چې د بیضوي له مرکز څخه مستقیماً تېر، په لوی قطر عمود وي او د بیضوي یو سر د بل سر سره نښلوي کوچنی یا اصغر (Minor) قطر وایي.



دا له پخوا څخه معمول دی چې دبېضوي لوي قطرد $2a$ پواسطه،اوکوچنی قطرد2bپواسطه،اودمحراقونوترمینځ واټن د 2c پواسطه ښودل کېږي. د a او b عددونو ته د بېضوي نیمايي محور وايي. د b,a او c عددونو تر مینځ رابطه کېداي شي د P د لوي قطر پای (انجام) نقطې او Q د کوچني قطر پای په پام کې نیولو سره په لاس راشي.

په همدی ډول P او Q دواړه په بېضوي باندې پرتې دي، د دوي د هرې يوې څخه تر محــــراق پورې د واټن مجـموعه به يو شانتــــې وي. که چېرې مونږ دا حقيقت په همدې ډول په يوه معادله کې وښيـو مونږ لاس ته راوړو چې:

$$QF_1+QF_2=PF_1+PF_2$$

يعني،

$$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=a-c+a-c$$

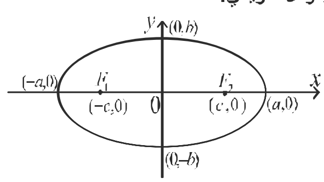
$$2\sqrt{b^2+c^2}=2a$$

يا

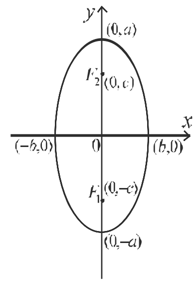
$$\sqrt{b^2+c^2}=a$$

لدې څخه ځرګندېږي چې $a>b$ او $a>c$.

د يوې بېضوي معادله: د يوې بېضوي معادله په ساده شکل کې که چېرې د مختصاتو محور ونه داسې وټاکل شي چې د بېضوي مرکز په مبدا کې وي او محراقونه د x يا د y په محور باندې وی. د دا ډول موقعيتونودټاکلودوه حالتونه لاندې ښودل شوېدي.



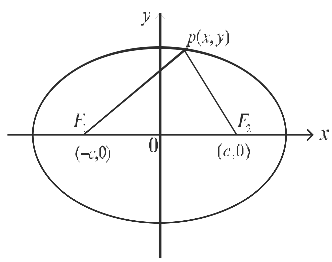
محراقونه او لوي قطر د x په محور باندې. کوچنی قطر د y په محور باندې. مرکز په مبدا کې دی، معادله يې $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ده.



محراقونه او لوي قطر د y په محور باندي، او کوچنی قطر د x په محور باندي مرکز په مبدا کي ده، معادله یی په لاندي ډول ده

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

د موضوع د روښانه کولو لپاره چي پورتني معادلي څرنګه لاس ته راغلي ده، دلته مونږ لومړی حالت تر بحث لاندي نیسو:



محراقونه او لوي قطر د x په محور باندي واقع دي. فرض کړئ چي $F_1(-c,0)$ او $F_2(c,0)$ محراقونه دي. که چیرې $P(x,y)$ په بیضوي باندي کومه نقطه وي نو

$$|PF_1|+|PF_2|=2a$$

یعنی،

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

د معادلي ښــي لور ته د دویم جذر په انتقالولو او په مربع کولو مونږ لاس ته راوړوچي:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

یعنی،

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

یعنی،

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

دویم ځلي په مربع کولو او اختصارولو مونږ لاس ته راوړوچي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

څنګه چې $a^2 - c^2 = b^2$ (دمخه ثبوت شوی ده) معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

په معکوس ډول، دا ښودلی شو چې هره نقطه چې د هغوی مختصات پورتنی معادله صدق کړي ددوی د فاصلو مجموعه له محراقونو څخه لکه 2a ولری، نوپدې ډول دارنګه یوه نقطه په بېضوي باندې واقع ده.

یادونه کوو چې د $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ نقطه، د θ د ټولو قیمتونو لپاره په بېضوي باندې پرته وي نو:

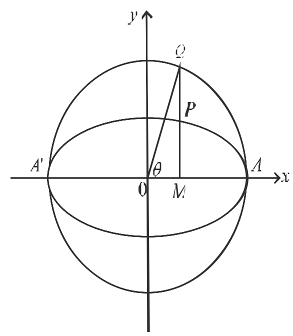
$$\therefore\ y = a\cos\theta$$

$$x = b\sin\theta$$

د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بېضوي پارا متریک معادلې دي.

۴ .۵,۲ مرستندویه دایره (Auxiliary Circle)

هغه دایره چې دیوې بېضوي لوی محور په شان قطرلري د بېضوي د مرستندویه دایرې په نوم یادیږي. د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي لپاره ، د کومکي دایرې معادله $x^2 + y^2 = a^2$ ده.



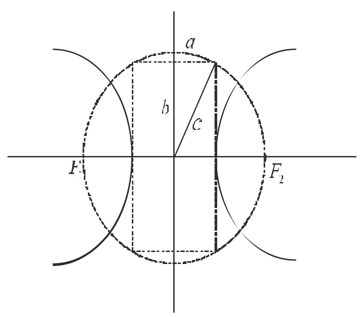
د P یوه نقطه په $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي باندې پام کې ونیسی، د PM اوردینات رسم کړئ او د هغه مولد له مرستندویه دایرې سره د Q په نقطه کې ونښلوي. د $MOQ=\theta$ زاویې مقدار ته د P نقطې له مرکزڅخه لرې کېدونکې (عن المرکز) زاویه وایي.

۶,۲,۴ هیپربولا
یو هیپربولا په مستوي کی د ټولو نقطو سټ دی، چی د هغوي د واټنونو تفاضل له دوه ثابتو نقطو څخه یو راکړل شوی مثبت ثابت وي.

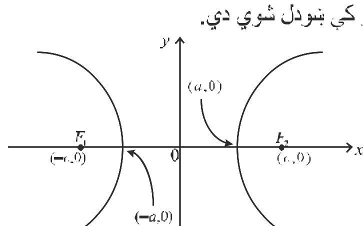
پدي تعریف کي د واټنونو (تفاضل) لکه د لری نقطي واټن منفي دنږدې نقطي د واټن په مفهوم پیژندل کیږي.

دوه ثابتو نقطو ته محراقونه وایي، او د هغه مستقیم خط منځنی نقطي ته چي دواره محراقونه سره نښلوي د هیپربولا مرکز وايي. هغه خط چي له محراقونوڅخه مستقیماً تیریږي دمحراقونو یا دتقاطع محوروړته وایي اوهغه چي له مرکزڅخه مستقیماً تیریږي اود محراقونو په خط باندي عمود وي د مزدوج محور په نوم یادیږي. کوم هیپربولا چي دمحراقونو محورپه دوه نقطوکي قطع کوي، راسونه وایي. دیو هیپربولا دوه جلا شوو برخو ته شاخونه وایي.

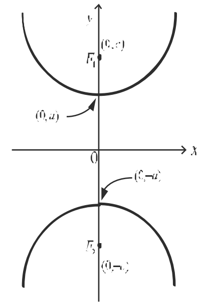
دا له پخوا څخه معمول ده چي د هیپربولاګانو په څیړنه کي د راسونو تر مینځ واټن د $2a$ پواسطه ښیي، د دوه محراقونو تر مینځ واټن د $2c$ پواسطه او د b مقدار لکه $b=\sqrt{c^2-a^2}$ تعریف او په لاندي شکل کي ښودل شویدي .



د هیپربولا معادله: دیو هیپربولا معادله ډیره ساده دي که چیری د مختصاتو محورونه دا رنګه وټاکل شي چي د هیپربولا راس په مبدا کي وي او محراقونه د x په محور یا د y په محور باندي واقع وي. دا ډول دوه شوني (ممکنه)حالتونه په لاندي شکلونو کي ښودل شوي دي.

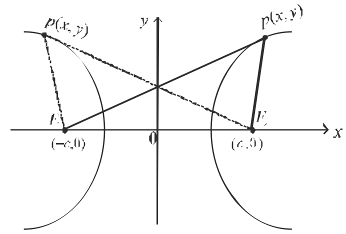


محراق د x په محور باندي، دمزدوج محور د y په محور باندي، مرکز په مبدا کي دی، معادله یي $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ده.



محراق د y په محور، دمزدوج محورد x پــه محور، مرکز په مبدا کې دی، معادله یې $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ده.

د پورتنیومعادلودڅرګندونې لپاره چې څرنګه لاسته راځي. راځی چې لومړنی حالت په پام کی ونیسو.



فرض کړئ چې $F_1(-c,0)$ او $F_2(c,0)$ محراقونه دی. فرضوو چې د $P(x,y)$ هره نقطه په هیپربولا باندې ده، دارنګه چې د P نقطې واټن له لرې محراق څخه منفي د P دنقطې واټن له نږدې محراق څخه $2a$ دی. پدې پورې اړوند چې کوم محراق له P څخه لیرې دی، دغه شرط د

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

معادلې لپاره یا

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

معادلې لپاره لاربښونه کوی.

په هر یو حالت کې:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

دواړو خواوو په مربع کولو سره مونږه په لاس راوړو:

$$(x+c)^2+y^2-2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2=4a^2$$

په اختصارولو او د جذر په بیلولو مونږ لاس ته راوړو چې:

$$x^2+y^2+c^2-2a^2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د دویم ځل په مربع کولو او اختصار کولو مونږه لاس ته راورو چې:

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

یعني،

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

یا،

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

په معکوس ډول، کولئ شو چې د P دهرې نقطې لپاره وښیو کومې چې مختصات یې په پورتنی معادله کې صدق کوي، له P څخه تر لرې محراق پورې واټن منفي له P څخه ترنږدې محراق پورې واټن $2a$ ده، پدې ډول دا رنګه یوه نقطه بایدپه هیپربولا باندې پرته وي .

یادونه :

د $(a\,sec\,\theta,\ b\,tan\,\theta)$ نقطه په هیپربولا باندې پرته ده.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

د θ د هر قیمت لپاره ،

$$\therefore\quad x = a\,sec\,\theta$$
$$y = b\,tan\,\theta$$

د $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا پارامتریک معادلې دي.

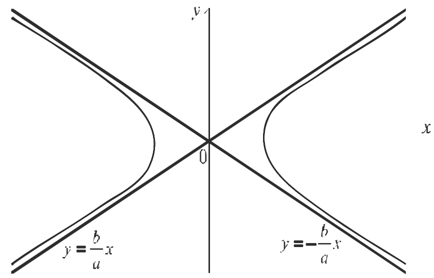
دهیپربولا مجانب:

دیو منحني یومجانب یو مستقیم خط دی دا رنګه چې عمودي واټن یې له خط څخه په منحني باندې یوی نقطې ته نږدې کیږي او کم پاتې کیږي نو د تاکنې وړ مثبت قیمت د منحني د نقطې په شان په نامعینه توګه له مبدا څخه کمښت مومي. مونږ به مجانبونه وروسته په تفصیل سره وڅیړو. پدې ځای کې مونږ د یو هیپربولا مجانبونه څیړو. لاندې دعوی ښیئوي چې هیپربولا مجانبونه لري.

دعوی:

(a) د $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا ، $y = \frac{b}{a}x$ او $y = -\frac{b}{a}x$ مجانبونه لري.

(b) د $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ هیپربولا، د $y = \frac{a}{b}x$ او $y = -\frac{a}{b}x$ مجانبونه لري.



ثبوت:

که چېرې مونږ د $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$ معادله په لاندې بڼه ولیکو

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$$

نو، په لومړي ربع کې، د راس واټن د $y=\frac{b}{a}x$ خط او د هیپربولا تر منځ کېدای شي چې په لاندې ډول ولیکل شي

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

دغه واټن صفر ته نږدې کېږي کله چې $x\to+\infty$
ځکه چې،

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)}=0$$

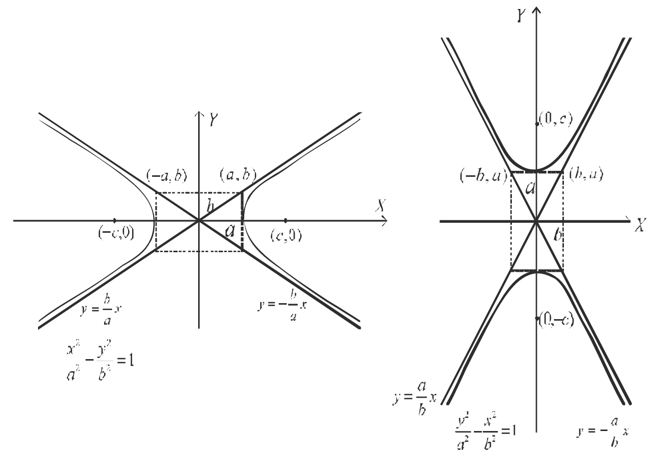
لدې امله $y=\frac{b}{a}x$ د هیپر بولا یومجانب دی.

د نورو ربعو حالتونه هم په ورته ډول سره دی. د (b) ثبوت هم همداشانته دی.

یادونه: دیوهیپربولا د مجانبونو ګډه معادله کېدای شي چې د هیپربولا د معادلې په ښي لورکې دیو (1) پر ځای دصفر په ونج کولو لاس ته راوړو.

د مثال په ډول، د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هیپربولا لپاره مجانب $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ ، یا $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2$ دي، یعني، $y=\pm\frac{b}{a}x$.

د یو هیپربولا مجانبونه دیو مستطیل دقطرونو په اوږدوکي د a د واحد په اندازه دمبدا دوارو خواووته د محراقونود محور په اوږدوکي، او د b واحد په اندازه د مبدا دوارو خواووته دمزدوج محور په اوږدوکي څنګه چې په لاندې شکلونو کی ښودل شوي غزيدلي دي.



مزدوج هیپربولاګاني: دوه هیپربولاګانی مزدوج هیپربولا ګانی دي کله چې دیوې پرېکوونکې (متقاطع) محور دبلی مـــزدوج محور وي.

متوازي الاضلاع هیپربولا: کله چې د یو هیپربولا دپرېکوونکې اومزدوج محورونه دیوشانتې اوږدوالي وي، د متوازي الاضلاع هیپربولا په نوم یادیږي.

په هغه صورت کـــې چې $b=a$ وي ، نو د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ او $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ هیپـــربولا ګانی د $x^2-y^2=a^2$ او $y^2-x^2=a^2$ متوازي الاضلاع هیپربولاګانو ته بدلون مومي چې مرکزيي په مبدا کې او محراقونه يـــې په ترتيب سره د x او y په محورونو باندې واقع دي.

یادونه: یوه دایره بیضوي ته د متوازي الاضلاع هیپربول په شان چې هیپربول ته بدلون کوي بدلون مومي. کله چې مرکز په مبدا کې وي او لوی قطر او کوچنی قطر(a او b) سره مساوي وي، نود $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

او $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ دواړه بیضوي ګانی د $x^2+y^2=a^2$ په دايرې باندې بدلیږي.

دیو متوازي الاضلاع هیپربولا مجانبونه په قایمې زاویې سره یو بل پرې(قطع) کوي.

قایمه ضلع (Latus Rectum): د یو مخروط قایمه ضلع (Latus Rectum) هغه مستقیم خط یا وتراوږدوالی ته وايي چې له محراق څخه تیر او د تناظر په محور باندې عمود او د مخروط پواسطه قطع شوی وي. (یاپه مخروطي مقطع کې دهغه وتر اوږدوالی دی چې له محراق څخه تیراودتناظرپه محورباندې عمود وي).

۷,۲,۴ دویم ترتیب هم جنسه (متجانسه) معادلې

د $ax^2+2hxy+by^2=0$ شکل یوې معادلې ته د دویم ترتیب یوه هم جنسه معادله وایي.

$$ax^2+2hxy-by^2=b\left(y^2+\frac{2h}{b}.xy+\frac{a}{b}.x^2\right)=b\left[y+\frac{h+\sqrt{h^2-ab}}{b}x\right]\left[y+\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{b}x\right]$$

پدې ډول ده = $ax^2+2hxy+by^2$ دوه خطي فکتورونه (ضربي عوامل) $y+\frac{h+\sqrt{h^2-ab}}{b}x=0$ او $y-\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{b}x=0$ دي.

څکه نوددویم ترتیب هم جنسه معادلې دوه خطونه ښیي چې مستقیماً له مبدا څخه تېرېږي ښیي دوه خطونه موهومي وي که چېرې $h^2-ab<0$ ، اومنطبق دي که چېرې $h^2-ab=0$ وي.

که چېرې m_1 او m_2 د دوه خطونومېلونه وي نو

$$m_1=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

$$m_2=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

لدې امله $m_1+m_2=\frac{-2h}{b}$ او $m_1m_2=\frac{a}{b}$.

اوپدې ډول که چېرې θ د دواړو خطونوترمینځ زاویه وي، نو

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2}$$

$$=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

۸.۲.۴ مخروطي مقطع

یو مخروطي شکل په مستوي کې دنقطو یوست دی دارنګه چې دهغوي واټن له یوې ثابتې نقطې څخه اوله یوثابت مستقیم خط څخه په یوثابت نسبت کې وي.
ثابتې نقطې ته محراق، ثبت خط ته هادی اوثابت نسبت ته دمخروط عن المرکزیت (eccentricity) وایي.

مونږدرې حالته لرو.

(1) که چېرې $e<1$ وي مخروطي شکل یوه بیضوي ده.
(2) که چېرې $e=1$ وي مخروطي شکل یوپارابولا ده.
(3) که چېرې $e>1$ وي مخروطي شکل یوهیپربولا ده.

مونږ په اساني سره وینوچې دبیضوي اوهیپربولا لپاره،

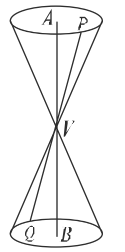
$$e=\frac{c}{a}$$

$$c=ae$$

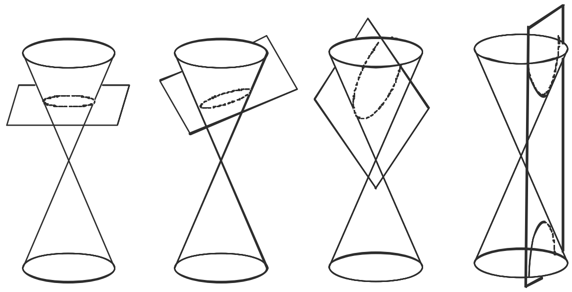
اوپډي ډول $(ae,0)$ او $(-ae,0)$ محراقونه دي او $x=\pm\frac{a}{c}$ هادي دی په هغه حالت کې چې لوی محور(محراقي محور) د x محور په اوږدوکې وي.

۹.۲.۴ مخروط اومخروطي ټوټې (قطعې)

یوقایم دایروي مخروط هغه سطحه ده چې دیوخط پواسطه دیوثابت محور په شاوخوا ددوران له امله په دارنګه یوي طریقی سره رامینځته کیږي چې خط هر وخت په محور باندې دیوي ثابتې نقطې څخه تیریږي، چې راس ورته وایي اوهروخت له محور سره مساوي زاویه جوړوي. مخروط له دوه برخو یا ټوټو(nappe) نه جوړشویدی، چې په راس کې یوځه شویدی. دخط مختلفو حالتونوته د مخروط رسموونکي یاد مخروط رامنځته کوونکي وایي. په لاندې شکل کې (v) راس دی، د AB خط محور دی اود PQ خط د مخروط رامنځته کوونکي (یاتولیدوونکی)دی.



هغه منحني ګانې چې له یومخروط سره دمستوي دتقاطع پواسطه لاس ته راځی مخروطي ټوټې یا مخروطي مقطع ګانې ګڼل کیږي. کومې چې ترټولوډیرې مهمې ګڼل کیږي هغه دایرې، بیضوي ګانې، پارابولا ګانې او هیپربولاګانې دي.

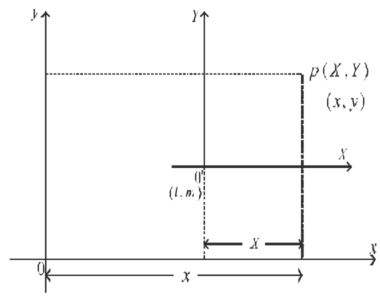


(a) (b) (c) (d)

یوه دایره دیومخروط دتقاطع پواسطه له یوه مستوي سره چې په محور باندې عمودوي لاس ته راځي او راس پکښې شامل نه وي (پورتنې د a شکل). که چیرې قاطع مستوي لږڅه مایل او یواځې اوتنها یواځې یوه برخه قطع کړي، په پایله کې لاس ته راغلې ټوټه یوه بیضوي ده (b شکل). که چیرې قاطع مستوي زیات کوږشي ترڅوچې د مخروط له مولد سره موازی شي خو مقطع یواځې اویواځې له یوې برخې (nappe) سره وي، پدې صورت کې لاس ته راغلې ټوټه یوپارابولا دی (c شکل). که چیرې مستوي دواړه برخې (nappes) قطع کړي چې راس پکښې شامل نه وي، پدې حالت کې لاس ته راغلې ټوټه یو هیپربولا دی (پورتنې د d شکل) .پدې ټاکنې سره چې قاطع مستوي له راس څخه مستقیماً تیر شي، دا اټکل شتون لری چې مونږبه یوه نقطه یا یوه جوړه خطونه دتقاطع لپاره په لاس راوړو. چې دغو ته نه تولید شوې مخروطي برخې وایي.

۱۰.۲.۴ دمحورونو لیږدونه (انتقال)

د X او Y د مختصاتودیونوي سیستم دلاس ته راوړلوتخنیک ته چي د (l,m) له نقطي څخه تیریږي اود x، y دمختصاتوله محورونوسره موازي وي دمحورونو لیږدونه وایي. همدارنګه دي ته دمبدا لیږدونه د (l,m) نقطي ته هم وایي .



فرض کړئ چي (l,m) د o' نقطه ده. فرض کړئ چي په مستوي کې د P یوې نقطې مختصات (x,y) دی چي د x,y دمختصاتوسیستم پوری اړه لري او (X,Y) هغه مختصات دی چي د X,Y دمختصاتوسیستم پوری اړه لري. نو

$$\left.\begin{aligned} x &= X + l \\ y &= Y + m \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= x - l \\ Y &= y - m \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

(A) او (B) ته دلیږدونی (انتقال) معادلي وایي. دمحورونولیږدونه دمخروطي توتو په څیرلواورسمولو کې کارول کیږي.

۱۱.۲.۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $x^2+16y^2+96y+128=0$ مخروطي توته رسم کړ ئ .

حل: معادله کولی شو چي د

$$x^2+16(y^2+6y)=-128$$

یا

$$x^2+16(y+3)^2=16$$

په شان ولیکو، یعني،

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{1}=1$$

دلیږدوني پواسطه،

$$x=X$$
$$y+3=Y$$

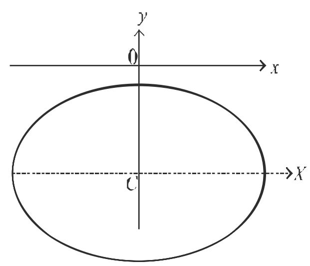
اومعادله لاندي بڼه غوره کوي.

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{1}=1$$

کومه چي یوه بېضوي ده چي نیمایي محورونه یې $a=4$ ، $b=1$ او $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$ دي، دبېضوي مرکز د

$X=0$، $Y=0$ پواسطه راکول شویدي. یعني $(0,-3)$ مرکزدی.

محراقونه د $X=\pm c$ او $Y=0$ پواسطه په ګوته کېږي. یعني، $x=\pm\sqrt{15}$ او $y+3=0$ ، $(\pm\sqrt{15},-3)$ محراقونه دي.



راسونه د $X=\pm a$ او $Y=0$ پواسطه را کول شویدي، یعني $(\pm 4,-3)$ راسونه دي.

د کوچني قطر انجامونه $x=0$ او $Y=\pm b$ پواسطه ورکول کېږي، یعني، کوچني قطرد پای نقطې $(0,-2)$ او $(0,-4)$ دي.

دهادی پموجه خطونومعادلې په لاندې دول دي:

$$X=\pm\frac{a}{e}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$x=\pm\frac{16}{\sqrt{15}}$ هادي خطونه دي.

۲. مثال: دپارابولا معادله پیداکړئ چي محراق یې $(2,3)$ نقطه اوهادي یې $y-5=0$ خط وي.

حل: فرضوو چي $P(x,y)$ په پارابولا باندې کومه نقطه ده، دپارابولا دتعریف پواسطه د $P(x,y)$ دنقطې واټن د $(2,3)$ له نقطې څخه اود $y-5=0$ له خط څخه مساوي دی، یعني،

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=y-5$$

د دواړوخواووپه مربع کولولاس ته راځي چي

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=y^2-10y-25$$

$$x^2-4x+4y-12=0$$

۳. مثال: دیوې بېضوي معادله پیداکړئ چي محراقونه یې $(2,4)$ او $(2,-6)$ وي اود لوی محور نیمایې 6 وي.

حل: فرض ووچي $F_1(2,4)$او $F_2(2,-6)$ محراقونه او $a=6$ ده .
که چېرې $P(x,y)$په بېضوي باندې کومه نقطه وي نو :

$$|PF_1|+|PF_2|=2\cdot 6$$
$$\therefore \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+6)^2}=12$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=-\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+12$$

د دواړه خواووپه مربع کولو اوپه ساده کولو مونږلاس ته راوړو:

$$36x^2+11y^2-144x+22y-241=0$$

٤. مثال: $81y^2-144x^2=11664$ هېپربولا راکړشويده،

(a). c ، b,a اوe قېمتونه، (b). دمحراقونو، راسونو، اودقايم څلورضلعي (Latera recta) د پاى نقطو مختصات، (c). قايمى ضلعي (Latus Rectum) اوږدوالى، (d). دمجانبونو معادلې پيداکړئ.

حل: (a). په 11664 باندې د $81y^2-144x^2=11664$ معادلې په ويشلومونږلاس په راوړو چې

$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{81}=1$$

لدې څخه مونږ نوهيږوچې متقاطع محور دy په محور او

$$a=\sqrt{144}=12 \qquad , \qquad b=\sqrt{81}=9$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

b). محراقونه په $(0,\pm c)$كې دي يعني (0,15)او (0,-15)، راسونه په $(0,\pm a)$كې دي يعني (0,12) او $(0,-12)$، د قايم څلورضلعي دپاى نقطې په $(\pm\frac{b^2}{a},c)$ او $(\pm\frac{b^2}{a},-c)$ کې دي يعني $(\pm\frac{27}{4},15)$ او $(\pm\frac{27}{4},-15)$.

(c). دقايم ضلعي اوږدوالى

$$\frac{2b^2}{a}=2\frac{81}{12}=\frac{27}{2}$$

دی.

(d). دمجانبونومعادلې د $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{81}=0$ پواسطه راکول شويدي،يعني ، $81y^2-144x^2=0$،
$(3y+4x)(3y-4x)=0$ په پايله کې د مجانبونو معادلې $3y\pm 4x=0$ څخه عبارت دي.

۴ . ۲ پوښتنې

١. دپارابولامعادله پيداکړئ چې محراق يې په مبداکې او هادى معادله يې $2x+3y+6=0$ ده.
٢. د $(-4,-5)$محراق او $3x+4=0$ هادى په لرلو دپارابولا معادله پيداکړئ .
٣. د $(0,\pm 4)$محراقونواود $(0,6)$راس په لرلو ديوې بېضوي معادله پيداکړئ .

٤. پیداکړئ:
(a) دلوي محور نیمایي اوکوچني محور نیمایي اود راسونومختصات .
(b) د محراقونومختصات .
(c) دقائمی ضلعي اوږدوالی اود مجانب سره دقایمی ضلعي دانجامی نقطومختصات .
(d) د $9x^2+4y^2=36$ بیضوي عن المرکزیت،دمنحني گراف .

٥. د $49y^2-16x^2=196$ هیپربولا راکړشوي ده .
(a) د a , b , c او e قیمتونه پیداکړئ ؟
(b) د محراقونو، دراسونواودمجانب سره دقایم څلورضلعي دانجامی نقطومختصات پیداکړئ ؟
(c) د قایمی ضلعي اوږدوالی پیداکړئ ؟
(d) دمجانب معادله پیداکړئ ؟
(e) دمنحني گراف پیداکړئ ؟

٦. د $4x^2-y^2+36=0$ هیپربولا راکړشویده ، دهیپربولا دمزدوج معادله ولیکئ اودوه هیپربولاگانی رسم کړئ.

٧. دهیپربولا معادله پیداکړئ چې دنقطوپواسطه رسم شویدي، دارنگه چې دده واټن فرق (تفاضل) د$(3,-4)$ او $(4,10)$ له نقطوڅخه تل 10 دی.

٨. دمستقیم خطونه پیداکړئ چې د
(1). $2x^2-xy-3y^2=0$
(2). $2x^2+5xy+3y^2=0$
(3). $x^4-y^4=0$
پواسطه ښودل شوي وي.

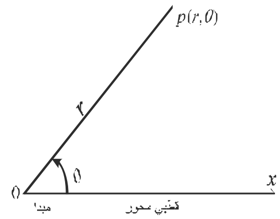
٩. د $x^2+y^2-10x+16=0$ ، $x^2+y^2+10x+16=0$ هم محوره دایرو سیستم شرح کړئ، دسیستم حدي نقطې پیداکړئ .

١٠- مخروطي توته شرح کړئ چې د $x^2-2x-y=0$ معادلې پواسطه ښودل شوې وي.

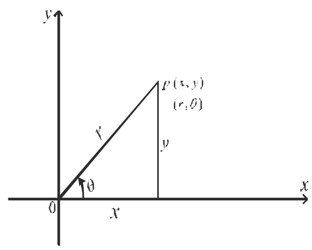
١.٣.٤ قطبي مختصات

دکارتي قایمومختصاتوپه سیستم کې مختصات ، په یومستوي باندې دیوې نقطې هندسي محل دې چې د x او y دوه واټنونوپواسطه ښودل کیږي؛ کوم چې هره یوه دواړو خواوته په مثبت اومنفي جهتونواندازه کیږي، دقطبي مختصاتوپه سیستم کې، دیوې نقطې هندسي محل د یوواټن(فاصلې) اودیوې زاویې پواسطه ښودل کیږي.

په یومستوي کې دقطبي مختصاتود سیستم درسمولولپاره مونږد O یوه ټاکلي نقطه چـــې مبدا یا قطب ورته وایي ټاکو، اومبدا دیـــوي اخرنې نقطې په څیر کـــاروو، مونږ یوه شعاع چې قطبي محوریا اصلي محور یې بولي رسموو.



وروستـــــه داندازه کېدنې یوواحد ټاکو، مونږ به په مستوي کې د P کومې نقطې ته د (r,θ) قطبي مختصاتوله یوې جوړې سره اړیکه ورکړوکوم چې r له مبدا څخه د P نقطې واټن اوθ له قطبي محورڅخه تر OP مستقیم خط پورې لکه دپورتني شکل په څېر دزاویې اندازه ده. د r عددته د P شعاعوي واټن اوθ ته د P قطبي زاویه وايي.



۳,۴ ـ ۲ دقطبي اوقایمومختصاتوترمنځ اړیکه

که چېرې په قطبي سیستم کې قطب د دکارتي سیستم په مبدا باندې منطبق وي اوقطبي محورد x د محورمثبت لورته وي (لکه پورتنی شکل) ،نودp هره نقطه د (x,y) قایم مختصات او(r,θ) قطبي مختصات دواړه لري. د دغودواړوسیستمونوترمنځ اړیکې، کوم چې دشکل څخه یې مستقیماً په پام کې نیولې شو، عبارت دي له

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

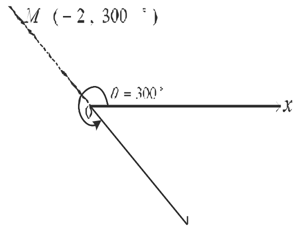
او

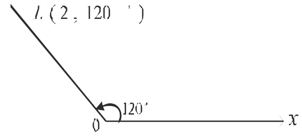
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ددغورابطوپه مرستې سره مونږ کولې شو چې دقطبي مختصاتو یوه معادله قایمومختصاتوپه یوې معادلې باندې په ورته ډول تبدیله کړو.

په قطبي مستوي باندې دنقطوپه نښه کول:

په قطبي مستوي باندې د(r,θ) دیوې نقطې د رسمولو لپاره، مونږاول د θ زاویه په ځانګړې (پاراکړل شوې) لورباندې رسموو، نوېدې ډول دویمه ضلع ځای په ځای کوو. سربېره پدې د r واټن یا د اخرنې (یا دویمې) ضلعې په امتداد باندې اندازه کېږي که چېرې $r > 0$ یداخرني ضلعې په معکوس امتداد باندې چې له قطب نه تېرېږي اندازه کېږي که چېرې $r < 0$.





نودمثال په ډول، $L(2,120^\circ)$ نقطه د 120° زاويې چې له قطبي محورڅخه دساعت دعقربې په مخالف لورې رسم شويده، ددويمې ضلعې په اوږدوالي 2 واحده په نښه کواو $M(-2,300^\circ)$ نقطه د 300^0 زاويې له قطبي محورڅخه دساعت دعقربې په مخالف لورې رسم شوې ده. ددويمې ضلعې داوږدوالي په مخالف لورې دوه واحد ه په نښه کوو.

٤. ٣. ٣ دقطبي معادلو رسمول

که چېرې r او θ ديوې معادلې پواسطه اړيکه پيداکړئ وي نو قيمتونه خامخاد θلپاره ټاکل کېږي اودr لپاره اړونده قيمتونه اټکل کوي ، نوپدې ډول مونږدخينونقطولپاره دقيمتونو يوجدول لاسته راوړو. دغه نقطې چې په پاڼه کې ټاکل کېږي اوديو منحني پواسطه يوځای کېږي، نوديوې معادلې هندسي محل تشريح کوي. کله چې قطبي معادلې ټاکو، نو مونږبايد دمنحني په ورته والی(متناظريت) باندې پوه شو.

(a) ديوې معادلې منحني په قطبي مختصاتوکې نسبت اصلي محورته يعنې د x محورته متناظره دی که چېرې (r,θ) يا د $(r,-\theta)$ياد $(-r,\pi-\theta)$پواسطه عوض شي په هغې معادله کې يوه معادل معادله رامنځته کړي.

(b) ديوې معادلې منحني په قطبي مختصاتوکې نسبت عمودي محورته يعنې د y محورته متناظردی که چېرې (r,θ) يا د $(-r,-\theta)$ ياد $(r,\pi-\theta)$ پواسطه عوض شي په هغې معادله کې يوه معادل معادله رامنځته کړي.

(c) ديوې معادلې منحني په قطبي مختصاتوکې مبدا يا قطب ته متناظردی که چېرې (r,θ) ياد $(-r,\theta)$ ياد $(r,\pi+\theta)$ پواسطه ځای په ځای شي په هغې معادله کې يوه معادل معادله رامنځته کړي.

اوس مونږځينې منحنيات څېړوکوم چې په قطبي مختصاتو کې تعريف شويدي.

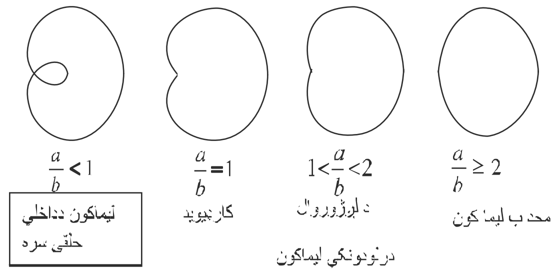
٤. ٣. ٤ زړه ډوله او حلزوني منحني ګانې

د

$$r = a + b\sin\theta\ , \qquad r = a - b\sin\theta$$

$$r = a + b\cos\theta\ , \qquad r = a - b\cos\theta$$

شکل معادلوته چې قطبي منحني ګانې رامنځته کوي حلزوني منحني (Limacons) وايي. (Limacons) دلاتيني کلمې Limax څخه چې يوې پشوګې (حلزون) لپاره ، يوې اوښکې يالړمې لپاره چې ديو ژوندي مخلوق په شان دې اخيستل شوی دی. دلته څلور ممکنه شکلونه دحلزون لپاره شوني دي چې کېدای شي د $\dfrac{a}{b}$ اړيکي څخه وټاکل شي چېرته چې $a>0$ او $b>0$ دي.

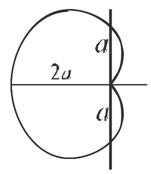


دحلزوني منحني ګانو څرنګوالي قطبي محورپورې اړه لري يا sinθ يا Cosθ پورې چې په معادله كې څرګنديږي اړين دي يډ مثبت يا منفي علاموپورې اړين دي. له دی سببه د زړه ډوله شكل منحني چې د a=b په حالت كې څرګنديږي، داډول حلزوني شكل يا لېماكون ته كارډيويډ وايي.

مثال: a د يومثبت ثابت په توګه په فرضولو، د $r=a(1-\cos\theta)$ منحني رسم كړئ.

حل: راكړل شوي معادله د $r=a-a\cos\theta$ بڼه لري چې $a=b$ سره ده. لدې سببه دا يوكارډيويډ ښيي. څرنګه چې $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ده نوكله چې θ د $(-\theta)$پواسطه عوض شي معادله تغيرنكوي، كارډيويډ نظراصلي محورته متناظردي. پدې ډول مونږكولی شو چې ټول منحني د x محورلپاره دكارډيويډ داولني برخې درسمولوڅخه اوسربيره پدې د x محورپه شاوخوا ددغې برخې له انعكاس څخه په لاس راوړو. څنګه چې θ له 0 څخه تر π پورې تغيركوي،Cosθ په يونواخته ډول له 1 څخه تر1- پورې تناقص كوي، او $1-\cos\theta$ په يونواخته ډول له 0 څخه تر2 پورې تزايدكوي. پدې ډول، كله چې θ له 0 څخه تر π پورې تغيركوي، نود r= a(1-cosθ) قيمت به په يونواخته ډول له 0 څخه تر 2a پورې ډېرښت مومي. ددغومعلوماتو اودلاندې جدول په كارولو سره، به مونږ هغه منحني چې لاندې راكړل شوې دی لاس ته راوړو

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$



$r=a(1-\cos\theta)$

يادونه: په هغه صورت كې يوقطبي منحني له مبدأڅخه تيريدلې شي څه وخت چې $\theta=\theta_0$، نود $\theta=\theta_0$خط له منحني سره په مبدا كې مماس دی، څنګه چې د پورتني كارډيويډ لپاره $\theta=0$ ده په مبداكې مماس دی.

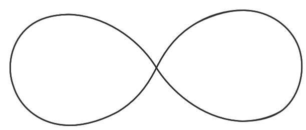
٤ . ٣ . ٥ پروانه ډوله شکلونه (یاڅرخونه Lemniscates)

د

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ، $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$

$r^2 = a^2 \sin 2\theta$ ، $r^2 = -a^2 \sin 2\theta$

شکل معادلي دیوي الوتکي(پادیوي بیړي) دڅرخ په څېر منحني ګاني ښيي چي دپروانه ډوله شکلونو په نوم یادیږي. دپروانو مرکزپه مبدا کي دی، خو موقیعت یي قطبي محورته د a^2 مخکني اشاري پوري اوپه هغه صورت کي د sin2θ یا cos2θ پوري چي په معادلوکي څرګند دي اړه لري.



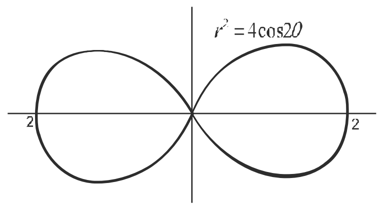
پروانه ډونه شکل

مثال: $r^2 = 4\cos 2\theta$ منحني رسم کړئ ؟

حل: معادله د $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ له ډول څخه چېرته چي $a = 2$ ده، اولدي امله یوه پروانه ښيي. که چېري مونږ(r,θ) په (r,-θ) یاپه $(r, \pi - \theta)$ باندي عوض کړو دمعادلي شکل هماغه ډول پاتي کیږي څکه نومنحني د x محور او y محورته متناظره ده. لدي سببه مونږکولي شوچي دمنحني ټوله برخه د پرواني دلوميري رسم څخه د $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ په رنج (ساحه کی) اود x محور او y محورته ددغوسیموله انعکاس څخه لاس ته راوړو.

د $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ په سیمه کي د θ لپاره cos2θ غیر منفي ده، همدارنګه ددادول هري θ لپاره ، پدي ځاي کي دوه قیمتونه شتون لري یعني $r = 2\sqrt{Cos2\theta}$ او $r = -2\sqrt{Cos2\theta}$. څرنګه چي θ له 0 څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پوري تغیر کوي، دcos2θ قیمت له 1 څخه تر 0 پوري په یونواخته ډول کمښت مومي، همدارنګه $r = 2\sqrt{Cos2\theta}$ په یو نواخته ډول له 2 څخه تر 0 پوري تناقص کوي او $r = -2\sqrt{Cos2\theta}$ په یونواخته ډول له 2- څخه تر 0 پوری دیریښت مومي. پدي معلوماتو سره اودلاندیني جدول پواسطه مونږ راکړشوي منحني په لاس.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	± 2	$\pm\sqrt{2}$	0



نوپدې صورت کې د r لپاره کوم حقيقي قيمت چې $r^2 = 4\cos 2\theta$ صدق کړي وجودنلري . پدې ډول هلته په ګراف باندې ددارنګه θ لپاره کومه نقطه موجوده نده .

۴ . ۳ . ٦. مارپيچونه

يومنحني ته چې دمبدا په شاوخوا په نامعينه توګه راتاو (پيچلې) وي چې پکښې r لکه څنګه چې θ ډېرښت مومي په يونواخت ډول يا ډېرښت وموي او يا کمښت وموي، يومارپيچي وايي. د $r = a\theta$ ، $r = ae^{\theta}$، $r\theta = a$ يا $(r = \dfrac{a}{\theta})$ شکل معادلې دمارپيچونو ښودونکي دي. د

$$\theta \ge 0\,, \qquad r = a\theta$$

يا

$$\theta \le 0\,, \qquad r = a\theta$$

مارپيچي ته دارشميدس (Archimedes)مارپيچي وايي.

مثال: د $r = \theta$ ، $\theta \ge 0$ منحني رسم کړئ ؟

حل: $r = 0$ دارشميدس يومنحني ښيي . پدې ترتيب $r = 0$ ده . کله چې $\theta = 0$ ، مبدا په منحني باندې ده اوقطبي محور له مارپيچي سره مماس دي .

يادونه کووڅه وخت چې θ په يونواخت ډول ډېرښت وموي همغه شانتې r ډېرښت مومي. د x له محورسره يې غوڅونې (تقاطع) پيښيږی کله چې

$$\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

په نقطوکې چې

$$r = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

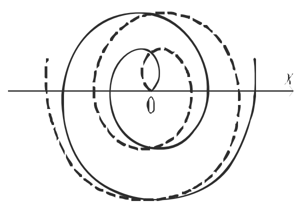
دی او د y له محورسره يې غوڅونی پيښيږی کله چې

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

په نقطوکې چېرته چې

$$r = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

دي. ګراف يې په لاندې ډول سره دی:



یادونه: د $r = a\theta$ ، $\theta \geq 0$ شکل ارشمیدس مارپیچي، دمبداڅخه دساعت دعقربي دلور په خلاف شروع په حرکت کوي اودمبدا په شاوخوا څرخیږي .

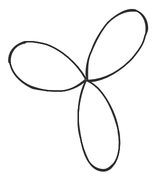
د $r = a\theta$ ، $\theta \leq 0$ شکل ارشمیدس مارپیچي دساعت دعقربی دلور په مطابق دمبدا په شاواخواڅرخیږي .

٤ . ۳ . ۷ ګلاب ډوله منحني ګاني

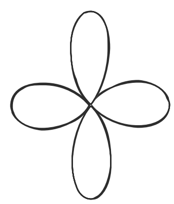
د

$$r = a\cos n\theta \quad , \quad r = a\sin n\theta$$

شکل معادلې د ګل په بڼه (پاڅیره) منحني ګانی ښیي چي ګلاب ډوله منحني ګاني ورته وايي. ګلاب n مساوي پاڼي پاحلقې لري که چیرې n طاق وي او 2n مساوي پاڼی لري که چیرې n جفت وي. دګلاب د حالت څرنګوالي دقطبي محور پورې چي د a ثابت اشارې پورې اوپا sinθ یا cosθ پورې اړه لري چي په معادله کې څرګندیږي اړه لري.



درې پاڼه ایز ګلاب
n = 3



څلور پاڼه ایز ګلاب
n =2

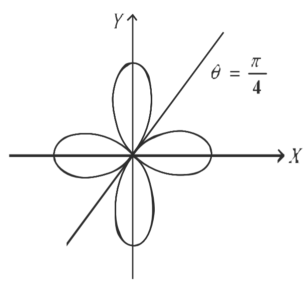
که چیرې n=1 ، نوموړدیوې دایرې معادله لاس ته راوړو، هغه چي یو پاڼه ایز ګلاب په بڼه وي.

مثال: $r = a\cos 2\theta$ منحني رسم کړئ چیرته چي $a > 0$.

حل: معادله د $r = a\cos n\theta$ په شکل ده. نوځکه یوګلاب ښیي داچې n=2 جفت دي ګلاب څلورپاڼي لري که چیرې موږ د (r,θ) په ځای $(r,-\theta)$ یا $(r,\pi-\theta)$ ، ځای په ځای کړو معادله همغه شانتې پاتې کیږي . پدې ډول منحني د x محورته اود y محور ته متناظردی. لدې سببه، موږ کولی شو چي ټولي منحني ګاني دمنحني داولني ټوټې درسمولو پواسطه د $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ په سیمه کې اوسربیره پردې د x محوراود y محور په شاواخوا باندې ددغې برخې له انعکاس څخه په لاس راوړو. څرنګه چي θ له 0 څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې تحول کوي، نو

$\cos 2\theta$ قېمت په یونواخته ډول له 1 څخه تر 0 پورې کمښت مومي، ځکه نو r له a څخه تر 0 پورې کمښت کوي. څرنګه چې θ له $\frac{\pi}{4}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تحول کوي، نو $\cos 2\theta$ قېمت په یونواخته ډول له 0 څخه تر 1- پورې کمښت مومي، همداشانتې r له 0 څخه تر $-a$ پورې کمېږي. پدې معلوماتو سره اودلاندېنې جدول په مرسته مونږ لاندېنې منحني لاسته راوړو:

θ	0	30°	45°	60	90
r	a	$\frac{a}{2}$	0	$-\frac{a}{2}$	$-a$



۳,۴ پوښتنې

لاندې منحنې ګانې رسم کړئ.

1, $r = 2(1-\cos\theta)$, 2, $r = 3+\sin\theta$
3, $r = a(1+\cos\theta)$, 4, $r = 4\cos\theta$
5, $r = a\sin 3\theta$, 6, $r = a\cos 3\theta$
7, $r = a\sin 2\theta$, 8, $r = 4\cos 5\theta$
9, $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, 10, $r = 1-2\cos\theta$
11, $r = 3+2\sin\theta$, 12, $r = 5-2\cos\theta$
13, $r = 2\sin\theta$, 14, $r = ae^{\theta}$
15, $r\theta = a$,

۴. ۴. ۱ دمنحنیاتو پارامتریک معادلې

برسېره پردې دقائمو وضعیه کمیاتوپه سیستم کې یومنحنې د (x,y) دوه متحولینو په شکل کې اوپه قطبي سیستم کې د (r,θ) دوه متحولینوپه شکل کې ښودل کېږي ،چې دیوګراف یاد یومنحنې دمعرفي کولویوبله طریقه ده . پدې میتود کې مونږ x او y په جداډول دیودریم متحول په قېمت کې د $x = f(t)$, $y = g(t)$ معادلودیوې جوړې دکاروله‌پواسطه څرګندوو. t ته پارامتر وایي، پارامتریک معادلودمسئلود حل طریقه خورا ساده کړیده په ځینو

حالا توکي دوی دمسایلوحل ته درسیدلویوه ځانګړي عملي طریقه ښیي. دیوي دایري؛ پارابولا، بېضوي او هیپربولا پارامتریک معادلي چي هروخت تربحث لاندي وي عبارت دي له:

$x = a\cos\theta$ ، $y = a\sin\theta$ د دایري معادله ده.

$x = at^2$ ، $y = 2at$ دپارابولا معادله ده.

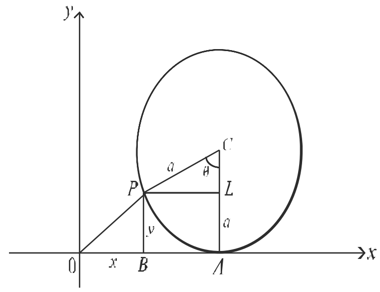
$x = a\cos\theta$ ، $y = b\sin\theta$ دبېضوي معادله ده.

$x = a\sec\theta$ ، $y = b\tan\theta$ دهیپربولا معادله ده.

اوس مونږ د مستوي دځینو نورو منحني ګانو پارامتریک معادلي پیداکوو.

۲.۴.۴ سیکلویید (Cycloid)

دسکلویید منحني دیوي دایري په محیط باندي دیوي ثابته شوي نقطي پواسطه دیوټاکلي مستقیم خط په اوږدوکي ددایري دڅرخیدلو یاغزیدلوڅخه پرته لدي چي دایره وښوئیږي یاولوئیږي عبارت دي.



فرض کړئ چي دڅرخیدونکي دایري شعاع a ده. که چیري څرخیدونکي دایره له هغه موقعیت څخه حرکت وکړي په کوم کي چي د P تولیدونکي نقطه د OX ثابت خط د O له کومي نقطي سره منطبق ده. O د مبدا په شانتي اوثابت خط د x محور په شانتي په پام کي ونیسی. څه وخت چي څرخیدونکي دایره تر هغه حالته پوري کوم چي په شکل کي ښودل شویدی وڅرخیږي، نو مولده نقطه به له O څخه تر P(x, y) نقطي پوري حرکت وکړي، دارنګه چي

$$OA = arc\,PA$$

فرضووچي θ هغه زاویه ده کومه چي دایره یي دڅرخیدلو په حالت کي لري، یعنيθ = PCA ، نو $arcPA = a\theta$. مونږلرو چي

$$X = OB = OA - BA = OA - PL = a\theta - a\sin\theta$$

او

$$Y = BP = AL = AC - LC = a - a\cos\theta$$

نو

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

دسیکلویید پارامتریک معادلي دي، پدي ځای کي θ پارامتردی.

یادونه: ۱. سیکلویید دیولایتناهي پرله پسي د ورته برخو جوړښت دی، هره یوه د دایري د څرخېدلو یو مکمل دوران ښیي.

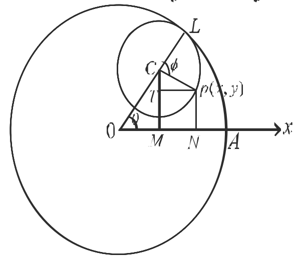
۲. فرض کړئ چي P د محیط پرځای د ارابي(څرخ) په یوي پري (پڼه) باندي واقع ده، د رسم شوي منحني معادلي:

$$x = a\theta - b\sin\theta$$
$$y = a - b\cos\theta$$

سره ګیږي. چېرته چې b د دایرې له مرکزڅخه دP واټن دی.
دغه منحني ته تروجویيد (Trochoid) وايي.

۴. ۴. ۳ داخلي څرخیدونکي (Hypocycloid)

هیپوسیکلوئیدمنحني دیوې دایرې په محیط باندې دیوې ټبنه شوې نقطې پواسطه کله چې دا دایره د یوې ثابتې دایرې په داخل کې برته لدې چې وښویږي یا ولویږي له دوران کولو څخه لاسته راځي.



فرضوو چې a د ثابتې دایرې شعاع او b دڅرخیدونکې دایرې شعاع ده، او $b < a$. دثابتې دایرې مرکز O دمبدا په توګه او OAX یوخط د x - محوریه توګه په پام کې نیسو. فرض وو چې څرخیدونکې دایره دخپل هغه حالت څخه په حرکت شروع کوي په کوم کې چې د P مولده نقطه دثابتې دایرې د A له کومې نقطې سره منطبق ده. څه وخت چې څرخیدونکې دایره هغه موقعیت ته دوران وکړي کوم چې په شکل کې ښودل شویدی، مولده نقطه له A څخه $p(x,y)$ ته انتقال کوي، چې له دی کبله

$$arcAL = arcPL$$

یعنې،

$$a\theta = b\phi$$

یعنې،

$$\phi = \frac{a\theta}{b}$$

چېرې چې 2% L O . او θ کوم یوخط چې ددوایرو دایرومرکزونه وصلوي اوهم دڅرخیدلوپه جریان کې ددوران کوونکو دایروددورانونو په وخت کې دهغه دلومړنې اواوسنې حالتونوپه منځ کې زاویه ده.

$$\angle MCP = \pi - \phi - (\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} - (\phi - \theta)$$

مونږلرو چې

$$x = ON = OM + MN = OM + TP$$

$$= OC\cos\theta + CPSin(\frac{\pi}{2} - \phi - \theta)$$

$$= (a-b)Cos\theta - b\cos(\phi - \theta)$$

$$= (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta$$

او

$$\begin{aligned} y &= NP = MT = MC - TC \\ &= 0C \sin\theta - CP\, Cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \theta\right) \\ &= (a-b)\sin\theta - b\sin(\phi - \theta) \\ &= (a-b)\sin\theta - b\sin\frac{a-b}{b}\theta \end{aligned}$$

څکه نو

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta$$

$$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\frac{a-b}{b}\theta$$

دا د داخلي څرخیدونکي Hypocycloid پارامتریک معادلي دي.

یا دونه: که چیری $a = 4b$ د Hypocycloid معادلي لاندي بني غوره کوي

$$x = \frac{3}{4}a\cos\theta + \frac{1}{4}a\cos 3\theta$$

$$y = \frac{3}{4}a\sin\theta - \frac{1}{4}a\sin 3\theta$$

اوس

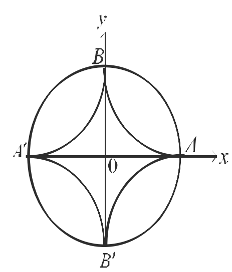
$$\cos 3\theta = +4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

لدی امله

$$x = a\cos^3\theta \qquad , \qquad y = a\sin^3\theta$$

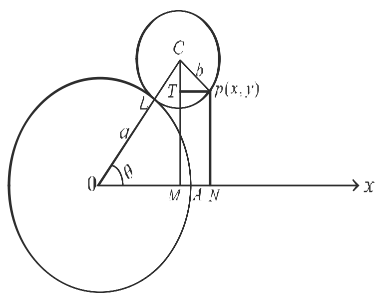
دیو منحني پارامتریک معادلي دي چي د Hypocycloid څلورڅوکي (Cusped) یا ستوري astroid په شان پیژندل کیږي.



پدی ځای کي $\frac{a}{b}=4$ ، ځکه نو لار (مسير) د څلورو پرله پسي برخو څخه جوړه شوې ده. يعني د $ABA'B'$ منحني. ددی منحني په پارامتريک معادلو کي د θ په له منځه ورلو، مو نږ په لاس راوړو چي $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ کومه چي په قايمو مختصاتو کي ديوستوري astroid معادله ده.

۴,۴,۴ باندبنی څرخيدونکي (Epicycloids)

بيروني يا باندبني څرخيدونکي منحني ديوې دايرې په محيط باندې ديوې نښه شوې نقطي پواسطه کله چي دا دايره د يوې ثابتي دايرې په بېرون کې پرته له ښويدو او غورځيدو څخه دوران کوي لاسته راځي.



فرض کړئ چي a د ثا بتی يا ټا کلی دايری شعاع او b د څرخيدونکي دايری شعاع ده O د ثا بتي دايرې مرکز د مبدا په حيث په پام کي ونيسي. فرض کړئ چي څرخيدونکي دايره دخپل هغه حالت څخه په حرکت شروع کوي په کوم کي چي د P مولده نقطه دثابتي دايرې د A کومې نقطې سره منطبق ده.
OA د x محور په حيث په پام کي ونيسي کله چي څرخيدونکي دايره د خپل حالت څخه څنګه چي په شکل کي ښودل شوې ده دوران وکړي مولده نقطه له A څخه تر P(x,y) پوری دوران کوی همدا شانتی

$$arc\overline{AL}=arc\overline{Lp}$$

يعني

$$\phi=\frac{a\theta}{b}, a\theta=b\phi$$

چېرې چي $\phi=\angle OCP$ او θ هغه زاويه ده چي ددوو دايرو دمرکزونو يوځای کوونکي خط او داېرې د دوران له امله چي د لومړني حالت نه يې اوسني حالت ته کوي رامنځته کېږي.

$$زاويه MCP=\phi-(\frac{\pi}{2}-\theta)=\theta+\phi-\frac{\pi}{2}$$

مونږ لرو چي

$$
\begin{aligned}
x = ON &= OM + MN \\
&= OM + TP \\
&= OC\cos\theta + PC\sin(\theta - \phi - \frac{\pi}{2}) \\
&= (a+b)\cos\theta - b\cos(\theta+\phi) \\
&= (a-b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta
\end{aligned}
$$

او

$$
\begin{aligned}
y = NP = MT &= MC - TC \\
&= OC\sin\theta - PC\cos(\theta + \phi - \frac{\pi}{2}) \\
&= (a+b)\sin\theta - b\sin(\theta - \phi) \\
&= (a+b)\sin\theta - b\sin\frac{a+b}{b}\theta
\end{aligned}
$$

نو

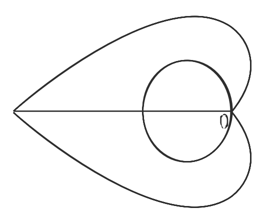
$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos(\frac{a+b}{b})\theta$$

$$y = (a+b)\sin\theta - b\sin(\frac{a+b}{b})\theta$$

معادلو ته ايپي سيكلوئيد پېرامتريک معادلې وا يي.

۱. **يادونه:** كه چېرې a=b، د ايپي سيكلو ئيد معادلې لاندې بڼه غوره كوي

$$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$$
$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$



په دې حالت كې به توليدوونكي نقطه خپل لومړني (اصلي)حالت ته راوګرځي كله چې څرخېدونكې دايره خپل دوران مكمل كړي. د ياد شوي منحني بڼه په پورته شكل كې ښودل شوې ده.

۲. يادونه: څه وخت چې يو منحني په بل باندې بې لدې چې و ښوئيږي دوران وكړي، دويم منحني په ثابت حالت كې پاتې كيږي، د څرخېدونكي منحني د P كومې نقطې هندسي محل ته يو څرخيدونكى roulette وايي دى سببه، سيكلوئيد، هيپوسيكلوئيد او ايپي سيكلوئيد څرخيدونكي دي.

مثال: د $x = \sin t$ او $y = 2\cos t$ نه پارامترله مېنځه و يسئ.
حل: کولی شو چې معادله د

$$2x = 2\sin t$$
$$y = 2\cos t$$

پشان وليکو. ددواړوخواو په مربع کولواوبيا په جمع کولو لا سته راوړو چې

$$(2x)^2 + y^2 = (2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t$$
$$= 4(\sin^2 t + \cos^2 t) = 4.1 = 4$$

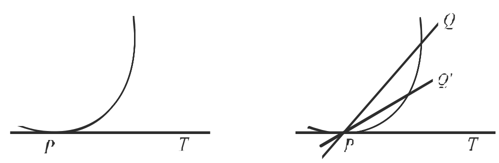
لدی سببه $4x^2 + y^2 = 4$ معادله چې دراکړشوو معادلو نه د پارامتر په له منځه وړلو سره لاسته راغلې ده.

۴,۴ پو ښتني

1. هغه منحني رسم کړئ کوم چې د $x = 2t^2$ او $y = \frac{1}{2}t^3$ پارمتريک معادلو پوا سطه ښودل کيږي.
2. د $x = 2\sin\theta$ او $y = 2\cos\theta$ ګراف رسم کړئ.
3. د $x = 2+t$ او $y = 3 - t^2$ پارامتريک معادلو ګراف رسم کړئ.
4. د $x = cos^2\theta$ او $y = 2\sin\theta$ پارامتريک معادلو ګراف رسم کړئ.
5. د $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ معادلې يوه پارمتريکه ښوودنه پيدا کړئ اوګراف يې رسم کړئ.
6. د $x = sec^2\theta$ او $y = -tan^2\theta$ ګراف رسم کړئ. د دواړو معادلو تر منځ پارامتر له منځه ويسئ اود دکارتی معادلې دګراف پايله د هغه دپارامتريک شکل سره پرتله کړئ.

۴.۵.۱. مماسونه اونارملونه

مماسونه: د خورا مهمو خطونو په منځ کې چې ددويمی درجی له منحياتوسره نښتي وي مماسونه دي، کوم چې ممکن د هغه خط پشان څرګند شي چې د منحني سره په مشترکه نقطه کې تماس ولري خو متقا طع نه وي، لکه لاندې شکل.



ممکن مماس دار نګه تعريف شي:
د PT يو مماس ديو منحني د P په يوه نقطه کې لکه د PQ د يو قاطع د ليمت نيولو حالت په شان کله چې Q د منحني په اوږدو کې p ته نژدې کيږي تعريف شي.
په دوهم فصل کې موږ وليدل چې $f'(x)$ د $y = f(x)$ منحني ته د مماس مېل ښوده. لدی کبله، د $y = f(x)$ په منحني د (x_1, y_1) په نقطه کې د مماس معادله

$$y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$$

ده.

نارمل: پر يومنحني يو نا رمل د منحني په هرې يوې نقطې با ندی يو مستقيم خط دی کوم چې په هماغې کې نقطې په مماس با ندې عمود وي.

د نا رمل معادلي د پيدا کولو لپاره، مو نږ لومړی د مماس معادله لا سته راوړو، په هغه صورت کي که چېري m دمماس مېل وي، د نارمل معادله د

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}.(x - x_1)$$

پواسطه راکړکيږي، چېرته چي $m \neq 0$ او (x_1, y_1) په منحني با ندی د نقطي مختصات دي.
مثال: د $y^2 = 4ax$ پارابولا د(x_1, y_1) په نقطه کي د مماس او نارمل معادلي پيدا کړئ ؟
حل: د$y^2 = 4ax$ په ديفرنسيل نيولو مونږ لا سته راوړو چي

$$2y.\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

له دی امله د (x_1, y_1) په نقطه کي د مماس مېل $\frac{2a}{y_1}$ ده. نود(x_1, y_1) په نقطه کي د مماس معادله

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}.(x - x_1)$$

يا

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2_1ax_1$$

يعني

$$yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$$

يا

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

د (x_1, y_1) په نقطه کي د نارمل مېل $-\frac{y_1}{2a}$ ده.
له دی امله د (x_1, y_1) په نقطه کي د نارمل معادله

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2a}=(x - x_1)$$

يا

$$2a(y - y_1) = -y_1(x - x_1)$$
$$2a(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$$

۲,۵,۴ د تقا طع زاويه

ددوه منحني گا نو د تقا طع زاويه د منحني گانود تقا طع په يوه نقطه کي، په هماغه نقطه کي دمنحني گانو د مماسونو ترمينځ له زاويه

۳,۵,۴ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** د$xy = c^2$ منحني د $(cp, c/p)$ په نقطه کي د مماس او نارمل معادلي پيدا کړئ.
حل: د راکړل شوی معادلي په ديفرينسيل نيولو لاسته راځي چي

$$x\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

نو لدي کبله په $(cp, c/p)$ کي د مماس مېل $-\frac{1}{p^2} = -\frac{\frac{c}{p}}{cp}$ دی

نوپه $(cp, c/p)$ کي د مماس معادله

$$y-\frac{c}{p}=-\frac{1}{p^2}(x-cp)$$

ده . یعني ،

$$y-\frac{c}{p}=-\frac{x}{p^2}+\frac{c}{p}$$

یا

$$p^2y-cp=-x+cp$$

د $(cp, c/p)$ په نقطه کي دنا رمل مېل $= p^2$
د نارمل معادله

$$y-\frac{c}{p}=p^2(x-cp)$$

یعني

$$y-\frac{c}{p}=p^2x-cp^3$$

یعني

$$py-c=p^3x-cp^4$$

یا

$$p^3x-py=c(p^3-1)$$

۲. مثال: د $x^2-y^2=a^2$ او $x^2+y^2=a^2\sqrt{2}$ منحنیاتو تقا طع زاویه پیدا کړئ.
حل: را کړل شوي معادلي

$$x^2-y^2=a^2 \qquad \dots\dots(1)$$
$$x^2+y^2=a^2\sqrt{2} \qquad \dots\dots(2)$$

دي. که چېرې (x_1, y_1) د تقا طع يوه نقطه وي، نو مونږ لرو چې

$$x_1^2=\frac{1}{2}a^2(\sqrt{2}+1)$$
$$y_1^2=\frac{1}{2}a^2(\sqrt{2}-1)$$

او

$$x_1^2 y_1^2 = \frac{1}{4}a^4$$

لدې امله،

$$x_1 y_1 = \pm\frac{1}{2}a^2 = \pm\frac{a^2}{2}$$

د (۱) په دیفرینسل نیولو مونږ لا سته راوړو چې

$$2x - 2y.\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

څکه نود (x_1, y_1) په نقطه کې (۱) منحني ته دمماس مېل $m_1 = \frac{x_1}{y_1}$ دی.

د(۲) په دیفرینشیل نیولو، مونږلاس ته راوړو چې

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

څکه نود (x_1, y_1) په نقطه کې (۲) منحني ته دمماس مېل $m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$ دی.

له دې امله، که چېرې θ ددوو منحنیاتو تر منځ زاویه وي نو

$$tag\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{x_1}{y_1}.\frac{x_1}{y_1}} = \frac{\frac{2x_1}{y_1}}{1 - \frac{x_1^2}{y_1^2}} = 2\frac{x_1 y_1}{y_1^2 - x_1^2}$$

$$= \frac{\pm a^2}{\frac{1}{2}a^2(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1)} = \frac{\pm a^2}{-a^2} = \pm 1$$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ یو حاده زاویه ده.

۳. مثال: په $\theta = \frac{\pi}{2}$ کې د

$$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$$
$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

منحني کانو د مماس او نارمل معادلې لاسته راوړئ. [p.u1984]

حل: دراکړل شویو معادلو په دیفرنسیل نیولو مو نږ لا سته راوړو

$$\frac{dx}{d\theta}=-2a\sin\theta-2a\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2a\cos\theta-2a\cos 2\theta$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2a\cos\theta-2a\cos 2\theta}{-2a\sin\theta+2a\sin 2\theta}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{3\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{3\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\cos\frac{3\theta}{2}}=tag\,\frac{3\theta}{2}$$

د $\theta=\frac{\pi}{2}$ په نقطه کې د مما س مېل معادله $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ ده.

د $\theta=\frac{\pi}{2}$ کې ، $x = 2a\ cos\frac{\pi}{2} - a\ cos\pi = a$

او $y=2a\sin\frac{\pi}{2}-a\sin\pi=2a$

له دی امله په $\theta=\frac{\pi}{2}$ کې د مما س معادله $y-2a=-1(x-a)$ ، یعني، $y-2a=-x+a$ یا $x+y=3a$ ده.

او د $\theta=\frac{\pi}{2}$ په نقطه کې دمماس مېل یوده. د $\theta=\frac{\pi}{2}$ کې دنارمل معادله $y-2a=1\cdot(x-a)$ ، یعني $x-y+a=0$ ده.

۴. مثال: د $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ مخروطي مقطع دمماس معادله د (x_1, y_1) په نقطه کې لاسته راوړئ او همدارنګه د لاندې منحنیاتو دمماسونو لپاره معادلې لاسته راوړئ:

الف. د $y^2=4ax$ پارابول

ب. د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي

ج. د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هیپربولا

حل: د راکړل شوې معادلې نظر x ته په دیفرینسل نیولو، مونږ لا سته راوړو چې

$$2ax+2by\cdot\frac{dy}{dx}+2hx\frac{dy}{dx}+2hy+2g+2f\frac{dy}{dx}=0$$

یا

$$(hx+by+f)\frac{dy}{dx}=-(ax+by+g)$$

یعني

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

په دی ډول په (x_1, y_1) کې دمماس معادله

$$y - y_1 = -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}\,(x - x_1)$$

ده، یعني،

$$(x - x_1)(ax_1 + hy_1 + g) + (y - y_1)(hx_1 + by_1 + f) = 0$$

یعني،

$$axx_1 + hxy_1 + gx + hx_1y + byy_1 + fy = ax_1^2 + hx_1y_1 + gx_1 + hx_1y_1 + by_1^2 + fy_1$$

یا

$$axx_1 + byy_1 + h(xy_1 + x_1y) + gx + fy = ax_1^2 + by_1^2 + 2hx_1y_1 + gx_1 + fy_1$$

دواړه خوا وو سره $gx_1 + fy_1 + c$ په جمع کولو موږ لروچې

$$axx_1 + byy_1 + h(xy_1 + x_1y) + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

د پایلولاس ته راوړلو لپاره موږ په ترتیب سره xx_1 ، yy_1 ، $xy_1 + x_1y$ او $y + y_1$ د $x^2, y^2, 2xy, 2x$ او $2y$ لپاره د مخروطي مقطع په معادله کې لیکو.

الف. $y^2 = 4ax$ پارابو لا ته د مما س معادله $yy_1 = 2a(x + x_1)$ سره کیږي.

ب. د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي ته دمماس معادله $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ده.

ج. د $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا ته د مماس معادله د $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ سره د.

۵. مثال: هغه شرط پیدا کړئ کوم چې د $y = mx + c$ خط د $y^2 = 4ax$ پارابولا سره د مماس حالت بنیي.

حل : په $y^2 = 4ax$ کې د $y = mx + c$ په وضع کولو موږ لا سته راوړو چې

$$(mx + c)^2 = 4ax$$

یعني،

$$m^2x^2 + 2mcx + c^2 = 4ax$$

یا

$$m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

د $y = mx + c$ خط به د $y^2 = 4ax$ پارابولامماس وي که چېرې (۱) مساوي جذرونه ولرې، یعني،

$$4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$$

یا

$$m^2c^2 - 4mca + 4a^2 - m^2c^2 = 0$$

یا

$$c = \frac{a}{m}\ , \qquad (m \neq 0)$$

نو $y = mx + c$ د پارابو لا مماس دی که چېرې $c = \frac{a}{m}$ وي، یعني، $y = mx + \frac{a}{m}$ د همیش لپاره د $y^2 = 4ax$ پارابول مماس دی.

۵,۴. پوښتني

۱. دمماس او نا رمل معادلې لاندې منحنیاتو ته په راکړل شوونقطو کې پیدا کړئ.

(i) $x(x^2+y^2-ay^2)=0$ په $x=\frac{a}{2}$ کې

(ii) $c^2(x^2+y^2)=x^2y^2$ په $(\frac{c}{\cos\theta},\frac{c}{\sin\theta})$ کې [P.U.1989]

۲. هغه شرط پیدا کړئ چې د $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ خط د $y^2=4ax$ پارابولا سره مماس وي.
همدارنګه د تماس نقطه پیدا کړئ.

۳. هغه شرط پیداکړئ په کوم سره چې د $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ خط د $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$ منحني سره مماس وي.

۴. هغه شرط پیداکړئ په کوم سره چې $y=mx+c$ خط د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي سره مماس وي.

۵. وښایاست چې د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هیپربولا قایم ځلورضلعي په څوکوکې مماسونه $e\pm$ مېلو نه لري.

۶. وښایاست چې د $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ استروئید ته چې دمختصاتو محورونو تر منځ قطع شویدی د مماس د ټوټې اوږدوالی ثا بت دي.

۷. ثبوت کړئ چې د $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ استروئید دنارمل معادله د $x\sin\phi-y\cos\phi+a\cos 2\phi=0$ په شکل سره لیکلی شو.

۸. د $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$. سیکلو ئید ته په $\theta=\frac{\pi}{2}$ کې دمماس او نارمل معادلې پیدا کړئ ؟

۹. د $x^3+y^3=2a^3$ منحني په کومې یوې نقطې باندې مماس، د p او q اوږدوالي د مختصاتو په محورونو کې قطع کوي ثبوت کړئ چې

$$p^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$$

سره کېږي. [P.U1988,89]

۱۰. که چېرې $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ د $(\frac{x}{a})^{\frac{n}{n-1}}+(\frac{y}{b})^{\frac{n}{n-1}}$ منحني ته مماس وي ثبوت کړئ چې

$$p^n=(a\cos\theta)^n+(b\sin\theta)^n$$

سره کېږي. [P.U.1988]

۱۱. د

(i) $y^2=4ax$ او $x^2=4by$

(ii) $y^2=ax$ او $x^3+y^3=3axy$

دمنحني ګانوترمنځ د پرېکړې یا تقاطع زاویه پیدا کړئ.

۱۲. ثبوت کړئ چې د $x^2+3y^2=24$ او $3x^2-y^2=12$ منحني ګانې د $(\sqrt{6},\sqrt{6})$ په نقطه کې یوبل په قایمې زاویې سره قطع کوی.

۱۳. ثبوت کړئ چې $lx+my+n=0$ خط د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي ته یونارمل دی که چیرې $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ سره وي.

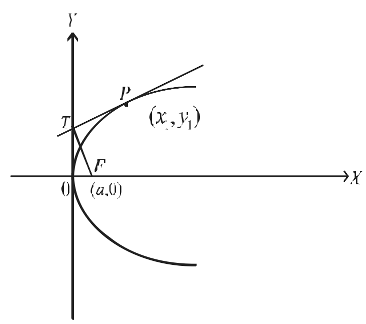
۱,۶,۴ مخروطي شکلونو(مقطع ګانو) اومنحنیاتو ته دمماسونواو نارملونو ځانګړتیاوې

مخروطي شکلونو ته د مما سو نواو نا رملونوځانګړتیاوې د تلسکوپونو، د رادارانتن، اودبیریو دسیستمونو په جوړښت کې کارول کیږي. پدې برخه کې به مو نږد مخروطي شکلونوبنسټیزې هندسي ځانګړتیاوې ترڅیړنې لاندې ونیسو.

۲,۶,۴ د $y^2=4ax$ پارابولا ځانګړتیاوې

(1) که چیرې د پارابولا د P مماس د y محورد T په نقطه کې قطع کړی نو د PTF زاویه قایمه ده.

ثبوت: د $P(x_1,y_1)$ په نقطه کې دمماس معادله $yy_1=2a(x+x_1)$ ده چې د y محور چیرې چې x=0 ده قطع کوي.



$\therefore$ د T مختصات $(0,\frac{2ax_1}{y_1})$ دي.

$$m=\text{د TF میل}=\frac{0-\frac{2ax_1}{y_1}}{a-0}=-\frac{2x_1}{y_1}$$

$$m_2=\text{د PT میل}=\frac{2a}{y_1}$$

$$\therefore\quad m_1m_2=\frac{-2x_1}{y_1}.\frac{2a}{y_1}=\frac{4ax_1}{y_1^2}=-\frac{4ax_1}{4ax_1}=-1$$

نو لدې کبله د PTF زاویه قایمه ده.

(2). که چیرې د P مماس له هادي سره د L په نقطه کې مخامخ شی (قطع کړي)، نود PFL زاویه یوه قایمه زاویه ده.

ثبوت: په $P(x_1, y_1)$ کي دمماس معادله $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ده. د L نقطي لپاره $x = -a$

$$\therefore \quad yy_1 = 2a(-a + x_1)$$

يا

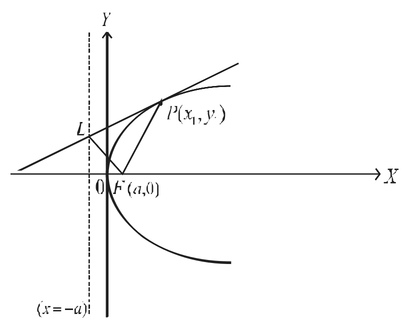
$$y = \frac{2a(x_1 - a)}{y_1}$$

$\therefore$ د L مختصات $(-a, \frac{2a(x_1 - a)}{y_1})$ دي.

$$m_1 = \text{د FL ميل} = \frac{\left(\frac{0 - 2a(x_1 - a)}{y_1}\right)}{a - (-a)} = \frac{-(x_1 - a)}{y_1}$$

$$m_2 = \text{د FP ميل} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - a} = \frac{y_1}{(x_1 - a)}$$

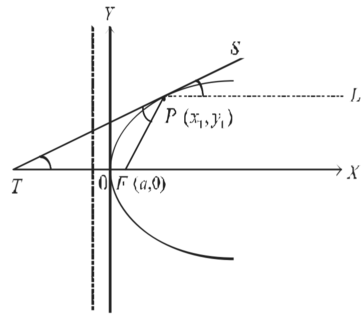
$$m_1 m_2 = -\frac{(x_1 - a)}{y_1} \cdot \frac{y_1}{(x_1 - a)} = -1$$



لدي امله PFL يوه قا يمه زاويه ده.

(3). دپارابولا په هره نقطه کي دمماس ميل دهغه محور ته اومحراقي وتر ته چي د تماس له نقطي څخه تيريږي مساوي دی.

ثبوت: په $P(x_1, y_1)$ کي د مماس معادله $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ده .
فر ضو چي مماس د محور سره د T په نقطه کي مخامخ کيږی.
لدي امله $(-x_1, 0)$ د T مختصات دي.



$$
\begin{aligned}
|PF| &= \sqrt{(x_1-a)^2 + y_1^2} \\
&= \sqrt{(x_1-a)^2 + 4ax_1} \\
&= \sqrt{(x_1+a)^2} \\
&= x_1 + a
\end{aligned}
$$

$$|FT| = \sqrt{(a+x_1)^2} = a + x_1$$

له دی امله د $|PF| = |FT|$

په دی ډول دPTF په مثلث کې څرنګه چې $|PF| = |FT|$، نو $|F\hat{P}T| = |P\hat{T}F|$.

څکه نو په P کې دمماس میل محور ته اومحراقي وترته چې له P څخه تېرېږي مساوي دی.

یادونه: که چېرې PL د x له محور سره موازي وي نومونږ لرو چې

$$L\hat{P}S = F\hat{T}P = F\hat{P}T$$

یعنې په پارابو لا باندې د P په یوه نقطه کې دمماس خط چې د P له نقطې څخه تېرېږي او د پاربولا له محور سره موازي دی اوهغه خط سره چې د P د نقطې او له محراق څخه تېرېږي مساوي زاويې جوړوي.

د پارابولا دغه خا صیت دانعکاسي خاصیت په توګه پېژندل کېږي. دپارابولا ددې خا صیت درلودلو له کبله د پارابولاګانو څخه دتلسکوپونو په دیزاین کې، په رادارانتنونو کې او درنا کولو په سیستمونوکې کاراخیستل کېږي.

(4). د $P(at^2, 2at)$, $Q(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t})$ نقطو یو ځای کوونکی خط د پارابولا له محراق څخه تېرېږي. یا د $p(at^2, 2at)$, $Q(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t})$ نقطې د $y^2 = 4ax$ پارابولا د محراقي وتر د څوکو نقطې دي.

ثبوت: دا څرګنده ده چې $P(at^2, 2at)$, $Q(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t})$ نقطې د $y^2 = 4ax$ په پارابو لا باندې وا قع دي.

د مستقیم خط معادله چې د P او Q له نقطو څخه تېرېږي

$$y - 2at = \frac{2at - \frac{2a}{t}}{at^2 - \frac{a}{t^2}}(x - at^2)$$

ده. یعني،

$$y-2at=\frac{2t}{t^2-1}(x-at^2)$$

د $F(a,0)$ محراق مختصات په دې معادله کې صدق کوي. له دې امله $P(at^2,2at)$ او $Q(\frac{a}{t^2},\frac{-2a}{t})$ د محراقي وتر دڅوکو یا انجامونو نقطې دي.

یادونه: د $(at_1^2,2at_1)$ او $(at_2^2,2at_2)$ نقطې د محراقي وتردڅوکو نقطې دي که چیرې $t_1t_2=-1$.

(5). دیو پارابولا د هر محراقي وتر د څوکو نقطوممانسونه په هادي کې قایماً (په قایمې زاویې سره) قطع کوي. [P.U 1985]

ثبوت: د محراقي وتر د څوکو نقطې $p(at^2,2at)$, $Q(\frac{a}{t^2},-\frac{2a}{t})$ دي. په P کې دمماس معادله په لاندې ډول ده

$$y(2at)=2a(x+at^2)$$

یعني

$$ty=x+at^2 \qquad ....(1)$$

په Q کې دمماس معادله

$$y(-\frac{2a}{t})=2a(x+\frac{a}{t^2})$$

یعني

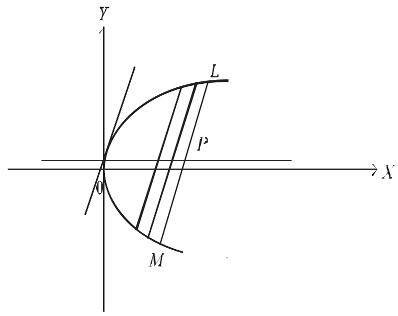
$$-\frac{1}{t}y=x+\frac{a}{t^2} \qquad ....(2)$$

$$m_1 = \text{(1) میل} = \frac{1}{t}$$
$$m_2 = \text{(2) میل} = -t$$
$$m_1m_2=\frac{1}{t}\cdot -t=-1$$

نو (1)او (2) یو پر بل باندې عمود دي، د(1) او (2) د پرېکړې (تقاطع) نقطې لپاره، د y په له منځه وړلو، مونږ $x-a=0$، لا سته راوړو، کومه چې د هادي معادله ده.
له دې امله د یو پارابولا دهر محراقي وتردڅوکو نقطو مماسونه په هادي کې قایماً قطع کوي.

(6). د $y^2=4ax$ پارابولا دموازي وترو نودیوسیستم مینځني نقطې په یومستقیم خط باندې چې د پارابولا له محورسره موا زی دی واقع دي.

ثبوت: څرنګه چې دپارابولا وترونه موازي دي، مو نږ فرضوو چې د هر وتر میل m دی. فرض وو چې LM د موازي وترونوسیستم دی اوکه چیرې دهغه معادله $y=mx+c$ وي.



نو په هغه صورت کې L، M د $y^2 = 4ax$ پېرابولا او د $y = mx+c$ خط دتقا طع نقطې دي. د L او M د y_1 , y_2 اوردينات يا ترتيبونه د

$$y^2 = 4a(\frac{y-c}{m})$$

معادلې جذرونه دي ، يا

$$my^2 = -4ay + 4ac = 0$$

که چېرې P(h, k) د LM مينځنۍ نقطه وي، نو

$$k = \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{4a}{2m} = \frac{2a}{m}$$

څکه نو د ټولو وترو نو منځنۍ نقطې چې د LM سره موا زي دي د $y = \frac{2a}{m}$ په خط با ندې وا قع دي. پدې ډول دټولو وترونو دمنځنيونقطوهندسي محل چې د LM سره موا زی دي $y = \frac{2a}{m}$ ده کوم چې دپېرابولا له محورسره يوموازي مستقيم خط دی.

يادونه: که چېرې $y = \frac{2a}{m}$ خط د $A(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m})$ په نقطه کې له پېرابولاسره مخامخ شي د A دنقطې مما س دپېرابولا دوترونوله سيستم سره موا زي دي.

محرا قي وتر: د پېرابولا ټولو وترونو ته کوم چې مستقيماً له محراق څخه تېرېږي محراقي وتر وايي.

قطر: ديوه پېرابولا موازي وترونودسيستم منځنيو نقطو هندسي محل ته قطر وا يي.

(7). د يو پېرابولا ددوو مماسونود تقا طع د نقطې مختصې (اوردينات) دتماس دوو نقطود مختصو ترمنځ يوحسابي وسط جوړوي.

ثبوت: فرضوو چې د پېرابولا معادله $y^2 = 4ax$ ده او $Q(x_2 , y_2), P(x_1 , y_1)$ په پېرابولا باندې دوه نقطې دي. په P کې د مماس معادله

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \qquad ....(1)$$

ده. او Q کي دمماس معادله

$$yy_2 = 2a(x+x_2) \qquad ....(2)$$

ده. له (1) څخه د(2) په تفريق کولو لا سته را ځي چې

$$y(y_1 - y_2) = 2a(x_1 - x_2)$$

لدی امله $y_1^2 = 4ax_1$ او $y_2^2 = 4ax_2$

مونږ لرو چې

$$y(y_1 - y_2) = 2a(\frac{y_1^2}{4a} - \frac{y_2^2}{4a})$$

$$y(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

y_1 او y_2 حسابی وسط دی.

له دی امله په يوپارابولا باندې ددوو مماوسونود تقاطع د نقطې مختصه دتماس د دوو نقطو دمختصاتو په منځ کي يو حسابی وسط دی.

قايم وتر (Latus rectum): کوم محراقي وترچې دپارابولا په محورباندې عمودوي هغه ته قايم وتر(Latus rectum) وايي.

مثال: د $y^2 = 4ax$ پارابولا ديونارمل معادله د $y = mx - 2am - am^3$ په بڼه کي پيداکړئ او وښيا ياست چې له هرې نقطې څخه په يوپارابولا باندې درې نارمل خطونه رسمېدلای شي.

حل: فرضووچې $P(x_1, y_1)$ د $y^2 = 4ax$ په پارابولا باندی يوه نقطه ده.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

په $P(x_1, y_1)$ کي د نارمل ميل $-\frac{y_1}{2a}$ دی، فرض وو چې $-\frac{y_1}{2a} = m$

$$\therefore \quad y_1 = -2am$$

خو

$$y_1^2 = 4ax_1$$

$$\therefore \quad 4a^2m^2 = 4ax_1$$

يا

$$x_1 = am^2$$

اوس په (x_1, y_1) کي دنارمل معادله

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

دی ، د $x_1 = am^2$ او $y_1 = -2am$ په ليکلو دنارمل معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$y - 2am = \frac{2am}{2a}(x - am^2)$$

يعنی،

$y = mx - 2am - am^3$ یا $y = mx - am^3 - 2am$

داغوښتل شوي معادله ده.

اوس که چیرې نارمل د (h, k) ته یوی نقطې څخه مستقیماً تیرشي، نو

$$k = mh - 2am - am^3$$

یا

$$am^3 + m(2a - h) - k = 0$$

کوم چې په m کې مکعب ده، نوله دې څخه دm درې قیمتونه لاس ته راځي. له دی امله کولا ی شو چې دپاړابولا له یوې نقطې څخه درې نارملونه رسم کړو.

۳,۶,۴ دبیضوي خانګړتیاوې

(1). د $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ خط د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ په بیضوي باندې د m په ټولوقیمتونوسره مماس دی.

ثبوت: د $y = mx + c$ خط لپاره شرط چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ په بیضوي مماس وي د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - c)^2}{b^2} = 1$ معادله ده چې مساوي جذرونه لري، یعني

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2mca^2x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

مساوي جذرونه لري.

$$\therefore \quad 4m^2c^2a^4 - 4(b^2 - a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0$$

یعني،

$$c^2 = a^2m^2 + b^2$$

یا

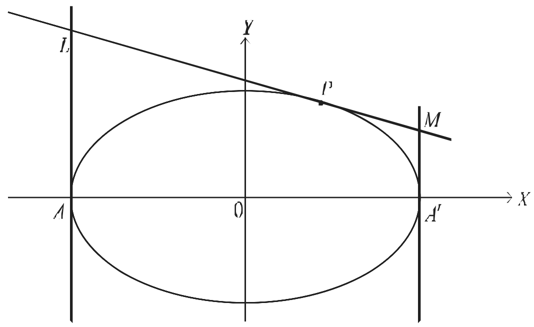
$$c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

له دی امله $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ خط د m د ټولو قیمتونو لپاره په بیضوي باندې مماس دی.

(2). که چیرې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي دP دهرې نقطې مماس، د A او A' دنقطو(دلوی قطردڅوکونقطې) مماسونه په ترتیب سره په L او M کې قطع کړی، نو

$$|AL||A'M| = b^2$$

ثبوت:



د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ په بيضوي باندي ده

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

يا

$$\frac{y_1^2}{b^2}=1-\frac{x_1^2}{a^2} \qquad ....1$$

د $P(x_1, y_1)$ په نقطه کي مماس

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad ....2$$

د A نقطي مماس

$$x=-a \qquad ....3$$

او د A' نقطي مماس ده.

$$x=a \qquad ....4$$

ده .

د (2) او (3) په حلولو سره د L مختصات لاسته راوړو، يعني $\left(-a, \frac{b^2}{y_1}(1+\frac{x_1}{a})\right)$

$$|AL|=\frac{b^2}{y_1}(1+\frac{x_1}{a})$$

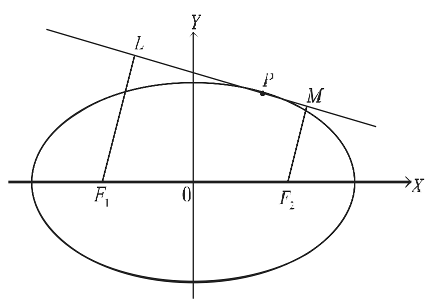
په ورته دول د(2) او (4) په حلولو سره لا سته راوړ چي $|A'M|=\frac{b^2}{y_1}(1-\frac{x_1}{a})$

له دی امله

$$
\begin{aligned}
|AL|\cdot|A'M| &= \frac{b^2}{y_1}(1+\frac{x_1}{a})\cdot\frac{b^2}{y_1}(1-\frac{x_1}{a}) \\
&= \frac{b^4}{{y_1}^2}(1-\frac{{x_1}^2}{a^2}) \\
&= \frac{b^4}{{y_1}^2}\cdot\frac{{y_1}^2}{b^2} , \qquad \text{(د (1) رابطې پواسطه)} \\
&= b^2
\end{aligned}
$$

(3). له محراقونو څخه د بېضوي دهرې نقطې په مماس باندې دعمودي خطونو حاصل ضرب دکو چنې قطردنیما يې له مر بع سره مساوي دی.

ثبوت: که چېرې $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي وي. نو



د هغې محراقونه $F_1(-c,0)$ او $F_2(c,0)$ دي، که چېرې F_1L او F_2M له F_1 او F_2 څخه په هر مماس عمود خطونه وي، نو

$$
\begin{aligned}
& y = mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \\
& mx-y+\sqrt{a^2m^2-b^2}=0 \qquad ،
\end{aligned}
$$

يعني

نو

$$
|F_1L| = \frac{-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}
$$

او

$$|F_2M| = \frac{mc + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore \quad |F_1L||F_2M| = \frac{(-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2})(mc+\sqrt{a^2m^2+b^2})}{m^2+1}$$

$$= \frac{-m^2c^2 - a^2m^2 + b^2}{m^2+1}$$

$$= \frac{m^2(a^2-c^2)+b^2}{m^2+1} = \frac{m^2b^2+b^2}{m^2+1}$$

$$= \frac{b^2(m^2+1)}{m^2+1} = b^2 =$$ د کوچني محور د نيمايي مربع

(4). دعمودي خط د قاعدې دنقطې هندسي محل ديوې بېضوي له يومحراق څخه ترمماسه پورې يوه مرستندويه (معاً ونه) دايره ده.

ثبوت: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د بېضوي معادله ده.

په هره يوهن نقطه کې د مماس معادله د m د ټولو قيمتونولپاره $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ ده.

$$mx - y = -\sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad ....(1)$$

د عمودي خط معا دله په (۱) مماس بانديې چې د(c,0) محراق څخه تېرېږي

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x-c)$$

ده. يعني،

$$x + my = c \qquad ....(2)$$

د عمودي خط قاعده د (1) او (2) د تقاطع(پرېکړې) په نقطه کې ده.

∴ د عمودی خط د قاعدې هندسي محل د (1)او (2) څخه د m په له مېنځه وړلو سره لاسته راورل کېږي.

∴ دنواړو معادلو په مربع کولواوجمع کولولا سته راځي چې

$$y^2(1+m^2) - x^2(1+m^2) = a^2m^2 + b^2 + c^2$$

$$= a^2m^2 + a^2$$

$$= a^2(m^2+1)$$

يعني

$$x^2 + y^2 = a^2$$

يوه کومکي دايره ده.

(5). ديوې بېضوي د دوه عمودي مماسونو دتقاطع نقطې هندسي محل $x^2+y^2=a^2+b^2$ دی.

ثبوت: د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي دوه عمودي مماسونه په لاندې ډول دي

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

او

$$y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}$$

يا

$$y - mx = +\sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad ....(1)$$

$$my + x = \sqrt{a^2 + b^2m^2} \qquad ....(2)$$

د پربکړې (تقاطع) دنقطې هندسي محل له (1) او (2) څخه د m په له منځه وړلو لا سته را ځي.

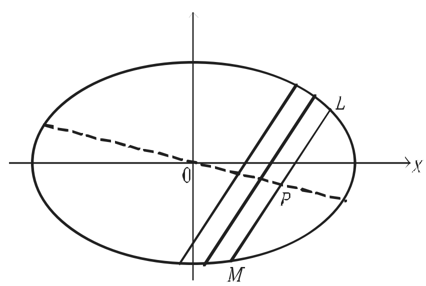
∴ د (1) او (2) په مربع کولواوجمع کولومونږ لاسته راوړو چې

$$y^2(1+m^2) + x^2(1+m^2) = a^2(1+m^2) + b^2(1-m^2)$$

يعنې، $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ غوښتل شوې هندسي محل دی.

(6). ديوې بيضوي دموازي وترونو د سيستم دمنځنيو نقطوهندسي محل ته قطر وايي. [P.U.1986,88]

ثبوت: څرنګه چې ټول وترونه موازي دي، مونږ فرضوو چې دهروترميل m دی.



فرض کړئ چې LM دموازي وترونود سيستم يو وتردی اوکه چيرې دهغه معادله $y = mx + c$ وي اوهمدارنګه فرض کړئ چې P(h,k) د LM منځنې نقطه ده.

$$k = mh + c \qquad ....(1)$$

M, L د $y = mx + c$ خط او $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بيضوي د پربکړې (تقاطع) نقطې دي.

له دی امله د M, L د x مختصات د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$ جذرونه دي.

يعنې

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m\,cx + a^2(c^2 - b^2) = 0$$

که چيرې x_1, x_2 د M, L ، د x مختصات وي.

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mc}{a^2m^2 + b^2}$$

خو

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = h$$

$$\therefore \quad h=-\frac{a^2mc}{a^2m^2-b^2} \qquad \text{..........}(2)$$

د (1) او (2) څخه د c په له مينځه وړلو لاسته راځي چې

$$h(a^2m^2+b^2)=-a^2m\ (k-mh)$$

يعني

$$b^2h=-a^2mk$$

ځکه نو، د موازي وترونومنځنيو نقطو هندسي محل $b^2x=-a^2my$ يا $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$ دی.

يادونه: (a) دیوی بیضوي دموازي وترونو يو سيستم د منځنيو نقطو هندسي محل ته قطروايي. لدی سببه $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$ د بيضوي يوقطردی.

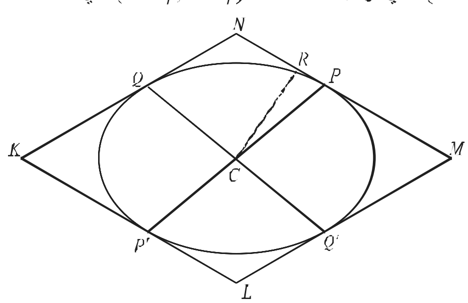
(b) که چېرې $m_1=-\frac{b^2}{a^2m}$، مو نږ وليدل چې د $y=m_1x$ قطر ټول وترونه چې د $y=mx$ قطر ته موازي دي نيما يي کوي که چېرې $mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$ او په ورته ډول $y=mx$ قطر ټول وترونه چې د $y=m_1x$ قطرته موازي دي نيما يي کوي.

دوه قطرونو ته مزدوج وايي کله چې هريو هغه وترونه نيما يی کوي کوم چې د بل سره موازي وي.

پدی ډول $y=mx$ او $y=m_1x$ دوه قطرونه سره مزدوج دي که چېرې $mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$ وي.

(7) دیوې بیضوي د مزدوج قطرونو نيما يي د څوکو د نقطوعن المرکزيت زاويې د$\frac{\pi}{2}$ پواسطه توپير(فرق) کيږي.

ثبوت: فرضوو چې C د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بيضوي مرکز دی. پدې فرضولوسره چې CP او CQ دنيمايي قطرونو دوه مزدوجونه دي. که چېرې θ او ϕ د P او Q عن المرکزيت (eccentric) زاويې وي، نود P مختصات $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ دي اود Q مختصات $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ دي.



د CP ميل $=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}$

او

د CQ مېل $= \dfrac{b\sin\phi}{a\cos\phi}$

ځرنګه چې CP او CQ سره مزدوج دي نو،

$$\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot\frac{b\sin\phi}{a\cos\phi}=-\frac{b^2}{a^2}$$

يعني

$$\cos\theta\cdot\cos\phi+\sin\theta\cdot\sin\phi=0$$

يا

$$\cos(\theta-\phi)=0$$

$\therefore$ $\theta-\phi=\pi/2$ څنګه چې غوښتل شوي دی.

$\therefore$ له دی امله د P او Q مختصات $P(a\cos\theta, b\cos\theta)$ او $Q(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ دي.

(8) ديوې بيضوي دمزدوج قطرونو دنيمايي د مربعاتومجموعه ثابته ده.

ثبوت: د (7) څخه P، $(a\cos\theta, \cos\theta)$ دی او Q، $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ دی

$$CP^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$$
$$CQ^2=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta$$

په نتيجه کې $CP^2+CQ^2=a^2+b^2$.
يعني ديوې بيضوي د مزدوج قطرونو دنيمايي د مربعاتو مجموعه ثا بته ده.

(9) د يوقطرد څوکو په نقطو کې مماسونه د مزدوج له قطرونو سره موازي دي.

ثبوت: په $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ کې دمماس معادله $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ ده.

دهغه مېل $=-\dfrac{b}{a}\cot\theta$

او د

د CQ مېل $=-\dfrac{b}{a}\cot\theta$

چېرې چې Q، $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ ده.
په دی ډول د P مما س له CQ سره موازي دی، په ورته ډول د Q مماس له CP سره موازي دی.

(10) ديوې بيضوي د دوه مزدوج قطرونو داڅوکو په نقطو کې د مماسونو پوسيله د جوړشوي متوازي الاضلاع مسا حت 4ab دی يعنې، دمحورونو دضرب دحاصل سره.

ثبوت: فرض کړئ چې KLMN متوازي الاضلاع دی چې د PP' او QQ' مزدوج قطرونو دڅوکو په نقطو کې د مماسونو پوسيله جوړشوی دی لکه په (6) شکل کې.
دP نقطې مختصات $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ دي اود Q نقطې مختصات $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$دي.

$$\therefore\quad CQ=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

په P کې د مماس معادله $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}-1=0$ ده.

دعمود اوږدوالي له C څخه د P په نقطې کې ترمماس پورې.= |CR|

$$|CR|=\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

مساحت $KLMN$ د = 4 × مساحت $CPNQ$ د $=4|CQ|\cdot|CR|$

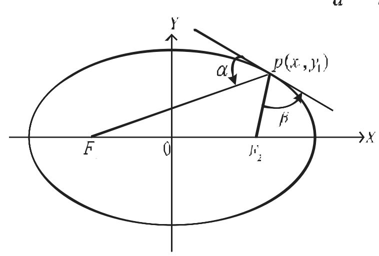
$$=4\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

$=4ab=$ د2a او 2b دمحورونود ضرب حاصل سره

(11) د یوې بیضوي د P په یوه نقطه کې یومماسي خط له هغه خط سره مساوي زاویې جوړوي چې د P او د محراق څخه تېرېږي.

یا دیوی بیضوي چې دهغې محراقونه F_1 او F_2 دي د P په هره نقطه کې نارمل د F_1PF_2 زاویه دوه ځایه (نیمایي) کوي.

ثبوت: فرض کړئ چې $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي او $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ محراقونه دي.



په $p(x_1, y_1)$ کې د مماس معادله $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ او $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ ده. یعنې، $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$

$m_1=$ مېل $F_1P=\frac{y_1}{x_1+c}$

$m_2=$ مېل $F_2P=\frac{y_1}{x_1-c}$

$m_3=$ په P کې دمماس مېل $=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3} = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 + c} + \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 - \dfrac{y_1}{x_1 + c} \cdot \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}$$

$$= \frac{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 + b^2 c x_1}{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_1}{(a^2 - b^2) x_1 y_1 + a^2 c y_1}$$

$$= \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_1}{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1} = \frac{b^2 (a^2 + c x_1)}{c y_1 (c x_1 + a^2)} = \frac{b^2}{c y_1}$$

په ورته ډول

$$tag\beta = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{b^2}{c y_1}$$

له دې امله $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

دا د بېضوي د انعکاسي ځانګړتیا په څیر پېژندل کېږي.

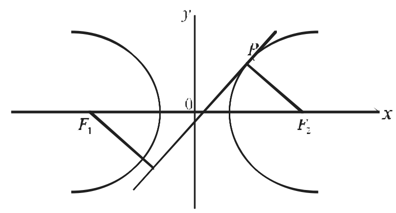
ددې څخه څرګندېږي چې دیوځراغ د خپرېدو وړانکه د بېضوي له یوه محراق څخه تر بل محراقه پورې مستقیماً انعکاس کوي. د بېضوي له دی ځانګړتیا څخه په یو ډول هالونو (Whispering galleries) کې ګټه اخیستل کېږي. د دارنګه اطاقونو چتونه بېضوي ډوله بڼې د ګډ(شریک) محراق سره لري. د مثال په ډول، که چېرې یوسړی د پس پسکي په یومحراق کې ولاړ وي د اواز امواج (یاصو تی امواج) د چت پواسطه بل محراق ته انعکاس مومي، دا ډول جوړونه د یو سړي لپاره شونی کوي چې د پس پسکی اواز په هماغه محراق کې واورې.

۴,۶,۴ . د هیپربولا ځانګړتیاوی

دهیپربو لا خورا زیاتې ځانګړتیاوې کیدای شي د (b^2) پرځای $(-b^2)$ ځای پرځای کولو یا د b پرځای د ib د ځای پرځای کولو پواسطه دبیضوي په اړونده ځانګړتیاووکې لاس ته راشي. دلته به مونږ یواځې ځینې ځانګړتیاوې تربحث لاندې ونیسو:

(1) د عمودي واټنونو دضرب حاصل له محراق څخه دیو هیپربولا هریو مماس پورې ثابت دی. (P.U.1986)

ثبوت: فرضوو چې هیپربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ دی اومحراقونه $F_2(ae,0), F_1(-ae\,,\,0)$ دي .



مماس په $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ کې $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$ دی. له دې امله د واټنونو دضرب حاصل له محراق څخه تر مماس پورې عبارت دی له:

$$\left|\frac{-e\sec\theta-1}{\sqrt{\frac{\sec^2\theta}{a^2}+\frac{\tan^2\theta}{b^2}}}\right|\left|\frac{e\sec\theta-1}{\sqrt{\frac{\sec^2\theta}{a^2}-\frac{\tan^2\theta}{b^2}}}\right|=$$

$$=\frac{a^2b^2(e^2\sec^2-1)}{b^2\sec^2\theta-a^2\tan^2\theta}=\frac{a^2b^2(e^2\sec^2-1)}{b^2\sec^2\theta+a^2(\sec^2\theta-1)}=$$

$$=\frac{a^2b^2(e^2\sec^2\theta-1)}{(a^2+b^2)\sec^2\theta-a^2}=\frac{a^2b^2(e^2\sec^2\theta-1)}{a^2e^2\sec^2\theta-a^2}$$

$$=\frac{a^2b^2(e^2\sec^2\theta-1)}{a^2(e^2\sec^2\theta-1)}=b^2=\text{Constant}$$

(2) د $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ خط د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هیپربولا ته د m دټولو قیمتونو لپاره مماس دی.

ثبوت: هغه شرط کوم چې د $y=mx+c$ خط د مماس حالت د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ په هیپربولاباندې جوتوي د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{mx+c)^2}{b^2}=1$ معادله ده چې مساوي جذورنه لري، یعنې،

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2mca^2x-a^2c^2-a^2b^2=0$$

مساوي جذرونه لري

$$\therefore\quad 4m^2c^2a^4-4(b^2-a^2m^2)(-a^2c^2-a^2b^2)=0$$

یعني، $c^2 = a^2m^2 - b^2$ یا $c = \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

لدې امله $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ خط د m د تولوقیمتونولپاره په هیپربولا باندې مماس دی.

(3) د یو هیپربولا د هریوه مماسي خط ټوټه (برخه) چې د هیپربولا ددوومجانبونوترمنځ غوځیږي دتماس په نقطه کې په دوه مساوي ټوټویا برخو وېشل کیږي.

ثبوت: فرض کړئ چې هیپربولا $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ده. دهغې مجانبونه

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

او

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

دي. د $P(x_1, y_1)$ په هرې یوې نقطه کې دمماس معادله

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ده. د (1) او(3) په حلولو مونږ دمماس اومجا نب دتقاطع نقطه لاس ته راوړو.

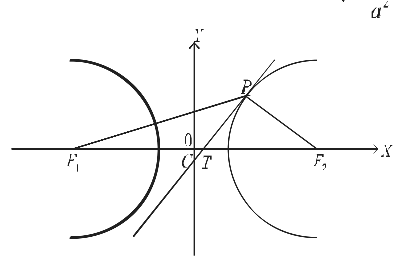
یعني $M\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \frac{b^2a}{bx_1 - ay_1}\right)$ او دتقاطع بله نقطه $N\left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}, \frac{-b^2a}{bx_1 + ay_1}\right)$ ده.

د MN منځنې نقطه (په ساده کولو سره) څنګه چې غوښتل شوې ده (x_1, y_1) ده. یعني

$$\left(\frac{\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1} + \frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}}{2}, \frac{\frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} - \frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}}{2}\right) = (x_1, y_1)$$

(4) په یوهیپربولا باندې د P په یوه نقطه کې یوممَاس دهغه خط سره چې د P او دمحراق څخه تېرېږي مساوي زاویې جوړوي.

ثبوت: فرضوو چې $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا ده.



$F_1(-ae,0)$ او $F_2(ae,0)$ محراقونه دي. د $P(x_1,y_1)$ په نقطه کي مماس $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ دی، کوم چي محراقي محور (یعنی $y=o$) په T کی چی دهغه مختصات $(\frac{a^2}{x_1},0)$ دي قطع کوي.

$$|F_1T|=|F_1C|+|CT|=ae+\frac{a^2}{x_1}=\frac{a(ex_1+a)}{x_1}$$

$$|F_2T|=|CF_2|-|CT|=ae-\frac{a^2}{x_1}=\frac{a(ex_1-a)}{x_1}$$

$$\therefore\ \frac{|F_1T|}{|F_2T|}=\frac{ex_1-a}{ex_1-a}$$

او س،

$$|PF_1|=\sqrt{(x_1+ae)^2-y_1^2}=\sqrt{(x_1^2-2aex_1+a^2e^2+b^2(\frac{x_1^2}{a^2}-1)}=$$

$$=\sqrt{x_1^2(1+\frac{b^2}{a^2})+2aex_1+a^2e^2-b^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2e^2+2aex_1+a^2}$$

$$=\sqrt{(ex_1-a)^2}=ex_1+a$$

په ورته ډول $|PF_2|=ex_1-a$.

په پایله کي $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{ex_1+a}{ex_1-a}$ یعنی، $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1T|}{|F_2T|}$

له دی امله PT د F_1PF_2 زاویه په دوه مساوي ټوټو(برخو) ویشي کومه چي دثبوت پایله ده.

دهیپربولا دا ځانګړتیا د هیپربولا د انعکاسي ځانګړتیا په توګه پیژندل کیږي. نو لدی څخه څرګندیږي چي دروښنایي خپرېدني یوه وړانګه دهیپربولا له یومحراق څخه بیرته دیوخط په اوږدو کي د مقابل محراق څخه انعکاس کوي. د هیپربولا دانعکاسي ځانګړتیاو څخه د لوړ کیفیت تلسکوپونو په جوړولو کي کاراخیستل کیږي.

۵,۶,۴ د یو وتر معادله د هغه د مینځني نقطي له نظره

د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بېضوي په پام کي ونیسي.

فرض کړئ چي $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ او $Q(a\cos\phi,b\sin\phi)$ د PQ یوه وتر د څوکو نقطي دي. که چیرې $M(x_1,y_1)$ ددغه وتر مینځني نقطه وی، نو

$$x_1=\frac{a(\cos\theta+\cos\phi)}{2}=a\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$y_1=\frac{b(\sin\theta+\sin\phi)}{2}=b\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{a}{b}\cot\frac{\theta+\phi}{2}$$

ي

$$\cot\frac{\theta+\phi}{2} = \frac{bx_1}{ay_1}$$

همدارنګه

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = \left(\frac{\cos\theta+\cos\phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta+\sin\phi}{2}\right)^2$$
$$= \frac{2+2\cos\theta\cdot\cos\phi-2\sin\theta\cdot\sin\phi}{4} = \frac{1+\cos(\theta-\phi)}{2} \qquad ....(A)$$

د PQ وترمیل $\quad \dfrac{b\,(\sin\theta-\sin\emptyset)}{a(\cos\theta-\cos\emptyset)} = \dfrac{2b\cos\frac{\theta+\emptyset}{2}\sin\frac{\theta-\emptyset}{2}}{-2a\sin\frac{\theta+\emptyset}{2}\sin\frac{\theta-\emptyset}{2}}$

$$= -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\phi}{2} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$\therefore$ دPQ **وتر معادله**

$$y-b\sin\theta = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-a\cos\theta)$$

دم.

ي

$$a^2yy_1 - a^2b\sin\theta\, y_1 = -b^2xx_1 + ab^2\cos\theta\, x_1$$

يا

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1}{a}cos\theta + \frac{y_1}{b}sin\theta$$
$$= \frac{cos\theta+cos\emptyset}{2}cos\theta + \frac{sin\theta+sin\emptyset}{2}sin\theta$$
$$= \frac{1+cos\theta cos\emptyset+sin\theta sin\emptyset}{2}$$
$$= \frac{1+\cos(\theta-\emptyset)}{2}$$

$\therefore$ د A په اساس دوترمعادله $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$ سره کیږي.

يادونه: د معادلې ديوې خوا د ليکلو لپاره $x^2, y^2, 2x$ او2y په ترتيب سره د $xx_1, yy_1, x+x_1$ او $y+y_1$ پواسطه ځای پرځای يا عوض کوواود معا دلی دبلی خواد ليکلو لپاره x او y په ترتيب سره د x_1 او y_1 پواسطه په مخروطي معادله کې ځای په ځای کوو.

ځکه نو، $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b}$ او $yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$ په ترتیب سره دیو هیپربولا او پارابولا د هغه د (x_1,y_1) مینځنی نقطي له نظره دیو وترمعادلي دي.

۴,۶ پوښتني

۱. و ښایاست چي د $y^2=4ax$ یو پارابولا باندي له کومي نقطي ځخه دری نارملو نه رسمېدلای شي او ددریو رسم شویو نارمولونو دمیلونومجموعه چي په پارابولا باندي له کومي نقطي ځخه رسمیږي صفر ده.

۲. ثبوت کړئ چي دیوپارابولا د هر یوه وتر په انجامی نقطو کي مماسونه په هغه قطر کي سره قطع کوي کوم چي وتر نیمایي کوي.

۳. ثبوت کړئ چي د $y^2=4ax$ پارابولا دوترد منځنی نقطي هندسي محل کوم چي دهغه له راس ځخه مستقیماً تیرېږي د $y^2=2ax$ پارابولا دی.

۴. ثبوت کړئ چي $y^2=4ax$ پارابولا د محراقي وترونو د منځنیو نقطوهندسي محل د $y^2=2a(x-a)$ یو بل پارابولا دی.

۵. وښایاست چي د $y^2=4ax$ پارابولاد نارمل وترونو د منځنیو نقطو هندسي محل
$y^2(y^2-2ax)+4a^2(y^2+2a^2$ دی.

۶. هغه حالت وښایاست چي د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ په بیضوي باندي د (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، (x_3,y_3) په نقطو کي نارملونه چي ممکن په یوه وخت پيښ شي عبارت دی له

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}=0$$

۷. که چیرې د C په مرکزد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي مماس لوی قطراو کوچنی قطر په L او M کي قطع کړي نو ثبوت کړئ چي $\frac{a^2}{|CL|^2}+\frac{b^2}{|CM|^2}=1$ دی.

۸. وښایاست چي د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي په دوه نقطوباندي د مماسونود تقاطع دنقطي هندسي محل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\lambda$ دی چیرته چي 2λ ددوه نقطود عن المرکزیت (Eccentric Angles) زاویي توپیر دی.

۹. که چیرې $x\cos\alpha-y\sin\alpha=p$ یو وتر د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي دمزدوج دنیمایي قطرونوانجامونه سره ونښلوي وي، وښایاست چي $a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^{-2}\alpha=2p^2$ سره کیږي.

۱۰. د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي دوترو د مینځني نقطي هندسي محل پیداکړئ، په هغه صورت کي چي د (h,k) له یوې ثابتي نقطي ځخه تیرېږي.

۱۱. که چېرې CP او CQ د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ببضوي هره دوو مزدوجونو نيمايي قطرونه وي، نو وښاياست چې.

الف. د PQ منځنی نقطې هندسي محل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$ دی.

ب. په CP او CQ کې چې د قطرونوپه څېر دي د دايرودتقاطع د نقطې هندسي محل $2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ دی.

ج. په P او Q کې دنارملونودتقاطع دنقطې هندسي محل $2(a^2x^2+b^2y^2)^2=(a^2-b^2)^2(a^2x^2-b^2y^2)^2$ دی. [P.U1989]

۱۲. ثبوت کړئ چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ببضوي ته دمماسونودمنځنيونقطوهندسي محل د محورنود تقاطع په منځ کې $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4$ منحني ده.

۱۳. ثبوت کړئ چې ديوی ببضوي د مرکزڅخه د وتر پورې عمود خطونو چې دمزدوج نيمايي قطرونو د څوکو له نقطې سره يوځای کوي د پرېکړې(تقاطع)د نقطې هندسی محل $2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ دی.

۱۴. که چېرې ديوی ببضوي د $P(x_1,y_1)$ په هره يوه نقطه کې مماس اونارمل په ترتيب سره محور په T',T او G',G کې قطع کوي، PN او PN' که په محور عمود رسم کړل شي، همدارنګه CL د ببضوي د C له مرکزڅخه د P په نقطه کې په نارمل باندې عمود وي.

$(i)\ |CN||CT|=a^2$ $\quad(ii)\ |CN'||CT'|=b^2$

$(iii)\ |CG|=e^2|CN|$ $\quad(iv)\ |PL||PG|=b^2$

$(v)\ |PL||PG'|=a^2$

۱۵. که چېرې e او e' ديو هيپربولا اودده دمزدوج عن المرکزيتونه وي. ثبوت کړئ چې

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$$

۱۶. ثبوت کړئ چې په يو هيپربولا د کومې نقطې څخه دعمود خطونو ضرب دهغه له مجانب سره ثابت دی.

۱۷. وښاياست چې د P له هرې نقطې څخه په يو هيپربولا باندې له مجانب سره موازی رسم شوي خطونه د $\frac{1}{2}ab$ ثابت مساحت متوازي الاضلاع جوړوي.

۱۸. ثبوت کړئ چې د $xy=c^2$ قا يم هيپربولا د 2k ثابت اوږدوالي وترونو د منځنيو نقطو هندسي محل $k^2xy=(xy-c^2)(x^2+y^2)$ ده.

۱۹. وښاياست چې د $xy=c^2$ قا يم هيپربولا ته د نارمل د $(ct,\frac{c}{t})$ (يا t نقطه) په کومه نقطه کې منحني يو ځل بيا د t' په نقطه کې قطع کوي کله چې $t^3t'=-1$.

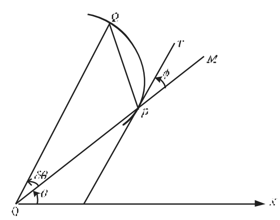
۲۰. د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هيپربولا ته دمماس معادله د $\frac{x}{a}\cosh\theta-\frac{y}{b}\sinh\theta=1$ په بڼه پيداکړئ. و ښاياست چې له محراق څخه په ده باندې دعمودنو دضرب حاصل ثابت دی.

۲۱. $y = mx$ او $y = m_1 x$ د $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ دمزدوج قطرونو یوه جوړه ده که چیرې $mm_1 = \frac{b^2}{a^2}$. وښایاست چې ددوه قطرونو د مزدوجونو مربعاتو تولیزه (مجموعه) ثابته ده.

۱,۷,۴ په قطبي مختصاتو کې مما سونه او نارملونه

یادونه: یوه زاویه چې د منحني د (r,θ) په یوه نقطه کې د مماس پواسطه د x له محور سره جوړیږي دθ پواسطه ښودل کیږي. په (r,θ)کې دمماس اودوکتوري شعاع ترمنځ زاویه ψ پواسطه ښودل کیږي.

د شعاع وکتور اودمماس ترمنځ زاویه :



فرض وو چې $P(r,\theta)$ او $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ د $r = f(\theta)$ په منحني باندې دوه نقطې دي. که چیرې $m\angle MPQ = \alpha$ او $m\angle MPT = \phi$.

مونږ پوهیږو کله چې$\Delta\theta \to 0$ د PQ قاطع (Secant) په P کې د PT مماس بڼه غوره کوي او $\alpha \to \phi$.

په $\overset{\Delta}{OPQ}$ کې ، $m\angle POQ = \Delta\theta$, $m\angle OPQ = \pi - \alpha$ او $m\angle OQP = \alpha - \Delta\theta$

د ساین دقانون په اساس ، مونږ لرو چې

$$\frac{r}{\sin(\alpha - \Delta\theta)} = \frac{r+\Delta r}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{r+\Delta r}{\sin\alpha}$$

یا

$$\begin{aligned} r\sin a &= (r+\Delta r)\sin(a - \Delta\theta) \\ &= (r+\Delta r)(\sin\alpha\cdot\cos\Delta\theta - \cos\alpha\cdot\sin\Delta\theta) \end{aligned}$$

یا

$$r\sin\alpha(1-\cos\Delta\theta) = -r\cos\alpha\cdot\sin\Delta\theta + \Delta r(\sin\alpha\cdot\cos\Delta\theta - \cos\alpha\cdot\sin\Delta\theta)$$

په $\Delta\theta$ باندې په ویشلو، مونږ لاس ته راوړو چې

$$r\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = -r\cos\alpha\cdot\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} + \frac{\Delta r}{\Delta\theta}(\sin\alpha\cdot\cos\Delta\theta - \cos\alpha\cdot\sin\Delta\theta) \quad ......1$$

مونږ پوهیږو چې $\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = 0$ او $\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$

له دې امله له (1) څخه کله چې $\Delta\theta \to 0$، $\alpha \to \phi$ ، مونږ لاسته راوړو چې

$$0 = -r\cos\phi + \frac{dr}{d\theta}\sin\phi$$

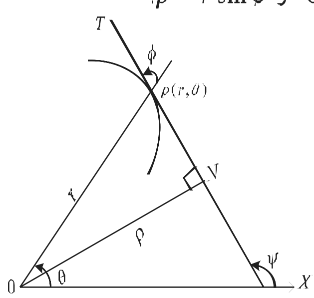
یا

$$tag\phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

څکه نو ϕ زاویه د OP شعاع وکتور او په P کې دوکتوري مما س ترمنځ د θ دتزاید په لور(جهت) کې د $tag\phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = r \cdot \frac{d\theta}{dr}$ پواسطه راکړل شوي ده.

۲,۷,۴ د قطب څخه په مماس باندې عمود

فرض وو چې ON له قطب(O) څخه د $r = r(\theta)$ په منحني باندې د $P(r,\theta)$ په نقطه کې د PT په مماس باندې عمود دی. که چیری$\rho = $ ON نو $\rho = r\sin\phi$.



او

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2\sin^2\phi} = \frac{1}{r^2}\cdot\cos ec^2\phi$$

$$= \frac{1}{r^2}(1+\cot g^2\phi) = \frac{1}{r^2}(1+\frac{1}{\tan^2\phi})$$

$$= \frac{1}{r^2}(1+\frac{(\frac{dr}{d\theta})^2}{r^2})$$

له دې امله،

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}(\frac{dr}{d\theta})^2 \qquad ....(1)$$

که چیري مونږ $r = \frac{1}{u}$ ولیکو، یعنې $u = \frac{1}{r}$، نو

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}$$

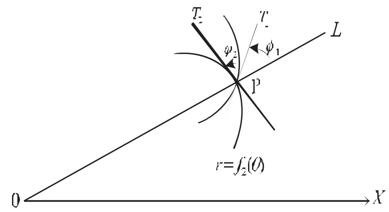
او (1) معادله د

$$\frac{1}{\rho^2} = u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2$$

سره کېږي.

۴,۷. ۳ ددوه منحني ګانو ترمينځ زاويه

ددوه منحني ګانودتقاطع زاويه د تقا طع په نقطه کې، په هماغه نقطه کې ددوه منحنـــي ګانو د مماسونو ترمنځ زاويه ده.



فرضوو چې د $r = f_1(\theta)$ ، او $r = f_2(\theta)$ د دوه منحني ګانو دتقاطع نقطه P ده ، PT_1 او PT_2 په همدی نقطه کې مماسونه دي چې له دوه منحني ګانوسره د ϕ_1 او ϕ_2 زاويې د OPL شعاع وکتور سره شريکې جوړوي مماسونه دي. که چېرې α ددوه منحني ګانو ترمنځ زاويه وي، نو $\alpha = \phi_2 - \phi_1$

$$\therefore \quad tag\,\alpha = tag(\phi_2 - \phi_1) = \frac{tag\phi_2 - tag\phi_1}{1 + tag\phi_2 \cdot tag\phi_1}$$

چېرې چې $tag\phi_1$ او $tag\phi_2$ د P په نقطه کې د دوه منحني ګانو لپاره د $r\frac{d\theta}{dr}$ قېمتونه دي.

يادونه: ددوه منحني ګانوته متعامد (يايوپه بل عمود) وايي که چېرې ددوی ترمنځ زاويه $\frac{\pi}{2}$ وي.

د $r = f_1(\theta)$ او $r = f_2(\theta)$ دوه منحني ګانې متعامد ګڼل کېږي که چېرې

$tag\theta_1 \cdot tag\theta_2 = -1$.

۴,۷,۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $r = a(1-\sin\theta)$ منحني لپاره ϕ پيداکړئ.

حل: دراکړل شوي معادلې په مشتق نيولو مونږ لاس ته راوړو چې

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\cos\theta$$

$$tag\phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{a(1-\sin\theta)}{-a\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2})^2}{(\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2})(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}} = -\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = \tan(\frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2})$$

په پايله کې $\phi = \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$

۲. مثال: د $r = a\ln\theta$ او $r = \frac{a}{\ln\theta}$ منحني ګانود تقاطع زاويه پيداکړئ.

حل: منحني ګاني

$r = a\ln\theta$ ....(1)

$r = \frac{a}{\ln\theta}$ ....(2)

دي. د (1) او (2) په حلولو $(\ln\theta)^2 = 1$ يعني، $\theta = e$.

له (1) څخه $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{\theta}$

له دی امله

$$\therefore\quad tag\phi_1 = r\cdot\frac{d\theta}{dr} = a\ln\theta\cdot\frac{\theta}{a} = \theta\ln\theta = e\text{،}\quad \theta = e$$

له (2) څخه $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta(\ln\theta)^2}$

له دی امله په $\theta = e$ کې $\tan\phi_2 = -e$

څکه نودتقاطع زاويه،

$$\alpha = \phi_1 - \phi_2$$

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1 + \tan\phi_1\tan\phi_2} = \frac{e+e}{1-e^2} = \frac{2e}{1-e^2}$$

يعني،

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2e}{1-e^2}$$

۳. مثال : دیو قطبي منحني (r,θ) په هره نقطه کي د وکتوري شعاع او وکتوري مماس ترمنځ زاوېي اندازه د θدزیاتیدوپه لورکي $\frac{1}{2}\theta$ ده، ثبوت کړئ چي منحني کارديود (Cardioid) دی.

حل: دلته $\phi=\frac{\theta}{2}$ ده، ځکه نو

$$\tan\phi=\tan\frac{\theta}{2}$$

یعني، $r\frac{d\theta}{dr}=\tan\frac{\theta}{2}$

$$\frac{dr}{r}=\cot g\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\frac{1}{2}\frac{dr}{r}=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}d\theta$$

په انتیګرال نیولو مونږ لاس ته راوړوچي

$$\frac{1}{2}\ln r=\ln\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\ln a$$

$$\ln r=2\ln\sin\frac{\theta}{2}+\ln a$$

$$\Rightarrow \ln r=\ln a\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow r=a\sin^2\frac{\theta}{2}$$

یعني، $r=\frac{1}{2}a(1-\cos\theta)$ کومه چي دکارديود معادله ده.

۴. مثال: فرض کړئ چي ϕ دوکتوري مماس او وکتوري شعاع تر منځ دیو منحني په یوه نقطه کي زاویه ده، ثبوت کړئ چي

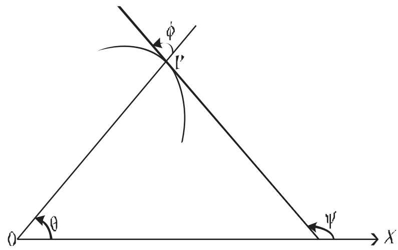
[P.U.1987,89]

$$tag\phi=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{y\frac{dy}{dx}+x}$$

حل: فرض وو چي ox لمړنی خط د x له محور سره منطبق دی. که چیري $r=f(\theta)$ په منحني باندي د P نقطي قطبي مختصات (r,θ) وي اود P نقطي قایم مختصات (x,y)وي. نو،

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$



له دې سببه $tag\theta = \frac{y}{x}$

که چېرې ψ هغه زاویه وي چې مماس یې د P په نقطه کې د x له محور سره جوړوي، نو

$$tag\psi = \frac{dy}{dx}$$

له شکل څخه ، مونږ لرو چې

$$\phi = \psi - \theta$$

$$\therefore \quad tag\phi = tag(\Psi - \theta) = \frac{tag\Psi - tag\theta}{1 + tag\Psi tag\theta}$$

$$\Rightarrow \quad tag\phi = \frac{x \cdot \frac{dy}{dx} - y}{y\frac{dy}{dx} + x}$$

۷,۴ پوښتنې

۱. دلاندی منحني گانولپاره φ پیداکړئ

$$r = a(1 - \cos\theta) \qquad .(i)$$

$$r = \frac{2a}{1+\sin\theta} \qquad .(ii)$$

$$r\sin\theta = -5 \qquad .(iii)$$

۲. و ښایئست چې دوکتوري شعاع میل د $r = ae^{\theta}$ مساوی زاویې مارپیچې باندې د کومې نقطې مماس ته یوه ثابته زاویه ده.

۳. د لاندېنیو جوړو منحني گانود تقاطع زاویې پیداکړئ.

$$r = a(1 + \cos\theta)\ ,\ r = b(1 - \cos\theta) \qquad .(i)$$

$$r\,e^{\theta} = b \ ,\ r = ae^{\theta} \qquad .(ii)$$

$$r = 2\sin\theta \ ,\ r = 2\sin 2\theta \qquad .(iii)$$

$$r\,\theta = a \ ,\ r = a\theta \qquad .(iv)$$

$$r = \frac{a}{1+\theta^2} \quad , \quad r = \frac{a\theta}{1+\theta} \qquad .(v)$$

۴. وښایاست چې د $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ ، $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ پروانه دوله شکل په کومه نقطه کې، د وکتوري شعاع او د بیروني نارمل ترمنځ دزاویې اندازه 2θ ده. [P.U.1984]

۵. و ښایاست چې $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیود د $\theta = \frac{\pi}{3}$ او $\theta = \frac{2\pi}{3}$ په نقطه کې مماسونه په ترتیب سره لمړني خط ته موازي اوعمود دي.

۶. په لاندېنیو منحني ګانو باندې هغه نقطې پیداکړئ، چیرته چې مماسونه افقي وي اوچیرته چې مماسونه عمودي وي.

$$x = t^2 + 4 \quad , \quad y = 3t^2 - 6t + 2 \qquad .(i)$$
$$r = 1 + \cos\theta \qquad .(ii)$$

۷. وښایاست چې $r^m = a^m \sin m\theta,\ r^m = a^m \cos m\theta$ منحني ګاني یوبل عموداً قطع دي.

۱،۸،۴ پایډلي معادلې (Pedal Equation)

له مبدا یا له قطب څخه په منحني باندې د P د هرې نقطې د r واټن او له مبدا یا له قطب څخه د P دنقطې مماس ته د ρعمودي اوږدوالي ترمنځ اړیکه د منحني د پایډلي معادلې په څیر پیژندل کیږي. څکه نو دیو منحني پایډلي معادله د$\rho = f(r)$له شکل څخه ده. دغې ته کله کله د منحني د(ρ , r) په دول معادله وایي.

(a) د $y = f(x)$ منحني د پایډلي معادلې لاس ته راوړل

پرهیږوچې د $P(x_1, y_1)$ په نقطه کې دمماس معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ ده. چیرته چې m د (x, y_1) په نقطه کې $m = \frac{dy}{dx}$ ده.

د ρ عمودي اوږدوالی له مبدا څخه ترمماس پورې

$$\rho = \left| \frac{y_1 - mx_1}{\sqrt{1+m^2}} \right| \qquad ....(1)$$

دی. همدارنګه

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad ....(2)$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د$y = f(x)$ په منحني باندې پرته ده مونږلرو چې

$$y_1 = f(x_1) \qquad ....(3)$$

له (1)، (2) او (3) څخه د y_1, x_1 په له منځه وړلومونږدρاو r ترمنځ رابطه لاس ته راوړو، یعنې دمنحني پاید معادله.

مثال: د $y^2 = 4a(x-a)$ پارابولا پایډلي معادله پیداکړئ.

حل: فرض کړئ چې $P(x_1, y_1)$ د راکړل شوي منحني یوه نقطه ده له دې امله

$$y_1^2 = 4a(x_1 + a) \qquad ....(1)$$

په $P(x_1, y_1)$ کې دمماس معادله

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

یا

$$yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

له دی امله

$$\rho = \frac{y_1^2 - 2ax_1}{\sqrt{4a^2 + y_1^2}}$$

$$= \frac{4a(x_1 + a) - 2ax_1}{\sqrt{4a^2 + 4a(x_1 + a)}} = \frac{2ax_1 - 4a^2}{\sqrt{4ax_1 + 8a^2}}$$

$$= \frac{ax_1 + 2a^2}{\sqrt{ax_1 + 2a^2}} = \sqrt{ax_1 + 2a^2}$$

$$\therefore \quad \rho^2 = ax_1 - 2a^2 = a(x_1 + 2a) \qquad ....(2)$$

همدارنګه

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$= x_1^2 + 4a(x_1 + a)$$

یعني

$$r^2 = (x_1 + 2a)^2 \qquad ....(3)$$

د (2) او (3) څخه د x_1 په له منځه وړلو لاسته راځي چې $\rho^2 = ar$ کوم چې پا یډلي معادله ده.

(b) د $r = f(\theta)$ ....(1) منحني دپایډلي معادلي ټا کل:

د (r, θ) دهرې نقطې مماس ته له قطب څخه د ρعمودي واټن د معادلي

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad ....(2)$$

پوسیله لاس ته راځي.د پایډلي معادلي د پیداکولو لپاره، د (1)او(2) څخه θ له منځه وړو.
کله کله دامناسب وي چې پایډلي معادله د θ او ϕ دله منځه وړلوپواسطه د

$$r = f(\theta)$$

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

او $p = r Sin\phi$

دريو معادلو څخه لاسته راوړو.

۲,۸,۴ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $r = a(1+\cos\theta)$ منحني پايډلي معادله پيداکړئ . [P.U.1986]

حل: دراکړل شوي معادلې څخه

$$r - a = a\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

لدى امله

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}(-a\sin\theta)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{a^2\sin^2\theta}{r^4} = \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 - a^2\cos^2\theta}{r^4}$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 - (r-a)^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{r^4} + \frac{2ar}{r^4}$$

يا

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{2a}{r^3}$$

$$r^3 = 2ap^2$$

غوښتل شوي پايډلي معادله ده.

۲. مثال: وښاياست چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بيضوي پايډلي معادله عبارت ده له: [P.U. 1984]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}$$

حل: فرض وو چې $P(x_1, y_1)$ په

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad ....(1)$$

بيضوي باندې کومه نقطه ده د مماس معادله د بيضوى د$(x_1 \;,\; y_1)$ په نقطه کې

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

ده. لدې امله،

$$\rho = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}$$

یا

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^4} \qquad ....(2)$$

همدارنګه،

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad ....(3)$$

د (1) ، (2) او (3) څخه د x_1^2 او y_1^2 په له منځه وړلو سره مونږ لاس ته راوړو

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}$$

کومه چې غوښتل شوې پایډلي معادله ده.

۳. مثال: ثبوت کړئ چې $\rho a^n = r^{n+1}$ د $r^n = a^n \sin n\theta$ منحني پایډلي معادله ده.

حل: راکړل شوي منحني

$$r^n = a^n \sin n\theta \qquad ....(1)$$

ده. ددواړوخواوو په لوګاریتم نیولو،لاسته راوړو چې

$$n \ln r = n \ln a + \ln \sin n\theta$$

په دیفرینشیل نیولومونږ لاسته راوړو چې

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = n\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$$

یا

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \cot n\theta$$

$$\therefore \quad \tan\phi = \tan n\theta$$

$$\Rightarrow \quad \phi = n\theta$$

همدارنګه ،

$$\rho = r\sin\phi$$

$= r \sin n\theta$

څنګه چې $\rho = r\dfrac{r^n}{a^n}$ یا $a^n p = r^{n+1}$.
کومه چې غوښتل شوې پېډلي معادله ده.

۸،٤ پوښتنې

1. د $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا پایډلي معادله پیداکړئ.
2. وښیاست چې د $c^2(x^2 + y^2) = x^2 y^2$ منحني پایډلي معادله $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{3}{r^3}$ ده.

[P.U. 1984,87,88,90,91]

3. د لاندېنیو منحنیاتو پایډلي معادلې پیداکړئ. [P.U.1986]

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

(ii) $r = a(1 - \sin\theta)$

(iii) $r = a + b\cos\theta$

(iv) $r = a\theta$

(v) $r = a \sin m\theta$ [P.U 1983]

(vi) $r = ae^{\theta \cot a}$

(vii) $\dfrac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$

4. د $r^m = a^m \cos m\theta$ پایډلي معادله پیداکړئ.
5. و ښایاست چې د $y = a\sin^3\theta$, $x = a\cos^3\theta$ استروئید پایډلي معادله $r^2 = a^2 - 3\rho^2$ ده.

[P.U.1985,90,91]

6. وښیاست چې د $y = a(3\sin\theta - \sin^3\theta$, $x = a(3\cos\theta - \cos^3\theta$ منحني پایډلي معادله $3\rho^2(7a^2 - r^2) = (10a^2 - r^2)^2$ ده.
7. وښیاست چې د $y = ae^\theta(\sin\theta - \cos\theta), x = ae^\theta(\sin\theta - \cos\theta)$ منحني پېډلي معادله $r = \sqrt{2}\rho^2$ ده.
8. و ښایښت چې د $r = a\operatorname{sech} n\theta$ منحني پایډلي معادله $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{A}{r^2} + B$ ده، چېرې چې A او B ثوابت دي.
9. و ښایاست چې د $y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta, x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$ منحني پایډلي معادله $9(r^2 - a^2) = 8\rho^2$ ده. [P.U. 1988]

۴. بیلابېلې پوښتنې

۱. و ښایاست چې د

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$$
$$y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$$

منحني په کومه نقطه کې نارمل له مبدا څخه په یو ثابت واټن کې پروت دی.

۲. د $y^2 = 8x$ پارابولا باندې یوه نقطه پیداکړئ په کومه کې چې د نارمل میل دپارابولا له محور سره 60° دي.

۳. د $(Lx - my - n)(L'x + m'y + n') = k^2$ معادله و څېړئ.

۴. د $8x^2 + 12y^2 = 96$ ببضوي لپاره دمزدوج دنیمایي قطرونو جوړه پیداکړئ چې د میل یوه زاویه یې $tag^{-1}7$ وي.

۵. که چېرې ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1 په ببضوي کې د رسم شوي مثلث د درې راسونو دعن المرکزیت زاویې وي، دمثلث مساحت پیداکړئ.

۶. د مماس او نارمل معادلې د $x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}$ ، $y = \dfrac{2at^3}{1+t^2}$ منحني ته په $t = \dfrac{1}{2}$ کې پیداکړئ. [P.U.1985]

۷. د $\dfrac{ax}{\sec\theta} + \dfrac{by}{tag\theta} = a^2 + b^2$ په بڼه د $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ هیپربولا ته د نارمل معادله پیداکړئ، اوثبوت کړئ چې نارمل د محراقي واټنونو د لاندېنیو برخو یا پایو سره مساوي یا منطبقې زاویې جوړوي. [P.U.1983]

۸. وښایاست چې د منحني په کومه یوه نقطه کې د مبدا څخه دنارمل واټن په همغه نقطه کې له مبدا څخه دمماس د واټن دوه چنده وي. [P.U.1990]

$$x = ae^{\theta}(\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2})$$
$$y = ae^{\theta}(\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2})$$

پنځم څپرکی

د مستوي دويم ترتيب منحني ګاني

۵. ۱. ۱ سريزه

که چېرې $y = f(x)$ د دېرو قيمتونو يوه تابع وي، نو د x له هر قيمت سره، د y دوه يا زيات قيمتونه اړيکه پيدا کوي. دا د منحني د ډېر زياتو ځانګو لامل ګرځي. د منحني ځيني ځانګي ممکن تر لايتناهي پورې وغزول شي، لکه څنګه چې د پارابولا او هايپارابولا په حالتونو کې ليدل کېږي. د دارنګه منحنياتود رسمولو لپاره مونږ د منحني د مجانبونو، محدبيت او ځانګړو نقطو په هکله معلوماتو ته اړتيا لرو. په دې څپرکي کې به مونږ دغه موضوع ګانې او د منحنياتو رسمول تر بحث لاندې و نيسو.

۵.۲. ۱ مجانبونه (ASYMPTOTES)

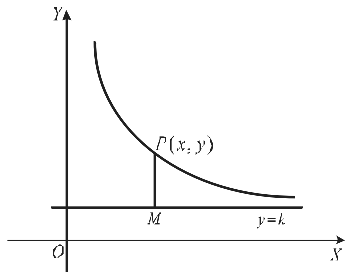
تعريف: د ℓ يو مستقيم خط ته د C يو منحني له يو بې شميره ځانګو(شاخونو) سره يومجانب وايي، که چېرې د منحني د (x, y) ديوې نقطې واټن له خط څخه صفر ته تقرب کړي وي په همدې ډول چې x يا y يا دواړو لايتناهي ته تقرب کړي وي.

مونږ به لومړی هغه مجانبونه په پام کې ونيسو چې د x له محور اود y له محور سره موازي وي، کومو ته چې په ترتيب سره افقي او عمودي مجانبونه وايي. کوم مجانبونه چې له يوه محور سره هم موازي نه وي مايل مجانبونه ئې بولي، کوم چې به وروسته تر بحث لاندې ونيول شي.

۵ . ۲ . ۲ د x محور سره موازي مجانبونه

که چيرې $P(x, y)$ د $f(x,y)=0$ په منحني باندې يوه نقطه وي. اوس فرض وو د يو مستقيم خط معادله چې دx له محور سره موازي دیk $y = k$ ده.

که چيرې PM په همدې خط باندې عمود وي، نو $PM = |y - k|$.



د $y = k$ خط به دراکړ شوي منحني مجانب وي که چېرې $\lim PM = 0$ کله چې $x \to \infty$، یعني،

$$\lim_{x\to\infty} PM = 0$$

یا $\lim_{x\to\infty} |y-k| = 0$ یا $\lim_{x\to\infty} y = k$

پدې ډول دمجانب د پیدا کولو لپاره چې د x له محور سره موازي وي، مونږ ټاکلې قیمت یا د k_1، k_2 او داسې نورقیمتونه پیدا کوو، کوم یو ته چې y تقرب کوي په همدې ډول x لاینتناهي ته تقرب کوي. نو $y = k_1$، $y = k_2$ او داسې نور غوښتل شوي مجانبونه دي.

اوس به مونږ یو ساده قانون د یوې نسبتي الجبري منحني د مجانب د پیدا کولو لپاره چې د x له محور سره موازي وي لاس ته راوړو.

فرض وو د منحني معادله څه وخت چې د x طاقتونه په نزولي ډول ترتیب شوي وي

$$x^n\phi_0(y) + x^{n-1}\phi_1(y) + x^{n-2}\phi_2(y) + ... = 0 \qquad (1)$$

ده، چېرته چې $\phi_2(y), \phi_1(y), \phi_0(y)$ او داسې نور د y پولینومونه دي.

په x^n باندې د (1) ددواړو خواوو په وېشلو مونږ لاسته راوړو چې

$$\phi_0(y) + \frac{1}{x}\phi_1(y) + \frac{1}{x^2}\phi_2(y) + ... = 0 \qquad (2)$$

اوس، که چېرې $y = k$ د (۱)چې د x له محور سره موازي دی یو مجانب وي، نو

$$\lim y_{x\to\infty} = k$$

همدارنګه، د (2) په لېمټ نیولو کله چې $x \to \infty$، مونږ لاسته راوړو چې $\phi_0(k) = 0$

په دې ډول، k د $\phi_0(y)=0$ معادلې، یو جذر دی.

که چېرې k_2, k_1، او داسې نور، د $\phi_0(y)=0$ معادلې جذرونه وي، نو دراکړل شوې منحنۍ مجانبونه د x له محور سره موازي او $y=k_1$، $y=k_2$ اوداسې نور دي.

دا څرګنده ده چې $\phi_0(y)$ په راکړ شوې معادله کې د x تر ټولو لوی طاقت قیمت ضریب دی. نو پدې ډول د x محور سره موازي مجانبونه دي چې د x لوی طاقت په ضریب کې د حقیقي خطي فکتورونو له صفر سره د مساوي کولو پواسطه د منحنۍ په معادله کې، لاسته راځي.

منحنۍ به د x له محور سره موازي مجانب ونلري، که چیرې د x ترټولو لوی طاقت ضریب یو ثابت یا د دوی ټول خطي فکتورونه موهومي وي.

۵. ۲. ۳ د y محور سره موازي مجانب

دپورته په شان کولی شوپه داګه(څرګند) کړو چې مجانبونه، کوم چې د y محور سره موازي دي، د y دلوی طاقت په ضریب کې دحقیقي خطي فکتورونو د صفر سره د مساوي کولو پواسطه د منحنۍ په معادله کې لاسته راځي.

مثال: د $(x^2+y^2)x-ay^2=0$ منحنۍ مجانب پیدا کړئ چې د مختصاتو له محورونو سره موازي وي.

حل: د x دلوی طاقت د x^3 ضریب یو (1) دی کوم چې یو ثابت دی. لدې سببه کوم مجانب چې د x محور سره موازي وي نشته.

د y دلوی طاقت y^2 ضریب $(x-a)$ دی. لدې سببه کوم مجانب چې د y محور ته موازي دی $x-a=0$ دی.

۵. ۲. ۴ د یوې منحنۍ د مایلو مجانبونو ټاکل

که چېرې $y=mx+c$ د $f(x,y)=0$ منحنۍ یو مجانب وي، موږ باید د m او c قیمتونه کله چې x لایتناهي ته تقرب کوي پیدا کړو.

یعنې ، $m=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ او $c=\lim\limits_{x\to\infty}(y-mx)$

د منحنۍ معادله کیدای شي چې د :

$$x^n\phi_n(\frac{y}{x})+x^{n-1}\phi_{n-1}(\frac{y}{x})+x^{n-2}\phi_{n-2}(\frac{y}{x})+....+x\phi_1(\frac{y}{x})-\phi_0(\frac{y}{x})=0............(1)$$

په بنه ولیکل شي چیرته چې $\phi_r(\frac{y}{x})$ د r درجې $\frac{y}{x}$ یوه څو جمله اي (پولینومیل) ده.

په x^n باندې د (1) په ویشلو لاسته راورو چې.

$$\phi_n(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}\phi_{n-1}(\frac{y}{x})+\frac{1}{x^2}\phi_{n-2}(\frac{y}{x})-...-\frac{1}{x^{n-1}}\phi_1(\frac{y}{x})+\frac{1}{x^n}\phi_0(\frac{y}{x})=0 \quad ....(2)$$

ددې په لیمټ نیولو، کله چې $x\to\infty$، مونږ لاسته راوړو چې

$$\phi_n(n)=0 \qquad ....(3)$$

کومه چې د مجانبونو میل ټاکي، فرضوو چې m_1 ددې معادلې یو جذر دی دارنګه چې $\phi_n(m_1)=0$، نومونږ لیکلی شو چې:

$$y-m_1x=p$$

یعنې، $\frac{y}{x}=m_1+\frac{p}{x}$

په (1) کې $\frac{y}{x}$ ددې قیمت په وضع کولو، مونږ لاسته راوړو چې:

$$x^n\phi_n(m_1+\frac{p}{x})+x^{n-1}\phi_{n-1}(m_1-\frac{p}{x})+x^{n-2}\phi_{n-2}(m_1+\frac{p}{x})+.........-x\phi_1(m_1+\frac{p}{x})+\phi_0(m_1+\frac{p}{x})=0$$

دټایلرد دعوې پواسطه هر حد ته د انکشاف په ورکولو (په توسعه ورکولو)، مونږ لاسته راورو .

$$x^n\{\phi_n(n_1)+\frac{p}{x}\phi_n'(m_1)+\frac{p^2}{2x^2}\phi_n''(m_1)+....\}+x^{n-1}\{\phi_{n-1}(m_1)+\frac{p}{x}\phi_{n-1}'(m_1)$$
$$+\frac{p^2}{2x^2}\phi_{n-1}''(m_1)+....\}+x^{n-2}\{\phi_{n-2}(m_1)+\frac{p}{x}\phi_{n-2}'(m_1)$$
$$+\frac{p^2}{2x^2}\phi_{n-2}''(m_1)+...\}+.....=0$$

د حدونو په ترتيبولوسره، مونږ لاسته راوړو چې:

$$x^{n}\phi_{n}(m_{1})+x^{n-1}\{p\phi'_{n}(m_{1})+\phi_{n-1}(m_{1})\}+x^{n-2}\{\frac{p^{2}}{2}\phi''_{n}(m_{1})$$
$$+p\phi'_{n-1}(m_{1})+\phi_{n-2}(m_{1})\}+\cdots\cdots=0$$

د $\phi_{n}(m_{1})=0$ په ايښودلو، او بيا د x^{n-1} په ويشلو، مونږ لاسته راوړو چې :

$$\{p\phi'_{n}(m_{1})+\phi_{n-1}(m_{1})\}+\frac{1}{x}\{\frac{p^{2}}{2}\phi''_{n}(m_{1})+p\phi'_{n-1}(m_{1})+\phi_{n-2}(m_{1})\}+\cdots\cdots=0 \qquad ......(4)$$

که چيرې $x\to\infty$ ، نو $\lim_{x\to\infty} p=c_{1}$ لدې سببه

$$c_{1}\phi'_{n}(m_{1})+\phi_{n-1}(m_{1})=0 \qquad ....(5)$$

يا $c_{1}=-\frac{\phi_{n-1}(m_{1})}{\phi'_{n}(m_{1})}$ که چيرې $\phi'_{n}(m_{1})\neq 0$ وي

پدې ډول

$$y=m_{1}x-\frac{\phi_{n-1}(m_{1})}{\phi'_{n}(m_{1})}$$

د m_{1} ميل ته اړونده مجانب دی، که چيرې $\phi'_{n}(m_{1})\neq 0$.

په ورته ډول

$$y=m_{2}x-\frac{\phi_{n-1}(m_{2})}{\phi'_{n}(m_{2})},$$

$$=m_{3}x-\frac{\phi_{n-1}(m_{3})}{\phi'_{n}(m_{3})},$$

او داسې نور. د m_{2} , m_{3} او داسې نورو اړونده ميلونو ته د منحني مجانبونه دي، کوم چې د $\phi_{n}(m)=0$ جذورنه دي، که $\phi'_{n}(m_{2})$, $\phi'_{n}(m_{3})$ او داسې نور صفر نه وي.

د $\phi'_n(m_1)=0$ خو $\phi_{n-1}(m_1)\neq 0$ په حالت کې، (5) معادله د c_1 کوم قیمت نه ټاکي او، لدې سببه،پدی برخه کې د m_1 میل پورې اړوند مجانب شتون نلري.

اوس فرضوو چې $\phi'_n(m_1)=0=\phi_{n-1}(m_1)$. پدی حالت کې، (5) د یوه مطابقت بڼه غوره کوي او مونږ یو حَل بیا د (4) معادلې ارزونه لرو، کومه چې د

$$\{\frac{p^2}{2}\phi''_n(m_1)+p\phi'_{n-1}(m_1)+\phi^{n-2}(m_1)\}+\{.....\}\frac{1}{x}+....=0$$

سره کیږي. په یو ځلی لیمټ نیولو کله چې $x\to\infty$ مونږ پوهیږو چې c_1 د

$$\frac{c_1^2}{2}\phi''_n(m_1)+c_1\phi'_{n-1}(m_1)+\phi_{n-2}(m_1)=0$$

معادلې جذر دی هغه چې د c_1 دوه قیمتونه چې c_1''، c_1' ورته وايي ښيي پدی شرط سره چې $\phi''_n(m_1)\neq 0$. پدې دول $y=m_1x+c_1''$، $y=m_1x+c'$

د m_1 میل ته دوه اړوند مجانبونه دي. دوی په څرګند دول موازي دي. دا د موازي مجانبونود حالت په شان پيژندل کيږي.

یادونه: د $\phi_n(m)$ پولینومیل د $x^n\phi_n(\frac{y}{x})$ تر ټولو لوړې درجې په حدونو کې د $x=1$ او $y=m$ په وضع کولو سره لاسته راځي، او $\phi_{n-1}(m)$، $\phi_{n-2}(m)$ او داسې نور د $x^{n-1}\phi_{n-1}(\frac{y}{x})$، $x^{n-2}\phi_{n-2}(\frac{y}{x})$، او داسې نورو څخه په ورته کړنې سره لاسته راځي.

مثال: د $2x^3-x^2y-2xy^2+y^3-4x^2+8xy-4x-1=0$ منحني مجانبونه پیدا کړئ. [P.U.19.84]

حل: په جلا جلا دول ددریمې درجې او دویمې درجې په حدونوکې د $x=1$، $y=m$ په ایښودلو، مونږ لاسته راوړو چې:

$$\phi_3(m)=2-m-2m^2+m^3$$
$$\phi_2(m)=-4+8m$$

د مجانبونو میلونه د

$$\phi_3(m) = m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$$

پواسطه راکړل کيږي، يعني

$$(m+1)(m-1)(m-2) = 0$$

يعني،

$$m = -1, 1, 2.$$

او c د

$$c\phi_3'(m) + \phi_2(m) = 0$$

پواسطه راکړل شويده، يعني،

$$c(-1-4m+3m^2) + (-4+8m) = 0$$

د $m = -1, 1, 2,$ په اينودلو، مونږ په ترتيب سره $c = 2,\ 2,\ -4$ لاسته راوړو.

لدې سببه، $y = -x + 2$ ، $y = x + 2$ او $y = 2x - 4$ مجانبونه دي.

۵ . ۲ . ۵ د مجانبونوځيرنه

که چيرې د n- ام درجې يو منحني معادله د

$$F_n + F_{n-2=0}$$

په بڼه وليکل شي. چيرته چې $(n-2)$ د F_{n-2} ترټولولوړه درجه ده، نو د F_n هر خطي فکتور، کله چې د صفر سره مساوي شي يو مجانب به ورکړي، پدې شرط سره کوم تاکلي مستقيم خط د صفر سره د مساوي کيدلو له امله د F_n هر بل خطي فکتور څخه چې له ده سره موازي يا له ده سره منطبق وي لاسته رانللی ونشي.

ثبوت: فرض وو چې $ax + by + c = 0$ د F_n يونه تکراري فکتور دی ،مونږ ليکلی شو چې:

$$F_n = (ax + by)F_{n-1}$$

چیرته چي $(n-1)$ د F_{n-1} درجه ده. د $ax+by+c=0$ سره موازي مجانب:

$$ax+by+c+\lim\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}=0$$

کله چي $x\to\infty$ او $\frac{y}{x}\to-\frac{a}{b}$، ده.

د $\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$ لیمټ دټاکلو لپاره، مونږ صورت همداشانتی مخرج په x^{n-1} باندی ویشواوګورو چي $\frac{1}{x}$ دیو فکتور په شان ځرګندېږي دارنګه کله چي $x\to\infty$ نو $0\leftarrow\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$.

خکه نو، $ax+by+c=0$ یو مجنب دی.

مثال: د $x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3+2x+y+1=0$ منحني مجانبونه پیدا کړی.

حل: مونږ لیکوچي:

$$F_3=x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3$$

$$=(x-y)(x-2y)(x-3y)$$

$$F_1=2x+y+1$$

د منحني معادله کولی شو چي د $F_3+F_1=0$ په شکل ولیکو، چېرته چي F_3 غیر تکراري خطي فکتورونه لري. پدې ډول $F_3=0$ د منحني دمجانبونو د غوټي یا د وصل کیدو (Joint) معادله ده، یعني، $x-y=0$، $x-2y=0$ او $x-3y=0$ مجانبونه دي.

ځینی پاېلي:

۱. د n- ام درجي دیو الجبري منحني د مجانبونو شمېر، له n ځخه زیتیدلی نشي.

۲. د یو الجبري منحني مجانبونه له هغو خطونو سره موازي دي کوم چي په همدې معادله کي له صفر سره دلوړي درجي د حدونو د فکتورونو د مسؤی کولو پواسطه لاس ته راځي.

۳. د n- ام درجې يو منحني هر مجانب منحني د n-2 په نقطو کې قطع کوي. يعني، د n- ام درجې يو منحني n مجانبونه د n(n-2) په نقطو کې قطع کوي.

۴. که چېرې د n- ام درجې د يوه منحني معادله د $F_n + F_{n-2} = 0$ بڼې ته واړول شي، چېرته چې زياتره وخت د F_{n-2} درجه n-2 او F_n د n غير تکراري خطي فکتورونو ترکيب ده، نو (n(n-2 د منحني دتقاطع نقطې او دهغه مجانبونه د $F_{n-2} = 0$ په منحني باندې واقع دي.

۵ .۲ .۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$ منحني مجانبونه پيدا کړئ چې د مختصاتوله محورونو سره موازي وي.

حل : د منحني معادله کېداې شی چې د:

$$x^2 y = (x-2)^2$$

په بڼه(شکل) وليکل شي. د x لوی طاقت ضريب يعني x^2 ، $(y-1)$ ده.

$\therefore \quad y-1=0$ مجانب د x محور سره موازي دی او د y لوی طاقت y دی اودهغه ضريب x^2 دی.

$\therefore \quad x^2=0$ د y له محور سره موازي مجانبونه دي، يعني $x=0$ ، دوه منطبق مجانبونه دي.

۲. مثال: د $x^2 y^2 = 12(x-3)$ منحني مجانب پيدا کړئ.

حل: دا زياتره څلور مجانبونه لري.

د x له محور سره موازي مجانبونه لکه $y^2 = 0$ دي يعني، $y=0$ دوه منطبق مجانبونه دي.

د y محور سره موازي مجانبونه $x^2 = 0$ ، يعني، $x=0$ دوه منطبق مجانبونه دي. لدې امله $x=0$، $y=0$ مجانبونه دي.

۳. مثال: د $x^2y + xy^2 + xy + y^2 + 3x = 0$ منحني مجانبونه پيدا کړئ. [P.U.1989]

حل: د y د لوی طاقت ضريب $x+1$ دی، ځکه نو $x+1=0$ مجانب د y محور سره موازي دی، په ورته ډول $y=0$ مجانب د x محور سره موازي دی. مايل مجانب لپاره، موږ لرو چې.

$$\phi_3(m) = m + m^2$$
$$\phi_2\ (m) = m + m^2$$
$$\phi_3'(m) = 1 + 2m$$

$\phi_3(m) = 0$ ، څخه $m(m+1) = 0$ لاسته راځي. یعني، $m = 0, -1$

د $m = 0$ لپاره، لکه څنګه چې مومخکې ولیدل $y = 0$ مجانب دی.

د $m = -1$ ته اړوند c د ټاکلو لپاره، مونږ $c\phi_3'(m) + \phi_2(m) = 0$ لرو، یعني،

$$c(1+2m) + m + m^2 = 0$$

د $-1 = m$ لپاره $c = 0$.

څنګه چې $y = -x$ مجانب دی. څکه نو $x + 1 = 0$ ، $y = 0$ او $x + y = 0$ مجانبونه دي.

٤. مثال: د $y(x-y)^2 = x + y$ منحني مجانبونه پیدا کړئ.

حل: راکړشوی معادله کولی شو چې د $y(x-y)^2 - (x+y) = 0$ په څیر ولیکو،

د x له محور سره موازي مجانب $y = 0$ دی او د y له محور سره موازي مجانب شتون نلري. اوس

$$\phi_3(m) = m(1-m)^2 = m^3 - 2m^2 + m$$

$$\phi_2(m) = 0,\ \phi_1(m) = -1 - m.$$

$\phi_3(m) = 0$ ، څخه $m = 0, 1, 1$ لاسته راځي.

د $m = 0$ لپاره، مجانب $y = 0$ ده.

کله چې $m = 1, 1$، د c پیدا کولو لپاره مونږ

$$\frac{c^2}{2}\phi_3''(m) + c\phi_2'(m) + \phi_1(m) = 0$$
$$\frac{c^2}{2}(6m-4) + 0 - 1 - m = 0$$

یا

$$c^2(3m-2)-1-m=0$$

د. $m = 1$ په وضع کولو، $c^2-2=0$

$$\therefore \quad c=\pm\sqrt{2}$$

$y=x\pm\sqrt{2}$ اړونده مجانبونه دي.

۵. مثال: د $xy^2=(x+y)^2$ منحني مجانبونه پیدا کړئ.

حل: راکړشوي معادله د $xy^2-(x+y)^2=0$ په څیر لیکلی شو.

د y لوی طاقت y^2 دی او ضریب یې $x-1$ دی.

$\therefore$ $x-1=0$ د y له محور سره موازي مجانب دی. پدې صورت کې د x له محور سره موازي مجانب شتون نلري. اوس

$$\phi_3(m)=m^2$$
$$\phi_2(m)=-(1+2m+m^2)$$

$\phi_3(m)=0$، څخه $m=0,0$ لاسته راځي.

د $m=0$ لپاره، $\phi_3'(m)=2m=0$

څنګه چې د c لپاره کوم قیمت له $c\phi_3'(m)+\phi_2(m)=0$ څخه لاسته راوړلی نشو.

نوپدې صورت کې د m د صفر قیمت لپاره اړونده مجانب شتون نلري.
لدې امله یواځینی مجانب $x-1=0$ دی.

۵ . ۲ پوښتنې

۱. د لاندنیو منحني ګانو مجانبونه پیدا کړئ چې د مختصاتو له محورونو سره موازي وي.

$$(i) \qquad x^2y^2-a^2(x^2+y^2)=0$$

$(ii) \quad xy^2 + x^2y = x^2 + y^2$

$(iii) \quad x^3y^2 + x^2y^3 = x^2 + y^3$

۲- د لاندنیو منحنیاتو مجانبونه پیدا کړئ:

$$(i) \quad \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

$(ii) \quad x^2y^2 = 12(x-3)$

[P.U.1988] $(iii) \quad x^3 + 3x^2y - xy^2 - 3y^3 + x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 5 = 0$

$(iv) \quad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y - 1 = 0$

$(v) \quad (x^2 - y^2)(x + 2y) + 5(x^2 + y^2) + x + y = 0$

$(vi) \quad (y-x)(y-2x)^2 + (y+3x)(y-2x) + 2x + 2y - 1 = 0$

$(vii) \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1 = 0$

$(viii) \quad x^2y^2(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y2)^3$

[P.U.1985, 87] $(ix) \quad y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 = 1$`

$(x) \quad x^3 - y^3 = 3ax^2$

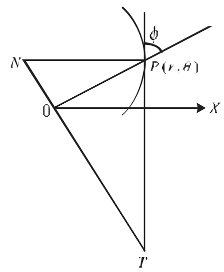
$(xi) \quad 4x^3 - 3xy^2 - y^3 + 2x^2 - xy - y^2 - 1 = 0$

$(xii) \quad x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + x^2 - y^2 - 2 = 0$

[P.U.1990] $(xiii) \quad x^2(x-y)^2 + a^2(x^2 - y^2) = a^2xy$

۵ . ۳ . ۱ په قطبي سیستم کې مجانبونه

تعریف: فرض وو یو خط چې د O له قطب څخه تیر اود OP شعاع وکتور باندې عمود رسم شویدی، د P د نقطې مماس او نارمل په ترتیب سره، د T او N په نقطو کې قطع کوي ، نو OT او ON ته په ترتیب سره په P کې د قطبي محور برخه ایز(فرعي) مماس اود قطبي محور برخه ایز یا فرعي نارمل وایي.



له شکل څخه

$$OT = OP\tan\phi = r \cdot r\frac{d\theta}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dr}$$

او

$$ON = OP\cot\phi = r \cdot \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}$$

یادونه: دPT او PN اوږدوالو ته ځینې وخت په P کې د قطبي محورد مماس اود قطبي محورد نارمل اوږدوالی وايي.

$$PT = OP\sec\phi = r\sqrt{1+\tan^2\phi} = r\sqrt{1+r^2(\frac{d\theta}{dr})^2}$$

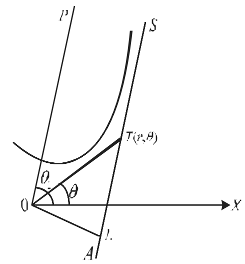
$$PN = OP\operatorname{cosec}\phi = r\sqrt{1+\cot^2\phi} = \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$$

۵ . ۳ . ۲ دیو مجانب معادله

فرض وو چې $f(r,\theta)=0$ منحني د AS یو مجانب لري. نو د OP شعاع وکتور ، منحني او مجانب د OP برسیره په لایتناهي کې سره قطع کوي. نولدې سببه، دیو مجانب لپاره امکان لري چېr لایتناهي وي.

فرضووچي $\theta_1, \theta_2, \theta_3$... ، اوداسې نورد θ قیمتونه دکوم لپاره چې r لایتناهي دي. د θ دا قیمتونه د منحني د مجانبونو هادي ګان راکوي. فرض وو چې دAS مجانب لپاره $\theta=\theta_1$ ، که چیرې OL په AS

باندې عمود وي، نودا به هم په OP باندې عمود وي، لدې سببه ، OL په P کې د قطبي برخه ايز(فرعي) مماس دی، نقطه په منحني باندې لايتناهي کې ده، که چېرې $T(r,\theta)$ په مجانب باندې کومه نقطه وي.



$$OL = OT\cos m\, L\hat{O}T = r\cos[\frac{\pi}{2} - (\theta_1 - \theta)]$$

$$= r\sin(\theta_1 - \theta)$$

همدارنګه $OL = \lim_{\theta\to\theta_1} r^2\frac{d\theta}{dr} = \rho$ وايي.

ځکه نو، $\rho = r\sin(\theta_1 - \theta_2)$ د AS مجانب غوښتل شوی معادله ده.

د نورو مجانبونو معادلې چې د θ_2 ، θ_3 ، . . . او داسې نور جهتونو پورې اړين (مطابق) وي کولی شو چې په يوې ورته طريقی سره يې لاسته راوړو.

۵ . ۳ . ۳ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$ منحني مجانبونه پيدا کړئ.

حل: پدې ځای کې $r = \infty$ کله چې $\theta = 0$ وی ، نو

نو $\theta_1 = 0$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}a\theta^{-3/2}$$

یا،

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2}{a}\theta^{3/2}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dr} = \frac{a^2}{\theta}\left(-\frac{2}{a}\theta^{\frac{3}{2}}\right) = -2a\sqrt{\theta}$$

$$\rho = \lim_{\theta\to 0} r^2\frac{d\theta}{dr} = \lim_{\theta\to 0}(-2a\sqrt{\theta}) = 0$$

د مجانب معادله عبارت ده له:

$$\rho = r\sin(\theta_1 - \theta)$$

يعني

$$0 = r\sin(0 - \theta)$$

يا

$$r\sin\theta = 0$$

يعني

$$\sin\theta = 0$$

يعني

$$\theta = 0$$

۲. مثال: د $r^n \sin n\theta = a^n$ منحني مجانبونه پیدا کړئ. [P.U.1988]

حل: د منحني معادله په لاندې ډول ده:

$$r^n = \frac{a^n}{\sin n\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

دلته $r = \infty$ ، که چیرې $n\theta = k\pi$ چیرته چې $k \in Z$ یعني

$$\theta = \frac{k\pi}{n}$$

د (1) په مشتق نیولو، مونږ لاسته راوړو چې

$$nr^{n-1}\frac{dr}{d\theta} = \frac{a^n n\cos n\theta}{\sin^2 n\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{-r^{n-1}\sin^2 n\theta}{a^n \cos n\theta}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = -\frac{r^{n-1}\sin^2 n\theta}{a^n \cos n\theta}$$

$$= \frac{-a^n}{\sin n\theta} \cdot \frac{a}{(\sin n\theta)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\sin^2 n\theta}{a^n \cos n\theta}$$

$$= -\frac{a(\sin n\theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\cos n\theta}$$

$$\rho = \lim_{\theta \to \frac{k\pi}{n}} r^2 \frac{d\theta}{dr} = \lim_{\theta \to \frac{k\pi}{n}} \frac{-a(\sin\theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\cos n\theta} = 0$$

$\therefore$ د مجانب معادله $0 = r\sin(\frac{k\pi}{n} - \theta)$ ده. یعني ،

$$\frac{k\pi}{n} - \theta = 0$$

یا $\theta = \frac{k\pi}{n}$ ، چیرته چي K یوتام عدد دی.

۳. مثال: د $r = \frac{a}{1-\cos\theta}$ منحني مجانبونه پیدا کړئ.

حل: کله چي $\theta = 0.2\pi, 4\pi......$ ، $r = \infty$. د راکړ شوي معادلي په مشتق نیولو

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{-(1-\cos\theta)^2}{a\sin\theta}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dr} = \frac{a^2}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{-(1-\cos\theta)^2}{a\sin\theta} = \frac{-a}{\sin\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0,2\pi} r^2\frac{d\theta}{dr} = \lim_{\theta\to 0,2\pi}\frac{-a}{\sin\theta}$$

دا تعریف شوی ندی. ځکه نو پدې ځای کې د منحني مجانب شتون نلري.

۵ . ۳ پوښتنې

د لاندېنیو منحنیاتو مجانبونه وټاکئ.

1. $r\theta = \alpha$
2. $r(\frac{1}{2}-\cos\theta) = \alpha$
3. $r\cos 2\theta = a\sin 3\theta$
4. $r = 2a\sin\theta\tan\theta$
5. $r = a\operatorname{cosec}\theta + b$
6. $r = a\operatorname{cosec} n\theta$
7. $r(e^\theta - 1) = a(e^\theta + 1)$ [P.U.1991]
8. $r^2\sin\theta = a^2\sin 2\theta$ [P.U.1984]
9. $r = a\sec\theta + b\tan\theta$
10. $r = a\tan\theta$

۵ . ۴ . ۱ اعظمي او اصغري

تعریف:- مطلق اعظمي: که چېرې د $f(x)$ په دومین کې د ټولو x لپاره $f(x_0) \ge f(x)$ ، نو $f(x_0)$ ته د $f(x)$ اعظمي قیمت یا مطلق اعظمي قیمت وایي.

اصغري قیمت: که چېرې د $f(x)$ په دومین کې د ټولو x لپاره $f(x_0) \le f(x)$، نو $f(x_0)$ ته د $f(x)$ اصغري قیمت یا مطلق اصغري قیمت وایي.

اعظمي یا اصغري قیمت (Extreme value): یو عدد ته چې د $f(x)$ یوې تابع یا اعظمي یا اصغري قیمت وي د $f(x)$ اعظمي یا اصغري (اکستریم Extreme) قیمت یا مطلق اعظمي یا اصغري(مطلق اکستریم) قیمت وایي. اکثره وخت د اکستریموم یا مطلق اکستریموم اصطلاح هم کارول کېږي.

یادونه: ځینې وختونه مونږ ممکن په علاقمندي سره د $f(x)$ اکستریموم قیمت په کوم انتروال کې نسبت د $f(x)$ ټول دومین ته خوښ کړو. مونږ به ووایو چې $f(x)$ مطلق اعظمي یا مطلق اصغري لري، که چېرې د (انتروال $x \in$) لپاره $f(x_0) \ge f(x)$ یا $f(x_0) \le f(x)$.

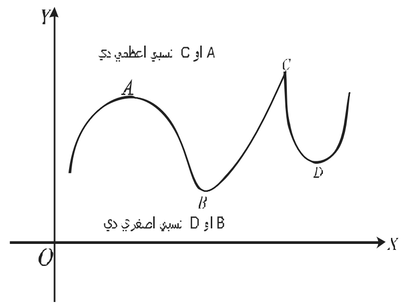
تعریف:

نسبي اعظمي: وایو چې د $f(x)$ یوه تابع په x_0 کې یوه نسبي اعظمي (Relative Maximum) لري که چېرې د x_0 په شمول په کوم ترلي انتروال کې د هر x لپاره $f(x_0) \ge f(x)$.

نسبي اصغري: وایو چې د $f(x)$ یوه تابع په x_0 کې یوه نسبي اصغري لري که چېرې د x_0 په شمول په کوم ترلي انتروال کې د هر x لپاره $f(x_0) \le f(x)$.

نسبي اکستریموم: وایو د $f(x)$ یوه تابع په x_0 کې یو نسبي اکستریموم لري که چېرې دا په x_0 کې یو نسبي اعظمي یا یو نسبي اصغري ولري.

یادونه: د اکثره تابعګانو ګرافونه د غونډیو او درو په شان لیدل کېږي. د غونډیو پاسنیو برخو ته نسبي اعظمي وایي او لاندېنیو برخو ته یې نسبي اصغري وایي، (لاندې **شکل** وګورئ). همدا شانتې دا اړینه نده چې د یوې غونډۍ لوړه ځوکه دې په ځمکه باندې خورا لوړه نقطه وي، نو دا حتمي نده چې یوه نسبي اعظمي نقطه د په ګراف باندې بشپړ خورا اعظمي نقطه اوسي. په هر صورت، نسبي اعظمي، د غونډیو ورته (مشابه) ځوکې ددوی په مجاورت کې لوړې نقطې دي، او نسبي اصغري، د درو د تل (بیخ) په شانتې، ددوی په ګاونډ (مجاورت) کې ټیټې نقطې دي.



بحراني نقطه (CRITICAL POINT):

د $f(x)$ یوې تابع لپاره یوه بحراني نقطه د $f(x)$ په دومین کې د x_0 یوه نقطه ده په کوم کې چې $f'(x)=0$ یا $f(x)$ د مشتق نیولو وړ نه وي. بحراني نقطو ته چیرې چې $f'(x)=0$ وي د $f(x)$ د ځایي یا نه بیلیدونکو(Stationary) نقطې وایي.

۵ . ۴ . ۲ دعوی

که چیرې $f(x)$ په x_0 کې یوه نسبي اکستریموم و لري، نو یا $f'(x)=0$ یا $f(x)$ په x_0 کې د اشتقاق وړنده.

ثبوت: دوه امکانه شتون لري یا $f(x)$ په x_0 کې د مشتق نیولو وړ ده یا د مشتق نیولو وړنده. که چیرې دا د اشتقاق وړ نه وي. نو x_0 د $f(x)$ لپاره یوه بحراني نقطه ده .

فرض کړئ چې $f'(x)$ شتون لري، او په x_0 کې $f(x)$ یو نسبي اکستریموم لري، نو مونږ باید وښیو چې $f'(x)=0$ ده. څرنګه چې $f'(x)$ شتون لري، په x_0 کې د $f(x)$ د ښي خوا او کیڼې خوا مشتقونه شتون لري او مساوي دي، پدې دول

$$f'(x)=\lim_{h\to 0\pm 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

او

$$f'(x) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

څرنګه چې $f(x)$ په x_0 کې یوه نسبي اعظمي لري، د (a, b) یو خلاص انټروال شتون لري چې x_0 پکښې شامل دی کوم چې د (a ,b) دهر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$.

په پام کې ونیسي چې h په کافي اندازه کوچنی دی له دی امله $x_0 + h$ د (a, b) په انټروال کې واقع دی.
څکه نو

$$f(x_0+h) \le f(x_0)$$

یا په معادل دول

$$f(x_0+h) - f(x_0) \le 0 \; .$$

په هغه صورت کې که چېرې h منفي وي

$$\frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} \ge 0$$

او که چېرې h مثبت وي

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le 0$$

نوپدی دول له دغو معادلو څخه لیکلی شو چې

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ge 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le 0$$

ځرنګه چي $f'(x) \geq 0$ او $f'(x_0) \leq 0$، نوځکه $f'(x_0) = 0$ دی.

په هغه حالت کي چي کله $f(x)$ په x_0 کي نسبي اصغري ولري په ورته طريقي سره لاس ته راځي.

يادونه: د $f'(x_0) = 0$ شرط اړين(لازمي) دی خوکافي نه دی. که چيري $f'(x_0) = 0$، مونږکولي شوچي يواځي يوه پايله لاسته راوړو چي په $x = x_0$ کي $y = f(x)$ افقي مماس لري، دا به هلته يوه نسبي اکستريم (اعظمي يا اصغري) ممکن ولري يا ونلري. ددې دپوهيدلولپاره مونږ $f(x) = x^3$ تابع په $x = 0$ په نقطه کي په پام کي نيسو.

د x له 0 څخه د لويو قيمتونولپاره، $f(x)$ مثبت ده اوله دي امله د $f(0)$ څخه لويه ده، کوم چي 0 ده، او د x له 0 څخه دکوچنيو قيمتونولپاره ، $f(x)$ منفي ده اوله دي امله د $f(0)$ څخه کو چنی ده.

پدې دول $f(0)$ داکستريموم يو مناسب قيمت ندی خو بيا هم $f'(0) = 0$ ده.

۵ . ۴ .۳ دعوی (دلومړي مشتق ارزونه)

فرض کړي چي $f(x)$ د x_0 په يوي بحراني نقطه کي متمادي ده:

(a) که چيري د $(x_0 - h, x_0)$ په يو خلاص انتروال کي $f'(x) > 0$ او د $(x_c, x_0 + h)$ په يوخلاص انتروال کي $f'(x) < 0$ وي نو $f(x)$ په x_0 کي يوه نسبي اعظمي لري.

(b) کـه چيـري د $(x_0 - h, x_0)$ پـه يـوخلاص انتـروال کـي $f'(x) < 0$ او د $(x_0, x_0 + h)$ پـه خلاص انتروال کي $f'(x) > 0$ وي نو $f(x)$ په x_0 کي يوه نسبي اصغري لري.

(c) که چيري $f'(x)$ د $(x_0 - h, x_0)$ په يو خلاص انتروال کي او د $(x_0, x_0 + h)$ په يو خلاص انتروال کي [يا $f'(x) > 0$ يا $f'(x) < 0$] يوشا نتي علامي ولري نو $f(x)$ په x_0 کي يو نسبي اکستريموم نلري.

ثبـــوت: (a) که چېرې په $(x_0-h,\ x_0)$ يو خلاص انتروال کې $f'(x)>0$ نو $f(x)$ د (x_0-h,x_0) په انتروال کې ډېرښت مومي(تزايد کوي). يعنې د (x_0-h,x_0) په انتروال کې $f(x_0)$ د $f(x)$ له ټولوقيمتونو څخه لويه ده.

دويـــم دا چې د (x_0,x_0+h) په خلاص انتروال کې $f'(x)<0$ ، نو $f(x)$ د (x_0,x_0+h) په انتروال کې کمښت مومي(تناقص کوي). يعنې د $(x-h,x_0+h)$ په انتروال کې $f(x_0)$ د $f(x)$ له ټولوقيمتونو څخه لويه ده.

پدې ډول $f(x_0)$ د $f(x)$ له ټولو قيمتونو څخه په (x_0,x_0+h) انتروال کې لويه ده. نو له دې امله $f(x_0)$ د $x=x_0$ په نقطه کې نسبي اعظمي ده.

په ورته ډول مو نر (b) او (c) ثبوتولی شو.

مثـــال: د $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ تابع داعظمي اواصغري لپاره امتحا ن کړئ.

حـل:

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

د $f'(x)=0$ څخه لاسته راځي چې $x=-1,\ 3$.

کله چې $x<-1$, $f'(x)$ مثبت ده.

کله چې $-1<x<3$, $f'(x)$ منفي ده.

له دې امله $f(x)$ په $x=-1$ کې اعظمي ده اواعظمي قيمت $f(-1)=10$ ده.

اوکله چې $x<3$ ، $f'(x)$ منفي ده. اوکله چې $x>3$ ، $f'(x)$ مثبت ده.

لدې سببه $f(x)$ په $x=3$ کې اصغري ده اواصغري قيمت $f(3)=-22$ ده.

۵ . ۴ . ۴ دعوی (د دویم مشتق ارزونه)

فرض کړی چي $f(x)$ د x_0 په یوی نه بېلېدونکي یا ځایي،نه بنوریدونکي نقطه کي دوه ځلي د اشتقا ق وړ ده.

(a) که چیری $f''(x_0)<0$ ، نو $f(x)$ په x_0 کي یو نسبي اعظمي لري.

(b) که چیر ی $f''(x_0)>0$ ، نو $f(x)$ په x_0 کي یو نسبي اصغري لري.

ثبوت: (a) د ټایلور دعوی د باقیماندي سره پکارولو، وروسته له دوه حدونو، مونږ لاسته راوړوچي

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)$$

چیرته چي $0<\theta<1$.

ځنګه چي x_0 یوه ځایي یا نه بېلېدونکي نقطه ده $f'(x_0)=0$.

$$\therefore\quad f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)$$

ځرنګه چي $f''(x_0)<0$ ده، نود x_0 یو مجاورت شتون لري، د کوم چي په هره نقطه کي $f''(x_0)<0$ ده، که چیری x_0+h ددي مجاورت یوه نقطه وي نو په یقیني دول سره $x_0+\theta h$ هم ددی مجاورت یوه نقطه ده . لدي سببه $f''(x_0+\theta h)<0$ ، او په پای کي $f(x_0+h)-f(x_0)<0$ ، ځکه چي $\frac{h^2}{2!}$ هر وخت مثبت دی. ځکه نو د x_0 څخه په غیر د x_0 په یو ټاکلی مجاورت کي د x_0+h په هري نقطي کي $f(x_0+h)<f(x_0)$. لدی سببه $f(x)$ په $x=x_0$ کي یو اعظمي قیمت لري.

(b) د (a) برخي سره یو شان دی.

مثال: د $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ تابع اعظمي او اصغري نقطي د $0\le x\le\pi$ په انتروال کي وڅیړئ.

حل: فرض کړئ چې

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\cos + \cos 2x+\cos 3x$$

$$=\cos 2x(1+2\cos x)$$

او

$$f''(x)=-\sin x-2\sin 2x-3\sin 3x$$

اوس $f'(x)=0$ ، کله چې $\cos 2x=0$ یا $1+2\cos 2x=0$

یعني کله چې $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$

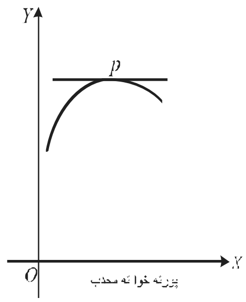
په اسانۍ سره لیدلی شو چې $f''(\frac{\pi}{4})>0$ ، $f''(\frac{3\pi}{4})<0$ او $f''(\frac{2\pi}{3})>0$.

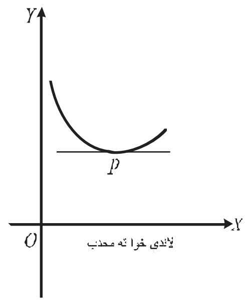
لدې سببه $f(x)$ په $x=\frac{\pi}{4}$ او $\frac{3\pi}{4}$ کې اعظمي اوپه $x=\frac{2\pi}{3}$ کې اصغري لري.

کوږوالی یا محدبوالی (CONVEXITY):- تعریف:

(a) یو منحني ته د P په یوه نقطه کې پورته خوا ته محدب(وتلی باراوتلی) وایي که چېرې د منحني یوه برخه د P په دواړو خواوو کې، که څه هم دا کوچنی وي، د P په نقطه کې د مماس نه لاندې واقع وي.

(b) یو منحني ته د P په یوه نقطه کې ښکته خواته محدب وایي که چېرې د منحني یوه برخه دP په دواړو خواوو کې، که څه هم دا کوچنی وي، د P په نقطه کې د مماس نه پورته واقع وي.





یادونه:

(1). په یوه اعظمي نقطه کې مماس افقي ده او منحني پورته خواته محدب ده. په دې ډول $f(x)$ په (a, b) کې پورته خواته محدبه ده ، که چېرې یواځې او تنها یواځې په (a, b) کې د ټول x لپاره $f''(x) < 0$ وي.

(2). په یوه اصغري نقطه کې مماس افقي دی او منحني ښکته خوا ته محدبه ده. پدې ډول f(x) په (a , b) کې ښکته خوا ته محدبه ده که چېر ی یواځې او تنها یواځې په (a, b) کې د ټول x لپاره $f''(x) > 0$ وي.

دانعطاف نقطه (Point of Inflection): یوې نقطې ته چېرې چې یومنحني د پورته خوا محدب والی د لاندې خواپه محدب والي باندې یا بالعکس تبدیل کړي د انعطاف نقطه وایي.

په دا ډول یوه نقطه کې $f''(x) = 0$ ، او $f''(x)$ خپله اشاره بدلوي، نو لدې کبله د انعطاف په یوه نقطه کې یو منحني خپل مماس قطع کوي، او مماس ته یو انعطافي مماس وایي.

۵.۴.۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ تابع د اکستریموم قیمتونو لپاره وارزوئ.

حل: فرض کړئ چې

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

او

$$f''(x) = 12x - 30$$

کله چي $6x^2 - 30x + 36 = 0$ ، $f'(x) = 0$

یعني

$$6(x-2)(x-3) = 0$$

یعني $x = 2,\ 3$

$$f''(2) = 24 - 30 = -6 < 0$$
$$f''(3) = 36 - 30 = 6 > 0$$

لدي امله $f(x)$ په $x = 2$ کي یواعظمي قیمت او په $x = 3$ کي یو اصغري قیمت لري.

۲. مثال: د $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6$ تابع لپاره نسبي اکستریموم نقطي پیدا کړئ.

حل:

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6$$
$$\therefore \quad f'(x) = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2$$
$$= 60x^2(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 60x^2(x-1)(x-2)$$
$$f''(x) = 240x^3 - 540x^2 + 240x$$
$$= 60x(4x^2 - 9x + 4)$$

کله چي $60x^2(x-1)(x-2) = 0$ ، $f'(x) = 0$

یعني، $x = 0,\ 1,\ 2$ او $f''(0) = 0$

نو پدی ځای کي د $x = 0$ په قیمت سره اعظمي یا اصغري قیمت شتون نلري.

$$f''(2) = 120\ (16 - 18 + 4) = 240 > 10$$

$f(x)$ په $x = 2$ کې اصغري ده او اصغري قیمت $f(2) = -10$ دی.

او

$$f''(1) = 60(4 - 9 + 4) = -60 < 0$$

$f(x)$ په $x = 1$ کې اعظمي ده او اعظمي قیمت $f(1) = 13$ دی.

۳. مثال: څرګند کړئ چې x^x په $x = e^{-1}$ کې یو نسبي اصغري قیمت لري.

حل : فرض کړئ چې $y = x^x$

$$\therefore \quad \ln y = x \ln x$$

په مشتق نیولو مونږ لاسته راورو چې

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^x \frac{1}{x} + (1 + \ln x) \cdot x^x (1 + \ln x)$$

$$= x^{x-1} + x^x (1 + \ln x)^2$$

کله چې $x^x(1 + \ln x) = 0$ ، $\frac{dy}{dx} = 0$

یعني، $1 + \ln x = 0$ یا $\ln x = -1 = \ln e^{-1}$

$$\therefore \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

په $x = \frac{1}{e}$ کې، $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$

لدي سببه x^{x} د $x=e^{-1}$ لپاره یوه نسبي اصغري لري.

٤. مثال: د $a\sec x+b\cos ecx$ لپاره نسبي اعظمي اونسبي اصغري نقطې پيدا کړئ.

حل: فرض کړئ چي

$$f(x)=\ a\sec x+b\cos ecx$$

$$f'(x)=a\sec x\cdot\tan x-b\cos ecx\cdot\cot x$$

$$f''(x)=a\sec x\cdot\sec^2 x+a\sec x\cdot\tan^2 x+b\cos ecx\cdot\cos ec^2x$$
$$+b\cos ecx\cdot\cot^2 x$$
$$=a\sec^3 x+a\sec x\tan^2 x+b\cos ec^3x+\cos ecx\cot^2 x$$

$f'(x)=0$ ، کله چي $a\sec x\cdot\tan x-b\cos ecx\cdot\cot x=0$ ،

يعني

$$\frac{a\sin x}{\cos^2 x}-\frac{b\cos x}{\sin^2 x}=0$$

يعني

$$a\sin^3 x-b\cos^3 x=0$$

يا $\tan^3 x=\frac{b}{a}$ ، نو $\tan x=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{3}}$

sin x او cos x دواړه يو شانتي اشاري لري.

لدي امله هر يو $\sin x=\frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}$ او $\cos x=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$

یا $\sin x = -\dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$ او $\cos x = \dfrac{-a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$

اوس کله چي sin x او cos x دواړه مثبت وي. $f''(x) > 0$ او $f(x)$ اصغري لري او نسبي اصغري قیمت

$$a\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}+b\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}+b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\,(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

دی او کله چي sin x او cos x دواړه منفي وي $f''(x) < 0$ او $f(x)$ اعظمي ده او نسبي اعظمي قیمت $-(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ دی.

٥. مثال: د $x=(y-1)(y-2)(y-3)$ منحني د انعطاف نقطي پیدا کړئ. [P.U.1987]

حل: پدې ځای کي

$$x=(y-1)(y-2)(y-3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{dx}{dy}=(y-1)(y-2)+(y-1)(y-3)+(y-2)(y-3)$$

$$=y^2-3y+2+y^2-4y+3+y^2-5y-6$$

$$=3y^2-12y+11$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=6y-12=6(y-2)$$

انعطاف یوې نقطي لپاره $\dfrac{d^2x}{dy^2}=0$.

یعني، $y = 2$ ، او که چېرې $y < 2$ ، $\frac{d^2x}{dy^2} < 0$

او که چېرې $2 < y$ ، $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$

له دې امله $y = 2$ او په دې ډول له (1) څخه $x = 0$ ، یعني، (0, 2) د انعطاف یوه نقطه ده.

٦ مثال: یو بزګر 50 تنه څاروي لري کوم چې بزګر هر تن د یوسلو شلو (120) روپیو په ګټه خرڅولی شي. که چېرې د څارویو ګټه په هفته کې 5 تنه خو دیوتن ګټه په هفته کې 4 روپۍ راولوېږي، کله کولای شي چې دخپل خرڅلاوڅخه اعظمي ګټه لاسته راوړي.

حل: فرضوو چې هغه څاروي x هفتې وروسته خرڅوي. د څارویو په واسطه لاسته راغلی وزن په x هفتو کې له 5 x تنه سره مساوي دی.

وروسته د x هفتو په هر تن کې ګټه (120 – 4x) روپیو سره مساوي دی.

دټول تولید P ګټه کله چې څاروي خرڅ شي:

$$P = (50 + 5x)(120 - 4x) = 6000 + 400x - 20x^2$$

ده.

$$\frac{dP}{dx} = 400 - 40x = 40(10 - x)$$
$$\frac{d^2P}{dx^2} = -40$$

کله چې $\frac{dP}{dx} = 0$ ، $x = 10$ او $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$

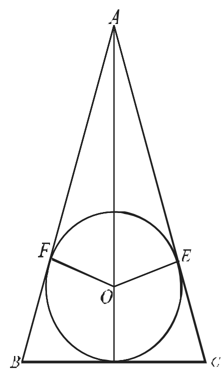
لدې امله P اعظمي دی، کله چې $x = 10$ وي.

پدې ډول څاروي باید 10 هفتې وروسته خرڅ کړل شي چې ترڅو اعظمي ګټه لاسته راوړي.

۷. مثال: ثبوت کړئ چې دیو متساوي الساقین مثلث خورا کوچنی محیط کوم چې د r په شعاع یوه دایره پکښې ایساره شوې ده $6r\sqrt{3}$ دی.

حل: فرض وو چي ABC مثلث AB = AC اضلاعو په لرلو يو متساوي الساقين مثلث دی، O دايسري شوي دايري مرکز او OE ، OD او OF په ترتيب سره CA ، BC او AB باندي عمودونه دي.

ښکاره ده چي AOD يو مستقيم خط دی.



فرض وو چي $O\hat{A}F = \theta$

نو

$$AF = AE = r\cos\theta$$
$$AO = r\operatorname{cosec}\theta$$
$$\therefore \quad AD = r + r\operatorname{cosec}\theta$$

نو

$$BD = DC = AD\tan\theta = (r + r\operatorname{cosec}\theta)\tan\theta$$
$$= r(\tan\theta + \sec\theta) = CE = BF$$
$$\therefore \quad AB = AC = r\cot\theta + r(\tan\theta + \sec\theta)$$
$$BC = 2BD = 2r(\tan\theta + \sec\theta)$$

P = د مثلث محیط $= 2AB + BC$

$$= 2r\cot\theta + 2r(\tan\theta + \sec\theta) + 2r(\tan\theta + \sec\theta)$$

$$= 2r\cot\theta + 4r(\tan\theta + \sec\theta)$$

$$\frac{dP}{d\theta} = -2r\operatorname{cosec}^2\theta + 4r\sec^2\theta + 4r\sec\theta\cdot\tan\theta$$

$$= 2r\{-\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{2}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\}$$
$$= \frac{2r}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\{-\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + 2\sin^3\theta\}$$
$$= \frac{2r}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\{2\sin^3\theta + 3\sin^2\theta - 1\}$$
$$= \frac{2r}{\sin^2\theta\cos^2\theta}(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)^2$$

$$\frac{d^2p}{d\theta^2} = 4r\cos ec^3\theta\cdot\cot\theta + 8r\sec^2\theta\cdot\tan\theta + 4r\sec^3\theta + 4r\sec^2\theta\cdot\tan^2\theta$$

د $\frac{dp}{d\theta} = 0$ څخه $\sin\theta = \frac{1}{2}$ او $\sin\theta = -1$ لاسته راځي.

$\sin\theta = -1$ د منلو وړ ندی.

لدې امله $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، یعنې $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ لپاره، $\frac{d^2p}{d\theta^2} > 0$

لدې سببه $\theta = \frac{\pi}{6}$ لپاره P اصغري ده او د هغه اصغري قېمت مساوي دی له:

$$2r\cot\frac{\pi}{6} + 4r(\tan\frac{\pi}{6} + \sec\frac{\pi}{6}) = 2r\sqrt{3} + 4r(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}})$$
$$= 2r\sqrt{3} + 4r\sqrt{3} = 6r\sqrt{3}$$

۴.۵ پوښتنې

۱. وښایاست چې $x^5-5x^4+5x^3-1$ تابع کله چې $x = 1$ شي یوه اعظمي لري، کله چې $x = 3$ شي یوه اصغري لري او کله چې $x = 0$ شي یوه هم نلري.

۲. د x^3-12x^2+45x تابع اعظمي او اصغري همدارنګه خورا لوی او خورا کوچني قیمتونه د $0 \le x \le 7$ په انتروال کې پیدا کړئ.

۳. د

$$(i) \qquad f(x)=\frac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x-4)}$$

$$(ii) \qquad f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$$

$$(iii) \qquad f(x)=3x^4-4x^3+5$$

تابعګانو نسبي اکستریموم نقطې معلومې کړئ.

٤. د $\sin x+\sin x\cos x$ تابع لپاره اعظمي یا اصغري نقطې پیدا کړئ. همدارنګه، د تابع اعظمي قیمت وټاکئ.

٥. وښایاست چې $\sin^p\theta\cdot\cos^q\theta$ څخه یوه اعظمي لاسته راځي، کله چې $\theta=\arctan\sqrt{\frac{p}{q}}$ وي.

٦. د

$(i) \quad \sin x\cos^2 x$ [P.U.1983]

$(ii) \quad \sin x\cos 2x \qquad (iii) \quad e^x\cos(x-a)$

تابعګانو لپاره نسبي اکستریموم نقطې پیدا کړئ.

۷. د $\frac{C^4}{r^2}=\frac{a^2}{\sin^2\theta}+\frac{b}{\cos^2\theta}$ منحني د وکتوري شعاعو اعظمي او اصغري پیدا کړئ. [P.U.1991]

۸. ثبوت کړئ چې د $(\frac{1}{x})^x$ اعظمي قیمت $e^{\frac{1}{e}}$ دی. [P.U.1990]

۹. د $\frac{\ln x}{x}$ لپاره په $0 < x < \infty$ کې نسبي اعظمي نقطه وټاکئ.

۱۰. د

$$(i) \quad y^2 = x(x+1)^2 \qquad\qquad (ii) \quad y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 1}$$

منحنيگانو د انعطاف نقطه پيدا کړئ.

۱۱. وښايئست د $y = e^x$ مخ هر چيرې پورته خوا ته دي.

۱۲. د $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ لپاره انټروالونه وټاکي د کومو لپاره چې منحني، (i). مخ پورته خواته ده، (ii). مخ ښکته خواته ده.

۱۳. 15 په دوه برخو باندې دارنگه وويشئ چې د يوې برخې مربع او د بلې برخې مکعب دضرب حاصل اعظمي وي.

۱٤. وښاياست چې د اعظمي مساحت په لرلو يومثلث کوم چې په يوې راکړشوې دايرې کې راچاپيره(محاط) شوی وي يو متساوي الاضلاع مثلث دي.

۱٥. وښايئست چې د اعظمي حجم او د راکړ شوې کرې ته مائيلي ارتفاع په لرلو يومخروط دراس زاويې نيمايي $\arctan\sqrt{2}$ ده.

۱٦. وښايئست چې د اعظمي حجم استواني لوړوالی چې د a په شعاع يوې کرې راچاپيره کړې $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ دی.

۱۷. يو مخروط چې د a په شعاع يوې کرې راچاپيره کړئ دی. څرگند کړئ کله چې د مخروط حجم اصغري وي، دهغه ارتفاع 4a اودهغه د راس د زاويې نيمايي قوس $arc\sin\frac{1}{3}$ ده.

۱۸. د خورا لويې سطحې په لرلود قايمې دايروي استوانې سطحه وټاکئ کومه چې د r په شعاع يوې کرې راچاپيره کړې دي.

۱۹. څرگند کړئ چې د راکړ شوې سطحې اود خورا لوی حجم په لرلو د يوې خلاصې استوانې لوړوالی دهغې له قاعدوي شعاع سره مساوي دی.

۲۰. فرض کړئ چې د پطرولو سوځیدل په یو ساعت کې د یوې موټوري کشتۍ د چلولو په وخت کې د هغې چټکتیا ته درې چنده تغیر ورکوي. وښایاست چې خورا ډیره اقتصادي چټکتیا (تیزي) کله چې په مخالف جهت یا لوري باندې په ساعت کې c km ځي په ساعت کې $\frac{3}{2}c\,km$ ده.

۲۱. یو محلي یا لیني اورګاډی 1200 مسافر لري چې په کلدارو د هر یوه کرایه 2 ده. د هریوه یو پیسا (Pasisa) لپاره کرایه راښکته شویده، 10 نور مسافر په اورګاډي کې سواره شول. څومره کرایه چارج کړي چې ګټه یې اعظمي وي. [P.U.1989]

۲۲. یو بې سرپوښه مربعي قاعدې په لرلو یو مستطیلي بکس 1246 سانتي متر مکعب حجم لري. د قاعدې د موادو د هر سانتي متر مربع قیمت 3 کلداری، او د څنډو د موادو د هر سانتي متر مربع قیمت 2 کلداری دی. بکس باید کوم ابعاد ولري چې د هغه قیمت اصغري شي.

۵ . ۵ . ۱ ځانګړې (خاصې) نقطې

تعریف: په منحني باندې نقطو ته په کوموکې چې په منحني باندې له یوه مماس څخه زیات رسمېدلای شي ځانګړې نقطې وایي.

څوځلیزه (مضاعف) نقطه (Multiple Point): له یوې نقطې څخه له کومې چې د منحني r ځانګې(شاخونه) تېرې شي د r - ام ترتیب د څوځلیزې نقطې په نوم یادېږي، همدا شانتې د یو منحني د r - ام ترتیب یوه څوځلیزه نقطه r مماسونه لري.

یوې څوځلیزې نقطې ته ځانګړې نقطه هم وایي .

دوه ګونې نقطه (Double Point): یوې نقطې ته له کومې څخه چې د یوې منحني دوه ځانګې تېرېږي دوه ګوني نقطې وایي. ددریم ترتیب یوې څوځلیزې نقطې ته درې ګوني نقطه هم وایي.

غوټه (پرسوب)، څوکه، یوه بېله شوې نقطه (Node,Cusp,an Isolated Point):

یوه منحني په دوه ګوني نقطه کې دوه مماسونه لري، د هرې یوې ځانګې لپاره یو، دوه ګوني نقطه کیدای شي یوپړسوب یا غوټه وي، که چېرې دوه مماسونه مختلف او حقیقي وي.

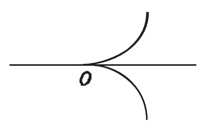
دوه ګوني نقطه به یوه څوکه (Cusp) یا یوه بېله شوې (Isolated) نقطه وي که دوه مماسونه یو په بل منطبق وي یا خیالي وي.

۵ . ۵ . ۲ دڅوکو په ټولګیو باندي ویشنه (طبقه بندي)

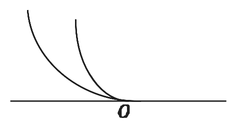
په یوه څوکه کې د منحني دوه څانګې یو شریک مماس اوپه پایله کې یو شریک نارمل لري. څوکه ځانګړي یا دوه ګوني بولي که په پوره ډول د منحني دګډ(شریک)نارمل په یوې خوا یا په دواړو خواوو کې واقع وي. همدا شانتې څوکه د لومړی ډول یا دویم ډول څخه یې بولي که دواړه څانګې د ګډ مماس په مختلفو یا یوې خوا ته واقع وي. پدې ډول موږ د څوکو پنځه ډولونه لرو ، یعنې ،

۱. د لومړي ډول ځانګړي څوکه: د لومړي ډول یوه ځانګړی څوکه یوه دوه ګوني نقطه ده که چیرې په هغې نقطه کې منحني د نارمل یوې خواته په پوره ډول پروت وي او دواړه څانګې دګډ مماس په بېلا بېلو خواو کې پرتې وي.

۲. د دویم ډول ځانګړي څوکه: د دویم ډول ځانګړي څوکه یوه دوه ګوني نقطه ده چیرته چې منحني د نارمل یوې خوا ګډي په پوره ډول پروت وي او دواړه څانګې دمماس په ورته خوا باندې پرتې دي.



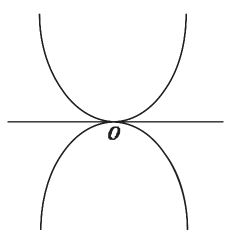
۱. د لومړي دول ځانګړي څوکه



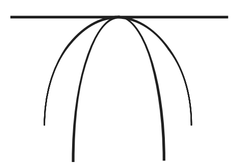
۲. د دویم ډول ځانګړي څوکه

۳. د لومړي ډول دوه ګوني (یا دوه برخه ایزه) څوکه: د لومړي ډول یوه دوه برخه ایزه څوکه دوه برخه ایزه نقطه ده چیرې چې منحني د نارمل دواړو خواوو ته پروت وي او دواړه څانګې د مماس په بېلابېلو خواو باندې پرتې وي.

۴. د دویم ډول دوه ځلیزه څوکه: دویم ډول یوه دوه برخه ایزه څوکه دوه ګوني نقطه ده چیرته چې منحني د نارمل دواړو خواوو ته پروت وي او دواړه څانګې د مماس یوې خواته پرتې وي.

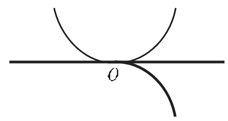


۳. (د لومړي ډول دوګوني څوکه)



۴. (د دویم ډول دوه ګوني څوکه)

۵. اسکو (Oscu) – د انعطاف نقطه: د اسکو- انعطاف نقطه یوه دوه خلیزه نقطه ده چیرته چې منحني د نارمل دوارو خواګانو ته پروت دی او ځانګې د مماس مخالف لور ته د نارمل یوې لورته اود مماس ورته لورته د نارمل بل لورته پرتې وي.



۵. د اسکو-انعطاف نقطه

۵ . ۵ . ۳ په مبدا کې مماسونه

دعوی: که چیرې یوه نسبتي الجبري منحني له مبدا څخه مستقیماً تیر شي، د مماس معادله یا په مبدا کې د هماغه منحني مماسونه د صفر سره د منحني په معادله کې د ټیټې درجې دحدونو په مساوی کولو لاسته راځي.

ثبوت: دیو نسبتي الجبري منحني دعمومي معادلې شکل کوم چې له مبدا څخه مستقیماً تېرېږي په لاندې ډول ده:

$$(a_1x+a_2y)+(b_1x^2+b_2xy+b_3y^2)-(c_1x^3+.....)+.....=0 \quad .... (١)$$

په مبداکې منحني ته د یومماس معادله

$$y = mx \quad ....(٢)$$

ده.

فرض وو چې P(x, y) په منحني باندې کومه نقطه ده، نو د منحني د OP وتر میلان په ځرګند ډول $\frac{x}{y}$ دی. کله چې P مبدا ته نژدې کېږي د OP وتر په مبدا (O)کې د منحني یومماس ته میلان کوي.

لدې امله $m = \lim \frac{y}{x}$ کله چې $x \to 0$.

په x باندې د (1) په وېشلو او لیمټ نیولو کله چې $x \to 0$، مونږ لاسته راوړوچې

$$a_1 + a_2m = 0 \quad ....(٣)$$

له (٢) او (٣) څخه د m په لرې کولو مونږ لاسته راوړو چې:

$$a_1x + a_2y = 0 \quad ....(٤)$$

په مبدا کې د مماس د معادلې په څېر. دا کولی شو چې د صفر سره دمنحنې په (۱) معادله کې دخورا ټیټې درجې (لومړی درجه) دحدونو په مساوي کولو لاسته راوړو.

که a_1 او a_2 دواړه صفر وي، نو (۱) معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$(b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2) + (c_1x^3 + ...) + ... = 0 \qquad ....(۵)$$

په x^{-2} باندې د (۵) په ویشلو او په لیمټ نیولو کله چې $x \to 0$ ، مونږ لاسته راوړو چې

$$b_1 + b_2m + b_3m^2 = 0 \qquad ....(۶)$$

دا د m یوه دویمه درجه معادله ده، او، لدې کبله، د m دوه قیمتونه لاسته راوړو. لدې امله په مبدا کې دوه مماسونه دي. په (۲) او (۶) کې د m په لرې کولو سره ، مونږ د دوه مماسونو ګډه معادله لکه،

$$b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 = 0$$

لاسته راوړو، کومه چې کولی شو د صفر سره د منحنې په (۱) معادله کې د خورا ټیټې درجې (دویمه درجه) دحدونو دمساوي کولو پواسطه لاسته راوړو.

که چیرې b_1, b_2 او b_3 ټول صفر وي، نو په هغه صورت کې د منحنې په معادله کې دویمه درجه حدونه شتون نلري. دپورتنیو کړنو په شان دا ښودلی شو چې د مماسونو معادله د صفر سره د منحنې د معادلې د ټیټودرجو د حدونو په مساوي کولو سره لاسته راځي. په پایله کې دعوی ثبوت شوه.

پایله: مبدا په یوه نسبتي الجبري منحنې باندې یوه څوځلیزه (متعدده) نقطه ده. یوازې که د منحنې په معادله کې ثابت حد او د لومړی درجې حد شامل نه وي.

یادونه: د یو منحنې یوې جلا شوې نقطې ته ځینې وخت د منحنې د مزدوج نقطه وایي.

مثال: وښایاست چې مبداء، د $y^2 = ax^2 + bx^3$ په منحنې باندې یوه غوټه، څوکه (راس) یا یوه بیله (جلا) شوې نقطه لکه د a په مطابق چې مثبت، صفر یا منفي وي ده.

حل: په مبدا کې منحنې ته د مماسونو معادله $y^2 = ax^2$ ده. همدارنګه په مبدا کې د منحنې دوه څانګې(شاخونه) $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx^3}$ دي.

(۱) $a > 0$ ، کله چې x دعدد له پلوه کوچنی وي، د $ax^2 + bx^3$ علامه د ax^2 په شان ده، کومه چې مثبت ده که څه هم چې x مثبت یا منفي وي. له دې امله د منحنې دوه څانګې په مبدا کې حقیقي دي او مماسونه له دوی ته توپیر لري، یعني،

$y = \sqrt{a}\,x$ او $y = -\sqrt{a}\,x$، لدې سببه مبدا يوه غوټه ده.

(۲) $a = 0$، پدې حالت کې د منحني دواړه څانګې، يعنې، $y = \pm\sqrt{bx^3}$ حقيقي دي او مماسوه دوی سره منطبق دي. يعنې ، $y = 0$. لدې امله مبدا يوه څوکه ده.

(۳) $a < 0$، پدې حالت کې دوه مماسونه موهومي دي، لدې امله مبدا جلا يا د مزدوج يوه نقطه ده.

۵. ۴.۵ دڅو ځليزو(مضاعف) نقطو د شتون لپاره شرطونه

فرض کړئ چې $f(x,y) = 0$ د يو منحني معادله ده، نظر x ته ددې معادلې په ديفرينشل نيولو، لاسته راوړو چې

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{............(۱)}$$

چېرې چې $f = f(x,\ y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ د y په ثابت ساتلو سره د $f(x,y)$ معمولي مشتق دی او $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ د x په ثابت ساتلو د $f(x,y)$ معمولي مشتق دی.

په څو ځليزه نقطه کې، منحني لږترلږه دوه مماسونه لري او لدې امله $\dfrac{dy}{dx}$ (د مماس ميل) لږترلږه په هماغو نقطو کې دوه قيمتونه لري. (۱) معادله د $\dfrac{dy}{dx}$ يو واحد قيمت ټاکئ، که چېرې $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ او $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ دواړه پدې نقطه کې له منځه لاړې نه شي. لدې امله اړين او د بسنې وړ(لازمي اوکافي) شرطونه په $f(x,y) = 0$ باندې د (x,y) کومې نقطې لپاره چې څو ځليزه نقطه وي په لاندې دول دي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad ، \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

پدې دول د $f(x,y) = 0$ په يو منحني باندې د څو ځليز نقطو د پيداکولو لپاره، مونږ بايد د $f(x,y) = 0$، $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$، $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ درې واړه معادلې په يووخت کې حل کړو.

نظر x ته د (۱) په د يفرنيشيل نيولو، مونږ لاسته راوړو چې:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 f}{dx^2}=0$$

په یوه څو ځليزه نقطه کې $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

د $\frac{dy}{dx}$ قيمتونه په دارنګه يوی نقطې کې وي، نولدې کبله، د

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{dy}{dx})^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\frac{dy}{\partial x})+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \qquad \text{.......... (2)}$$

معادلې په واسطه ورکول کېږي.

پدې ډول د (x,y) نقطه به دوه ځليزه (دوه ګونی) نقطه وي که چېرې

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ او $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ټول په يو وخت په يوه نقطه کې له منځه تلونکي نه وي. سر بېره پدې دا

ممکن يوه غوټه، يوه څوکه يا دمزدوج يوه نقطه لکه د $\frac{dy}{dx}$ د قيمتونو په مطابق چې حقيقي اوځانګړي دي، مساوي يا موهومي وي، يعنې، لکه د

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})^2-(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})>0 \qquad \text{، = 0 يا 0 <}$$

په مطابق.

۵ . ۵ . ۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: لاسته راوړئ چې مبدا د $a^2(x^2-y^2)=x^2y^2$ په منحني باندې يا يوه غوټه يا يوه څوکه ده.

حل: صفر سره د تر ټولو ټيټې درجې حدونو په مساوي کولو، مونږ په مبدا کې مماسونه لاسته راوړو.

ځرنګه چې په مبدا کې مماسونه $a^2(x^2-y^2)=0$ دي، یعني

$$(x-y)(x+y)=0$$

یا $x-y=0$ یا $x+y=0$

ځرنګه چې دغه مماسونه په مبدا کې حقیقي او ځانګړي دي، نو مبدا یوه غوټه ده.

۲. مثـال: د $x^3+2x^2+2xy-y^2+5x-2y=0$ پـه منحنـي بانـدي د څـو ځلیـزه نقطـو حالـت او ځانګړنه(خاصیت) پیداکړئ. [P.U.1989]

حل: فرضوو چې

$$f(x,y)=x^3+2x^2+2xy-y^2+5x-2y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+4x+2y+5, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2x-2y-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+4,$$

او

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

د $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ او $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ په پام کې نیولو سره لاسته راځي چې

$$3x^2+4x+2y+5=0 \qquad \text{.........}(i)$$

او

$$2x-2y-2=0,$$

یا

$$x-y-1=0 \qquad \text{..........}(ii)$$

د (i) او (ii) په حلولو مونږ د (2- ,1-) کیدوني (ممکنه) دوه ځلیزه نقطه لاسته راوړو، چې دا په راکړ شوې معادلې کې صدق کوي.

څرنګه چې دا یوازنې ځانګړې څو ځلیزه نقطه ده. په $(-1,-2)$ کې ،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \text{ ،} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

او

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 2^2 - (-2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

$\therefore$ د $(-1, 2)$ نقطه یوه څوکه (راس) ده.

۳. مثال: د $y^3 = (x-a)^2(2x-a)$ په منحني باندې د راس (یا څوکې) ځانګړنه لاسته راوړئ.

حل: د منحني معادله کیدای شي چې دارنګه ولیکل شي

$$f(x, y) = y^3 - 2x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x^2 + 10ax - 4a^2 \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ او $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ څخه لاسته راځي چې

$$6x^2 - 10ax + 4a^2 = 0$$

او $3y^2 = 0$

ددغو معادلو په حل کولو مونږ ګورو چې $(a, 0)$ او $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ ممکنه څو ځلیزه نقطې دي. یوازې د $(a, 0)$ نقطه په راکړ شوې منحني باندې پرته ده.

څرنګه چې $(a, 0)$ یوازینۍ څوځلیزه نقطه ده. د $(a, 0)$ ته د مبدا په انتقالو $x = X + a$ ، $y = Y$ په لیکلو سره، (1) معادله لاندې بڼه غوره کوي:

$$Y^3 = X(2X + a)$$

په نوي مبدا کې مماس $X^2 = 0$ دی.

څرنګه چې مماسونه سره منطبق دي، نو نوي مبدا، يعني، $(a, 0)$ يو څوکه (راس) ده.

دمنحني ځانګې چې له نوي مبدا څخه تېرېږي $2X^3$ (له منځه ورلو)

$$aX^2 = Y^3$$

دي. يعني ،

$$X = \pm\sqrt{\frac{Y^3}{a}}$$

د X قيمتونه يواځې دY ديوې علامې لپاره حقيقي دي، يعنې، مثبت. ځکه نو نوي مبدا يوه ځانګړې څوکه (راس) ده.

همدا شانتې د y دهر ځانګړي قيمت لپاره x مخالفې علامې لري، يعنې، منحني د Y نوي محور په دوارو خواوو باندې شتون لري، د ځايي څـوکې (Cuspidal) مماس. د لومړي ډول څوکه ده.

لدې سببه د (a , 0) نقطه په منحني باندې د اول ډول يوه ځانګړې څوکه ده .

۵.۵ پوښتنې

۱. د $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$ په منحني باندی د $(-1,-2)$ په نقطه کې د مماس معادله پيدا کړئ، او وښاياست چې دا نقطه يوه څوکه ده.

۲. څرګند کړئ چې آيا په لاندېنيو منحنيګانو باندې مبدا يوه غوټه، يوه څوکه يايوه ځانګړې (ياييله شوې) نقطه ده.

$$(i) \quad x^2(b-x)^2 = y^2(a^2 - x^2) \qquad (ii) \quad (x^2 + y^2)(2a - x) = b^2x^2$$

۳. په لاندېنيو منحنيګانو باندې دځو ځليزه نقطو حالت او ځانګړنه وټاکئ.

$$(i) \quad x^4 + y^3 - 2x^3 + 3y^2 = 0$$

$$(ii) \quad (2y + x + 1)^2 - 4(1 - x)^5 = 0$$

$$(iii) \quad x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0$$

٤. په لاندېنیو منحنیګانو باندې د څوکو ځانګړنه لاس ته راوړئ.

$$(i)\quad y^2 = x^3 \qquad (iii)\quad x^2(x-y)+y^2=0$$

$$(ii)\quad (y-4x^2)^2 = x^7 \qquad (iv)\quad y^2 - x^4 = 0$$

٥. د مماسونو معادلې د لاندېنیو منحنیګانو په څو ځلیزه نقطو کې لاسته راوړئ.

$$(i)\quad (y-2)^2 = x(x-1)^2$$

$$(ii)\quad x^4 - 4ax^3 - 2ay^3 + 4a^2x^2 + 3a^2y^2 - a^4 = 0$$

٦. وښایاست چې $y^2 = 2x^2y - x^3y + x^3$ منحني د لومړي ډول یوه ځانګړې څوکه په مبدا کې لري.

۵ . ۶ . ۱ دمنحنیګانو رسمول

مونږ به اوس د منحنیګانو د رسمولو مسئله په پام کې ونیسو یعنې، د منحنیګانو اټکلي شکل لاسته راوړل د هغوی د قایمو مختصاتو له معادلو څخه، دا به ښکاره شي چې د منحنیګانو معادلې د x ، y یا r لپاره په عمومي ډول دحل کولووړ دي. ځینې معادلې چې د x یا y لپاره د حل کولو وړ نه وي ښایي چې، قطبي سیستم ته د قایمو مختصاتو په تبدیلونې د r لپاره د حل کولو وړتیا ولري. ددې لپاره چې ګراف رسم کړو نو مونږ به د منحنیګانو لاندېنې ځانګړتیاوې وارزو.

۱. **انډولتوب (تناظر):** د لاندېنیوقوانینو په مرسته معلومات لاسته راوړو چې منحني د کوم یوخط په شاوخواکې متناظر دي.

(۱) منحني د x دمحور په شاوخوا متناظرده که چېرې د منحني معادله څه وخت چې د (x, y) پرځای $(x, -y)$ونج شي بدلون ونه کړي. یعنې، کله چې د منحني معادله یواځې د y جفت طاقتونه ولري.

(۲) منحني دy دمحور په شاوخوا کې متناظر ده. که چېرې د منحني معادله کله چې د (x, y) پرځای $(-x, y)$ ونج شي بدلون ونه کړي.

(۳) منحني متضادو ربعو ته متناظره ده که چېرې د منحني معادله څه وخت چې د (x, y) پرځای $(-x, -y)$ ونج شي بدلون ونه کړي.

(۴) منحني د $y = x$ خط په شاوخوا کې متناظر ده که چېرې د منحني معادله څه وخت چې د (x, y) پرځای (y, x) ونج شي بدلون ونه کړي.

۲. مبدا: معلوم کړئ چې په هر حال کې منحني له مبدا څخه مستقیماً تېرېږي. پدې حالت کې دا کېدای شي،چې په هماغې نقطه کې د مماس یا د مماسونو معادلې لاسته راوړئ. کـه چېرې هلتـه لـه یوه ممـاس څخـه ډېر پدې ډول ممـاسونـه شتون ولري نوداڅوځلیزه نقطه ده، دهغې ځانګړنه ځرګنده کړئ.

۳. مجانبونه: د قایمو مختصاتو سره موازي مجانبونـه اومائیل مجانبونو پیدا کړئ، همدارنګه هغه نقطې پیدا کړئ په کومې چې مجانبونه له منحني سره قطع کوي.

٤. د محورونو سره تقاطع: د منحني د تقاطع نقطې د قایمو مختصاتو له محورونو سره او په دغو نقطو کې ممـاسونه او وروسته لدې ددغو نقطو ځانګړنه پیدا کړئ.

۵. سیمې چې د منحني پورې اړه نلري(برخې ندي): هغه سیمې معلومې کړئ چې منحني پکې نه واقع کېږي. دارنګه سیمی په عمومي ډول د یو متحول لپاره د معادلې د حلولو پواسطه پـه نـورو حدونو کـې لاس تـه راځـي اود یومتحول دقیمتونو د سیټ پیدا کول کوم چې په خیال کې جوړېږي، یعنې ، که چېرې y خیالي وي کله چې $b > x > a$، نو منحني د $x = a$ او $x = b$ خطونو په منځ کې نه واقع کېږي.

۶. د y مشتق: $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړئ او وګورئ لکه څنګه چې x تغیر کوي y څومره تغیر کوي. وګورئ چې تابع

ډېرېښت مومي یا کمښت مومي په همدی ډول $\frac{dy}{dx} > 0$ **یا** $\frac{dy}{dx} < 0$.

همدارنګه هغه نقطې لاس ته راوړئ چېرې چې مماس د x له محور سره یا د y له محور سره موازي وي. دا کیدای شـي چـې $\frac{dy}{dx}$ د صفرسره یـا لایتناهي سره پـه مساوي کولو تر سره شـي او د x او y پوري اړونـد قیمتونه واخلي.

۷. نوري ځانګړتیاوي: (i) د انعطـاف نقطـې او څـو ځلیزه نقطـې پیدا کـړئ، کـه چېرې شتون ولـري، د دوی ځانګړتیا مطالعه کړئ. (ii) په قطبي سېستم یې بدله کړئ که چېرې له راکړ شوو قـایمو مختصـاتو څخـه سـاده کېږي.

۲.۶.۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $y^2(a^2+x^2) = x^2(a^2-x^2)$ منحني رسم کړئ. [P.U.1984,85]

حل: مونږ د منحني په برخه کې لاندې ځانګړې حالتونه په پام کې نیسو:

(۱) دا دواړه محورونو ته متناظره ده.

(۲) دا مستقیماً له مبدا څخه تېرېږي اوپه هغه ځای کې $y=\pm x$ دوه مماسونه دي لدې امله مبدا یوه غوټه ده.

(۳) دا د x محور په، $(a,0)$، $(0,0)$ او $(-a,0)$ کې قطع کوي. دا د y محور یواځې په $(0,0)$ کې قطع کوي. مماسونه په $(0,0)$ او $(-a,0)$ کې په ترتیب سره $x=a$ او $x=-a$ دي.

(۴) $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{a^4-2a^2x^2-x^4}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ کومه چې صفر کېږي کله چې $a^4-2a^2x^2-x^4=0$، یعني کله چې $x^2=(-1\pm\sqrt{2})a^2$.

نو یواځېنی د x حقیقي قیمتونه د کومو لپاره چې $\frac{dy}{dx}$ محوه کېږي $\pm\sqrt{(-1\pm\sqrt{2})}\,a$ دي.

(۵) دا کوم مجانب نلري.

(۶) د y لپاره د معادلې په حل کولو، موږ لیکلی شو چې،

$$y^2=\frac{x^2(a^2-x^2)}{a^2+x^2}$$

یا

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$$

موږ پوهیږو ددې لپاره چې y حقیقي وي، نو خامخا a^2-x^2 غیر منفي دی او لدې سببه x خامخا د $-a$ او a په منځ کې واقع ده. ځکه نو ټول منحني د $x=a$ او $x=-a$ خطونو په منځ کې واقع دی.

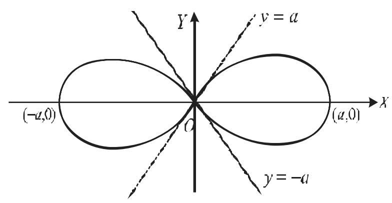
ځرنګه چې منحني دواړو محورونو ته متناظر دی، موږ لومړی په پام کې نیسو اود منحني یوه برخه په لومړی ربع کې رسموو، چیرته چې x,y مثبت دي او

$$y=x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$$

کله چې $x=0$، $y=0$.

کله چې x ډېرښت مومي، 0 څخه پیلیږي، نو y، کوم چې مثبت دی هم ډېرښت مومي او تر $x=(\sqrt{-1+\sqrt{2}})a$ پورې ډېرښت دوام کوي، چیرته چې $\frac{dy}{dx}=0$، یعني، چېرته چې د مماس میل د x له محور سره موازي دی. ځرنګه چې $y=0$ کله چې $x=a$، موږ پوهیږو کله چې x له $(\sqrt{-1+\sqrt{2}})a$

ځخه ترa پورې بېربښت مومي، y کمښت مومي. منحني د دواړو محورونوپه شاوخوا متناظر دی، د دې مکمل شکل لاندې ښودل شوی دی.



۲. مثال: منحني رسم کړئ، چې دهغه معادله ($x^2y^2 = a^2(x^2+y^2)$) ده.

حل: مونږ د منحني په هکله لاندې ځانګړې حالتونه په پام کې نیسو:

(۱) دا دواړو محورونو او $y = x$، $y = -x$ خطونو ته متناظر دی.

(۲) دا له مبدا ځخه مستقیماً تیرېږي او هلته مماسونه $x^2 + y^2 = 0$ دي کوم چې موهومي دي. لدې امله مبدا په منحني باندې یوه بېله شوې نقطه ده.

(۳) دا د مختصاتو محورونه یوازې په $(0,0)$ کې قطع کوي.

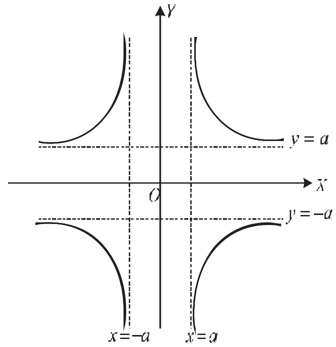
(۴) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-a^3}{\sqrt{x^2-a^2}}$، کوم چې د $x > a$ تولو قیمتونو لپاره منفي دی. لدې امله y په (a,∞) کې په یونواخت ډول کمښت مومي.

(۵) دا څلور مجانبونه لري $x = \pm a$ او $y = \pm a$.

(۶) د y لپاره په حل کولو، مونږ لیکلای شوچې $y = \pm\dfrac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$

مونږ پوهیږو ددی لپاره چې y حقیقي وي، نو باید $x^2 - a^2$ غیر منفي وي او لدې سببه x باید د $-a$ او a په منځ کې واقع نه شي. ځکه نو د منحني یوه برخــه هم د $x = a$ او $x = -a$ خطونو په منځ کې واقع نده. په ورته ډول د x لپاره په حل کولو، مونږ پوهیږو چې د منحني یوه برخه هم د $y = a$ او $y = -a$ خطونو په منځ کې واقع نده.

څرنګه چې منحني دواړو محورونو ته متناظر دي، مونږ لومړی منحني په لومړنی ربع کې رسموو او بیا دده انعکاس په دواړو محورونو کې رسموو. لدې امله منحني دلاندې شکل په شان ښودل شویدی.



۳. مثال: د $y^2(x-a)=x^2(x+a)$ منحني رسم کړئ.

حل: مونږ د منحني په هکله لاندې ځانګړتیاوې په پام کې نیسو.

(۱) دا یواځې د x محور ته متناظر دی.

(۲) دا له مبدا څخه مستقیماً تیرېږي او هلته مماسونه $x^2+y^2=0$ دي، کوم چې موهومي دي. لدې امله مبدا په منحني باندې یوه بیله شوې نقطه ده.

(۳) دا د x محور په $(-a,0)$ او $(0,0)$ نقطو کې قطع کوي د y محور یواځې په $(0,0)$ کې قطع کوی. په $(-a,0)$ کې مماس $x=-a$ دی.

(۴) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-ax-a^2}{(x-a)^{\frac{3}{2}}(x+a)^{\frac{1}{2}}}$ کوم چې کله $x^2-ax-a^2=0$ وي له منځه ځي

یعني، کله چې $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a$

د $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}a$ لپاره، کوم چې د a او −a په منځ کې واقع کېږي، او y حقیقي نه دی.

(۵) دا دری مجانبونه لري یعنې $y=\pm(x+a)$ او $x=a$

(۶) د y لپاره په حل کولو مونږ لیکلی شو چې:

$$y^2=x^2\frac{x+a}{x-a}=x^2\frac{x^2-a^2}{(x-a)^2}$$

$$y = \pm x \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - a}$$

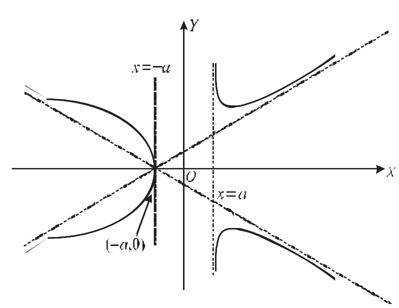
مونږ پوهيږو ددی لپاره چې y حقيقي وي باید $x^2 - a^2$ غیر منفي وي او لدې کبله x باید د $-a$ او a په منځ کې واقع نه وي. لدې امله د منحني يوه برخه هم د $x = a$ او $x = -a$ په منځ کې واقع نه ده.

منحنې د x محور ته متناظر دی، مونږ هغه برخه په پام کې نيسو چې په دوه لومړنيو ربعو کې واقع وي، که چېرې y مثبت وي، نو مونږ لرو چې

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x + a}{x - a}}$$

چېرې چې مونږ + او - اشارې د x مطابق چې مثبت یا منفي دی په پام کې نيسو. کله چې، $x = -a$، $y = 0$. همدارنګه، $x = -a$ د$(-a, 0)$ په اړونده نقطه کې مماس دی. د $x \in (-a, -\infty)$ لپاره $\frac{dy}{dx}$ صفر نه دی او$y = -(x + a)$ يو مجانب دی، مونږ د منحني هغه برخه ترلاسه کووچې په دويمه ربع (حجره) کې ده. د x قيمتونو لپاره چې $-a$ او a په منځ کې واقع دي، y حقيقي نه دی.

ددې لپاره چې $x = a$ يو مجانب دی او $\frac{dy}{dx} = 0$ دی، د $x = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2}$ لپاره، مونږ وينو چې y کمښت مومي کله چې x دتزایدپه لورله a څخه تر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ پورې دېرښت ومومي. څرنګه چې x له $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ څخه تر ∞ پورې دېرښت مومي، y کمښت مومي او $y = x + a$ يو بل مجانب دی. مونږ د منحني هغه برخه لاس ته راوړو کومه چې په لومړی حجره کې ده. لدې امله منحني همغه شان په شکل کې ښودل شوی ده.



٤. مثال: د $3ay^2 = x(x-a)^2$ پوسیله راکړ شوي منحني رسم کړئ.

حل: مونږ د منحني په باره کي لاندي ځانګړتیاوي په پام کي نیسو،

(۱) دا یواځي x محور ته متناظر دی.

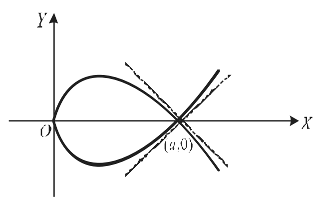
(۲) دا مستقیماً له مبدا څخه تیریږي او هلته مماس x = 0 دی.

(۳) که چیري د x محور په (a, 0) او (0, 0) کي قطع کړي. دا د y محور یواځي په (0, 0) کي قطع کوي.
په (a, 0) کي مماسونه $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ دي. نو (a, 0) یوه غوټه ده.

(۴) نوموړی منحني مجانبونه نلري.

(۵) د y لپاره په حل کولو، مونږ لاسته راوړو چي $y = \pm\frac{\sqrt{x}(x-a)}{\sqrt{3a}}$

کله چي $x < 0$، y موهومي دی. لدې سببه، ټول منحني د y محور ښي خواته واقع دی. د منحني شکل په دی لاندي ډول ښودل شوی دی.



٥. مثال: د $y^2(a-x) = x^3$ منحني رسم کړئ.

حل: مونږ د منحني په هکله لاندي ځانګړتیاوي په پام کي نیسو.

(۱) دا د x محور ته متناظر دی.

(۲) دا مستقیماً له مبدا او $y^2 = 0$ څخه تیریږي، یعني، y = 0 په مبدا کي دوه منطبق مماسونه دي. لدې امله مبدا یوه څوکه ده.

(۳) دا د مختصاتوله محورونو سره یواځي په مبدا کي مخامخ کیږي.

(۴) x = 0 د منحني یکي یو مجانب دی.

(۵) د y لپاره په حل کولو، مونږ لاسته راوړو چي

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$$

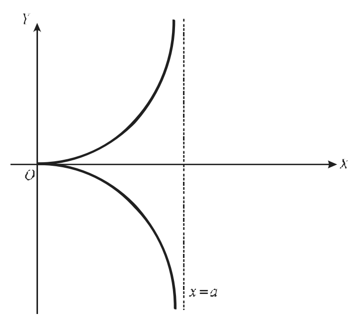
مونږ پوهيږو چي y حقيقي دی کله چي x د a او 0 په منځ کي واقع وي. لدي امله ټول منحني د x = 0 او x = a خطونو په منځ کي واقع دی.

(۶)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{3a}{2} - x\sqrt{x}\right)}{(a-x)^{\frac{3}{2}}}$$

هغه چي له منځه تلونکي ده کله چي $x = \frac{3a}{2}$ يا 0 وي. خو $x = \frac{3a}{2}$ د x د منلو وړ قيمتونو له ساحی څخه بهر ده. ځکه نو $\frac{dy}{dx}$ د x په نه منونکي قيمت کي بي له x = 0 څخه له منځه ځي.

ددغو ټولو حقايقو په راغونډولو، مونږ پوهيږو چي د منحني بڼه لکه په لاندي شکل کي ښودل شويدی.



٦. مثال: $x^3 + y^3 = 3ax^2$، $0 < a$ منحني رسم کړئ.

حل: د منحني په هکله لاندي ځانګړتياوي په پام کي نيسو:

(۱) دا نه د مختصاتو محورونو ته نه د $y = x$ خط ته متناظر دی.

(۲) دا مستقیماً له مبدا او $x^2 = 0$ څخه تېرېږي، یعني، $x = 0$، په مبدا کې دوه په یوبل منطبق مماسونه دي. لدې سببه مبدا یوه څوکه ده.

(۳) دا د x محور په $(0,0)$ او $(3a,0)$ کې قطع کوي. ممـاس پـه $(3a,0)$ کې $x = 3a$ ده. داد y محور یواځې په مبدا کې قطع کوي.

(۴) $y + x = a$ د هغه یکې یومجانب دی اودمنحني تقاطع له مماس سره د $(\dfrac{a}{3}, \dfrac{2a}{3})$ په نقطه کې ده.

(۵) x او y دواړه منفي کېدلی نشي.

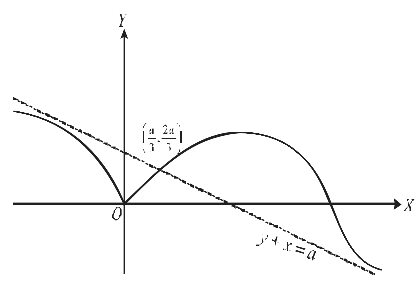
(۶) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2a-x)}{y^2}$ کله چې $x = 2a$ له منځه تلوونکې ده.

د y لپاره په حل کولو مونږ لاسته راوړو چې، $y = [x^2(3a-x)]^{\frac{1}{3}}$.
که چېرې $x = 0$ ، نو $y = 0$ او د y محور هغه ځای کې مماس دی.

که چېرې x منفي وي، y مثبت دی او په ثابت ډول هغه لوري ته ځنګه چې x په عددي ډول ډېرېږي، ډېرېښت مومي، یعني، لکه چې x له 0 نه تر $-\infty$ بدلون کوي.

که چېرې $0 < x < 3a$، نو $0 < y$ او که چېرې x له 0 څخه ډېرښت وکړي، y ډېرښت مومي، y به د x د ډېرېدو سره سم تر $x = 2a$ ډېرښت ومومي، چېرته چې $\dfrac{dy}{dx} = 0$. کله چې x د 2a څخه وروسته ډېرښت ومومي، y به په ثابت ډول کمښت ومومي، $x = 3a$ لپاره $y = 0$ او د $3a < x$ لپاره منفي دی.

همدارنګه $y + x = a$ یکې یو مجانب دی. پورتنیو حقایقو په پام کې نیولو سره، مونږ به یو ښښېر منحني ځنګه چې په لاندې شکل کې ښودل شویدی وګورو.



۷. **مثال:** د $x^4 - y^4 = a^2(x^2 - y^2)$ منحني رسم کړئ .

حل: مونږ د منحني په هکله لاندې ځانګړتیاوې په پام کې نیسو:

(۱) دواړه محورونو ته متناظر دی.

(۲) دا مستقیماً له مبدا څخه تېرېږي. $y = \pm x$ په مبدا کې مماسونه دي، لدې سببه مبدا یوه غوټه ده.

(۳) د x محور په $(0,0)$، $(-a,0)$ او (a,o) کې قطع کوي خو د y محور یواځې په $(0,0)$ کې قطع کوي. په $(-a,0)$ او (a,o) کې مماسونه په ترتیب سره $x = a$ او $x = -a$ دي.

(۴) دا کوم مجانب نلري.

(۵) په قطبي مختصاتو بدلې په اروني، معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$r = \frac{a^2 \cos 2\theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

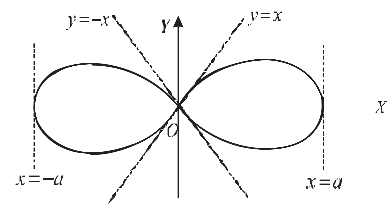
مونږ پوهیږو چې

$$r\frac{dr}{d\theta} = -\frac{8a^2 \sin^3 \theta \cos^3 \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4)^2}$$

نو $\frac{dr}{d\theta}$ منفي باقي پاتې کېږي، کله چې θ له 0 څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې مختلف قیمتونه واخلي او لدې سببه r له a څخه تر 0 پورې کمښت مومي کله چې θ له 0 څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې کمښت ومومي.

(۶) څرنګه چې θ له $\frac{\pi}{4}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې بدلون مومي، r^2 منفي باقي پاتې کېږي او لدې سببه په منحني باندې کومه نقطه شتون نلري چې د $\theta = \frac{\pi}{4}$ او $\theta = \frac{\pi}{2}$ خطونو په منځ کې واقع وي.

څرنګه چې منحني دواړو محورونوته متناظردی، مونږ پوهیږو چې د منحني بڼه څنګه چې په لاندې شکل کې ښودل شویدي.



۶.۵ پوښتنې

۱. لاندې منحنيات رسم کړئ.

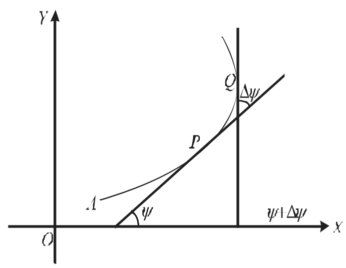
1. $x^2y^2 = x^2 - a^2$
2. $3ay^2 = x^2(x+a)$
3. $(x^2 + y^2)x = ay^2$, a > 0
4. $y = c\cosh\dfrac{x}{2}$
5. $x^2(a^2 + y^2) = a^2(y^2 - x^2)$ [P.U.1987]
6. $y^2 = x^2(4 - x^2)$
7. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ [P.U.1986,1988]
8. $y(1-x^2) = x^2$
9. $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$
10. $x^3 + y^3 = 3axy$
11. $y^4 - x^4 + xy = 0$
12. $x^4 + y^4 = 4a^2xy$
13. $x = (y-1)(y-2)(y-3)$
14. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$
15. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

۱.۷.۵ کوږوالي یا انحنا (CURVATURE)

د یو منحني انحنا په کومه یوه نقطه کې د منحني د کږېدنې(کږلېچې) اندازه ده، یعني دا اندازه په کومه یوه کې چې مماس د p په هره یوه نقطه کې بدلېږي لکه څنګه چې د P د تماس نقطه دمنحني په اوږدو کې حرکت کوي.

تعریف: فرض کړئ چې P او Q په منحني باندې دوه نقطې دي او A په منحني باندې کومه ثابته نقطه ده.

فرض کړئ چې $\widehat{AP}=S$ قوس، $\widehat{AQ}=S+\Delta S$ قوس، نو $\widehat{PQ}=\Delta s$ قوس.



فرض کړی چې ψ, $\psi+\Delta\psi$ هغه دوه زاویې دي کومې چې د P او Q په نقطو کې مماسونه یې د x د محور مثبت لوري ته جوړوي.

$\Delta\psi$ سمبول، زاویه ښیي کومه چې د مماس د بدلېدو پواسطه د منحني په امتداد د P له نقطې څخه د Q نقطې پورې د ΔS په یوه واټن سره حرکت کوي.

موږ لاندې تعریفونه لرو:

۱. د PQ قوس ټوله کږلېچي یا ټول کوږوالی د $\Delta\psi$ زاویې ښتون راښیي.

۲. د PQ قوس د کوږوالي اوسط د $\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$ نسبت شته والی راښیي.

۳. د P په نقطه کې د منحني کوږوالی چې $\lim_{Q\to P}\frac{\Delta\psi}{\Delta S}=\frac{d\psi}{ds}$ سره دی راښیي.

نو پدې صورت کې د $\frac{d\psi}{ds}$ پواسطه د p په هره نقطه کې دمنحني دکوږوالی پېژندل دي.

۲.۷.۵ د انحنا وړانګه (شعاع)

د يو منحني په هره نقطه کي د انحنا معکوس(متقابل) ، په هغه حالت کي چي صفر نه وي، د انحنا په نقطه کي هغي ته دانحنا وړانګه (شعاع) وايي او په عمومي ډول ρ دپواسطه سره ښودل کيږي، نولدي امله مونږ لرو چي

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

انحنځ په k سره ښودل کيږي، نو $\rho = \frac{1}{k}$

مثال: د $S = 4a\sin\frac{1}{3}\psi$ کارديود د انحنځ شعاع پيدا کړئ.

حل:

$$S = 4a\sin\frac{1}{3}\psi$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\frac{1}{3}\psi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}a\cos\frac{1}{3}\psi$$

۳.۷.۵   د دکارتي منحنياتو لپاره د انحنا وړانګه

(a)   فرض کړئ چي د منحني معادله y = f(x) ده. مونږ لروچي $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ځکه چي ds کوچنی دی.

$$\therefore \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

اوس $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$

نظر s ته په ډيفرنشيل نيولو، مونږ لاسته راوړو چي:

$$\sec^2\psi\frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{d\psi} = \frac{\sec^2\psi \frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+\tan^2\psi)\frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

د $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ لپاره په ونج کولو، چیرته چي د جذرنه مخکي اشاره مثبت په پام کي نیول شویده.

لدي امله

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

یادونه: ۱. د انحناورانګه، ρ ، د $\frac{d^2y}{dx^2}$ مطابق چي مثبت یا منفي وي مثبت یا منفي ده، یعني، ددي مطابق چي د منحني مقعروالی مخ پورته یا ښکته دی.

۲. د انعطاف په نقطه کي انحنا صفر ده .

۳. څرنګه چي د ρ قیمت دمختصاتودمحورونوله ټاکنی څخه خپلواکه ده، د x او y په بدلولو مونږ لرو چي

$$\rho = \frac{[1+(\frac{dx}{dy})^2]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

دغه فورمول په ځانګړي ډول هغه وخت ګټور دی کله چي مماس د x په محور باندي عمود وي په کوم حالت کي چي $\frac{dx}{dy} = 0$.

(b) ناڅرګنده (ضمني) معادله:

فرض کړئ چي د منحني معادله $f(x,y) = 0$ ده.

په هغه نقطه کې چې $\frac{df}{dy} = f_y \neq 0$ ، مونږ لرو چې $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ او

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f_{x^2}(f_y)^2 - 2f_{xy}.f_x.f_y + f_{y^2}(f_x)^2}{(f_y)^3}$$

د (A) په فورمول کې د $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{d^2y}{dx^2}$ قیمتونوپه وضع کولو ، مونږ لاسته راوړو چې

$$\rho = \frac{[(f_x)^2 + (f_y)^2]^{3/2}}{f_{x^2}(f_y)^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{y^2}(f_x)^2} \qquad ....(B)$$

(C) پارامتریک معادلې:

فرض کړی چې منحنی د $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ معادلو پواسطه ښودل شویدی. په هغو نقطو کې چیرته چې $f'(t) \neq 0$ ، مونږ لرو چې

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

او

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)^2}\,\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

د (A) په فورمول کې د $\frac{dy}{dx}$ **او** $\frac{d^2y}{dx^2}$ قیمتونو په وضع کول مونږ لرو چې

$$\rho = \frac{[\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2]^{3/2}}{f'(t)\ g''(t) - g'(t)\ f''(t)} \qquad ....(C)$$

مثال: د $x^2y=a(x^2+y^2)$ په منحني باندې د (2a , 2a) په نقطه کې د انحنا شعاع پيدا کړئ

حل: فرض کړئ چې $f(x,y)=x^2y-ax^2-ay^2$

نو په (2a, 2a) کې،

$$f_x = 2xy - 2ax = 4a^2$$

په (2a, 2a) کې،

$$f_y = x^2 - 2ay = 0$$

په (2a, 2a) کې،

$$f_{xx} = f_{x^2} = 2y - 2a = 2a$$
$$f_{y^2} = -2a$$

او، په (2a, 2a) کې

$$f_{xy} = 2x = 4a$$

لدې امله،

$$\rho = \frac{[(4a^2)^2+0]^{3/2}}{2a(0)-2\cdot 4a\cdot 4a^2\cdot 0+(4a^2)^2(-2a)}$$
$$= \frac{(4a^2)^3}{(4a^2)^2\cdot 2a} = \frac{4a^2}{2a} = 2a$$

۴.۷.۵ دقطبي منحنياتو لپاره دانحنا وړانګه

فرض کړئ چې منحني د $r=f(\theta)$ معادلې پواسطه راکړ شوی دی

خو $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$

$$\therefore \quad x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\sin\theta$$

د O پارامتر په لړلو د منحني پارامتريک معادلې دي، پدې دول مونږ لرو چې:

$$\frac{dx}{dO} = \frac{dr}{dO}\cos\theta - r\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

او

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta$$
$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta$$

په (C) کې ددغو افادو په ونج کولو، مونږلاسته راوړو چې،

$$\rho=\frac{(r^2+r_1^{\,2})^{3/2}}{r^2+2r_1^{\,2}-rr_2}$$

چېرې چې، $r_1=\frac{dr}{d\theta}$ ، $r_2=\frac{d^2r}{d\theta^2}$ دی.

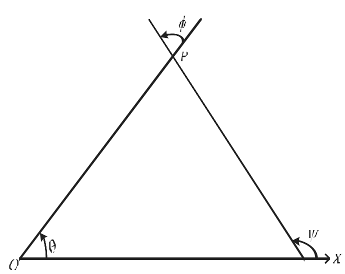
پایله: څرنګه چې د انعطاف په نقطه کې انحنا صفر ده، لدې سببه، په یوه قطبي منحني باندې د انعطاف په یوه نقطه کې

$$r^2+2r_1^{\,2}-rr_2=0$$

بله کړنلاره (Alternative method):

فرض وو چې د منحني معادله $r=f(\theta)$ ده.

پدې ځای کې مونږ باید $\frac{ds}{d\psi}$ د r په قېمتونو کې څرګند کړو او نظر θ ته دهغې مشتقونه څرګند کړو.



له شکل څخه مونږ پوهیږو چې

$$\psi = \theta + \phi$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right) \qquad \text{.........}(1)$$

اوس

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\therefore \quad \sec^2\phi \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{dr}{d\theta} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

یا

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{(1 - \tan^2\phi)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \qquad \text{.........}(2)$$

همدارنګه(په۸ څپرکي به ووینو)

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \qquad \text{.........}(3)$$

چېرته چي له جذر نه مخکي مثبت اشاره په پام کي نيول شويده.

د (1) ،(2) او (3) څخه لاسته راورو چي :

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{r^2 + 2(\frac{dr}{d\theta})^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2\}^{3/2}}$$

لدي کېله

$$\rho = \frac{(r^2 + r_1^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}$$

چېرې چې، $r_1 = \frac{dr}{d\theta}$ او $r_2 = \frac{d^2 r}{d\theta^2}$

۵.۷.۵ د پاېولي منحنيګانو لپاره د انحنا وړانګه

مونږ پوهيږو چې

$$\rho = r\sin\theta \qquad ....(1)$$

$$\psi = \theta + \phi \qquad ....(2)$$

او

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} \qquad ....(3)$$

له (3) څخه لرو چې

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = r\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dr}$$

$$= \frac{r\frac{d\theta}{ds}}{\frac{dr}{ds}} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$

يعني، $\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}$ او $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$

نظرr ته د (1) په مشتق نيولو

$$\frac{d\rho}{dr}=r\cos\phi\cdot\frac{d\phi}{dr}+\sin\phi=r\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d\phi}{dr}+r\frac{d\theta}{ds}$$
$$\frac{d\rho}{dr}=r\frac{d\phi}{ds}+r\frac{d\theta}{ds}=r(\frac{d\phi}{ds}+\frac{d\theta}{ds})$$
$$=r\frac{d\psi}{ds}$$ ، (له (2) څخه)

$$\therefore\ \frac{d\rho}{dr}=\frac{r}{\rho}$$

$$\therefore\ \rho=r\frac{dr}{d\rho}$$

٦.٧.٥ حل شوي مثالونه

۱. مثال: وښایاست چې د $x^3+y^3=3axy$ پـه ګـول سـطحي بانـدې د $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ پـه نقطـه کـې انحنـا $-\frac{8\sqrt{2}}{3a}$ ده.

حل: د راکړ شوي معادلې په مشتق نیولو، مونږ لاسته راوړو چې

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3ay+ax\frac{dy}{dx}$$
$$x^2+y^2\frac{dy}{dx}=ay+ax\frac{dy}{dx}\qquad\ldots\ldots\ldots(1)$$

څرنګه چې $\frac{dy}{dx}$ په $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ کې (1-) ده.

د (1) یوځل بیا په مشتق نیولو، مونږ لاسته راوړو:

$$2x+2y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}=a\frac{dy}{dx}+a\frac{dy}{dx}+ax\frac{d^2y}{dx^2}$$

د x ، y ، $\frac{dy}{dx}$ لپاره په ترتیب سره د $\frac{3a}{2}$، $\frac{3a}{2}$ ، 1- په ونج کولو، مونږ په $(\frac{3a}{2}$ ، $\frac{3a}{2})$ کې د $\frac{d^2y}{dx^2}$ د $-\frac{32}{3a}$ سره برابر لاسته راوړو.

لدې امله انحنا په $(\frac{3a}{2}$ ، $\frac{3a}{2})$ کې

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3a}$$

۲. مثال: د $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ منحني په هره نقطه کې دانحنا وړانګه پیدا کړئ

حل: له $x = a(\cos t + t\sin t)$ څخه

$$\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + t\cos t + \sin t) = at\cos t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\cos t - at\sin t$$

له $y = a(\sin t - t\cos t)$ څخه

$$\frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sin t + at\cos t$$

$$\rho = \frac{[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]^{3/2}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$\rho = \frac{(a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t)^{3/2}}{at\cos t(a\sin t + at\cos t) - at\sin t(a\cos t - at\sin t)}$$

$$= \frac{a^3t^3}{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \frac{a^3t^3}{a^2t^2} = at$$

۳. مثال: د $r(1+\cos\theta) = a$ منحني لېاره د (r,θ) په نقطه کې دانحنا وړانګه پيداکړئ.

حل:

$$r = \frac{a}{1+\cos\theta} = \frac{a}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$$

$$r_1 = \frac{a}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$r_2 = \frac{a}{4}\sec^4\frac{\theta}{2} + \frac{a}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

لدي امله،

$$\rho = \frac{(r^2 + r_1^{\,2})^{3/2}}{r^2 + 2r_1^{\,2} - rr_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2}{4}\sec^4\frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}}{\frac{a^2}{4}\sec^4\frac{\theta}{2} + 2\frac{a^2}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2} - \frac{a^2}{8}\sec^6\frac{\theta}{2} - \frac{a^2}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$= a\,Sec^3\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{8r^3}{a}}$$

٤. مثال: د $\frac{1}{\rho^2} = \frac{A}{r^2} + B$ په منحني بندي د انحنا وړانګه په (ρ, r) په نقطه کې پيدا کړئ چېرې چې A او B ثابت دي.

حل:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{A}{r^2} + B$$

نظر ρ ته په مشتق نیولو، لاسته راځي چې

$$-\frac{2}{\rho^3}=-\frac{2A}{r^3}\frac{dr}{d\rho}$$

$$\frac{dr}{d\rho}=\frac{r^3}{A\rho^3}$$

$$\therefore\quad \rho=r\frac{dr}{d\rho}=\frac{r^4}{A\rho^3}$$

۷.۵ پوښتنې

۱. په لاندې منحنیګانو باندې د انحنا ورانګې د (x,y) په نقطه کې پیدا کړئ.

$$(i)\quad c\cosh\frac{x}{c}\qquad (ii)\quad y=a^x\qquad (iii)\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$

۲. په لاندې منحنیاتو باندې د انحنا ورانګې د t په نقطه کې پیدا کړئ.

$$(i)\quad x=a(t+\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

$$(ii)\quad x=ae^t(\sin t-\cos t),\qquad y=ae^t(\sin t+\cos t)$$

$$(iii)\quad x=a\cos^3 t,\qquad y=a\sin^3 t$$

۳. د لاندېنیو منحنیګانو په هر یوه باندې د انحنا ورانګې د (r,θ) په نقطه کې پیدا کړئ.

$$(i)\quad r=a\theta,\qquad (ii)\quad r^m=a^m\cos m\theta,\qquad (iii)\quad r\theta=a$$

[P.U.1985]

٤. دلاندېنیو منحنیګانو لپاره په مبدا کې د انحنا ورانګې پیدا کړئ.

$$(i)\quad 2x^2+y^2=2y$$

$$(ii)\quad x^3-2x^2y+3xy^2-4y^3+5x^2-6xy+7y^2-8x=0$$

$(iii)\quad x^3y - xy^3 + 2x^2y + xy - y^2 + 2x = 0$

۵. د لاندې منحني ګانو په هر یوه باندې د (ρ, r) په نقطه کې د انحنا ورانګې پیدا کړئ.

$(i)\quad r^3 = 8\rho^2$ $(ii)\quad \frac{a^2b^2}{\rho^2} = a^2 + b^2 - r^2$

$(iii)\quad \rho a^n = r^{n+1}$

٦. ثبوت کړئ چې د $y^2 = 4ax$ په پارابولا باندې د P په هره نقطه کې د انحنا د ورانګو مربع د $(FP)^3$ په شان راز راز قیمتونه اخلي، چېرې چې F د پارابولا محراق دی.

۷. د $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیود لپاره ثبوت کړئ چې $\frac{\rho^2}{r}$ ثابت دی. [P.U.1985]

۸. د $r = a(1+\cos\theta)$ منحني د انحنا ورانګه په هغه نقطه کې چېرې چې مماس له اصلي خط سره موازي وي پیدا کړئ. [P.U.1987]

۹. د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بیضوي لپاره ثبوت کړئ چې $\rho = \frac{a^2b^2}{p^3}$, p د (x, y) په هره نقطه کې په مماس باندې له مبدا څخه عمود دی. همدارنګه ثبوت کړئ چې $\rho = \frac{|CQ|^3}{ab}$ ، چېرته چې CQ نسبت CP ته د مزدوج نیمايي قطر وي.

۱۰. که چېرې ρ_2 , ρ_1 د $r = a(1+\cos\theta)$ کارډیو د کوم وتر په پای نقطو کې د انحنا ورانګې وي، کومې چې مستقیماً له قطب څخه تېرېږي نو وښایاست چې

$$[P.U.86, 88]\ \rho_1^{\,2} + \rho_2^{\,2} = \frac{16a^2}{9},$$

۱۱. وښایاست چې د $r = a\theta$ او $r\theta = a$ منحنیګانو د انحنا ګانې د دوی په ګډه نقطه کې $3:1$ په نسبت کې دي.

۱.۸.۵ د انحنا مرکز

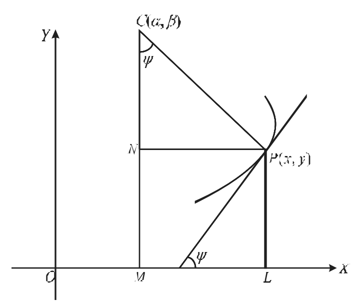
د یو منحنيِ د P دهرې یوې نقطې لپاره د انحنا مرکزیوه نقطه ده کومه چې په P کې د نارمل مثبت لوري ته او له هغې څخه او د ρ په یوه واټن واقع وي.

د نارمل مثبت لوری د مماس مثبت لوري د دوران پواسطه (د $y = f(x)$ منحنيِ ممـاس مثبت لوری هغه دی کوم کې چې x دېریښت مومي) چې له $\frac{\pi}{2}$ څخه د ساعت عقربې د لوري په خلاف بول تیرېږي لاسته راځي.

۲.۸.۵ دانحنا دمرکز مختصې

فرض کړئ چې $P(x, y)$ د $y = f(x)$ په منحنيِ باندې یوه نقطه ده.

فرضوو چې د مماس مثبت لوری د x له محور سره ψ یوه زاویه جوړوي، لدې کبله د نارمل مثبت لوری د x له محور سره $\frac{\pi}{2} + \psi$ زاویه جوړوي.



فرض کړئ چې د P لپاره $C(\alpha, \beta)$ د انحنا مرکز دی

$$\therefore \quad PC = \rho$$

همدارنګه،

$$N\hat{C}P = \psi$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \alpha &= OM = OL - ML \\
&= OL - NP \\
&= x - \rho \sin \psi \\
\beta &= MC = MN + NC \\
&= LP + NC \\
&= y + \rho \cos \psi
\end{aligned}
$$

خو مونږ پوهیږو چې:

$$
\sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}, \qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}
$$

او، $\rho = \dfrac{(1+y_1^{\,2})^{3/2}}{y_2}$ چیرې چې $y_1 = \dfrac{dy}{dx}$ او $y_2 = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

لدې امله،

$$
\alpha = x - \frac{y_1(1+y_1^{\,2})}{y_2}, \qquad \beta = y + \frac{1+y_1^{\,2}}{y_2}
$$

د $P(x, y)$ نقطې لپاره د انحنا د مرکز مختصات دي.

۳.۸.۵ د انحنا دایره

دیومنحني د P دهرې یوې نقطې دانحنا دایره یوه دایره ده چې دهغې مرکز د انحنا مرکز او دهغې وړانګه $|\rho|$ ده.

۴.۸.۵ د منحني د انحنا د مرکزونو هندسي محل(EVOLUTE)

د یو منحني دانحنا د مرکز هندسي محل ته د انحنا مرکزونو هندسي محل وایي(یا هغه منحني دی چې د بل منحني د انحنا مرکز وي) او منحني ته د انحنا د مرکز د هندسي محل یو پوښوونکی وایي.

د منحني د انحنا مرکز ځانګړتیاوې

(a) یوراکېږشوي منحني ته نارمل د هغه دانحنا د مرکزونو هندسي محل سره مماس دی.

که چېرې (α,β) د P(x, y) هرې نقطې لپاره په منحني باندې د انحنا مرکز وي، نو مونږ لرو چې

$$\alpha = x - \rho\sin\psi$$
$$\beta = y + \rho\cos\psi$$

نظر x ته په دیفرنیشل نیولو، مونږ لرو چې

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \rho\cos\psi\frac{d\psi}{dx} - \sin\psi\frac{d\rho}{dx}$$

ځرنګه چې $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ ، $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \frac{ds}{d\psi}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\psi}{dx} - \sin\psi\frac{d\rho}{dx}$$
$$= -\sin\psi\frac{d\rho}{dx} \qquad \text{..........(1)}$$
$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\rho}{dx}\cos\psi - \rho\sin\psi\frac{d\psi}{dx}$$

ځنګه چې $\sin\psi = \frac{dy}{ds}$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{dy}{dx} + \cos\psi\frac{d\rho}{dx} - \frac{ds}{d\psi}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\psi}{dx}$$
$$= \cos\psi\frac{d\rho}{dx} \qquad \text{...........(2)}$$

په (1) باندې د (2) په وېشلو مونږ لاسته راوړو چې

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\cos\psi}{\sin\psi} = -\cot\psi = -\frac{1}{\tan\psi} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

اوس $\frac{d\beta}{d\alpha}$ د انحنا مرکز ته د مماس میل دی او $-\cot\psi$ منحني ته د نارمل میل دی.

لدې امله یو منحني ته نارملونه د انحنا مرکزونو هندسي محل ته دده مماسونه دي.

(b) دیو منحني د انحناګانو ددوه نقطو ورانګو تر منځ توپیر د انحنا مرکز د هندسي محل داروند دوه نقطوترمنځ دقوس له اوږدوالي سره مساوي دی.

د (a) د (1) او (2) په مربع کولو او جمع کولو مونږ لاسته راوړو چې

$$(\frac{d\alpha}{dx})^2 + (\frac{d\beta}{dx})^2 = (\frac{d\rho}{dx})^2 \qquad \text{.........(3)}$$

که چیرې S له کومې ثابتې نقطې څخه د انحنا د مرکز د قوس د اوږدوالي اندازه وي، نو،

$$(\frac{ds}{dx})^2 = (\frac{d\alpha}{dx})^2 + (\frac{d\beta}{dx})^2 \qquad \text{.........(4)}$$

له (3) او (4) څخه

$$(\frac{ds}{dx})^2 = (\frac{d\rho}{dx})^2$$

$$\Rightarrow ds = d\rho$$

یعنې، $\int_{c_1}^{c_2} dS = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho$

چیرې چې c_2, c_1 پرمنحني باندې لکه د ρ_1 او ρ_2 د انحنا ورانګو په لړلو اړونده دوه نقطو، د انحنا د مرکزونو په هندسي محل باندې نقطې دي.

لدې امله، $S = \rho_2 - \rho_1$ له c_1 څخه تر c_2 پورې

۵.۸.۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $y^2 = 4ax$ پارابولاد (x, y) په هره نقطه کې د انحنا د مرکز مختصات پیدا کړئ. په پایله کې د هغې د انحنا د مرکزونو هندسي محل په لاس راوړئ.

حل: د $y^2 = 4ax$ معادلې په ډیفرنشیل نیولو، مونږ لاسته راوړو چې

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

یعنې،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{4a^2}{y^3}$$

که چیرې (α, β) د انحنا مرکز وي، نو

$$\alpha = x - \frac{\frac{2a}{y}\left(1+\frac{4a^2}{y^2}\right)}{-\frac{4a^2}{y^3}} = x + \frac{y^2+4a^2}{2a} = \frac{2ax+4ax+4a^2}{2a} = 3x+2a \qquad ....(1)$$

او

$$\beta = y + \frac{1+\frac{4a^2}{y^2}}{-\frac{4a^2}{y^3}} = y - \frac{y(y^2+4a^2)}{4a^2}$$

$$\beta = -\frac{y^3}{4a^2} = \pm\frac{(4ax)^{3/2}}{4a^2} = \pm\frac{2x^{3/2}}{a^{1/2}} \qquad ....(2)$$

$$\beta^2 = \frac{4x^3}{a}$$

د انحنا د مرکز هندسي محل پیداکولولپاره، مونږ له (1) او (2) څخه x له منځه وړو نو په هغه صورت کې

$$\beta^2 = \frac{4x^3}{a} = \frac{4}{a}\left(\frac{\alpha-2a}{3}\right)^3$$

لدي امله د انحنا د مرکزونو غوښتل شوي هندسي محل

$$27ay^2 = 4(x-2a)^3$$

دی

۲. **مثال:** وښایاست چې د $x^3+y^3=3axy$ منحني سطحي (Folium) د $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ په نقطه کې دانحنا مرکز $(\frac{21a}{16},\frac{21a}{16})$ دی. [P.U.1986]

حل: د راکړ شوې معادلې څخه په دیفرنیشنل نیولو، مونږ لاسته راوړوچې

$$x^2+y^2\frac{dy}{dx}=ay+ax\frac{dy}{dx} \qquad \text{.........(1)}$$

لدي امله $\frac{dy}{dx}$ په $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ کې (-1) دی.

د (1) بیا په مشتق نیولو، مونږ لاسته راوړو

$$2x+2y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}=a\frac{dy}{dx}+a\frac{dy}{dx}-ax\frac{d^2y}{dx^2}$$

د x، y، او $\frac{dy}{dx}$ پرځای په ترتیب سره د $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ او -1 په ونج کولو، مونږ لاسته راوړوچې

$\frac{d^2y}{dx^2}$ په $(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2})$ کې د $-\frac{32}{3a}$ سره برابر دی.

که چېرې (α,β) د انحنا مرکز وي، نو

$$\alpha = x-\frac{y_1(1+y_1{}^2)}{y_2}=\frac{3a}{2}-\frac{-1(1+1)}{\frac{-32}{3a}}=\frac{3a}{2}-\frac{3a}{16}=\frac{21a}{16}$$

او

$$\beta = y + \frac{1 + {y_1}^2}{y_2} = \frac{3a}{2} + \frac{(1+1)}{\frac{-32}{3a}} = \frac{3a}{2} - \frac{3a}{16} = \frac{21a}{16}$$

لدي امله دانحنا مرکز په $(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$ کي $(\frac{21a}{16}, \frac{21a}{16})$ دی.

۳. مثـــال: وښایاست چـي د $x = a\cos\theta$ ، $y = b\sin\theta$ بیضـوي د انحنـا د مرکـز هندسـي محـل $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ دی.

حل:

$$x = a\cos\theta \text{،} \qquad y = b\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta \text{،} \qquad \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2\theta\frac{d\theta}{dx} = -\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3\theta$$

که چیرې (α, β) د θ په هره نقطه کي دانحنا د مرکز مختصات وي، نو

$$\alpha = a\cos\theta - \frac{-\frac{b}{a}\cot\theta(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot^2\theta)}{-\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3\theta}$$

$$= a\cos\theta - a\cos\theta\sin^2\theta(1 + \frac{b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta})$$

$$= a\cos\theta - a\cos\theta\sin^2\theta - \frac{b^2}{a}\cos^3\theta$$

$$= a\cos^3\theta - \frac{b^2}{a}\cos^3\theta$$
$$= \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta$$

او

$$\beta = b\sin\theta + \frac{1+\frac{b^2}{a^2}\cot^2\theta}{-\frac{b}{a^2}\cos ec^3\theta}$$
$$= b\sin\theta - \frac{a^2}{b}\sin^3\theta(1+\frac{b^2}{a^2}\cot^2\theta)$$
$$= b\sin\theta - \frac{a^2}{b}\sin^3\theta - b\sin\theta\cos^2\theta$$
$$= b\sin^3\theta - \frac{a^2}{b}\sin^3\theta$$
$$= -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta`$$

د انحنا مرکز دهندسي محل لاسته راوړنی لپاره مونږ لرو .

$$a\alpha = (a^2-b^2)\cos^3\theta$$
$$(a\alpha)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}\cos^2\theta$$

او

$$b\beta = -(a^2-b^2)\sin^3\theta$$
$$(b\beta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}\cos^2\theta$$

$$\therefore\quad (a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}$$

په پایله کې د انحنا د مرکزونو هندسي محل

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

دی.

٤. مثال: د $x+y = ax^2 - by^2 + cx^3$ منحني لپاره په مبداکي د انحنا دایره پیدا کړئ.

حل: د راکړ شوی معادلې په ډیفرنشیل نیولو، مونږ لاسته راوړو

$$1 + y_1 = 2ax + 2abyy_1 + 3cx^2 \qquad ....(1)$$

د $x = 0$، $y = 0$ په وضع کولو مونږ په $(0,0)$ کې $y_1 = -1$ لاسته راوړو.

د (1) په بیا مشتق نیولو مونږ لاسته راوړوچي

$$y_2 = 2a + 2by^2{}_1 + 2byy_2 + 6cx$$

د x = 0 ، y = 0 او $y_1 = -1$ په ایښودلو مونږ لاسته راوړوچي

$\therefore$ ρ په مبدا کي،

$$y_2 = 2a + 2b = 2(a+b)$$

$$\rho = \frac{(1+y_1{}^2)^{3/2}}{y_2} = \frac{(1+1)^{3/2}}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{2}}{a+b}$$

که چیرې (α, β) په $(0,0)$ کې د انحنا مرکز وي، مونږ لرو چې

$$\alpha = x - \frac{y_1(1+y_1{}^2)}{y_2} = 0 - \frac{2}{2(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

$$\beta = y + \frac{1+y_1{}^2}{y_2} = 0 + \frac{2}{2(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

لدې امله د انحنا د دایرې معادله

$$(x - \frac{1}{a+b})^2 + (y - \frac{1}{a+b})^2 = \frac{2}{(a-b)^2}$$

یا

$$x^2 - y^2 - \frac{2}{a+b}(x+y) = 0$$

یا

$$(a-b)(x^2+y^2)-2(x+y)=0$$

دی.

۸.۵ پوښتنې

۱. د $x=a\sec\theta$ ، $y=b\tan\theta$ هیپربولا لپاره دانحنا مرکز پیداکړئ او څرګند کړئ چې دهغوی د انحنا مرکز هندسي محل $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$ دی.

۲. ثبوت کړئ چې د $2xy=a^2$ هیپربولا دانحنا مرکز هندسي محل $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$ دی.
[P.U.1990]

۳. د $x=a\cos^3\theta$ ، $b=a\sin^3\theta$ یا $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ د څلور څوکه ایز هایپوسیکلوئید د انحنا د مرکز هندسي محل پیدا کړئ.

٤. وښایاست چې

$$x=a[\cos t+\ln\tan\frac{t}{2}]$$
$$y=a\sin t$$

کش کېدونکي منحنـي (Tractrix) دانحنـا مرکـز هندسـي محـل $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ زنځیـر دولـه منحنـي (Catenary) دی. [P.U.1991]

۵. ثبوت کړئ چې دیوې سیکلوئیدو انحنا مرکز هندسي محل یوه مساوي سیکلوئید دی.

٦. د $(\frac{a}{4},\frac{a}{4})$ په نقطه کې د $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ منحني لپاره د انحنا دایره پیدا کړئ.

۷. وښایاست چې د $y=mx+x^2$ پارابولا په مبدا کې د انحنا دایره $x^2+y^2=(1+m^2)(y-mx)$ ده.

۱.۹.۵ د منحني ګانو یا سطحو دپارامتریکي کورنی پوښونکی (ENVELOPES)

د منحنیګـانو یـوه پـارامتریکي کـورنی: کـه چیـري $f(x,y,\alpha)$ دری متحولـه کومـه تـابع وي، نـو د $f(x,y,\alpha)=0$ معادله د α دهر ځانګړي قیمت په مطابق یو منحني ښیي.

دغه منحنیات چې په مجموعي ډول، د α د مختلفو قیمتونو د ټاکلو په واسطه لاس ته راځي، ویل کیږي چې دا دمنحنیاتو یوه پارامتریکي کورنی ده.

د مثـال پـه ډول، $x^2+y^2-2ax=0$ معادلـه دمنحنیـاتو یـوه کـورنی ښیي کومـه چـې د x پـه محـور بانـدي د مرکزونو په لرلو دایری دي او کومه چې له مبدا څخه مستقیماً تیریږي. پدې ځای کې a یو پارامتر دی.

تعریف: د منحنیګانو د یوی پارامتریکي کورنی پوښوونکي دکورني دهرو دوو منحنیګانود تقاطع د نقطو دټاکلي حالت هندسي محل دی کله چې یوه له دوی څخه په بل باندې کومه چې ثابت ساتل شوی وي منطبق کیږدو ته میلانونه ولري.

۲.۹.۵ د پټونکو(پوښوونکو)منحني ګانو ټاکل

فرض کړی چې

$$f(x,y,\alpha)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots..(1)$$

دهرو راکړ شوومنحنیګانو کورنی ده. هردوه $f(x,y,\alpha)=0$

او

$$f(x,y,\Delta\alpha+\alpha)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

پوښوونکي(Envelope) :دمنحني ګانو او سطحو دیوی پارامتریکي کورنی یو منحني دی کوم چې دهغې کورني له هرغړي سره یو شریک مماس لري).

غړیو د α او $\Delta\alpha-\alpha$ پارامترونو مطابق قیمتونه په پام کې ونیسي.

ددغو دوو منحنیګانو ګډی نقطې په

$$f(x,y,\Delta\alpha+\alpha)-f(x,y,\alpha)=0$$

یا

$$\frac{f(x,y,\Delta\alpha+\alpha)-f(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

معادلو کي صدق کوي.

فرض کړئ چې $\Delta\alpha \to 0$ ، لدي کبله، د (1) او (2) د ګډو نقطو ټاکلي حالتونه په هاغي معادله کي صدق کوي کومه چې د (3) لیمټ ده. یعني،

$$f_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

نوېدي بول په پتوونکو منحنی ګانو باندی د نقطو مختصات (1) او (4) معادله صدق کوي.

که چېري د (1) او (4) په منځ کي α له منځه ویوړل شي د $\theta(x, y) = 0$ معادله څرګندېږي کومه چې د پتوونکو منحني ګانو غوښتل شوي معادله ده.

مثال: د $y - \alpha x - \dfrac{b}{\alpha} = 0$ خط د کورنۍ پتونکي منحنی ګاني پیدا کړئ.

حل: د خط د کورنۍ راکړل شوي معادله

$$y - \alpha x - \frac{b}{\alpha} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

ده. نظر α ته په دیفرنشیل نیولو، مونږ لاسته راوړو چې

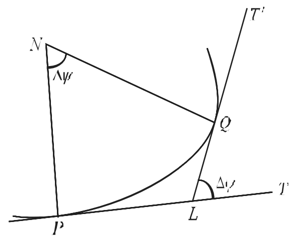
$$-x + \frac{b}{\alpha^{2}} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

د (1) او (2) څخه د α په له منځه ورلو مونږ لاسته راوړوچې $y^{2} = 4x$ ، کومه چې د پتوونکو منحني ګانو د معادلي په شان ده.

۳.۹.۵ د پتوونکو منحني ګانو خانګړتیاوي

(a) دعوی: دیو منحني د انحنا د مرکزونه هندسي محل د نارملونو پتونکی دی.

ثبوت: فرض کړئ چې PN او QN نارملونه او PT، QT' دیو منحني د P او Q په دوه نقطو کي مماسونه دي.



L د مماسونو د تقاطع نقطه ده.

$$\angle PNQ = \angle TLT' = \Delta\psi$$
$$arcPQ = \Delta S$$

د PNQ په مثلث کې د sine دفورمول په کړولو سره

$$\frac{PN}{\sin N\hat{Q}P} = \frac{PQ}{\sin P\hat{N}Q}$$

یا

$$PN = \sin N\hat{Q}P \ \frac{\text{وتر}QP}{\sin P\hat{N}Q}$$
$$= \sin N\hat{Q}P \frac{\text{وتر}QP}{\sin\Delta\psi}$$
$$= \sin N\hat{Q}P \frac{\text{وتر}QP}{\text{قوس}QP} \cdot \frac{\text{قوس}QP}{\Delta\psi} \cdot \frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi}$$
$$= \sin N\hat{Q}P \frac{\text{وتر}QP}{\text{قوس}QP} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta\psi} \cdot \frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi}$$

پدې فرض کولوچې $Q \to P$ ، نو $N\hat{Q}P \to N\hat{P}T = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \lim_{Q \to P} PN = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \frac{ds}{d\psi} \cdot 1 = \rho$$

دا د N تاکلی حالت دی کوم چې په P کې د نارملونو تقاطع ده او Q په P کې د انحنا مرکز دی.

(b) دیوي راکړ شوي کورني دهر منحني هره ځانګړي نقطه دهغه په پټوونکی باندی یوه نقطه ده.

فرض کړی چې

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ددغو منحنيګانو کورنی ده. ددې معادلې په ډيفرنشيل نيولو، مونږ لرو چې

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

دځانګړې نقطې لپاره $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$

نوپه دادول نقطو کې

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

پدې ډول د (1) ځانګړې نقطه په (3) معادله کې صدق کوي، يعنې، دوی په پښوونکو باندې واقع دي. لدې امله د راکړ شوې کورنی د منحنيګانو د ځانګړو نقطو هندسي محل درپښونکي يوه برخه ده.

(c) په عمومي ډول، دمنحنيګانو د يوې کورنی پښوونکی د کورنی د هرغړي سره په تماس کې دی.

فرض کړئ چې

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

د منحنيګانو کورنی ده. دده پښوونکی له (1) څخه د α په له مينځه وړلو اود

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

معادلې پواسطه لاسته راځي .

فرض کړئ چې $x = \phi(\alpha)$

او

$$y = \psi(\alpha) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

د پښوونکو پارامتريک معادلې دي چې د x او y لپاره د α په قيمتونو کې د (1) او (2) په حل کولو لاسته راځي.

(3) معادله (1) معادله د α د هر قيمت لپاره صدق کوي.

نظر α ته د (1) په ډيفرنشيل نيولو، x او y د α د تابعګانو په توګه په پام کي نيولوسره لاسته راځي چي

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$$

کومه چي د (1) او (2) پواسطه

$$\frac{\partial f}{\partial x}\phi'(\alpha)-\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(\alpha)=0$$

يا

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

سره کيږي.

اوس د (4) کيڼ لاسته د (3) پټوونکي په نقطه کي دمماس ميل دی او (4) ښي لاسته د کورنی د α منحني د (x,y) په نقطه کي د مماس ميل دی.

پدي ډول منحني ته د مماسونو ميلونه او په ګډه نقطه کي پټوونکي سره مساوي دي. ددي معنی داده چي په ګډه نقطه کي منحني او پټونکي يو شانته مماس لري ځکه نو دوی يو بل سره په تماس کي دي.

يادوني: (1) که چيري د $\frac{df}{dx}=0=\frac{df}{dy}$ کومي نقطي لپاره، د (4) ښي لاس طرف بي معنی او پورتني دعوی پاتي راشي، نو پټوونکی امکان لري چي د يو منحني سره په هغو نقطو کي کومی چي ځانګړي نقطي دي مماس وي.

(2) څرنګه چي مستقيم خط او مخروط کومی ځانګړی نقطي نلري نو د مستقيم خطونو يا مخروطونو د کورنی انوپلوپ په ټولو ګډو نقطو کي يی له کومي استثنا څخه د کورنی هر غړي سره په تماس کي دی.

۴.۹.۵ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د

$$y^2-(x+\alpha)^3=0 \qquad \text{..........(1)}$$

د نیمايي مکعبي پړابولاکانو د کورنی پټوونکي منحنی پیدا کړئ.

حل: نظر α ته د (1) په ډیفرنشیل نیولولاسته راوړو چې

$$-3(x+\alpha)^2=0 \qquad \text{..........(2)}$$

په (1) او (2) کې د α په له منځه وړلوسره مونږ لاسته راوړوچې:

$$Y=0$$

کوم چې غوښتل شوی پټوونکی منحني دی.

۲. مثال: د $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ مستقیم خطونو د کورنی پټوونکی منحنی پیدا کړئ (m پارامتر دی).

حل: مونږ لرو چې

$$y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\Rightarrow y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2+b^2$$

فرضوو چې

$$f(x,y,m)=m^2(x^2-a^2)-2mxy+y^2-b^2=0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m}=2m(x^2-a^2)-2xy=0$$

$$\Rightarrow m(x^2-a^2)=xy$$

$$\Rightarrow m=\frac{xy}{x^2-a^2} \qquad \text{............(2)}$$

(1) او (2) په منځ کې د m په له منځه وړلو، مونږ لاسته راوړو

$$\frac{x^2y^2}{x^2-a^2}-\frac{2x^2y^2}{x^2-a^2}+y^2-b^2=0$$

$$\Rightarrow x^2y^2=(x^2-a^2)(y^2-b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

کومه چې دپټوونکې منحنی غوښتل شوې معادله ده.

۳. مثال: د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي ګانو د کورنۍ پټوونکی(چاپیره وونکی)منحني پیدا کړئ، چیرې چې a او b دوه پارامترونه د a + b = c رابطې پواسطه اړیکه ټینګه کړیده، c یو ثابت دی.

حل: مونږ لرو چې b = c−a ، ځکه نو د بیضوي معادله لاندې بڼه غوره کوي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(c-a)^2}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

نظر a ته د (1) په حصوی ډول په ډیفرنشیل نیولو، مونږ لرو

$$-\frac{2x^2}{a^3}+\frac{2y^2}{(c-a)^3}=0$$

یا $\frac{c-a}{a}=\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$ کومې ځخه چې $a=\frac{cx^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}$ لاسته راځي.

$$\therefore \quad c-a=\frac{cy^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}$$

په (1) کې ددغو قیمتونو په ونج کولو، مونږ لاسته راوړو.

$$x^{2/3}(x^{2/3}+y^{2/3})^2+y^{2/3}(x^{2/3}+y^{2/3})^2=c^2$$

$$\Rightarrow (x^{2/3}+y^{2/3})^3 = c^2$$
$$\Rightarrow x^{2/3}+y^{2/3} = c^{2/3}$$

کوم چې غوښتل شوی پټوونکی منحني دی.

۹.۵ پوښتنې

۱. د $x^2(x-a)+(x+a)(y-m)^2=0$ د کورنۍ پټوونکی منحنی پیدا کړئ، چیرې چې a یو ثابت او m یو پارامتر دی.

۲. د لاندېنیو خطونو د کورنیو پټوونکی منحني پیدا کړئ.

$(i)\quad \cos\alpha + y\sin\alpha = p,$ (α یو پارا متر ده)

$(ii)\quad y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2U^2\cos^2\theta},$ (θ یو پارامتر ده)

۳. د یو منحنـي د انحنـا د مرکـز هندسـي محـل ده د نـارملونو د انوېلـوپ پـه توګـه پـه پـام کـي ونیسـئ، د $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ بیضوي د انحنا مرکز هندسي محل پیدا کړئ.

٤. د $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1$ خطونـو د کـورنۍ پټـوونکی منحنـي پیـدا کـړئ، چیـرې چـې a اوb پارامترونـه دي او د $a^n+b^n=c^n$ رابطې پواسطه اړیکه موندلی ده، c یو ثابت دی.

۵. د یوې دایرې پټوونکی منحني وښیې چې د هغې مرکز د $y^2=4ax$ پارابولا باندې واقع دی او کومه چې مستقیماً د هغې له راس څخه تېرېږي پټوونکی منحنی یې د $y^2(2a+x)+x^3=0$ سیسوئید Cissoid دی(په مستوي کې یو منحني چې تولې نقطې یې دیوې ثابتې نقطې په تیرېدونکي خط باندې پرتې وي جوړ شوي او فاصله یې له ثابتې نقطې څخه دهغه خط او ددوه منحني کانو تر مینځ د تقاطع له نقطې څخه مساوي وي).

٦. دایرې د $y^2=4ax$ پارابولا د قطر په شان په دوه ګونو ترتیبونو (اوردیناتو) باندې څرګندې شوېدي، وښایاست چې د دوی پټوونکی منحني $y^2=4a(x+a)$ پارابولا دی.

۵. بېلا بېلې پوښتنې

۱. د لاندېنیو منحنیګانو مجانبونه پیداکړئ.

$$(i)\quad y^3 - x^2y - 2xy^2 + 2x^3 - 7xy + 3y^2 + 2x^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

[P.U.199] $$(ii)\quad x^2y^3 - x^3y^2 = x^3 + y^3$$

$$(iii)\quad y^3 - x^2y + xy^2 - y + 1 = 0$$

۲. ثبوت کړئ چې $y^2 = 4x$ منحني مجانبونه نلري.

۳. څرګند کړئ چې د $x^2y^2 - a^2(x^2+y^2) - a^3(x+y) + a^4 = 0$ منحني مجانبونه یو مربع جوړوي چې منحني د هغه د دوه څنډو د نقطو څخه مستقیماً تېرېږي.

٤. وښایاست چې د $(x^2-4y^2)(x^2-9y^2) + 5x^2y - 5xy^2 - 30y^3 + xy + 7y^2 - 1 = 0$ څلور درجه ایزې مجانبونه منحني په اتو نقطو کې قطع کوي کومې چې په یوې دایرې باندې واقع دي.

٥. د درې درجه ایزه (یامکعبي) منحني معادله پیدا کړئ کومه چې د $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ منحني په شان ورته مجانبونه لري، او کومه چې مستقیماً د $(0,0)$، $(1,0)$ او $(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

٦. د $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ لپاره اړونده اعظمي نقطې پیدا کړئ. [P.U.1987]

۷. انتروالونه پیدا کړئ په کومو کې چې د $y = (x^2+4x+5)e^{-x}$ منحني مخونه پورته یا ښکته خوا ته وي. همدارنګه د هغوی د انعطاف نقطې پیدا کړئ [P.U.1990]

۸. د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یوې بیضوي د P په یوه متحوله نقطه کې نارمل رسم شویدی، د نارمل اعظمي واټن د بیضوي له مرکز څخه پیدا کړئ.

۹. وښیاست چې $(a^2+x^2)y = a^2x$ منحني د انعطاف درې نقطې لري.

۱۰. د $y^2 = (x-2)^2(x-5)$ په منحني باندې د دوه ګونو نقطو شتون اوځانګړنه (ماهیت)څرګند کړئ .

۱۱. لاندې منحنیات رسم کړئ.

$(i) \qquad y(x-y)^2 = x+y$

$(ii) \qquad xy^2 = (x+y)^2$

$(iii) \qquad y^2x = a(x^2 - a^2)$

۱۲. د $x = at^2$ ، $y = 2at$ پارابولا کومې یوی نقطې لپاره د انحنا وړانګه پیدا کړئ، که چیرې ρ_2, ρ_1 دیو پارابولا د یومحراقی وتر د انجامونو په نقطو کې د انحنا وړانګې وي، ثبوت کړئ چې $\rho_1^{-\frac{2}{3}} + \rho_2^{-\frac{2}{3}} = (2a)^{-\frac{2}{3}}$.

۱۳. ثبوت کړئ چې $y = -x^2 + x + 1$ او $x = -y^2 + y + 1$ پارابولاګانې د $(1,1)$ په نقطه کې د انحنا ورته دایرې لري.

۱٤. د مستقیم خطونو پټوونکی منحنی پیدا کړئ کوم چې د $r = a(1+\cos\theta)$ کاردیود وکتوري شعاعو ته چې ددوی د انجامونو له نقطو څخه تېرېږي په قایمه زاویه رسم شوي وي.

۱۵. څرګنده کړئ چې دخورالویې منحني سطحې د قایمې دایروي استوانې شعاع کومه چې په یو راکړ شوي مخروط کې کېنل شویده د همغه مخروط نیمایي ده. [P.U.1988]

۱٦. څرګنده کړئ چې $\dfrac{x}{1+x\tan x}$ اعظمي ده کله چې $x = \cos x$ وي . [P.U.1986]

شپږم څپرکی
د مشتقونو معکوس(Antidrivatives)
(دانتیګرال نیولو تخنیکونه)

۱,۱,۶ سریزه

په دویم څپرکي کي مونږد راکړ شویو تابعګانو د مشتقونو د ټاکلو راز راز میتودونه زده کړل. پدې څپرکي کي به مونږد مسالې عکس په پام کي ونیسو، کومه چې به په لاندې ډول بیان شي:

فرض کړئ چې $F(x)$ یوه راکړل شوې تابع ده. دا غوښتل شوې دی چې د $f(x)$ یوه تابع وښیو دارنګه چې $f'(x) = F(x)$.

په دې برخه کي به د دغې مسالې لپاره یو حل شتون لري پدې شرط سره چې $F(x)$ متمادي وي. د $F(x)$ څخه د $f(x)$ د لاسته راتلو عملیې ته انتیګرال نیول یا بشپړونه وایي، او $f(x)$ ته د $F(x)$ نامعین انتیګرال وايي. په سمبولیکه توګه مونږ لیکو چې $\int F(x)dx = f(x)$.

۶. ۲. ۱ د مشتق معکوس

د$f(x)$ یوې تابع ته د $F(x)$ یومشتق معکوس وایي که چیری د $f(x)$ مشتق $F(x)$ وي.

مثال: $\frac{1}{3}x^3,\ \frac{1}{3}x^3+2,\ \frac{1}{3}x^3-\pi$ تابعګاني د $F(x)=x^2$ معکوس مشتق دي ځکه چې

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3+2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3-\pi\right]=x^2$$

۲,۲,۶ دعوی

که چیرې$f(x)$ د $F(x)$ یو مشتق معکوس وي، نو د C هر قیمت لپاره، $f(x)+C$ هم د $F(x)$ یومشتق معکوس دی، برسیره پر دې په هر انټروال کې، د $F(x)$ هر مشتق معکوس $f(x)$ جمع یو ثابت په بڼه کې د څرګندېدلو وړدی.

ثبوت: $f(x)$ د $F(x)$ یو مشتق معکوس دی، لدې امله،

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=F(x)$$

همدارنګه

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{f}(x)+C\right]=\frac{d}{dx}\left[\mathrm{f}(x)\right]+\frac{d}{dx}[C]$$

$$=F(x)+0=F(x)$$

په پايله کې $\mathrm{f}(x)+C$ هم د $F(x)$ يو مشتق معکوس دی.

که چېرې $g(x)$ د $F(x)$ يو بل مشتق معکوس وي

$$\therefore\quad g'(x)=F(x)$$
$$\mathrm{f}'(x)=F(x)$$

فرضووچي $g(x)-\mathrm{f}(x)=\phi(x)$، نو

$$\frac{d}{dx}\left[g(x)-\mathrm{f}(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\phi(x)\right]$$

يعني

$$g'(x)-\mathrm{f}'(x)=\phi'(x)$$

يا

$$F(x)-F(x)=\phi'(x)$$

نوپدی دول $\phi'(x)=0$، څرګنده چي $\phi(x)$ يو ثابت دی

$$\therefore\quad g(x)-\mathrm{f}(x)=cons\tan t$$

يعني

$$g(x)=\mathrm{f}(x)+cons\tan t$$

تعريف: د $\int$ سمبول ته د انتيګرال علامه يا نښه وايي او د

$$\int \mathrm{f}(x)dx=F(x)+C \qquad ....(1)$$

څرګندونه دارنګه لوستل کېږي چي د $\mathrm{f}(x)$ نا معين انتيګرال د $f(x)+C$ سره مساوي دی. د(نا معين) صفت د (1)افادی دبشي خوا لپاره ځکه کارول شويدی چي يوه ټاکلي تابع نه ده خو د ممکنه يا شونو تابعګانو يو بشپړ سټ دی. $F(x)$ ته انتيګرالي تابع او C ته د انتيګرال نيوني ثابت وايي.

۱. **یادونه:** د dxسمبول د $\frac{d}{dx}[\ ]$ د مشتق په عملیه کې او د $\int[\ ]dx$ مشتق معکوس په عملیه کې د مستقل متحول د پيژندلو لپاره مرسته کوي. د مثل په ډول، $\int F(t)\,dt$ سمبول د t یوه تابع ښيي چې د هغې مشتق نظر t ته $F(t)$ ده.

۲. **یادونه:** کله کله د موضوع د لنډيز لپاره dx په انتیګرال کې لند(خلص) شویدی د مثل په ډول، $\int 1\cdot dx$ کولی شوچې د $\int dx$ په شکل و لیکو او $\int \frac{1}{x^2}dx$ کولی شو چې د $\int \frac{dx}{x^2}$ په شانتې ولیکو.

۳. **یادونه:** دانتیګرال نیونی اختیاري ثابت اکثراً په عمل کې له منځه ځي، ځکه یوهيرو چې دا هلته شته دی.

٤. **یادونه:** که چیرې مونږ د $F(x)$ مشتق معکوس مشتق ونیسو، مونږ بیا بیرته $F(x)$ لاس ته راوړو. ځکه

$$\frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx\right]=F(x)$$

۲,۶ .۳ دعوې

(a) ثابت مقدار کولی شو چې دانتیګرا ل علامې مخې ته انتقال کړو.

$$\int c\cdot F(x)dx=c\int F(x)dx$$

(b) د یوې مجموعې مشتق معکوس د مشتق د معکوسو له مجموعې سره مساوي ده. یعنې،

$$\int\left[F(x)+G(x)\right]dx=\int F(x)dx+\int G(x)dx$$

(c) دیو تفاضل مشتق معکوس د مشتق د معکوسو له تفاضل سره مساوی ده.یعنې ،

$$\int\left[F(x)-G(x)\right]dx=\int F(x)dx-\int G(x)dx$$

(a) **ثبوت:**

$$\frac{d}{dx}\left[c\int F(x)dx\right]=c\frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx\right]=cF(x)$$

پدې ډول $c\int F(x)dx$ د $cF(x)$ مشتق معکوس دی، یعنې،

$$\int cF(x)dx = c\int F(x)dx$$

.(b)

$$\frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx + \int G(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx\right] + \frac{d}{dx}\left[\int G(x)dx\right]$$
$$= F(x) + G(x)$$

پدې دول $\int F(x)dx + \int G(x)dx$ د $F(x)+G(x)$ مشتق معکوس دی، يعني،

$$\int\left[F(x)+G(x)\right]dx = \int F(x)dx + G(x)dx$$

.(c)

$$\frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx - \int G(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int F(x)dx\right] - \frac{d}{dx}\left[\int G(x)dx\right]$$

$$= F(x) - G(x)$$

پدې دول $\int F(x)dx - \int G(x)dx$ د $F(x)-G(X)$ مشتق معکوس دی يعني،

$$\int\left[F(x)-G(x)\right]dx = \int F(x)dx - \int G(x)dx$$

۴,۲,۶ د خانګړو تابعګانو انتيګرالونه

لاندې پاېلې د دوارو خواوو مشتق نيونې پواسطه ثبوتېدلای شي چي يو عېنيت رامنځته کوي.

1) $\int c\cdot du = cu$

2) $\int u^n \cdot du = \frac{u^{n-1}}{n+1}, \qquad (n \neq -1)$

3) $\int \frac{du}{u} = \ln u$

4) $\int e^u \cdot du = e^u$

5) $\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{\ln a}, \qquad a > o,\ a \neq 1$

6) $\int \sin u \cdot du = -\cos u$

7) $\int \cos u \cdot du = \sin u$

8) $\int \tan u \cdot du = \ln|\sec u|$

9) $\int \cot u \cdot du = \ln|\sin u|$

10) $\int \sec u \cdot du = \ln|\sec u + \tan u|$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

11) $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|$

$$= \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|$$

12) $\int \sec^2 u\, du = \tan u$

13) $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u$

14) $\int \sec u \tan u\, du = \sec u$

15) $\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du = -\operatorname{cosec} u$

16) $\int \sinh u\, du = \cosh u$

17) $\int \cosh u\, du = \sinh u$

18) $\int \tanh u\, du = \ln \cosh u$

19) $\int \coth u\, du = \ln|\sinh u|$

20) $\int \sec h\, u\, du = \arctan h(\sinh u)$

21) $\int \cos ec\, hu\, du = -arc \cot gh(\cosh u)$

22) $\int \sec h^2 u\, du = \tanh u$

23) $\int \cos ec\, h^2 u\, du = -\cot gu$

24) $\int \sec hu, tghu\, du = -\sec hu$

25) $\int \cos echu \cot ghu\, du = -\cos echu$

26) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\sin\frac{u}{a} \quad \wedge \quad -arc\cos\frac{u}{a}$$

27) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| = \sinh^{-1}\frac{u}{a}$$

28) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| = \cosh^{-1}\frac{u}{a}$$

29) $$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} \quad \wedge \quad -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{u}{a}$$

30) $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{-u+a}\right|$$

31) $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$$

32) $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}$$

33) $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2+u^2}}\right|$$

34) $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2-u^2}}\right|$$

35) $$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|$$

36) $$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$$

37) $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}$$

38) $$\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu)$$

39) $$\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu)$$

٥.٢.٦ حل شوي مثالونه

١. مثال: د $\int \sqrt{x}.dx$ وټاکئ.

حل:

$$\int \sqrt{x}.dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

٢. مثال: د $\int \cot g^2 x.dx$ وټاکئ.

حل:

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x\,dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int dx \\ &= -\cot x - x\end{aligned}$$

٣. مثال: د $\int \frac{dx}{x^2+25}$ وټاکئ.

حل:

$$\int \frac{dx}{x^2+25} = \int \frac{dx}{x^2+5^2} = \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}$$

٤. مثال: د $\int \sqrt{1-\cos x}.dx$ وټاکئ.

حل:

$$\int \sqrt{1-\cos x}\, dx = \int \sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2} dx = \sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2}\cdot 2\cdot (\frac{1}{2}dx)$$

$$= 2\sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2}\cdot(\frac{1}{2}dx)$$

$$= -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

۲.۶ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \left(x^4+5x^3-6x^2+9\right) dx$

2) $\int \tan^2 x.dx$

3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2+16}$

5) $\int \frac{dx}{x^2-25}$

6) $\int \frac{dx}{16-x^2}$

7) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

8) $\int \sin^2 x.dx$

9) $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$

10) $\int \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x} dx$

11) $\int \sqrt{x^2-16}\, dx$

12) $\int \sqrt{16-x^2}\, dx$

13) $\int \sqrt{25+x^2}\, dx$

14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x} dx$

15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$

۱,۳,۶ د ونج(عوض) کولو پواسطه انتیګرال نیونه

کله کله د انتیګرال نیوني متحول په یو بل متحول د یو مناسب تعویض پواسطه چې انتیګرال نیونه اسانه کوي تبدیلوي. د مثال په ډول:

۱. **حالت:** که چیرې انتیګرالي تابع د $f(\phi(x))$ په شکل وي ، $\phi(x)=z$ او $\phi'(x)dx=dz$ ونج کوو.

۲. **حالت:** که چیرې انتیګرالي تابع د $f(ax+b)$ په شکل وي، $ax+b=z$ او $dx=\frac{1}{a}dz$ عوض کوو.

۳. **حالت:** که چیرې انتیګرالي تابع د $x^{n-1}f(x^n)$ په شکل وي، $x^n=z$ او $x^{n-1}dx=\frac{1}{n}dz$ ونج کوو.

٤. **حالت:** که چیرې انتیګرالي تابع د $[f(x)]^n f'(x)$ په شکل وي، $f(x)=z$ او $f'(x)dx=dz$ وضع کوو .

میتود (قاعده) په لاندې مثالونو کې روښانه شویده.

٦. ۳. ۲ حل شوي مثالونه

۱. **مثال:** $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$ وټاکئ.

فرض کوو چې $I=\int\frac{dx}{x\ln x}\cdot\frac{1}{\ln\ln x}$

$\ln\ln x=z$ وضع کړئ،

$$\therefore\quad \frac{dx}{x\ln x}=dz$$

$$\therefore\quad I=\int\frac{dz}{z}=\ln z=\ln[\ln(\ln x)]$$

۲. **مثال:** $\int\sec^2(5x+7)dx$ وټاکئ.

پدې ځای کې، $I=\int\sec^2(5x+7)dx$

$5x+7=z$ وضع کوو،

$$dx=\frac{1}{5}dz \quad \wedge \quad 5\,dx=dz$$

$$\therefore \quad I=\frac{1}{5}\int \sec^2 z.dz=\frac{1}{5}\tan z=\frac{1}{5}\tan(5x+7)$$

۳. مثال: $\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx$ وټاکئ.

پدی ځای کې، $I=\int \frac{3x^2}{1+x^6}$

$x^3=z$ په اېښودلو $3x^2dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx=\int \frac{dz}{1+z^2}=arc\tan z=arc\tan x^3$$

٤.مثال: $\int \sin^5 x\cos x\,dx$ وټاکئ.

پدې ځاي کې $\sin x=z$ په وضع کولو، $\cos x\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int z^5dz=\frac{z^6}{6}=\frac{1}{6}\sin^6 x$$

٥. مثال: $\int \tan x dx$ وټاکئ.

پدې ځاي کې $I=\int \tan x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ د $\cos x=z$ په وضع کولو، $-\sin x dx=dz$ یا $\sin x dx=-dz$

$$\therefore \quad I=-\int \frac{dz}{z}=-\ln z=-\ln\cos x=\ln\frac{1}{\cos x}=\ln\sec x$$

۳,۶ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونو ارزښت وټاکئ:

1) $\int \cos\sqrt{x^2-5}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}dx$

2) $\int e^{\sqrt{x+1}}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}dx$

3) $\int e^{\sin^{-1}x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $\int(2x-4)\sqrt{2x^2+8x+1}\ dx$

4) $\int\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

7) $\int\dfrac{5dx}{2x^{3/4}-3x}$

5) $\int\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-8x+5}}dx$

8) $\int\dfrac{dx}{x^{4/3}+x^{2/3}}$

۲. د لاندې تابعګانو مشتقونو معکوس لاسته راوړئ.

1) $\sqrt{a^2-x^2}$

2) $\dfrac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}$

3) $\sqrt{a^2+x^2}$

4) $\sqrt{x^2-a^2}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

7) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

8) $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

9) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

۳- لاندې انتیګرالونو ارزښت وټاکئ:

1) $\int\dfrac{\tan x}{\cos x+\sec x}dx$

2) $\int\dfrac{\sec x}{\sec x+\tan x}dx$

3) $\int\sec x dx$

4) $\int\dfrac{\tan\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int\dfrac{\cot x}{\ln\sin x}dx$

6) $\int\dfrac{\sin x}{2+3\cos x}dx$

7) $\int\dfrac{dx}{2\sin^2x+3\cos^2x}$

8) $\int\dfrac{dx}{3\sin x+4\cos x}$

٤. د لاندې انتیګرالونو ارزښت وټاکئ:

1) $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$ 2) $\int \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\,d\theta$

3) $\int \cos^{5} x\,dx$ 4) $\int \cos^{6}x\cdot\sin^{3} x\,dx$

5) $\int \sin^{6} x\cos^{3} x\,dx$ 6) $\int \tan x\ln(\sec x)\,dx$

7) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^{2} x}}$ 8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\tan x+\cot gx}\,dx$

٥. د لاندې انتیګرالونوارزښت وټاکئ:

1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x+4\sqrt{\sin x}}$ 2) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-d)}\,dx$

3) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ 4) $\int \frac{dx}{\cos^{2} x(5\tan x+1)}$

5) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ 6) $\int e^{x}\cos(e^{x})\,dx$

7) $\int \frac{\cot x}{\sin x+\operatorname{cosec} x}\,dx$ 8) $\int e^{\sin^{2} x}\sin 2x\,dx$

9) $\int \frac{dx}{\cos^{2} x-\sin^{2} x}$ 10) $\int (e^{x}+a)^{n}e^{x}\,dx$

11) $\int \cos x\,e^{\sin x}\,dx$

۱,۴,۶ د پارت (برخه) کولو پواسطه انتیګرال نیول

د میتود د دوه حاصل ضرب تابعګانود انتیګرال نیونې لپاره کارول کیږي. مونږ لاندې دعوی ثبوتوو:

که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ د x دوه تابع ګانې وي.

نو په مشتق نیولو ، مونږ لروچې:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]+g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

∴ دانتیګرالونو د تعریف پواسطه، مونږ لروچې:

$$\int\{f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]\}dx=f(x)\cdot g(x)$$

یا

$$\int f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]dx-\int g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]=f(x)\cdot g(x)$$

یا

$$\int f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]dx=f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]dx$$

اوس که چیری $f(x)=u$ او $\frac{d}{dx}[g(x)]=v$ ، نو

$$g(x)=\int v\,dx$$

په پورتني پاڼه کې ددغو قیمتونو په ایښودلو، مونږ لاسته راوړو چې:

$$\int(u\cdot v)dx=u\int v\,dx-\int[\frac{du}{dx}\int v\,dx]\,dx$$

یعنې،

(ددویمي تابع انتیګرال×لومړنی تابع)=ددوه حاصل ضرب تابعګانو انتیګرال

dx[(ددویمي تابع انتیګرال)·(دلومړي تابع مشتق)] ∫-

یادونه:

(۱) که چیرې انتیګرالي تابع د $x^n f(x)$ په بڼه وي، نو پدې صورت کې مونږ x^n لومړني تابع په حیث په پام کې نیسو.

(۲) که چیرې په انتیګرالي تابع کې لوګاریتمي یا معکوس مثلثاتي تابع شامل وي، نو پدې صورت کې مونږ دارنګه یوه تابع د لومړي تابع په حیث په پام کې نیسو.

په دارنګه ټولو حالتونو کې، که چیرې دویمه تابع راکړ شوی نه وي نو په هغه صورت کې مونږ دا د 1 غوندې په پام کې نیسو.

۲.۴.۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int x\cdot e^x\,dx$ قیمت لاس ته راوړئ.

حل:

$$I=\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x-\int e^x dx$$
$$= x\cdot e^x - e^x$$

۲. مثال: د $\int x\cdot \sec^2 x\,dx$ قیمت لاس ته راوړئ.

حل:

$$I=\int x\cdot\sec^2 x\,dx = x\cdot\tan x-\int\tan x\cdot dx = x\cdot\tan x-\ln\left|\sec x\right|$$

۳. مثال: د $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ قیمت لاس ته راوړئ.

حل:

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-1/2}(-2x)dx$$
$$= x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$
$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-a^2}}dx$$
$$\therefore\quad 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

۴. مثال: $\int x^n \ln x.dx$ قیمت لاس ته راوړو.

حل:

$$I=\int x^{n}\ln x\,dx=\int \ln x\cdot x^{n}dx$$
$$=\ln x\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^{n}dx$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{2}}$$

۵. مثال: د $\int \sec^{3}x.dx$ قیمت لاس ته راوړو .

حل:

$$I=\int\sec^{3}x\,dx=\int\sec x\cdot\sec^{2}x\,dx$$
$$=\sec x\cdot\tan x-\int\tan x\cdot\sec x\cdot\tan x\,dx$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\tan^{2}x\cdot\sec x\,dx$$
$$=\sec x\cdot\tan x-\int(\sec^{2}x-1)\sec x\,dx$$
$$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec^{3}x\,dx+\int\sec x\,dx$$
$$\therefore\quad 2\int\sec^{3}x\,dx=\sec x\cdot\tan x+\ln\left|\sec x+\tan x\right|$$
$$\therefore\quad \int\sec^{3}x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|$$

٦. مثال: د $\int x\cdot arc\sin x\,dx$ قیمت لاس ته راوړئ.

حل:

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\cdot \arcsin x \cdot dx \\
&= \arcsin x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) - \frac{1}{2}\sin^{-1}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arcsin x - \frac{1}{2}\arcsin x \\
&= \frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

۷. مثال: دا $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ وټاکئ. [p.u.1983,89]

حل:

$$
I = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)x - \int x\,\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx
$$

$$
= x\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx
$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-1/2}(2x)dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$$

٦.۴ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int x\sin x.dx$

2) $\int x^3\ln x\,dx$

3) $\int x\cos^2 x\,dx$

4) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5) $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}dx$

۲. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \cos x(\ln x)dx$

2) $\int \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}dx$

3) $\int x^2\cos x\,dx$

4) $\int x\tan^{-1}x\,dx$

5) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

6) $\int \cos\left(b\ln\frac{x}{a}\right)dx$

۳. لاندې انتیګرالونه لاس ته راوړئ .

1) $\int e^x\frac{1-\sin x}{1-\cos x}dx$

2) $\int e^{ax}\sin(bx+c)dx$

3) $\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx$

4) $\int (\ln x)^2dx$

5) $\int arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

٤. د لاندې انتيګرالونو قيمتونه لاس ته راوړئ.

$$1)\quad \int\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)dx \qquad 2)\quad \int e^x\frac{1+x}{(2-x)^2}dx$$

$$3)\quad \int x^2\sin^{-1}x\,dx \qquad 4)\quad \int e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx\ , \qquad [\text{p.u.}1991]$$

$$5)\quad \int\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}dx \qquad 6)\quad \int x^2(\ln x)^3dx$$

$$7)\quad \int\sinh 2x\cdot\sin 2x\,dx \qquad 8)\quad \int e^x\frac{1+x\ln x}{x}dx$$

$$9)\quad \int e^{5x}\cos 3x\,dx$$

۱.۵.۶ د ناطق تابعگانوانتیگرال

د $\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$ ډول تابع ته چېرې چې $f(x)$ او $g(x)$ حقيقي ضريبونو په لرلو پولينومونه دي يوه ناطق تابع وايي.

خيني مهم حالتونه:

۱. حالت: $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

دمثال په ډول ،

$$\int\frac{dx}{3+4x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+3/4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

۲. حالت: د $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ شکل انتيګرالونه $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ ، $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ يا $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ شکل ته اړول کيږي او بيايې ارزښت ټاکل کيږي. د مثال په ډول:

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\ln\left[\frac{x+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{3}\ln\frac{2x-1}{2x+2}$$

۳. حالت: د $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ شکل انتیګرالونه:

په دې ډول حالاتو کې، مونږ A او B مناسب ثوابت ټاکو دارنګه چې

$px+q=A$ (مخرج دضربیونوتفاضل) + B

داډول ټاکنه راکړل شوی انتیګرال په دوه انتیګرالونو باندې ویشي، کوم چې په اساني سره د انتیګرال نیولو وړ دي. د مثال په ډول،

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

۴. حالت: د قسمي کسرونو کارول:

د یوې راکړ شوې ناطق تابع انتیګرال په قسمي کسرونو باندې د انتیګرالي تابع د تجزیه کولو (پنبیلولو)پواسطه لاسته راځي. د مثال په ډول،

$$\int\frac{dx}{9-4x^2}=\frac{1}{6}\left\{\int\frac{dx}{3-2x}+\int\frac{dx}{3+2x}\right\}=\frac{1}{6}\left\{-\frac{1}{2}\ln(3-2x)+\frac{1}{2}\ln(3+2x)\right\}$$
$$=\frac{-1}{12}\ln(3-2x)+\frac{1}{12}\ln(3-2x)=\frac{1}{12}\ln\frac{3+2x}{3-2x}$$

۲.۵.٦ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}dx$ انتيگرال ارزښت ټاکو.

حل:

$$\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{c}{2x+3}$$

$$\Rightarrow 2x-3=A(x-1)(2x+3)+B(x+1)(2x+3)+C(x+1)(x-1)$$

د $x=-1$، 1، $-\frac{3}{2}$ په اېښودلو موږ لاسته راوړو چې

$A=5/2$ ، $B=-\frac{1}{10}$ او $C=-\frac{24}{5}$ لدې امله

$$\int\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}dx=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{24}{5}\int\frac{dx}{2x+3}$$
$$=\frac{5}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln|x-1|-\frac{12}{5}\ln|(2x+3)|$$

۲. مثال: د $\int\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx$ انتيگرال ارزښت وټاکئ.

حل:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+2)}+\frac{D}{(x+2)^2}$$
$$\therefore\quad x+1=A(x-1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-1)^2+D(x-1)^2$$

$x=1$ په اېښودلو، $2=B\cdot 9$ لدې امله $B=2/9$

$x=-2$ په اېښودلو، $-1=9\cdot D$ لدې امله $D=-1/9$

د x^3 ضريبونو او ثوابتو په پرتله کولو،

$$0 = A + C$$
$$1 = -4A + 4B + 2C + D$$
$$1 = -4A + \frac{8}{9} + 2C - \frac{1}{9}$$

یعنی

$$\frac{2}{9} = -4A + 2C$$
$$0 = 4A + 4C$$

خو

$$\frac{2}{9} = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{27}$$

$$A = -C = -\frac{1}{27}$$

لدې امله،

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx &= -\frac{1}{27}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{2}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{27}\int\frac{dx}{x+2} - \frac{1}{9}\int\frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= -\frac{1}{27}\ln(x-1) - \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{27}\ln(x+2) + \frac{1}{9(x+2)} \\ &= \frac{1}{27}\ln\frac{x+2}{x-1} - \frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{9(x+2)}\end{aligned}$$

۳. مثال: $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$ انتیګرال ارزښت و ټاکئ.

حل:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx-C}{x^2-4}$$

$$\therefore \quad 1 = A(x^2+4) + B(x^2-x) + C(x-1)$$

$x = 1$ په اینودلو، $1 = 5A$ څکه نو $A = \frac{1}{5}$

د x^2 ضریبونو او ثوابتو په پرتله کولو

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{5}$$
$$1 = 4A - C \Rightarrow C = 4A - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

ځکه نو

$$\int \frac{dx}{(x-1)(X^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x+1}{x^2+4}dx$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{2x+2}{x^2+4}dx$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{2xdx}{x^2+4} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2^2}$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

٤. مثال: د $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2}$ انتیګرال ارزښت و ټاکئ.

حل:

د $e^x - 1 = z$ په اېښودلو، یعنې ،

$$e^x dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{e^x} = \frac{dz}{z+1}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dz}{(e^x-1)^2}$$
$$I = \int \frac{dz}{(z+1)z^2}$$

فرض کړئ چې

$$\frac{1}{(z+1)z^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}$$

$$\therefore \quad 1 = Az^2 + B(z+1)z + C(z+1)$$

د $z=0$ لېږه $C=1$

د$z=-1$ لپاره $A=1$

د z^2ضریبونو په پرتله کولو

$$A+B=0$$
$$B=-A=-1$$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z+1}-\int\frac{dz}{z}+\int\frac{dz}{z^2}=\ln(z+1)-\ln z-\frac{1}{z}$$
$$=\ln e^x-\ln(e^x-1)-\frac{1}{e^x-1}$$
$$=x-\ln(e^x-1)-\frac{1}{e^x-1}$$

٥. مثال: د $\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta+4\sin\theta-5}d\theta$ انتیګرال وټاکئ.   [P.U.1989]

حل:

$$I=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta+4\sin\theta-5}d\theta$$

$\sin\theta=z$ ، یعنې، $\cos\theta\, d\theta=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z^2+4z-5}$$

فرض کړئ چې $\frac{1}{z^2+4z-5}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-1}$

$$\therefore \quad 1=A(z-1)+B(z+5)$$

د $z=-5$ لپاره، $1=-6A\Rightarrow A=-\frac{1}{6}$

د $z=1$ لپاره، $6B=1\Rightarrow B=\frac{1}{6}$

لدې کېله

$$I=-\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z+5}+\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z-1}$$
$$=-\frac{1}{6}\ln|z+5|+\frac{1}{6}\ln|z-1|$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{z-1}{z+5}\right|=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin\theta-1}{\sin\theta+5}\right|$$

٦. ٥ پوښتنې

١. لاندې انټيګرالونه و ټاکئ.

1) $\int\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}dx$ 2) $\int\frac{dx}{1+x+x^2+x^3}$

3) $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ 4) $\int\frac{dx}{x(x^n+1)}$

5) $\int\frac{dx}{x(x^4+1)}$

٢. لاندې انټيګرالونه و ټاکئ.

1) $\int\frac{3x+1}{2x^2-2x+3}dx$ 2) $\int\frac{x^2dx}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

3) $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$ 4) $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2-4)}$

5) $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

٣. لاندې انټيګرالونه و ټاکئ.

1) $\int\frac{x^2+1}{x^3+1}dx$ 2) $\int\frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

3) $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$ 4) $\int\frac{dx}{x(x+1)^3}$

٤ . لاندې انټيګرالونه و ټاکئ.

$$1)\quad \int \frac{dx}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} \qquad 2)\quad \int \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)(3+\sin x)}$$

$$3)\quad \int \frac{\sin x}{\sin 3x}dx \qquad 4)\quad \int \frac{4e^{x}+6e^{-x}}{9e^{x}-4e^{-x}}dx$$

$$5)\quad \int \frac{\sec x\, dx}{1+\cos ecx}$$

۵. لاندي انتیګرالونه وټاکئ.

$$1)\quad \int \frac{dx}{\sin x-\tan x} \qquad 2)\quad \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x-3\tan x+1}$$

$$3)\quad \int \frac{dx}{\sin x(3+4\cos x)} \qquad 4)\quad \int \frac{dx}{a+be^{x}}$$

۱.۶.۶ د غیر ناطق تابعګانو انتیګرال نیونه

۱. شپږ مهم انتیګرالونه:

$$1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin\frac{x}{a} \quad \text{یا} \quad -arc\cos\frac{x}{a}$$

$$2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin h^{-1}\frac{x}{a} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$3)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cos h^{-1}\frac{x}{a} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$4)\quad \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$5)\quad \int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin h^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$6)\quad \int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\cos h^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

لاندي تعویضونه یا ونج کول ددغو انتیګرالونو لاسته راوړني لپاره ډېر ګټور دي.

۱. د $\sqrt{a^2-x^2}$ لپاره، $x=a\sin\theta$ په اینودلو،

۲. د $\sqrt{a^2+x^2}$ لپاره، $x=a\tan\theta$ په اینودلو،

۳. د $\sqrt{x^2-a^2}$ لپاره، $x=a\sec\theta$ په اینودلو،

مثال: د $\sqrt{x^2+2x+3}dx$ انتیګرال وټاکئ.

$$I=\int\sqrt{x^2+2x+3}dx=\int\sqrt{x^2+2x+1+2}dx$$
$$=\int\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}dx$$
$$=\frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}{2}+\frac{2}{2}\sinh^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}{2}+\sinh^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

۲. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ډوله انتیګرالونه

دا ډول انتیګرالونه مونږ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ په دوه دجمعي حاصل یا تفاضل په مربع بڼدې اړوو او مونږ پورته شپږو یادو شویو معیاري (سټندرد) شکلونو څخه د یوه په اینودلو او برسیره پردې مونږ د انتیګرال نیولو لپاره اړونده فورمولونه کاروو.

مثال: د $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{16}-2-\frac{9}{16}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{23}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{23}}$$

۳. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ډوله انتیګرالونه

دا ډول انتیګرالونه، مونږ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ په دوه دجمعي حاصل یا تفاضل په مربع باندې اړوو او مونږ پورته شپږو یادو شویو شکلونو څخه یو لاس ته راوړو او د انتیګرال نیولو لپاره اړونده فورمول کاروو.

مثال: د $\int\sqrt{3-2x-2x^2}\,dx$ انتیګرال وټاکئ.

$$\int\sqrt{3-2x-2x^2}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{3}{2}-x-x^2}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int\sqrt{\left(\frac{3}{2}-(x+x^2)\right)}dx$$

$$=\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-(x^2+x+\frac{1}{4})}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]}dx$$

$$=\sqrt{2}\left\{\frac{(x+\frac{1}{2})\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-(x+\frac{1}{2})^2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}\sin^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{(2x+1)\sqrt{\frac{3}{2}-x-x^2}}{4}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$$

$$=\frac{(2x+1)\sqrt{3-2x-2x^2}}{4}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$$

۴. $\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ډوله انتیګرالونه

پدی دول حالتونو کي مونږ A او B ثوابت په دارنګه یوي طریقي سره ټاکو چي

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2-bx-c)-B$$

او، پدي ډول مونږانتیګرالي تابع دانتیګرال دوه حاصل دجمعي په څیر څرګندوو، کوم چه په آسانۍ سره ټاکل کیږي.

مثال: د $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-4}}dx$ انتیګرال وټاکئ.

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = \int \frac{2x+2-1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$$
$$= \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$
$$= (x^2-2x+4)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)dx - \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$
$$= \frac{(x^2+2x+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \sinh^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$
$$= 2\sqrt{x^2+2x+4} - \sinh^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

۵. $\int \frac{px^2-px+r}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ بوله انتیګرالونه

پدي ډول حالتونوکي، مونږ د A، B او C ثوابت دارنګه لاس ته راوړوچي

$$px^2+qx+r = A(ax^2+bx+c)+B\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+C$$

او پدي ډول راکړشوي انتیګرالي تابع ددریو ساده انتیګرال وړانتیګرالي تابعګانود جمعي د حاصل په څیرلیکو،

مثال:

$$\int \frac{x^2-2}{\sqrt{3-x^2}}dx = -\int \frac{2-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx$$

$$= -\int \frac{3-x^2-1}{\sqrt{3-x^2}}dx = -\int \frac{3-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= -\int \sqrt{3-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= -\left\{\frac{x\sqrt{3-x^2}}{2} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right\} + \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{x\sqrt{3-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

٦. $\int \frac{dx}{(x+k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ دوله انتيګرالونه

په دارنګه انتيګرالونو کي، مونږ $x-k=\frac{1}{z}$ ونج کوو.

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$x+1=\frac{1}{z}$ په اېښودلو،

$$\therefore \quad dx = -\frac{1}{z^2}dz$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\frac{1}{z}\sqrt{(\frac{1}{z}-1)^2+1}}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1-2z+2z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}-z+z^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2z-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\frac{1-x}{1+x}$$

۲.۶.۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int\sqrt{3x^2-4x+1}\cdot dx$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$I=\int\sqrt{3x^2-4x+1}\,dx=\sqrt{3}\int\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\;dx$$

$$=\sqrt{3}\int\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}\;dx$$

$$=\sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}\;dx=\sqrt{3}\int\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\;dx$$

$$=\sqrt{3}\left\{\frac{(x-\frac{2}{3})\sqrt{(x-\frac{2}{3})^2-(\frac{1}{3})^2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cosh^{-1}\frac{(x-\frac{2}{3})}{1/3}\right\}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\frac{(3x-2)\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}}{6}-\frac{1}{18}\cosh^{-1}(3x-2)\right\}$$

$$=\frac{3x-2}{6}\sqrt{3x^2-4x+1}-\frac{\sqrt{3}}{18}\cos^{-1}h(3x-2)$$

۲. مثال: $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh^{-1}\frac{x-\frac{2}{3}}{1/3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh^{-1}(3x-2)$$

۳. مثال: د $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2x+x\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+2x+3}$$

۴. مثال: د $\int\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$I=\int\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{x^2+x+1+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\sqrt{x^2+x+1}dx+\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$
$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+x-1}}dx$$
$$=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sinh^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$
$$=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4}+\frac{3}{8}\sinh^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4}+\frac{3}{8}\sinh^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$
$$=\left(\frac{2x+1}{4}+1\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\sinh^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}$$
$$=\left(\frac{2x+5}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$
$$=\left(\frac{2x+5}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{15}{8}\sinh^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

۵. مثال: اوس $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$ انتیګرال وټاکئ.

حل:

$$I=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

د $x+1=\frac{1}{z}$ په اینبودلو

$$x=\frac{1}{z}-1 \quad \therefore \quad dx=-\frac{1}{z^2}dz$$

$$x^2=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1$$

$$x^2-1=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}$$

$$\therefore \quad I=\int \frac{1}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}}}\left(\frac{-1}{z^2}dz\right)=-\int \frac{dz}{\sqrt{1-2z}}=-\int (1-2z)^{-1/2}dz$$

$$=\sqrt{1-2z}=\sqrt{1-\frac{2}{x+1}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

٦. مثال: اوس د $\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-4x}}$ انتیګرال لاس ته راوړئ.

حل:

$$I=\int \frac{1}{(1-2x)\sqrt{1+4x)}}dx$$

د $1+4x=z^2$ یا $x=\frac{z^2-1}{4}$ په اینبودلو، $dx=\frac{z\,dz}{2}$

$$\therefore \quad I=\int \frac{z\,dz/2}{(1-\frac{z^2-1}{2})\cdot z}=\frac{1}{2}\int \frac{dz\cdot 2}{3-z^2}$$

$$=\int \frac{dz}{3-z^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{1-4x}}{\sqrt{3}-\sqrt{1+4x}}$$

۷. **مثال:** د $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ انتیګرال لاس ته راوړئ.

حل:

$$I=\int \frac{1}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$x=\frac{1}{z}$ په اینودلو، $dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$$\therefore \quad I=\int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{(1+\frac{1}{z^2})\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}=-\int \frac{zdz}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}$$

اوس $z^2-1=t^2$ ونج کوو،

$$2zdz=2tdt$$

$$\Rightarrow zdz=tdt$$

او $z^2+1=t^2-2$

$$\therefore \quad I = -\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)t} = -\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} arc\tan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} arc\tan \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} arc\tan \frac{\sqrt{1/x^2-1}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} arc\tan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$$

۶.۶ پوښتنې

۱. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ 2) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

3) $\int \sqrt{x^2-4x+5}\,dx$ 4) $\int \sqrt{2x^2+3x+4}\,dx$

۲. د لاندې افادو انتیګرال ونیسي.

1) $\frac{1}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}$

3) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 4) $\frac{x+1}{\sqrt{4+5x-x^2}}$

5) $(x-1)\sqrt{1-x-x^2}$

۳. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ 2) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x-2}}$

3) $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x+5}}$ 4) $\int \frac{x^4dx}{(x-1)\sqrt{x+2}}$

۴. لاندې افادو انتیګرال ونیسي.

1) $\frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x-1}}$ 2) $\frac{1}{(x^2+4x+5)\sqrt{x+2}}$

3) $\frac{x}{(x^2-2x+2)\sqrt{x-1}}$ 4) $\frac{1}{(x^2+5x+6)\sqrt{x+1}}$

۵. لاندې انټیګرالونه وټاکئ.

$$1)\quad \int\frac{dx}{(3+2x)\sqrt{x^2+x+1}} \qquad 2)\quad \int\frac{dx}{(1+3x)\sqrt{x^2-2x-5}}$$

$$3)\quad \int\frac{dx}{x(x-1)\sqrt{x^2+1}} \qquad 4)\quad \int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}$$

۶. لاندې افادو انټیګرال وټاکئ.

$$1)\quad \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2-4x-5}} \qquad 2)\quad \frac{2x^2+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$3)\quad -\frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}} \qquad 4)\quad x\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

۷. لاندې انټیګرالونه وټاکئ.

$$1)\quad \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \qquad 2)\quad \int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$3)\quad \int\frac{x^2+2x+3}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad 4)\quad \int\frac{dx}{(2x^2-3x+1)\sqrt{3x^2-2x+1}}$$

$$5)\quad \int\frac{x^{1/3}+1}{x^{1/3}-1}\,dx$$

۱.۷.۶ دمثلثاتي تابعګانو انټیګرال نیونه

۱. $\int\frac{dx}{a-b\cos x}$ یا $\int\frac{dx}{a-b\sin x}$ دوله انټیګرالونه:

په دا دول حالتونو کې، مونږ لیکوچې $\sin x=\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}$ او $\cos x=\frac{1-\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}$ او سربیره پردې $\tan x/2=z$ ونج کوو.

مثال: $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$ وټاکئ.

فرض کړئ چې $I=\int\frac{dx}{5+4\cos x}$، د $z=\tan\frac{x}{2}$ په اېښودلو

$$\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$$

$$dx=\frac{2dz}{\sec^2 x/2}=\frac{2dz}{1+z^2}$$

او

$$\cos x=\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$=\int\frac{1+z^2}{5+5z^2+4-4z^2}\cdot\frac{2d}{1+z^2}$$

$$=\int\frac{2dz}{z^2+9}=\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\arctan(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2})$$

۲. د $\int\sin^n xdx$ یا $\int\cos^n xdx$ شکل انتیګرالونه چېرته چې n یو مثبت تام عدد وي.

کله چې n جفت وي مونږ د انتیګرال لپاره د اسانه کولو فارمولونه پیداکوو او کله چې n تاق وي $\int\sin^n xdx$ لپاره $\cos x=z$ او $\int\cos^n xdx$ لپاره $\sin x=z$ وضع کوو.

د تحویل(کموني یا تبدیلونی) فارمول (Reduction Formula): یو فارمول یا رابطه کوم چې یو راکړ شوی انتیګرال د یوورته انتیګرال په حدونوکې چې انتیګرال نیول یې آسانه وي بیان کړي هغې ته د تبدیلوني یا کموني فارمول وایي.

د تبدیلونی فارمول به په بل څپرکي کې په تفصیل (details) سره تشریح شي.

مثال: د تبدیلوني فارمول د $\int\sin^n xdx$ او $\int\sin^3 xdx$ لپاره پیدا کړئ.

حل: که چیرې

$$I_n = \int \sin^n x dx$$
$$= \int \sin^{n-1} x \sin x dx$$

(د حصوي انتیګرال تاکلو پواسطه)

$$= \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x dx$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$
$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$$

$$\therefore \quad I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$
$$\therefore \quad I_n(1+n-1) = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-1}$$
$$n I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$
$$I_n = -\frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

تبدیلوني(کموني) غوښتل شوي فارمول دی.

د $n = 3$ لپاره

$$\int \sin^3 x dx = \frac{-\cos x \cdot \sin^2 x}{3} + \frac{3}{2}\int \sin x dx$$
$$= -\frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{3} - \frac{2}{3}\cos x$$

په ورته ډول مونږکولی شو ثبوت کړو چې

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} - \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

اوس مونږ یو مثال ځیرو کله چې n تاق وي.

$$I = \int \sin^5 x dx$$
$$= \int \sin^4 x \cdot \sin x dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx$$

$\cos x = z$ په ایښودلو، یعني $-\sin x dx = dz$

$$\therefore \quad I = -\int (1-z)^2 dz$$

$$= -\int (1 - 2z^2 - z^4) dz$$

$$= -\left(z - 2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right)$$

$$= -\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$$

۲.۷.۶ حل شوي مثالونه

۱. مثال: د $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$ انتیګرال وخېږئ.

حل: فرض کړئ چې

$$I = \int \frac{dx}{2+3\cos x}$$

$\tan\frac{x}{2} = z$ په ایښودلو

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

او

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{2+3\frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{1+z^2}{2+2z^2+3-3z^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$= \int \frac{2dz}{5-z^2} = 2\int \frac{dz}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - z^2}$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+z}{\sqrt{5}-z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\tan\frac{x}{2}}$$

۲. مثال: د $\int \tan^n xdx$ لپاره د تبدیلوني فارمول او هم د $\int \tan^n xdx$ انتيګرال قيمت و ټاکئ.

حل:

$$\int \tan^n xdx = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 xdx$$

$$= \int \tan^n x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 xdx - \int \tan^{n-2} xdx$$

$$\therefore \quad \int \tan^n xdx = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - \int \tan^{n-2} dx$$

کوم چې د تبديلوني غوښتل شوی فارمول دی.

د $n=5$ او 3 په اېښودلو مونږ لاسته راوړوچې:

$$\int \tan^5 xdx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 xdx$$

$$\int \tan^3 xdx = \frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan xdx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln \sec x$$

لدې امله،

$$\int \tan^5 xdx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln \sec x$$

۳. مثال: د $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ انتيګرال ارزښت و ټاکئ.

حل: $\tan\frac{x}{2} = z$ په اېښودلو

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dz$$

یا $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$= \int \frac{2dz}{1+z^2+2z+1-z^2} = \int \frac{2dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z}$$

$$= \ln|1+z| = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|$$

۷.۶ پوښتنې

۱ . لاندې انتیګرالونه و ټاکئ.

1) $\int \cos^5 x\,dx$ 2) $\int \sin^7 x\,dx$

3) $\int \cos^5 x \sin^3 x\,dx$ 4) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

۲. لاندې انتیګرالونو قیمت په لاس راوړئ.

1) $\int \cos^8 x\,dx$ 2) $\int \sin^6 x\,dx$

۳. د $\int \sec^n x\,dx$ لپاره د تبدیلوني یو فارمول پیداکړئ او بیا د $\int \sec^6 x\,dx$ وټاکې.

۴. د $\int x^n e^{ax} dx$ لپاره د تبدیلوني یو فارمول پیداکړئ او بیا د $\int x^5 e^{ax} dx$ وټاکئ.

۵. د لاندې افادو انتېګرال ونیسې.

1) $\dfrac{\cos x}{2-\cos x}$ 2) $\dfrac{1}{3\sin x+\tan x}$

3) $\dfrac{1}{4\sin x-3\cos x}$ 4) $\dfrac{1}{\tan x-\sin x}$

5) $\dfrac{1}{5+2\sin x-\cos x}$ 6) $\dfrac{\cos ec\, x}{2-\cos ec\, x}$

٦. بېلابېلې پوښتنې

١ . لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$ 2) $\int \dfrac{2\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}$

3) $\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}}$

٢ . د لاندې انتیګرالونو ارزښت وټاکئ.

1) $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ 2) $\int\sqrt{\sin x\tan x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}dx$

3) $\int \dfrac{x+(\cos^{-1}3x)^{2}}{\sqrt{1-9x^{2}}}dx$

٣. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \dfrac{(1-\cos x)^{1/2}}{\left[\cos x(1+\cos x)(2+\cos x)\right]^{1/2}}dx$

2) $\int \cos x(2\cot^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}})dx$

٤. لاندې انتیګرالونو ارزښت وټاکئ.

1) $\int \dfrac{dx}{(x-a)(b-x)}$ 2) $\int\left(\sin^{-1}x\right)^{2}dx$

٥ . لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2} dx$ 2) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

3) $\int \frac{\cot x - 3\cot 3x}{3\tan 3x - \tan x} dx$ 4) $\int \frac{(x+1)^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

٦. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ 2) $\int \frac{dx}{a - b\sin x}$

3) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$ 4) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x}$

5) $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}$ 6) $\int arc\ \sin \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx$

٧. لاندې انتیګرالونه وټاکئ.

1) $\int \frac{dx}{a + b\sinh x}$ 2) $\int \frac{dx}{a + b\cosh x}$

3) $\int \frac{\sin^3 x}{a + b\cos x} dx$ 4) $\int \left[\ln \ln x - \frac{1}{(\ln x)^2} \right] dx$

5) $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$ 6) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx$

علمي سرچيني(موخذونه)

۱. مورای . ر . سپيجيل" لوړو محاسباتو کلکولس" مکگرو – د سنگاپور د کتابونو غټه کمپنی.

۲. سمارت و . م . " کروي ستوروپيژندنه" چاپولو ځای د کمبريج پوهنتون(1965) .

۳. ښاغلی ا . و . " تحليلي هندسه او کلکولس" نيويارک ماسميلان کمپنی.

۴. پتر . اچ . سيلبي . " تحليلی هندسه" هارکورت نيويارک د جانوويچ د چاپولو ځای.

۵. هو وارد انتن "کلکولس" جانويلي او سنس، د نيويارک چاپخانې مل (ضميمه).

۶. تام . م . اپوستال، "کلکولس دويم جلد" جانويلی او سنس، دنيويارک چاپخانې مل (ضميمه).

۷. تام .م . اپوستال ، "رياضي انالیز" د پاکستان اساسي عامه کتابتون.

۸. سمت . ث " د هندسی مختصاتو مخروطي مقاطع برخي" لندن ماسميلان کمپني . لميټد.

۹. مسکای، ا.د.او. لويس ټافت "عملي رياضي اول جلد" لندن ښاغلی اسحق پټمن او سونس لميټد.

د ژباړن لنډه پېژندنه

پوهندوی سید شیراقا(سیدي) د سید قابل شاه حسني مشهور په معلم پاچا زوی او د سید شریف شاه مشهور په غونډی پاچاه لمسی، په ۱۳۲۵ لمریز کال د تلې د میاشتې په (۱۶) نېټه د لغمان ولایت د الینګار ولسوالۍ د خواجه خېل (نیازي) قریې د غونډی په کلي کې سترګې په دې فاني نړۍ کې پرانیستي دي.

استاد خپلې لومړنۍ زده کړې د سنکره په لومړنۍ ښوونځي کې، منځنۍ زده کړې د ابن سینا منځنۍ ښوونځي کې، د لیسې د دورې زده کړې یې د کابل په دارالمعلمین کې سرته رسولې دي او لوړې زده کړې یې د لسانس په سویه د کابل پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي د ریاضي او فزیک څانګه کې پای ته رسولې دي، خو د ځینو ستونزو له امله استاد په دې ونه توانېده چې نورې زده کړې هم وکړي.

استاد د معلمۍ مقدسې دندې برسېره د کندز، ننګرهار او کندهار په ولایتونو کې د پوهنې لوی مدیر په توګه او د تعلیم او تربیې وزارت د ثانوي زده کړو په ریاست کې دعلمي او مسلکي غړي په توګه دنده اجرا کړې ده.

وروسته په کال ۱۳۶۱ لمریز کې د ننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې پوهنځي د ریاضي او فزیک په څانګه کې د استاد په توګه تقرر لاسته راوړی دی او تر اوسه پورې په همدغه پوهنځي کې د ریاضي استاد په توګه دنده لري.

زه ورته د اوږد او خوشحاله عمرغوښتونکي یم

په خورا درنښت

انجنیر مجیب الرحمٰن (سیدي)

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 250 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism and Agriculture (96 medical textbooks funded by German Academic Exchange Service, 140 medical and non-medical textbooks funded by German Aid for Afghan Children, 6 textbooks funded by German-Afghan University Society, 2 textbooks funded by Consulate General of the Federal Republic of Germany, Mazar-e Sharif, 1 textbook funded by Afghanistan-Schulen, 1 textbook funded by SlovakAid, 1 textbook funded by SAFI Foundation and 3 textbooks funded by Konrad Adenauer Stiftung) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic and Kabul Medical universities. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit ".

We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 140 medical and non-medical textbooks so far.

I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me from 2010 to 2016 in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Acting Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister Prof Abdul Tawab Balakarzai, Administrative & Financial Director Ahmad Tariq Sediqi, Chancellor of Nangarhar University, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project .

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Fahim Habibi and Fazel Rahim Baryal in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul, Afghanistan, May, 2017
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.de

Message from the Ministry of Higher Education

In history, books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science, and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of higher education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers and authors, and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty, and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to German Aid for Afghan Children and our colleague Dr. Yahya Wardak that have provided opportunities for publishing this book.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof. Dr. Farida Momand
Acting Minister of Higher Education
Kabul, 2017

Book Name	Calculus & Analytic Geometry I
Author	Prof Zia-ul-Haq
Translator	Assist Prof Sayed Sher Aqa Sayedy
Publisher	Nangarhar University, Education Faculty
Website	www.nu.edu.af
Published	2017, First Edition
Copies	1000
Serial No	235
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul
Office 0756014640
Email textbooks@afghanic.de

Printed in Afghanistan 2017

Sahar Printing Press

ISBN 978-9936-620-39-1