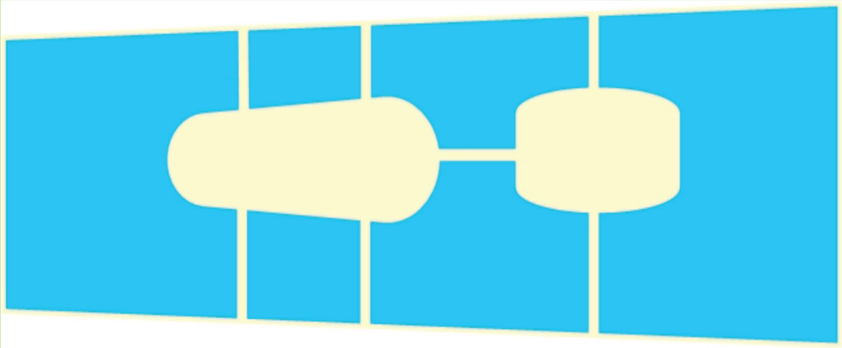
ننگرهار ساینس پوهنځی

سیټونه او هر څه د هغوی په هکله



لیکوالی لیف بوکوفسکی

ژباړه سلطان احمد نیازمن

پلورل منع دی

۱۳۹۹

سیټونه او هر څه د هغوی په هکله

Sets and All That About Them

لیکوالی لیف بوکوفسکی

ژباړه سلطان احمد نیازمن

Nangarhar Science Faculty

Afghanic

Author Prof Lev Bukovský

Translated by Sultan Ahmad Niazman

Sets and All That About Them

$$2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Funded by

Kinderhilfe-Afghanistan

ISBN 978-9936-633-42-1

Not for Sale

2020

اقرأ باسم ربك الذي خلق

سیټونه او هر څه د هغوی په هکله

لیکونکی **لیف بوکوفسکی**

ژباړه **سلطان احمد نیازمن**

لومړی چاپ

دغه کتاب په پي ډي ایف فارمټ کې په مله سي ډي کې هم لوستلی شئ:

د کتاب نوم	سيټونه او هر څه د هغوی په هکله
ليکوال	لېف بوکوفسکی
ژباړه	سلطان احمد نيازمن
خپرندوی	ننګرهار پوهنتون، ساينس پوهنځی
ويب پاڼه	www.nu.edu.af
د چاپ کال	۱۳۹۹، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۳۰۵
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org
چاپ ځای	افغانستان تايمز مطبعه، کابل، افغانستان

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Eroes کورنۍ يوې خيريه ټولنې لخوا تمويل شوی دی.
اداري او تخنيکي چارې يې په آلمان کې د افغانيک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او ليکنې مسئوليت د کتاب په ليکوال او اړونده پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبيق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤليت نه لري.

د تدريسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړيکه ونيسئ:
ډاکتر يحيی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کارته ۴، کابل
تېليفون ۰۷۵٦۰۱٤٦٤۰، ۰۷۰٦۳۲۰۸۴۴
ايمېل textbooks@afghanic.de

د چاپ ټول حقوق له مؤلف سره خوندي دي.

ای اس بي ان ۹۷۸-۹۹۳٦-٦۳۳-۴۲-۱

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کې ډېر مهم رول لوبولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې دوامداره زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانگو کې درسي کتابونه تألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کړی دی او د پوهې موتور یې په حرکت راوستی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مواد برابر او چاپ کړي، چې له چاپ وروسته د گرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کړو د کیفیت په لوړولو او د علمي پروسې په پرمختگ کې یې نېک گام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د گرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسي مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کې د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او زمونږ همکار ډاکتر یحیی وردک څخه مننه کوم چې د دې کتاب د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چې نوموړې گټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څو په نیږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنمل دیپلوم انجنیر عبدالتواب بالاکرزی

د لوړو زده کړو سرپرست وزیر

کابل، ۱۳۹۸

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمیر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

تر اوسه پورې موږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل، کابل طبي پوهنتون او کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۳۱۱ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالیزم او زراعت پوهنځیو (۹۶ طبي د آلمان د علمي همکاریو ټولنې DAAD، ۱۹۰ طبي او غیر طبي د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې Kinderhilfe-Afghanistan، ۷ کتابونه د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې DAUG، ۲ کتابونه په مزار شریف کې د آلمان فدرال جمهوري جنرال کنسولګرۍ، ۳ کتابونه د Afghanistan-Schulen، ۱ کتاب د صافي بنسټ ، ۲ کتابونه د سلواک اېډ، ۸ کتابونه د کانراد ادناور بنسټ KAS، ۱ کتاب په آلمان کې د اناسیس کمپنۍ لخوا) په مالي مرسته چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړونده پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او مؤسساتو ته په وړیا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.afghanistan-ecampus.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کولای شئ.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان نشي کولای عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پیدا کړي."

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هیواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړینه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او چپټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زمونږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یاد شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د مؤلفینو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مؤلف او یا مونږ ته په لیکلي بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

له افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی، دوی تر دې مهاله د ننګرهار پوهنتون د ۱۹۰ عنوانه طبي او غیرطبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه اخیستی دی.

د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او CIM (Center for International Migration & Development) څخه، چې زما لپاره یې له ۲۰۱۰ نه تر ۲۰۱۶ پورې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړي وو، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو له سرپرست وزیر پوهنمل دیپلوم انجنیر عبدالتواب بالاکرزی، مالي او اداري معین ډاکتر احمد سیر مهجور، مالي رئیس احمد طارق صدیقي، په لوړو زده کړو وزارت کې سلاکار ډاکتر ګل رحیم صافي، د پوهنتونونو رئیسانو، د پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مؤلف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو-کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز او فهیم حبیبي څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، فبروري، ۲۰۲۰

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ایمیل: textbooks@afghanic.de

فهرست

فهرست.. i
سریزه.. iv
تقریظ.. vi
لمړی فصل.. 1
تاریخي او تیوریکي مقدمه.. 1
1.1 لایتناهی په ریاضي کي.. 1
2.1 د لایتناهی پارادکسونه 3
3.1 څه ډول سیټونه وجود لري.. 6
4.1 د سیټونو الجبر 8
5.1 اړیکي Relations.. 10
دوهم فصل 14
د سیټو څخه درست او غلط کار اخیستل 14
1.2 حقیقي عددونه 14
2.2. مپینګ هغه قاعده ده چي 22
3.2. د غیر مساواتو د حل په هکله 35
4.2. د تحلیلي هندسی مسئلي.. 40
5.2. بیاهم د مپینګ په هکله.. 42
6.2. لوبې.. 52
7.2. د غبرګوني اړیکو په هکله.. 58
دریم فصل.. 75
د سیټ د عنصرو شمېر څه شي ته وایي.. 75
1.3. کوچنیان په خپل منځ کي چاکلیټ څنګه وېشي.. 75
2.3. د هېري د ضرورت په هکله.. 81
3.3. د پور لایتناهي پروسه 84
4.3 کم سیټ متناهي دی 90
5.3 د اعظمي حد اصل (پرنسیپ) (Principle of maximum).. 95
6.3. د شمېر وړ countable سیټونه.. 99
7.3. حقیقی عددونه بی شمېرهUncountable ډېر دي. 111

8.3. د یریشله Dirichlet پرنسیپ.. 118
ځلرم فصل 122
د متناهي او لایتناهي سره د شمېرنې اصول.. 122
1.4. د شمېرنې عملیې د سیټو پر بوج باندي... 122
2.4. د کانتور قضیه 132
3.4. د طبیعی عددو سره د دوه ډوله شمېرنې په هکله.. 134
4.4. د کمبیناتوریک Combinatorics(د ترکیب د شمېرنې) عنصرونه............................ 138
5.4. شمولیت Inclusion – حذف Exclusion.. 148
6.4. بیاهم د یریشله (DIRICHLET) د پرنسیپ په هکله.. 154
7.4. د کانتینووم continuum بوج.. 164
پنځم فصل 170
د ښه ترتیب(اوډلو) **Well Order** په هکله.. 170
1.5. ترتیبي ډولونه(ټیپونه) Ordinal Types او دهغوی اوډنه.. 170
2.5. ښه ترتیب سوي سیټونه او بوج 181
3.5. هر سیټ ښه ترتیبولای سو؟... 188
4.5. ښپله ټاکني اکسیومي څخه د ژوند په هکله.. 195
شپږم فصل 201
د سیټ د تیوری ماوراء (مافوق) ریاضي**Metamathematics**.................................... 201
1.6. دسیټ د تیوري اکسیوماتیک کول Axiomtization of set thoery........................ 201
2.6. د سیټ په تیوري کي د حقیقي عددو د جوړښت په هکله 205
3.6. د دریم د طرد قانون صدق نه کوي؟... 209
4.6. د سیټ د تیوري نه فیصله کېدونکي قضیې.. 212
5.6. نتیجه ؟.. 213
اندکس... 215
مآخذ 221

موراو پلار ته يې تقديموم

سريزه

په سريزه کي به هڅه وکم ، چي لوستونکي ته ددی کتاب موخه وړپه ګوته کم ، څو هغه پدي پوه سي ،چي پدي کتاب کي څه شي وېلټي او د څه شي پلټل ورته بي ځايه دي.

کتاب لکه د ايپسيلون د نشراتي مؤ سسي نور کتابونه د هغو لو ستونکو دپاره ليکل سوي دي چي رياضي ورته په زړه پوری ښکاري او لږ تر لږه د ليسي په سويه مکتب يې پای ته رسولئ وي. تر ډيره حده زموږ د ليسو د رياضي تر چوکاټ دباندي معلومات ته ضرورت نه پيدا کيږي. کتاب نه غواړي چي د سيټ د تيوري درسي کتاب سي، ځکه چي پدي برخه کي ډېر درسي کتابونه چاپ او يا و چاپ ته تيار دي.

د کتاب د ليکلو په ترځ کي مي د سيټ دتيوری د سستماتيکی تشريح هڅه نده کړي، خو د سيټ د تيوري ځنی مهمي مفکوري په خاص ډول هغه چي د معرفت په لار کي مرسته کوي، تشريح کړي دي. دلته هڅه سوی ده، چي مجرد ترينې مفکوري ته مشخصه بڼه ورکړم.ددي دپاره چي لوستونکئ په اسانی سره مجرده مفکوره په عيني ډول درک کړي، کله کله قصداً د مختلفو شکلو څخه کار اخلم (په ځنو برخو کي ممکن مبالغه سوي وي) . د بېلګي په ډول په 3.3,1.3,2.2 او داسي نورو رسالو کي.

د سيټ تيوري د رياضي د لايتناهي دتيوری په صفت منځ ته راغله او دغه خصوصيت يي تر نن ورځي پوري هم ساتلئ دي. ځکه نو مشکله ده چي د ليسي په رياضي د هغو مفکورو دپاره مناسب او اساسي ځای پيداکړو. ځکه چي د ليسي رياضي تر ډېره حده متناهي بڼه لري. که څه هم د ليسي په رياضي کی د سيټ د تيوري دژبي څخه د رياضي د مختلفو متنو د فورمولبندي دپاره کار اخيستل کيږي، خو دی ته د سيټ د تيوري څخه د کار اخيستلو ځای نسو ويلای. ډېر وخت مي په سستماتيکه بڼه کتله څو د سيټ د تيوری د مفکورو کاراخيستلو ځای د ليسي په رياضي کي ومومندم ، خو نتيجې يې خواري وي. د هغو څخه يوازي د هندسي مپينګ (د 5.4.2 بېلګي په څېر) او ترکيبي محاسبي (4.4—6.4 رسالي وګورئ) يادونه کولای سو.او نور نو اکثراً د سيټ د تيوري د ژبې څخه ددي دپاره کار اخلي، څو د سيټ دتيوري د ابتدايي مفهومو تمرين صورت ونيسي.

د سيټ د تيوری مفکوري د لايتناهي د تيوري په صفت په رياضي کي داسي مفکوري ور داخلی کړي، چي د متناهي رياضي په مسئلو کي هم غير بديهي رول لوبوي. د سيټ مفکوره ده ، چي په مجرد ه کتنه کي يې بايد د نورو جوړښتو څخه په بېل ډول ملاحظه کو. هڅه مي وکړه چي دغه نظر دلته ترسيم کړم (د بېلګي په ډول 6.2 رساله او په قسمي بڼه 4.4 رساله وګورئ) .

په ليکلو کي مي د متن پر منطقي جوړښت ټينګار کړئ دي. که څه هم د سيټ تيوري د هغه په ساده بڼه اوډم ، خو هغه لوستونکئ ، چي تنده يې نه ماتيږي، کولای سي چي ټول متن په ساده ګي سره د سيټ دتيوري په اکسيوملتيک چوکاټ کي، لکه په شپږم فصل کي ،راوړي.

د کتاب په متن کي می هڅه کړي ده، چي يوازی په دغه کتاب کي اوډل سوي معرفت باندی تکيه وکړم. په متن کي تمرينونه په اصل کي بېلګي او قضيې دي ، چي حل او ثبوت يې و لوستونکي ته پرېږدم. خو دهغوی پر نتيجو باندی بيا تکيه کوم. علاوه پردي نور تمرينونه هم سته، چي دهغوی محتوي تکميلي خصوصيت لري. د قضيې يا ليما د ثبوت پای په "q.e.d." سره په نښه کوم. هغه د لاتيني quod erat demonstrandum هغه څه چي ضروروه په ثبوت ورسيدل، لنډيز دي. رياضي پوهانو چي په لاتيني ژبه خپل کتابون ليکل ، ددغه لنډيز څخه يې کار اخيستي. د بېلګي پای د ■ په ذريعه په نښه کوم.

فارمولونه ، قضيي او بېلګي په يو رساله کي په پر له پسي ډول په دوو عددو په نښه کوم. خو کله چي د رسالي څخه بهر حواله ورکوم ، نو د درو عددو څخه کار اخلم. تصوېرونه په هر فصل کي په دوو عددو سره په نښه سوي دي.

د 4.1 او 5.1 رسالي ډېري لنډي دي، ځکه چي د يوی خوا هغه څه په بر کي نيسي ، چي په ليسو کي تدريس کېږي او دبلي خوا په [10] په مفصله توګه تشريح سوي دي. د همدي دليل له مخي د 7.2 او 2.6 رسالو متن را لنډ سويدي ، دغه موضوعات په تفصيل سره په [4] او [8] کي راغلي دي. په پاته متنو کي مي کوښښ کړيدي چي په بېلګو يې داسي تکميل کړم، چی دمفکورو په درک کي مرسته وکولای سي.

منطقي تړونکي (مفصلونه) ، نفي، استنباط ، معادل والي، منطقي جمع او منطقي ضرب په ¬ ، → ، ≡ ، ∨ ،∧ په ترتيب سره په نښه سوي دي. «د ټولو دپاره» او «وجود لري» کوانتيفيکاتورونه په ∀ او∃ په نښه سوي دي. په هغه صورت کي چي مفهومونه او سمبولونه زموږ د ليسو د درسی کتابو سره تطابق و نه کي ، نو هغه څه می غوره ګڼلي دي، چي په د رياضي په عمومي نشراتو کي مروج دي.

په پای کي د ټولو هغو څخه ، چی په خپلو نظريو او لارښونو يې ددي کتاب په ترتيب کي مرسته کړي ده، مننه کوم.ښاغلو استادانو prof.dr. T. Šalát DrSc. او dr. P. Štěpánek CSc په خپلو رغنده وړانديزوباندي د کتاب په دقيق والي او د ځنونيمګړتيا ؤپه ليري کولو کی دقدر وړ مشورې راکړي. V. Dančik کتاب په غور سره ولوستي او دغلطيو په اصلاح کي يې مرسته کړي ده، مېرمن G. Nováková د کتاب متن ټايپ کړي دي ، د ټولو څخه مننه کوم.

ليکوال

لمړی فصل
تاریخي او تیوریکي مقدمه

پدی فصل کي به د لایتناهی دمفهوم د څېړنو مهمترینې لحظی د ریاضي له نقطهٔ نطره چي د سیټ د تیوري د منځ ته راتلو سبب سویدی ، په لنډ ډول مطالعه کړو.په بدیهی ډول (که ضرور وی) د سیټ مفهوم به تشریح کړو او به ښیو چي ددغه مفهوم د په کار ولوسره باید داحتیاط څخه کار واخیستل سی . په 3.1. رساله کی به د نوی سیټو د جوړولو پرنسیپونه مطالعه کړو چي وروسته به دهغو څخه په سیستماتیکه توګه کارواخلو. په واقعیت کي به دغه پرنسیپونه د سیټ د تیوري د اکسیوماتیکی بڼی یو ډول ساده شکل وی.

په 4.1. او 5.1. رسالو کی به د سیټو په هکله بنستیزې میندني چی زموږ د لیسو د ریاضي د تدریس محتوی تشکیلوی ، سره راغونډ کړو.د سیټ د تیوري د مناسبو درسی کتابو موجودیت زموږ د لنډوني دلیل دی.

1.1 لایتناهی په ریاضي کي

دلته به په ریاضي کي د لایتناهی د مفهوم تکامل او د هغه اړیکه د سیټ د مفهوم سره و څېړو.

په یقین سره به لوستونکي زما سره موافق وی چي طبیعی عددونه لایتناهی ډېر دی. که مسئله نوره هم وڅېړو ، نو زموږ نظرونه به یو دبل څخه لېری سي . ددی په هکله چي طبیعی عددونه لایتناهی ډېر دی ، دوه تصوره وجود لری.

لمړئ تصور دادی چي په اختیاری اندازه ډېر طبیعی عددونه لرو، پدی معنی چي که کم طبیعی عدد ولرو ، نو کولای سو چي تل یو بل نوی طبیعی عدد جوړ کړو. پدی حالت کي د ممکن یا پوټنشیل Potential لایتناهی په هکله ږغېږو. پدی معنی چي د ممکن لایتناهی مفکوره دداسی یوه تخنیک سره چي نوی شی جوړوی ، تړلی ده. په هره لحظه کی د متناهی شمېر شیانوسره کارکوو ، خو زموږ تکنالوژی موږته تل د بل نوی شی د جوړیدو امکانات برابروی.

دوهم تصورد آنی (لنډ ګنډ Actual, Current)لایتناهی دی، په همدغه شیبه کی د ټولو طبیعی عددو او یا ټولو حقیقی عددو تصور دی.

د یونان لرغونې ریاضی دلایتناهی د مفهوم سره ستونځې درلودی. څرګنده ده چي هغوی د آنی لایتناهی د مفهوم سره د ستونځوسره مخامخ سول، خو د هغه د څېړلو په هڅه کی نسول. تر یوی اندازی پوری یي آنی لایتناهی ردول. ارسطو د میلاد نه مخکی (322-384)وایي چي لایتناهی هغه څه دی چي تکمیل ندی ، بیله آخره دی(!) ځکه نو فکر یې نسو کولای. دغه مسئله د الیادښار زینون (Zenon) د میلاد څخه پنځه پېړي مخکي په خپلو مشهورو پارادکسو کی ښه ترسیم کړیدي .دهغه لمړئ پارادکس چي دیخوتومی Dichotomy[1] (غبرګیز) په نامه یادیږی ، په لاندی ډول د حرکت نه موجودیت "ثابتوی" .که وغواړو چي دA دښار څخه د B وښار ته داسي سفروکړو چي لمړی د هغوي ترمنځ نیمايي فاصله ووهو ، بیا دپاتي نیمايي ، نیمه فاصله طی کړویعنی څلرمه او بیا دنیمايي، دنیمايي نیمايي طی کړو....او په همدی ترتیب ادامه ورکړو، نو په هیڅ صورت به د B ښارته ونه رسیږوځکه چي تل به د مسافی یوه برخه زموږ په مخ کي وی.

---

[1] دیخوتومی عبارت دی دهغه ساختمان څخه چي د دوو یوله بله جلا برخو څخه جوړ سوی وی.د دیخوتومی کلمه یوناني ده او پر دووبرخو د وېشلو په معنی ده.زما په نظر په پښتو کي د غبرګیز کلمه دغه مفهوم ښه افاده کوی(ژباړن)

په دغه پارادکس کی زینون په اختیاری ځلي د مسافی د نېمولو امکان ته اجازه ورکوی. ددی دپاره چي ددغه حالت څخه (یعنی په اختیاری ځلي د فاصلی نېمول)ځان بچ کړی ، نو یو بل پارادکس یي طرح کړی چي هغه د لرغوني یونان د وخت نامتو او چابک منډی وهونکی اخیلس Achiles او کشپ ترمنځ مسابقه ده. چابک اخیلس ترکرار کشپه پوری نسی رسیدای ، ځکه ترڅوچي اخیلس د کشپ مخکني ځای ته رارسېږي، کشپ بیا یوڅه فاصله وهلی ده.کله چي بیا اخیلس د کشپ مخکني ځای ته رارسېږي ، نو کشپ بیا د خپله ځایه تللی دی.... په همدغه ډول ، دغه ډول مسافه لایتناهی ځلي وهلای سي. پدی معنی چي اخیلس به هیڅکله و کشپ ته ورونه رسېږي.

د پارادکسو د تحلیل څخه به تېر سو. دلمړي پارادکس دنن ورځي د حل راز د ښونځي د ریاضي د سلسلو په هکله په درسی محتوی کي نغښتئ دي . په ساده ډول لمړئ باید $\frac{1}{2}$ مسافه ولاړسو، وروسته بیا د نېمايي نېمايي یعنی $\frac{1}{4}$ لار ووهو، وروسته $\frac{1}{8}$ ،...او داسی نور.که د اصلی مسافي نېمايي لار د T په وخت کي ولاړسو، نو د نېمايي نېمايي یعنی $\frac{1}{2}$T او دهغه نېمايي به $\frac{1}{4}$T ،....او داسي نور کي طئ سي.پدی معنی چي د A د ښار څخه د B و ښار ته به په

$$T+\frac{1}{2}T+\frac{1}{4}T+...=2T \qquad ...(1.1)$$

وخت کي ورسېږو.

زموږ په توضیح کی مو د آني لایتناهي د تصور څخه په (1.1) کي د لایتناهي سلسلي په بڼه کار واخیستې.

اقلیدس (د میلاد نه مخکي ?275-?365)د لرغوني یونان د ریاضي یو د اساسی پرنسیپوڅخه د اتمي اکسیومي په بڼه فورمولبندي کي:ګل تر خپل هر جزء لوی دی.دغه تصور د متناهي شیانو د څېړنوڅخه منشاء اخلی. وروسته ګالیله (1564-1642)پوهېږی چي د دوو مختلفو قطعه خطو ترمنځ یو په یوه میپینګ وجود لری او پدی باوری دی چي که دهر طبیعی عدد n په مقابل کي د هغه دوهم طاقت (مربع) n^2 کښېږدو، نود ټولوطبیعی عددو یعنی ګل او دهغه د مربع یعنی جزء ترمنځ یوپه یو میپنګ وجودلری. خو پر هغه سربېره وایي "دا امکان نلری" . وروسته په 1832 کال کی نامتو ریاضی پوه کارل فریدریخ ګاوس (1777-1855) لیکي :د لایتناهی مجموعو څخه دعینی ګُل په صفت د کار اخیستلو په مقابل کی اعتراض کوم، دغه کار په ریاضي کي مجاز ندی . لایتناهی یوازی دبیان یو ترتیب دی ....

وروسته له لږ مودی څخه د پراګ فیلوسوف او ریاضي پوه برنارد بلزانو (1781-1848)په خپل اثر کي چي د لایتناهی پارادکسونه نومېږی (په 1847 کی لیکل سوی او په 1851 چاپ سو)هغه ګُل څېږي چي د لایتناهی شیانو مجموعه ده. دده اثر ته په هغه وخت کي چا پاملرنه ونه کړه.

جرمني ریاضي پوه جورج کانتور (1845—1918)د لایتناهی مجموعو و څېړنو ته بالکل د عملی پرابلمو دڅېړنوپه نتیجه کي څرمه سو. د اتلسمی اونولسمی پېړی ریاضي د فوریر سلسلي د مختلفو عملي پرابلمو د حل د پاره د کټوری وسیلي په صفت څېړلي .کانتور د تابع ګانو انکشاف مسئله د فوریر په سلسلو کی څېړله، لاندني قضیه یي ثابته کړه :

"که د ټولو $x \in <0,2\pi>$ د پاره د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nx + b_n.\sin nx) \qquad (1.2)$$

سلسله متقارب (کانورګینت) وی او د هغه د جمع حاصل په صفر سره مساوی سي ، نو د هر n دپاره $a_n=b_n=0$ دی . "

وروسته یې ثابته کړه چې امکان لری د قضیې فرضیه لږڅه کمزوری کړو پدی معنی چې استثناء به پکښې راولو ، یعنی کافی ده چی فرض کړو چې د (1.2) سلسله د ټولو $x \in <0,2\pi>$ په استثناء د یوه x_0 متقارب ده. وروسته یې وموندل چې کیدای سي چې دوو استثناءاتو اجازه ورکړو،تر هغه وروسته دری ، څلور ،...،بلاخره ویې کولای سوای چې "لایتناهی ډیر" استثناءاتو اجازه ورکړی. لاکن دلته باید اوس نو د احتیاطه کارواخیستل سی، ځکه چې د $<0,2\pi>$ مکمل انتروال او یا دبېلګې په ډول $<0,\pi>$ نسی کیدای چې ټوله انتروال مستثنئ کړو. پدی ډول کانټور د آنی لایتناهی د مفکوری و څېړلوته څرمه سواو د Menge[2] (مینګه) مفهوم یې معرفی او دهغه د خصوصیاتو څېړل یې پیل کړه.

دتېری سلیزی په پای کي چکې ریاضي پوه ماتیاښ لیرخ(MATYAŠ LERCH 1860-1922)د Menge کلمه په چکې کي په منوږښا Množina ژباړی. تحت اللفظی ژباړنه یې «منوږستوی množstvi »ده.د انتیګرال د کالکولس د درسی کتاب په ضمیمه کي چې د پیټر K.Peter له خوا لیکل سوی ؤ دسیټ د تیوری مقدمه د فویتیخ یارنیک Vojtech Jarnik 1897-1970 له خوا ولیکل سوه.په 1936 د چک د ریاضي پوهانو او فزیک پوهانو د اتحادیې له خوا د لمړی ځل دپاره د ایډوارډ چیخ Eduard Čech 1893-1960 د نقطه ای سیټونو Bodové množiny کتاب چاپ سو. د هغه راهیسی د چک او سلواک ریاضي پوهان په قاطع ډول د سیټ د مفهوم سره بوخت دی.

د سیټ روسی ژباړه منوږیستوو множество د انګلیسی کلمه سیټ ، لوستونکې ته د لوښو او کالو په اړوند معلومه ده ، د فرانسوی د انسامبل ensemble کلمه هم غیر له ریاضي څخه په ورځني ژوند کی هم استعمالیږی. پدی حساب اوس نو پوهیږو چې د سیټ مفهوم د آنی لایتناهی د څېړنې په نتیجه کی زیږیدلی دی.

2.1 د لایتناهی پارادکسونه

پدی برخه کی به هڅه وکړو چې د سیټ د کلمې دتعریف په هکله موافقی ته ورسیږو ،

دسیټ په هکله ځنې پارادکسونه به راوړو ، چې دنوموړی مفهوم د بی توجهی

د استعمال په نتیجه کی منځ ته راځي، ددغه درس نتیجې به په راتلونکو برخو کی په کار واچوو.

په ریاضي کي تجرد او د ریاضي طرز تفکر دی ته اړتیا لری چې په ریاضي کي نوی مفهومونه تعریف سي.نوی مفهوم تعریفول ، په څه معني؟څنګه کولای سو چې یو نوی مفهوم تعریف کړو؟په تقریبی ډول ویلای سو چې د نوی مفهوم تعریف یعنی د یوه شی تعینول (تعریفول)د نورومعلومو مفهومو په مرسته . دیوه ځایه یې باید راشروع کړو پدی معنی چې چېری باید واولی نقطی ته ورسیږو، هغی نقطی ته چې په اصل کي هغه نسو تعریفولای. ددغه ډول مفهومو ښې بېلګې په هندسه کی د نقطې ، مستقیی کرښې او سطحې او داسی نورو مفهومو بېلګې دی.سیټ هم همدا ډول یو مفهوم دی چې د

---

[2] Menge په آلماني ژبه مجموعی ته وایي (ژباړن)

تعریف په قطار کي په لمړی صف کي ولاړ دی. پدی معنی چی د ریاضی له نظره یې د نورو مفهومو پذریعه یې نسو تعریفولای. هڅه به وکړو چي د سیټ او نه سیټ ترمنځ فرق تشریح کړو.

بلزانو په تقریبی ډول د سیټ مفهوم داسی تشریح کوی[3] :

د معینو شیانو مجموعی ته به د کُل په شکل وګورو. په ځینو مجموعي کي د هغو د عنصرو تړون او ترتیب اساسی رول لوبوی. د بېلګي په ډول ګلاس او مات سوی ګلاس (ټوټه ټوټه سوی ګلاس)که څه هم د عین ټوټو څخه جوړ سودی ، خو دهغوی دترلو طرز متفاوت دی. سیټ داسی یوه مجموعه ده چي په هغه کي د عنصرو ترتیب او د هغوی تړون موړته بی تفاوته دی. و دغی مفکوری ته په 2.3 برخه کي بیا راګرځو.

د کانټور له نظره سیټ د هغو شیانو مجموعه ده چي یو کُل جوړوی. موږ به هم د بلزانو او کانټور سره موافق قراداد وکړو چي سیټ د ځني شیانو مجموعه ده. دغه ځني شیان به د سیټ د عنصرو په نامه یادکړو. که x د A د سیټ عنصر وی ، نو هغه به داسی لیکو:

x∈A (2.1)

د (2.1) نفی ، یعنی که x د A د سیټ عنصر نه وی ، نو هغه به داسی لیکو:

x ∉ A (2.2)

(2.1) به لولو چي x په A اړه لری او (2.2) به لولو چي x په A اړه نلری. پدی معنی چي سیټ هغه وخت پیژنو چی پدی پوه سو څه شئ په هغه اړه لری او څه شئ په هغه اړه نلری. زموږ د ترسیم سره موافق دوه سیټونه یوازی او یوازی هغه وخت سره مساوی دی چي عین عنصرونه ولری. په رسمی بنه دغه خاصیت ته د اکستنزیونالیټي Extensionality[3] اکسیومه وایي چي په لاندی ډول یې لیکلای سو:

A=B≡(∀x)(x∈A ≡ x∈B) (2.3)

پدی حساب د A دهغو طبیعی عددو سیټ چي پر 6 د ویش وړ وی د B د هغو طبیعی عددو دسیټ سره چي پر 3 دویش وړ وی ، مساوی ندی. ځکه چي 3∈B خو 3 ∉ A . په عین حال کی د C سیټ چي عنصرونه طبیعی جفت عددونه وی او پر 3 د ویش وړ دی ، د A د سیټ سره مساوی دی .

کیدای سي چي سیټ په مختلفو شکلو باندی راکړه سي. یا دا چی د عنصرو لست یې راکړه سي ، د بېلګي په ډول د D سیټ چي تر 20 کوچني ټول اولیه عددونه دی، دعنصرو په نومولو سره تعینیدای سی:

D={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} (2.4)

اکثرآ سیټ د هغه د مشخصاتو په ذریعه تعینوو. د 𝒱 خصوصیت د بیاني تابع پذریعه داسي تعینووچي د هغه د هر عنصر دپاره صدق وکي ، یعنی:

x∈E≡ 𝒱(x) (2.5)

[3] Extensionality د ریاضي په منطقو کی دقضاوت هغه معیار دی چي ددوو شیانو د مساوات په هکله صورت نیسی.(ژباړن)

وايو چي $\mathcal{V}$ د E د سيټ ځانګړۍ خصوصيت دی. د بېلګې په ډول د B,A او C سيټونه په خپلو ځانګړيو خصوصياتو پذريعه راکړه سوی وی ، دبېلګې په توګه د A د سيټ دپاره $\mathcal{V}$(x) عبارت دی له «x طبيعی عدد دی او د 6 پر عدد د وېش وړ دی».

اوس به وښيو چي د ځانګړيو خصوصياتو د تعريف په وخت کي بايد د احتياطه کار واخلو ، ځکه چي لږڅه بی پروايي به مو ډېر وځوروی - پارادکس منځ ته راځي.

د سيټ په تيوری کي لمړۍ پارادکس په 1895 کال کي کانتور G. CANTOR او 1897 څېزار بورالي - فورتي (CESAR BURALI-FORTI)کشف کي ، چي د سيټو د بوج او د سيټو د ښه ترتيب پر مفهوموباندی استوار وه. برتراند رسل BERTRAND RUSSEL 1872-1970 په 1903 کې لاندنۍ پارادکس فورمولبندی کي :

د M سيټ په نظر کي نيسو چي ځانګړۍ خصوصيت يې د بياني تابع «x د x عنصر ندی » پذريعه تعين سويدی. پدی معنی :

$$x \in M \equiv x \notin x$$

په خاص ډول که x=M وی ، نو د خپلي ادعا څرګند تضاد لاسته راځي:

$$M \in M \equiv M \notin M$$

ددی پارادکس توضيح ساده ده. د M سيټ د راکړه سوی ځانګړي خصوصيت سره وجود نلری. که لږ څه ځېر سو دغه توضيح طبيعی ده. ځکه چي تقريباً د هرشی په هکله د $x \notin x$ ځانګړۍ خصوصيت صدق کوي. په مشکله د داسي يوه سيټ x تصور کېدای سي چي د هغه په هکله د $X \in X$ صدق وکي. دغه ډول دM سيټ هرڅه په ځان کي احتوا کوي، پدی معنی چي د M سيټ بايد ډېر لوی وی او که فرض کړو چي دغه ډول سيټ وجود لری ، نو سمدستي د خپلي ادعا د تناقض سره مخامخ کېږو.

د مخکني تشريح څخه بايد داسي پند واخلو : امکان لری يو سيټ د معين ځانګړي خصوصيت سره اصلاً وجود ونلري. زموږ غوښتنه د ځانګړي خصوصيت په هکله به لږ څه ضعيفه کړو، هغه داچي د F سيټ د راکړه سوی سيټ G هغه عنصرونه په ځان کي لری چي د$\mathcal{V}$ ځانګړۍ خصوصيت ولری، پدی معنی چي د هر x دپاره :

$$x \in F \equiv (x \in G \wedge \mathcal{V}(x)) \qquad (2.6)$$

بياهم په 1906 کال کي برتراندرسل ؤ چی د يوليوس ريچارد د 1862 کال ادعا چي د (2.6) سيټ وجود لری ، د تناقض سره مخامخ کړه . د راتلونکی فصل په لمړي بحث (2.1) کي به ثابته کړو چي د طبيعی عددو هر غير خالی سيټ کوچنۍ ترين عنصر لری. د ټولو طبيعی عددو سيټ به په N سره وښيو .فرضوو چي $\mathcal{V}$(x) هغه ځانګړۍ خصوصيت دی چي وايي : «د x عدد د پښتو ژبی په جمله چي د تورو شمېر يې تر سل لږ وی نسی ليکل کيدای»[4]د (2.6) سره مطابق و فرضوو چي R د ټولو هغه طبيعی عددو سيټ دی چي د $\mathcal{V}$(x) ځانګړۍ خصوصيت لری. پدی معنی چي:

$$x \in R \equiv (x \in N \wedge \mathcal{V}(x))$$

---

[4] 1396 يوزراو دری سوه شپږنوی - د پښتو په اتلسو حروفو ليکل سويدی (ژباړن)

د پښتو ژبې د حروفو شمېر تر 50 لږ دی. پدی معنی چې د پښتو ژبې د حرفو لاړ چې 100 حرفه ولری ، تر 50^{100} لږ دی. پدی معنی چې د پښتو ژبې جملې چې په هغه کی تر سل حرفه لږ کار سوی وی هم تر 50^{100} لږ دی . څرنګه چې دغه ډول جمله یوازی یو طبیعی عدد ترسیمولای سي ، نو پدی حساب د هغوی پذ ریعه تر 50^{100} لږ طبیعی عددونه نوشته کیدای سي . خو ټوله طبیعی عددونه تر 50^{100} ډېر دی . پدی معنی چې د R سیټ خالی ندی. فرض کړو چې n د R د سیټ کوچنۍ ترین عنصر دی. د وروستي جملی پذریعه مو پخپله ، خپله ادعا رد کړه ، ځکه چې د n عدد چې د R په سیټ اړه لری د پښتو ژبې په داسی جمله چې د حروفو تعدادیې تر 100 لږ دی ، ولیکئ.

بیاهم د ددغه حالت څخه د وتلو لار ساده ده، هغه داچې دلته مسئله د پارادکس نده بلکه ثابته مو کړه چې دغه ډول د R سیټ وجود نلری.ځکه نو که غواړو چې د (2.6) ځانګړې خصوصیت سره مطابق سیټ جوړ کړو ، نو باید د $\mathcal{V}(x)$ مشخصه په کافی اندازه دقیق او ښه فورمولبندی کړو.ویلای سو چې د ریاضي پر اساس یې فورمولبندی کړو.څرګنده ده چې د $\mathcal{V}(x)$ خصوصیت په کافی اندازه دقیق ندی فورمولبندی سوی. د پښتو ژبې د حروفو د هر لاړ په هکله قضاوت نسو کولای چې آیا د پښتو ژبې جمله ده او که نه. د ځینو جملو په هکله امکان لری چې د ژبې متخصصین نن ورځ په منفی نظر خو لس شل کاله وروسته هغه د پښتو ژبې د جملی په حیث په رسمیت وپېژنی. په اسانی سره داسی بېلګې پیدا کولای سو چې ژبپوهان د هغه په هکله یو دبل سره مخالف نظرونه لری.

3.1 څه ډول سیټونه وجود لری

پدی برخه کې به تر ډېره حده هڅه وکړو ، چې د راکړه سوی سیټ څخه نور سیټونه جوړ کړو.

که A او B سیټونه وی، نو د A سیټ د B د سیټ د سب سیټ په نامه یادیږی ، که د A د سیټ هر x عنصر د B د سیټ عنصر هم وی.

A سیټ د B د سیټ سب سیټ په لاندی ډول ښیو:

$$A \subseteq B \qquad (3.1)$$

څرګنده ده چې د اکستنزیونالیتي د قانون پر بنسټ لاندنې اړیکه صدق کوی:

$$A = B \equiv (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \qquad (3.2)$$

پورتنۍ معادلیت اکثراً د ددو سیټو د مساوات د ثبوت دپاره په کار اچول کیږی. په $\subseteq$ باندی په ښنه سوئ سمبول د شمول یا Inclusion په نامه یادیږی.

هغه سیټ چې په هغه کې هیڅ عنصر شامل نه وی د خالی سیټ په نامه یادیږی. بیاهم د اکستزیونالیتی د قانون پر اساس ، دغه ډول سیټ بې ساری دی او په $\emptyset$ سره یې ښیو.یعنی:

$$(\forall x) x \notin \emptyset \qquad (3.3)$$

که x او y دوه مختلف شیان وی(عددونه ، خطونه، سیټونه ، ...او داسی نور)،نو د [x,y] مرتبه جوړه به په نظرکي ونیسو.د مرتبې جوړی اساسی خصوصیت د لاندنې تعادل په ذریعه ارائه کیږی:

$$[x, y] = [u, v] \equiv (x = u \wedge y = v) \qquad (3.4)$$

د راکړه سوی سیټ څخه د نوی سیټو د جوړولو دپاره به دلاندنیو پرنسیپو څخه کار اخلو:

P1. که x او y دوه شیان وی، نو د X سیټ داسی وجود لري ، چي د هر z دپاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$z \in X \equiv (z = x \vee z = y) \qquad (3.5)$$

P2. که A او B دوه سیټونه وی ، نو C سیټ داسی وجود لري چي دهر z د پاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$z \in C \equiv (z \in A \vee z \in B) \qquad (3.6)$$

P3. که A او B دوه سیټونه وی ، نو D سیټ داسی وجود لري چي دهر z د پاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$z \in D \equiv (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = [x, y] \qquad (3.7)$$

P4. که A سیټ وي ، نو د E سیټ داسی وجود لري چي دهر z دپاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$z \in E \equiv z \subseteq A \qquad (3.8)$$

P5. که A سیټ وي ، $\mathcal{V}$ خاصیت وي پدی معنی چي بیاني تابع وي،نو د F سیټ داسي وجود لري چي دهر z دپاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$z \in F \equiv (z \in A \wedge \mathcal{V}(z)) \qquad (3.9)$$

البته د P5 په پرنسیپ کي فرضوو چي د $\mathcal{V}$ بیاني تابع «ښه» یعنی په کافی اندازه دقیق فورمولبندی سوی ده.هسی نه چي ،ځکه په تېر پاراګراف کي ، د ریچارد پارادکس ځنیي جوړ سي.

فرضوو چي د حقیقی عددو سیټ R وجودلری، د هغوی خصوصیتونه به په 1.2 او 8.2 رسالو کی په جزئیاتو سره و څېړو. د (3.5)−(3.8) اړېکې چي د X,C,D,E سیټونه تشریح کوی ، د اکستنز- یونالیټی د اکسیومی (د پراخېدو د اکسیومي) پر بنسټ بی ساری (یکړه) دي .په دقیقه توګه باید ووایو چي ، د بېلګي په ډول ، که د X_1 او X_2 سیټونه د (3.5) خصوصیت ولری ، نو د اکستنزیونالیټی د اکسیومی پر بنسټ $X_1=X_2$ دی . دپورتنیو پرنسیبو سره موافق به لاندني نښي معرفی کړو.

د X هغه سیټ چي دهغه په هکله د (3.5) اړېکه صدق وکي په {x,y} سره ښیو . که x=y وی ، نو {x,y}={x} سره ښیو. د C سیټ چي د (3.6) اړېکه پر ځای کوی په AUB سره ښیو او د A او B دسیټو د یووالی یا اتحاد په نامه یادوو. د D سیټ چي دهغه په هکله د (3.7) اړېکه صدق کوی ،په A×B سره ښیو او د A او B دسیټو د کارتیزین ضرب په نامه یي یادوو. د E سیټ چی د (3.8) اړېکه پر ځای کوی په $\mathcal{P}$(A) سره ښیو او د A د سیټ د طاقت په نامه یادوو.په بله اصطلاح د E سیټ د A د سیټ د ټولو ممکنو سب سیټو سیټ دی.

د F هغه سیټ چي د (3.9) خاصیت ولری ،په لاندی ډول سره ښیو.

$$F=\{x \in A;\ \mathcal{V}(x)\}$$

بېلګه 1.3 . فرضوو چي A او B سیټونه دی.

a) د $\mathcal{V}(x)$ دبیان تابع وایي چي x∈B (دx عنصر د B په سيټ کي شامل دي)، څرګنده ده چي د $\mathcal{V}(x)$ دبیان تابع «ښه»تابع ده ، یعنی د هغه د عملی کیدو په نتیجه کي د پارادکس سره نه مخامخ کیږو.ځکه نو د P_5 د پرنسیب له مخي دغه ډول سيټ وجود لری

$$\{x \in A;\ x \in B\}$$

دغه ډول سيټ په $A \cap B$ سره ښیو او د A او B د سیټو د مشترکي برخي په نامه یادوو.

b) د $\mathcal{V}(x)$ دبیان تابع وایي چي $x \notin B$ (دx عنصر د B په سيټ کي شامل ندي).بیاهم د $\mathcal{V}(x)$ دبیان تابع «ښه»تابع ده ، نو د P_5 د پرنسیب له مخي د

$$\{x \in A\ ;\ x \notin B\}$$

سيټ وجود لري ، چي په $A - B$ سره یي ښیو او د A او B د سیټو د تفاضل په نامه یي یادوو.■

تمرین 1.3. د $P_1 - P_5$ پرنسیبو څخه په استفادی سره او فرضوو چي د حقیقي عددو سيټ R وجود لري.د لاندنیو سیټو موجودیت ثابت کي:

$$\emptyset;\{\emptyset\};\{\{\emptyset\}\};\{\emptyset,\{\emptyset\}\};\{[\emptyset,\emptyset]\},\{[\emptyset,\emptyset],[\emptyset,\{\emptyset\}]\}.$$

بیلګه 2.3. که $x_1,...,x_n$ ځني شیان وی ، نو د $\{x_1,...,x_n\}$ سيټ وجودلري.په دقیق ډول سره یي د استقراء تعریفولای سوچي :

$$\{x_1\}=\{x_1,x_1\},\quad \{x_1,...,x_{n+1}\}=\{x_1,...,x_n\}\cup\{x_{n+1}\}$$

څرګنده ده چي لاندنۍ تعادل صدق کوي:

$$z \in \{x_1,...,x_n\} \equiv (z = x_1 \vee ... \vee z = x_n) \quad ■$$

په راتلونکي کي به هڅه وکو چي دP_1 څخه تر P_5 د پرنسیبو د یادوني څخه ډډه وکړو ، پدی معنی چي د جوړ سوی سيټ د ساختمان څخه به پوهیږو چي دذکر سوو پرنسیبو د عملی کیدو په نتیجه کی لاسته راغلئ دی.

ددوو سیټو متناظر تفاضل د $A \dot{-} B = (A - B) \bigcup (B - A)$ په ښه تعریفوو. واضح ده چي لاندني اړیکه صدق کوي:

$$A = B \equiv A \dot{-} B = \varnothing$$

دیادولو وړ ده چي د A او B سیټونه یودبله سره جدا(بېل) disjoint دي ، که $A \cap B = \emptyset$ وي.

4.1 د سیټونو الجبر

پدی برخه کي به په لنډ ډول پر سیټونو باندی د عملیو یادونه وکړو ، لوستونکي د هغوی سره د لیسي ددوری په ریاضي کی آشنا دی ، که نه نو بیا اړوند کتاب ته مراجعه وکی.

په تیر پارګراف کي موږ سیټونو باندی ځني ساده عملیي تعریف کړي. دلته به د هغوی ساده خاصیتونه ذکر کړو.[5]

که B,A او C سیټونه وی ، نو لاندني مساواتونه صدق کوی:

$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup A=A$	$A\cap A=A\cap A$
$A\cup\emptyset=A$	$A\cap\emptyset=\emptyset$
$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

په لمړۍ کرښه کي مساوات پر سیټو باندي د یووالي او د سیټو د مشترکي برخي د عملیو تبدیلي خاصیت ارائه کوي. دوهمه کرښه د هغوی اتحادي خاصیت بیانوي ، دریمه کرښه توزیعي خاصیت او ځلرمه کرښه د ځان ځاني قانون ارائه کوی. په پنځمه کرښه کی د خالي سیټ خاصیت او بلاخره په شپږمه کرښه کي د دی ـ مورګان قانون راغلئ دي.

دبیلګي په ډول د دی ـ مورګان لمړئ قانون ثابتوو. دهغه په ثبوت کي د (3.2) د تعادل د اړیکي څخه کار اخلو.

د$A-(B\cup C)$ په سیټ کی یو اختیاري خو ثابت عنصر ټاکو ، یعنی $x\in A-(B\cup C)$ دی . غواړو چي ثابته کړو چي $x\in(A-B)\cap(A-C)$ دی. د سیټو د تفاضل د تعریف څخه استنباط کیږی چي $x\in A$ او $x\not\in B\cup C$ دی . د سیټو د یووالي د تعریف څخه استنباط کیږی چي $x\not\in B$ او $x\not\in C$ دي ، ځکه نو $x\in A-B$ او $x\in A-C$ دي. د سیټو د مشترکي برخي د تعریف څخه استنباط کیږي چي $x\in(A-B)\cap(A-C)$ دي.

برعکس ، $x\in(A-B)\cap(A-C)$ وي ، نو $x\in A-B$ او $x\in A-C$ دي. پدی معنی چي $x\in A$ دی او $x\not\in C,x\not\in B$ دي. پدی صورت کی بیا $x\not\in B\cup C$ دي. پدي معنی چي $x\in A-(B\cup C)$ دي.

په همدی ډول پورتني نور مساواتونه هم ثابتیدلای سي.

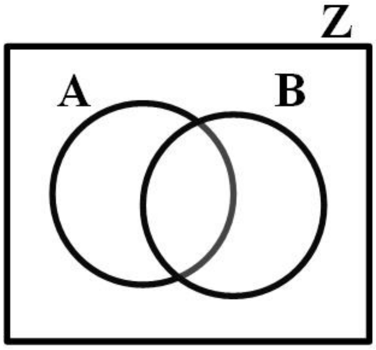
تېر ثبوت په حقیقت کی د ریاضي د منطق د بیان پر تعادل باندی ولاړ دی. د بیلګی په توګه د دی ـ مورګان لمړئ قانون د $\sim(p\vee q)$ او $\sim p\wedge\sim q$ د بیانوپر تعادل باندی ولاړ دی.دریاضي د منطقو په ژبه یي داسی لیکلای سو:

$$\begin{aligned} x\in(A-(B\bigcup C)) &\equiv (x\in A\wedge\sim(x\in(B\bigcup C)) \equiv (x\in A\wedge\sim(x\in B\vee x\in C)) \\ &\equiv (x\in A\wedge(x\not\in B\wedge x\not\in C)) \equiv (x\in(A-B)\wedge(x\in A-C)) \\ &\equiv x\in(A-B)\bigcap(A-C) \end{aligned}$$

[5] نیازمن ـ الجبر او د عددونو تیوری لمړی برخه لسمه صفحه وګورئ . (ژباړن)

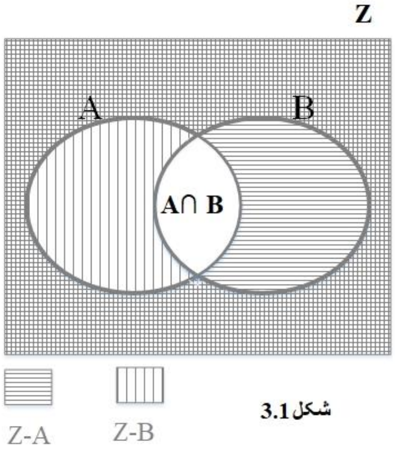
د سيټ د تيورى د عملي کيدو په ابتدائي ډګر کی اکثرآ دداسي حالت سره مخامخ کيږو چي ټوله سيټونه د راکړه سوي سيټ سب سيټونه وی . پدی حالت کي راکړه سوی سيټ د بنسټيزی فضاء په نامه يادوو. د بيلګی په توګه که د مسطحي هندسي مسئله حلوو ، نو زموږ بنسټيزه فضاء عبارت ده د راکړه سوی مستوی د ټولو نقطو څخه . که غير مساوات حلوو ، نو بنسټيزه فضاء به مو د حقيقي عددو سيټ وی.

که د Z بنسټيزه فضاء اود $A,B\subseteq Z$ سيټونه راکړه سوی وي ، نو کولای سو چي هغوی د وين د ډياګرام په ذريعه وښيو.د 1.1 په شکل کي دايری چي په اختياری شکل اينبودل سوی دي ، د A او B سيټونه ترسيموی.

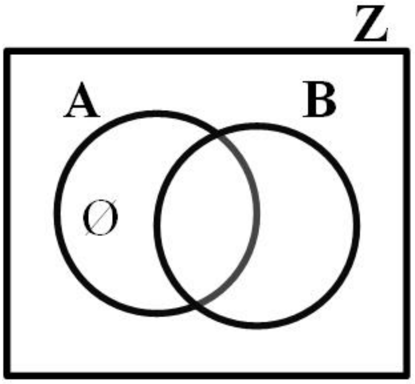


شکل 1.1

داواقعيت چي $A\subseteq B$ دی ، د ۱,۲ شکل يې ترسيموي او د ډی - مورګان قانون $Z-(A\cap B)=(Z-A)\cup(Z-B)$ د وين په ډياګرام کي د ۱,۳ شکل په ذريعه ترسيمېږي.



شکل 3.1



شکل 2.1

په عين ترتيب سره کولای سو چي د ډيرو سيټو د وين ډياګرام رسم کړو ، خو په هغه صورت کي غير له دايري څخه نورو هندسی شکلو ته هم ضرورت پيداکيږي .

5.1 اړيکي Relations

دلته مورته د اړيکو هغه ابتدائي خاصيټونه چي په راتلونکي به په سستماتيک ډول کار څني اخلو ، په زړه پوری دي.

مُرّتبه دريئيزه (اوډلی دريئيزه) د مرتبې (اوډلې)دوه ئيزې په ذريعه تعريفوو.

$$[x,y,z]=[[x,y],z] \qquad (5.1)$$

همدا ډول مرتبه (اوډلۍ) څلوریزه ، ...او داسي نور تعریفوو. په عمومي بڼه :

$$[x_1]= x_1 \qquad (5.2)$$

$$[x_1,..., x_{n+1}]=[[x_1,..., x_n], x_{n+1}] \qquad (5.3)$$

د $[x_1,..., x_n]$ په اوډلی n - ئیزې کي د x_i عنصر د هغه د i ـیم عضو په نامه یادوو.

د (5.2) او (5.3) سره مطابق د $n\geq2$ دپاره په استقراء باندی دn سیټو کارتیزین ضرب $A_1\times...\times A_n$ تعریفوو:

$$A_1\times...\times A_{n+1}=(A_1\times...\times A_n)\times A_{n+1} \qquad (5.4)$$

که $A_1=...=A_n=A$ وی ، نو د $A_1\times...\times A_n$ ضرب په ساده ډول په A^n سره ښیو. ددی دپاره چي مفکوره مو بشپړه کړو ، نو $A^0=\{\emptyset\}$ او $A^1=A$ سره اېږدو.

د کارتیزین ضرب د عادی ضرب پر خلاف تبدیلي او اتحادی خاصیتونه نلری.

د S سیټ د n - ئیزې اړیکې په نامه یادوو که د A سیټ پدی ډول وجود ولري چي $S\subseteq A^n$ وي. څرګنده ده چي د $A_1\times...\times A_n$ کارتیزین ضرب هر سب سیټ S ، n - ئیزه اړیکه ده. دلته کافي ده چی $A=A_1\cup...\cup A_n$ سره کښېږدو.، بیا نو :

$$S\subseteq A_1\times...\times A_n\subseteq A^n$$

صدق کوي.

که $S\subseteq A^n$ وی ، نو وایو چي دS ، n - ئیزه اړیکه د A پر سیټ راکړه سوي ده. د A سیټ بدی حالت کي د n متحوله بیاني تابع د حقیقت ساحه ده ، پدی معنی چي که ددغه ساحی څخه و بیاني تابع ته قیمتونه ورکړه سي ، نو د هغی تابع قیمت یوبیان دی، چي حقیقت لري. ساده ترین خو غیر بدیهې (non trivial) حالت د n=2 دی. پدی حالت کي د دوه ئیزې اړیکې په هکله ږغیږو.د دوه ئیزې اړیکې د ځینو خاصیتو یادونه کوو.

فرضوو چي R د A پر سیټ باندي دوه ئیزه اړیکه ده، یعنی $R\subseteq A^2$ ده. وایو چي د R اړیکه د A پر سیټ باندی انعکاسی reflexive خاصیت لري، که د هر x∈A دپاره [x,x]∈R وي.

د R اړیکه د A پر سیټ باندی تناظرې symmetric خاصیت لري، که د هر x,y∈A دپاره چي [x,y]∈R وي، نو [y,x]∈R وي.

د R اړیکه د A پر سیټ باندی ضد تناظری antisymmetric ده ، که د [x,y]∈R او[y,x]∈R څخه استنباط سي چي x=y سره کیږي.

همدا رنګه د R اړیکه د A پر سیټ باندی ضدانعکاسی antireflexive ده که د هر x∈A دپاره $[x,x]\notin R$ وي.

د R اړیکه د A پر سیټ باندي انتقالي transitive ده ، که د [x,y]∈R او [y,z]∈R د شرطو څخه [x,z]∈R استنباط سي. بلاخره د R اړیکه د A پر سیټ باندي غبرگیزه یا dichotomie ده ، که د هر x,y∈A دپاره یا [x,y]∈R او یا [y,x]∈R وي.

که R د A پر سیټ باندی دوه ئېزه(غبرگونی) bineary اړیکه وي ، نو د هغه معکوسه اړیکه ، یعنی R^{-1} داسي تعریفو:

$$R^{-1}=\{[x,y]\in A^2;[y,x]\in R\} \qquad (5.5)$$

څرگنده ده چي $(R^{-1})^{-1}=R$ کېږي.

که R او S د A پر سیټ بادی دوی دوه ئېزه اړیکي وي ، نو د هغوی ترکیب(composition) $R\circ S$ عبارت دی :

$$R\circ S=\{[x,y]\in A^2;(\exists z)([x,z]\in R\wedge[z,y]\in S\} \qquad (5.6)$$

بلاخره د A هر سیټ دپاره دوه ئېزه اړیکه id_A تعریفوو ، چی د A د سیټ د قطرdiagonal په نامه یادیږی.

$$id_A=\{z\in A^2;(\exists x)(x\in A\wedge z=[x,x])\} \qquad (5.7)$$

لوستونکئ په آساني سره لاندني ساده ادعاوی ثابتولای سي.

قضیه 1.5 - فرضوو چي دA پر سیټ د R دوه ئېزه اړیکه راکړه سوي ده، نو لاندني ادعاوی صدق کوي:

a) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت انعکاسي ده ، چي $id_A\subseteq R$ وي.

b) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت تناظری ده ، چي $R=R^{-1}$ وي.

c) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت ضد انعکاسي ده ، چي $R\cap id_A=\emptyset$ وي.

d) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت ضد تناظرې ده ، چي $R\cap R^{-1}\subseteq id_A$ وي.

e) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت انتقالي ده ، چي $R\circ R\subseteq R$ وي .

f) د R اړیکه د A پر سیټ یوازی او یوازی هغه وخت غبرگېزه dichotomie ده ، چي $R\cup R^{-1}=A^2$ وي .

اوس به نو د دوه ئېزې اړیکي یو بل مهم ډول وڅېړو. د A پر سیټ باندی دوه ئېزه اړیکه E د معادلیت equivalence په نامه یادیږی که نوموړی اړیکه د A پر سیټ باندی انعکاسي، تناظرې او انتقالي خاصیتونه ولري.معادلیت تر ډیره حده د سیټ د تجزیې د مفهوم سره ارتباط لري.

دA د سیټ د سب سیټو سیټ $\Re$ د A د سیټ د تجزیې په نامه یادیږي ، که لاندني شرطونه صدق وکي

$$\emptyset\in\Re \qquad (5.8)$$

که $X_1,X_2\in\Re$ او $X_1\neq X_2$ وي ، نو $X_1\cap X_2=\emptyset$ دي. (5.9)

دA د سيټ دهر عنصر يعنی $x\in A$ دپاره د $\Re$ په سيټ کي دX سيټ داسي وجود لري $X\in \Re$ چي $x\in X$ دي. (5.10)

پدی معنی چي د A د سيټ تجزيه عبارت ده دA د سيټ د غيرخالي سب سيټو د مجموعی څخه چي په خپل منځ کی مشترکه برخه ونلری(په خپل منځ کي سره بېل وي) او د هغوی يووالي د A سيټ تشکيل کي.

که E د A پر سيټ باندي د معادليت اړيکه وی ، نو د هر $x\in A$ د پاره $[x]_E=\{y\in A;[x,y]\in E\}$ سره ښيو.پدی معنی چي د $[x]_E$ د A د سيټ د هغو عنصرو سيټ دی چی د x سره د E په اړيکه کي وي.لوستونکئ په اسانی سره خپل ځاځ لاسته راوستلای سي چي :

$$\Re_E=\{[x]_E ;x\in A\}$$

د A د سيټ تجزيه ده.

برعکس، که $\Re$ د A د سيټ تجزيه وی ، نو د $E_\Re$ اړيکه چي د

$$[x,y]\in E_\Re\equiv(\exists X\in \Re)x,y\in X$$

په ذريعه تعريف سوي اړيکه د A پر سيټ د معادليت اړيکه ده.

لوستونکئ په اسانئ سره لاندی قضيه ثابتولای سي.

قضيه 2.5.

a) که S د A پر سيټ باندی د تعادل اړيکه وي ، نو $E_{\Re_S}=S$ دي.

b)که $\mathbb{S}$ د A د سيټ تجزيه وی ، نو $\Re_{E_{\mathbb{S}}}=\mathbb{S}$ سره.

دوهم فصل
د سيټو څخه درست او غلط کار اخيستل

په تاريخي لحاظ د سيټو څخه د حقيقي عدد دمفهوم د ځېړلو دپاره کار اخيستل سوي دی.سمدستې د حقيقي عددو دوي نظريي منځ ته راغلی :

د کانتور نظريه (د b-c د لاړ يا ترادف په مرسته) او د دی ديکيند د مقطع نظريه. د دواړو نظريو د ځېړلو څخه دلته تېريږو د ښېلګي په ډول په [18] کي په مشرح ډول ځېړل سوی ده. د سيټ د مفهوم څخه په جزئياتو باندی د حقيقي عددو د دقيق ترسيم دپاره کار واخلو.

بله موضوع د مپينګ مفهوم دي. د مپينګ مفهوم د سيټ د مفهوم سره تړون نلري. رياضي پوهانو د مپينګ مفهوم د سيټ او آ نی لايتناهی تر مفهومو دمخه ځېړلي دي. اسحق نيوټن Isaac Newton(1643-1727) ، ګاتفريد ويلهلم لايبنتځ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) او ډيرو نورو رياضی پوهانو د مپيينګ د مفهوم د خاص شکل څخه کار اخيستې . خو د سيټ مفهوم د مپينګ د مفهوم د دقيق تعريف امکانات برابر کړه. که لږ څه دقيق ځير سو نو سوال به راته پيداسی چي بيله کم دليل او يا بيله دی چي زده کونکي د سيټو سره پېژند ګلوی ولری، د ليسو د رياضی په کتابو کي مپينګ و زده کونکو ته د مرتبو جوړو د سيټ په ځېرد معينو خصوصياتو سره ، تعريفو . آيا دغه د سيټ د مفهوم څخه سوء استفاده نه ده ؟ځکه چي د مرتبو جوړو سيټ د معينو مشخصاتو سره د ډير پراخ مفهوم بڼه ئېزه معرفی ده.

په همدی دليل مو د دوه ئېزو اړيکو مفهوم چي په 7.2 رساله کي تشريح سوی دی په لمړی فصل کي ځای پر ځای نه کي ، څو وکولای سو چي ددی کتاب ددوهم فصل ځني نتېجی په کاروا‌چوو.

د 3.2 او 4.2 رسالی د ښونځيو هغه موضوعات تشريح کوی ، چي په هغه کي تر ډېره حده د سيټ د مفهوم څخه کار اخيستل کيږی. دغه واقعيت ته بايد پاملرنه وکړ چي موږ دلته يوه مناسبه «ژبه» معرفي کوو ، نه داسی يو تکنالوژي چي دهغی پذريعه دي نتيجې لاسته راوړو.

په 6.2 رساله کي به وښيو چي ډير ساده او مجرد نظر چي د سيټ د تيوری خاصه ده ، ډيرې ښکلې نتيجي وړاندی کوي.

1.2 حقيقي عددونه

پدی برخه کي به د حقيقي عددو د اساسی خاصيتو په هکله وږغيږو.ددی خاصيتو د تشريح دپاره به د سيټ د مفهوم ضرورت او د رياضي د استقراء ،د ثبوت د يوی ګتوری طريقې په صفت توضيح کړو.

درياضي د مرکزي مفهومونو څخه يو هم د حقېقی عدد مفهوم دی. د حقيقي عددو او د هغوی د خاصيتو په هکله د لرغوني يونان رياضی پوهانو لکه فيثاغورث (585-500 B.C. تر ميلاد دمخه) او د هغه شاګردانو په کافی اندازه ښه تصور درلودی. هغوی حتی پدی پوهيدل چی $\sqrt{2}$ ناطق عدد ندی. اويدوکسوس(Eudoxos , 408-355 B.C.) دحقيقي عددو ښکلی هندسی نظريه جوړه کړه. ارشيميد (287-212 B.C.) په صراحت سره د حقيقي عددو په هکله هغه قضيه چي نن ورځ د ارشيميد د خاصيت په نامه يادېږی ، فورمولبندی کړه. د حقيقی عددو دغه ډول جوړښت تر نولسم قرن تر شروع پوری د رياضی پوهانو دپاره کافي ؤ. خو کله چی رياضی پوهان د نولسمې پيړې په سر کی د

انفینیتزیمال Infinitesimal شمېرنې (لایتناهی کوچنی) «په اصطلاح د تنظیم » په هڅه کې سول ، نو دی ته متوجه سول چې دغه ډول جوړښت بسنه نه کوی. برنارد بلزانو B.Bolzano او اوګوسته لویز کوشی Auguste Louis Cauchy 1789-1857 یو د بل څخه بېل د ریاضی د انالایز د ضرورت پر بنسټ د بلزانو- کوشی پرنسیپ ، چې وایي «د بلزانو - کوشی د حقیقی عددو هر لاړ(ترادف) لمیټ لری» ، فورمولبندی کې. دغه پر نسیپ د حقیقي عددو دتیوری سر چینه سوه چې غیر له نورو څخه چارلس مېرئ Charles Méray (1835-1911) ، کارل وایرشتراس Karl Weierstarss (1815-1897) او جورج کانټور G. Cantor له خوا جوړه سوه. وروسته ریچارد ددیکینډ Richard Dedekind (1831-1916) د حقیقي عددو یوبل مهم خصوصیت فورمولبندی کې ، چې نن ورځ د ددکینډ دپرنسیپ په نامه مشهور دی. خو وروسته څرګنده سوه چې دا کم نوی حقیقت ندی ، بلکه په حقیقت کې دارشیمید، بلزانو او کوشي د ادعاؤ نتیجه ده (8.2 رساله وګورئ).

د جورج کانتور د سیټ د تیوری تر جوړښت وروسته ریاضی پوهانو په تدریج سره د حقیقي عددو تیوری اعمار کړه چې په هغه کې د سیټ د تیوری په چوکاټ کې د حقیقي عددو د تیوری جوړښت هم شامل دی. دغه کړنلاره ډېره په زړه پوری وه ، ځکه چې د ریاضي هغه مهم مفهوم - حقیقي عدد - د سیټ و مفهوم ته څرمه سو. هغه لوستونکي چې ددغه کړنلاری سره آشنا ندی ، په شپږم فصل کې به ورسره معرفی سي.

اوس به نو په لنډ ډول (بلکه په مکمل شکل سره !) د حقیقي عددو خاصیتونه ترسیم او دهغوی څخه به ځنې نتیجې اشتقاق کړو.

د ټولو حقیقي عددو سیټ په R سره ښیو. دهرو دوو حقیقي عددو $x,y\in R$ سره د هغوی د جمع حاصل $x+y$ ، دتفریق حاصل $x-y$ او دضرب حاصل $x\cdot y$ راکړه سوی دی.د 0 او 1 رقمونه مشخص حقیقی عددونه دی. د حقیقی عددو د ترتیب(اوډلو) اړیکه د هغوی د لوی والی $x<y$ پر اساس راکړه سوی ده . د $x<y$ په حالت کې وایو چې x تر y کوچنئ دی. د $x\leq y$ لیکنه پدی معنی ده چې یا به x تر y کوچنئ وی $x<y$ او یا به $x=y$ وی.

د a عدد د $X \subseteq R$ د سیټ د پورتني سرحد په نامه یادیږی که د هر $x\in X$ دپاره د $x\leq a$ اړیکه صدق وکې. وایو چې د $X \subseteq R$ سیټ د لوړې خوا څخه محدود دی ، که دغه سیټ پورتنئ سرحد ولري.

د a عدد د X د سیټ د سپریمم Supremum په نامه یادیږی ، $a=\sup X$ سره یې لیکو، که a د X د سیټ د ټولو پورتنیو سرحدو څخه کوچنئ ترین سرحد وي. پدی معنی چې د a عدد دX د سیټ پورتنئ سرحد دي او په عین حال کې د X د سیټ د هر پورتنئ سرحد b دپاره د $a\leq b$ اړیکه صدق کوي.

د حقیقي عددو سیټ R لاندني خاصیتونه لري:

$R, +, -, \cdot, 0, 1$ فیلډ دی. (1.1)

داسې $x\in R$ وجود نلری چې $x<x$ وی . (1.2)

که $x,y,z\in R$ ، $x<y$ او $y<z$ وی ، نو $x<z$ دی. (1.3)

د هرو دوو مختلفو حقیقي عددو $x,y\in R$ د پاره د $x<y$ یا $y<x$ اړیکه صدق کوي. (1.4)

$0<1$ دی. (1.5)

که $x,y,z\in R$ ، $x<y$ وی ، نو $x+z<y+z$ دی. (1.6)

که $x,y\in R$ ، $x>0$, $y>0$ وی ، نو $x\cdot y>0$ دی. (1.7)

د حقیقي عددو هر سیټ چي خالی نه وی او د لوړې خوا سرحد ولری،

نو کوچنۍ ترین پورتنۍ سرحد یا سپریمم لری. (1.8)

پاسني بنسټیزه خاصیتونه ـ اکسیومی ـ پر څلورو ټولګیو وېشلای سو. لمړۍ ټولګې (1.1) غواړی چي د R سیټ باید د راکړه سوو عملیو او خنثي عنصرو سره فیلډ وی. د (1.4)-(1.2) اکسیومی د ترتیب د اړیکي خاصیتونه ارائه کوي. د (1.7) – (1.5) اکسیومی د ترتیب اړیکه د فیلډ د جوړښت سره نښلوی. د (1.8) ګروپ چي په صریح ډول د سیټ مفهوم په کاروی ، د بلزانو پرنسیپ ارائه کوي. دهغه دنده لوستونکۍ د ریاضی د انالایز (کالکولس) څخه پېژني . موږ به یې هم په نسبي ډول وروسته راوړو. د اکسیومو په آخری ګروپ کي (د بلزانو په پرنسیپ کي) بیاهم د سیټ د مفهوم پر صراحت باندی تآکید سوی دی ، ځکه چي بیله د سیټ د مفهوم څخه نوموړی اکسیومه نسی فورمولبندی کیدلای. بلزانو په خپل وخت کی د سیټ د مفهوم پر ځای د «خاصیت» د مفهوم څخه کاراخیستی دی.

ښودلای سو چي ، که یو سیټ د راکړه سوو عملیو او د ترتیب د اړیکي سره چي د (1.8)-(1.1) اکسیومی پر ځای کی ، نو د حقیقي عددو د سیټ سره به آیزومورف وی.

د طبیعی عددو سیټ N د حقیقي عددو د سیټ R کوچنۍ ترین سب سیټ دی ، چي لاندني خاصیتونه لری:

$0\in N$ (1.9)

که $x\in N$ وی ، نو $x+1\in N$ دی. (1.10)

پدی معنی چي N د حقیقي عدد داسی سیټ دی چي د هغه په هکله د (1.9) او (1.10) خاصیتونه صدق کوی او د هرسیټ $X\subseteq R$ په هکله چي :

$0\in X$ (1.11)

که $x\in X$ وی ، نو $x+1\in X$ دی. (1.12)

صدق وکی ، نو هرومرو به $N\subseteq X$ وی .

د N د سیټ عنصرونه د طبیعی عددو په نامه یادوو؛د بېلګې په ډول 1,0 ,1+1=2,1+2=3 طبیعی عددونه دی. په راتلونکي کی به طبیعی عددونه د n,m,k,l په حرفو سره اویا دضرورت په وخت کي د اندکس سره ، ښیو.

ځیرک لوستونکۍ امکان لری چي پر حق باندی خپل مخالفت څرګند کي او ووایي چي په پورته ډول جوړ سوی سیټ N مو بیله ، د 3.1 رساله کی، اصولو څخه جوړ کړی. خو په اصل کی داسی نده که لږ څه زیار وباسي ، کولای سی چي د N سیټ په نوموړي پاراګراف کی د ذکر سوواصولو په مرسته تعریف کی.

تمرین 1.1 ـ ثابت کی چي:

$N=\{x\in R\ ;\ \mathcal{V}(x)\}$

پداسی حال کي چي $\mathcal{V}$ لاندني بياني تابع ده:

$$(\forall X)((X \subseteq R \wedge 0 \in X \wedge (\forall y)(y \in X \rightarrow y+1 \in X)) \rightarrow x \in X)$$

د طبیعی عددو د سیټ دغه ډول تعریف په مستقیم ډول د طبیعی عددو په هکله د بیانې تابع ګانو د ثبوت ګټوره طریقه وړاندیزوی.

د هر x∈N دپاره د $\mathcal{V}(x)$ بیانې تابع په نظر کي نېسو.

قضیه 1.1 (د ریاضی د استقراء په هکله)

فرضوو چي :

IK_1: $\mathcal{V}(0)$ صدق کوی .[6]

IK_2 : که د $\mathcal{V}(n)$ د حقیقت د فرضیې څخه د $\mathcal{V}(n+1)$ حقیقت ثبوت کړای سو، نو د $\mathcal{V}(n)$ بیانې تابع د هر طبیعی عدد n دپاره صدق کوي.

ثبوت . د X سیټ د $X=\{n\in N; \mathcal{V}(n)\}$ په څېر سره ښیو.اوس نو غواړو چي ثابته کړو چي X=N دی.

څرګنده ده چي $X \subseteq N$ دی. د IK_1 پر اساس د X سیټ د (1.11) خاصیت لري. د IK_2 پر اساس د X سیټ د (1.12) خاصیت لري. د طبیعی عددو د سیټ N د تعریف څخه $X \subseteq N$ استنباط کېږي.

q.e.d

تمرینونه 2.1. د ریاضي د استقراء په طریقه لاندنې انګلونه (دعوی وی) ثابت کی.

a) د هر طبیعی عدد n دپاره $n\geq 0$ دی.

b) که n طبیعی عدد وی ، $n\neq 0$ ، نو داسی طبیعی عدد k وجود لری ، چي $n=k+1$ دی.

c) که m او n دوه داسی طبیعی عددونه وی چي $m<n$ دی، نو $m+1\leq n$ دی.

بېلګه 1.1. فرضوو چي $x_0,\ldots,x_n$ داسی طبیعی عددونه دی چي تر راکړه سوی طبیعی عدد $p>1$ کوچنې وی، نو :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i p^i < p^{n+1} \qquad (1.13)$$

نوموړئ قضیه (انګل) د ریاضي د استقراء په طریقه ثابتوو.

د n=0 دپاره :

$$\sum_{i=0}^{0} x_i p^i = x_0 p^0 = x_0 < p = p^{0+1}$$

---

[6] پاملرنه وکړئ چي IK په اصل کي د استقراء د ګام مخفف دی . په سلواکی ژبه کي indukčný krok دی.(ژباړن)

پدی معنی چي IK_1 صدق کوی.

فرضوو چي $\sum_{i=0}^{n} x_i p^i < p^{n+1}$ صدق کوی او x_{n+1} تر p کوچنۍ طبیعی عدد دی. پدی حساب:

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_i p^i = \sum_{i=0}^{n} x_i p^i + x_{n+1} p^{n+1}$$

د استقراء د فرضیې له مخې $\sum_{i=0}^{n} x_i p^i < p^{n+1}$ دی. ځکه نو :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i p^i < p^{n+1} + x_{n+1} p^{n+1} = (1 + x_{n+1}) p^{n+1}$$

د 1.2c د تمرین پر اساس $1 + x_{n+1} \le p$ دی ، ځکه نو :

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_i p^i < p^{n+2}$$

دی. پدی ډول مو وښودل چي IK_2 صدق کوي. ددی اسیته د (1.13) غیر مساوات د هر طبیعی عدد n دپاره صدق کوي.■

که A د حقیقي عددو سیټ وی او a∈A وی. نو د a د A د سیټ کوچنۍ ترین عنصر دي ، که د A د سیټ د هر عنصر x (x∈A) دپاره a≤x دي. اوس به نو یوه ډیره غوره (خورج) دعوی ثابته کړو.

قضیه (انګل) 1.2. د طبیعی عددو هرسیټ ، چي خالي نه وی ، کوچنۍ ترین عنصر لری.

ثبوت ـ فرضوو چي $A \subseteq N$ دی ، خو A کوچنۍ ترین عنصر نلري. و به ښیو چي A=∅ دی.

فرضوو چي $\mathcal{V}(n)$ د بیان تابع «د هر k<n دپاره k∈N−A » ده .

د (1.2a) د تمرین پر اساس $\mathcal{V}(0)$ صدق کوي. فرضوو چي $\mathcal{V}(n)$ صدق کوی. فرضوو چي k<n+1 دی ، پدی حساب k≤n دی (د 1.2c تمرین له مخې). که k<n وی ، نو د استقراء د فرضیې له مخې k∈N−A حقیقت لري. که k=n∈A وای ، نو n به د A د سیټ کوچنۍ ترین عنصر وای. ځکه نو $\mathcal{V}(n+1)$ هم صدق کوي. ددی اسیته نو $\mathcal{V}(n)$ د هر n دپاره صدق کوی. ددی ځایه استدلال کیږي چي د هر n د پاره n∈N−A ، پدی معنی چي د A سیټ په اصل کی خالي دی ، یعنی A=∅ .

q.e.d

د پورتني قضیي مستقیمه نتیجه د ریاضي د استقراء بله بڼه ده، چی دلته به یې راوړو.فرضوو چی $\mathcal{V}(x)$ د بیان تابع ده چي د هر x∈N دپاره صدق کوي.

قضیه3.1.(د ریاضی د استقراء په هکله).فرضوو چي لاندني شرط صدق کوي:

IK: که د هر طبیعی عدد m<n دپاره د $\mathcal{V}(m)$ د بیان د تابع د حقیقت په نتیجه کي د $\mathcal{V}(n)$ د بیان تابع صدق وکي، نو د $\mathcal{V}(n)$ د بیان تابع د هر طبیعی عدد n د پاره صدق کوي.

ثبوت - $X=\{n\in N; \mathcal{V}(n)\}$ او $A=N-X$ سره په نښه کوو.

که $X\neq N$ وای ، نو د A سیټ به خالي نه وای. نو باید کوچنۍ ترین عنصر n يې درلودلای. پدی معنی چي د هغه دپاره به $\neg\mathcal{V}(n)$ صدق کوي.خو د $m<n$ دپاره $\mathcal{V}(m)$ صدق کوي.پدی معنی چي زموږ د فرضيې يعنی IK خلاف دی.

q.e.d

بېلګه 2.1. پدی بېلګه کی به وښيو چي هر طبيعی عدد چي تر يوه لوی وی پرکوم اوليه عدد د وېش وړ دی.فرضوو چی زموږ د بيان تابع $\mathcal{V}(n)$وايي چي «که $n\in N$ ، $n>1$ وی، نو داسی اوليه عدد p وجود لری ، چي n د p پر عدد د وېش وړ دی».

فرضوو چي $\mathcal{V}(m)$ د هرطبيعی عدد $m<n$ د پاره صدق کوی.که $n\leq 1$ وی ، نو ډېر ساده $\mathcal{V}(n)$ صدق کوي.که $n>1$ وی ، نو دوه امکانه وجود لری:

a) n په خپله يو اوليه عدد دی ، نو پدی حساب $p=n$ او n پر n د وېش وړ دی . ددی اسيته $\mathcal{V}(n)$ صدق کوی.

b) که n اوليه عدد نه وی ، نو د k او l طبيعی عددونه داسی وجود لری چي $n=k\cdot l$ ، $k\neq 1, l\neq 1$ دی. د دواړو عددو څخه که يو عدد راواخلو ، د بېلګې په توګه $k<n$ دی او دهغه دپاره د استقراء ګام $\mathcal{V}(k)$صدق کوی.پدی معنی چي داسی اوليه عدد p وجود لری چي د k عدد وربāندی د وېش وړ دی. په نتيجه کی د p عدد د n عدد هم وېشي، يعنی $\mathcal{V}(n)$ هم صدق کوی .

د 3.1 قضيې په استناد د $\mathcal{V}(n)$ د بيان تابع د هر طبيعی عدد n دپاره صدق کوی.■

ددی پاراګراف په پای کي د حقيقي عددو هغه خاصيتونه او دهغه نتيجي چي په شروع کي مو اشاره ورته کړی وه ، په ثبوت ورسوو.

قضيه 4.1. (د ارشيميد پرنسيپ).

د طبيعی عددو سيټ N د لوړی خوا څخه محدود ندی.

ثبوت ـ قضيه به په غير مستقيم ډول ثابته کړو. فرضوو چي د طبيعی عددو سيټ N د پاس له خوا محدود دی. څرنګه چي د N سيټ خالی ندی ، نو د دديکيند د پرنسيپ له مخې $a=\text{Sup } N$ وجود لری. د سپريمم د تعريف له مخی $a-1\in R$ د N د سيټ پاسنۍ سرحد ندی. پدی معنی چي د $n\in N$ داسی طبيعی عدد وجود لری چي $a-1<n$ دی. ددی ځايه $n+1>a$ او $n+1\in N$ دی. خو دغه حالت زموږ د فرضيې پر خلاف وی.

q.e.d

نتيجه ـ که x,ε حقيقي عددونه وی ، $\varepsilon>0$ ، بيا نو داسی طبيعی عدد n و جود لری چي :

$$n\cdot\varepsilon>x$$

ثبوت ـ د 1.4 قضيې له مخې $\frac{x}{\varepsilon}$ د N د سيټ پاسنۍ سرحد ندی. څکه نو داسی n وجود لری چې

$n>\frac{x}{\varepsilon}$ دی. ددی ځایه $n\cdot\varepsilon>x$ دی.   q.e.d

د تامو عددو سيټ Z د لاندني فارمول پذريعه تعريفوو:

$$x\in Z\equiv(x\in N \ \vee\ -x\in N)$$

د ناطقو عددو سيټ Q عبارت دی د ټولو هغه عددو د سيټ څخه چې د $\frac{x}{n}$ بڼه ولری ، پداسی حال کې چی x تام عدد او n مثبت طبيعی عدد دی. هغه حقيقي عددونه چې ناطق نه وی د غير ناطقو عددو په نامه يادېږی.

قضيه 5.1. (د ناطقو عددو د سيټ د ګڼوالي په هکله)

د هرو دوو ناطقو عددو $a<b$ دپاره يو بل ناطق عدد r داسی وجودلری ، چې $a<r<b$ دی.

په بله ژبه ويلای سو چې د هرو دوو ناطقو عددو ترمنځ يو ناطق عدد وجود لری.يعنی د ناطقو عددو سيټ يو ګڼ سيټ دی.

ثبوت ـ که $a<0<b$ وی ، نو څرګنده ده چې $r=0$ به وټاکو. که $a<b\le 0$ وی ، نو $0\le -b<-a$ دی. پدی معنی چې د $0\le a<b$ د حالت څېړنه بسنه کوي.

څرنګه چې $b-a>0$ دی ، نو $\frac{1}{b-a}>0$ دی. د ارشيميد د پرنسيپ له مخی داسی طبيعی عدد n وجود لری چې $n>\frac{1}{b-a}$ دی. پدی معنی چې :

$$0<\frac{1}{n}<b-a \qquad (1.14)$$

د 4.1 د قضيې د نتيجې پر بنسټ داسی طبيعی عدد m وجود لری چې :

$$m\cdot\frac{1}{n}>a$$

دی. د 2.1 قضيې پر اساس کوچنۍ ترين دغه ډول عدد m وجود لری چې پورتنۍ غير مساوات صدق وکي.څرنګه چې د m عدد کوچنۍ ترين دغه ډول عدد دی ، نو بايد $(m-1)\cdot\frac{1}{n}\le a$ وی.څکه نو د (1.14) پر بنسټ به :

$$m\cdot\frac{1}{n}=(m-1)\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b$$

ځکه نو : $a < \frac{m}{n} < b$ وی.

q.e.d

بېلګه 3.1. پدی بېلګه کي به وښيو چي $\sqrt{2}$ ناطق عدد ندی. د حقيقی عدد $\sqrt{2}$ موجوديت د بلزانو د قضيي څخه استنباط کيږی (7.5 بېلګه وګوري).

فرضوو چي $\sqrt{2}$ ناطق عدد دی ، پدی معنی چی د x∈Z او n∈N , n>0 عددونه داسی وجود لری چي $\sqrt{2} = \frac{x}{n}$ دی. د A سيټ په لاندی ډول تعريفوو:

$$A = \{m \in N; m > 0 \wedge \exists z \in Z : z^2 = 2m^2\}$$

د فرضيي له مخي د A سيټ خالی ندی . ځکه نو د 2.1 قضيي په استناد نوموړئ سيټ کوچنئ ترين عنصر لری. هغه به په n سره وښيو. ځکه نو د يوه مناسب x∈Z دپاره $\sqrt{2} = \frac{x}{n}$ دی. د نوموړي مساوات څخه د $2n^2 = x^2$ مساوات استنباط کيږی. د وروستي مساوات کينه خوا پر 2 د وېش وړ ده.ځکه نو ښئ خوا هم بايد پر 2 د وېش وړ وی. پدی معنی چي داسی تام عدد z وجود لری چي x=2z سره کيږی. ددی ځايه $2n^2 = (2z)^2 = 4z^2$ دی ، پدی معنی چي $n^2 = 2z^2$ دی. ددی ځايه څخه استنباط کيږی چي کېڼه خوا پر 2 د وېش وړ ده ، يعنی د کوم m∈N دپاره n=2m دی. څرنګه چي $4m^2 = 2z^2$ يا $2m^2 = z^2$ دی. پدی معنی چي m∈A دی. څرنګه چي m<n دی، نو دغه حالت زموږ د فرضيي ضد دي . ځکه موږ خو ويلي وه چي n د A د سيټ کوچنئ ترين عدد دی. ■

په پای کي د ځينو نښه اينودلو يادونه کوو. که a,b∈R وی ، نو خلاص او تړلي انتروال Interval (فاصله) د لاندنيو مساواتو پذريعه تعريفوو:

(a,b)={x∈R ; a<x<b}

$$\langle a,b \rangle = \{x \in R;\ a \le x \le b\}$$

په همدا ډول نيمئ تړلي او د (a,∞) ; (−∞,a) او داسی نور انتروالونه تعريفولای سو.

تمرينونه -

3.1. دسيټ لاندنئ سرحد (پوله) به څه ډول تعريف کي ؟ دلاندی خوا څخه محدود سيټ تعريف کي، د سيټ انفيمم Infimum تعريف کي.

ثابت کي چي د حقيقي عددو هر غير خالي او دلاندی خوا څخه محدود سيټ انفيمم لری.

4.1. الف) ثابته کئ : که $1 \le x^2 < a$ وی، نو h>0 داسي وجود لري چي $(x+h)^2 < a$ دی.

(چونګ: $h = \min\{1, \frac{a - x^2}{1 + 2a}\}$).

ب) ثابته کئ: که $a < x^2$ وی، نو h>0 داسي وجود لري چي $(x-h)^2 < a$ دی.

ج)ثابته کئ: د هر حقیقي عدد $a\in R$, $a\geq 0$ دپاره داسي حقیقي عدد α وجود لري چي $\alpha=\sqrt{a}$ ، یعنی $\alpha\geq 0$ دی او $\alpha^2=a$ دی.

(چونګ:په هغه حالت کي چي $a<1$ وی، نو $a>1$ حالت ته يې واړوئ. د $a>1$ په حالت کي $\alpha=\sup\{x\in R; x^2\leq a\}$ سره کښېږدئ. د(الف) او (ب) د تمرېنو د نتېجو څخه کاروا‌خلئ).

5.1. ثابت کي چي ، د ناطقو عددو سیټ Q د(1.1)-(1.7) اکسیومي پرځای کوي ، خو د (1.8) اکسیومه نه پر ځای کوي.

6.1. د 1.3 د تمرین د نتېجو څخه په ګټه اخیستو سره د 1.2 قضیه په ثبوت وروسوئ . کافی ده چي ثابت کئ: که $A\subseteq N$ خالی سیټ نه وي، نو $\alpha=\inf A$ وجود لری . بیانو کفایت کوی چي وښیو، چي $\alpha\in A$ دی.

7.1. ثابته کئ چي:د هرو دوو حقیقی عددو b,a ؛ $a<b$ دپاره داسی غیر ناطق عدد α وجود لری، چی $a<\alpha<b$ دی.

8.1. الف)فرضوو چي $a\in R$ او $a>1$ دی. د ریاضی د استقراء په طریقه يې ثابت کي چي د هر $n\in N$ دپاره لاندنئ اړېکه صدق کوي: $a^n\geq 1+n\cdot(a-1)$

ب)ثابته کئ چي: د $a,b\in R$، $a>1$ داسي طبیعی عدد $n\in N$ وجود لري، چي: $a^n>b$ دی.

ج) ثابته کئ چي: د $a,b\in R$, $0<a<1$, $b>0$ داسي طبیعی عدد $n\in N$ وجود لری، چي: $a^n<b$ دی.

9.1. د ریاضی د استقراء په طریقه لاندني اړېکه په ثبوت وروسوئ:

د $q\in R$, $n\in N$ دپاره $1+q+\cdots+q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ صدق کوي.

2.2. مپینګ هغه قاعده ده چي ....

پدی رساله کی به وښیو چي څه ډول د سیټ د مفهوم څخه د ریاضی یو د مهمو مفهومو دترسیم او تعریف دپاره کار اخیستلای سو او پدی ډول د هغه څېړنه په ریاضی کي پریو پوخ تهداب درولائ سو.

د چکي مشهوره ریاضی پوه یارنیک V.Jarnik د کالکولس د لمړی برخی [9] په ۱۶۲ مخ کي داسی لوستلائ سو:«فرضوو چي M د حقیقی عددو یو سیټ دی.که د M د سیټ هر عدد x ته یو ټاکلی عدد y تخصیص ورکړو، نو وایو چي y د x تابع ده.د M سیټ د نوموړي تابع د تعریف د ساحی په نامه یادوو.»

د تابع یا مپینګ همدا ډول ورته تعریفونه د ریاضی د انالایز په نورو درسی کتابو او د سیټ د تیوری په هکله دروسی ژبی په لمړی درسی کتاب [1] کی راغلی دی. دریاضی پوه په تصور کي مپینګ یو ډول قاعده ده چي د A د سیټ هر عنصر x ته د B د سیټ یو عنصر y (په یکړه توګه)تخصیص ورکوی. دغه ډول تصور البته د تعریف په څېر نسو قبلولای، ځکه چي په هغه کي یو نوی مفهوم چي هغه

عبارت دی له «قاعدی» څخه، را څرګند سو. پدی هکله چي څه شی قاعده ده او څه شی قاعده نده، کولای سو اوږد بحث پر وکړو.

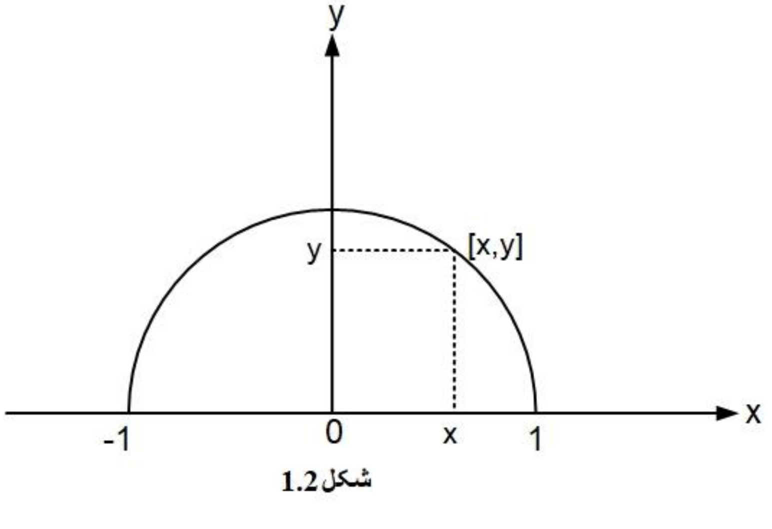
راسي چي دغه مسئله د بله اړخه و څېړو. کله چی ریاضی پوه کوم «شئ Object »څېړي، نو هغه ته «دغه «شئ» څه شی دی؟» سوال په زړه پوری ندی ، بلکه هغه ته د «دغه شئ څه خاصیتونه لری؟» سوال په زړه پوری دی. وګوری، تاسو نه پوهېږی چي د حقیقي عددو سیټ څه شي دي، خو پوهېږي چي د حقیقي عددو سیټ کوم خاصیتونه لري. همدا ډول قضاوت د نورو شیانو (لکه: مستقیم خط، سطحه، احتمالات، ...) په هکله هم کولای سو.دمپینګ په هکله هم و دغه ډول تګلاري ته رجوع کوو.دا چي مپینګ څه شي دی، موږته مهمه نده، خو غواړو د هغه څخه بنسټیز معلومات ـ هغه قاعده چي هر عنصر ته ....- تر لاسه کړو.

که د مپینګ قاعده د $y=\sqrt{1-x^2}$ په ذریعه تعریف سوی وي، نو پوهېږو چي دغه قاعده یوازی د هغو x عنصرو دپاره تعریف سوېده، چي د <1,1−> په انتروال کي شامل وي او موږ د هغه ګراف هم رسمولای سو.ـ د 1.2 شکل وګورې. د نوموړي مپینګ ګراف G موږته عین معلومات راکوي . د ګراف څخه پوهېږو چي مپینګ چیرې تعریف سوی دی او د تعریف د ساحی د هر x دپاره د هغه مربوط y موندلای سو. خو د G ګراف د مرتبو جوړو سیټ دی. په عمومی بڼه د هر مرتبو جوړو سیټ د ټاکلي خاصیت سره(چي د متن پذریعه تعریف کېږي) د کوم «مپینګ » ګراف دی. ځکه نو د مپینګ او دهغه د ګراف ترمنځ فرق کولو ته دلیل نلرو. د مپینګ ګراف عبارت دی له هغه مرتبو جوړو د سیټ څخه ....

پدی معنی چي دلته کوم نوی مفهوم تبارز نه کوی. موږته لانجه جوړونکئ مفهوم «قاعده» ورک کېږي. اوس به نو راسو و تعریف ته:

فرضوو چي A او B سیټونه، f د A×B سب سیټ دي. د f سیټ د مپینګ په نامه یادېږي، که د x∈A هر عنصر دپاره y₁,y₂∈B داسي و جود ولری، چي د $[x,y_1]\in f,[x,y_2]\in f$ اړېکو څخه د $y_1=y_2$ اړیکه استنباط سي.

د $\mathbf{D}(f)=\{x\in A; (\exists y)[x, y]\in f\}$سیټ د f د مپینګ د تعریف د ساحي په نامه او د $\mathbf{H}(f)=\{y\in B; (\exists x)[x, y]\in f\}$ سیټ د f د مپینګ د قیمتو د ساحي په نامه یادوو.



شکل 1.2

که $x\in\mathbf{D}(f)$ وی، نو یوازنۍ y داسي وجود لري ، چي $[x,y]\in f$ دي. نوموړۍ y په $f(x)$ سره ښیوو او د x په نقطه (یا عنصر)کي د f د مپینګ د قیمت په نامه یادوو.

که وغواړو چي د راکړه سوي قاعدی $P(x,y)$ په ذریعه ترسیم سوئ مپینګ پیدا کړو، نو باید دهغو مرتبو جوړو سیټ f داسی لاسته راوړو چي د هغه په هکله د بیان تابع $[x,y]\in f$ او د $P(x,y)$ قاعده سره معادله وی.

تمرین 1.2. په لاندنیو قاعدو باندی ترسیم سوي مپینګونه پیداکړی.

الف) $x,y\in R$ او $y=\log_{10}(9-\sqrt{100-x^2})$ ؛

ب)x دهغي دايری نقطه ده ، چي مرکز یي د کارتېزین د سیسټم په مرکز کي پروت او شعاع یې مساوی په یوه سره ده.y د x پر محور هغه نقطه ده، چي د x د محور او د x په نقطه کی د نوموړی دایری د مماس د تقاطع څخه لاسته راځي.

ج)د پاردوبیځه[7] د لیسي و هری ټولګې ته د هغي ټولګې د زده کونکو شمیر تخصیصوو.

بېلګه 1.2. فرضوو چي :

$$g=\{[A,n]\in\mathscr{P}(N)\times N;\ n\in A\ \wedge(\forall m)(m\in A\rightarrow m\geq n)\}$$

په اساني سره لیدلای سو، چي g مپینګ دي. $\mathbf{D}(g)=\mathscr{P}(N)-\{\emptyset\}$ او $\mathbf{H}(g)=N$ سره ده. پدی معنی ، چي د طبیعی عددو هر غیر خالي سب سیټ ته $A\in\mathscr{P}(N)-\{\emptyset\}$ ، $g(A)$ د A د سیټ کوچنۍ ترین عنصر تخصیص ورکوي.

بېلګه2.2. کوچنیان چي بازې په کوی، 8 داني مردکې (تشله) لرو،چي په اول نظر ټوله مساوی برېښي، خو دهغو څخه یوه دانه یي نظر ونوروته په وزن کي سپکه ده. ترازو (تله) بېله وزنو څخه هم لرو. څه ډول کولای سو چي هغه مردکه چي نظر و نورو ته سپکه ده پیداکړو؟

دسپکي مردکې د موندلو دپاره باید په سیستماتیک ډول مخ ته ولاړ سو. ددی موخي دپاره اته سره مردکې په ترتیب د یوه څخه تر اتو پوری په نښه کوو. د تلې په چپه پله کی هغه مردکې ایږدو چي په 2,1 او3 مو په نښه کړیدي. په ښی پله کي 6,5,4 ایږدو.که دواړې خواوی سره مساوی وی، نو سپکه مردکه د7 او 8 ترمنځ لټوو، چي دهغي پیداکول ساده دي (د تلې په راسته پله کي 7 او په کینه پله کي 8 ایږدو). که په اول قدم کي د ترازو کینه پله سپکه وی ، نو سپکه مردکه د 2,1 او3 په منځ کي ده.پدی حالت کي 1 او 2 مردکې سره پرتله کوو . که سره مساوی وي ،نو 3 سپکه ده او که نه نو د 1 او 2 څخه به یوه سپکه وي. که دتلې ښی پله سپکه وی، نو بیا هم پورتنۍ پروسه پر6,5,4 مردکو عملی کوو. ټوله پروسه د 2.2 په جدول کی ترسیمو.

---

[7] پاردوبیځه د سلواک د ښارو څخه یو ښار دی.دغه بېلګه کولای سو چي زموږ د ښارو پر لیسه باندی تطبیق کړو اووایو چي د کندهار د میرویس نیکه د لیسی و هري ټولګې ته د هغي ټولګې د زده کونکو شمېر تخصیصوو. (ژباړن)

د 2.2 جدول دتللو ممکنو نتیجو د سیټ مپینګ د مردکو یا د هغو د په نښه سوو عددو په سیټ کی دی.پاملرنه وکئ چي دلته د = = نښه د ممکن تول په صفت نه ملاحظه کېږي .

سپکه مردکه	د تللو نتېجه
3	$< =$
1	$< <$
2	$< >$
6	$> =$
4	$> <$
5	$> >$
7	$= <$
8	$= >$

جدول 2.2

■

دغه حقیقت چي «f مپینګ ، $H(f)\subseteq B,\ D(f)=A$ » دی په لنډ ډول داسي لیکو:

$$f{:}A \longrightarrow B$$

لوستل کېږي، چي f د A دسیټ څخه د B په سیټ کي مپینګ دي.کله کله یې په $A \xrightarrow{f} B$ هم ښیو.

بېلګه3.2. $f = \{[x,y,z] \in R^3; x^2 = e^z - y^2 - 1\}$

څرنګه چي $R^3 = R^2 \times R$ دی، نو f دمرتبو جوړو سیټ دی. په اساني سره لیدل کېږي چي f مپینګ دی.څرګنده ده چي $\mathbf{D(f)} = R^2$ او $\mathbf{H(f)} = <0,\infty)$ دی. پدی معنی ادعا کولای سو،چي:

$$f{:}\,\mathbf{R}^2 \longrightarrow <0,\infty)$$

$$f{:}\,\mathbf{R}^2 \longrightarrow R$$

خو دابه حقیقت ونلري، چي $f{:}\,\mathbf{R}^2 \longrightarrow (0,\infty)$

■

د f او g دوه مپینګه هغه وخت سره مساوي دی، چي د هغوی سیټونه سره مساوي وي. پدی معنی چي ددواړو سیټو مرتبي (اوډلي) جوړې باید سره مساوي وي.

تمرین 2.2. فرضوو چي f او g دوه مپینګه دی، ثابته کئ چي f=g دی، یوازی او یوازی هغه وخت چي $\mathbf{D(f)}=\mathbf{D(g)}$ وی او د هر $x\in \mathbf{D(f)}$ دپاره $f(x)=g(x)$ صدق کوی.

پاملرنه وکئ ، چي مپینګ په اصل کی دوه ئېزه اړېکه ده. د دوه ئېزه اړېکو دپاره مو د هغوی ترکیب او معکوسه اړېکه تعریف کړې دي. اوس به وښیو، چي لاندنې قضیه صدق کوي.

قضیه 1.2. که f او g مپینګه وی، نو د هغوی ترکیب $f\circ g$ مپینګ دی. د $f\circ g$ د تعریف ساحه يي عبارت ده له: $\mathbf{D}(f\circ g)=\{x\in\mathbf{D}(f);\ f(x)\in\mathbf{D}(g)\}$، او $x\in\mathbf{D}(f\circ g)$ دپاره د

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

اړيکه صدق کوي.

ثبوت ـ اول خو به ثابته کړو، چي $f\circ g$ مپینګ دي. پدی معنی که $[x,y_2],[x,y_1]\in f\circ g$ وی، نو باید $y_1=y_2$ سره وی. داړیکو د ترکیب د تعریف پر اساس داسی z_2, z_1 وجود لري ، چي $[z_1,y_1]\in g,\ [x,z_1]\in f$ او $[z_2,y_2]\in g,\ [x,z_2]\in f$ دی. څرنګه چي f مپینګ دی، نوخامخا به $z_2=z_1$ وي. د دغه حقیقت پر بنسټ چي g مپینګ دي، استنباط کیږي چي $y_2=y_1$ سره دي.

د $f\circ g$ د تعریف د ساحي په هکله لاندنۍ معادلیت صدق کوي.

$$x\in\mathbf{D}(f\circ g)\equiv(\exists y)[x,y]\in f\circ g\equiv(\exists y)(\exists z)([x,z]\in f\wedge[z,y]\in g)$$

په عین حال کي د $(\exists z)([x,z]\in f)\equiv x\in\mathbf{D}(f)$ معادلیت صدق کوي. څرنګه چي د $x\in\mathbf{D}(f)$ دپاره $z=f(x)$ سره دي، نو لاندنۍ معادلیت به لاسته راسي:

$$x\in\mathbf{D}(f\circ g)\equiv(x\in\mathbf{D}(f)\ \wedge\ f(x)\in\mathbf{D}(g))$$

همدا ډول لاندنۍ معادلیت په اساني سره لیدل کیږي:

$$f\circ g(x)=y\equiv[x,y]\in f\circ g\equiv(\exists z)(f(x)=z\wedge g(z)=y)\equiv y=g(f(x))$$

q.e.d.

نتیجه. که $f\colon A\longrightarrow B$ او $g\colon B\longrightarrow C$ ، نو $f\circ g\colon A\longrightarrow C$ دی.

بېلګه4.2. فرضوو چي:

$$f=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2;\ x\cdot(y-1)=2\}$$

$$g=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2;\ e^y=x\}$$

دي.پدي حالت کي $\mathbf{D}(f)=R-\{0\}$, $\mathbf{D}(g)=(0,\infty)$ او

$$\mathbf{D}(f\circ g)=\{x\in R-\{0\};\ \frac{2}{x}+1>0\}=(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$$

د $x\in\mathbf{D}(f\circ g)$ دپاره لاندې اړیکه صدق کوي:

$$f\circ g(x)=g(f(x))=\ln(1+\frac{2}{x})$$

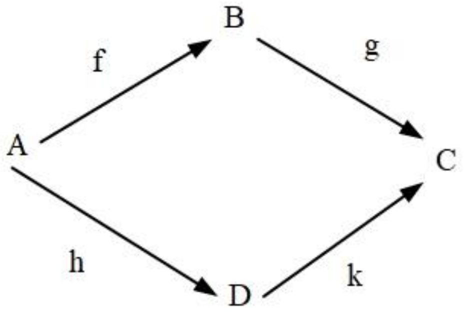
■

د $f\circ g$ مپینګ د f او g د مپینګو دترکیب (نغښتلو) Composition په نامه هم یادوو.

تمرین 3.2. ثابت یي کئ چی د مپینګو ترکیب (نغاړل)اتحادی خاصیت لري، پدي معنی که h,g,f مپینګونه وي ، نو لاندني اړېکه صدق کوي:

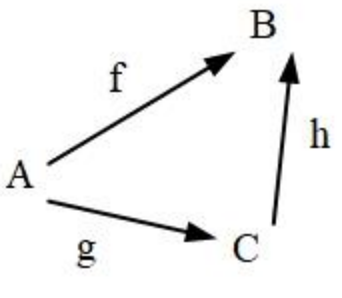
$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

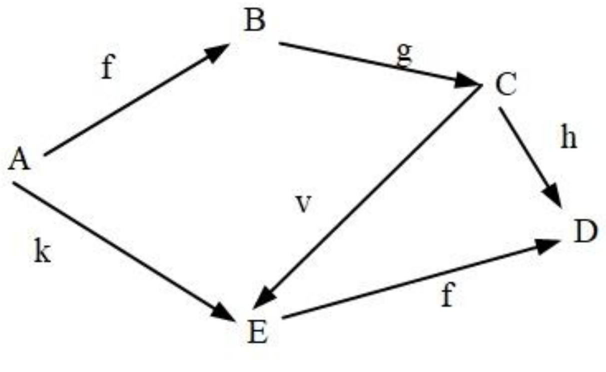
اوس به نو د $h:A\longrightarrow D,\ g:B\longrightarrow C,\ f:A\longrightarrow B$ او $k:D\longrightarrow C$ مپینګونه په نظر کي ونیسو. موږ کولای سو چي هغوی د لاندني ډیاګرام پذریعه ترسیم کړو:



(2.1)

د A د سیټ څخه د C و سیټ ته د رسیدو په موخه یا باید د B تر سیټ او یا باید د D تر سیټ تېر سو. که د هر x∈A دپاره عین نتیجه لاسته راسي، پدی معنی که $f\circ g(x)=h\circ k(x)$ وي، نو وایو چي د (2.1) ډیاګرام تبدیلي دی. په مشابه ډول د نورو ډیاګرامو تبدیل تعریفولای سو.د بېلګې په توګه د لاندنیو ډیاګرامو تبدیل :

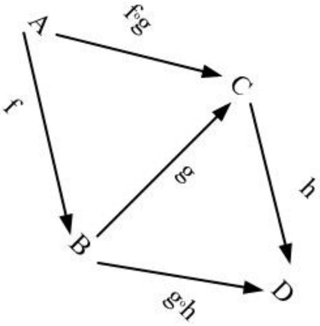




(2.2) (2.3)

تمرین 4.2. د تبدیلی مفهوم د پورتنیو دیاګرامو، یعنی (2.2) او (2.3) په هکله څرګند او ولیکئ..

بېلګه 5.2. د 3.2 تمرین نتیجه د لاندني ډیاګرام د تبدیل پذریعه ارائه کولای سو.



په 5.1 رساله کي مود راکړه سوي سیټ A دپاره د قطر اړیکه id_A تعریف کړه.په ساده ګې سره لیدلای سو، چي : $id_A: A \longrightarrow A$ دي . او د هر $x \in A$ دپاره $id_A(x)=x$ دی. د id_A مپینګ د A د سیټ د تطابق د مپینګ په نامه یادیږي.د لوستونکي پاملرنه دی ټکي ته را اړوو، چي ددی ډول مپینګ سره آشنا دی. د ریاضی په انالایز کي دغه ډول مپینګ id_R نبغ پهx سره ښئي . دلیل یي تاریخي تکامل دي.

تمرین 5.2. لوستونکئ په اسانی سره ازمویلای سي، چي د $f:A \longrightarrow B$ مپینګ دپاره

$$id_A \circ f = f \circ id_B = f \qquad (2.4)$$

اړیکه صدق کوي.

که $f:A \longrightarrow B$ مپینګ وی ، نو د $g:B \longrightarrow A$ مپینګ د f و مپینګ ته د معکوس مپینګ په نامه یادوو، که لاندني اړیکي صدق وکي:

$$f \circ g = id_A \qquad (2.5)$$

$$g \circ f = id_B \qquad (2.6)$$

تمرین 6.2.ثابت کئ چي وراکړه سوی مپینګ $f:A \longrightarrow B$ ته حد اکثر یو معکوس مپینګ وجود لری.

و راکړه سوي مپینګ ته د معکوس مپینګ د موجودیت پوښتنه لا تراوسه جوته نده.و دغه سوال ته د جواب دپاره به لمړئ ضروري مفهومونه فورمولبندی کړو.د $f:A \longrightarrow B$ مپینګ د ساده (Simple) او یا انجکشن په نامه یادوو، که د دوو مختلفو $x_1,x_2 \in A$ دپاره د $f(x_1) \neq f(x_2)$ اړیکه صدق وکي. دلیکلو طرز یی $f:A \xrightarrow{1-1} B$ او یا $f:A \xrightarrow[1-1]{} B$ دي. د f مپینګ د B پرسیټ باندی دي که $\mathbf{H}(f)=B$ سره وي. د لیکلو طرز یی :

$f:A \hookrightarrow B$ یا $f:A \hookrightarrow B$ دي.

بېلګه 6.2. الف)په 1.2 الف تمرین کي ترسیم سوي مپینګ ساده مپینګ دی ، خو په 1.2 ب) تمرین کي ترسیم سوي مپینګ ساده مپینګ ندي. د 1.2 د بېلګې مپینګ هم ساده ندي.

ب) ستاسو پاملرنه هغه مپینګ ته چي په 2.2 بېلګه کي ترسیم سوي دي، رااړوو. د 2,1,...,8 مردکو ځخه کیداي سي چي هره یوه سپکه وي. پدی معنی چی زموږ د تللو لارښونه باید داسي وي،

چي هر امکان په نظر کي ولري(په حقیقت کی همداسي هم ده). زموږ په ژبه ترسیم سوي مپینګ د {8,...,2,1} پر سیټ باندي دي. ■

قضیه 2.2. فرضوو چي f د A د سیټ څخه د B په سیټ کي مپینګ دي. نو لاندني دري شرطونه یودبل سره معادل دي.

الف) د f مپینګ ته د $g:B\longrightarrow A$ معکوس مپینګ وجود لري.

ب)د f مپینګ د B پر سیټ باندی ساده مپینګ دي.

ج) د f^{-1} اړیکه مپینګ او دهغه د تعریف ساحه د B سیټ دي.

ثبوت : دری استنباطه باید ثابت کړو، پدی معنی چي الف)⟵ب)، ب)⟵ج)، ج)⟵الف). اول به الف)⟵ب) ثابت کړو. فرضوو چي د الف) شرط صدق کوي، پدي معنی چي د f و مپینګ ته د $g:B\longrightarrow A$ معکوس مپینګ وجودلري. فرضوو چي $x_1\neq x_2,x_1,x_2\in A$ دي. $y_2=f(x_2),y_1=f(x_1)$ په نښه کوو. د (5.2.) له مخې $g(y_2)=x_2,g(y_1)=x_1$ دي. څرنګه چي g مپینګ دي، نو $y_2\neq y_1$ دی. ځکه نو ویلای سو، چي د f مپینګ ساده مپینګ دی.اوس نو فرضوو چي $y\in B$ دی.د (2.6) له مخی $f(g(y))=y$ صدق کوي، پدی معنی چي داسی $x=g(y)\in A$ وجودلری ، چي $f(x)=y$ کیږي. پدی معنی چي f د B پر سیټ باندی مپینګ دی. اوس به نو د ب)⟵ج) استنباط په ثبوت ورسوو. فرضوو چي د (ب) ادعا صدق کوی. که $[x,y_1]\in f^{-1}$ او $[x,y_2]\in f^{-1}$ وی، نو $[y_1,x]\in f$ او $[y_2,x]\in f$. څرنګه چي د f مبینګ ساده مپینګ دی، نو $y_1=y_2$ سره کیږی. پدی معنی چي f^{-1} مپینګ دی. څرګنده ده چي $\mathbf{D}(f^{-1})=\mathbf{H}(f)=B$ دی.

پاته سو دریم استنباط (امپلیکیشن) ، یعنی ج)⟵الف) په ثبوت ورسوو.فرضوو چي د (ج) ادعا صدق کوی، ددی ځایه $f^{-1}:B\longrightarrow A$ دی. کفایت کوی چي وښیو $f\circ f^{-1}=id_A$ او $f^{-1}\circ f=id_B$ دی. که $x\in A$ وی او $y=f(x)$ وی، نو $[x,y]\in f$ او $[y,x]\in f^{-1}$دی. پدی لحاظ $f^{-1}(y)=x$ او $f\circ f^{-1}(x)=x$ دی. همدا ډول د $y\in B$ د پاره ثابتیدلای سي چي $f^{-1}\circ f(y)=y$ دی.

q.e.d

که و راکړه سوی مپینګ $f:A\longrightarrow B$ ته معکوس مپینګ وجود ولری ، نو د 2.2 د قضیي او 6.2 بېلګي سره په تطابق کی هغه په f^{-1} سره ښیو . په آینده کي دغه جمله چي «د f و مپینګ ته معکوس مپینګ وجود لری» په لنډ ډول « f^{-1} وجود لری» ارائه کوو.په یقین سره ویلای سو چي دلته د ژبي څخه سؤ استفاده سویده، ځکه چي f^{-1} اړیکه تل وجود لری.

دلته باید لاندنۍ څرګندوني ته پاملرنه وکو :

فرضوو چي $f:A\longrightarrow B$ مپینګ دی.د معکوس مپینګ مفهوم یوازی د f په مپینګ پوری ندی تړلی ، بلکه د A او B په سیټو پوری هم تړلي دی(په خاص ډول د B په سیټ پوری). په دقت سره باید و $f:A\longrightarrow B$ مپینګ ته د معکوس مپینګ په هکله وړغېږو. فکر کوم چي په دغه مغلق توب د مفهوم منځ ته راوړنه به ګټور وی.

بېلګه 7.2. فرضوو چي : $f=\{[x,y]\in R^2; y=e^x\}$ دي.څرنګه چي :

$f:R\xrightarrow[\text{پر}]{1-1}(0,+\infty)$

ده ، نو ددغه مپینګ دپاره معکوس مپینګ وجود لری چي په طبیعی لوګاریتم ln باندی مشهور دی.لاکن داهم واقعیت دی چي د $f{:}R\longrightarrow R$ د مپینګ دپاره معکوس مپینګ وجود نلری. ځکه چي د f مپینګ د R پر سیټ ندی.■

قضیه 3.2. فرضوو چي $f{:}A\longrightarrow B$ او $g{:}B\longrightarrow C$ مپینګونه دی. که د f او g هر یوه مپینګ ته معکوس مپینګ وجود ولری ، نو د fog ترکیبی مپینګ ته هم معکوس مپینګ وجود لری او لاندنۍ اړیکه صدق کوي: $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

ثبوت یي ساده دی. کافی ده چي لاندنۍ مساواتونه ثابت کړو :

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=id_A$$
$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=id_B$$

خو د هغوئ ثبوت نیغ د .3.2 او .5.2 تمرینو د ثبوت څخه استنباط کیږي. q.e.d

تمرین 7.2. د tg (ټانجینټ) مپینګ د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ پر انتروال تعریف سوی دی ، د قیمتو ساحه یي **H**(tg)=R ده. و نوموړي مپینګ ته معکوس مپینګ عبارت دی له arctg . فرضوو چي دهر x∈(0,1) دپاره $f(x)=\pi x-\frac{\pi}{2}$ مپینګ وی. د $f\circ tg:(0,1)\longrightarrow R$ دپاره معکوس مپینګ پیدا کړی.

دلته به بیا هم د ځینو ضروری مفهومو یادونه وکړو. ساده مپینګ د انجکشنInjection یا انجکتیف Injective مپینګ په نامه هم یادوو. د f مپینګ د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی $f{:}\ A\longrightarrow B$ د سرجکشن Surjection یا سرجکتیف Surjective مپینګ په نامه هم یادیږی.هر هغه مپینګ چي په عین حال کي انجکتیف او سرجکتیف وی ، نو هغه مپینګ بیا د بایجکشن Bijection یا بایجکتیف Bijective مپینګ په نامه یادوو.

که $f{:}\ A\longrightarrow B$ وی او C د A د سیټ سب سیټ (C⊆A) وی، نود f |C مپینګ عبارت دی له:

$$f\mid C=\{[x,y]\in f\ ;\ x\in C\}$$

پدی معنی چي : $f\mid C=f\cap(C\times B)$ دی.

د f | C مپینګ د C پر سیټ باندی د f د مپینګ ټوټه کیدو partialization یا د C پر سیټ باندی د f د مپینګ تنګیدو reduce ته وایو.

تمرین 8.2. که $f:A\longrightarrow B$, $C\subseteq A$ وی، $D(f\mid C)=C$ اود x∈C دپاره $f|C(x)=f(x)$ صدق کوي . خپل ځان پر باوری کي!

د A د سیټ څخه د B په سیټ کي د ټولو مپینګو سیټ په ^{A}B سره ښیو.پدی معنی چي:

$$f\in{}^{A}B\equiv f:A\longrightarrow B \qquad (2.7)$$

تمرين 9.2. وښیاست چي د B^A سیټ د سیټو د جوړلو پرنسیبو په مرسته جوړولای سو.

د تاریخي دلایلو پر اساس هغه مپینګ چي د حقیقی عددو پر سیټ تعریف او قیمتونه یې هم حقیقی عددونه وی ، د تابع Function په نامه یادوو. د تابع د مفهوم په استعمال کي به تل استوار پاته نسو ، خو د متن څخه به څرګنده وی چي هدف مو څه دی.

که $f:A \longrightarrow B$ او $A=X\times Y$ وی، نو معمولاً د $f([x,y])$,$y\in Y, x\in X$ پر ځای $f(x,y)$ لیکو. په ورته ډول هغه وخت چي $A=X_1\times\cdots\times X_n$ وی ، $f(x_1,...,x_n)=f([x_1,...,x_n])$ سره ښیو.

د f مپینګ چی د تعریف ساحه یې د طبیعی عددو سیټ ، یعنی **D**(f)=N وی ، دلاړ یا ترادف (Sequence)په نامه یادوو.که **H**(f)⊆A وی ، پدی معنی چي د مپینګ د قیمتو ساحه د A د سیټ سب سیټ وی ، نو په هغه حالت کي د A د سیټ د عنصرو لاړ (ترادف) مو موخه ده او وایو چي f د A د سیټ د عنصرو لاړ دی. د تاریخي دلایلو پر بنسټ د f د مپینګ قیمت د n په عدد کي په f_n سره ښیو ، پدی معنی چي $f_n=f(n)$ دی.

که د f مپینګ داسی راکړه سوی وی چي n∈N داسی وجود ولری چي:

$$\mathbf{D}(f)=\{k\in N;\ k<n\}$$

وی ، نو وایو چي د f لاړ متناهی دی.

لاړونه به کله کله په $\{b_n\}_{n=0}^{k}, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ سره ښیو.

بېلګه 8.2. فرضوو چي د A⊆N سیټ د لوړی خوا سرحد نلری. دلته به د $f:N\xrightarrow{1-1}A$ مپینګ – لاړ- جوړ کړو. څرنګه چي د A سیټ د پاس له خوا سرحد نلری،ځکه نو د A سیټ خالی ندی. د 2.2 قضیي پر اساس کوچنۍ ترین عنصر a∈A وجود لری، پدی صورت کي f(0)=a سره ایږدو.څرنګه چي د A سیټ د لوړی خوا سرحد نلری ، نو د a عنصر به یې لوړترین سرحد نه وی. پدی معنی چي د {n∈A ; n>a} سیټ خالی سیټ ندی. دنوموړی سیټ کوچنۍ ترین عنصر په f(1) سره ایږدو. همدا ډول مخ ته ځو. کله چي د f(k) عنصر مو جوړ کي ، نو د {n∈A ; n>f(k)} سیټ خالی سیټ ندی او دهغه کوچنۍ ترین عنصر په f(k+1) سره ایږدو. د تشریح سوی ساختمان څخه استنباط کیږی چي $f:N\longrightarrow A$ دی.علاوه پر دی د f مپینګ متزاید دی، ځکه نو f ساده مپینګ دی.

■

تمرين 10.2. وښیاست چي په پورتنۍ بېلګه کی د f ترسیم سوی مپینګ د A پر سیټ مپینګ دی.

د لوستونکي تردد په 8.2. بېلګه کي د ترسیم سوی لاړ یا د f د مپینګ د بشپړتوب perfection په هکله ، دلته حق په جانب دی. د f مپینګ اصلاً یو سیټ دی او د هغه موجودیت مو د مجازو پرنسیبو په مرسته ثابته نه کړه. حتي د ترسیم سوی ګامو څخه نه استنباط کیږی ، چي آیا دغه ډول سیټ (هدف مو د f مپینګ دی) وجودلری او که نه؟ اوس به وښیو چي دغه ډول سیټ د موجودیت د ثبوت دپاره د 3.1. په رساله کي پرنسیبونه کافی دی. څرنګه چي د تفکر دغه سیر ډیر مجرد (ابسترکت) دی ، نو بی تکلف لوستونکۍ کولای سی چي تر دی موضوع تېر سي.

ضمیمه- زمونږ د نظر د مپینګ جوړښت دریاضی د استقراء په ذریعه

دلاندني قضیي ثبوت نه یوازی زمونږ ادعا ثابتوی ، بلکه د ریاضی د استقراء په مرسته د هغي د جوړېدو لار راښیي.

قضیه 4.2. (دریاضی د استقراء په مرسته د جوړښت په هکله)

فرضوو چي A سیټ دی، $a\in A$ او h د A د سیټ مپینګ په خپل ځان کی دی. یوازني مپینګ $f: N \longrightarrow A$ داسی وجود لری چي:

الف) $f(0)=a$;

ب) $f(n+1)=h(f(n))\ ;\ \forall n\in N$

بېلګه 9.2. فرضوو چي $A\subseteq N$ د لوړی خوا نا محدوده سیټ دی.فرضوو چي a د A د سیټ کوچنۍ ترین عنصر دی. فرضوو چي g په 1.2. بېلګه کي تعریف سوی مپینګ دی. د هر $k\in A$ دپاره

$$h(k)=g(A-\{0,1,...,k\})$$

اېږدو.څرګنده ده چي $h:A\longrightarrow A$ دی. د f مپینګ چي موجودیت یې د (الف) او (ب) خاصیتو سره د 4.2. قضیه تضمینوی ، هم هغه په 8.2. بېلګه کي ترسیم سوی مپینګ دی. ■

د قضیې ثبوت : د $\mathcal{F}$ سیټ په لاندی ډول سره په نښه کوو:

$$\mathcal{F}=\{t\subseteq N\times A\ ;\ (\exists n\in N)(t:\{k\in N;\ k\leq n\}\longrightarrow A;\ t(0)=a\wedge(\forall k<n\ ;\ t(k+1)=h(t(k))))\}$$

د مجازو پرنسیپو له مخی د $\mathcal{F}$ سیټ خلاص سیټ دی. اوس به نو :

$$f=\{[n,x]\in N\times A:(\exists t\in\mathcal{F})\ t(n)=x\} \qquad (2.8)$$

کښېږدو او وبه ښیو چي f هغه مپینګ دی چي مونږ یې په لټه کي یو.

لمړئ به ثابته کو چي f مپینګ دی. فرضوو چي $[k,x_2],[k,x_1]\in f$ دی. بیا نو $t_1,t_2\in\mathcal{F}$ داسی وجود لری چي $t_1(k)=x_1$ او $t_2(k)=x_2$ دی.

فرضوو چي $n_1,n_2\in N$ دا ډول دي چي :

$$\mathbf{D}(t_i)=\{l\in N\ ;\ l\leq n_i\},\ i=1,2$$

بېله دي چي عمومیت مو نقض کړئ وي فرض کولای سو چي $n_1\leq n_2$ دی. د ریاضی د استقراء څخه په استفاده سره لوستونکئ په آسانئ سره مطمئن کیدای سی چي د $l\leq n_1$ دپاره $t_1(l)=t_2(l)$ سره دی. څرنګه چي $k\in\mathbf{D}(t_1)$ دي، نو $k\leq n_1$ دی پدی معنی چي $x_1=x_2$ دی.

اوس به وښیوچي $\mathbf{D}(f)=N$ دی. فرضوو چي داسی نده.ځکه نو کوچنئ ترین k داسی وجود لری چي $k\notin\mathbf{D}(f)$. څرګنده ده چي $t_0=\{[0,a]\}\in\mathcal{F}$ ، ځکه نو $0\in\mathbf{D}(f)$ پدی معنی چي $f(0)=a$ دی. څرنګه چي $k>0$ دی، نو $k-1\in\mathbf{D}(f)$ دی.نظر (2.8) اړېکی ته $t\in\mathcal{F}$ داسی وجود لری چي $k-1\in\mathbf{D}(t)$ دی.فرضوو چي $t_1=t\cup\{[k,h(t(k-1))]\}$ دی.په ساده ګي لیدل کېږی چي $t_1\in\mathcal{F}$ دی.ځکه نو د (2.8) اړېکی پر اساس $k\in\mathbf{D}(f)$ دی خو دغه حالت زمونږ د فرضیې خلاف دی.

په عین حال کي موثابته کړه چي f د (الف) خصوصیت لری، د (ب) خصوصیت نیغ د f د جوړښت څخه استنباط کېږي.

لوستونکئ بیله کومی ستونځي څخه د ریاضی د استقراء څخه په استفاده سره ثابتولای سی چي د f تابع یکړه (بی ساری) ده.په دقیق ډول که $f_1, f_2 : N \longrightarrow A$ د (الف) او (ب) خصوصیتونه ولری ، نو د هر n∈N دپاره $f_1(n) = f_2(n)$ دی. q.e.d.

تمرینونه

11.2. وګورئ چي د لاندنیو اړېکو څخه کمه یوه مپینګ دی.

الف) $\{[x,y] \in R^2;\ x^2 = y^2\};$

ب) $\{[x,y] \in R^2;\ x^2 = y^2 \wedge y \geq 0\};$

ج) $\{[x,y] \in R^2;\ x^2 = y^3\};$

د) $\{[x,y] \in Z \times N;\ x = y \vee x = -y\};$

ه) $\{[x,A] \in N \times \mathcal{P}(N);\ (\forall y)(y \in A \equiv x \vdots y)\}$[8].

12.2. د لاندنیو مپینګو د تعریف او د قېمتو ساحي پیداکړی:

الف) $\{[x,y] \in R^2;\ \ln x = y^2 \wedge y \geq 0\};$

ب) $\{[x,y,z] \in R^3;\ x - y = z^4 \wedge z \geq 0\};$

ج) $\{[n,m] \in N^2;\ n = 2m + 1\};$

د) $\{[x,y] \in R^2;\ y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\}.$

13.2. په لاندنیو مپینګو کي f∘g او D(f∘g) پیداکړی.

الف) $f(x) = x^2 - 2$; $x \in R$ او $g(x) = \sqrt{x+1}$; $x \geq -1;$

ب) $f = \{[x,y] \in R^2;\ y = \sqrt{x^2 + a - 2}\}$ او $g = \{[x,y] \in R^2;\ y = \ln(x-4)\}.$

14.2. که f او g مپینګونه وي، وښیاست چي :

الف) f∩g او f−g هم مپینګونه دي.

ب) f ∪g یوازی او یوازی هغه وخت مپینګ دی چي $f|\mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g) = g|\mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g)$ وي.

ج) که $\mathbf{D}(f) \cap \mathbf{D}(g) = \emptyset$ وی ، نو f ∪g مپینګ دی.

---

[8] $x \vdots y$ (x پر y د وېش وړ دی، یا د y عدد د x عدد وېشی)

15.2. فرضوو چي $\mathcal{G}$ د مپینګو داسی سیټ دی چي د نومووړی سیټ ددوو اختیاری مپینګو ، یعنی $g,h\in\mathcal{G}$ دپاره د $g\subseteq h$ یا $h\subseteq g$ وی.وښیاست چي $\{[x,y];(\exists g\in\mathcal{G})\ g(x)=y\}$ هم مپینګ دی.

16.2. فرضوو چي f د غیر خالی سیټ A څخه د B په سیټ کي مپینګ دی، وښیاست چي لاندنۍ شرطونه په خپل منځ کي معادل دي:

الف) f انجکتیف دی.

ب) د $g,h:\{0,1\}\longrightarrow A$ اختیارې مپینګو دپاره پداسی حال کي چي $g\circ f=f\circ g$ وی ، نو $g=h$ صدق کوی.

ج) د C اختیاری سیټ او د $g,h:C\longrightarrow A$ اختیاری مپینګو دپاره چي $g\circ f=f\circ g$ صدق وکي، نو $g=h$ صدق کوی.

د) د $k:B\longrightarrow A$ مپینګ داسی وجود لری چي $f\circ k=id_A$ دی .

17.2. و پورتني تمرین ته ورته ادعا د سرجکتیف مپینګ دپاره فورمولبندی او ثابت کي.

18.2. وګورئ چي په لاندی ډول راکړه سوې مپینګوپه صورت کي د 1.2. ډیاګرام تبدیلی دي؟

الف) $f(x)=x^2-1,$

$g(x)=x+1,$

$h(x)=2x,$

$k(x)=\frac{x^2}{4},$

په ټولو حالتو کی $x\in R$ دی.

ب) $f(x)=\sin x,$

$g(x)=x^2-\frac{1}{2},$

$h(x)=\cos x;$

$k(x)=\frac{1}{2}-x^2,$

په ټولو حالتو کی $x\in R$ دی.

19.2. فرضوو چي د $f: A\longrightarrow B$ او $g: C\longrightarrow D$ مپینګونه راکړه سوي دي، د $h:A\times C\longrightarrow B\times D$ مپینګ د $x\in A$ او $y\in C$ دپاره په لاندی ډول تعریفوو:

$$h([x,y])=[f(x),g(x)]$$

د h مپینګ $h=f\otimes g$ سره ښیو.

الف) وښیاست چي د h مپینګ یوازی او یوازی هغه وخت ساده مپینګ دي چي د f او g مپینګونه ساده وی.

ب) وښیاست چي h یوازی او یوازی هغه وخت د $B\times D$ پر سیټ باندی دی ، کله چي د f مپینګ پر B او د g مپینګ پر D باندی وي.

ج) وښیاست چي h^{-1} یوازی او یوازی هغه وخت وجود لری چي f^{-1} او g^{-1} وجود ولری او د $h^{-1}=f^{-1}\otimes g^{-1}$ اړیکه صدق وکي.

3.2. د غیر مساواتو د حل په هکله

دلته به په لنډ ډول پدی هکله وړغیږو چي غیر مساواتونه پخوا څه ډول حلیدل او نن ورځ څه ډول حل کیږای سي.لوستونکئ به په خپله قضاوت وکړی چي آیا د سیټ د مفهوم څخه کار اخیستل د غیر مساواتو د حل د پاره ښکلی امکانات نه برابروی.

د سیټ د نظریې د منځ ته راتلو څخه دمخه د لېسو د ریاضی په کتابو کي لاندی ډول سوالونه مطرح کیدل:

بېلګه 1.3. لاندنئ غیر مساوات حل کړئ:

$$|2x-1| < x^2 - x - 2 \qquad (3.1)$$

د هغه وخت د فکر سره سم و دغیر مساوات د حل د پاره باید دغیر مساوات کینه خواد مطلقه قیمت څخه خلاصه کړو.ځکه نو باید دوه حالته په نظر کی ونیسو:

1. $2x-1\geq 0$ دی ، پدی معنی چي $x\geq \frac{1}{2}$ دی. پدی حالت کي د (3.1) غیر مساوات په لاندی ډول سره لیکلای سو:

$$2x-1< x^2-x-2$$

تر ترمیم وروسته غیر مساوات د

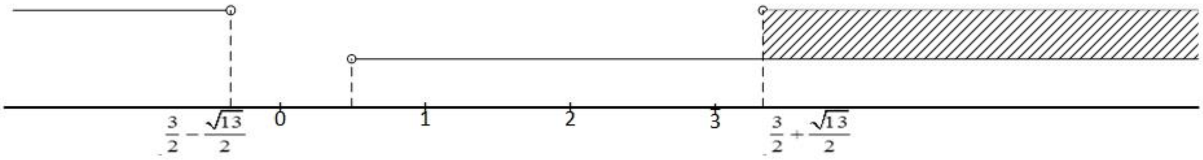
$$x^2-3x-1>0$$

بڼه اخلی. وروستې غیر مساوات په لاندی ډول تجزیه کیدای سی:

$$\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)>0 \qquad (3.2)$$

د x عدد یوازی او یوازی هغه وخت د (3.2) غیر مساوات حل دی چي یا دواړه قوسونه مثبت ، یعنی : $x>\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x>\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ وی او یا دواړه قوسونه په عین حال کی منفی وی ، پدی معنی

چي $x<\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x<\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ وی. دغه حقیقت په ګراف کي د (3.2) په ډول ترسیمولای سو. پدی حالت کی د (3.1)غیر مساوات حل ټوله هغه عددونه دی چي $x>\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ وی.



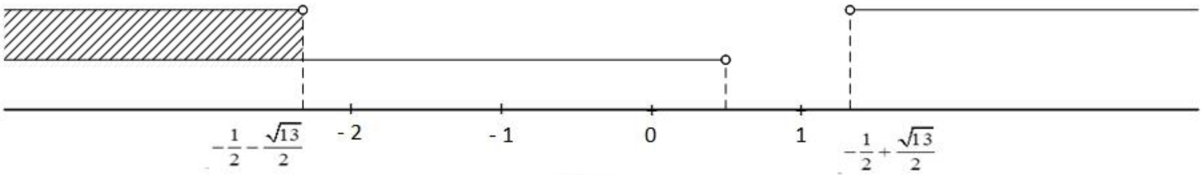
شکل 3.2

2. $2x-1<0$ دی. پدی معنی چي $x<\frac{1}{2}$ دی. پدی صورت کي د (3.1) غیر مساوات ځانته د $1-2x<x^2-x-2$ شکل اخلی چي تر ترمیم وروسته د $x^2+x-3>0$ بڼه اخلی. د نوموړي دری حدېزی مربع تر تجزيې وروسته :

$$\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)>0$$

لاسته راځي.

د پورتني غیر مساوات د حل دپاره(د x د موندلودپاره) باید یا دواړی ټوټي مثبت (تر صفر لوی) یعنی $x>-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x>-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ وي ، او یا دواړی ټوټې منفی (تر صفر کوچنې) ، یعنی $x<-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x<-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ وي. په (4.2.) شکل کي د غیر مساوات حل ترسیم سوی دي، چي د ټولو هغو x دپاره چي $x<-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ وی، صدق کوي.



شکل 4.2

پدی لحاظ د (3.1) د غیر مساوات حل ټوله هغه حقیقي عددونه x دی، چي $x<-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x>\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ وي.

د لیسی و ریاضی ته د صوری منطق او د سیټ دتیوري د ابتدائي مفهومو دداخلیدو په نتیجه کي حالت تغیرکړی دی . د لیسی اوسني زده کونکي ، د بېلګي په ډول، لاندنۍ سوال داسی حل کوی.

بېلګه 2.3. د حقیقی عددو په ساحه R کی لاندنۍ غیر مساوات حل کي.

$$(x+1)(x-3)<0 \qquad (3.3)$$

د لاندني معادليت پر اساس :

$$y,z<0 \equiv (y>0 \wedge z<0) \vee (y<0 \wedge z>0)$$

استدلال کولای سو، چي د R د سيټ د هر x دپاره (x∈R) :

$$(x+1)(x-3)<0 \equiv (x+1>0 \wedge x-3<0) \vee (x+1<0 \wedge x-3>0)$$

صدق کوي.پدی لحاظ د (3.3) د بيان دتابع د حقيقت ساحه P عبارت ده له:

$$x \in P \equiv (x>-1 \wedge x<3) \vee (x<-1 \wedge x>3) \qquad (3.4)$$

که :

$$A=\{ x \in R;\ x>-1\}$$

$$B=\{ x \in R;\ x<3\}$$

$$C=\{ x \in R;\ x<-1\}$$

$$D=\{ x \in R;\ x>3\}$$

سره وښيو، نو د (3.4) پر اساس:

$$P=(A \cap B) \cup (C \cap D)$$

دی. د وروستئ څرگندوني په هکله ښودلای سو ، چي د حقيقت ساحه د (3 , 1−) انتروال دی. پدی معنی چي د (3.3) د غير مساوات د تولو حلو سيټ عبارت دی له : $P=(-1\ ,\ 3)$ ■

د پورتني غير مساوات د حل دپاره لازمه ده چي لوستونکئ د سيټونو د مشترکی برخي او دسيټونو د يووالي د مفهومو سره اشنا او د هغوی څخه په کار اخيستلو کي ډاډه وي. که د (3.1) غير مساوات مو پدی طريقه حل کولای ، نو دهغه د حقيقت ساحه P به داسی ښه درلودلای:

$$P=(A \cap ((C \cap D) \cup (E \cap F))) \cup (B \cap ((G \cap H) \cup (K \cap L)))$$

پداسی حال کي چي $A=\{x \in R\ ;\ x \geq \frac{1}{2}\}$ ،....وي. د نورو سيټو په تعريف باندی لوستونکئ نه بی صبره کوم - په دی باوری يم چي پاته سيټونه به لوستونکئ خپله فارمولبندی کړي.

تراوسه مولوستونکئ درست پدی واقعيت ندی قانع کړی ، چي د D,C,B,A د سيټو د تعريف او د هغوئ د مشترکي برخي او يووالی د مفهومو په نتيجه کي د (3.4) غير مساوات د حل لاره اسانه سوی ده. خو پدی برخه کي د پيلګر يا نوی زده کړی زده کونکي دپاره د غير مساواتو د حل دغه طرح د درک وړ نده. ځکه چي يو لوی شمېر غير مساواتونه يي بايد حل کړی وی (لږ ترلږه سل غير مساواتونه) ، څو په مسئله يي سد خلاص سي او د پرابلم څخه د « مافوق يا ماوراء » رياضی د نظره خوند واخلی.

فرضوو چي د بیان تابع $\mathcal{V}(x)$ یواختیاری غیر مساوات ښیي ، چي متحول یې x دی او دالجبرې عملیو په مرسته د مطلقه قیمت په ګډون ، تعریف سویدی. د $\mathcal{V}(x)$ غیر مساوات حلول پدی معنی دی چي د :

$$P=\{x\in R;\ \mathcal{V}(x)\}$$

سیټ باید تعین کړو.

که $R=A_1\cup...\cup A_n$ او د هر $x\in A_i$ دپاره$\mathcal{V}(x)\equiv\mathcal{V}_i(x)$ ، پداسی حال کي چي $\mathcal{V}_i(x)$ «ساده » غیر مساوات دی(پدی معنی چي خطي غیر مساوات د امکان په صورت کی بېله مطلقه قیمت څخه)، نو د سیټو د اولیه عملیو په مرسته به څرګند سي چي :

$$P=(P_1\cap A_1)\cup(\ P_2\cap A_2)\cup...\cup(\ P_n\cap A_n)$$

دی.پداسی حال کي چي :

$$P_i=\{x\in R;\ \mathcal{V}_i(x)\},\qquad i=1,2,...,n$$

بېلګه 3.3. لاندنۍ غېرمساوات باید حل کړو:

$$\left|x^2-2x-3\right|+\left|x-2\right|<x^2-3x+1\qquad(3.5)$$

پدی معنی چي د :

$$P=\{x\in R;\ \left|x^2-2x-3\right|+\left|x-2\right|<x^2-3x+1\}$$

سیټ باید پیدا کړو. زموږ د بیان تابع $\mathcal{V}(x)$ د (3.5) غیر مساوات تعبیروی. د $\mathcal{V}_1(x)$ د بیان تابع لاندنۍ ساده غیر مساوات ټاکو:

$$x^2-2x-3+x-2<x^2-3x+1\qquad(3.6)$$

که $A_1=\{x\in R;\ x^2-2x-3\geq0\ \wedge\ x-2\geq0\}$ کېښېږدو ، نو د $x\in A_1$ دپاره $\mathcal{V}(x)\equiv\mathcal{V}_1(x)$دی.په اسانی سره لیدل کېږي، چي

$$A_1=<3,+\infty)$$

دی، او د $P_1=\{x\in R;\ \mathcal{V}_1(x)\}$ سیټ د هغو عددو سیټ دی چي د هغوی دپاره (د (3.6) غیر مساوات پر بنسټ) د

$$2x-6<0$$

غیر مساوات صدق کوی. پدی معنی چي $P_1=(-\infty,3)$ دی.

که $A_2=\{x\in R;\ x^2-2x-3\geq0\ \wedge\ x-2\leq0\}=(-\infty,-1>$ کېښېږدو، نو د $x\in A_2$ د پاره $\mathcal{V}(x)$د لاندنې غیر مساوات سره معادل دی:

$$x^2-2x-3-x+2<x^2-3x+1\qquad(3.7)$$

د (3.7) غیر مساوات د حل سیټ عبارت د P_2 د سیټ څخه دی ، چي د R سره منطبق دی.

همدا ډول د:

$A_3=\{x\in R;\ x^2-2x-3\leq 0 \wedge x-2\geq 0\}$ او $A_4=\{x\in R;\ x^2-2x-3\leq 0 \wedge x-2\leq 0\}$ سیټونه په نښه کوو. په اسانی سره لیدل کیږی، چي $A_3=<2, 3>$ او $A_4=<-1, 2>$ دی. پدی لحاظ :

$$R=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$$

د P_3 سیټ د $-x^2+2x+3+x+2<x^2-3x+1$ غیر مساوات د ټولو حلو سیټ دی، پدی معنی چي $P_3=(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$ دی. همدغه ډول P_4 د ټولو هغو حقیقی عددو سیټ دی چي په :

$$-x^2+2x+3-x+2<x^2-3x+1$$

صدق کوی. پدی معنی چي $P_4=(-\infty, \sqrt{3}-1)\cup(\sqrt{3}+1, +\infty)$ دی. ځکه نو :

$$P=(P_1\cap A_1)\cup(P_2\cap A_2)\cup(P_3\cap A_3)\cup(P_4\cap A_4)=$$

$$=\emptyset\cup(-\infty, -1>\cup\emptyset\cup<-1, \sqrt{3}-1)=(-\infty,\sqrt{3}-1)$$

■

د غیر مساواتود ځني خاص ډولود حل دپاره ښه تره داده چي د تابع په هکله د خصوصیاتو څخه کار واخلو. که و غواړو چي د :

$$p(x)<q(x) \qquad (3.8)$$

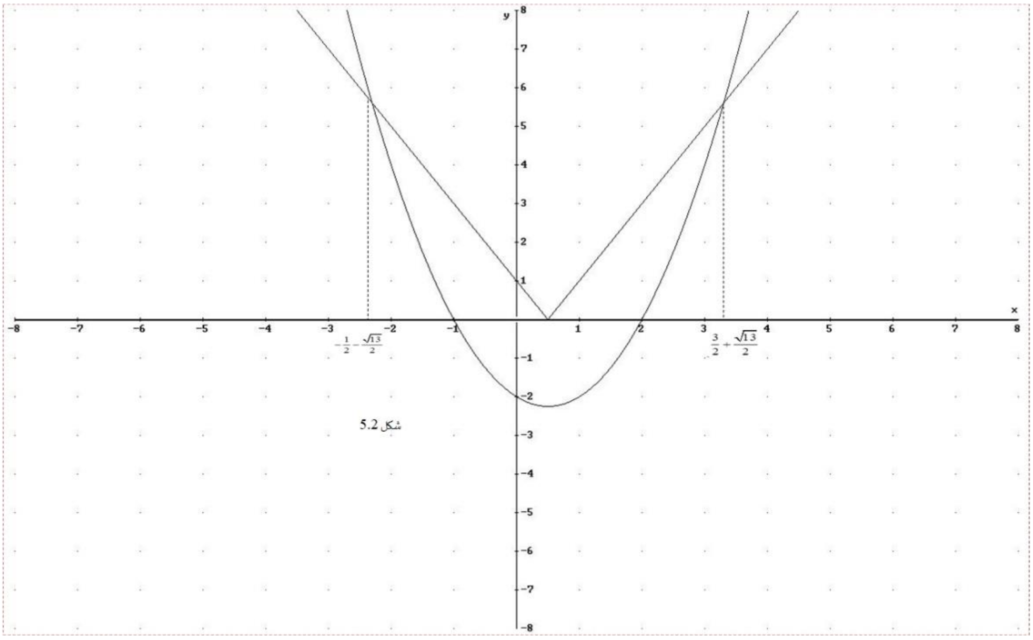
غیر مساوات، پداسی حال کي چي p او q پیژندل سوی متمادی تابع ګاني دی ، حل کړو . دلته کافی ده چي د هغوی ګراف رسم کړو او د x هغه نقطې پیداکړو چي $p(x)=q(x)$ دی. وروسته له هغه د غیر مساوات حل د ګراف له مخې لوستلای سو.

بېلګه 4.3. په نوموړی طریقه سره د (1.3)بېلګی غیر مساوات حلوو. د (3.1) غیر مساوات د (3.8) بڼه لری. ځکه چي $p(x)=|2x-1|$ او $q(x)=x^2-x-2$. د p او q ګرافونه پیژنو-2.5. شکل وګورئ.

په اسانی سره شمېرل کیدای سی چي د $x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ او $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ په نقطو کی $p(x)=q(x)$ دی. پدی لحاظ د ګراف څخه معلومېږی چي د (3.1) غیر مساوات حل د

$$(-\infty,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2})\cup(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}, +\infty)$$

سیټ ټول عددونه دی.



شکل 5.2

تمرینونه

1.3. پر لاند نیو غیر مساواتو د حل په نتیجه کې د حقیقی عددو د سیټو مشترکه برخه او یووالی تمرین کی:

الف) $|x^2-10x+8|>|x-3|$,

ب) $|4x-4|+|4x+12|\geq x^2+2x+16$,

ج) $\frac{x-3}{x-2}+|x-1|>\frac{x+2}{x+1}$,

د) $\frac{x^2-2a^3}{x^2-a^2}<\frac{x+2}{x+1}$ $\quad (a\in R,\ a>1)$,

ه) $|x^2-x-2|< x^2+2$:

2.3. د (1.3) د تمرین د (الف)،(ب) ، او(ه) سوالونه د (4.3) بېلګی په طریقه حل کی.

4.2. د تحلیلي هندسی مسئلي

دلته به دلیسی ددوری پر یوه بله برخه ، چې د سیټ د مفهوم څخه کاراخلی ، یو لنډ مکث وکړو.

بېلګه 1.4. د ρ په سطحه کې د p خط ، یوه دایره د r په شعاع چې مرکز یي د S په نقطه کی پروت دی او د R مثبت عدد R≠r، راکړه سویدې. د k دایره د R په شعاع داسی رسم کړی، چې د راکړه سوی خط p او راکړه سوی دایری (S,r) سره مماس وی.

د دایرې د رسمولو دپاره کافي ده چې د هغه مرکز T پیدا کړو. څرګنده ده چې نه یوازې یوه دایره لټوو، بلکه ټوله هغه ممکنه دایرې $k=(T,R)$ لټوو، چې پورتنۍ دوه خصوصیات ولرې. فرضوو چې X د ρ په سطحه کې د ټولو دغه ډول T نقطو سیټ دي. لاندنی سیټونه به په نښه کړو:

X_1={T∈ρ ; د (T,R) دایره د p د مستقیم خط سره مماس ده}

X_2={T∈ρ ; د (T,R) دایره د (S,r) د دایرې سره مماس ده}

پدې حساب :

$$X= X_1\cap X_2$$

دی.

څکه نو کافي ده چې د X_1 او X_2 سیټونه پیدا کړو. په اسانۍ سره لیدل کیږي، چې د X_1 سیټ دR په فاصله د p د خط سره دوو موازي خطو یووالی دی . همدا ډول د X_2 سیټ هم د دوو دایرو یووالی دی ، چې مرکز یې د S په نقطه کې پروت دی او شعاع یې په ترتیب سره $|r-R|,r+R$ دی. ■

د 1.4. بېلګې د ترسیم ضرورت کیدای سی د عملی ساحې اویا دبل مضمون څخه منشاء اخیستی وی. د سوال حل مو و دوو مسئلو ته څرمه کې:

لمړۍ دا چې د X سیټ مو د X_1 او X_2 دوو سیټود مشترکې برخې په صفت ارائه کې.

دوهم دا چې د X_1 او X_2 سیټونه مو تعین کړه.

دغه ډول استدلال د تحلیلی هندسی هغو نظرې مسئلو دپاره ګټور دي، چې په هغو کې د نقطو معین سیټونه د راکړه سوی خاصیتو سره لټول کیږي.

دغه ډول تګلاره په هیڅ صورت د سیټ د نظریې د کشف سره اړه نلرې، بلکه ریاضي پوهانو ته د سیټ د نظریې تر منځته راتګ دمخه هم څرګنده وه. په هغه وخت کې به بحث د نقطو پر هندسی ځای باندې وه. پدې حساب د لیسی ریاضی ته د سیټ د داخلیدو په وخت کې یې «د نقطو هندسی ځای د 𝒱 د خاصیت سره » په «د نقطو سیټ د𝒱 خاصیت سره» تبدیل کې. دغه حقیقت باید تل په یاد ولرو او باید دا فکر له سره وباسو چې ګواکې دسیټ نظریه وه چې و تحلیلی هدسی ته یې کوم نوی شئ ور ننه ایستې.

په عملی برخه کې دراکړه سوی خاصیت سره د هغه نقطو سیټ، X د موندلو دپاره ډیر امکانات وجود لرې. کیدای سي چې په قیاسی ډول ډیرو تجربو پر بنسټ د X د سیټ اټکل وسی. وروسته بیا لازمه ده چې ثابته یې کړو هغه څه چې مو اټکل کړیدی ، حقیقت لرې.

بله تګلاره به تقریباً داسې وی. د بېلګې په ډول د ρ په سطحه کې د X د ټولو نقطوسیټ د𝒱 د خاصیت سره باید وټاکو، بدې معنی چې :

$$X=\{A\in\rho;\ \mathcal{V}(A)\}$$

ګام پر ګام د𝒱 د خاصیت «نتیجې» ، یعنې د $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ د بیان تابع ګاني داسې پیدا کوو، چې:

$$\mathcal{V}(A)\rightarrow \mathcal{V}_i(A) \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (4.1)$$

که :

$$Y=\{ A\in\rho;\ \mathcal{V}_i (A)\wedge...\wedge \mathcal{V}_n (A)\} \qquad (4.2)$$

په نښنه کړو،نو د (4.1) پر اساس $X\subseteq Y$ صدق کوي.

که مو په کافی اندازه «نتېجې» پیدا کړی،پدی معنی چي :

$$(\mathcal{V}_i (A)\wedge...\wedge \mathcal{V}_n (A))\rightarrow \mathcal{V} (A)$$

صدق وکي ، نوپه هغه صورت کي بیا $X=Y$ سره کېږي. نو د (4.2) پر اساس بیا

$$X=\{ A\in\rho;\ \mathcal{V}_1(A)\}\cap\cdots\cap \{ A\in\rho;\ \mathcal{V}_n(A)\}$$

دی. دغه په خپل ذات کي هغه تګلاره ده چي په (.1.4) بېلګه کي مو ترسیم کړه. څرګنده ده چي هڅه کوو چي د $\mathcal{V}_1$,..., $\mathcal{V}_n$ «نتیجې» داسی پیدا کړو څو د $\{A\in\rho;\ \mathcal{V}_i(A)\}$ سیټونه په اسانی سره تعین کړای سو.

نور تمرینونه

1.4. په سطحه کي د ABCD مربع راکړه سوی ده چي د ضلعی اوږدوالی یې 1 دی. په سطحه کی د M داسی پیداکئ چي د هغو متساوی الاضلاع مثلثو دریمه څوکه ډکه کي چي دوی څوکې یې یا د مربع پر ضلع او یا په مربع کي دننه پرتی وي.

2.4. د $ABCDA'B'C'D'$ مکعب راکړه سوی دي. که مکعب پر خپل محور داسی و څرخوو، چي د A څوکه د B و څوکې ته راسي ، نو د X نقطه د C د نقطی انځور دی. د X د ټولو نقطو سیټ چي د مکعب پر مخ وجود لری، د ذکر سوی خاصیت سره پیدا کړی.

5.2. بیاهم د مپینګ په هکله

اوس به د سیټو و سیستم ته پاملرنه وکړو، د سیټو د مشترکي برخی او د سیټو د یووالي د مفهومو عمومي تعریفونه به د سیټو د سیستمو دپاره فورمولبندی کړو. دسیټو د دغه ډول مشترکو برخو او یووالی سلوک به د راکړه سوی مپینګ په اړوند وڅېړو.البته هڅه به کوو چي دغه لاسته راوړنې د پرابلمو د حل دپاره په کار واچوو.

فرضوو چي T غیر خالي سیټ دي. د F مپینګ د تعریف د ساحي $D(F)=T$ سره ، د T په سیټ کی د اندکسو سره د سیټو د سیستم په نامه یادوو ، که د هر $t\in T$ دپاره د $F(t)$ قیمت یو سیټ وی. د تاریخی او عملی دلایلو پر بنسټ پخپله $F(t)$ په F سره ښیو. او د F د سیستم څخه مو هدف $\{F_t\ ;t\in T\}$دي.

بېلګه 1.5.

الف)فرضوو چي د $n\in N$ دپاره $F_n=\{k\in N;$ د n عدد k وېشي $\}$ ، بیانو F د سیټو داسي سیستم دی چي اندکسونه یې د N د سیټ څخه دي.

ب) فرضوو چي د $(0,1)$ $\varepsilon\in$ دپاره $G_\varepsilon=\{1-\varepsilon, 1+\varepsilon\}$ دي. بيانو G د هغو سيټو سيستم دی چي اندکسونه يې د $(0,1)$ سيټ څخه دي.

ج) فرضوو چي X غير خالي سيټ دي ، د $x\in X$ دپاره $H_x=\{x\}$ دي. H د سيټو هغه سيستم دي چي اندکسونه يې د X په سيټ کي دي.

■

که F د سيټو داسی سيستم وی ، چي اندکسونه يې د T په سيټ کی وي او S د T د سيټ غير خالي سب سيټ وي، بيا نو :

$$\bigcap_{t\in S}F_t \equiv (\forall t\in S)x\in F_t \qquad (5.1)$$

$$\bigcup_{t\in S}F_t \equiv (\exists t\in S)x\in F_t \qquad (5.2)$$

بېلګه 2.5. فرضوو چي H,G,F د (1.5) بېلګي د سيټو سيستمونه دي. فرضوو چي P د ټولو اوليه عددو سيټ دي. بيانو

$$\bigcup_{n\in P}F_n = N-\{1\}$$

دي. که $p_1,\ldots,p_k$ په خپل منځ کي مختلف اوليه عددونه وي ، نو:

$$\bigcap_{n\in\{p_1,\ldots,p_k\}}F_n = F_{p_1,\ldots,p_k}$$

فرضوو چي $A=\{\frac{1}{n+1};n\in N\}$ وي، بيا نو :

$$\bigcap_{\varepsilon\in A}G_\varepsilon = \langle 1,2\rangle$$

که $B=\{\frac{n}{n+1};n\in N\}$ وي ، نو

$$\bigcup_{\varepsilon\in B}G_\varepsilon = (0,3)$$

دي.

همدا ډول که د X سيټ تر يوه عنصر زيات ولري ، نو $\bigcup_{x\in X}H_x = X$ او $\bigcap_{x\in X}H_x=\varnothing$ دي.

■

تر اوسه مو ځانونه پدی ندی متيقين کړي چي آيا زموږ دغه تعريفونه پر ځای دي، پدی معنی چي آيا کولای سو دغه ډول سيټونه د مجازو پرنسيپو په مرسته جوړ کړو او که نه ؟ د مشترکي برخي په هکله خبره ساده ده. که S غير خالي سيټ وي ، بيا نو $t_0\in S$ داسي وجود لري چي:

$$\bigcap_{t\in S} F_t = \{x \in F_{t_0}; (\forall t \in S) x \in F_t\}$$

د دغه ډول سيټ موجوديت تضمين دي.

د يووالي د سيستم دپاره حالت لږ څه پيچلي دي.په عمومي ډول سره ضرور دي چي د يووالي عموميت د نوی پرنسيب په صفت و منل سي. په 1.6 فصل کي به دغه موضوع په جزئياتو سره وڅيړو.د نېکه مرغه په اکثره مهمو حالاتو کي د X داسی سيټ وجودلری، چي د هر $t \in T$ د پاره $F_t \subseteq X$ وي، نو

$$\bigcup_{t\in S} F_t = \{x \in X; (\exists t \in S) x \in F_t\}$$

دي.

تمرين 1.5. فرضوو چي د $t \in \langle 0,1 \rangle$ دپاره $F_t = \langle a-t, b+t \rangle$ دي، پداسی حال کي چي $a<b$ وي. فرضوو چي $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د $(0, 1)$ په انتروال کي د عددو داسي لاړ دي، چي $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ دي. که $S=\{a_n;\ n\in N\}$ سره وښيو ، نوثابته کي چي

$$\bigcup_{t\in S} F_t = (a-1, b+1)$$

دي.

تمرين 2.5. فرضوو چي G, F د سيټو سيستمونه دی چي د هغوی د اندکسو سيټ عبارت له T څخه دي. $S\subseteq T,\ S\neq\emptyset$. د هر $t\in S$ دپاره $F_t\subseteq G_t$ دي او A اختياري سيټ دي. لاندني اړيکي صدق کوي:

$$\bigcap_{t\in S} F_t \subseteq \bigcap_{t\in S} G_t$$

$$\bigcup_{t\in S} F_t \subseteq \bigcup_{t\in S} G_t$$

د ډی ـ مارګن قوانين صدق کوي:

$$A - \bigcup_{t\in S} F_t = \bigcap_{t\in S} (A - F_t)$$

$$A - \bigcap_{t\in S} F_t = \bigcup_{t\in S} (A - F_t)$$

د توزيعی قوانين صدق کوي:

$$A \cap \bigcup_{t\in S} F_t = \bigcup_{t\in S} (A \cap F_t)$$

$$A \cup \bigcap_{t\in S} F_t = \bigcap_{t\in S} (A \cup F_t)$$

په راتلونکې کې به د $\bigcup_{n\in N} F_n$ او $\bigcap_{n\in N} F_n$ په عوض $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ او $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ لیکو.همدا ډول د $S=\{0,1,...,n\}$ په حالت کې د $\bigcup_{k\in S} F_k$ او $\bigcap_{k\in S} F_k$ پرځای $\bigcup_{k=0}^{n} F_k$ او $\bigcap_{k=0}^{n} F_k$ لیکو.

اوس به یو څو نوري نښې هم را منځ ته کړو. فرضوو چې $f:A\longrightarrow B$ مپینګ دي، که $C\subseteq A$ وی، نو :

$$f''C = \{f(x); x\in C\} = \{y\in B; (\exists x\in C) y = f(x)\} \qquad (5.3)$$

دي. که غلط فهمي رانسی ، نود $f''C$ سیټ د $f(C)$ په بڼه هم په نښه کووا و د f په مپینګ کې د C د سیټ د تصویر په نامه یادوو.که $D\subseteq B$ وی ، نو د f په مپینګ کې د D د سیټ اصل عبارت دی له:

$$f^{-1}(D) = \{x\in A; f(x)\in D\}$$

بېلګه 3.5.

الف) فرضوو چې ρ سطحه ده، د $S\in\rho$ نقطه او حقیقی عدد $k\in R$ راکړه سوي دي. دپراخوالي یا غټوالي (Enlargements)عملیه چې مرکز یې د S په نقطه کې وي د k د ضریب په اندازه، د راکړه سوی سطحي ρ په خپل ځان کې د f مپینګ دي، په داسی ډول چې د ρ د سطحی هری نقطی X په مقابل کې د $Y=f(X)$ نقطه داسی اېښودل کېږي ، چې د S,Y,X نقطې پر یوه خط باندی پرتې دي.د YS قطعه خط د XS د قطعه خط k ځلي (k چنده) دي. نوموړې نقطې یوازی او یوازی هغه وخت پر هغه نیمه خط چې د S د نقطی پذریعه تعینیږی، پرتې دي چې $k\geq 0$ وي. د هندسی څخه پوهیږو چې د AB د قطعه خط تصویر دf د ګاونډیتوب په عملیه کې د $CD=f(AB)$ قطعه خط دي، پداسی ډول چې $f(A)=C$ او $f(B)=D$ سره دي. په همدا ډول د K دایره د r په شعاع چې مرکز یې د X په نقطه کې وي، بیا هم د $f(K)$ دایره ده چې مرکز یې د $f(X)$ نقطه او شعاع یې $|k|.r$ ده.

ب) د ρ د سطحې ګرځېدنه (دوران) د هغې د مرکز S پر شاوخوا د φ په زاویه د $g:\rho\longrightarrow\rho$ مپینګ دي. پدی حالت کې د AB د قطعه خط تصویر بیا هم قطعه خط دي$g(AB)=g(A)g(B)$. د K ددایری تصویر،چې مرکز یې د X په نقطه کې او د r په شعاع وي، د $g(K)$ دایره ده،چې مرکز یې د $g(X)$ نقطه او شعاع یې r .

ج) ورته ادعاوی د دایري د ټوټې (قوس) ، خط ، مثلث په هکله او نورو هندسي تحویلاتو لکه تناظر(Symmetry) او د ځای تغیر (Displacement) په اړوند هم صدق کوي.

■

فرضوو چې $f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C$ مپینګونه دي. بیانو د $X\subseteq A$ دپاره لاندی اړیکه صدق کوي.

$$f\circ g(X)=g(f(X)) \qquad (5.4)$$

او د $Y\subseteq C$ دپاره صدق کوي چې:

$$(f\circ g)^{-1}(Y) = f^{-1}(g^{-1}(Y)) \qquad (5.5)$$

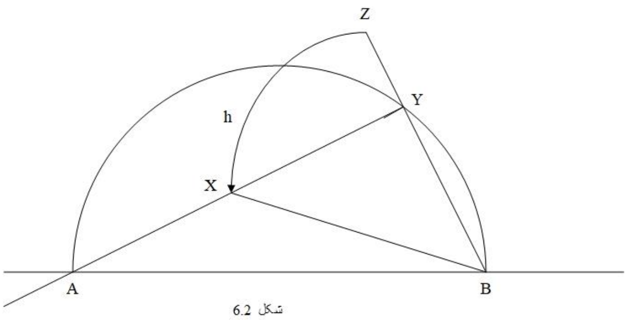
تمرین 3.5. پاسنۍ د (5.4) او (5.5) اړیکې ثابتې کړي.

د (5.4) او (5.5) مساواتونه د سوالو د حل په وخت کي ډېره مرسته کوي.

بېلګه 4.5. د ρ په سطحه کي د $\overset{\frown}{AB}$ نیمه دایره راکړه سوی ده. دρ په سطحه کي د M سيټ د ټولو هغو نقطو X سيټ دي چي لاندی خاصيت لری:

پر نیمه دایره باندی د Y نقطه داسي وجودلري چي د X نقطه د YA پر نیمه خط داسی پرته ده چي د XY او YB د قطعه خطو اوږدوالي سره مساوی دې (6.2 شکل وګورئ).

د $\overset{\frown}{AB}$ د نیمي دایري د هري Y نقطي دپاره په دغه خصوصیاتو نقطه بي ساری یا یوازني ده. پدی ډول د بېلګي شرط د f مپينګ د $\overset{\frown}{AB}$ پر نیمه دایره (قوس) تعريفوي.څرګنده ده چي زموږ د ټولو سيټ M عبارت د ($f(\overset{\frown}{AB})$ څخه دي.په اساني سره ليدل کېږي چي دX نقطه د h د ګرځېدو په نتيجه کي د Z د نقطي تصویر دي(6.2 شکل وګورئ)، پداسي ډول چي مرکز يې د B نقطه د 45° په زاويې سره او Z دg د پراخوالي عمليې په نتيجه کي د $\sqrt{2}$ په ضريب سره د Y د نقطي تصويردي .څکه نو:



6.2 شکل

f=g∘h

د (5.4) پر اساس (($M=h(g(\overset{\frown}{AB}))$ صدق کوي.

د (3.5) بېلګي پر اساس د M سيټ د $\overset{\frown}{EB}$ نیمه دایره ده چي شعاع يې د AB د شعاع په پرتله د $\sqrt{2}$ ځلي اوږده او د B د نقطي پر شاوخوا د 45° څرخېدلي ده، پداسي حال کي چي E=h(g(A)) ده.

په اساني سره ليدل کېږي چي ، که $f: A \longrightarrow B$, D⊆B,C⊆A وي، نو :

$$C \subseteq f^{-1}(f(C)) \qquad (5.6)$$

$$D \supseteq f(f^{-1}(D)) \qquad (5.7)$$

بېلګه 5.5. په پورتنيو (5.6) او (5.7) اړيکو کي حتمی نده چي مساوات دي صدق وکي.

فرضوو چي د $f:\langle -1,1\rangle \to R$ مپينګ د $f(x)=x^2$ پذريعه تعريف سوي دي، بيا نو:

$f^{-1}\left(f\left(\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right)=\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ او $f(f^{-1}(\langle 0,2\rangle))=\langle 0,1\rangle$ دي. ■

تمرين 4.5. که $f:A\longrightarrow B$, X⊆H(f) وي ، نو ثابته کئ چي :

$f(f^{-1}(X))=X$

د معرفی سوي مفهومو د جوړو ترمنځ ساده اړیکي په اساني سره ثابتیدیلای سي. فرضوو چي $f:A\longrightarrow B$ او G,F د سیټو سیستمونه دي چي اندکسونه یې د T په سیټ کي داسي پراته دي چي د هر $t\in T$ دپاره $F_t\subseteq A$ او $G_t\subseteq B$ دي. فرضوو چي $Y\subseteq B, X\subseteq A$ او $S\subseteq T$, $S\neq\emptyset$ دي. بیانو لاندني اړیکي صدق کوي:

$$f\left(\bigcup_{t\in S}F_t\right)=\bigcup_{t\in S}f(F_t) \qquad (5.8)$$

$$f\left(\bigcap_{t\in S}F_t\right)\subseteq\bigcap_{t\in S}f(F_t) \qquad (5.9)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{t\in S}G_t\right)=\bigcup_{t\in S}f^{-1}(G_t) \qquad (5.10)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{t\in S}G_t\right)=\bigcap_{t\in S}f^{-1}(G_t) \qquad (5.11)$$

$$f(A-X)\supseteq f(A)-f(X) \qquad (5.12)$$

$$f^{-1}(B-Y)=A-f^{-1}(Y) \qquad (5.13)$$

تمرین 5.5.

الف) د (5.8)-(5.13) اړیکي ثابت کي.

ب) په (5.9) او (5.12) اړیکوکي ثابت کئ چي حتمي نده چي مساوات دی صدق وکي.

که په کومه څېړنه کي د A ثابت سیټ راکړه سوي وي او زموږ څېړنه یوازی د نوموړي سیټ د سب سیټو په هکله وي، نو پدی صورت کي د کرکتری(ځانګړتیا) تابع مفهوم زموږ سره ښه مرسته کولای سي . فرضوو چي $X\subseteq A$ دي. د $\chi_X: A\longrightarrow\{0, 1\}$ تابع دX د سیټ د کرکتری(ځانګړتیا) تابع په نامه یادوو، که د $x\in X$ د پاره $\chi_X(x)=1$ او د $x\in A-X$ دپاره $\chi_X(x)=0$ دي.

تمرین 6.5. وښیاست چي د Φ مپینګ چي د $X\subseteq A$ هرسیټ ته د هغه کرکتری(ځانګړتیا) تابع $\chi_X=\Phi(x)$ تخصیصوي ، بایجکشن دي.

$$\Phi: \mathcal{P}(A)\longrightarrow {}^{\wedge}\{0, 1\}$$

په پای کي یوبل مفهوم چي په ځینو څېړنو کي ډیرګټوردي، معرفی کوو. فرضوو چي $\mathfrak{F}$ د سیټونو سیټ دی ، پدی معنی چي د هر $A\in\mathfrak{F}$ صدق کوي چي A سیټ دي.د سیټو د سیټ یووالی $\bigcup\mathfrak{F}$ داسي تعریفوو:

$$x\in\bigcup\mathfrak{F}\equiv(\exists A)(x\in A\wedge A\in\mathfrak{F})$$

د $\bigcup\{A,B\}=A\cup B$ مساوات صدق کوي. لوستونکئ په اساني سره مونډلای سي چي :

$$U\mathfrak{F}=\underset{A\in\mathfrak{F}}{U}id_{\mathfrak{F}}(A)$$

پداسی حال کي چي د مساوات د ښئ خوا يووالی د $A\in\mathfrak{F}$ سيټونه دي.

ضميمه I ـ د رياضي د انالايز دوی کلاسيکي ادعاوې

د رياضي د انالايز دوي مشهوری قضيې، چي زموږ په څېړنو کي په وار وار تظاهر کوي، در پيادوم. د اکمال په صفت يې دلته ثبوت وړاندی کوم.

قضيه 1.5. (د وايرشتراس لمړي قضيه). فرضوو چي f د <a, b> د انتروال څخه د R په سيټ کي متمادی مپينګ دي. بيانو د f مپينګ د پاس له خوا محدوده ده، پدي معنی چي د f(<a, b>) سيټ محدود دي.

ثبوت: د

M={c∈(a, b> ; د f مپينګ د <a, c> په انتروال کي محدود دي }

سيټ په نښه کوو. په اساني سره ليدل کېږي چي د M سيټ د لوړې خوا محدود سيټ دي، پدي معنی چي .

$$\alpha=\sup M$$

وجود لري. څرګنده ده چي α∈(a, b> دي. څکه نو د f مپينګ د کيڼې خوا د α په عدد کي متمادی دي،څکه نو ε>0 داسي وجود لري چي د هر x∈(α−ε, α) دپاره |f(α)−f(x)|<1 دي. څرنګه چي α−ε<α=sup M دي، نو c∈M داسي وجود لري چي c>α−ε دي. که K د <a, c> په انتروال کي د f د مپينګ سرحد وي، نو د max{K, |f(α)|+1} عدد د <a, α> پر انتوال باندي د f د مپينګ سرحد دي. څکه نو f د <a, α> پر انتروال محدوده دي . ددی ځايه استنباط کېږي چي α∈M ده.

که داسي وای چي α<b وای، نو بيا به داسی ε وجود درلودای،چي د x∈(α−ε, α+ε) دپاره به |f(α)−f(x)|<1 وای. څرنګه چي f پر $\left\langle a,\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right\rangle$ محدوده ده، پدی معنی چي $a+\frac{\varepsilon}{2}\in M$ دي.

خو دغه حالت ناممکنه دي. څکه نو α=b∈M دي. ددی ځايه د قضيې ادعا ثابتېږي. q.e.d

نتېجه (د وايرشتراس دوهمه قضيه). فرضوو چي f د <a, b> د انتروال څخه د R په سيټ کي متمادی مپينګ دي. بيا نو د f مپينګ د $\langle a,b\rangle$ په انتروال کي اعظمی (اصغری) نقطي ته رسېږي.پدي معنی چي $c\in\langle a,b\rangle$ داسي وجود لري چي د هر $x\in\langle a,b\rangle$ دپاره f(x)≤f(c) (f(x)≥f(c)) دي.

ثبوت: فرضوو چي :

$$K=\sup f(\langle a,b\rangle)$$

دي. د K د عدد موجودیت د 1.5. قضیې او د ددیکیند د پرنسیب پربنسټ تضمین دي. که د $x \in \langle a,b \rangle$ دپاره $f(x)<K$ وای، نود g مپینګ چي $g(x)=\frac{1}{K-f(x)}$ په ذریعه تعریف سوی دي د $\langle a,b \rangle$ پر انتروال متمادی دي.د K د تعریف څخه د سپریمم په صفت استنباط کېږي چي د g مپینګ غیر محدود دي او داحقیقت د 1.5 د قضیې سره تناقض لري. q.e.d

قضیه 2.5. (د بلزانو Bolzano قضیه). فرضوو چي f د <a, b> د انتروال څخه د R په سیټ کي متمادی مپینګ دي. فرضوو چي c عدد د f(a) او f(b) د عددو په منځ کي پروت دي، بیانو $\alpha \in (a, b)$ داسي وجود لري، چي $f(\alpha)=c$ کېږي.

ثبوت : فرضوو چي ، د بېلګي په توګه $f(a)<c<f(b)$ دي.

$$M=\{ x \in \langle a,b \rangle ;\ f(x)\leq c \}$$

په نښه کوو. د M سیټ خالی ندي او د لوړې خوا څخه محدود دي. فرضوو چي $\alpha=\sup M$ دي. و به ښیو چي $f(\alpha)=c$ دي.

که $f(\alpha)<c$ وای، نو د f د متمادیت څخه به استنباط سوی وای، چي د مناسبی δ دپاره $\alpha+\delta \in M$ وای، خو دغه حالت د لوړې خوا د M د محدودیت سره په تضاد کی دي.

که $f(\alpha)>c$ وای، نو په اسانی سره ښودلای سو چي، داسي مناسبه $\delta>0$ وجودلري،چي $\alpha-\delta$ د M د سیټ لوړنۍ سرحد دي . q.e.d.

بېلګه 6.5. فرضوو چي $f:\langle a,b \rangle \rightarrow R$ متمادی مپینګ دي. که $\langle c,d \rangle \subseteq \langle a,b \rangle$ وي، نو $f(\langle c,d \rangle)$ تړلئ انتروال دي.

په رشتیا هم د وایرشتراس ددوهمي قضیې له مخي داسي $\alpha,\beta \in \langle c,d \rangle$ وجودلري چي دهر $x \in \langle c,d \rangle$ دپاره $f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$ دي.

که $f(\alpha)\leq \xi \leq f(\beta)$ وي، نو د بلزانو د قضیې پر بنسټ $\eta \in \langle c,d \rangle$ داسي وجود لري(η حتی د α او β په منځ کي پرته ده) ، چي $f(\eta)=\xi$ دي. ■

تمرین 7.5. د 1.5 قضیې او د هغه نتیجو ته ورته ادعاوې او د 6.5 بېلګي په ډول ادعا د خلاص انتروال دپاره هم صدق کوي؟

بېلګه 7.5. فرضوو چي $a>0, a \in R$ او $n \in N$ ، $n>0$. بیانو د y مثبت عدد داسي وجود لري، چي $y^n=a$ دي. پدی معنی چي $\sqrt[n]{a}$ وجود لري.

د $f: R \longrightarrow R$ تابع چي د $f(x)=x^n$ په ذریعه تعریف سوي ده، متمادی تابع ده (ثابت یې کي). که $a\geq 1$ وي، نو $f(0)=0<a\leq f(a)$ دي. ځکه نو د بلزانو د قضیې 2.5 پر بنسټ $y \in (0, a)$ داسي وجود لري ،

چي $f(y)=a$ ، پدي معنی چي $y^n=a$ دي. که $a<1$ وي، نو $\frac{1}{a}\geq 1$ دي. بيانو $z>0$ داسي وجودلري

چي $z^n=\frac{1}{a}$ دي. کافی ده چي $y=\frac{1}{z}$ کښېږدو. ■

ضميمه II ـ د سيټو د سيستم کارتېزين ضرب

فرضوو چي F د سيټو داسي سيستم دي چي اندکسونه يي د T په سيټ کي پراته دي. دF د سيټو د سيستم کارتېزين سيستم داسي يو سيټ دي چي:

$$\prod_{t\in T}F_t=\{f \text{ ؛ مېپينګ دي } f، D(f)=T, (\forall t\in T)f(t)\in F_t\} \qquad (5.14)$$

د $\prod_{t\in T}F_t$ د سيټ موجوديت په 3.1 کي دذکر سوو پرنسيبو پر اساس نه تضمينيږی.

تمرين 8.5. د $\prod_{t\in T}F_t$ سيټ په 3.1 کي دذکر سوو پرنسيبو پر اساس د F د سيستم څخه د $A=\bigcup_{t\in T}F_t$ سيټ په مرسته جوړ کي.

بېلګه 8.5. د (5.14) تعريف څخه نبغ استنباط کېږي چي د ثابت سيستم په صورت کي ، يعنی که $F_t=A$ وي، نو د هر $t\in T$ دپاره صدق کوي،چي:

$$\prod_{t\in T}F_t={}^{T}A$$

■

دلته به د F «کوچنۍ» د سيټو سيستم ، چي اندکسونه يي د $T=\{0,1\}$ په سيټ کي دي، وڅېړو.د F د سيستم کارتېزين ضرب $\prod_{t\in T}F_t$ د $F_0\times F_1$ کارتېزين ضرب سره څه ډول اړوند لری؟ البته نه سره مساوی کېږي، خو ډېر لږ تفاوت سره لري. د $\prod_{t\in T}F_t$ د ضرب عنصرونه د f مېپنګونه دي، چي $f(0)\in F_0$ او $f(1)\in F_1$ دي. دغه ډول دf مېپنګونه کټ مټ داسي معلومات راکوي لکه د $[f(0), f(1)]$ مرتبه جوړه، چي د $F_0\times F_1$ عنصر دي. برعکس د هری مرتبې جوړې $[x,y]\in F_0\times F_1$ جواب ورکونکۍ د $f\in\prod_{t\in T}F_t$ يوازنۍ عنصر دي ، چي د $f(0)=x$ او $f(1)=y$ په ذريعه تعريف سوی ده.

په عمومي ډول، که n مثبت طبيعي عدد وي او F د سيټو داسي سيستم وي چي انډکسونه يي د $T=\{0,1,...,n-1\}$ په سيټ کي وي، نو بيا د

$$\Phi:\prod_{t\in T}F_t\to F_0\times F_1\times\cdots\times F_{n-1}$$

بايجکشن وجود لري.

په حقيقت کي کافی ده چي

$$\Phi(f)=[f(0),f(1),...,f(n-1)] \qquad (5.15)$$

سره کښېښودل سي.

دغه بايجکشن په ډېرو حالتو کي موږته د دواړو کارتېزين ضربو د انطباق امکانات برابروی.

تمرين 9.5. ثابت يې کي چي د (5.15) په ذريعه تعريف سوي مپينګ بايجکشن دي.

نور تمرينونه

10.5. الف)فرضوو چي $f:A\longrightarrow B$ دي. وښياست چي f يوازي او يوازي هغه وخت ساده دي،چی د هر $X\subseteq A$ دپاره $f^{-1}(f(X))=X$ وي.

ب) ورته ډول ادعا د سرجکشن دپاره فورمولبندی او ثابت کړی.

11.5. فرضوو چي $f:T\longrightarrow S$ او F د سيټونو سيستم دي چي اندکسونه يې د S په سيټ کي پراته دي.

الف) و ښياست چي $H=f\circ F$ د سيټو سيستم دی چي اندکسونه يې د T په سيټ کي پراته دي.

ب) که f سرجکشن وي، نو ثابت کي چي:

$$\bigcup_{t\in T}F_t=\bigcup_{t\in T}H_t$$

$$\bigcap_{t\in T}F_t=\bigcap_{t\in T}H_t$$

ج)فرضوو چي $Y\subseteq S,\ X\subseteq T$ دي. د X او Y ترمنځ بايد کومې اړېکې صدق وکي،څو

$$\bigcup_{t\in T}F_t=\bigcup_{t\in T}H_t$$

$$\bigcap_{t\in T}F_t=\bigcap_{t\in T}H_t$$

صدق وکي.

12.5. فرضوو چي A او B غير متصاعد د سيټو سيستمونه دي چی اندکسونه يې د N په سيټ کي پراته دي، پدی معنی چي د هر $n\in N$ دپاره صدق کوي چي $A_{n+1}\subseteq A_n$, $B_{n+1}\subseteq B_n$ دي.

ثابت کي چي:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\cup\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n$$

13.5. فرضوو چي A ثابت سيټ دي. وښياست چي د $Y,X\subseteq A$ دپاره لاندني مساواتونه صدق کوي:

$$\chi_{X\cup Y}=\chi_X+\chi_Y-\chi_X\cdot\chi_Y$$

$$\chi_{X\cap Y}=\chi_X\cdot\chi_Y$$

$$\chi_{A-X}=1-\chi_X$$

14.5. الف)فرضوو چي q,p د R څخه په R کي مپينګونه دي،چی د +,−,· او مطلقه قيمت د عمليو په مرسته تعريف سوي دي. وښياست چي دهغو حقيقي عددو x سيټ چی د هغو دپاره

$$p(x)<q(x)$$

صدق کوي، د متناهي شمير خلاصو انتروالو يووالي دي.

ب)د الف) د برخي په نتيجه کي به څه تغير راسي ، که دp او q د تابع کانو په جوړښت کي د وېش او دوهم جذر عمليي هم ورداخلي کړو؟

ج) د هغو انتروالو د شمېر حدس ووهی چي د هغو په نتيجه کي د $\{x\in R;\ p(x)<q(x)\}$ د سيټ يووالئ په هغه صورت کي تعينوي،چي دp او q په تابع کانوکي تر ټولو زياد د x د مجهول n ـم طاقت وي.

د) د ج) د برخي نتيجه د لاندنيو مخصوصو تابع ګانو دپاره مشخصه کي:

$$q(x)=ex^2+fx+g,\ \ p(x)=ax^2+bx+c$$

15.5 الف)فرضوو چي f د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال څخه د $\langle 0,1\rangle$ پر انتروال باندي متمادی ساده مپينګ دي. . که $f(1)<f(0)$ وي، بيا نوثابته کي، چي $f(1)=1,\ f(0)=0$ ده او د f تابع متصاعده ده.

ب) د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال څخه د $\langle 0,1\rangle$ پر انتروال باندي د f ساده مپينګ رسم کړي، چي $f(1)=1,$ $f(0)=0$ او f غير متصاعده وي.

6.2. لوبې

هڅه به وکو چي دلته تاسو ته دسيټ د نظريي د پلار ارنست څرملو(Ernst Zermelo (1871-1953

ډيره مهمه لاسته راوړنه در په ننبه کړو. هغه غونډ پرابلم په کافي اندازه تجرد سره څيړلئ دي.

دوه لوبغاړي په نظر کي نيسو، هغوی هر يو په خپل وار سره داني (مردکي) خوځوي[9](حرکت ورکوي) . لمړئ يي توري داني او دوهم يي سپيني داني لري. لوبه $\mathcal{L}(T,n,V)$ د خوځښتو دغير خالي (خو معين شمېر) په سيټ T سره تعينيږي. n د خوځښتو (حرکتو) شمېر دي. د $V\subseteq T^{(1,2,\ldots,2n)}$ سيټ د ګټلو د معيارو سيټ دي. د $V\neq\emptyset$ او $V\neq T^{(1,2,\ldots,2n)}$ فرضيې معقولي دي. لکه مخکي چی مو وويل لمړئ او دوهم لوبغاړئ په نوبت سره يو په بل پسی خپلي داني خوځوي، $t_1\in T$ پدی معنی دي چي لمړئ لوبغاړئ خپله دانه خوځوي او $t_2\in T$ پدی معنی دي چي دوهم لوبغاړئ خپله دانه خوځوي ،....په همدي ډول $t_{2n-1}\in T$ او $t_{2n}\in T$. د لوبې نتيجه $\{t_i\}_{i=1}^{2n}$ ده. لمړئ لوبغاړئ يې ګټي ، که د لوبې نتيجه د V په سيټ کي وي، غېر له هغه دوهم لوبغاړئ يې ګټي.

بېلګه 1.6. دوه لوبغاړي په خپل وار سره د 3,2,1 عددوڅخه يو عدد ټاکي، هغه لوبغاړئ يې ګټي چي د ټاکلو عددو جمع يې د 10 سره مساوی وي.البته کيدای سي چی داسي خرابه لوبه وکړي چي هيڅ وخت لس پوره نه کي، په هغه صورت کي هغه لوبغاړئ يي بايلي چي د عددو جمع يې تر لسو

[9] د بيلګی په توګه د سترنج يا د قطار لوبه په نظر کي ونيسي (ژباړن)

واوړي. پدي معنی چي د ګټلو معيار کولای سو چي د معادل شرط سره ارائه کو او هغه داچي «هغه لوبغاړئ يې بايلي چي د ټاکلو عددو جمع يې تر لسو واوړي.

دلته ضروردی چي يو بل تخنيکی پرابلم حل کړو، هغه عبارت دي د ټاکنو دمساوي شمېرڅخه.

څرګنده ده چي د لوبې په نتېجه کي تغير نه راځي که ووايو چي هر لوبغاړئ پنځه ځلې عدد ټاکلای سي.

پدي معنی زموږ ترسيم سوی لوبه $\mathcal{L}(T,n,V)$ ، پداسي حال کی چي $T=\{1,2,3\}$ ، $n=5$ او د V سيټ ټوله هغه لاړونه (ترادفونه) $T^{\{1,2,...,10\}} \ni \{t_i\}_{i=1}^{10}$ دي، چي دهغو دپاره کوچنئ ترين جفت k داسي وجود لري $t_1+...+t_k>10$ دي.

تمرين 1.6. الف) دوه لوبغاړې په خپل وار سره د1,2,....,k عددونه ټاکي، هغه لوبغاړئ يې بايلې چي اول د عددو حاصل جمع تر راکړه سوي عدد m لوی لاسته راوړي. V,n,T داسي پيدا کړي چي لوبه د $\mathcal{L}(T,n,V)$ سره معادله وي.

ب) دوه لوبغاړي په خپل وار سره د 0,1,...,k عددونه ټاکي، د لوبې قاعده دوه ځلي پرله پسي د 0 ټاکل منع کوي(پدي معنی چي که لمړ لوبغاړئ 0 واخلي، نو دوهم لوبغاړئ بيا د 0 د اخيستو اجازه نلری او بر عکس). که څوک د قاعدی خلاف کار وکي ، نو لوبه يي بايلوله. هغه لوبغاړئ يې بايلي چي اول د عددو حاصل جمع تر راکړه سوي عدد m لوی لاسته راوړي. V,n,T داسي پيدا کړي چي لوبه د $\mathcal{L}(T,n,V)$ سره معادله وي.

لوبه تر هغه وخته په زړه پوری ده ، چي دواړه لوبغاړي د ګټلو امکانات ولری(ځکه نو ، د بېلګې په ډول ، فرضوو چي $V\neq\emptyset$ دي). د بېلګې په ډول د 1.6 تمرين د الف برخه په هغه صورت کي چي m=5,k=5 وي، په زړه پوری نده ځکه چي لمړئ لوبغاړئ يې هر ځل ګټي. لوبغاړئ د ګټلو امکان لری ، په څه معنی دي؟ په بل ډول به يې افاده کړو: لوبغاړئ د ګټلو امکان هغه وخت لری چي د هغه مقابل طرف داسي لوبه نسی کولای چي هر وخت يې وګټي.

لوبغاړئ «تل لوبه ګټلای سي» پدی معنی دي چي هغه ته د لوبې دګټلو کړنلاره معلومه ده. دغه ډول کړنلاره د ګټلو د ستراتيژي په نامه يادوو. لمړئ به د ستراتيژی مفهوم تشريح کو. د $\mathcal{L}(T,n,V)$ لوبه په نظر کی نېسو.لمړئ لوبغاړئ پداسي حالت کي لوبه کوي، چي لوبه څو ګامه مخته تللي ده، پدی معنی چي $\emptyset,\{t_i\}_{i=1}^{2},\{t_i\}_{i=1}^{4},...,\{t_i\}_{i=1}^{2n-2}$ ټاکنې سوي دي. په دغه حالت کي لمړئ لوبغاړئ غواړی چي په هغه «قاعده » پوه سي، څو د t_k ګام واخلي. دغه ډول «قاعده» په حقيقت کي مپينګ دي. پدی معنی چی د لمړي لوبغاړي دپاره ستراتيژي د $\bigcup_{k=0}^{n-1} T^{\{1,...,2k\}}$ سيټ څخه د T په سيټ کي د f مپينګ دي(که k=0 وی، نو $T^{\{1,...,2k\}}=\{\emptyset\}$ دی).

بېلګه 2.6. د 1.6 بېلګې لوبه په نظر کي نېسو. فرضوو چي f د $\bigcup_{k=0}^{4}\{1,2,3\}^{\{1,...,2k\}}$ د سيټ څخه د {1,2,3} په سيټ کي مپينګ دي، چي په لاندی ډول تعريف سوي دي :

$f(\emptyset)=2$

$f(\{t_i\}_{i=1}^{2k})=4-t_{2k}$ دپاره k=1,2 د

د $k=3,4$ دپاره $f(\{t_i\}_{i=1}^{2k})=1$

دي. ■

لمړي لوبغاړي د $\{t_i\}_{i=1}^{2k}$ لوبې ګامونه د f د ستراتيژي پر اساس لوبولي دي ، که د هر $k=0,...,n-1$ دپاره $t_{2k+1}=f\left(\{t_i\}_{i=1}^{2k}\right)$ وي.

بېلګه 2.6. (د لوبې ادامه). لمړي لوبغاړي د f د ستراتيژي پر اساس د 2,1,1,1,1,3,1,3,1,2 ټاکني کړي دي او د همدی f ستراتيژي پر اساس د 1,1,1,1,1,2,1,3,1,2 ټاکني ندي کړي. ■

د لمړي لوبغاړي د ګټلو ستراتيژي د f هغه ستراتيژي ده چي د هغه د لوبي هر ګام د V په سيټ کي شامل دي.

بېلګه 2.6. (د لوبې پای). د f ستراتيژي د لمړي لوبغاړي دپاره د ګټلو ستراتيژي ده که په اختياري لوبه کي د دوهم لوبغاړي په دريمه ټاکنه کي دعددو د جمع حاصل تر 10 اضافه وي. ■

تمرين 2.6. ورت مفهومونه د دوهم لوبغاړي دپاره فورمولبندی کيږ.

که د لوبغاړو څخه يو يې د ګټلو ستراتيژي ولري، نو لوبه په زړه پوري نده. دغه ډول لوبه د ختميدونکي deterministic لوبې په نامه يادوو. څرګنده ده چي دواړه لوبغاړي د ګټلو ستراتيژي نسي درلودلای.

وبه ښيو چي د $\mathcal{L}(T,n,V)$ ټوله لوبې په زړه پوری ندي ، ځکه چي ختميدونکي دي.

قضيه 1.6. (څرملو (Zermelo) . د $\mathcal{L}(T,n,V)$ لوبه ختميدونکي ده، يعنی د يوه لوبغاړي دپاره د ګټلو ستراتيژي وجود لري.

ثبوت . د $\mathcal{W}$ بيان په پام کي نيسو:

$$(\forall x_1\in T)(\exists x_2\in T)(\forall x_3\in T)...$$

$$...(\forall x_{2n-1}\in T)(\exists x_{2n}\in T)\{x_i\}_{i=1}^{2n}\notin V \qquad (6.1)$$

د$\mathcal{W}$ بيان وايي : دوهم لوبغاړئ داسی لوبه لوبولای سي، چي لوبه وګټي، پدي معنی چي د لومړي لوبغاړي د هر ي ټاکني x_1 دپاره د دوهم لوبغاړي د x_2 ټاکنه داسي وجود لري چي د $\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ ټاکني ددوهم لوبغاړي په ګټه دې. د منطق څخه پوهيږو چي د دريم د طرد(رټل) د قانون له مخې:

$$\mathcal{W} \text{ او يا } \neg\mathcal{W} \qquad (6.2)$$

صدق کوي. د$\mathcal{W}$ د بيان نفی $\neg\mathcal{W}$ څه وايي؟

د کوانتورو د نفی کولو وروسته $\neg\mathcal{W}$ د لاندی بيان سره معادل دي:

$$(\exists x_1\in T)(\forall x_2\in T)(\exists x_3\in T)...$$

$$...(\exists x_{2n-1}\in T)(\forall x_{2n}\in T)\{x_i\}_{i=1}^{2n}\in V \qquad (6.3)$$

پدي معنی چي لمړئ لوبغاړئ داسي لوبه کولاي سي،.چي تل ګټونکئ وي.

وبه يې ښيو، چې (6.1) او (6.3) تر هغه څه چې موږ يې ځني غواړو ، اضافه تضمينولای سي. د ښلګې په ډول وبه يې ښيو، چې (6.3) د لمړي لوبغاړي دپاره دګټلود ستراتېژي موجوديت تضمينوي. د مسئلي د ساده کولو په خاطر فرضوو چې T د طبيعی عددو اختياري سيټ (که داسي نه وي ، نو ثبوت به د شکل له مخې ډير پېچلئ وي). د لمړي لوبغاړي د ګټلو ستراتېژي f د (6.3) تر فرضيې لاندي د رياضي د استقراء په ذريعه د $k=0,1,...,n-1$ دپاره تعريفوو. د (6.3) له مخې $x_1 \in T$ داسي وجود لري، چې :

$$(\forall x_2 \in T)(\exists x_3 \in T)...(\exists x_{2n-1} \in T)(\forall x_{2n} \in T)\ \{x_i\}_{i=1}^{2n} \in V \qquad (6.4)$$

صدق کوي.په $f(\emptyset)$ باندی دغه ډول کوچنئ ترين x_1 په نښه کوو. فرضوو چې f مو د جفت لاړ دپاره، چې تر 2k کوچنئ وي، تعريف کړي دي. فرضوو $\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ د T د سيټ د عنصرو لاړ دي. اوس نو بايد دوه امکانه يودبله څخه تفکيک کړو.که د $\{x_i\}_{i=1}^{2k-1}$ ټاکنې د f د ستراتېژي له مخې نه وی لوبول سوي، پدی معنی چې د هر $j<k$:

$$x_{2j+1} = f(\{x_i\}_{i=1}^{2j}) \qquad (6.5)$$

حقيقت ونلري، نو کيدای سی،چې $f(\{x_i\}_{i=1}^{2k})$ هر شئ وي، ځکه چې لمړئ لوبغاړي دشروع څخه ځانته د غلطي ټاکني اجازه نه ورکوي. پدي معنی چې په دغه حالت کي ګردسره د ستراتېژي څخه کار ندي اخيستي. اوس به نو فرض کړو، چی د هر $j<k$ د پاره د (6.5) اړيکه صدق کوي. بيا نو د استقراء د فرضيې پر اساس :

$$(\forall x_{2k})(\exists x_{2k+1})...(\exists x_{2n-1})(\forall x_{2n})\{x_i\}_{i=1}^{2n} \in V \qquad (6.6)$$

په خاص ډول «زموږ» x_{2k} دپاره داسي x_{2k+1} وجود لري، چې :

$$(\forall x_{2k+2})...(\exists x_{2n-1})(\forall x_{2n})\{x_i\}_{i=1}^{2n} \in V \qquad (6.7)$$

په $f(\{x_i\}_{i=1}^{2k})$ به کوچنئ ترين دغه ډول x_{2k+1} نښاني کړو.

لوستونکئ په اساني سره خپل ځان باوري کولای سي، چې دغه ډول ستراتېژي د لمړي لوبغاړي دپاره د ګټلو ستراتېژي ده.

په ورته شان د (6.1) د حقيقت څخه ددوهم لوبغاړي دپاره د ګټلو ستراتېژي تعريف کړو. خو د (6.2) پر بنسټ يا (6.3) او يا (6.1) صدق کوي. پدي معنی چې يا لمړئ لوبغاړئ او يا دوهم لوبغاړئ د ګټلو ستراتېژي لري. ځکه نو ددي ځايه استنباط کيږي چې د $\mathcal{L}(T,n,V)$ لوبه ختميدونکي ده.

q..e.d.

تمرين 3.6. وښياست چې د 1.6 ښلګې په لوبه کي د (6.3) حالت پيښيږي او د f ستراتېژي چې په 2.6 ښلګه کي د 1.6 قضيې په ثبوت کي ترسيم سوی ستراتيژي ده.

تمرين 4.6. د 1.6 الف) لوبې ته پاملرنه وکي. د 1.6 قضيې پر بنسټ لوبه ختمېدونکي ده. د کومو m,k دپاره لمړئ لوبغاړئ او څه وخت دوهم لوبغاړئ د ګټلو ستراتېژي لري. د هغوی دهر يوه د ګټلو ستراتېژي پيداکړې.

د 1.6 د قضيې ثبوت نمونه يې (typical) د موجوديت ثبوت دي. هغه لوستونکئ چې دغه ثبوت يې درک کړي دي، په يقين سره د قضيې په حقيقت باندي متيقين دي، خو په هيڅ صورت يې موږته ونه ښودله، چې کوم لوبغاړې وګټله او د ګټلو ستراتيژي يې څه ډول لټولای سو.پدی معنی هغه لوبې چې، که څه هم د هغو د ګټلو ستراتيژي موږته نده معلومه خو بيا هم موږته په زړه پوری دي، ځکه چې ختمېدونکي دي. اوس به وښيو چې ددغه ډول لوبې ښه بېلګه د شطرنج لوبه ده.

بېلګه 3.6. پدی بېلګه کي به وښيو چي څه ډول د شطرنج لوبه د مناسبو V,n,T په ټاکلو سره د $\mathcal{L}$(T,n,V) لوبې په صفت تعبيرولای سو. جزئيات يې د شطرنج و لوبغاړوته ورپرېږدم. زه دلته فرضوم چې لوستونکئ د شطرنج د لوبې د بنسټيزواصولو سره بلد دي.

لمړئ به د T سيټ ترسيم کړو. د شطرنج د داني خوځښت د Axiyj پنځه ګوني دي. پداسي حال کي چي A د شطرنج د مهرې نوم دی(د بېلګي په ډول پياده، فيل،وزير، ...او داسی نور) x,y=a,b,...,h ؛ i,j=1,2,...,8 . پدی معنی چي T د شطرنج د مهرو د ټولو ممکنو خوځښتو سيټ دي. که ښه ځير سو، نو د A توري اضافي دي.ځکه چي په هر حالت کي څرګنده ده چي کمه مهره د شطرنج د xi په خانه کي قرارلري.په هر صورت د خوځښتو شمېر تر 6.8^4 لږ دي.

د شطرنج د لوبې د اصولو پر بنسټ د شطرنج لوبه بايد وروسته له 1000 خوځښتونو څخه پای ته ورسيږي. که چاته دغه حدس وړوکي برېښي، نو وروسته له 10^6 خوځښتونو څخه هرومرو لوبه خلاصيږي. پدی حساب نظر د لوستونکي و خوشبينی ته $n=10^3$ يا $n=10^6$ دي.

د V سيټ څه شی دی؟ د $\mathcal{L}$(T,n,V) د لوبی د قانون له مخې لازمه ده چي د هری لوبې اوږدوالی n وي. په هغه صورت کي څه بايد وکړو چي دوهم لوبغاړئ په 10- ام خوځښت کي مات سي؟ ظاهراً لوبه تر n خوځښته اوږدوو، د بېلګي په توګه د 11 خوځښت څخه دواړه لوبغاړې يوازی Ja1a1 خوځوي. د V و سيټ ته ټوله هغه لوبې وراضافه کوو لمړې لوبغاړې د لوبې مقررات تر دوهم لوبغاړی دمخه نه نقض کړي او يا دوهم لوبغاړی لوبه بايللی وي. دلته هغه لوبه چې مساوی پای ته رسېدلي وي د دوهم لوبغاړی په ګټه تمامه بولو.

پدی حساب د شطرنج لوبه ختمېدونکی لوبه ده ، خو نه پوهيږو چي کوم يو د لوبغاړو څخه د ګټلو ستراتيژي لري. که په پوه هم سو ، نو هغه ستراتيژي به ډيره پيچلي وي. ■

هغه لوبې چي تر اوسه مو په پام کي نيولې وي، يو د ډيرودغه ډول لوبو څخه وی. داسي لوبې هم سته چي د لوبغاړو وظيفي متناظری ندی.کله کله داسی هم پيښيږي چي اصلاً يوازی يو لوبغاړئ لوبه کوي. ددغه ډول لوبې ښه بيلګه د مايند (Mind) لوبه ده ، په هغه کي لمړئ لوبغاړئ د 6 څخه 4 رنګه شکلونه پټوی او دوهم لوبغاړئ د هغه رنګو اټکل کوي. لمړئ لوبغاړئ د دوهم لوبغاړې سوالوته جواب ورکوي . لمړئ لوبغاړی دلته غير فعاله دی. لمړئ لوبغاړی يوازی په شروع کي فعاله دي ، يعنی هغه وخت چي شکلونه پټوي ، وروسته له هغه ټوله خوځښتونه ددوهم لوبغاړې د خوا عملې کيږي. په لاندی بېلګه کي ددغه ډول لوبو څخه يوه بله لوبه تشريح کوو.

بېلګه 4.6. لوبه داسي لوبول کيږي. يو ثا بته طبيعی عدد ، د بېلګي په ډول 1000 ، راکړه سوی دي. لمړي لوبغاړئ يو عدد تر 1000 کوچنئ ټاکي.ددوهم لوبغاړئ و څو لږو سوالوته په «هو او نه» جواب ورکوي، څو د لمړي لوبغاړي د ټاکل سوي عدد اټکل وکي.دلته لمړئ لوبغاړئ يوازی په شروع کي فعاله دي. وروسته له هغه يوازی دوهم لوبغاړئ فعاله دي.

دوهم لوبغاړئ باید څه ډول پوښتني وکی؟ دلته زموږ سره دسیټ مفهوم مرسته کوي.د پوښتني جواب باید «هو یا نه» وي. بېله دي چي د جملی ګرامری شکل په نظر کي ونیسو، دوهم لوبغاړئ د A د سیټ څخه چي د {0,1,...,999} سب سیټ دي ټاکي او د لمړي لوبغاړي و جواب ته منتظر دي. آیا هغه عدد د A په سیټ کي دي او که نه؟ اوس به د ددوهم لوبغاړي ستراتیژي تشریح کړو چي د لسوپوښتنو په ترځ کي دلمړي لوبغاړي له خواد ټاکل سوي عدد اټکل وکي . سوالونه به تقریباً داسي بڼه ولري:

1. پوښتنه: آیا ټاکل سوي عدد د لمړيو 500 عددو په منځ کي (یعنی 0,1,....,499) دي؟

2. پوښتنه: آیا ټاکل سوي عدد ، د تېرسوال په جواب کي د عددو د ټاکل سوي ګروپ، د لمړيو 250 عددو په منځ کي دي؟

⋮

9. پوښتنه: آیا ټاکل سوي عدد ، د تېرسوال په جواب کي د عددو د ټاکل سوي ګروپ،د لمړيو دوو عددو په منځ کي دي؟

10. پوښتنه: آیا ټاکل سوي عدد ، د تېرسوال په جواب کي د عددو د ټاکل سوي ګروپ په عددو کي اولیه عدد دي؟

تېره لوبي ته کولای سو داسي تغیر ورکړو، چي لمړي لوبغاړي ته د «غولولو» اجازه ورکړو. پدی معنی چي لمړئ یو عدد وټاکي، خود لوبي په جریان کي بیا هغه ته داسي تغیر ورکړی چي د مخکني پوښتني جواب یې حقیقت ولري.

■

تمرین 5.6. $\mathcal{L}(n,k)$ داسی یو لوبه په نښه کوی،چي په هغه کي لمړئ لوبغاړئ تر n کوچنئ یو طبیعی عدد ټاکي او دوهم لوبغاړئ نوموړی عدد د k پوښتنو په ترځ کي، چي جواب یې په «هو ، نه» دي، اټکلوي. لمړئ لوبغاړئ، لکه مخ کي چي مو تشریح کړه ، د «غولولو» اجازه لري. لمړئ لوبغاړئ لوبه ګټي که دوهم لوبغاړظ د هغه د عدد اټکل و نه کي.

الف)وښیاست چي د $\mathcal{L}(n,k)$ لوبه ختمیدونکی ده.

ب) د کومو n او k دپاره لمړئ لوبغاړي د ګټلو ستراتیژي لری؟ هغه ستراتیژي ترسیم کي.په هغه صورت کي چي ددوهم لوبغاړي دپاره د ګټلو ستراتیژي وجود ولری، ترسیم یې کړي.

نور تمرینونه

6.6. الف)هڅه وکی چي د قطار؟ (Mills,Merels) ژرندي لوبه د $\mathcal{L}(T,n,V)$ د لوبي په شان ترسیم کې.

ب) هڅه وکی چي د چکرلوبه (draughts) د $\mathcal{L}(T,n,V)$ د لوبي په شان ترسیم کې.

7.6. په 1.6 ب)تمرین کي د کومو m,k دپاره لمړئ لوبغاړئ د ګټلو ستراتیژي لري.

8.6. په 2.2 بېلګه کی د «مردکود تللو» پروسه د لوبي په څېر ترسیم کي.پداسي حال کي،چي:

الف)د یوه لوبغاړي لوبه وي.

ب)د دوو لوبغاړو لوبه وي،په داسي حال کي چي لمړئ لوبغاړئ د «غولولو» اجازه پدی شرط لري، چي د مخکني جواب حقیقت نقض نه کړي.

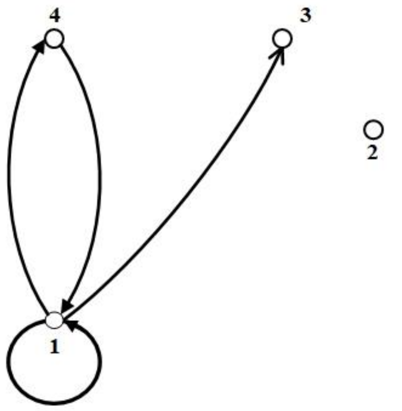
ج) د دغه ډول لوبو د ګټلو د ستراتېژۍ د موجودیت په هکله څه ویلای سي؟

9.6. د $\mathcal{L}(T,N,V)$ «لوبه» تعریف کي. پاملرنه وکئ چي دلته «لایتناهي» لاړ $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ ټاکل کېږي.آیا ددغه ډول لوبې دپاره د څرملو قضیه صدق کوي؟

7.2. د غبرګوني اړېکو په هکله

غبرګوني اړېکي پرراکړه سوي سیټ یو د ساده ترینو ریاضیکي ساختمانو څخه تعینوي. زموږ پاملرنه دلته دوه ډوله ساختمانو ته وقف کوو:غوټه لرونکئ ګراف او نیمګړي ترتیب سوی سیټو ته.دغه رساله یوازي ترسیمي کرکټر لري. ددغو مفهومو او نتیجو څخه بیا وروسته کار اخلو.

که X سیټ او R⊆X×X غبرګوني اړېکه وي، نو د R,X جوړه د مسیر لرونکي غوټه لرونکئ(غوټه ور؟) ګراف په نامه یادېږي.د X د سیټ عنصرونه د ګراف د غوټو په نامه او د [x,y]∈R جوړه د ګراف د ضلعي(ژۍ) په نامه یادوو. په ډېروحالتو کي کیدای سي چي غوټه لرونکئ ګراف په ډېر ساده بڼه ترسیم سي. د ګراف غوټې د کوچنیو دایرو په څېر اود [x,y] ژۍ یې دغشی په څېر چي د x د غوټې څخه راوزی او د y په غوټه ننوزې، ترسیموو.

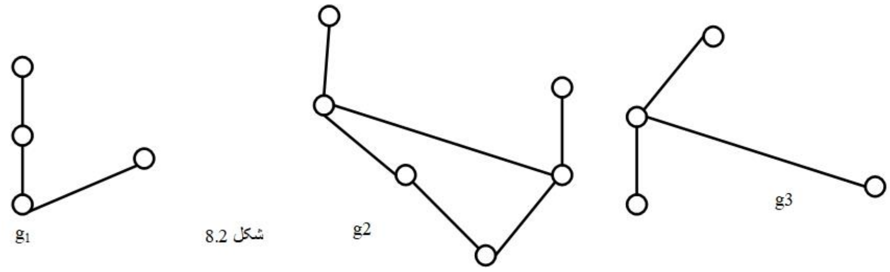


شکل 7.2

په 7.2 شکل کي غوټه لرونکئ ګراف د {[4,1],[1,4],[1,3],[1,1]},{1,2,3,4}ترسیم سوي دي. د ګراف ژۍ چي د [x,x] بڼه ولري، د کړی loop په نامه یادېږي. د مسیر لرونکي ګرافو د تیوري د جوړښت څخه دلته تېرېږو. لوستونکئ پدي هکله ،د بېلګي په توګه ، په [4] کتاب کي د موضوع ښکلي تشریح موندلای سي.

که د R اړېکه متناظره وي، نو د R,X جوړه د غوټه لرونکي ګراف په نامه یادوو. او که غواړو چي پر تناظریې ټینګار وکړو ، نو هغه په بی مسیره غوټه لرونکي ګراف په نامه یادوو. د سیټ عنصرونه بیاهم دغوټو په نامه یادوو. ژۍ یې د غوټو «نا مرتبه جوړه» ده، پدی معنی د {x,y}د سیټ دوه عنصره یا یو عنصره سیټ دي. که وغواړو چي د {x,y} ژۍ د ګراف په څېر رسم کړو ، نو د y,x غوټې د یوی منحنی په ذریعه سره وصلوو.

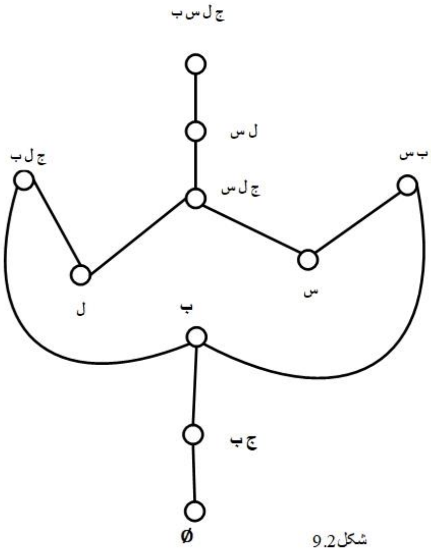
که R,X گراف او $Q \subseteq R \cap (Y \times Y),\ Y \subseteq X$ وي، نو Q,Y گراف د R,X دگراف د سب گراف په نامه یادېږي.که $Q = R \cap (Y \times Y)$ وي، نو وایو چي Q,Y د R,X د گراف کامل سب گراف دي. د بېلگي په ډول په 8.2 شکل کي د g_1 گراف د g_2 د گراف سب گراف دي ، خو کامل سب گراف ندي. د g_3 گراف د g_2 د گراف کامل سب گراف دي.



د المان د فرانکن پاچا لوی کارل خپل دربارته دانگلستان د یورک ښخه د کلیسا راهب الکوین (Alkuin 735-804) مېلمه کي، څو و هغه ته او د هغه شهزاده گانو و اشراف زاده گانو ته لیک، لوست او حساب ورزده کړي. الکوین د سوالو یوه مجموعه ولیکله او نوم یي د«د ځوانانو د فکر د تېزیدو دپاره سوالونه» کښېښود.په هغه کی علاوه پر نورو سوالو د بزي،لېوه او سابه مشهوره سوال هم راغلئ دي.

بېلگه 1.7. جاله وان یوه کوچني کښتی لري، چي په هغه کي یوازی جاله وان او یو شئ ځائیږي.پدی معنی چي هغه یو ځل یوازی بزه یا لېوه او یا سابه د ځانه سره د رود د یوي غاړي ښخه و بلي غاړي ته اړولای سي. ستونځه پدی کي ده، چي د رود پر یوه غاړه لېوه او بزه اویا بزه او سابه نسي پرېښودلای.ځکه چي لېوه بزه خوري او بزه سابه خوری.هغه باید درې سره سلامت د رود دیوې غاړي ښخه بلې غاړې ته پوري باسي. جاله وان باید څه ډول مخ ته ولاړسي؟

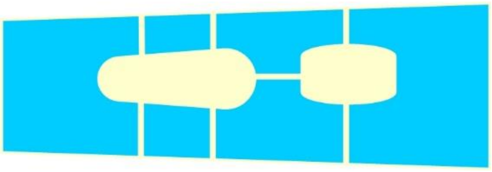
دغه سوال د گراف دمفهوم ښخه په گټه اخېستلو حلېدای سي.جاله وان به په **ج** ، لېوه به په **ل** ، بزه به په **ب** اوسابه به په **س** سره وښیو . د گراف هغه غوټې چي درود پر لمړې ښنده «مجاز» او مصئون دي، عبارت دي له: **ج ل س ب** ، **ج ل ب** ، **ج ل س** ، **ج ب س** ،**ج ب** ، **ل س** ، **ل** ، **ب** ، **س** ، **Ø** . د **ج ل** جوړه مجاز نده ، ځکه چي بزه او سابه یوازې پاتېږي او بزه بیا سابه خوری. دوې غوټې په هغه صورت کي سره نښلوو، چي د رود د یوې غاړې ښخه بلې غاړې ته او برعکس په جاله کي د اوښتولو امکان وي. دبېلگي په توگه **ج ل س** د **ل س** سره وصل سوی دي، ځکه چي جاله وان د رود دلمړې غاړې ښخه په کښتی کي حرکت کوي(هلته **ج ل س** پاته کېږي) درود پر هغه بله غاړه (**ل س** پاته دي) . پدي ډول په 9.2 شکل کي ترسیم سوی گراف لاسته راځي. د سوال حل هغه لار ده چي په **ج ل س ب** پیل کېږي او په **Ø** پای ته رسېږي. د شکل ښخه څرگنده ده چي سوال دوه حله لري. پدی معنی چي د دوو لارو ښخه حل کېږي.د بېلگي په ډول **ج ل س ب** ، **ل س** ، **ج ل س** ، **ل** ، **ج ل ب** ، **ب** ، **ج ب** ، **Ø** یو د حل د لاروښخه راښیي: جاله وان لمړئ بزه درود بلې غاړې ته اړوی، جاله وان بېرته یوازې راستنېږي،داځل سابه د ځانه سره د رود بلې غاړې ته اړوی او د هغی خوا بزه بېرته ورسره رااړوي، بزه بیرته درود پر لمړې غاړه پرېږدي او لیوه رااړوی، روسته بیا بېرته په بزی پسي راځی او هغه را اړوی. ■

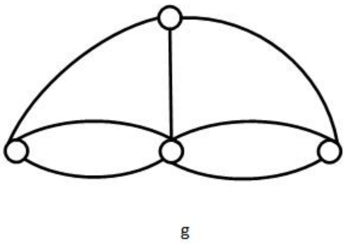


شکل9.2

د غوټه لرونکو ګرافو د حل په ځېنو نوروحالتو کي د مسئلی منفی حل ته رسېدل هم زموږ سره مرسته کوي. په يقين سره د کرالوويخ د ښار د اوو پلونو مسئله پېژني، چي ليونهارد اويلر (Leonhard Euler 1707-1783) په 1736 کال کي حل کي.

بېلګه 2.7. د کرالوويخ په ښار کي رود بهېږي. په هغه کي دوي جزيري دی، چي په خپل منځ کي او د ښار سره د اوو پلو پذريعه ، لکه په 10.2 شکل کي چي ليدل کېږي، تړل سوي دي.آيا امکان لری، چی د کرالوويخ په ښار کي داسی قدم ووهئ، چي د هره ځايه يي را شروع کې پر اوو پلونو تېر سي او بېرته د پيل نقطي ته راورسېږئ؟ مسئله په 10.2 شکل کي د g دګراف د «رسمېدو» سره معادله ده ، پداسي ډول چي د قلم په يوه حرکت باندی ټول ګراف رسم سي. په اساني سره ليدل کېږي، چي امکان نلري، ځکه چي هرې غوټي ته چی «ورننوزو» بايد بېرته «راووزو». پدي معنی چي د هرې غوټي څخه چي ژۍ راوزی ، بايد شمېر يې جفت وي. ■





شکل 10.2

غبرګوني اړېکوته له بله پلوه هم نظر اچولای سو، هغه عبارت د هغوی له «ترتيب» څخه دي.
فرضوو چي $R \subseteq X \times X$ دي. د R اړېکه د نيمګړې ترتيب partially order په نامه يادېږي ، که R انعکاسي ، ضد متناظر او انتقالي وي.که د R اړېکه نيمګړئ ترتيب وي، نو د R,X جوړه د نيمګړې ترتيب سوی سيټ په نامه يادېږي.

بېلګه 3.7. الف) فرضوو چي $R_1=\{[x,y]\in R^2;\ \ x\leq y\}$ دي. R_1 نيمګړئ ترتيب دي. هغه د لوی والي پر اساس د ترتيب په نامه يادوو.

ب) که R,X نيمګړئ ترتيب سوی سيټ ، $Y \subseteq X$ وي، نو $R\cap(Y\times Y)$ نيمګړئ ترتيب سوی سيټ دي. دسهولت په خاطروايو چي، R,Y نيمګړئ ترتيب سوی سيټ دي.

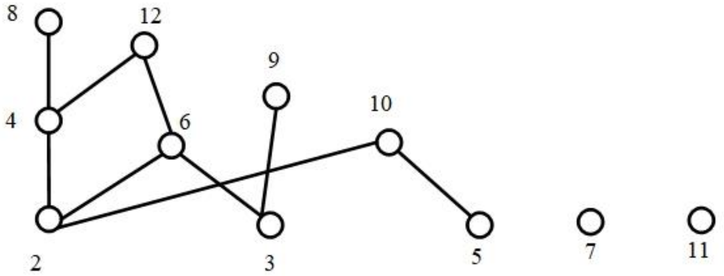
ج) فرضوو چي $R_2=\{[x,y]\in N^2;$ وېشي $y,x\}$. R_2 نیمګړئ ترتیب دي.

د) فرضو چی X د مځکي د ټولو اوسېدونکو سیټ دي. $R_3=\{[x,y]\in X^2;$ x د y بچئ دي
دي. که هر اوسېدونکئ ته د خپل نوع د بچي په صفت وګورو، نو R_3 نیمګړئ ترتیب دي. ■

که R,X نیمګړئ ترتیب سوی سیټ وي.نو د $[x,y]\in R$ واقعیت د xRy پذریعه هم ارائه کوو. د X پر سیټ باندی نیمګړئ ترتیب اکثرآ د $\leq$,$\preccurlyeq$, $\leq_1$,$\leq_2$ او ورته نښنو باندی په نښه کوو. د "x<y" لیکنه پدی معنی ده چي "$x\leq y\wedge x\neq y$" دي. که سؤ تفاهم منځ ته نه راځي ، نو $x\leq y$, xRy «x تر y کوچنئ یا مساوي دي»لولو او x<y «x تر y کوچنئ دي» وایو.

که X,$\leqq$ نیمګړئ ترتیب سوی سیټ وي،پدي شرط چي «ډېره لوی نه وي» ، نو د هغه د ګرافي څرګندولو دپاره د هاسه Hasse د ډیاګرام څخه کار اخلو. د X عنصرونه د کوچنیوحلقو په څېرپه نښه کوو. که د x عنصربلافاصله تر y لوی وي، نو د x حلقه د y د حلقي سره د یوی کرښي په واسطه وصلوو. پدي حالت کي مهمه ده چي کرښه د y څخه د x و لور ته «لوړه داخله سي». که x<y<z وي، نو د x څخه و z ته کرښه نه رسمو، ځکه چي هغه کرښه د x څخه و y ته او د y څخه و z ته د کرښو ترکیب دي.

بېلګه 4.7. الف) د {12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2} سیټ د وېش د وړتوب د اړېکي سره نیمګړئ ترتیب سوی سیټ دي، چي په 2.11 شکل کي ترسیم سوی دي.

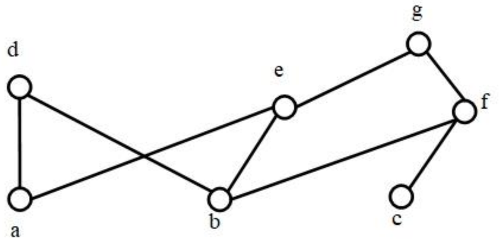


شکل 11.2

ب)په 2.12 شکل کي د د راکړه سوی نیمګړي ترتیب سوي سیټ د هاسه ډیاګرام دي.

{a,b,c,d,e,f,g}, {[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[e,e],[f,f],[g,g],[a,d],[a,e],[a,g],[b,d],
[b,e],[b,f],[b,g],[c,f],[c,g],[e,g],[f,g]}.

کمه ارائه یي واضح ده؟ ■



شکل 12.2

قضیه 1.7. که R,X نیمگړئ ترتیب سوي سیټ وي، نو R^{-1},X هم نیګړئ ترتیب سوي سیټ دي.

ثبوت یې ډیر ساده دي او لوستونکئ ته یې پرېږدم.

تمرین 1.7. د R,X نیمگړئ ترتیب سوي سیټ د هاسه ډیاګرام څخه څه ډول د R^{-1},X ډیاګرام لاسته راوړلای سي؟

د R,X نیمگړئ ترتیب سوي سیټ د هر مفهوم او قضیه په اړوند همدا ډول مفهوم او قضیه د R^{-1},X په هکله وجود لري، چي هغه بیا بېرته د R,X په هکله مفهوم او قضیي دي.دغه ډول مفهومو او قضیو ته غبرګ (dual)مفهومونه او غبرګې قضیې وایو. پر بېلګو به یې تشریح کو.

فرضوو چي R,X نیمگړئ ترتیب سوي سیټ دي. فرضوو چي A⊆X دي. د a∈A عنصر د A د سیټ د لوی ترین عنصر په نامه یادېږي ، که د هر x∈A دپاره xRa وي. د لوی ترین عنصر د مفهوم غبرګ مفهوم د A د سیټ کوچنئ ترین عنصردي.که a د نظر د R^{-1} اړیکې ته د A د سیټ لوی ترین عنصر وي ، نو د هر x∈A دپاره x R^{-1}a پدی معنی چی aRx او داهم نظر د R اړیکې ته د A کوچنئ ترین عنصر دي. په ورته ډول a∈A د A د سیټ لوی (Maximum) عنصر دي، که داسي x≠a,x∈A و جود و نلری چي aRx وي.ددغه مفهوم غبرګ مفهوم د A دسیټ کوچنئ (Minimum) عنصر دي.پدي معنی چي x≠a,x∈A و جود و نلری چي xRa وي.

تمرین 2.7. الف)د 12.2 شکل نیمگړئ ترتیب سوي سیټ په نظر کی نیسو.فرضوو چي A={a,b,c,e,f,g} او B={a,d,e,g} دي. د A او B د سیټو لوی ، کوچنئ ، لویترین او کوچنئ تری عنصر تعین کئ.

ب) فرضوو چي A=N−{1} په 7.3 ج) بېلګه کي د R_2په اړیکه کي د A د سیټ کوچنې عنصرونه کم دي؟

د غبرګ مفهوم غبرګ په خپله هغه مفهوم دي. په ورته ډول د د غبرګې قضیې غبرګ بېرته هغه اولنې قضیه ده.

وایو چي د x,y∈X دوه عنصرونه یو دبله سره د پرتلې وړ (comparable) دي، که xRy او یا yRx وي. د پرتلې د وړتوب غبرګ مفهوم بېرته د پرتلې د وړتوب مفهوم دي. دغه ډول مفهوموته ځان غبرګې(self-dual) مفهوم وایو.

دA د سیټ لوی اولویترین عنصر ترمنځ وبنسټېز تفاوت ته پاملرنه وکئ، دA د سیټ لویترین عنصر د A د سیټ د هر عنصر سره د پرتلې وړ دي، خو لوی عنصر حتمی ندي. ځرګنده ده چی لویترین عنصر په خپل ذات کي لوی عنصر دي ، خو برعکس یې حتمی نده چي صدق وکي. هودا ډول د کوچنې او کوچنې ترین عنصر په هکله استدلال کولای سو. د A⊆X سیټ د ځنځیر (chain) په نامه یادېږي، که د هغه هر دوعنصره د پرتلې وړ وي. پدی معنی که د R اړیکه د A پر سیټ د دیکوتومي[10] (Dichotomy) (دوه ټوټیز) خاصیت لري. که د X سیټ ځنځیر وي، نو وایو چي R,X د خطې ترتیب سیټ دي.

[10] دیکوتومي:هغه ساختمان ته وایي چي ددو برخو څخه تشکیل سوی وی ، خو دواړي برخي مشترکه برخه ونلري، خو هغوی یو اوبل تکمیلوي. لکه په طبیعي عددو کي جفت او طاق عددونه (دوه ټوټیز) .(ژباړن)

تمرین 3.7. فرضوو چی $X, \leqq$ نیمګړئ ترتیب سوی سیټ او $A\subseteq X$ دي. لاندني ادعاوي ثبوت کئ.

الف) که د A د سیټ لوی عنصر a د A د سیټ د هر عنصر سره د پرتلي وړ وي، نو a د A د سیټ لوی ترین عنصر دي.

ب) که A ځنځیر وي، نو لوی عنصر یې په عین حال کي لویترین عنصر دي.

که کومه قضیه راکړه سوي وي، نو دهغې قضیي غبرګه قضیه داسي لاسته راوړو چي هر مفهوم یي د هغه د غبرګ مفهوم سره الېشوو. د غبرګي قضیي ثبوت داسي لاسته راوړو چي په اصلي قضیه کي مفهومونه د هغه د غبرګ مفهومو سره او "xRy" د "yRx" سره الېشوو.

تمرین4.7. الف) د 3.7 تمرین د ادعاوُ غبرګي ادعاوې فورمولبندي کئ.

ب) دیورتني کرنلارې له مخې د غبرګو ادعاوُ ثبوت د اصلي ادعا له مخې فورمولبندي کئ.

دلته به اوس یو بل مهم مفهوم راوړو. فرضوو چي $X,\leq$ نیمګړی ترتیب سوی سیټ او $A\subseteq X$ دي. د $a\in X$ عنصر د A د سیټ د لوړ سرحد په نامه یادېږي، که د هر $x\in A$ د پاره $x\leq a$ وي. د A د سیټ کوچنئ ترین لوړ سرحد د A د سیټ د سپریمم (Supremum) په نامه یادوو او په $a=\sup A$ یې نښه کوو.که a د A د سیټ لوړ سرحد وي ، نو دA د سیټ هر لوړ سرحد x دپاره $x\leq a$ صدق کوي. ددغو مفهومو غبرګ مفهومونه کښتنئ سرحد ، د کښتني خوا محدود او انفیمم (Infimum) دي.

بېلګه 5.7. الف)د 12.2 شکل نیمګړئ ترتیب سوي سیټ په نظر کی نېسو.د {d,e} سیټ د لوړې خوا محدود ندئ. د کښتني خوا محدود دی.ځکه چي د b,a عنصرونه یي لاندنئ سرحد دي، خو انفیمم نلري. په ورته شان د {a,b} سیټ د لوړې خوا وحدود دي، خو سپریمم نلري.ځکه چي د لوړخوا د سرحدونو سیټ {d,e,g} کوچنئ ترین عنصر نلري.

ب)د 3.7 ج) بېلګي نیمګړئ ترتیب سوی سیټ N, R_2 په نظر کي نېسو.طبعاً د xR_2y پر ځای $x|y$ (x ، y وېشي) لیکو. که $n,m\in N$ وي، د {n,m}سیټ سپریمم لري ، هغه عبارت دی د دواړو عددو د کوچنیترین مشترک مضرب څخه، انفیمم هم لري. هغه عبارت دي د {m,n} عددو د لوی ترین مشترک وېشونکي څخه.

ج)خالي سیټ په هر غیر خالي نیمګړې ترتیب سوی سیټ $X, \leqq$ کي د لوړې خوا محدود دي، ځکه چي هر $x\in X$ د $\emptyset$ سیټ لوړنئ سرحد دي. پدي حساب د $\emptyset$ سیټ سپریمم ، که وجود ولري، د X د سیټ کوچنئ ترېن عنصر دي. ■

قضیه 2.7. فرضوو چی $X, \leqq$ نیمګړئ ترتیب سوی سیټ دي. د X د سیټ هر غیر خالي د لوړې خوا محدوده سب سیټ یوازې او یوازې هغه وخت سپریمم لري، چي د Xهره د لاندې خوا محدوده سب سیټ انفیمم ولري.

ثبوت . قضیه غبرګه قضیه ده د کېنې خوا څخه و ښئ خواته استنباط (امپلیکېشن) د ښئ خواڅخه و کینې خواته داستنباط (امپلیکېشن) غبرګه دعوی ده. پدی معنی چي د یوي خوا ثبوت کافي دي.

فرضوو چي د X د سیټ هره د لوړې خوا محدود سب سیټ سپریمم لري او $A\subseteq X$ غېر خالي د لاندې خوا محدوده سب سیټ دي. په B سره د A د سیټ ټوله لاندې سرحدونه په نښه کوو. څرنګه

چي د A سيټ د لاندې خوا محدود دی، نو د B سيټ خالي ندی.څرنګه چي د A د سيټ اختياري عنصر د B د سيټ لوړنۍ سرحد دی او $A\neq\emptyset$ دی، نو د B سيټ د لوړې خوا محدود دی. د فرضيې له مخې $a=\sup B$ وجود لري. اوس به نو وښيو چي $a=\inf A$ دی.

که $x\in A$ وي . نو x د B د سيټ لوړسرحد دي.فلهذا $a=\sup B\leqq x$ دی.پدی معنی چي a د A د سيټ لاندې سرحد دی. فرضوو چي b د A د سيټ د لاندې سرحدوڅخه وي. بيانو $b\in B$ او حتمی $b\leqq a=\sup B$ دی. q.e.d

پاملرنه وکړئ چي ځنې مفهومونه په 2.1 برخه کي د حقيقی عددو په اړوند ذکر سوه. د 1.3 تمرين ادعا د ددکيند او پورتني قضيې د ثبوت څخه استنباط کېږي.

وايو چي د خطي ترتيب سيټ $X,\leqq$ ګڼ (dense) ترتيب سوی سيټ دی که لږتر لږه دوه عنصره ولري او د هر $x,y\in X$ دپاره داسي $x<y$ وجود لري چي $x<z<y$ وي. څرګنده ده چي $N,\leqq$ ګڼ ترتيب سوی ندی. خو $Q,\leqq$ او $R,\leqq$ ګڼ ترتيب سوي سيټونه دي.

که $X,\leqq$ نيمګړئ ترتيب سوی سيټ وي، $x,y\in X$ ، نو y بلافاصله د x په تعقيب دي(y د x تالي يا خلف دی)، که $x<y$ وي او داسي z وجود ونلري ، چي $x<z<y$ وي. د $N,\leqq$ په سيټ کي هرعنصر بلافاصله تعقيبونکئ لري او د $Z,\leqq$ په سيټ کي هر عنصر بلافاصله تعقيبونکئ لري او هر عنصر بلافاصله بل عنصر تعقيبوي. خطي ترتيب سوی سيټ (چي لږ تر لږه دوه عنصره ولري) يوازې او يوازې هغه وخت ګڼ ترتيب سوېده چي دهغه سيټ هيڅ عنصر بلافاصله د بل عنصر تعقيبونکئ نه وي.

وايو چي د $X,\leqq$ نيمګړئ ترتيب سوی سيټ ، ښه ترتيب well Ordered سوی دي، که د هغه هرغير خالي سب سيټ کوچنۍ ترين عنصر ولري. ښه ترتيب سوی سيټ خطي ترتيب سوی دی، که $x,y\in X$ وي، نو $\{x,y\}$ کوچنۍ ترين عنصر لري. پدی معنی چي د پرتلې وړدي. د 1.2 قضيې له مخې د $N,\leqq$ سيټ ښه ترتيب سوی سيټ دي.

فرضوو چي $X,\leqq$ نيمګړئ ترتيب سوي سيټ دي، د $A\subseteq X$ سب سيټ د ټوټې (Section) په نامه يادوو که :

$$x\in A,\ y\leqq x \quad \rightarrow y\in A \qquad (7.1)$$

څرګنده ده چي X ټوټه ده. که $A\neq X$ وي ، بيانو د A ټوټه د مناسبې (proper) ټوټې په نامه يادېږي.

که $a\in X$ وي، نو په $X(a)$ د :

$$X(a)=\{x\in X;\ x<a\} \qquad (7.2)$$

سيټ په نښه کوو. په اساني سره ليدل کېږي چي $X(a)$ ټوټه ده. وايو چي دغه ټوټه د a د عنصر په واسطه تعين سوی ده. که غواړو چي د (7.2) په نښه کي پر ترتيب هم ټينګار وکو، نو $X(a)$ د $X_{\leqq}(a)$ په څېر په نښه کوو.

تمرين 5.7. الف) وښياست چی په ښه ترتيب سوی سيټ کي هره مناسبه ټوټه د يوه عنصر پذريعه تعينيږي.

ب) د نيمګړې ترتيب سوي سيټ $X,\leqq$ بېلګه ترسيم کي، چي په هغه کي $a\neq b,\ a,b\in X$ داسي وجود لری ،چی $X(a)=X(b)$ دي.

فرضوو چي $X_1,\leqq_1$ او $X_2,\leqq_2$ نیمګړي ترتیب سوي سیټونه دي.د $f: X_1\rightarrow X_2$ مپینګ د متصاعد مپینګ په نامه یادوو، که د هر :

$$x,y\in X_1,\ x<_1y \rightarrow f(x)<_2f(y) \qquad (7.3)$$

تمرین6.7. فرضوو چي $f: X_1\rightarrow X_2$ متصاعد بایجکشن دي.

الف) وښیاست که $X_1,\leqq_1$ خطي ترتیب وي، نو $X_2,\leqq_2$ هم خطي ترتیب دي او f^{-1} متصاعد مپینګ دی.

ب) داسي بېلګه راوړئ چي په هغه کي f^{-1} متصاعد نه وي.

د $f: X_1\rightarrow X_2$ بایجکشن مپینګ د آیزومورفېزم Isomorphism په نامه یادوو، که f او f^{-1} دواړه متصاعد مپینګونه وي. د $f: X_1\rightarrow X_2$ مپینګ د غوټه سوې یا ځاله سوي (nested) مپینګ په نامه یادوو، که f د X_1 څخه پر $\mathbf{H}(f)\subseteq X_2$ باند ي آیزومورفېزم وي.

تمرین 7.7. فرضوو چي $X,\leqq$ نیمګړئ ترتیب سوي سیټ دي.

الف) ثابت کي چي، د X د سیټ د ټولو ټوټو سیټ U(X) نظر د $\subseteq$ عملیې ته نیمګړئ ترتیب سوي سیټ دي.

ب) فرضوو چي **R** د $Q,\leqq$ په سیټ کي د داسي ټوټو سیټ دي، چي لوی ترین عنصر ونلري(دغه ډول ټوټه کله کله د دی دی کیند د مقطع په نامه هم یادېږي) . د $R,\leqq$ څخه پر $\mathbf{R},\subseteq$ آیزومورفېزم ترسیم کي.

یوه طبیعی ګټوره «لنډونه» به لا دلته راوړو. که $X,\leqq$ نیمګړي ترتیب سوي سیټ وي، $B,A\subseteq X$ ، نو :

$$A<B$$

پدی معنی دی، چي د هر $x\in A$ ، د هر $y\in B$ دپاره $x<y$ دي. په همدي مفهوم د $a\in X$ دپاره د $A<a$ او $a<A$ د نښو څخه کار اخلو.

نور تمرینونه

8.7. د J.Bosák[4] کتاب ولولئ . دهغه په کتاب کي ډېر ښکلې تمرینونه دي، چي د ګراف د مفهوم په مرسته په ښه ظرافت سره حلېدای سي.

9.7. څرګنده ده چي د دوه عنصره سیټ دپاره، دوي غیر آیزومورف نیمګړي ترتیب سوي سیټونه (د هاسه ډیاګرام يې رسم کئ) وجود لري. د 3 یا 4 عنصره سیټ دپاره څو غیر آیزومورف نیمګړي ترتیب سوي سیټونه وجود لري؟

10.7. فرضو چي X سیټ دي، وښیاست چي:

الف) $\mathscr{P}(X),\subseteq$ نیمګړئ ترتیب سوی سیټ دي.

ب) هر $A\subseteq \mathscr{P}(X)$ سپریمم او انفیمم لري.

11.7. الف) دهغه نیمګړئ ترتیب سوی سیټ چي اعظمی n عنصره او لږ تر لږه m عنصره ولری ، د هاسه ډیاګرام رسم کئ.

ب) د A⊆N سیټ پداسي حال کي چي د ترتیب اړیکه دوپش وړتوب وی، اعظمی n او لږ تر لږه m عنصرونه ولری، څه وخت وجود لری؟

12.7. فرضوو چي A⊆R (7.7 تمرین وګورئ) دي. ددی دپاره چي د A د سیټ د دیدیکیند مقطع ګانو سیټ د ≦,R سره آیزومورف وي، کافي او لازمي شرط یي فورمولبندی کئ.

13.7. الف) که A,B⊆X ، A<B وي او inf B, sup A وجود ولري، نو ثابت کئ چي sup A≦inf B دي.

ب) داسی بېلګه راوړئ چي په هغه کي sup A=inf B دي.

8.2. حقیقي عددونه او لاړونه (sequences)

د لاړ د مفهوم څخه به کاروا خلو، څو د حقیقي عددو په هکله په هغه څه ځانونه خبر کړو، چي وروسته به ضرورت ورته ولرو.

د حقیقي عددو د څېړنو په هکله په خاص ډول او د ریاضي د پېچلو ساختمانو د څېړنو په هکله (متریکي فضاوې او ورته ساختمانونه) په خاص ډول د لاړ مفهوم ډیره قوی آله ده. دلته به لنډ ډول د ځینوبنسټیزو حقیقتونو یادونه وکړو.

که $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د حقیقي عددو لاړ وي، نو د a عدد دهغه د لمیټ په نامه یادېږي ($a=\lim_{n\to\infty} a_n$ لیکو) که د هر حقیقي عدد ε>0 دپاره داسي طبیعی عدد n_0 وجود ولري، چي د هر $n\geqq n_0$ دپاره $|a_n-a|<\varepsilon$ وي.

که د a عدد داسي وجود ولري چي $a=\lim_{n\to\infty} a_n$ ویو نو وایو چي د $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ متقارب (convergent) یا نژدي کېدونکئ دي. د ریاضي د انالایز د ابتدائي کورس څخه لوستونکئ پوهېږي، چي محدود او غیر متنازل (نه ښوئیدونکئ) لاړ متقارب دي.

تمرین 1.8. فرضوو چي $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د حقیقي عددو غیر متنازل لاړ دی. د هر n∈N دپاره $a_n\leqq K$ دي. و ښیاست چي د $\alpha=\sup\{a_n;\ n\in N\}$ عدد د راکړه سوی لاړ لمیټ دی(د α موجودیت د دیدیکیند پرنسیب تضمینوی).

که $\{s_n\}_{n=0}^{\infty},\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ دوه داسی لاړه وي، چي $a_0=s_0$ او د هر n دپاره $s_{n+1}=s_n+a_{n+1}$ وي، نو هغه بیا د عددي سلسلې (Series) په نامه یادوو او په $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ سره یې ښیو. که د $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ متقارب وي، نو د هغه لمیټ د سلسلې د جمع د حاصل په نامه یادوو او په $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ سره یې ښیو. دسلسلې په هکله هم وایو چي سلسله متقاربه ده.

تمرین 2.8. فرضوو چی $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ د غیر منفی عددو ، عددي سلسله ده. پدي معنی چي د هر n دپاره $a_n \geqq 0$ دي. که د K عدد داسي وجود ولري، چي د هر n دپاره $\sum_{k=0}^{n} a_k \leqq K$ وي، نوثابته کئ چي د $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ سلسه متقاربه ده. د 1.8 د تمرین د نتیجي څخه په استفاده سره یي ثابته کئ.

تمرین 3.8. فرضوو چي د هر n دپاره $0 \leqq a_n \leqq b_n$ دي. و ښیاست چي د $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ د سلسلي د تقارب څخه د $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ د سلسلي تقارب استنباط کیږي. علاوه پر دي $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دي.

بېلګه 1.8. فرضوو چي $0 \leqq q < 1$ دي. $a_n = q^n$ سره اېږدو. بیا نو :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

دي. څرګنده ده چي $\lim_{n \to \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{q - 1}$ وجود لري. ځکه نو $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{q - 1}$ دي. دغه سلسله د هندسي سلسلي په نامه یادیږي. ■

اوس به نو د حقیقي عددو ارائه د طبیعي عددو د لاړو په مرسته ترسیم کړو. خپلي څیړني به د $\langle 0,1 \rangle$ انتروال پر حقیقي عددو باندي محدودي کړو. که $\alpha \in R$ وي، نود α مکمله برخه Whole Part ، چی په $[\alpha]$ سره یي ښیو، عبارت دي دهغه تام عدد څخه چي تر α لوی نه وي.پدي معنی چي:

$$[\alpha] \leqq \alpha < [\alpha] + 1 \qquad (8.1)$$

دي. بیا نو $\alpha - [\alpha] \in \langle 0,1 \rangle$ دي. ددي اسیته هر حقیقي عدد α د $\alpha = z + \beta$ بڼه لري، پداسي حال کي چي $z \in Z$ او $\beta \in \langle 0,1 \rangle$ دي.

فرضوو چي p ، $p > 1$ ثابت طبیعي عدد دي. د طبیعي عددو لاړ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ د p پر قاعده باندي د حقیقي عدد α د څرګندوني په نامه یادوو[11] او په لاندي ډول یي لیکو:

$$\alpha = 0, x_0 x_1 \cdots x_n \ \cdots|_p$$

که لاندني شرطونه پر ځای کي:

$$x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \text{ ، د هر n دپاره} \qquad (8.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}} = \alpha \qquad (8.3)$$

[11] پدي هکله جزئیات د الجبر او عددونود تیوري په دوهمه برخه کي لوستلای سي.(نیازمن)

د x_n عدد ، د p پر قاعده د α د عدد په څرګندونه (ارائه) کي د (n+1) ـام رقم (digit)په نامه يادوو.

د 3.8 تمرين او 1.8 بېلګي د نتيجو پر بنسټ په ساده ګي سره ليدلای سو چي د هر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ د پاره چی د (8.2) شرط پر ځای کي د $\sum_{n=0}^{\infty} x_n.p^{-n-1}$ سلسله متقاربه ده او د هغه د جمعي حاصل د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال څخه عدد دي. اوس به وښيو چي معکوسه ادعا هم صدق کوي.

قضيه 1.8. د هر $\alpha\in\langle 0,1\rangle$ دپاره د p پر قاعده باندي څرګندونه وجود لري. علاوه پردي دغه څرګندونه، غير له لاندی حالت څخه، بي ساری ده.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.p^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.p^{-n-1} \qquad x_n, y_n \in \{0,1,\ldots,p-1\} \qquad (8.4)$$

n_0 داسي وجود لري چي د $n>n_0$ دپاره $x_n=0$، $y_n=p-1$ ، د $n<n_0$ دپاره $x_n=y_n$ او $x_{n_0} = y_{n_0} + 1$ دي.

ثبوت. فرضوو چی $\alpha\in\langle 0,1\rangle$ دي. د $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ به داسي جوړ کو چی د p پر قاعده د α د عدد څرګندونه وي. که $\alpha=1$ وي، نود $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ په داسي حال کي چي د هر n دپاره $x_n=p-1$ دي، د p پر قاعده د α د عدد څرګندونه ده. ددی اسيته فرضولای سو چي $\alpha\in\langle 0,1)$ ده.

$x_0=[\alpha\cdot p]$ سره ايږدو.د لاندني فورمول له مخي $x_n,\cdots,x_1$ پيدا کوو :

$$x_{n+1} = \left[\left(\alpha - \sum_{k=0}^{n} x_k.p^{-k-1}\right).p^{n+2}\right]$$

د رياضي د استقراء په ذريعه ثابتولای سو چي:

$$x_n\in\{0,1,\cdots,p-1\} \qquad (8.5)$$

$$0\leqq\alpha-\sum_{k=0}^{n} x_k.p^{-k-1} < \frac{1}{p^{n+1}} \qquad (8.6)$$

څرنګه چي د هر n دپاره $\sum_{k=0}^{n} x_k.p^{-k-1} \leqq\alpha$ دي، نو $\beta=\sum_{k=0}^{n} x_k.p^{-k-1} \leqq\alpha$ دي. و به ښيو چي $\beta=\alpha$ دي. که $\beta<\alpha$ وای، نو داسی n به وجود درلودلای چي $p^{-n-1}<\alpha-\beta$ دي. بيانو :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k.p^{-k-1} + \frac{1}{p^{n+1}} < \beta + (\alpha-\beta) = \alpha$$

کيدي. خو دغه حالت د (8.6) غير مساوات پر خلاف دي. ځکه نو ويلای سو چي دغه ډول اوډل سوي لاړ د p پر قاعده د α د عدد څرګندونه ده. فرض کړو چي د $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ او $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ د p پر قاعده د α د عدد دوي يودبله سره بېلي څرګندوني دي. فرضوو چي n_0 کوچنۍ ترين طبيعي عدد دی ، چي $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ دي. بيله دي چي عموميت مو نقض کړی وي ، فرضولای سو چي $x_{n_0} > y_{n_0}$ دي.

پاملرنه وکئ، چي د $n<n_0$ دپاره $x_n=y_n$ دی.بیانو قدم پر قدم به لاندني اړېکه لاسته راسي:

$$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}x_n.p^{-n-1}\geqq\sum_{n=0}^{n_0-1}x_n.p^{-n-1}+x_{n_0}.p^{-n_0-1}=\sum_{n=0}^{n_0-1}x_n.p^{-n-1}+(x_{n_0}-1).p^{-n_0-1}+p^{-n_0-1}\geqq$$
$$\geqq\sum_{n=0}^{n_0-1}y_n.p^{-n-1}+y_{n_0}.p^{-n_0-1}+p^{-n_0-1}\geqq\sum_{n=0}^{n_0-1}y_n.p^{-n-1}+y_{n_0}.p^{-n_0-1}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}y_n.p^{-n-1}=\alpha$$

پدي معنی چي په پاسني ټولو درو غير مساواتو کی باید مساوات صدق وکي. په لمړي غير مساوات کي ، مساوات یوازی او یوازی هغه وخت صدق کوي ، چي د $n>n_0$ دپاره $x_n=0$ صدق وکي.په دوهم غير مساوات کي هغه وخت چي $y_{n_0}=x_{n_0}-1$ او بلاخره په دريم غير مساوات کي ، مساوات هغه وخت صدق کوي، چي د $n>n_0$ دپاره $y_n=p-1$ وي. ددغه حقيقتو څخه د قضيي ادعا استنباط کيږي.

q.e.d.

د طبيعی عددو د لاړو په مرسته ، دحقيقی عددو د پاسني ځرګندوني څخه به په راتلونکي کي نور هم زيات کار واخلو.

بېلګه 2.8. پدي بېلګه کی به د $\mathcal{P}(N)$ د سيټ(د ټولو طبيعی عددو د سيټ د سب سيټو د سيټ) څخه د $\langle 0,1\rangle$ په انټروال کي د f ساده مپينګ ترسيم کو. ساختمان يې ساده دي؛ که $A\subseteq N$ وي، نو

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\chi_A(k)\cdot 3^{-k-1}\qquad(8.7)$$

ايږدو.د χ_A تابع مو په 5.2 رساله کي تعريف کړه. پدي معنی چي د بېلګي په ډول :

$$f(N)=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot 3^{-k-1}=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

دي. او

$$f(2N)=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\chi_{2N}(k)\cdot 3^{-k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot 3^{-2k-1}=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

$$f\left(\{0,...,n\}\right)=\sum_{k=0}^{n}2\cdot 3^{-k-1}=1-\frac{1}{3^{n+1}}$$

اوس به نو وښيو چي د f مپينګ، ساده مپينګ دي.فرض کړو چي $A_1,A_2\subseteq N$ ، $A_1\neq A_2$ دي. بيا نو داسي k وجود لري ، چي د بېلګي په توګه $k\in A_1$ او $k\notin A_2$ دي. فرضوو چي k کوچنئ ترين داسي عدد دي، پدي معنی چي د $n<k$ دپاره $n\in A_1\equiv n\in A_2$ دي.

بيابه د شمېرنې په نتيجه کې لاسته راسي :

$$f(A_2)=\sum_{m<k}^{\infty}2\cdot\chi_{A_2}(m)\cdot 3^{-m-1}+0\cdot 3^{-k-1}+\sum_{m>k}^{\infty}2\cdot\chi_{A_2}(m)\cdot 3^{-m-1}\leqq$$

$$\leqq\sum_{m<k}^{\infty}2\cdot\chi_{A_2}(m)\cdot 3^{-m-1}+3^{-k-1}=$$

$$=\sum_{m<k}^{\infty}2\cdot\chi_{A_1}(m)\cdot 3^{-m-1}+3^{-k-1}<\sum_{m<k}^{\infty}2\cdot\chi_{A_1}(m)\cdot 3^{-m-1}+2\cdot 3^{-k-1}\leqq f(A_1)$$

■

د f د مپینگ د قیمتو ساحه د کانتور د سیټ $\mathcal{C}$=**H**(f) او یا د کانتور د دیس کانتینووم Cantor Discontinuum (د کانتور پرې پرې سیټ) په نامه یادېږي.د $\mathcal{C}$ د سیټ د تعریف او(8.7) څخه په اسانې سره لیدل کېږي، چې که x∈ $\mathcal{C}$ وي، نو x د درو پر قاعده ارائه سوې دي او یوازي د 0 او 2 د عددو څخه تشکیل سوې دي.

تمرین 4.8. وښیاست چې: $\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\mathcal{C}$

ښکاره ده چې، معکوسه ادعا هم صدق کوي: که $x\in\langle 0,1\rangle$ د درو پر قاعده څرگندونه یې یوازي د 0 او 2 د رقمو څخه تشکیل سوې وي، نو x∈ $\mathcal{C}$ دي.

تمرین 5.8. وښیاست چې $\frac{1}{3},\frac{19}{27},\frac{9}{13}\in\mathcal{C}$ دي. د A داسي پیدا کړې، چې د f(A) قیمت په ترتیب سره $\frac{1}{3},\frac{19}{27},\frac{9}{13}$ وي.

بېلگه 3.8. په C_n باندی د هغو $x\in\langle 0,1\rangle$ سیټ په نښنه کوو، چې د هغو د درو پر قاعده د په څرگندونه کې $x=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\cdot 3^{-k-1}$ ، $x_n=1$ وي. په آسانې سره لیدل کېږي، چې :

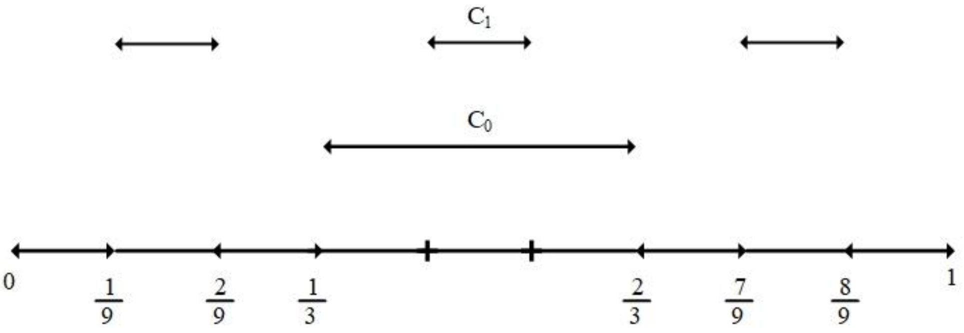
$$\mathcal{C}=\langle 0,1\rangle-\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n$$

د C_1,C_0 سیټونه په 2.13 شکل کی رسم سوي دي. دغه ډول کولای سو چې د $\mathcal{C}$ سیټ په رسم کې د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال هغه برخه چې خط سوی نه وي ، څرگند کړو، د 2.14 شکل وگورئ. ■

بېلگه 4.8. د $\langle 0,1\rangle$ انتروال څخه د $\mathcal{P}$(N) په سیټ کې h ساده مپینگ ترسیموو. که $x\in\langle 0,1\rangle$ وي، نو x د دوو پر قاعده $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ارائه سوي دي. که د x عدد دوي مختلفې څرگندونې ولري، نو هغه څرگندونه یې ټاکو، چې د معین ځای څخه وروسته یوازي د 1 رقم ولري.د h مپینگ په لاندې ډول تعریفوو:

$$h(x)=\{n\in N;\quad x_n=1\}$$

په آساني سره خپل باور راوړلای سي، چي $h:\langle 0,1\rangle \xrightarrow[1-1]{} \mathcal{P}(N)$ دي.■



شکل 13.2

شکل 14.2

تمرین 6.8. په پورتني مپینګ کي د $h\left(\frac{1}{2}\right),h\left(\frac{2}{3}\right),h\left(\frac{1}{7}\right)$ قیمتونه پیداکړي. وګورئ چي د $k\cdot N, \{0,1,...,n\},2N,N$ د سیټو څخه کوم سیټ د h د مپینګ قیمت دي.

ضمیمه ـ ارشیمیدس ، بلزانو، کوشي او دي دیکیند د حقیقي عددو په هکله

د 1.2 رسالې په شروع کي مو وویل چي د دي دیکیند پرنسیپ د حقیقي عددو د نوی خاصیتو څخه نه دی. پدی معنی چي هغه د ارشیمیدس ، بلزانو او کوشي د معروفو خاصیتو څخه استنباط کیږي. په دغه برخه کي به په دقت سره یوه لنډه کتنه ورته وکو.

د حقیقي عددو لاړ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د بلزانو ـ کوشي په لنډ ډول د b-c لاړ په نامه یادیږي، که د هر $\varepsilon>0$ دپاره داسی n_0 وجودلري، چي د اختیاري $m,n\geqq n_0$ دپاره $|a_n-a_m|<\varepsilon$ صدق کوي.

تمرین 7.8. وښیاست چي د حقیقي عددو هر متقارب لاړ b-c لاړ دي.

قضیه 2.8. د حقیقي عددو هر بلزانو ـ کوشي لاړ متقارب دي.

ثبوت . فرضوو چي $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د بلزانو ـ کوشي لاړ دي.د $\varepsilon=1$ دپاره داسي n_0 وجودلري، چي د هر $m,n\geqq n_0$ دپاره $|a_n-a_m|<1$ دي.فرضوو چي:

$$M=\{x\in R;\ (\exists k)(\forall n\geqq k)\ a_n\geqq x\}$$

څرګنده ده چي $a_{n_0}-1\in M$ دي، پدي معنی چي د M سیټ خالي نه دي. د بلې خوا $a_{n_0}+1$ د M د سیټ لوړنئ سرحد دي، ددی اسیته

$$\alpha=\sup M$$

وجود لري. اوس به نو وښیو چي $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

فرضوو چې $\varepsilon>0$ دي. بيانو $\alpha-\varepsilon$ د M د سيټ لوړنۍ سرحد نه دي. ځکه نو داسې $x\in M$ وجود لري چې $x>\alpha-\varepsilon$ وي. بيانو k داسې وجود لري، چې د $n\geqq k$ دپاره $a_n\geqq x$ دي. د بلزانو-کوشي د شرط څخه استنباط کيږي، چې داسي n_1 وجود لري، چې د $n,m\geqq n_1$ دپاره $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ دي. څرنګه چې $\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$ د M په سيټ اړه نلري، نو $n_2\geqq n_1$ داسي وجود لري، چې $a_{n_2}<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$ دي. فرض کړو چې $n_3=\max\{k,n_1\}$ دي. که $n\geqq n_3$ وي، نو :

$$a_n\geqq x>\alpha-\varepsilon,\ \left|a_n-a_{n_2}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ a_{n_2}<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$$

صدق کوي. په مجموع کې $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ کيږي. q.e.d

پاملرنه وکړئ چې د 2.8 قضيې په ثبوت کې او د 4.1 قضيې په ثبوت کې د دی ديکيند د پرنسيپ څخه اساساً کار اخيستل سوی دي. اوس به نو معکوسه قضيه ثابته کړو. دغه قضيه دقيقه نه ده فورمولبندی سوي . هيله ده چې لوستونکئ مې وبخښي- د امکان په صورت کې د هغه دقيقه فورمولبندي پخپله وکي.

قضيه 3.8. فرضوو چې $K,+,\cdot,0,1,\leqq$ داسې فيلډ دی چې (1.2) -(1.7) خاصيتونه ولري. که K د ارشيميد پرنسيپ پر ځای کي(پدی معنی چې د 4.1 قضيه صدق کوي) او هر b-c لاړ په K کي متقارب وی، بيا نو K د ديديکيند پرنسيپ هم پرځای کوي.

ثبوت . د (1.2) -(1.7) خاصيتو پر بنسټ کولای سو فرض کړو چې $Q\subseteq K$ دي(د الجبر د معروفو قضيو څخه ده) .

فرضوو چې $M\subseteq K$ د لوړی خوا محدود غير خالي سيټ دي. فرضوو چې a د M د سيټ لوړ سرحد(پوله) دی. ښېله دي چې عموميت مو نقض کړی وي، فرضولای سو چې $x\in M$ داسی وجود لري، چې $x>0$ دي. ځکه نو $a>0$ ،هم مثبت دي. راسی چې د $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ جوړ کو. څرنګه چې K د ارشيميدس پرنسيپ پر ځای کوي، نو د يوه راکړه سوي ثابت $n\in N$ دپاره داسي k وجود لری چې $k\cdot\frac{1}{2^n}\geqq a$ د سيټ لوړسرحد دی.فرضوو $k\cdot\frac{1}{2^n}$ د M دي.ځکه نو $k\in N$ داسی وجود لري، چې $k\cdot\frac{1}{2^n}$ د M د سيټ لوړسرحد دی.فرضوو چې k دغه ډول کوچنۍ ترين عدد دی ، بيانو $a_n=\frac{k}{2^n}$ سره اېږدو. ځکه نو د $x\in M$ دپاره صدق کوي چې $x\leqq a_n$ دی او $x\in M$ داسی وجود لري، چې $a_n-\frac{1}{2^n}<x$ دی.(دلته مو د هغی فرضيې څخه استفاده و کړه چې د M د سيټ کم عنصر مثبت دی). اوس به وښيو چې د $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ b-c (يعنی بلزانو – کوشی لاړ) دی. فرضوو چې $\varepsilon>0$ دی. بيانو n_0 داسي وجود لری، چې $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$ دی. په ساده ګي سره ليدلای سو ، چې د $n\geqq n_0$ لاندني اړيکه صدق کوي:

$$a_{n_0}-\frac{1}{2^{n_0}}<a_n\leqq a_{n_0}$$

ددی اسیته د $n,m \geqq n_0$ دپاره $|a_n - a_m| < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ دی. د b-c لاړ د فرضیي له مخي دغه لاړ لمیټ لري، فرض کړو چي $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ دی.

اوس به نو وښیو چي $\alpha = \sup M$ دی. څرنګه چي $n \in N$ دی او د هر $x \in M$ د پاره $x \leqq a_n$ داسی صدق کوي، چي $x \leqq \alpha$ دی، پدی معنی چي α د M د سیټ لوړنۍ سرحد دی. فرضوو چي β د M د سیټ بل لوړ سرحد دی. غواړو ثابته کو چي $\beta \geqq \alpha$ ده. که $\beta < \alpha$ وای، نو داسي n_0 به وجود درلودلای، چي د $n \geqq n_0$ د پاره به $a_n > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) > \beta$ وای. څرګنده ده چي $m \geqq n_0$ داسي وجود لري، چي $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \beta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ دی. بیا به نو $x \in M$ داسی وجود ولری $x > a_m - \frac{1}{2^m}$ وی. مګر $a_m - \frac{1}{2^m} > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \beta$ دی. پدی معنی چي $x \in M$ داسي وجود لري ، چي $x > \beta$ دي. خو دغه حالت د لوړنې سرحدد خاصیت سره په تضاد کي دی. پدي ډول قضیه ثابته سوه. q.e.d

نور تمرینونه

8.8. که $p>1,\ p \in N,\ n \in N$ وي ، نو د $x_k,\dots,x_1,x_0$ لاړ د طبیعی عدد n د p پر قاعده د څرګندوني په نامه یادیږي ، که د $i=0,\dots,k$ دپاره $x_i \in \{0,1,\dots,p-1\}$ او $\sum_{i=0}^{k} x_i p^i = n$ وي. په هغه صورت کی چي $k>0$ وي، نو $x_k \neq 0$ دي. ثابته کئ چي هر طبیعی عدد د p پر قاعده په یوازنۍ بڼه څرګندولای سو.

9.8. فرضوو چي $x_k,\dots,x_1,x_0$ د طبیعی عدد n د p پر قاعده څرګندونه ده.بیا نوثابته کئ چي $p-1$ یوازی او یوازی هغه وخت طبیعی عدد n وبشي، که $p-1$ د $x_k+\dots+x_1+x_0$ عدد ووبشي. په ورته ډول $p+1$ یوازی او یوازی هغه وخت د n طبیعی عدد وبشي، که $p+1$ د $x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^k x_k$ عدد ووبشي. که $p=10$ وي ، نو عدد به څه ډول بڼه ولري؟

10.8. د $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ د عدد د p پر قاعده څرګندونه $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ د متناهي څرګندوني په نامه یادیږي، که داسي n_0 وجود ولری، چي د $k>n_0$ دپاره $x_k=0$ وي. دp پر قاعده څرګندونه د دوراني periodic په نامه یادیږي، که د $n_0, l \in N$ عددونه داسي وجود ولري، چي د $n>n_0$ دپاره $x_{n+l} = x_n$ وي. پدی معنی چي متناهي څرګندونه هم دوراني څرګندونه ده. وښیاست چي د α عدد یوازی او یوازی هغه وخت ناطق عدد دی، چي د هغه څرګندونه د p پر قاعده دوراني وي.

11.8. فرضوو چي $r = \frac{m}{n} \in \langle 0,1 \rangle$ دی. پداسي حال کي چي m او n یو پر بل باندي د وېش وړ ندي. ثابت کئ چي د r عدد یوازي او یوازي هغه وخت د p پر قاعده متناهي څرګندونه لري، که د $k \in N$ عدد داسي وجود ولري ، چي n د p^k عدد ووېشي.

12.8. ثابت کړئ چي ، که $r=\frac{m}{n}\in\langle 0,1\rangle$ د pپر قاعده دوراني څرګندونه ولري، نو دl دوران تر n کوچنئ دی.

13.8. فرضوو چي $p,q>0,\ p,q,\in N,\ a\in(0,\ 1),\ f:\langle 0,1\rangle\longrightarrow\langle 0,1\rangle$ دي. وښياست چي د f تابع د a په عدد کي يوازې او يوازې هغه وخت متمادې ده، که لاندنئ شرط صدق وکي:

د هر n دپاره داسي m وجود لري چي که د p پر قاعده د a او x څرګندوني لمړې m رقمونه مساوي وې ، نو د p پر قاعده د f(a) او f(x) څرګندوني لمړې n رقمونه مساوي دي.

14.8. د تېر تمرين د نتيجي څخه په استفادي سره د کانتور د سيټ څخه د $\langle 0,1\rangle$ پر انتروال باندي متمادی تابع ترسيم کئ.

15.8. ثابت کئ چي د هرو دوو حقيقي عددو دپاره $0\leqq\alpha<\beta\leqq 1$ داسي $x\in\langle 0,1\rangle-\mathfrak{C}$ وجود لري، چي $\alpha<x<\beta$ دی.

16.8. ثابت کئ، که f د $\langle 0,1\rangle$انتروال څخه د کانتور په سيټ کي $\mathfrak{C}$ متمادي مپينګ وي، نو f ثابته تابع ده. پدي معنی چي $a\in\mathfrak{C}$ داسي وجودلري چي د هر $x\in\langle 0,1\rangle$ دپاره $f(x)=a$ دی.

17.8. فرضووچي $n>0, p>1, a\in\langle 0,1\rangle$ دی. د ε او η غير منفي عددونه داسي پيدا کي چي د $\langle a-\varepsilon, a+\eta\rangle$انتروال د هغو x سيټ وي، چي د p پر قاعده د a د څرګندوني سره لمړې n رقمونه مساوی لري.

18.8. ثابت کئ ، که $x\in\langle 0,1\rangle-\mathfrak{C}$ وي، نو داسي $\varepsilon>0$ داسي وجود لري، چي:

$(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\subseteq\langle 0,1\rangle-\mathfrak{C}$ دی.

دریم فصل
د سیټ د عنصرو شمېر څه شی ته وایي

برنارد بلزانو او جورج کانتور د لایتناهی په هکله د خپلو څېړنو په لړ کي سمدستي د مختلفو لایتناهی په پرتله کولو شروع وکړه. هغوی باید د هغوی ترعصر پوري په دغه هکله د بشریت دپوهي اوتفکر د پېټي څخه اوږه خالي کړی وای . هغوی ددغی مفکوری څخه چي د سیټ د عنصرو شمېرعدد دی، ډېره وکړه او خپلي څېړني یې د دتمدن د کښتو پوړو څخه داسي راپیل کړه ، چي ددوو سیټو د عنصرو شمېر سره پرتله کي.دغه مفکوره به په 1.3 رساله کي تشریح کو.

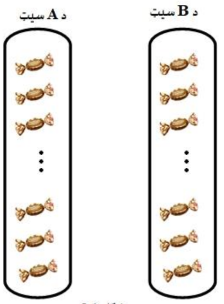
په 2.3 رساله کي به د بلزانو و هغي مفکوری ته چي په 2.1 رساله کي مو اشاره ورته وکړه ، پاملرنه وکړو. خپلو څېړنو ته پدی هکله چي لایتناهی څه شي دی قدم پر قدم داسی ادامه ورکوو، چي لمړئ متناهی سیټونه تعریفوو او د لایتناهی سیټونه په ساده ډول د شمېرپه وړتوب countable او د شمېر په نه وړتوب Uncountable یا بې شمېره باندی صنف بندی کوو.په 7.3 او 8.3 رسالو کي به هڅه وکو چي لاسته راغلي پوهه د ریاضی د ګټوروقضیو د ثبوت دپاره په کار واچوو(2.7 او 4.8 بېلګه ...)

1.3. کوچنیان په خپل منځ کي چاکلیټ څنګه وېشي

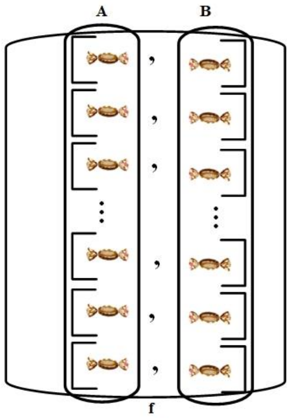
پدي رساله کي ددو سیټو د عنصرو د شمېر مفهوم او د هغه اړوند مفهومونه تعریفوو. دغه مفهومونه به پر یو شمېر بېلګو باندی ترسیم کړو.

دوه ښه تربیه سوي کوچنیان په نظر کی نیسو چي په خپل منځ کي عادلانه یوه د چاکلیټو کڅوړه ووېشي. د هغوی تګ لاره پدی اړه لري چي آیا دعمر له مخې تر ښوونځي دمخه دي اوکه یې فکر د ښوونځي ددرسو تر تآثیر لاندی راغلئ دی. د ښوونځي زده کونکئ د چاکلیټو د کڅوړې محتوا شمېرې او بیا یې پر دوو وېشي او د خپل انډیوال برخه ورکوی. دوېش عدالت پدی اړه لری چي آیا پر دوو د وېش نتیجه او د چاکلیټو شمېرنه درسته ده او که غلطه. ددغه ډول وېش دپاره لازمه ده چي لږ تر لږه پر دوو د وېش سره بلد وي.

هغه کوچنیان چي ښوونځي ته لا نه وی تللي ، دغه پرابلم په ډېره ساده ګي سره حل کوي. هغوی د « یو یې زما ـ یو یې ستا» د سیستم څخه کار اخلي. هغوی پدی ندی خبر چي په کڅوړه کي څو داني چاکلیټ دي(هغوی ته د چاکلیټو شمېر په زړه پوري هم ندی) ، خو دخپل وېش پر عدالت باندي ، پر حق، باوری دي. په غالب ګمان سره پدی باورلري چي د لمړي کوچني د چاکلیټو دA د سیټ شمېر د دوهم کوچني د چاکلیټو د B د سیټ دشمېر سره مساوی دی. د هغوی کړنلاره د 1.3 په شکل کي ترسیموو. که دغه شکل ته د f مپینګ وراضافه کړو(2.3 شکل وګورئ) ، نو د لیسی زده کونکي وینی چی د f مپینګ د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی ساده مپینګ دي.



شکل 3.1



شکل 3.2

د ورته کړنلاري څخه د سپورټ ښوونکي ،هغه وخت چي وغواړي یوه ټولګې پر دوو مساوي ګروپو یا ټیمونو وویشي، کار اخلي. ټوله زده کونکي پر اول او دوهم باندي وېشي. هغه چي اول دی په یوه ګروپ او هغه چي دوهم دي په دوهم ګروپ کي راغونډيږي. که د زده کونکو شمېر جفت وي، نو دواړه ګروپه سره مساوي دي. که څه هم د ټولګي د زده کونکو شمېر راته معلوم نه وي.

دا چي په یوه قطي کي 65 پنسلونه دي ، څه معنی؟ که دقیق ځیر سو ، نو اصلاً هغومره پنسلونه دي، لکه 2,1,...,65 عددونه او یا طبیعي عددونه چي تر 65 لږوي. پدي معنی ، هغه وخت چي پوهېږو چي یو سیټ n ، $n\in N$ عنصره لري. یوازي پدی پوه یو چی د دغه سیټ د عنصرو شمېر دونه دي لکه د $\{1,2,...,n\}$ د سیټ د عنصرو شمېر. او یا لکه د $\{k\in N;\ k<n\}$ سیټ.

د پورتنیو بېلګو څخه استدلال کولای سو چي زموږ دپاره اصلاً په لمړي قدم کي دغه واقعیت په زړه پوري دي چي کله دوه سیټونه مساوي شمېر عنصرونه لري . او وروسته بیا دسیټو د عنصرو شمېر(کله کله د عنصرو په شمېر پسي هم نه ګرځو) . موږته دغه په زړه پوري ده چی د عنصرو شمېر یعنی څه؟

د پورتنیو مفکورو سره یو شان نوی مفهوم تعریفوو. فرضوو چي A او B سیټونه دي. وایو چي A او B مساوی شمېر عنصرونه لری یا د A او B سیټونه مساوی بوج (حجم)(په انګلیسی کي Power ورته وایي.) لری، لیکو یې $|A|=|B|$ ، که د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندي ساده مپینګ وجود ولري. پدی معنی هغه وخت چي د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی بایجکشن وجود ولری. د $|A|=|B|$ د بیان نفی په $|A|\neq|B|$ سره افاده کوو. موږ معمولاً د دووسیټو د مساوي شمېر عنصرو پرځای د دوو سیټو د مساوی بوج په هکله ږغېږو. د A د سیټ د بوج د په نښه کولو دپاره د $|A|$ پر ځای د $\bar{\bar{A}}$ د نښي څخه هم کار اخیستل کیږي. دغه نښه د لمړي ځل د پاره کانټور را منځته کړه. پدی ډول د $|A|=|B|$ پر ځای ،په معادل ډول، $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ هم لیکلای سو.

بېلګه 1.1. الف) د $\{0,1,2\}$ او $\{a,b,c\}$ سیټونه مساوی بوج لری. ځکه چي د $\{0,1,2\}$ دسیټ څخه د $\{a,b,c\}$ پر سیټ بادی ساده مپینګ وجود لری ، چي هغه عبارت دی له:

$$f=\{[0,a],[1,b],[2,c]\}$$

ب) د (0,1) او (0,2) انټروالونه هم مساوی بوج لري. ځکه چي د $x\in(0,1)$ دپاره د $g(x)=2x$ تابع د (0,1) انټروال څخه د (0,2) پر انټروال باندی ساده مپینګ ترسېموي.

ج) د $n\in N$ دپاره د $h(n)=2n$ مپینګ د طبیعی عددو څخه د جفتو طبیعی عددو $2N$ پر سیټ ساده مپینګ دي. ددی اسیته $|N|=|2N|$ دی. پدی معنی چي د طبیعی عددو دسیټ بوج د جفتو طبیعی عددو د سیټ د بوج سره مساوی دي. په بل عبارت د طبیعی عددو شمېر د جفتو طبیعی عددو د شمېر سره مساوي دي.

د) د ρ سطحه عین بوج لری لکه د ټولو هغوممکنو مستقیمو خطوسیټ A چي پرنوموړی سطحه عمود دی .په مپینګ کي دهر $p\in A$ په مقابل کي د عمود خط p د عمودیت نقطه (د خط پنده) ایږدو. پدي معنی چي د عمود خط p او د ρ دسطحي د تقاطع نقطه یي په مقابل کي ایږدو.دغه ډول مپینګ د A د سیټ څخه د ρ پر سطحه باندی ساده مپینګ دي. ■

قضیه 1.1. الف)د هر سیټ A دپاره $|A|=|A|$ صدق کوي.

ب) که $|A|=|B|$ وي ، نو $|B|=|A|$ دی.

ج) که $|A|=|B|$ ، او $|B|=|C|$ وي، نو $|A|=|C|$ دي.

ثبوت. الف) د id_A مپینګ د A پر سیټ ساده مپینګ دی.

ب) که $|A|=|B|$ وي ، نو د $f:A\xrightarrow[1-1]{ر}B$ مپینګ د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی وجود لري. د 2.2.2 قضیې په استناد د $f^{-1}:B\longrightarrow A$ معکوس مپینګ وجود لري. د همدی قضیي له مخې دغه مپینګ د A پر سیټ ساده مپینګ دي. ددی اسیته $|B|=|A|$ کیږي.

ج)څرنګه چي $|A|=|B|$ ، او $|B|=|C|$ دی، نود $f:A\xrightarrow[1-1]{ر}B$ او $g:C\xrightarrow[1-1]{ر}B$ بایجکتیف مپینګونه وجود لري.بیانو د $f\circ g:A\to C$ هم بایجکتیف مپینګ دي.

q.e.d

بیلګه 2.1. الف) که $a<b\in R$ وي، نود $f:(0,1)\to(a,b)$ بایجکتیف مپینګ وجود لري. په رشتیا هم کفایت کوي چي د$x\in(0,1)$ دپاره $f(x)=(b-a)\cdot x+a$ سره کښیږدو. څکه نو $|(0,1)|=|(a,b)|$ دي.د 1.1 قضیي له مخي د اختیاري $c<d,\ a<b,\ a,b,c,d\in R$ دپاره $|(a,b)|=|(c,d)|$ صدق کوي.

ب) د تانجنټ تابع د $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ د انتروال څخه د R پر سیټ باندي بایجکتیف مپینګ دي(3.3 شکل، وګورئ).څکه نو $\left|\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right|=|R|$ دي.

ج) د $f:(0,1)\to(0,\infty)$ تابع چي د $f(x)=\frac{1}{x}-1$ پذریعه تعریف سوي ده، بایجکتیف مپینګ دي(3.4 شکل وګورئ). څکه نو د الف)، ب) او لمړي قضیي له مخي لاندنئ مساوات صدق کوي.

$$|(0,1)|=|(0,\infty)|=|R|$$

■

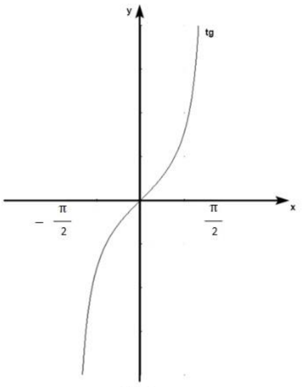
تمرین1.1. فرضوو چي c<d, a<b, a,b,c,d∈R . په لاندنیو سیټونو کي جوړه په جوړه د هرو دوو سیټو ترمنځ بایجکتیف مپینګ تعریف کړئ.

الف) $(0,1), (a,b), (c,d), (-\infty,a), (a,+\infty), R, (-\infty,a)\cup\langle b, +\infty),$

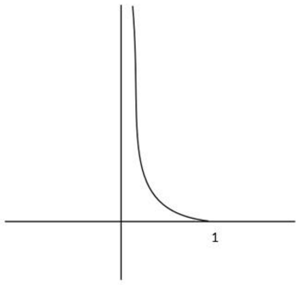
$$\left(a,\frac{3a+b}{4}\right\rangle \cup \left(\frac{3a+b}{4},b\right)$$

ب) $(0,1\rangle, (a, b\rangle, (c,d\rangle, (-\infty,a\rangle, \langle a,\infty), \langle a,b), \langle c,d), \{[x,y]\in R\times R;$
$x^2+y^2=1\};$

ج) $\langle 0,1\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \left\langle a,\frac{3a+b}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3a+b}{4},b\right\rangle.$



شکل 3.3



شکل 3.4

اوس به نو دلته نور مفهومونه معرفي کړو.وایو چي د A د سیټ بوج د B د سیټ تر بوج کوچنئ او یا مساوي دي ، د |A|≦|B| په نښه کوو، که د f ساده مپینګ د A د سیټ څخه د B په سیټ کی ولري. وایو چي د A د سیټ بوج د B د سیټ تر بوج کوچنئ دي ، که |A|≦|B| وی ، خو |A|=|B| صدق نه کوی . په هغه صورت کي لیکو |A|<|B| .

بیلګه 3.1. الف) د $(0,1)$ د انتروال بوج د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال تر بوج کوچنئ اویا دهغه سره مساوي دي. ځکه چي د $id_{(0,1)}$ مپینګ د $(0,1)$ څخه په $\langle 0,1\rangle$ کي ساده مپینګ دي.

ب) د $\{0\}$ د سیټ بوج د $\langle 0,1\rangle$ د سیټ تر بوج کوچنئ دي. څرګنده ده چي د $\{0\}$ د سیټ څخه د $\langle 0,1\rangle$ په سیټ کي ساده مپینګ وجود لري، پدی معنی چي $|\{0\}|\leqq|\langle 0,1\rangle|$ دي، خو $|\{0\}|=|\langle 0,1\rangle|$ صدق نه کوي. ځکه چي د $\{0\}$ د سیټ څخه د $\langle 0,1\rangle$ پر سیټ ساده مپینګ وجود نلري.

ج)که A⊆B وي ، نو |A|≦|B| صدق کوي. په یقین سره id_A زمونږ د غوښتني ساده مپینګ دي. ■

د $|A|<|B|$ د غیر مساوات په ثبوت کي اکثرآ د ستونځو سره مخامخ کیږو . یو ډول باید ثابت کړو چي د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندي ساده مپینګ وجود نلري. په داسې حالتو کي باید تل د یو چم څخه کار واخلو.

بیلګه4.1. پدی بیلګه کي به وښیو چي د هر طبیعي عدد $n\in N$ دپاره لاندنئ غیر مساوات صدق کوي:

$$|\{k\in N;\ k<n\}|<|\{k\in N;\ k\leqq n\}| \qquad (1.1)$$

څرګنده ده چي $\{k\in N;\ k<n\}\subseteq\{k\in N;\ k\leqq n\}$ دي. پدی معنی چي د لمړي سیټ بوج ددوهم سیټ تر بوج کوچنئ او یا ورسره مساوي دي. باید وښیو چي ددوی بوجونه سره مساوي ندي. مستقیم یې نسو ثابتولای. خو د ریاضي د استقراء څخه به مرسته وغواړو.

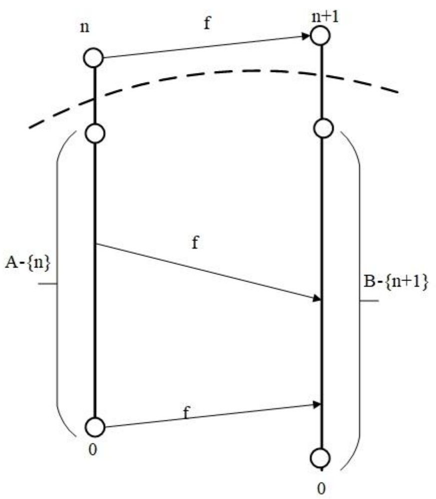
په $\mathcal{V}(n)$ به د $|\{k\in N;\ k<n\}|\neq|\{k\in N;\ k\leqq n\}|$ ادعا په نښه کړو. څرګنده ده چي $\mathcal{V}(0)$ صدق کوي، ځکه چي $\{k\in N;\ k<0\}=\emptyset$ دي او دوهم سیټ غیر خالي دي.

د "$\mathcal{V}(n)\to\mathcal{V}(n+1)$" استنباط به په غیر مستقیم ډول ثبوت کړو. فرضوو چي $\mathcal{V}(n+1)$ صدق نه کوي.پدی معنی چي د $A=\{k\in N;\ k<n+1\}$ د سیټ څخه د $B=\{k\in N;\ k\leqq n+1\}$ پر سیټ باندی د f د بایجکتیف مپینګ وجود لري. دلته غواړو ثابته کړو چي $\mathcal{V}(n)$ د بیان په صفت صدق نه کوي ، پدی معنی چي د هغه نفی باید رشتیا وي، یعنی $|A-\{n\}|=|B-\{n+1\}|$ دي. (د جزئیاتو په هکله یې فکر وکې، دلته د 2.1.2 ج د تمرین د نتیجې څخه کار اخلو).

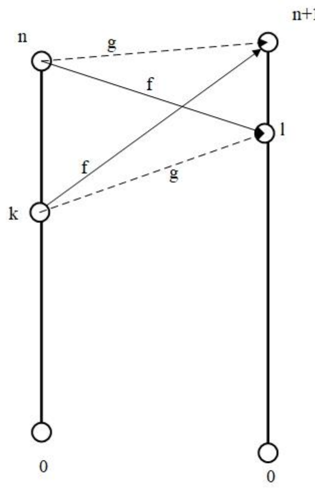
دوه امکانه لرو:

1. که $f(n)=n+1$ وي، نو $f|A\text{-}\{n\}$ د $A-\{n\}$ د سیټ څخه د $B-\{n+1\}$ پر سیټ باندی د بایجکتیف مپینګ دي. ځکه نو $\mathcal{V}(n)$ صدق نه کوي – 3.5 شکل وګورئ.

2. فرضوو چي $f(n)\neq n+1$ دي. بیانو د $l\leqq n,\ k<n,\ k,l$ عددونه داسي وجود لري ، چي $f(k)=n+1$ او $f(n)=l$ دي(6.3. شکل وګورئ). د $g:A\xrightarrow[\text{on}]{1-1}B$ مپینګ داسي تعریفوو: $g(n)=n+1,\ g(k)=l$ او د ټولو $i\neq n,k,\ i\in A$ دپاره $g(i)=f(i)$ سره ایږدو.په دي حالت کي بیا هم لکه په لمړۍ حالت کي د $g|A-\{n\}$ مپینګ د $A-\{n\}$ د سیټ څخه د $B-\{n+1\}$ پر سیټ باندي بایجکتیف مپینګ دي. پدی معنی چي $\mathcal{V}(n)$ صدق نه کوی. په نتیجه کي ثبوت تکمیل سو.■



شکل 5.3



شکل 6.3

تمرين 2.1. فرض کړو چي $n<m,\ n,m\in N$ دي.ثابت کي چي:

$$|\{k\in N;\ k<n\}|<|\{k\in N;\ k<m\}|$$

پاملرنه وکړئ چي د ج1.3 بيلګې د نتيجې معکوسه ادعا هم په خاص مفهوم سره صدق کوي. که $|A|\leqq|B|$ وي، نو د $C\subseteq B$ داسي وجود لري ، چي $|A|=|C|$ وي. په رشتيا هم د $|A|\leqq|B|$ غير مساوات څخه استنباط کېږي، چي د $f: A \xrightarrow{1-1} B$ ساده مپينګ وجود لري. دلته کفايت کوي چي $C=H(f)$ سره کښيښودل سي.

د سيټو د بوج په هکله د غير مساواتو دابتدائي خاصيتو ثبوت لوستونکو ته پرېږدم.

تمرين3.1. فرضوو چي B,A او C سيټونه دي .ثابت کړئ چي د هغوی د بوج په هکله لاندني خاصيتونه صدق کوي:

الف) که $|A|=|B|$ وي، نو $|A|\leqq|B|$ دی.

ب) که $|A|\leqq|B|$ او $|B|\leqq|C|$ ، نو $|A|\leqq|C|$ دي.

ج) که $|A|=|B|$ او $|B|<|C|$ ، نو $|A|<|C|$ دی.

لوستونکئ به هرومرو ځير سوی وي،چي تراوسه مو د «طبيعی» ادعا د ثبوت تکل ندی کړئ، هغه داچي:که $|A|\leqq|B|$, $|B|\leqq|A|$، نو $|A|=|B|$ دی. وروسته به يې ووينو چي دغه ادعا حقيقت لري ، خو ثبوت يې ،پدی رساله کي د نورو ثبوتو په څېر، دونه ساده ندی.

نور تمرينونه

4.1. د A د سيټ څخه د B پر سيټ باندي ساده مپينګ ترسيم کړئ، پداسي حال کي چي:

الف) $A=R$ او $B=\{[x,y]\in R^2;\ x^2+(y-1)^2=1\ \wedge y\neq 2\}$ دي.

ب) د A سيټ په سطحه کي د ټولو قوسو سيټ دي او $B=R\times R\times(0,\infty)$ دي.

ج) $A=\{[x,y]\in R^2\ ;\ x^2+y^2\leqq 1\}$ او $B=\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle$ دي.

د) $A = {}^{N}N$ او B د طبیعی عددو د ټولو غیر متنازلو لاړو سیټ دي.

ه) $A=\{[x,y\}\in R^2;\ x^2+y^2=1\}$ او $B=\langle 0,1)$ دي.

ی) $A=\{[x,y\}\in R^2;\ x^2+y^2=1\}$ او $B=A\cup\{[x,y\}\in R^2;\ x^2+y^2=2\}$ دي.

5.1. ثابت کئ چي $|A|\leqq|B|$ دي ، پداسي حال کي چي.

الف) $A = {}^{N}\langle 0,1\rangle$ پدی معنی چي A د $\langle 0,1\rangle$ په انتروال کي د ټولو عددي لاړو سیټ دي او B د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال د ټولو متقاربو عددي لاړو سیټ دي.

ب) $A=\{[x,y\}\in R^2;\ x^2+y^2\leqq 2\}$ او $B=\{[x,y\}\in R^2;\ x^2+y^2<1\}$

ج) $A = {}^{N}\langle 0,1\rangle$ او دB سیټ د $(0,1)$ د انتروال څخه د $\langle 0,1\rangle$ په انتروال کي د ټولو متمادی تابع ګانو سیټ دي.

د) A د R څخه په R کی د ټولو غیر متنازلو تابع ګانو سیټ دي او B د R څخه په R کی د ټولومتصاعدو تابع ګانو سیټ دي.

2.3. د هېري د ضرورت په هکله

دلته به هڅه وکړو چي د سیټ او د سیټ دمساوی بوج د مفهومو تجرد په ښه کړو. ددي دپاره چي نوموړې مفهومونه مو ښه درک کړي وي، نو لازمه ده چي ځني شیان هېر کړو.

د تېري رسالي د ځېړنو څخه استنباط کېږي چي د $(0,1)$ خلاص انتروال بوج تر $\langle 0,1\rangle$ تړلي انتروال تر بوج کوچنئ یا مساوي دي، او دغه بوج بیا د $(-1,2)$ د انتروال تر بوج کوچنئ یا مساوي دي. او هغه بیا د $(0,1)$ د انتروال د بوج سره مساوي دي، پدی معنی:

$$|(0,1)|\leqq|\langle 0,1\rangle|\leqq|(-1,2)|=|(0,\ 1)|$$

ددي انتظار درلودلای سو چي د $(0,1)$ د انتروال بوج د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال د بوج سره مساوي دي. پدی معنی چي د $(0,1)$ څخه پر $\langle 0,1\rangle$ باندی ساده مپینګ وجود لري او برعکس هم حقیقت لري. خو دا عجیبه نده ؟

د ځلرم فصل د ځېړنو په نتیجه کي استنباط کېږي چي د $\langle 0,1\rangle$ او د $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ د سطحي انتروال هم مساوي بوج لري. حتی د حقیقی عددو محور R او د R×R سطحه مساوي بوج لري. په لمړې نظر بی معنی برېښي . تر هغه وخته چي کانټورخپل نظریات معرفي کوله، تر شلم قرن پوري ریاضي پوهانو ته هم همداسي بی معنی برېښیدله .

هڅه به وکو چي د موضوع پراصلی علت باندی رڼا واچوو. ولی د سیټ د تیوري نتېجې (چي په واقعیت کي به يې ثابت هم کړو) زموږ د تصور سره مخالف دي. آیا غلطی د سیټ د تیوری په نتېجو کي ده او که زموږ په تصور کي؟ ممکن په تصور کي غلطي وي.

کله چي د $\langle 0,1\rangle$ د انټروال تصور کوو ، نو خامخا د کرښې پر مخ د قطعه خط او یا دحقیقی عددو، چي د لوی والي له مخې سره ترتیب سوي وی، تصور کوو.پدي معنی چي نه یوازي د $\langle 0,1\rangle$ بلکه د هغه د ساختمان مو هم سترګو ته ودریږي. علاوه پر هغه د سیټ په اړوند مشخصات هم راسره مل وي. کله چي مو غوښتل د $\langle 0,1\rangle$ د انټروال د بوج مساوي والی د $\langle 0,2\rangle$ د انټروال د بوج سره ثبوت کو، نو پرډغو سیټو د «ساختمان » څخه مو کار واخیستي–د بیلګي په توګه د ضرب څخه. زموږ د لټون تابع f د $x\in\langle 0,1\rangle$ دپاره $f(x)=2x$ وه.

د $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ په سطحه کی د انټروال تصور مربع ده ، چي دوه بعده لري حال داچي د $\langle 0,1\rangle$ قطعه خط یو بعد لري. دنوموړو سیټو سره زموږ په تصور کي اوتومات د هغو ساختمان هم مل دي. د غه ساختمانونه ځني معین خصوصیات هم منعکس کوي:لکه د ساختمان ترتیب یې په اصل کي یورنګه یا یکنواخت monotone مپینګ دي. متمادی مپینګ یې د توپولوژیکي ساختنمان جواب ورکونکئ دي.، او داسي نور. ددغه معلوماتو تر تاثیر لاندي هڅه کوو چي داسي مپینګ پیدا کړو چي دهغه ساختمان جواب ورکونکئ وي. کله کله د خپلو تصوراتو پر خلاف ، د بیلګي په ډول متمادی مپینګ لټوو، که څه هم داسي مپینګ معمولاً وجود نلري.

بیلګه 1.2. د 6.5.2 د بیلګي پر اساس د $\langle 0,1\rangle$ انټروال څخه پر $(0,1)$ انټروال باندي متمادی مپینګ وجود نلري. و به ښیو چي د $(0,1)$ انټروال څخه پر $\langle 0,1\rangle$ باندي متمادی باجکټیف مپینګ وجود نلري. په غیر مستقیم ډول یې ثابتوو.فرضوو چي $f:(0,1)\xrightarrow[on]{1-1}\langle 0,1\rangle$ متمادی مپینګ دي. بیانو د $a,b\in(0,1)$ عددونه داسي وجود لري ، چي $f(b)=1, f(a)=0$ دی. بیله دي چي عمومیت مو نقض کړي وي ، فرضوو چي $a<b$ دي. پدی معنی ، چي $0<a<b<1$ دی. د $f\left(\frac{a}{2}\right)$ عدد د $\langle 0,1\rangle$ په انټروال کي دی.، پدي معنی ، چي $f(a)=0\leqq f\left(\frac{a}{2}\right)\leqq f(b)=1$ دی. د بلزانو د قضیې2.5.2 پراساس د$c\in$ $\langle 0,1\rangle$ داسي وجود لري ، چي $f(c)=f\left(\frac{a}{2}\right)$ دي ، خو دغه حالت زموږ فرضیه، چي د f مپینګ ساده دي، را نقضوي. ■

تمرین 1.2. وښیاست چي د $f:A\longrightarrow B$ متمادی، بایجکټیف مپینګ وجود نلری، پداسي حال کي چي $A\neq B$ ، B,A یو دلاندنیو سیټ څخه دی: $\langle 0,1\rangle,\langle 0,1),(0,1\rangle,(0,1)$.

بیلګه 2.2. وبه ښیو چي د $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ پر $\langle 0,1\rangle$ متمادي بایجکشن وجود نلري. وبه ښیو چي حتی د $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ د سیټ څخه د $\langle 0,1\rangle$ په سیټ کي متمادي انجکشن وجود نلري. بیا به هم مسئله د استدلال د تناقض په طریقه ثابت کړو. فرضوو چي د $f:\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\xrightarrow{1-1}\langle 0,1\rangle$ متمادی د انجکشن مپینګ وجود لري. $a=f([0, 0])$, $b=f([1, 1])$ سره ایږدو. د

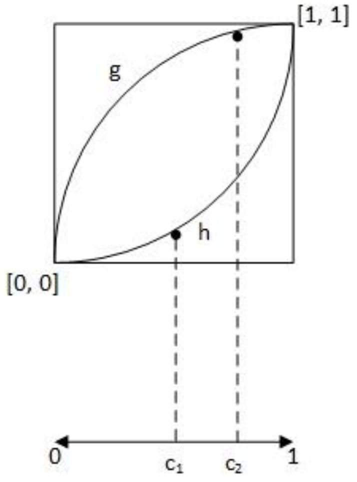
$$h,g:\langle 0,1\rangle\longrightarrow\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$$

متمادي مپینګونه چي د لاندنیو فورمولو پذریعه تعریف سوي دي ، په نظر کي نیسو(7.3 شکل وګورئ).

$$h(x)=[x, x^2]$$

$$g(x)=[x,\sqrt{x}]$$

بيا نو $(h\circ f)(1)=(g\circ f)(1)=b, (h\circ f)(0)=(g\circ f)(0)=a$ دی. څرنګه چې $g\circ f, h\circ f$ متمادی مپینګونه دي ، نو د بلزانو د قضیې 2.5.2 له مخې د $(0, 1)$ $c_1,c_2\in$ داسي عددونه وجود لري ، چې $(h\circ f)(c_1)=(g\circ f)(c_2)=\frac{a+b}{2}$ دي. پدی معنی چې $f(h(c_1))=f(g(c_2))$ کیږي.



شکل 7.3

خو دا نتیجه هغه واقعیت چی د f مپینګ ساده مپینګ دی ، نقض کوي. ځکه نو $h(c_1)\neq g(c_2)$ دی.

■

دلته مودوه پنده واخیسته: اول داچي که غواړو چي $(0, 1)$ او $\langle 0,1\rangle$ د سیټو په صفت وڅیړو، نو باید د هغوی تر ساختمان او جوړښت تېرسو او هغوی ته باید د ګُل په صفت وګورو، د هغه مشخصه داده چي څه شي په هغه کي شامل دی او څه شي په هغه کي ندی شامل. دغه ډول تعامل په ریاضي کي معمول دي. د بېلګې په ډول د کټه ګورۍ Category په تیوری کي د دوو کټه ګوریو ترمنځ مپینګ چي د فنکټور (functor) په نامه یادیږي، هېرجن فنکټورونه (forgetful functor) همداسی تعامل کوي. پدی معنی چي دغه ډول مپینګ د ګروپ (یا ساختمان) په مقابل کي یو سیټ په داسي ډول ابږدي چي د هغوی د اصلی جوړښت څخه صرفنظر کوي «هېروی یې» .

دوهم پند دادی : که غواړو چي د $(0, 1)$ پر $\langle 0,1\rangle$ باندی بایجکشن و موندو ، نو باید د متمادیت څخه تېر سو. پدی معنی چي باید د غیر متمادی بایجکشن په لټه کي سو. دا وظیفه به راتلونکي رسالی ته پریږدو.

نور تمرینونه

2.2. وښیاست چي ، د N د سیټ څخه د Z په سیټ کي نه ښوئیدونکئ (غیر متنازل) مپینګ وجود نلری.

3.2. وښیاست چي، د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی متمادی مپینګ وجود نلري، په داسي حال کي :

$$a)\ A=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle \qquad B=(0,1)\times\langle 0,1\rangle;$$
$$b)A=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle \qquad B=\{[x,y]\in R^2; x^2+y^2<1\};$$
$$c)A=(0,1)\times(0,1) \qquad B=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle.$$

4.2. دخلکو ګروپ یا ټولنه (انجمن) په نظرکي نېسو، د بېلګي په ډول دافغانستان اوسیدونکي ، هغوی په مختلفو ټولنو کي سره راټول سوي دي.

a) کیدای سي چي دوی ټولني عین غړي ولري؟

b) د ټولنی او دهغي د غړو د سیټ ترمنځ تفاوت څه شي دي؟

c) د b) په برخه کي مو باید څه شي «هېر» کړي وای؟

3.3. د پور لایتناهي پروسه

پدی رساله کي به بېله کاره د پیسو د لاسته راوړلو کړنلاره معرفی کړم ږ منتهی دغه کړنلاره یوه عملي نیمګړتیا لري ، هغه داچي په لایتناهي پوری تړلئ دی. خو د مفکوری څخه د سیټو د بوج په اړوند کار اخلو.

د پور اخیستلو یو پرنسیپ په لاندی ډول دی:

پور اخیستونکئ P د S_0 صراف څخه x_0 افغاني پوروی او په هغه پیسو چړچي کوي. کله چي صراف S_0 د خپلو پیسو غوښتونکئ سي ، نو P د S_1 صراف څخه د $x_1 \geqq x_0$ افغاني پوروی، د S_0 پور بیرته ورکوی او په پاتی پیسو ، یعنی $x_1 - x_0$ بیا چړچي کوی. همدا ډول دغه کارته دوام ورکوی. د S_{n+1} صراف څخه $x_{n+1} \geqq x_n$ افغاني پوروی ،په x_n افغاني دS_n صراف پور اداء کوي او په $x_{n+1} - x_n$ بیا چړچي کوی. په دغه ډول دغه کار ته تر «لایتناهي» پوری دوام ورکوی. ددی پروسی عملی اړخ دلته نه څېړو ، ځکه چي بلاخره خبره تر پولیسو او محکمی پوری رسېږي. خو هڅه کوو چی ددغي مفکوری څخه په تېرورسالو کي د طرح سوی پرابلم د حل دپاره ګټه واخلو.

بېلګه 1.3. د تېري رسالي د پندونو او د پور اخېستونکي P د کړنلاري څخه په استفاده سره هڅه کوو چي د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال څخه د (0, 1) پر انتروال باندی د بایجکشن مپینګ ترسیم کړو. د تېری رسالي د نتیجو پر بنسټ دغه ډول بایجکشن به متمادي نه وي. د $\langle 0,1\rangle$ او د (0, 1) په منځ کي یوازي دونه توپیر دی چي د $\langle 0,1\rangle$ انتروال په اصطلاح یوازي یو عنصرتر (0, 1) تر انتروال «اضافه» لری او هغه هم د یو عدد دی چي موږ به یې د «ورکیدو» په هڅه کي یو.

موږ به خپل مپینګ پداسی ډول ترسیم کړو چي د یوه عدد به نیغ د $\frac{1}{2}$ په مقابل کي کښېږدو.د

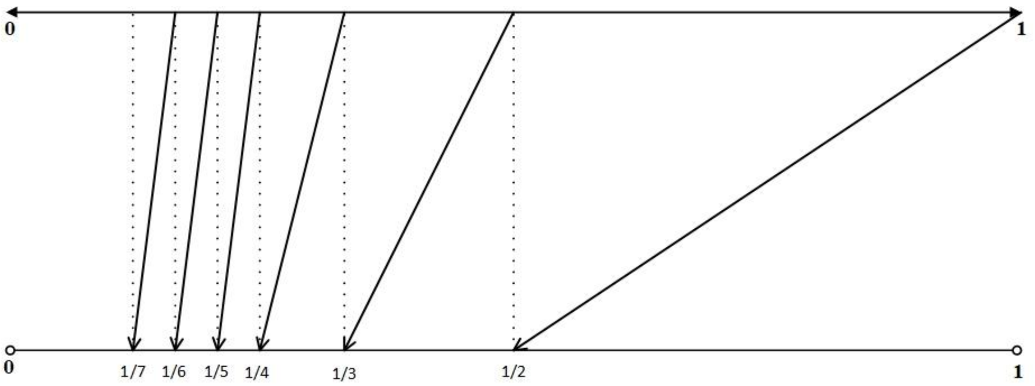
$\langle 0,1\rangle$ په انتروال کي $\frac{1}{2}$ هم سته ، خو هغه به د $\frac{1}{3}$ په مقابل کي کښېږدو، او داسي نور . پدی معنی چي زموږ مپینګ به داسي و ښودل سي:

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}$ پداسي حال کي چي n=1,2,...

$f(x)=x\ ;\ x\in(0,\ 1\rangle \quad ,\ x\neq\frac{1}{n},\ n=1,2,\ \ldots$

په پاس ډول تعریف سوي مپینګ بایجکشن دي ،څرګنده ده چي دغه مپینګ متمادي ندي.

■



شکل 8.3

تمرين 1.3. د لاندنیو سیټو څخه د هرو دوو سیټو په منځ کي بایجکشن مپینګ تعریف کي.

$\langle 0,1\rangle\ ,\ (0,1)\ ,\ \langle 0,1)\ ,\ (0,1\rangle$

اوس به نو داسي ادعا ثابته کړو چي عمومي بڼه ولري. ددی ادعا اساسی مفکوره په لاندني کومکي ادعا کي نغښتی ده.

ليما 1.3. فرضوو چي f او g مپینګونه دي، $f{:}A\longrightarrow B$ ، $g{:}\ B\longrightarrow A$ او د f مپینګ ساده دی.د B_2,B_1,A_2,A_1 سیټونه داسي وجود لري ، چي د هغو دپاره لاندني اړیکي صدق کوي:

$$A_1\cap A_2=\varnothing,\qquad B_1\cap B_2=\varnothing\qquad (3.1)$$

$$A_1\cup A_2=A,\qquad B_1\cup B_2=B\qquad (3.2)$$

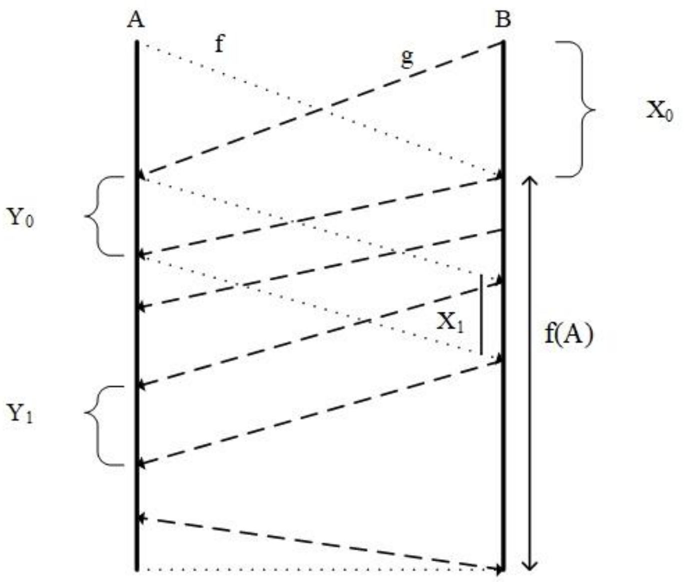
$$f(A_1)=B_1,\qquad g(B_2)=A_2\qquad (3.3)$$

ثبوت: که د f مپینګ د A د سیټ څخه د B پرسیټ وای ، نو کافی وه چي $B_1=B,\ A_1=A$ او $A_2=B_2=\varnothing$ ابښي وای. دلته بیا د «پور اخیستلو» د مفکوری څخه کار اخلو او فرضوو چي «پورونکي» خالی لاس نه راځي یعنی د $X_0=B-f(A)$ سیټ خالی ندی. د هغه د اداء کولو په موخه د $Y_0=g(X_0)$ سیټ پورو. پدی صورت کی نوی «پور» $X_1=f(Y_0)$ پیدا کیږی ، چي هغه بیا د بل «پور» $Y_1=g(X_1)$ په ذریعه اداء کوو. په عمومي بڼه :

$$X_n = f(Y_{n-1}) \qquad (3.4)$$

$$Y_n = g(X_n) \qquad (3.5)$$

سره ایږدو(د 9.3 شکل وګورئ).



شکل 9.3

اوس به نو:

$$A_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$$

$$A_1 = A - A_2$$

$$B_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

$$B_1 = B - B_2$$

په نښه کړو.

ځرګنده ده چي (3.1) او (3.2) اړیکي صدق کوي. و به ښیو چي (3.3) اړیکه هم صدق کوي.دهغه د ثبوت دپاره کافی ده چي د سب سیټونو ځلوراړیکي $a)\ f(A_1) \subseteq B_1$, $b)\ f(A_1) \supseteq B_1$, $c)\ g(B_2) \subseteq A_2$ او $d)\ g(B_2) \supseteq A_2$ په ثبوت ورسوو:

a) فرضوو چي $x \in A_1$ او $y=f(x)$ دی. که $y \notin B_1$ نه وای ، نو بیا به داسی $n \in N$ وجود درلودلای چي $y \in X_n$ ، ځرنګه چي $y \in f(A_1) \subseteq f(A)$ دی، نو $n>0$ دی. د (3.4) اړیکي پر بنسټ داسی $z \in Y_{n-1}$ وجود لری چي $y=f(z)$ دي. وګوری چي $y=f(x)$ او $x \in A_1$, $y=f(z)$ او $z \in A_2$, لاسته راغلل ، پدی معنی چي موږ ددوو عنصرو دپاره یو تصویر پیداکړي. خو دغه حالت د f د تابع د ساده والي د فرضیي ضد دي.

b) فرضوو چي $y\in B_1$ دی. البته $H(f)=f(A)=B-X_0\supseteq B_1$ دی. ځکه نو $x\in A$ داسي وجود لري چي $y=f(x)$ دي. که x د A_1 د سيټ عنصر نه وای يعنی $x\notin A_1$ ، نو $x\in A_2$ وای، پدي معنی چي د کم يو n د پاره به $x\in Y_n$ وي. د (3.4) پر اساس $y=f(x)\in X_{n+1}\subseteq B_2$ دي. خو دغه حالت نا ممکنه دي. ځکه نو $x\in A_1$ او $y=f(x)\in f(A_1)$ دي.

c) فرضوو چي $x\in g(B_2)$ دي. بيانو داسي $n\in N$ او $y\in X_n$ به وجود ولري چي $x=g(y)$ وي. د (3.5) پر اساس صدق کوی چي $x\in Y_n\subseteq A_2$ دي.

d) برعکس که $x\in A_2$ وي ،نو داسي n به وجود ولري چي $x\in Y_n$ دي. د (3.5) پر بنسټ داسي $y\in X_n$ وجود ولري چي $x=g(y)$ دي . بيانو $x\in g(X_n)\subseteq g(B_2)$ دي.

q.e.d.

تمرين 2.3. (د جدی لوستونکي دپاره!).د B_2,B_1,A_2,A_1 د سيټو موجوديت د مجازو پرنسيبو پر اساس نه دي ثابت سوي . د 2.2.4 د قضيې پر اساس د معرفي سوي ساختمان په صحت باندي ځان ډاډمن کي.

قضيه 1.3. (د کانټور – برنشتاين قضيه). فرضوو چي A او B سيټونه دي. که $|A|\leqq|B|$ او $|B|\leqq|A|$ صدق وکي ،نو $|A|=|B|$ دي.

ثبوت . فرضوو چي د قضيې فرضيه صدق کوي ، يعنی $|A|\leqq|B|$ او $|B|\leqq|A|$ دي. بيانو د $f:A\longrightarrow B$ او $g: B\longrightarrow A$ مپينګونه وجودلري. د (3.1) ليما پر بنسټ د B_2,B_1,A_2,A_1 سيټونه د (3.3)−(3.1) خصوصياتو سره وجود لري. د (3.3) پر اساس $g|B_2 : B_2 \xrightarrow[\text{پر}]{1-1} A_2$ دي.پدی معنی چي د $g|B_2$ معکوس مپينګ $\psi : A_2 \longrightarrow B_2$ هم وجود لري . د $h : A \longrightarrow B$ مپينګ داسي تعريفوو:

$$h(x)=f(x) \quad \text{که} \quad x\in A_1$$

$$h(x)=\psi(x) \quad \text{که} \quad x\in A-A_1=A_2$$

ثابتوو چي د h مپينګ د A د سيټ څخه د B پر سيټ باندي ساده مپينګ دي. لمړئ لاندنئ مساوات اسانه شمېر لای سو:

$$h(A)=h(A_1\cup A_2)=h(A_1)\cup h(A_2)=f(A_1)\cup\psi(A_2)=B_1\cup B_2=B$$

فرضوو چي $x_1\neq x_2,\ x_1,x_2\in A$ دي. اوس نو څلور امکانه وجود لري:

$x_1,x_2\in A_1$.1 ، $x_1,x_2\in A_2$ .2 ، $x_1\in A_1,\ x_2\in A_2$ .3 او $x_2\in A_1,\ x_1\in A_2$ .4. څرنګه چي د f او ψ مپينګونه ساده مپينګونه دي ، نو په لمړيو دوو حالتو کي $h(x_1)\neq h(x_2)$ دي. په دريم او څلرم حالت کي د $h(x_1),h(x_2)$ د عنصرو څخه يو په B_1 او بل يې په B_2 اړه لري ، پدي معنی چي په خپل منځ کي مختلف دي. ددي ځايه نتيجه اخيستل کيږي چي د h مپينګ ساده مپينګ دي.

بېلګه 2.3. a) د 2.1 بېلګي د نتيجي ، د 1.1 تمرين ، 1.3 قضيې او لاندني اړيکي :

$$(0, 1)\subseteq<0, 1)\subseteq<0, 1>\subseteq R$$

پر اساس د هر $a<b,\ a,b\in R$ دپاره :

$$|(0, 1)|=|<0, 1)|=|<0, 1>|=|R|=|(a, b)|=|<a, b>|$$

صدق کوي.

b) واضح ده چي $\{0,1\}^N \subseteq \{0,1,2\}^N$ دي. د Φ ساده مپينګ د $\{0,1,2\}^N$ د سيټ څخه د $\{0,1\}^N$ په سيټ کي داسي تعريفوو:

$$\Phi(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}) = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

پداسي حال کي چي:

$b_{2n}=0$	که	$a_n=0$ يا 2 وي.
$b_{2n}=1$	که	$a_n=1$ وي.
$b_{2n+1}=0$	که	$a_n=0$ يا 1 وي.
$b_{2n+1}=1$	که	$a_n=2$ وي.

ځکه نو $|\{0,1\}^N| \leqq |\{0,1,2\}^N|$ او د 1.3 قضيې پر اساس دواړه سيټونه مساوی بوج لري.

■

تمرينونه 3.3. a) آيا د $\{0,1\}^N$ د سيټ څخه د $\{0,1,2\}^N$ پر سيټ باندی د بايجکشن مپينګ جوړولای سي ؟

b) د $\{0,1\}^N$ د سيټ څخه د $\{0,1,2,3\}^N$ پر سيټ باندی د بايجکشن مپينګ ترسيم کړئ .

د سيټونو د بوج په منځ کي د غير مساواتود تېره اړيکی څېړنه مو په ناڅاپي ډول تر اوسه نه وه ځنډولی . تر تېری قضيې پوری د تېره غير مساوات په هکله هيڅ هم نسو ثابتولای.

قضيه 2.3. فرضو چي C,B,A سيټونه ، $|A|\leqq|B|$ او $|B|<|C|$ (يا $|A|<|B|$ او $|B|\leqq|C|$) دی. بيا نو $|A|<|C|$ (وايو چي د A د سيټ بوج د C د سيټ تر بوج کوچنۍ دی) دی.

ثبوت: د $|A|\leqq|C|$ غير مساوات د 1.3b) د تمرين په استناد صدق کوي. که $|A|=|C|$ وای ، نو بيا به $|A|\leqq|C|$ اوبيا به $|C|\leqq|B|$ هم وای. د 1.3 قضيې پر اساس به $|C|=|B|$ وای. مګر داحالت د قضيې د فرضيې مخالف دی. q.e.d

بېله دي چي پدي پوه سو ، چي د سيټ «بوج » څه شئ دي ، تر اوسه مو د «دوو سيټو د مساوی بوج» او يا «د يوه سيټ بوج دبل سيټ تر بوج کوچنۍ دی» اړيکي څېړلي . د هغه پوهېدو ته تر اوسه ضرورت نه ؤ او په آينده کي به هم ضرورت ورته پېدا نسی. په ځينو خصوصي حالتو کي به بل ډول کړنلاره غوره کړو. خو په هغو حالتو کي به دمساوی بوج مفهوم او نورمفهومونه بل ډول اراء سوی او هغوی ته بل ډول لنډوني يا مخفف غوره سويدي. له دی وروسته به د سيټ بوج د حروفو په ذريعه په نښه کوو، د بېلګي په توګه $\beta, \alpha, \aleph_0, m, n$ او داسی نور . خو تل به مخفف اراء کوي.

بېلګه 3.3. زموږ په راتلونکي ترمينولوژي کي به 2.3 قضيه په داسي ډول فورمولبندی سي:

فرضوو چي γ,β,α داسې بوجونه دی چي $\beta<\gamma,\alpha\leqq\beta$ دی، بیا نو $\alpha<\gamma$ دی.

■

دغه ډول حالتونه په فلسفه کې دیوه مفهوم د تجرد په نامه یادېږي. «بوج» هغه څه دی چي د ټولو هغو سیټو دپاره چي مساوی بوج ولری مشترک دی. دبوج د مفهوم دقیق تعریف ته ضرورت نلرو. په ورځني ژوند کي د دغه ډول حالتو سره ډېر مخامخ کېږو. په مشکله به وواياست چي ښکلا څه شی ده، خو قضاوت کولای سی چي یو ګل ښایسته دی ، موسیقی ښایسته ده یا نجلی ښکلې ده. «ښکلا» هغه خصوصیت دی چي د ګل ، موسیقی او نجلی سره مشترک دی. که بیرته ریاضي ته راوګرځو ، نو زموږ پاملرنه به طبیعی عددو ته ورځرمه سي. موږ نه پوهېږو چي طبیعی عدد څه شي دی ، خو (لږ تر لږه په نسبی بڼه) پوهېږوچي د ټولو طبیعی عددو سیټ څه شئ دي.د ورته حالتوسره د نورو مفهومو په هکله هم مخامخ کېږو. ددغه ډول مفهومو ، لکه د سیټ بوج ، طبیعی عددو ، په هکله په مجرده توګه نه بلکه د حالاتو په اړوند قضاوت کولای سو .

نور تمرینونه

4.3. د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندي بایجکشن تعریف کړئ ، پداسي حال کی چي :

a) A په سطح کي د ټولو مستقیمو خطو سیټ دي ، $B=R^2$ ؛

b) $A=\{[x,y]\in R^2;\ x^2+y^2\leqq 1\}$ ، $B=\{[x,y]\in R^2;\ x^2+y^2<1\}$ ؛

c) $A=\{[x,y]\in R^2;\ 0<x^2+y^2\leqq 1\}$ ، $B=\{[x,y]\in R^2;\ x^2+y^2\leqq 1\}$ ؛

d) $A=\{[x,y]\in R^2;\ \frac{1}{2}\leqq x^2+y^2\leqq 1\}$ ، $B=\{[x,y]\in R^2;\ x^2+y^2\leqq 1\}$ ؛

5.3. د کانتور- برنشتاین د قضیې څخه په استفادي سره وښیاست چي د 5.1 تمرین د A او B دسیټو دپاره $|A|=|B|$ صدق کوي.(پدي معنی چي د هغوی بوج سره مساوي دي).

6.3. فرضوو چي $A\subseteq B$ او $f:B\xrightarrow{1-1}A$ دي. $A_0=A$, $B_0=B$ او $B_{n+1}=f(B_n)$, $A_{n+1}=f(A_n)$ سره ایږدو.

a) وښیاست چي $B_0\supseteq A_0\supseteq B_1\supseteq\ldots\supseteq B_n\supseteq A_n\supseteq B_{n+1}\supseteq\ldots$ دی.

b) دغه حالت د یوه شکل پذریعه داسي انځور کي چي د B_n سیټونه به مربع وي او A_n سیټونه به دایرې وي.

c) فرضوو چي د g مپینګ د لاندني اصل پر اساس تعریف سوی دی :

$g(x)=f(x)$ د $x\in\bigcup_{n=0}^{\infty}(B_n-A_n)$ دپاره

$g(x)=x$ د پاته $x\in B$ دپاره

وښیاست چي $g:B\xrightarrow[\text{پر}]{1-1}A$ مپینګ دی.

d) که د f مپینګ د A پر سیټ وي ، نو ثابت کئ چي g=f دی.

7.3. د 6.3 د تمرین د نتیجو څخه په استفادی سره د کانتور-برنشتاین د قضیې نوی ثبوت راوړئ.

4.3 کم سیټ متناهي دی

د متناهی سیټ مفهوم به تعریف او دهغه ځني بنسټیز خاصیتونه به وڅیړو.

د A سیټ د متناهی سیټ په نامه یادوو که |A|<|N| وي. که سیټ متناهي نه وي ، نو هغه د نا متناهی (لایتناهی) سیټ په نامه یادوو.

بېلګه 1.4. د ∅ ,{1}, {1,2} سیټونه متناهي دي ، خو د R, Q, Z, N سیټونه لاتناهي سیټونه دي. ■

که n طبیعی عددوی ، نو :

$$N_n=\{k\in N; \quad k<n\} \qquad (4.1)$$

په نښه کوو. په آساني سره لیدل کېږي چي د n>0 دپاره |{1,2, … ,n}|=|N_n| دی. البته $N_0=\emptyset$ دی. وایو چي د A سیټ د n عنصرو درلودونکی دی (خاوند دی)، |A|=n سره یې لیکو ، که |A|=|N_n| وي.

پاسنئ تعریف زموږ د هغه تصور سره چي سیټ n عنصرونه لری، مطابقت کوي. ددی رسالی اساسي نتیجه هغه ادعا ده چي وایې: یو سیټ یوازی او یوازی هغه وخت متناهی دی، که د کوم n∈N دپاره n عنصرونه ولري. فرضوو چي د غه ادعا هم د متناهي په هکله زموږ د تصور سره مطابقت کوي.

ددی ادعا د ثبوت دپاره ځني مرستندیونتیجو ته ضرورت لرو.

بېلګه 2.4. دهر طبیعی عدد n دپاره د N_n سیټ متناهي دي. په حقیقت کي د 1.4 بېلګي پر اساس :

$$|N_n|<|N_{n+1}|$$

صدق کوي. د بلی خوا $N_{n+1}\subseteq N$ دی، څکه نو |N_{n+1}|≦|N| دی. د 2.3 قضیې پر اساس |N_n|<|N| دی. ■

تمرین 1.4. a) که $f : N_n \longrightarrow N$ وي، نو k∈N داسي وجود لري ، چي د هر $m\in N_n$ دپاره k>f(m) دی. د ریاضی د استقراء په ذریعه یې ثابت کی.

b) د a) په استفاده وښیاست چي د N_n څخه پر N باندي مپینګ وجود نلری، پدی معنی چي د N_n سیټ متناهي دی.

لیما 1.4. که A⊆N د پاس له خوا محدود سیټ وي.نو داسي n وجود لري ، چي |A|=n دی.

ثبوت: د $\mathcal{V}(m)$ په ذریعه لاندنئ بیان په نښه کوو: دهر $A\subseteq N_m$ سیټ دپاره داسي $n\in N$ وجود لري، چي $|A|=n$ دی.

که دا ثابته کو ، چي د هر m دپاره د $\mathcal{V}(m)$ بیان صدق کوی ، نو ویلای سو چي د لیما ادعا هم صدق کوي. د صفر دپاره د $\mathcal{V}(0)$ بیان په بدیهي بڼه صدق کوي. ځکه چي که $A\subseteq N_0=\emptyset$ وی ، نو $A=\emptyset$ او $|A|=0$ دي.

فرضوو چي د $\mathcal{V}(m)$ بیان صدق کوي او $A\subseteq N_{m+1}$ دي. اوس نو دوه امکانات لرو:

a) $m\notin A$ وي، بیا نو $A\subseteq N_m$ دي او نظر د استقراء و فرضیې ته $\mathcal{V}(m)$ صدق کوي، پدي معنی چي داسي n وجود لري،چي $|A|=n$ دي.

b) که $m\in A$ وي. دغه حالت باید پر دوو برخو وویشو:

1. د هر $l<m$ دپاره $l\in A$ دي ، بیانو $A=N_{m+1}$ او ځرګنده ده چي $|A|=m+1$.

2. $l<m$ داسي وجود لري ، چي $l\notin A$.د $B=(A-\{m\})\cup\{l\}$ سیټ ملاحظه کوو. د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندي، لوستونکئ په آساني سره د بایجکشن مپینګ تعریفولای سي. پدي معنی چي $|A|=|B|$ دي. د بله پلوه $B\subseteq N_m$ او د استقراء د فرضیې پر اساس داسي n وجود لري ، چي $|B|=n$ دي . پدی حساب $|A|=n$ کیږي. q.e.d

اوس نو کولای سو چي د وعدي سره سم هغه قضیه فورمولبندي او ثابته کو.

قضیه 1.4. د A سیټ یوازی او یوازي هغه وخت متناهي دي، چي داسي طبیعی عدد n و جود ولري ، چي $|A|=n$ وي.

ثبوت: که د A د سیټ بوج n وي ، پدي معنی چي دهغه بوج د N_n د سیټ د بوج سره مساوي دي. ځکه نو د 2.4. بېلګي د نتېجي پر اساس د A سیټ متناهي دي.

د معکوس استنباط ثبوت مغلق دي. فرضوو چي د A سیټ متناهي دي، یعنی $|A|<|N|$. بیانو د $f:A\xrightarrow{1-1}N$ مپینګ وجود لري. ددي مپینګ د قیمتو ساحه به $B=H(f)$ سره په نښه کو. ځکه نو $f:A\xrightarrow[\text{پر}]{1-1}B$ دي. پدي معنی چي $B\subseteq N$ او $|A|=|B|$ دي. ددي ځایه استنباط کیږي چي د B سیټ هم متناهي سیټ دي.د 8.2.2 بېلګي د نتېجي پر اساس د طبیعی عددو سیټ B د پاس له خوا محدوده ده. د 1.4 لیما په استناد د n طبیعی عدد داسي وجود لري ، چي $|B|=n$ دي. ددی ځایه ویلای سو چي $|A|=n$ دي. q.e.d.

ومو موندل چي طبیعی عددونه په حقیقت کي د متناهي سیټو بوج دي. ودی واقعیت ته به وروسته بیا راوګرځو. اوس به دلته یوه «کنډ او کپره» همواره کړو.د $n<m$ غیر مساوات په دوو مختلفو ډولو سره تعبیرولای سو. یو دا چي (په صحیح ډول) د دوو طبیعی عددو تر منځ د غیر مساوات په صفت درک کړو او بل داچي د $|N_n|<|N_m|$ د ځرګندوني په صفت درک کړو. د مساوات په هکله هم ورته استدلال کولای سو. اوس به وښیو چي دواړه تعبیرونه یو دبل سره معادل دي. موږ د دواړو تعبیرو څخه د یوه د ټاکني اختیار لرو.

قضیه 2.4. فرضوو چي m,n طبیعی عددونه دي. $n<m$ (د طبیعی عددو د ترتیب په مفهوم)دي، یوازي او یوازي هغه وخت چي د N_n بوج د N_m تر بوج کوچنۍ وي. همدغه ډول ادعا د مساوات په هکله هم صدق کوي.

ثبوت: لمړۍ به

که $n<m$ وي، نو $|N_n|<|N_m|$ دي .....(4.2)

استنباط ثابت کو.

که $n<m$ وي، نو د c2.1.1) د تمرین له مخي $n+1\leqq m$ دي. د 2.4 بېلګي پر اساس

$$|N_n|<|N_{n+1}|\leqq|N_m|$$

صدق کوي. زموږ ادعا د 3.2 قضیې څخه استنباط کېږي.

معکوسه ادعا به په غیر مستقیم ډول ثابته کړو. که $n<m$ نه وي ، نو یا $n=m$ سره دي او یا $n>m$ دي. که $n=m$ سره وي ، نو څرګنده ده چي $|N_n|=|N_m|$ سره به وي ، خو دغه زموږ د فرضیې پر خلاف ده، یعنی $|N_n|<|N_m|$ حقیقت نلري.

همدا ډول د $n>m$ په حالت کي د 4.2 پر اساس $|N_m|<|N_n|$ دي.

د مساوات دپاره ثبوت مشابه دی.

q.e.d

په 1.1 رساله کي مو د اقلیدس د اساساتو د یوی اکسیومي یادونه وکړه . هغه عبارت وه له : «جزء تر کُل کوچنۍ دي» . سیټونه ددی اکسیومي سره ټکر خوري. په تېروبرخو کي مود سیټو بېلګي راوړي ، سر بېره پردي چي د بل سیټ جزء ؤ ، خو د هغه سیټ سره یې مساوي بوج درلودي. د بېلګي په ډول R او (0, 1) .و به یې ښیو چي دغه خاصیت و لایتناهي سیټو ته منسوبیدلای سي. ځکه نو ویلای سو چي د اقلیدس اکسیومه د متناهي سیټو په اړوند صدق کوي. دا دهغه څه سره سمون کوي ، چي په هغه وخت کي د یونان ریاضي یوازي د متناهي شیانو سره کار کاوه.

قضیه 3.4. که X متناهي سیټ وي، $A\neq X, A\subseteq X$ ، نو $|A|<|X|$ دي.

ثبوت: قضیه به د تناقض په طریقه ثابته کړو. فرضوو چي $A\neq X, A\subseteq X$ داسي وجود لري چي $|A|<|X|$ حقیقت نلري. څرنګه چي $|A|\leqq|X|$ باید وي ، نو باید $|A|=|X|$ وي. د 4.1 قضیې پر اساس $n\in N$ داسي وجود لري ، چي $|X|=n$ دي. د $X-A$ سیټ خالي ندي. فرضوو چي $a\in X-A$ دي. بیا نو $A\cup\{a\}\subseteq X$ دي. تر هغه ځایه چي $|A|=|X|=n$ دي ، خو $|A\cup\{a\}|=n+1$ دي او دا هم زموږ د فرضیې سره تناقض دي.

هر هغه سیټ چي په 3.4 قضیه کي ذکر سوي خاصیت ولري (پدي معنی چي هر د هغه خپل سب سیټ کوچنۍ بوج ولري) د ډېډکیند په مفهوم د متناهي سیټ په نامه یادیږي. پدي معنی چي هر متناهي سیټ د ډېډکیند په مفهوم متناهي سیټ دي. د ذکر سوي ادعا د برعکس د ثبوت دپاره د سیټ د تیوري نوی اکسیومي ته ضرورت لرو چي هغه به بیا په 3.5 رساله کي وڅېړو.

د بوج د مقایسی دپاره به دوه نو ر معیارونه هم راوړو ، چی اکثراً کار ورڅخه اخیستل کیږي.

قضیه 4.4. فرضوو چي A داسی متناهي سیټ دي چي خالي نه وي. B اختیاري سیټ دي. $|A|\leqq|B|$ یوازي او یوازي هغه وخت صدق کوي، چي د $f : B \twoheadrightarrow A$ سرجکشن وجود ولري.

ثبوت: فرضوو چي $|A|\leqq|B|$ صدق کوي، بیانو د $g : A \xrightarrow{1-1} B$ انجکشن وجود لري.
$C=H(g)\subseteq B$ سره په نښه کوو. څرګنده ده چي $g^{-1} : C \xrightarrow{1-1} A$ وجود لري. څرنګه چي د A سیټ خالي ندي ، نو $a\in A$ وجود لري.

د $f : B \twoheadrightarrow A$ مپینګ په لاندي ډول تعریفوو:

$f(x)=g^{-1}(x)$ د $x\in C$ دپاره

$f(x)=a$ د $x\in B-C$ دپاره

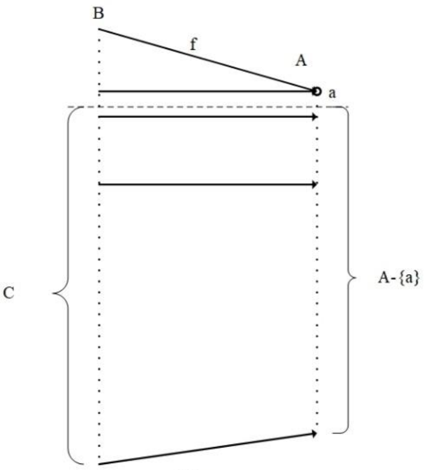
د $\mathcal{V}(n)$ بیان وایي :

که $|A|=n$ او $f : B \twoheadrightarrow A$ وي، نو $|A|\leqq|B|$ دي.

د $\mathcal{V}(n)$ بیان د ریاضي د استقراء په طریقه ثابتوو.

که $n=0$ او $f : B \twoheadrightarrow A$ وي، نو $B=\emptyset$ وي او زموږ ادعا په بدیهی ډول صدق کوي.

فرضوو چي $\mathcal{V}(n)$ صدق کوي ، فرضوو چي $|A|=n+1$ ، $f : B \twoheadrightarrow A$ دي. څرنګه چي $|A|=n+1>0$ ، نو $A\neq\emptyset$ دي. فرضوو چي $a\in A$ دي. $C=\{x\in B;\ f(x)\neq a\}$ په نښه کوو . څرګنده ده چي $C\subseteq B$ دي او $b\in B-C$ وجود لري. علاوه پر دی $f\,|\,C : C \twoheadrightarrow A-\{a\}$ دي(3.10 شکل وګوري).د استقراء د فرضیي پر اساس $|A-\{a\}|\leqq|C|$ کیږي، پدی معنی چي د $h : A-\{a\} \xrightarrow{1-1} C$ انجکشن وجود لري. که $h(a)=b$ سره تعریف کړو ، نو $h : A \xrightarrow{1-1} B$ زموږ د غوښتني مپینګ دي. q.e.d



شکل 10.3

نتیجه. که $f : A \twoheadrightarrow B$ وي، د A سیټ متناهي وی، نو د B سیټ هم متناهي دي او $|B|\leqq|A|$ دي.

تمرين. پورتني نتيجه ثبوت کي.

د قضيې د ثبوت په لمړي برخه کي مو د A د سيټ د متناهي والي و فرضيې ته مو ضرورت نه درلودي. ځکه نو دغه برخه د هر اختياري سيټ دپاره صدق کوي. خو د ثبوت په دوهمه برخه کي چي د سرجکشن د مپينګ د موجوديت په نتيجه کي په معکوس مسير کي د انجکشن دمپينګ د موجو ديت دپاره د A د سيټ متناهي والي يو اساسي شرط ؤ. د قضيې ثبوت د اختياري سيټ دپاره ، لکه مخکی چی مو يادونه وکړه ، د سيټ د تيورۍ نوي اکسيومي ته ضرورت لرو.

بېلګه 3.4. ستاسو پاملرنه و .2.2.2 بېلګي ته راګرځوو. و مو ښودل چي د 8 مردکو په منځ کي سپکه مردکه د دوو تللو په نتيجه کي لاسته راوړلای سو. موږ ادعا کوو چي دغه بهترين حل دي، پدي معنی چي د يو ځل تللو په نتيجه حتمي نده چي سپکه مردکه لاسته راسي . په رشتيا هم که په يو ځل تللو سره د سپکي مردکي د موندلو وای ، نو د 2.2.2 په بېلګه کي و جدول ته ورته جدول بايد وجود ولري، پدي معنی چي د ممکنو نتيجو د سيټ څخه د مردکو پر سيټ {1,2, ..., 8}باندي بايد مپينګ وجود ولري b6.2.2) بېلګه ورسره پرتله کي). مګر د د تللو ممکني نتيجي تر درو : =,>,< زيات ندي . د 4.4 قضيې پر اساس دغه ډول مپينګ وجود نلري. ■

تمرين 3.4. د 10 مردکو په منځ کي ، چي په ليدلو ټوله مساوي برېښي ، يوه سپکه مردکه، لږ تر لږه د څو تللو په ذريعه موندلای سو؟

نور تمرينونه

4.4. فرضوو چي X متناهي سيټ دي. وښياست چي لاندي ادعاوي صدق کوي:

a) که $f : X \xrightarrow{\text{ر}} X$ وي، نو د f مپينګ ساده مپينګ دي.

b) که $f : X \xrightarrow{1-1} X$ وي، نو د f مپينګ د X پر سيټ باندي دی.

5.4. فرضوو چي B,A متناهي سيټونه دي. وښياست چي لاندني ادعاوي صدق کوي:

a) $A\cup B$ متناهي سيټ دي.

b) که $X\subseteq A$ وي، نو د X سيټ متناهي دی.

c) $A\times B$ متناهي سيټ دی.

6.4. ثابت کي چي د ټولو اوليه عددو سيټ لايتناهي سيټ دي.

7.4. د a5.4) د تمرين د نتيجي څخه په استفاده سره د رياضي د استقراء په طريقه ثابت کي چي د متناهي سيټو ، د متناهي شمېر يو والي ، متناهي سيټ دي.

8.4. د رياضي د استقراء په طريقه ثابت کي چي ، که A متناهي سيټ وي، نو $\mathscr{P}(A)$ هم متناهي سيټ دي.

5.3 د اعظمي حد اصل (پرنسيپ) (Principle of maximum)

پدي رساله کي به د متناهي نيمګړي ترتيب سوي(partially ordered) سيټو يو مهم خاصيت ثابت کو. ددغه خاصيت څخه د رياضي په مختلفو څانګو کي په پراخ ډول کار اخيستل کيږي. هڅه به وکو، چي دهغه څخه د کار اخيستلو مختلف ځايونه وښيو. په پای کي به ستاسو پاملرنه ددي قضيې اصلي قوت راوګرځوو.

قضيه 1.5.(د اعظمی حد اصل).د هرغير خالي متناهي نيمګړی ترتيب سوي سيټ ، سب سيټ لوی ترين او کوچنۍ ترين عنصر لري.

ثبوت : فرضوو چي $X, \leqq$ نيمګړي ترتيب سوی سيټ دي. د $\mathcal{V}(n)$ بيان داسي په نښه کوو «$n=0$ دي او يا $n>0$ دي او د X د سيټ هر n عنصر لرونکۍ سب سيټ ، اعظمی عنصر لري».

$\mathcal{V}(0)$ او $\mathcal{V}(1)$ په بديهي بڼه صدق کوي.فرضوو چي د $n\geqq 1$ دپاره $\mathcal{V}(n)$صدق کوي او $A\subseteq X$ ، $|A|=n+1$. وبه ښيو چي د A سيټ اعظمی عنصر لري.

څرنګه چي $|A|>0$ دی، نو $a\in A$ وجود لري. $B=A-\{a\}$ په نښه کوو. د B سيټ n عنصرونه لري ، پدي معنی چي $|B|=n$ دي. د استقراء د فرضيې له مخي د B سيټ اعظمی عنصر لري او هغه په b سره ښيو.

که $b<a$ وي ، نو a د A د سيټ اعظمی عنصر دي. که $b\not< a$ وي ، نو b د A د سيټ اعظمی عنصر دي. q.e.d

بېلګه 1.5. درقص په کلب کي معين (متناهي) شمېر د هلکانو او نجونو جوړه يي رقص کوي. پدی پوهيږو چي هرهلک د يوي نجلی سره رقصيدلۍ دی اوهري نجلی د يوه هلک سره رقصيدلي ده. هيڅ يو هلک د ټولو نجونو او هيڅ نجلی د ټولو هلکانو سره ندي رقصيدلي . غواړو چي وښيو ، چي ددوی په منځ کي دوه هلکان h_2,h_1 او دوي نجونې n_2,n_1 داسي موندلای سو ، چي :

الف) h_i د n_i ، $i=1,2$ سره رقصيدلي دي.د هغوی څخه هر يو د يوي نجلی سره رقصيدلۍ دي.

ب) h_1 د n_2 سره او h_2 د n_1 سره ندی رقصيدلي. اول هلک د دوهمي نجلی او دوهم هلک د اولی نجلی سره ندی رقصيدلی.

ددی مسئلی (دا مسئله په 1964 کال کي د مجارستان د رياضي په مسابقاتو طرح سوی وه) د حل دپاره ډيري لاري وجود لري ، خو د حل ساده ترينه لار يي په لاندي ډول ده:

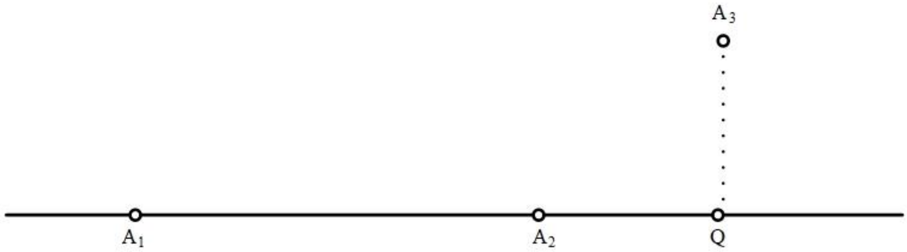
د هلکانو سيټ M نيمګړی داسي ترتيبوو، چي $a<b$ دی، که د نجونو شمېر چي هلک a ورسره رقصيدلۍ دی ، د نجونو ترهغه شمېر چي د b هلک ورسره رقصيدلۍ دي، کوچنۍ دي. د اعظمی حد د اصل پر بنسټ د M سيټ لوی ترين عنصر ، $h_1\in M$ ، لري. د مسئلي د فرضيې پر اساس داسي نجلی n_2 وجود لری ، چي د h_1 سره يي رقص ندی کړۍ. خو n_2 د کم هلک h_2 سره رقص کړيدی. څرنګه چي h_1 د M د سيټ لوی ترين حد دي، نو د هغو نجونو شمېر چی h_2 ورسره رقصيدلۍ دي تر هغو نجونو تر شمېر چی h_1 ورسره رقصيدلی دی ، ډير ندي. خو h_2 د n_2 سره رقصيدلی دي ، پداسي حال کي چي h_1 د n_2 سره نده رقيصدلی. ځکه نوداسي نجلی n_1 وجودلري، چي د h_1 سره يې رقص کړيدي، خو د h_2 سره نده رقصيدلي. ■

بېلګه 2.5. د 1.3 قضيې په مرسته د سلويستر Sylvester فرضيه ثابتوو:فرضوو چې X په سطحه کې د نقطو غير خالي ، متناهي سيټ دي.که د راکړه سوي سطحې هيڅ مستقيم خط پوره دوې نقطې د X د سيټ په ځان کې ونلري، نو د X ټولې نقطې به پر يوه خط باندی پرتې وي.

پورتني ساده ادعا انګليسی رياضی پوه جيمز يوسف سلويستر James Joseph Sylvester(1814-1897) په 1893 کال کې فورمولبندي کړه. ددی ادعا ساده ثبوت په 1936 کال کې د مجارستان رياضي پوه تيبور ګالایTibor Gallai معرفی کې.

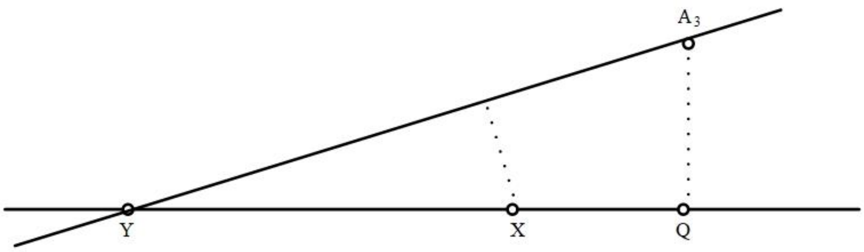
څرګنده ده چې د X سيټ يوازی دوی نقطې نسي درلودلای. که يو عنصر ولري ، نو ادعا په بديهي بڼه صدق کوي. فرضوو چې دX سيټ لږترلږه دری نقطې لری چې هغوی دری سره پر يوه خط (کرښه) ندي پراته. فرضوو چې $\mathscr{D}$ د ټولو هغو مرتبو دريئېزو $[A_1,A_2,A_3]\in X^3$ سيټ دي چې د هغوی څخه د A_3 نقطه د $A_1 \neq A_2$, A_1A_2 پر خط باندي نده پرته. د فرضيې پر اساس د $\mathscr{D}$ سيټ خالي ندی. د $\mathscr{D}$ سيټ متناهي دي ، ځکه چې اضافه تر $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ عنصرونه نلري ، په هغه صورت کې چې $|X|=n$ وي(دغه حقيقت د ځلرم فصل د نتيجو څخه استنباط کيږي) . د $\mathscr{D}$ سيټ نيمګړي ترتيب سويده ، پدی معنی چې $[A_1,A_2,A_3]<[B_1,B_2,B_3]$ دي ، که د B_3 فاصله د B_1B_2 د خط څخه د A_3 تر فاصلی د A_1A_2 د خط څخه زياته وي.

د اعظمی حد د اصل له مخې کوچنيترين عنصر $[A_1,A_2,A_3]\in \mathscr{D}$ وجودلري. د فرضيې له مخې د A_1A_2 خط د X د سيټ دوه عنصره نه احتواء کوي. ځکه نو د $B\in X$ داسې وجود لری ، چې د A_1A_2 پر خط پرته ده او $B\neq A_1$, $B\neq A_2$ ده. فرضو چې Q د A_3 د نقطی څخه د A_1A_2 پر خط باندی د عمود پنده ده (پدی معنی چې د Q نقطه د A_3 د نقطی څخه د A_1A_2 پر خط د عمود خط د تقاطع نقطه ده. د 11.3 شکل وګورئ) .



شکل 11.3

د Q نقطه د A_1A_2 خط پر دوو نيمه خطو وېشي. لږ تر لږ ه پر يوه د هغو دوو نيمه خطوباندې د A_2, A_1 B د نقطو دريئېزه څخه دوی نقطې پرتې دي. هغه نقطې په Y, X سره په نښه کوو. فرضوو چې د X نقطه د Q و نقطی ته نژدې ده(12.3 شکل وګورئ). بيا نو د [Y, A_3, X] دريئېزه د $\mathscr{D}$ په سيټ کی ده او د Xدنقطی فاصله د YA_3 د خط څخه نظر د A_3Q و خط ته لږ ده. يعنی د A_3 د نقطی څخه د A_1A_2 و خط ته . خو دغه حالت د $[A_1,A_2,A_3]$ د نقطی د کوچنيترين والي سره په تضاد کې دی.



شکل 12.3

تمرین 1.5. د سلویستر و فرضیې ته غبرګه (dual) ادعا ثابته کي:که د $p_1, p_2, \dots, p_n$ مستقیمو خطو په منځ کي ، پداسي ډول چي ټوله خطونه په یوه سطحه کي پراته وي، داسي دري خطونه وجود ولري چي هغوي په یوه نقطه کي یودبله سره قطع نه کړي، بیانو داسي نقطه په نوموړي سطحه کي وجود لري ، چي د $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ د سیټ فقط دوه خطونه تر تېرېږي.

تمرین 2.5. د اعظمي حد د اصل په مرسته د لاندني ادعا نوی ثبوت و موندی«که یو سیټ n عنصرونه ولري، نو هغه سیټ متناهي دي».

بېلګه 3.5. که د $X, \leqq$ سیټ ګڼ ترتیب سوی سیټ وي،نو د X سیټ لایتناهي دي.د ګڼ ترتیب سوي سیټ د تعریف له مخي (7.2 رساله وګورئ) د $y, x \in X$ دوه عنصره داسي وجود لري چي $x<y$ دي. که د X سیټ متناهي وای، نو د $\{z \in X; z<y\}$ سیټ به اعظمي عنصر $z_0<y$ درلودلای.په نتیجه کي د y او z_0 د عنصرو ترمنځ به د X د سیټ هیڅ عنصر وجود نه درلودلای. وروستئ دلیل د X د سیټ د ګڼ ترتیب پر خلاف دي. ■

ضمیمه – د متناهي بل تعریف

د متناهی سیټ تعریف کیدای سي په ډېرو ډولو فورمولبندي سي. موږ دلته هغه قوی ترینه طریقه وټاکله . بله طریقه ، لکه څرنګه چي یادونه مو کړېده ، د متناهي والي د ددکیند په مفهوم دي. د اعظمی حد پر اصل د متناهي سټ تعریف الفرید تارسکي Alfred Tarski (1901-1983) فورمولبندي کي. وایو چي د A سیټ د تارسکي پر اساس متناهي دی، که د نیمګړی ترتیب سوی سیټ $\mathscr{P}(A), \subseteq$ هر غیر خالي سب سیټ اعظمی عنصر ولري. وبه ښیو چي دغه تعریف زموږ د تعریف معادل دي.

قضیه 2.5. فرضو چي A سیټ دي. لاندني شرطونه یو دبل سره معادل دي:

الف) د A سیټ متناهي دي، پدي معنی چي $|A|<|N|$

ب)په هر غیر خالي نیمګړي ترتیب سوی سیټ $X, \leqq$, $|X| \leqq |\mathscr{P}(A)|$ کي اعظمی عنصر وجود لري ؛

ج) د A سیټ د تارسکي د تعریف پراساس متناهي دي.

ثبوت : د ب) څخه د ج) استنباط بدیهي دي.ځکه چی د $\mathscr{P}(A), \subseteq$ سیټ نیمګړی ترتیب سوی سیټ دي او د ج) د جزء شرطونه پر ځای کوي.پدی معنی چي ج)⟵ ب) .

د الف) څخه د ب) استنباط به د رياضي د استقراء په طريقه، ثبوت کوو.لاندنی بيان په نظر کي نيسو: که $|A|=n$ وي ، نو په هر نيمګړي ترتيب سوي سيټ $X, \leqq$, $|X|\leqq|\mathscr{P}(A)|$ کي اعظمی عنصر وجود لري.

که $n=0$ وي ، نو $\mathscr{P}(A)=\{\emptyset\}$ دي ، پدي معنی چي د X سيټ يوازي يو عنصر لري او هغه يي اعظمی عنصر دي. فرضوو چي استنباط د n دپاره صدق کوي . $|A|=n+1$ او د X نيمګړی ترتيب سوی سيټ داسي په نظر کي نيسو چي $|X|\leqq|\mathscr{P}(A)|$ وی. ځکه نو د $f:X \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ ساده مپينګ وجود لري. فرضوو چي $a\in A$ ثابت عنصر دي. د X_1 او X_2 سيټونه په لاندی ډول په نښه کوو:

$$X_1=\{x\in X \; ; a\in f(x)\}, \qquad X_2=\{x\in X; a\notin f(x)\}$$

ښکاره ده چي $X_1 \cup X_2=X$, $X_1\cap X_2=\emptyset$ دي.

ښکاره ده چي $f|X_2:X_2 \xrightarrow{1-1} \mathscr{P}(A-\{a\})$ دي. د بلي خوا د $g(x)=f(x)-\{a\}$ مپينګ د هر $x\in X_1$ دپاره د X_1 څخه په $\mathscr{P}(A-\{a\})$ کي د انجکشن مپينګ دي. د استقراء د فرضيې پر بنسټ د X_2 په سيټ کي اعظمی عنصر x وجود لري. اوس به نو د x ارتباط زموږ د عمومي سيټ X په اړوند وڅيړو.که x د X په سيټ کي اعظمی عنصر نه وي، نو بايد د X په سيټ کي $y>x$ وجود ولري. y خامخا په X_1 اړه لري (ولي ؟).فرضوو چي $Y=\{z\in X_1 \; ; z\geqq y\}$ دي. بيانو:

$|Y|\leqq|X_1|\leqq|\mathscr{P}(A-\{a\})|$ دي. د استقراء د فرضيي له مخي د Y په سيټ کي د z اعظمی عنصر وجودلري. البته د z عنصر د X_1 په سيټ کي هم اعظمی دي. اوس به وښيو چي د z عنصر د X په سيټ کي هم اعظمی عنصر دي. که داسي نه وای ، نو د $u>z$ دپاره به $u\in X_2$ وي. خو :

$u>z\geqq y>x$ دهغه حقيقت سره چي x د X_2 په سيټ کي اعظمي عنصر دي ، په تضاد کي دي.پدی ډول زموږ ادعا ثابته سوه.

په پای کي به د ج) څخه الف) استنباط کو. بياهم خپل ثبوت د تضاد په طريقه سرته رسوو. فرضوو چي ج) صدق کوي او الف) صدق نه کوي.

$$\mathscr{A}=\{X\subseteq A \; ;\ \text{د } X \text{ سيټ متناهي دي}\} \qquad (5.1)$$

په نښه کوو.ښکاره ده چي $\emptyset\in\mathscr{A}$ ده، يعنی $\mathscr{A}$ سيټ د $\mathscr{P}(A)$ غير خالي سب سيټ دي. د ج) پر اساس اعظمی عنصر $X\in\mathscr{A}$ وجود لري. نظر و (5.1) ته د X سيټ متناهي دي. د A سيټ متناهي ندي (ځکه چي الف) مو نفي کړيدی) ، ځکه نو $A\neq X$ دي. فرضوو چي $a\in A-X$ دي. پدی صورت کي $X\cup\{a\}\subseteq A$ دي. خو دغه حالت د X د سيټ د اعظمی عنصر په ځبر ، سره په تضاد کي دی.

q.e.d.

6.3. د شمېر وړ countable سیټونه

پدی رساله کي د لایتناهي سیټو په ساده صنف بندی یا کلاسیفیکیشن Classification باندي بپل کوو . دهغو سیټو خاصیتونه چي د هغوی بوج کوچنۍ یا مساوی د طبیعی عددو د سیټ د بوج سره وي ، څېړو. په ضمیمه کي به د «د شمېر وړ سیټ» د خاصیتو څخه د استفادی ځانګړي ځایونه اشاره وکو.

وایو چي د A سیټ د شمېر وړ countable دي ، که $|A| \leqq |N|$ وي، پدی معنی هغه وخت چي د A د سیټ څخه د طبیعی عددو په سیټ کي ساده مپینګ وجود ولري. هغه سیټ چي د شمېر وړ نه وی ، د بې شمېره Uncountable سیټ په نامه یې یادوو. د تعریف څخه سمدستي استنباط کېږي ، چي هر متناهي سیټ د شمېر وړ سیټ دي. د ټولو طبیعی عددو سیټ N د شمېر وړ دي ، خو متناهي ندي.

البته د شمېر وړد سیټ هر سب سیټ بیا هم د شمېر وړ دي . پدی معنی چي د طبیعی عددو هر سب سیټ د شمېر وړ دي.

د طبیعی عددو د سیټ بوج په $\aleph_0$ سره ښیو. نوموړۍ عدد «الف صفر» ویل کېږي. $\aleph$ د عبراني ژبي د الفباء لمړۍ حرف دي. اوس بیا په هغه حالت کي یو چي د N بوج یعنی څه؟ او هغه بیا په $\aleph_0$ سره ښیو. د بېلګي په ډول د $|A|<\aleph_0$ لیکنه پدي معنی ده چي $|A|<|N|$ ده ؛او یا $n \leqq \aleph_0$ د $|N_n| \leqq |N|$ مفهوم افاده کوي.

د ډېرو مشخصو سیټو په هکله به څرګنده کو ، چي د شمېر وړ دي، او ددغه حقیقت څخه به ډېر ځله ښه ګټه واخلو. په مستقیم ډول هغه ډول مپینګ چي په تعریف کي زموږ څخه غوښتل کېږي نسو ترسیمولای. خو د هغه د ترسیم دپاره د یو لړ نوي مفهومو او قضیو څخه به کار واخلو.

وایو چي د A سیټ په لاړ کي اچول کېږي(په لاړ ییبل کېږي) که د $f : N \xrightarrow{\text{د}} A$ مپینګ وجود ولري. دغه مفهوم کاملاً طبیعی دی، ځکه چي د N پر سیټ مو د f مپینګ د لاړ په نامه یادکړۍ ؤ، او غواړو چي دA سیټ ددغه لاړ د غړو څخه عبارت وي. په ځلرمه رساله کي د (5.4. قضیي و نتیجي ته ورته) لاندني قضیه صدق کوي.

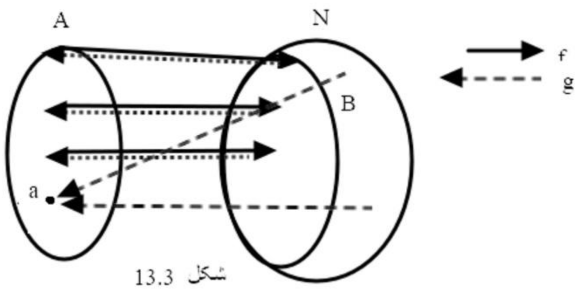
قضیه 1.6. غیر خالي سیټ یوازي او یوازي هغه وخت د شمېر وړ دي ، چي په لاړ کي واچول سي.

ثبوت : فرضوو چي د A سیټ غیر خالي سیټ دي. فرضوو چي د A سیټ د شمېر وړ دي. پدی معنی چي د $f : A \xrightarrow{1-1} N$ ساده مپینګ وجود لري. فرضوو چي $B=\mathbf{H}(f)\subseteq N$ دي. پدي حالت کي د f مپینګ د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندي د بایجکشن مپینګ دي. ځکه نو معکوس مپینګ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ هم وجود لري. څرنګه چي د A سیټ غیر خالي سیټ دي، نو د $a \in A$ عنصر وجود لري.د $g : N \xrightarrow{\text{د}} A$ مپینګ داسي ترسیموو(13.3 شکل وګورئ):

$g(n)=f^{-1}(n)$ د $n \in B$ دپاره

$g(n)=a$ د $n \in N-B$ دپاره

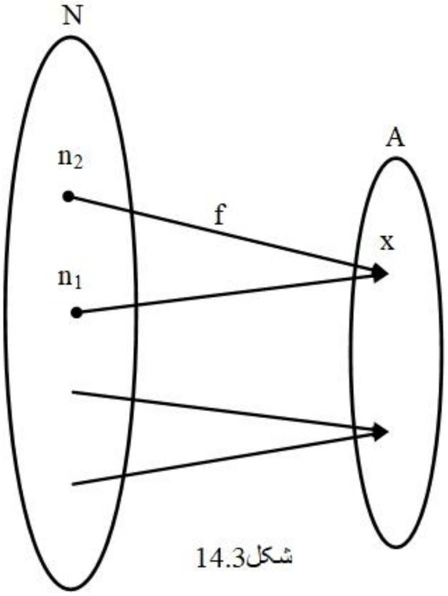
البته د g مپینګ مطلوب خاصیتونه لري.



13.3 شکل

اوس نو برعکس د A سیټ په لاړ کی اچول کیږي . پدی معنی چي د $f:N\xrightarrow{\text{ر}}A$ مپینگ وجود لري. د A د سیټ د هر عنصر $x\in A$ دپاره داسي $n\in N$ وجود لري چي $f(n)=x$ دي.کیدای سي چي ډیر n وجود ولري، خو موږ یوازي یوه ته ضرورت لرو (د 14.3 شکل وګورئ) ، چي هغه باید یو ډول وټاکو. دلته د طبیعی عددو د ترتیب څخه استفاده کوو او هغه کوچنئ ترین عدد n ټاکو.په عملی ډول سره داسي مخ ته ځو :

$$C=\{n\in N;\ (\forall k<n)f(k)\neq f(n)\} \qquad (6.1)$$



14.3شکل

د $h=f\,|\,C:C\longrightarrow A$ مپینګ په نظر کي نیسو. البته د h مپینګ ساده مپینګ دي. یقیناً ، که فرضاً $n_1,n_2\in C\ ;\ n_1\neq n_2$ وي ، نو د بېلګي په توګه $n_1<n_2$ وي. څرنګه چي$n_2\in C$ دي. د (6.1) اړیکي پر اساس $h(n_1)=f(n_1)\neq f(n_2)=h(n_2)$ صدق کوي. که $x\in A$ وي، بیانو n داسي وجود لري، چي $f(n)=x$ سره کیږي، ځکه چي د f مپینګ سرجکشن دي. فرضوو چيn کوچنئ ترین دغه ډول عدد دي. پدی معنی د $k<n$ دپاره $f(k)\neq x$ دي. ددی ځایه استنباط کیږي ، چي $n\in C$ او $x=h(n)$ دي. ځکه نو :

$$h:C\xrightarrow[1-1]{\text{ر}}A$$

پدی لحاظ معکوس مپینګ $h^{-1}:A\xrightarrow{1-1}C\subseteq N$ وجود لري. پدی معنی چي د A سیټ د شمېر وړ دي.

نتیجه.که د A د سیټ څخه د B پر سیټ د سرجکشن مپینګ f وجود ولري او د A سیټ د شمېر وړوي ، نو د B سیټ هم د شمېر وړ دي.

بېلګه 1.6. د $\langle 0,1\rangle \cap Q$ سیټ د شمېر وړ دي.ځکه چي دغه سیټ په اسانۍ سره په لاړ پېیلای سو .

$$0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\ldots,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ \ldots,\frac{n}{n},\ldots$$

پاملرنه وکئ ، چي د $\langle 0,1\rangle \cap Q$ د سیټ څخه د N په سیټ کي د ساده مپینګ موندل یو ډېر پېچلئ پرابلم دي. ویې آزمویه! ■

بېلګه 2.6. د Z سیټ د شمېر وړ دي. ځکه چي هغه د f په لاړ کي پېیلای سو:

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots, n, -n, \ldots$

د f لاړ د لاندني فورمول په ذریعه راکړه سوي دي:

$$f(n)=(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

د N×N څخه په N ساده مپینګ د جوړه کونکي Paired تابع په نامه یادوو.

قضیه 2.6. جوړه کونکئ تابع وجود لري.

ثبوت: دلته به څو بېلګې د جوړه کونکو تابع ګانو راوړو.

الف) د f ډېره ساده تابع د لاندني فورمول پذریعه تعریفولای سو:

$$f(m,n)=2^m.(2n+1)-1$$

لوستونکئ په اساني سره خپل باور پدی هکله، چي f د N×N څخه پر N باندی بایجکشن دی ، حاصلولای سي.

ب) د g مپینګ چي د لاندني فورمول پذریعه تعریف سوی دي ، په شکل کي ښه څرګند یدلای سي:

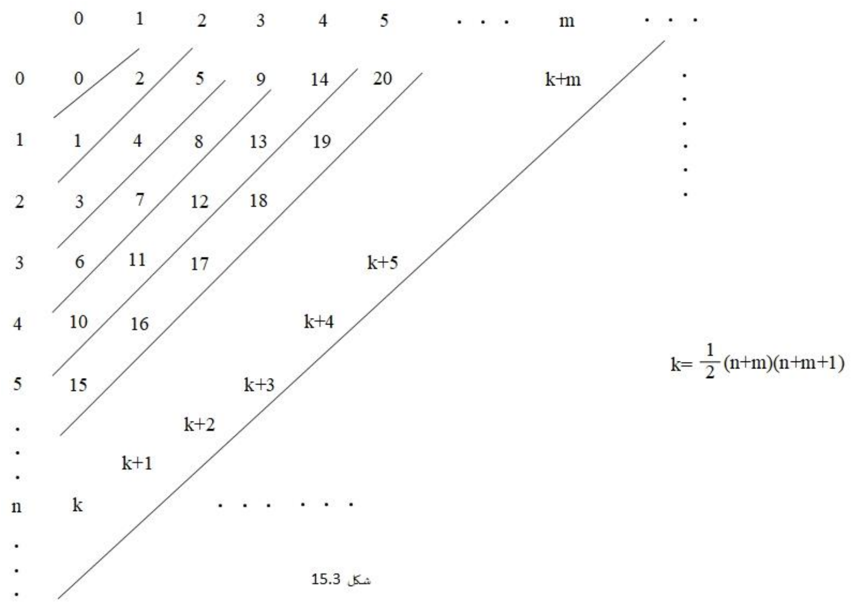
$$g(n,m)=\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$$

(15.3 شکل وګورئ).

لمړئ د [n, m] جوړي شمېرو، د هغوي n+m په ترتیب سره په 2, 1,0 ,... مساوي کېږي. په هغه صورت کي چي د m+n حاصل مساوي وي (د بېلګې په ډول 3+1 او 1+3) ، نو هغوی نظر د m و تزاید ته شمېرو. د [n, m] جوړې ، چي دجمع حاصل یې n+m=k کېږي، پوره k+1 داني دي او هغه عبارت دي له:[k, 0], [k−1. 1], ..., [0, k] . پدی معنی چي د [n, m] تر جوړي ټولې هغه[p, q] جوړي دمخه دي ، چي p+q<n+m او هغه چي p+q=n+m دي ، خو q<m دی. ځکه نو دهغوی شمېر :

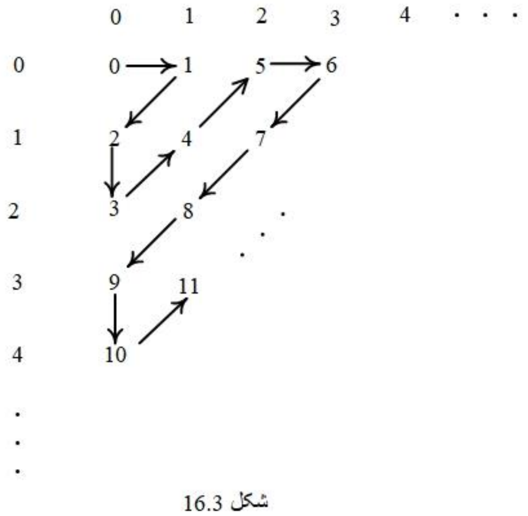
$$1+2+\ldots+(n+m)+m=\frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)+m$$

دي.



شكل 15.3

ج) د رياضي د تاريخ له مخي لمړئ ميپنگ چي د کانتور پذريعه په 1895 ترسيم سو (په حقيقت كي كانتورنه غوښتل چي د طبيعی عددوجوړې په لاړ وپيېي ، بلكه مثبت ناطق عددونه په لاړ و پيېي .) ، په 16.3 شكل كي ښودل سوي دي.



شكل 16.3

د) وروسته به د لاندنې جوړه كونكې تابع (17.3 شكل وگورئ) سره مخامخ سو. لوستونكئ په آساني سره په ټولو بېلگو كي د جوړه كونكې تابع خاصيتونه آزمويلای سي.

q.e.d.

	0	1	2	3	. . .	n	. . .
0	0	1	4	9	. . .	n^2	. . .
1	2	3	5	10	. . .	n^2+1	. . .
2	6	7	8	11	. . .	n^2+2	. . .
3	12	13	14	15	. . .	n^2+3	. . .
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
n	n^2+n	n^2+n+1		. . .		n^2+2n	

شکل 17.3

نتیجه . $|N\times N|=\aleph_0$

قضیه 6.3. د دوو د شمېر وړ سیټو اتحاد او کارتېزین ضرب ، د شمېر وړ سیټونه دي.

ثبوت: فرضوو چي د A او B سیټونه د شمېر وړسیټونه دي. که د هغو څخه یو سیټ د بیلګي په ډول A خالي وي، نو ادعا په بدیهي شکل صدق کوي. ځکه چي A∪B=B او A×B=∅ دي. ځکه نو فرضوو چي د A او B سیټونه خالي ندي. د 1.6 قضیې پر اساس هغوي په لاړ پیبلای سو. پدی معنی چي د $f:N\longrightarrow A$, $g:N\longrightarrow B$ د سرجکشن مپینګونه وجود لري. د A∪B سیټ پدي ډول په لاړ پیبو :

$$f(0),g(0),f(1),g(1), \ldots , f(n),g(n), \ldots,$$

په مشخص ډول :

$$h(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$$ که n جفت وي

$$h(n)=g\left(\frac{n-1}{2}\right)$$ که n طاق وي

ایږدو. څرګنده ده چي $h:N\longrightarrow A\cup B$ دي (د بېلګي په ډول که x∈A وي ، نو داسي n وجود لري چي f(n)=x دي ، ددی ځایه h(2n)=x کېږي) .

د کارتیزین ضرب په صورت کي به بل ډول مخ ته ځو. دهغه ځایه چي د A او B سیټونه د شمېر وړ دي ، نو د $\psi:B\xrightarrow{1-1}N$, $\varphi:A\xrightarrow{1-1}N$ د انجکشن مپینګونه وجود لري . فرضوو چي $\xi:N\times N\longrightarrow N$ جوړه کونکي تابع ده. د j مپینګ چي د $j([a,b])=\xi(\varphi(a),\psi(b))$ په ذریعه تعریف سوی دي، البته د A×B څخه په N کي د انجکشن مپینګ دي.

q.e.d.

تمرین 1.6. الف) د j د مپینګ د انجکشن په خاصیت ځانونه په جزئیاتو سره متیقین کې.

ب) وښیاست چې $j=(\varphi\otimes\psi)\circ\xi$ دي(20.2.2 تمرین وګورئ) او ددغه واقعیت څخه د الف) برخه استنباط کې.

بېلګه 3.6. د ناطقو عددو د تعریف څخه استنباط کېږي ، چې په لاندی ډول تعریف سوي مپینګ f :

$$f(z,n)=\frac{z}{n+1} \qquad \text{د } z\in Z\ ,\ n\in N \text{ دپاره}$$

د $Z\times N$ سیټ د Q پر سیټ ترسیموي. د 2.6 بېلګي او 3.6 قضیې پر اساس د $Z\times N$ سیټ د شمېر وړ دي. د 1.6 د قضیې د نتیجي په استناد د ناطقو عددو سیټ Q هم د شمېر وړ دي.

■

قضیه 4.6. د شمېر وړ سیټونو د شمېر وړ یووالي بیاهم د شمېر وړ سیټ دي.

ثبوت: لمړئ خو به قضیه په دقت سره فورمولبندی کړو. قضیه وایي: که $A=\bigcup_{t\in T}A_t$ ، د T سیټ د شمېر وړ وي او د هر $t\in T$ دپاره د A_t سیټ د شمېر وړ وي ، نو د A سیټ هم د شمېر وړ دي.

ښېله دي چې عمومیت مو نقض کړي وي ، فرضولای سو چې د $t\in T$ دپاره هرA_t سیټ غیر خالي دي. (که داسي نه وي ، نو د T سیټ د $T'=\{t\in T;\quad A_t\neq\varnothing\}$ سره تعویضوو).د هر $t\in T$ دپاره د N د سیټ څخه د A_t پر سیټ د f_t مپینګ وجود لري.همدا ډول د $g:N\longrightarrow T$ مپینګ وجود لري. د $h:N\longrightarrow A$ سرجکشن ترسیموو.

فرضوو چې η د جوړه کونکو تابع معکوسه تابع ده. پدي معنی چې η د N څخه پر $N\times N$ باندي مپینګ دي. فرضوو چې $\eta(n)=[k,l]$ دي. بیا نو $h(n)=f_{g(k)}(l)$ سره ابړدو.اوس به وښیو چې د h مپینګ د A پر سیټ باندي دي. فرضوو چې $x\in A$ دي.بیا نو $t\in T$ داسي وجود لري ، چې $x\in A_t$ دي. څرنګه چې $f_t:N\longrightarrow A_t$ دي ، نو داسي l وجود لري ، چې $f_t(l)=x$ کېږي. د هغه ځایه چې g د T پر سیټ سرجکشن دي، نو استنباط کېږي چې $k\in N$ داسي وجود لري ، چې $t=g(k)$ دي. بلاخره η سرجکشن دي، ځکه نو داسي n وجود لري چې $\eta(n)=[k,l]$ سره دي. بیانو:

$$h(n)=f_{g(k)}(l)=f_t(l)=x$$

q.e.d.

بېلګه 4.6. فرضوو چې $\mathbf{F}$ د طبیعی عددو ټولو متناهي لاړوسیټ دي. وبه ښیو چې د $\mathbf{F}$ سیټ د شمېر وړ سیټ دي.

فرضوو چې $\mathbf{F}_n={}^{N_n}N$ ، ځکه نو :

$$\mathbf{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n$$

اوس نو کفایت کوي ، ثابته یې کو چې هر $\mathbf{F}_n$ د شمېر وړ سیټ دي. دا کار به بیا د ریاضي په استقراء سره سرته رسوو. $\mathbf{F}_0=\{\emptyset\}$ د شمېر وړ سیټ دي. د استقراء په ذریعه په ساده ډول (د 5.2 رسالي ضمیمه وګورئ) لاندنئ مپینګ ترسیمولای سو:

$$\Phi_n : \mathbf{F}_n \xrightarrow[1-1]{\text{پر}} N^n$$

په حقیقت کي د $a \in {}^{N_1}N$ (پدي معنی ، چې a یو دانه یې لاړ دي) دپاره $\Phi_1(a) = a(0)$ سره ایږدو. بیانو : $\Phi_1 : {}^{N_1}N \xrightarrow[1-1]{\text{پر}} N = N^1$ دي.

اوس نو که $\Phi_n : {}^{N_n}N \xrightarrow[1-1]{\text{پر}} N^n$ ولرو (د استقراء فرضیه) ، بیانو Φ_{n+1} داسي تعریفوو:

د $a \in {}^{N_{n+1}}N$ دپاره $\Phi_{n+1}(a) = [\Phi_n(a\,|\,N_n),\ a(n)]$ سره ایږدو.

پدي لحاظ $|\mathbf{F}_n|=|N^n|$ دي. د 3.6 قضیې په مرسته د ریاضي د استقراء په طریقه په اساني سره ثابتولای سو ، چې د $n>0, n\in N$ دپاره $|N^n|=|N|$ دي. ځکه نو هر $\mathbf{F}_n$ د شمېر وړ سیټ دي.

■

تمرین 2.6. د $\mathbf{F}_n$ او N^n ترمنځ د تفاوت په هکله فکر وکړئ او د Φ_n د مپینګ وظیفه تشریح کي. د رسالي د ضمیمی د څارني سره یې پرتله کي.

بېلګه 5.6. فرضوو چې $\mathcal{K}$ د N د ټولو متناهي سب سیټو ، سیټ دي. و به ښیو چې د $\mathcal{K}$ سیټ د شمېر وړ دي. د $\Psi: \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{F}$ انجکشن پدي ډول تعریفوو: که $A\subseteq N$ وی ، د A سیټ متناهي دي، بیانو د کم $k\in N$ دپاره $|A|=k$ کیږي. د A د سیټ عنصرونه د غبتوالی پر اساس ترتیبوو:
$x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}$ ، پداسي حال کي چې $A=\{x_0,x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ دي. فرضوو چې $a \in {}^{N_k}N$ د $a(i)=x_i$ په ذریعه تعریف سوي دي. $\Psi(A)=a$ سره ایږدو. پدی معنی چې د A و سیټ ته متناهي لاړداسي تخصیصوو، چې د هغه لاړ i– یمه دانه ، نظر و غبتوالي ته ، د A د سیټ i– یم عنصر دي. البته د Ψ مپینګ انجکشن دي. ځکه نو :

$$|\mathcal{K}| \leqq |\mathbf{F}| \leqq \aleph_0$$

■

تمرین 3.6. د 5.6 بېلګې ادعا پداسي ډول ثابته کي چې د $\mathbf{F}$ څخه پر $\mathcal{K}$ مناسب سرجکشن مپینګ ترسیم کئ.

د 4.6 قضیې ثبوت د نورو ثبوتو څخه بېل ؤ . په هغه ثبوت کي مو بېله دي چې لوستونکئ هغه ته ځیر کړو ، د یاده سوي اکسیومي ، د ټاکني اکسیومه Axiom of Choice، څخه کار واخېستئ . اوس به یې درته وښیم چې چېري مو د ټاکنې د اکسیومي څخه کار واخیستي.

اکثراً دداسي حالت سره مخامخ کیږو،چې مونږ پوهیږو ، چې یو شئ د ځینو خصوصیاتو سره وجود لري او د هغو څخه یو را اخلو.د بېلګې په ډول پو هیږو چې د A سیټ غیر خالي دي ، پدي

معنی چي $(\exists x)x\in A$. وايو چي «فرضوو چي $a\in A$ دي» او پدي ډول خپلې څېړنې ته ادامه ورکوو.دغه ډول عمل غلط ندي.

د 4.6 قضيې په ثبوت کي وضع مغلقتره وه. موږ پوهېدلو چي هر د A_t سيټ په لاړ پيیلای سو. پدي معني چي:

$$(\forall t\in T)(\exists f)\ f: N \xrightarrow{\ } A_t$$

موږ يو مپينګ و نه ټاکي ، بلکه دهر $t\in T$ دپاره يو د f_t مپينګ وټاکي. په حقيقت کي مو مپينګ ترسيم کي چي دهر $t\in T$ دپاره يو د f_t مپينګ تعينوي. پدي معنی ، چي د $\{[t,f_t];\ t\in T\}$ سيټ مو ترسيم کي. ځو د سيټ د ترسيم په پروسه کي مو د مجازو پرنسيپو څخه کار وانه خيستي. په حقيقت کي مو د دغه ډول سيټ موجوديت ندي ثابت کړي. پدی معنی چي 4.6 قضيې ثبوت نيمګړي دي. د هغې د ثبوت دپاره د ټاکنې اکسيومه ضرور ده. پدي معنی ، چي د 4.6 قضيه د هغو پرنسيپو پر اساس چي په لمړي فصل کي مو يادونه وکړه ، نسي ثابتيدلای.

خو ځني مهم حالتونه وجود لري ، چي f_t مپينګ مجبوره نه يو چي «ويې ټاکو» ، بلکه د کم متمم شرط په وسيله يکړ (په يوه ستوي بڼه) تعيين کو.په هغو حالتو کي د 4.6 قضيه صدق کوي. هغه حالت عبارت دي د 5.6 بېلګي څخه. د هر n دپاره بايد د N په سيټ کي د F_n د انجکشن مپينګ «وټاکو». هغه پدي ډول سرته رسوو چي فرضوو $g_1:N\rightarrow N$ د تطابق مپينګ دي، $g_2:N\times N\rightarrow N$ د بېلګي په ډول د 2.6 قضيې د الف) د برخي په ثبوت کي دf جوړه کونکي تابع ده. د رياضي د استقراء په طريقه د:

$$g_{n+1}([x_1,\ \ldots\ , x_{n+1}])=f(g([x_1,\ \ldots\ , x_n]), x_{n+1})$$

مپينګ ترسيموو. د Φ_n مپينګ مو هم د استقراء په طريقه ترسيم کي . اوس نو که

$$f_n= \Phi_n\circ g_n$$

سره کښېږدو، نو مطلوب انجکشن مپينګ به لاسته راغلی وي. ځکه نو د 4.6 بېلګي ادعا د ټاکني د اکسيومي پرته (ماسيوا) صدق کوي.درياضي د استقراء په هکله مود 4.2.2. قضيې څخه کار واخيستی ، چي د خنډ د ايسته کيدو په برخه کي يې مرسته راسره وکړه.

ضميمه ـ د شمېر وړ خطي ترتيب سوي سيټونه.

دلته به د شمير وړ خطي ترتيب سوي سيټو په هکله دوي کلاسيکي قضيې چي د تېر قرن په سر کي فليکس هاوزدورف Felix Hausdorff (1869-1942) ثابتيې کړي، راوړو. دواړه قضيې اساساً د شمېر وړ سيټو د خاصيتو څخه استفاده کوي. د لمړۍ قضيې په ثبوت کي د لاړ د پيیلو په وخت کي دهغه حقيقت څخه چي «په هر قدم کي » يوازي متناهی ډيراسلاف لري، کار اخيستل سوی دي.

قضيه 5.6. د هر د شمېر وړ خطي ترتيب سوي سيټ $X, \preccurlyeq$ د پاره د ناطقو عددو سب سيټ $A\subseteq Q$ داسي وجود لري، چي $X, \preccurlyeq$ او $A, \leqq$ سره آيزومورف دي.(د $\leqq$ ترتيب د لوی والي پر اساس دي)

ثبوت : فرضوو چي $X, \preccurlyeq$ د شمېر وړ خطي ترتيب سوي سيټ دي. د X د سيټ څخه د Q په سيټ متزايد مپينګ بايد ترسيم کو. بيانو کافي ده ،چي د هغه مپينګ د قيمتو پر سيټ باندی د A نوم کښېږدو.

څرنګه چي د X سيټ د شمېر وړ دي ، نو کولای سو چي هغه په لاړ وپېيو:

$$X=\{x_n\ ;\ n\in N\} \qquad (6.2)$$

د $f:X\longrightarrow Q$ متزايد مپينګ د رياضي د استقراء په طريقه ترسيموو.

$f(x_0)=0\in Q$ سره اېږدو.فرضوو چي $n>0$ دي او د هر $m<n$ دپاره مو $f(x_m)$ تعريف کړي دي. اوس به نو $f(x_n)$ تعريف کو.

که $m<n$ داسي وجود ولري ،چي $x_m=x_n$ دي ، نو څرګنده ده چي $f(x_m)=f(x_n)$ سره اېږدو. اوس به نو فرض کړو چي د هر $m<n$ دپاره $x_m\neq x_n$ دي. لاندني سيټونه په نښه کوو:

$$A_n=\{\ f(x_m);\ m<n \wedge\ x_m\lessdot x_n\ \} \qquad (6.3)$$

$$B_n=\{\ f(x_m);\ m<n \wedge\ x_n \lessdot x_m\ \} \qquad (6.4)$$

البته د A_n او B_n سيټونه د ناطقو عددو متناهي سيټونه دي.اود $A_n< B_n$ اړيکه صدق کوي، پدي معنی ، چي د $r\in A_n, s\in B_n$ دپاره $r<s$ صدق کوي.دری امکانه لرو:

1. $B_n=\emptyset,\ A_n\neq\emptyset$ د اعظمی حد داصل پر اساس (5.1) د A_n سيټ لويترين عنصر لري، چي په q سره يې ښيو. $f(x_n)=q+1$ سره اېږدو(او يا تر q لوی هر اختياري ناطق عدد چي وي، ټاکو).

2. $B_n\neq\emptyset,\ A_n=\emptyset$ دی. دغه حالت هم و لمړي حالت ته ورته دي. منتهی دلته د B_n په هکله استدلال کوو.

3. $B_n\neq\emptyset,\ A_n\neq\emptyset$ دي. د اعظمی حد داصل پر اساس د A_n سيټ لويترين عنصر q او د B_n سيټ کوچنۍ ترين عنصر r ، لري.څرګنده ده چي $q<r$ دي.

$$f(x_n)=\frac{q+r}{2}\in Q$$

سره اېږدو. و به ښيو چي f متزايد مپينګ دي. فرضوو چي $x,y\in X$ ، $x\lessdot y$ دي.د (6.2) پر اساس د m, n طبيعی عددونه داسي وجود لري، چي $x=x_m$ او $y=x_n$ دي. فرضو چي د بېلګي په ډول $n<m$ دي. بيانو د (6.4) پر اساس $f(y)=f(x_n)\in B_m$ کېږي. پدي معنی چي د B_m سيټ خالي ندي. پدي معنی چي د $f(x)=f(x_m)$ په تعريفولو سره 2. يا 3. حالت منځ ته راځي. په دواړو حالتو کي $f(x_m)$ د B_m د سيټ کوچنۍ ترين عنصر دي ، يعنی $f(x_m)<B_m$ ، ځکه نو $f(x_m)<f(x_n)$ دي. د $n>m$ په صورت کي به مو په ورته شان عمل کړی وای.

q.e.d.

که د تېري قضيي ثبوت ته په ځير سره وګورو، نووينو چي په هغه کي مو د ناطقو عددو Q د سيټ د خاصيتو څخه ډېر لږ کار اخيستي دي. په مشخصه توګه د ناطقو عددو د سيټ خاصيتو ته مو د f د مپينګ د جوړښت په وخت کي ضرورت درلودي. په 1. حالت کي مو د Q د سيټ د لوی ترين عنصر د نه درلودلو د خاصيت څخه کار واخيستي.په 2. حالت کي مو د Q د سيت د کوچنۍ ترين عنصر دنه درلودلو د خاصيت څخه کار واخيستي او په 3. حالت کي مو د Q د ګڼ ترتيب د خاصيت څخه کار واخيستي.

تمرین 4.6. دغه ادعا ثبوت کي: فرضوو چي د $A, \leqq$ سیټ ګڼ ترتیب سوی سیټ دي، $X, \preccurlyeq$ د شمېر وړ خطي ترتیب سوی سیټ دي. بیانو د $B \subseteq A$ سیټ داسي وجود لري ، چي $B, \leqq$ او $X, \preccurlyeq$ آیزومورف دي.

طبعاً سوال طرح کیږي، چي آیا د خطي ترتیب سوي سیټو سیټو دپاره هم ورته ادعا ،لکه د کانتور- برنشتاین ، صدق کوي؟ ډېربدیهي منفي جواب ورته لرو، هغه دا چي دوي خطي ترتیب سوي سیټونه د $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ وجود لري چي :

یودبله سره آیزومورف ندي (6.5)

$X_1, \leqq_1$ د X_2 د سب سیټ سره آیزومورف دی (6.6)

$X_2, \leqq_2$ د X_1 د سب سیټ سره آیزومورف دی (6.7)

په حقیقت کي کفایت کوي چي د $X_1=(0, 1)$ او $X_2=\langle 0,1 \rangle$ او یا $X_1=Q$ او $X_2=Q \cap \langle 0,1 \rangle$ سره وټاکو.

تمرین 5.6. مخکنۍ ادعا ثابته کي.

د دواړه ضد بېلګي (counterexamlpes) بنسټ پر هغه حقیقت استوار دي چي یو سیټ کوچنۍ ترین او لوی ترین عنصر لري او بل سیټ یې نلري.

تمرین 6.6. دوه د شمېر وړ خطي ترتیب سوي سیټونه داسي جوړکي چي کوچنۍ ترین او لوی ترین عنصر ونلری خو د (6.5)-(6.7) شرطونه پر ځای کي.

د تېرو واقعیتو برخلاف کولای سو چي د ادعا شرطونه داسي قوي کړو چي د 1.3.3 دقضیې ورته ادعا صدق وکړي.

قضیه 6.6. فرضوو چي $X, \preccurlyeq$ د شمېر وړ ګڼ ترتیب سوي سیټ دي ، چي کوچنۍ ترین او لوی ترین عنصر ونلری. بیانو $X, \preccurlyeq$ د نیمګړې ترتیب سوي سیټ $Q, \leqq$ سره آیزومورف دي.

ثبوت:د قضیې ثبوت په اصطلاح د «تک ـ تاک» پرطریقه بناء دی. که د 5.6 قضیې د ثبوت په شکل مخ ته ولاړ سو ، نو د X د سیټ څخه به د Q <u>په سیټ کي</u> متزاید مپینګ ترسیم کړو ، خو دغه مپینګ د Q <u>پر سیټ باندي</u> نسی تضمینیدلای.د تېرې قضیې ثبوت موږ ته یوازي متزاید مپینګ تضمینوي چي دهر $x \in X$ دپاره تعریف سویدي. موږ د دوهم شرط و پر ځای کولو ته چي عبارت د سرجکشن څخه دي ، هم اړتیا لرو.یدي معنی چي مپینګ باید نه یوازي متزاید وي ، بلکه د X د سیټ څخه د Q <u>پر سیټ</u> باندي وي. د «تک ـ تاک» طریقه دواړه شرطونه تضمینوي. د مپینګ د ترسیم پروسه پر جفت او طاقو قدمو وېشو. په جفتو قدمو «تک» کي لمړۍ شرط تضمینوو او په طاقو قدمو «تاک» کي دوهم شرط پر ځای کوو. په دغه اصطلاح کي د 5.6 قضیې ثبوت پر «تک – تاک» نه ؤ ولاړ ، بلکه یوازي پر «تک ، تک ، ...» ولاړ ؤ. اوس به نو د قضیې و لنډ ثبوت راوګرځو.

د X او Q سیټونه په لاړ پیيلای سو:

$$X=\{x_n ; n \in N\}$$

$$Q=\{r_n ; n \in N\}$$

د $f: X \xrightarrow{\sim} Q$ متزايد مپينگ د رياضي د استقراء په طريقه ترسيموو.په عين حال کي د $X_n \subseteq X$ او $Q_n \subseteq Q$ سيټونه داسي جوړوو ، چي :

$$X_n \subseteq X_{n+1} \ , \ \ Q_n \subseteq Q_{n+1} \qquad (6.8)$$

$$f: X_n \xrightarrow{\sim} Q_n \qquad (6.9)$$

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \ , \ Q = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n \qquad (6.10)$$

صدق وکي.

$X_0=\{ x_0\}$ ، $Q_0=\{r_0\}$ او $f(x_0)= r_0$ سره ابړدو. فرضوو چي د $n>0$ دپاره مو دغه کار سرته رسولی دي، يعنی د هر $m<n$ دپاره مو د X_m, Q_m سيټونه او د هر $x\in X_m$ دپاره مو $f(x)$ تعريف کړی دي. دوه حالتونه بايد تفکيک کړو.

تک) د n عدد جفت دي. فرضوو چي k کوچنۍ ترين طبيعی عدد دي چي $x_k \notin X_{n-1}$.

$X_n=X_{n-1} \cup \{ x_k\}$ سره ابړدو.د 5.6 قضيي د ثبوت په ډول داسي $r \in Q$ پيداکوو څو «وکولای سو » $f(x_k)=r$ سره کښېږدو. د $Q_{n-1} \cup \{ r\}$ سيټ په Q_n سره په نښه کوو .

تاک) د n عدد طاق دي. فرضوو چي k کوچنۍ ترين طبيعی عدد دي چي $r_k \notin Q_{n-1}$. اوس نو په لاندي ډول مخ ته ځو:

$$Y_n=\{r \in Q_{n-1} \ ; \ r<r_k\}$$

$$Z_n=\{r \in Q_{n-1} \ ; \ r_k <r \ \}$$

دلته بيا دري امکانه لرو: 1. $Y_n\neq\emptyset$ ، $Z_n=\emptyset$ ، 2. $Y_n=\emptyset$ ، $Z_n\neq\emptyset$ ، 3. $Y_n\neq\emptyset$ ، $Z_n\neq\emptyset$.

د بېلګي په ډول 3. حالت څېړو.د اعظمی حد د اصل پر اساس (5.1) د Y_n سيټ لويترين عنصر r لري او د Z_n سيټ کوچنۍ ترين عنصر لري ، چي په s سره به يې وښيو. فرضوو چي $x,y \in X_{n-1}$ داسي عنصرونه دي چي $f(x)=r$ او $f(y)=s$ دي. د هغوی موجوديت د (6.9) شرط تضمينوي. بيا نو $x \prec y$ دي. فرضوو چي m کوچنۍ ترين داسي طبيعی عدد دي ، چي $x \prec x_m \prec y$ وي. دغه ډول عدد وجود لري، ځکه چي د $X,\preccurlyeq$ سيټ ګڼ ترتيب سوي سيټ دي.اوس نو :

$$f(x_m)=r_k \ , \qquad Q_n= Q_{n-1} \cup \{ r_k\}, \qquad X_n= X_{n-1} \cup \{ x_m \ \}$$

سره ابړدو. ددغه ډول جوړښت زموږ مطلوب آيزومورفيزم دي. په دی هکله لوستونکۍ کولای سي چي خپل باور لاسته راوړي. q.e.d.

نور تمرينونه

7.6. الف) ثابت کړئ چي د ټولو هغو خلاصو انتروالو سيټ چي څوکي يې ناطق عددونه وي ، د شمېر وړ دي.

ب) فرضوو چي A په R کي د ټولو هغو خلاصو انټروالو سيټ دي ، چي د $I_1 \neq I_2,\ I_1, I_2 \in A$ دپاره $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ صدق وکي ، نو ثابت کئ چي د A سيټ د شمېر وړ دي.[12]

ج) فرضوو چي K په سطحه کي د ټولو هغو دايرو سيټ دي ،چي دوه په دوه يودبله سره مشترکه نقطه ونلري، يعنی دوه په دوه سره بېل وي. ثابت کي د K سيټ د شمېر وړ دی.

8.6. فرضوو چي f د حقيقي عددو R څخه په حقيقي عددو R کي غير متنازله تابع ده.ثابت کي چي لندني ادعاوي صدق کوي:

الف) د هر $a \in R$ دپاره يو اړخېزه لميټ $\lim_{x \to a-} f(x),\ \lim_{x \to a+} f(x)$ وجود لري ؛

ب) د f د تابع د هغو نقطو سيټ ، چي په هغو کي د f تابع متمادي نده، د شمېر وړ دي.

9.6. فرضوو چي f د حقيقي عددو R څخه په حقيقي عددو R کي تابع ده.يادونه کوو چي د f تابع د a په نقطه کي ، تېره اکستريم (پدي معنی چي تېره د انحطاط او يا تېره د تصاعد نقطه) لري، که داسي $\varepsilon > 0$ وجود ولري ، چي د ټولو $x \neq a$ ، $x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ دپاره $f(x) < f(a)$ دي او يا د ټولو $x \neq a$ ، $x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ دپاره $f(x) > f(a)$ دي. ثابته کي چي د f د تابع د تېره اکستريم د نقطو سيټ د شمېر وړ دي.

10.6. فرضوو چي د X سيټ خالي ندی. په $TK(X)$ باندی د X د سيټ د عنصرو تقريباً ثابتو لاړو سيټ په نښه کوو. پدی معنی چي د $TK(X)$ سيټ د ټولو هغو لاړو $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in {}^N X$ سيټ دی، چی د هر لاړ دپاره داسي m وجود لري ، چي د ټولو $n \geqq m$ دپاره $x_n = x_m$ دی.

د $TK(Q),\ TK(N), TK(\{0,1\}),\ TK(\{0\})$ د سيټو بوج به څو وی؟

11.6. د $X \subseteq R^n$ سيټ داسي پيداکي چي د X سيټ په R^n کی د توپولوجي له مخي ګڼ وي ، پدي معنی چي د هر $a = [a_1, \ldots, a_n] \in R^n$ او هر $\varepsilon > 0$ دپاره د $[x_1, \ldots, x_n] \in X$ نقطه داسي وجود ولری ، چي د $i = 1, \ldots, n$ دپاره $|x_i - a_i| < \varepsilon$ دی.

12.6. که $x \in X,\ X \subseteq R^n$ وي. د x نقطه د X د سيټ په تجريد سوي(منزوي) Isolated نقطي سره يادوو ، که $\varepsilon > 0$ داسي وجود ولري ، چي د هر $x \neq y, y \in X$ دپاره $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geqq \varepsilon$ صدق وکي. ($y = [y_1, \ldots, y_n], x = [x_1, \ldots, x_n]$). ثابت کي چي د مجزاء نقطو سيټ د شمېر وړ دی.

13.6. الف) که $\mathcal{G}$ د متناهی غوټه لرونکو ګرافو سيټ وي، پداسي ډول چي د نومو‌ړی سيټ هيڅ دوه ګرافونه يو دبل سره آيزومورف ندي. نو د $\mathcal{G}$ سيټ د شمېر وړ سيټ دي.

ب) که $\mathcal{L}$ د ټولو متناهي نيمګړې ترتيب سوی سيټو ، سيټ وي چي هيڅ دوه نيمګړي ترتيب سوي سيټونه په خپل منځ کي آيزومورف نه وي. نو ثابت کئ چي د $\mathcal{L}$ سيټ د شمېر وړ سيټ دي.

ج) د $\mathcal{G}$ او $\mathcal{L}$ د سيټو بېلګي داسي و موندي ، چي د هغو عنصرونه لايتناهي سيټونه وي.

---

[12] پدی معنی چي د حقيقی عددو پر محور د ټولو خلاصو انټروالو سيټ چي دوه په دوه سره بېل وي ، د شمېر وړ دي (ژباړن)

14.6. د $X, \leqq$ خطي ترتيب سوي سيټ بايد کم شرطونه پر ځای کي ، څو د لاندنيو خطي ترتيب سوي سيټو سره آيزومورف وي:

الف) $\langle 0,1 \rangle \cap Q, \leqq$ ؛

ب) $Z, \leqq$ ؛

ج) $R, \leqq$ ؛

د) $N, \leqq$ ؛

ډ) $R-Q, \leqq$.

7.3. حقيقی عددونه بی شمېرهUncountable ډير دي.

پدی رساله کي به وښيو چي د R سيټ د شمېر وړ ندي . د کانتور د قضيي کلاسيک ثبوت ، چي په اصطلاح د قطر پر پرنسيپ ولاړ دي، راوړو. په پای کي به د لاسته راوړيو نتېجو يوه مهمه عملی بڼه وڅېړو.

و موښودل چی د تامو عددو سيټ Z او د ناطقو عددو سيټ Q د شمېر وړ دي. تر اوسه مو د دداسی سيټ بېلګه چي د شمېر وړ نه وي، نه درلوده. طبعاً سوال طرح کيږي ، چي آيا د حقيقي عددو سيټ R هم د شمېر وړ دي ؟ دغه سوال په 1873 م کال کي کانتور په خپل ليک کی و ددکيند ته طرح کي. وروسته له څو اونيو څخه يي په خپله ، خپل سوال ته منفي جواب ورکي . ثبوت يي په هغه وخت کي ډير پيچلئ ؤ. وروسته په 1890 م کال کي يي د بی شمېره سيټ R دوهم ثبوت نشر کي. دغه ثبوت په اصطلاح د کانتور د قطر پر طريقه ولاړ دي. ددغه طريقی څخه د شلمي پيړي په رياضي کی په پراخ ډول کار اخيستل سوي دي .د کانتور د قطر طريقه ډير کلتوری ارزښت تر لاسه کي اودهغه پېژندنه د شکسپير د لوبو، يا بيتهوفن د موسيقي او يا د ريمبراند د انځورونو د پېژندلو په څېر، په عمومي پوهه کي راځي.

قضيه 1.7. د ټولو حقيقي عددو سيټ بي شمېره دي.

ثبوت: قضيه د تناقض په طريقه ثبوتوو. ثبوت په حقيقت کي د کانتور د ثبوت اصلی مفکوره تعقيبوي. فرضوو چي د R سيټ د شمېر وړ دي. بيانو د (0, 1) انتروال هم د شمېر وړ سيټ دي ، پدي معنی چي هغه په لاړ پيیلای سو.

$$(0, 1)=\{a_n \,;\, n\in N,\, n>0\}$$

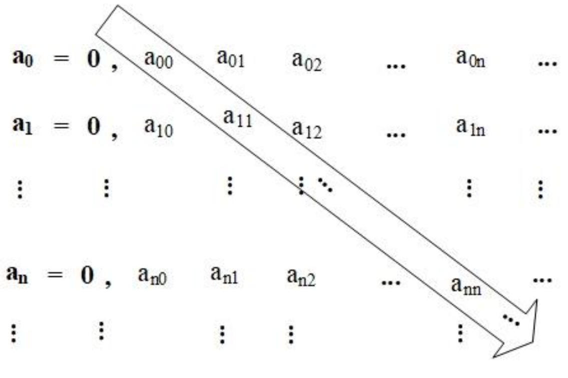
څرنګه چي د a_n عدد د لسو پر قاعده ارائه کولای سو، نو:

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.10^{-k}$$

که د a_n عدد د لسو پر قاعده دوی مختلفي څرګندوني ولري ، نو د هغوی څخه يي لايتناهي څرګندونه ټاکو، پدی معنی چي د لايتناهی ډيرو k دپاره $a_{nk}\neq 0$ دي. د $n>0,\ n\in N,\ a_n$ عددونه او دهغوی د لسو پر قاعده ارائه(څرګندونه) په جدول کی اوډو(3.18 شکل) .

اوس نو د قطر د طریقی ځخه کار اخلو او یو نوی عدد د $b=0,b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$ داسی جوړو چي ، که $a_{kk}=1$ وی ، نو $b_k=9$ سره اېږدو. که $a_{kk}\neq 1$ وي ، نو $b_k=1$ سره اېږدو. پدی حساب د b عدد د $(0, 1)$ په انتروال کي شامل دي. پدی معنی چي داسي n وجود لری ، چي $a_n=b$ سره کېږي(ځکه چي ټوله عددونه مو په لاړ پیيلي دي) . په خاص ډول باید $a_{nn}=b_n$ سره وي. خو د b عدد مو داسي جوړ کي چي د هر k د پاره $b_k\neq a_{kk}$ دي. ځکه نو $a_{nn}\neq b_n$ دی او دغه مطلوب تناقض دي.

ددی دپاره چي ثبوت تکمیل وي ، باید پاملرنه وکو ، چي د $\ldots a_{nn} \ldots$ $0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}$ او $0,b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$ د عین عدد د لسو پر قاعده دوی مختلفي ځرګندونه نسی کیداي . ځکه چي لمړي ځرګندونه متناهي نده او نظر و فرضیې ته دوهمه ځرګندونه هم متناهي نده ، ځکه چی رقمونه یې یوازی 1 او 9 دي.



شکل3.18

q.e.d.

بېلګه 1.7. د کانټورد قطر په طریقه کي کوچنۍ تغیرراولو. وبه ښیو چي د ټولوطبیعي عددو د لاړو سیټ N^N بی شمېره سیټ دي. د لاندنې ادعا ځخه استنباط کېږي: که $A\subseteq N^N$ د شمېر وړ سیټ وي، بیا نو د $h\in N^N$ لاړ داسي وجود لري ، چي $h\notin A$ دي. په رشتیا هم ، فرضوو چي A د طبیعی عددو د لاړو د شمېر وړ سیټ دي. بیا نو کولای سو چي د A سیټ په لاړ وپېښو.:

$$A=\{f_n ; n\in N\}$$

(هر f_n د طبیعی عددو لاړ دي). $h(k)$ په لاندي ډول تعریفوو:

$$h(k)=f_k(k)+1 \qquad (7.1)$$

طبعآ $h\in N^N$ دی، مګر $h\notin A$ دي. که $h\in A$ وای ، نو داسي n به وجود درلودلای، چي $h=f_n$ وای. نظر و (7.1) اړېکي ته $h(n)\neq f_n(n)$ دي.

■

تمرین 1.7. د N^N سیټ په دی ډول نیمګړي ترتیبوو:$f<g$ دي، که داسي $k\in N$ موجود وي چی د ټولو $n>k$ دپاره $f(n)<g(n)$ صدق وکي. د 7.1 بېلګي د طرحي په بدلون سره ثابت کئ چي د N^N هر دشمېر وړسب سیټ د پاس له خوا محدود دي($h(k)=\max \{f_0(k), \ldots, f_k(k)\}+1$ سره وټاکئ).

اوس به نو دلته د 7.1 قضیي یو بل ثبوت راوړو چي لاندني مرستني ادعاوي یې بنسټ جوړوي.د نوموړې ادعاؤ ځخه په راتلونکې کي په نورو ځېړنو کي هم کار اخلو.

لیما 7.1. (یو په بل کې اینودل سوي انتروالو پرنسیپ). فرضوو چي $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ د تړلو انتروالو داسي لاړ دي ، چي:

الف) د هر n دپاره $I_{n+1} \subseteq I_n$ دي,

ب) د I_n د انتروال اوږدوالئ و صفر ته نژدي کېږي.

بیانو د ټولو انتروالو مشترکه برخه $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ فقط یو حقیقي عدد په بر کې نیسي.

ثبوت:فرضوو چي $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ دي. د الف) د شرط پر بنسټ :

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \dots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \dots \leqq b_{n+1} \leqq b_n \leqq \dots \leqq b_1 \leqq b_0 \qquad (7.2)$$

دی . د ب) د شرط له مخې :

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \qquad (7.3)$$

صدق کوي.لمړئ به وښیو چي د $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ مشترکه برخه حد اکثر یو عنصر احتواء کوي.

فرضوو چي $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ دي. که $x \neq y$ واي ، نو $\varepsilon = |x-y| > 0$ واي. د (7.3) پر اساس داسي n_0 وجود لري، چي د $n \geqq n_0$ دپاره $|b_n - a_n| < \varepsilon$ دي. ځرنګه چي $x, y \in I_{n_0}$ دي، نو :

$$|x-y| \leqq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon = |x-y|$$

خو پورتنئ غیر مساوات تناقض دي.

اوس به نو د انتروالو په دغه مشترکه برخه کي عنصر ترسیم کړو. د (7.2) پر اساس د :

$$X = \{a_n \,;\, n \in N\}$$

سیټ د پاس له خوا محدود (د بېلګې په ډول د b_0 په ذریعه) او په ځرګند ډول غیر خالي دي. ځکه نو $\alpha \in R$ داسي وجود لري ، چي $\alpha = \sup X$ دي.

ځرنګه چي α د X د سیټ پاسنئ سرحد دي ، نو د هر n دپاره $a_n \leqq \alpha$ حقیقت لري. د (7.2) پر اساس b_n د X د سیټ د پاسنیو سرحدو څخه دي، ځرنګه چي α د X د سیټ دپاس له خوا کوچنئ ترین سرحد دي ، نود هر $n \in N$ دپاره $\alpha \leqq b_n$ دي. و مو ښودل چي :

$$a_n \leqq \alpha \leqq b_n$$

پدي معنی چي $\alpha \in I_n$ دي، ځکه نو $\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ دي. q.e.d.

لیما 2.7. فرضوو چي $\langle a, b \rangle$ تړلئ انتروال، $a<b$ دي. د هر حقیقي عدد $x \in R$ دپاره د $\langle c, d \rangle$ ، $c<d$ انتروال داسي وجود لري، چي:

الف) $x\in\langle c, d\rangle$ ؛

ب) $\langle c, d\rangle\subseteq\langle a, b\rangle$ ؛

ج) $d-c<\frac{1}{2}(b-c)$.

ثبوت : ددی ادعا ثبوت بدیهی دی. د $\langle a, b\rangle$ انتروال پر درو مساوی (یودبله سره مشترکه برخه ولري، non disjoint) انتروالو وېشو:

$$\left\langle a, a+\frac{1}{3}(b-a)\right\rangle, \left\langle a+\frac{1}{3}(b-a), a+\frac{2}{3}(b-a)\right\rangle, \left\langle a+\frac{2}{3}(b-a), b\right\rangle$$

د x عدد لږ تر لږه په یوه انتروال کې ندي شامل ، هغه انتروال د $\langle c, d\rangle$ د انتروال په صفت ټاکو.

q.e.d.

د 7.1 قضیې د بل ثبوت د ارائې دپاره لاندني ادعا، چې د 7.1 قضیې سره معادله ده، ثابتوو: که د $X\subseteq R$ سیټ د شمېر وړ وي، نو $X\neq R$ دي.

فرضوو چې $X=\{a_n; n\in N\}$ د حقیقي عددو د شمېر وړ سیټ دي. د I_0 په ذریعه داسې انتروال چې اوږدوالي یې یو او x_0 په ځان کې ونلري ، په نښه کوو(د بېلګې په ډول د $\langle 0, 1\rangle$ یا $\langle 2, 3\rangle$ انتروال). کله چې مو د I_n انتروال ترسیم کې، بیانو د 7.2 لیما پر اساس د $I_{n+1}\subseteq I_n$ انتروال داسې وجود لري چې اوږدوالي یې مثبت عدد او د I_n د انتروال د اوږدوالي تر نیمایي کوچنۍ او د x_{n+1} عنصر په ځان کې نلري.

د $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ د انتروالو لاړ د 7.1 لیما شرطونه پر ځای کوي، ځکه نو $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ وجودلري. که $x\in X$ وی، نود کم n دپاره $x=x_n$ دي. پدی معنی چې $x\in I_n$ دي، خو زموږ د انتروالو ترسیم داسې ؤ چې $x\notin I_n$ دي . ځکه نو دغه دوه حالته یودبل سره مغایرت لري. ځکه نو $x\notin X$ دي . ددی ځایه استنباط کېږي چې $X\neq R$ دي.

q.e.d.

د حقیقي عددو دسیټ د بی شمېره والي په هکله د ج. کانتور لاسته راغلي نتیجه، کانتور د هغه پرابلم د حل دپاره چې دهغه په وخت کې یې حضور درلودي، په کار واچول. دغه موضوع به لږ څه په جزئیاتو وڅېړو.

بشریت د عدد د مفهوم د انکشاف په لار کې د عددوترهغه مفهومه ورسېدل چې نن ورځ یې د ناطقو عددو په نامه پېژنو. لکه څنګه چې په 2.1 رساله کې می یادونه وکړه فیثاغورث او دهغه شاګردانو تر میلاد دمخه په شپږمه پېړۍ کې په دی پوه وه ،چې دهغې مربع د قطر اوږدوالي،چې هره ضلع یې یو واحد وي، یعني $\sqrt{2}$ ، ناطق عدد ندي. اضافه تر 2000 کاله ریاضي پوهانو ددی قدرت پیدانه کې چې د غیر ناطقو عددو نور ډولونه ، دبېلګې په ډول ، نه یوازې دیوه عدد دوهم جذر بلکه n-ام جذر او دهغوی ترکیب، دی پیداکړي. د اتلسمي پېړۍ په اوله نیمایي کې اویلر وښودل، چې e او وروسته یوهان هاینریخ لامبرت Johan Heinrich Lambert(1728-1777) و ښودل، چې د π عدد

دغير ناطقو عددوڅخه دي.طبعاً سوال طرح سو چي آيا دغه عددونه د «جذرو او د هغوی د ترکيب »په پرتله د نورو مشخصاتو درلودونکي دي؟ ادريين ـ ماري لژاندر Adrien-Marie Legendre (1752-1833) هغه فرضيه فورمولبندي کړه چي د π عدد د هغه پولينوم چي ضريبونه يې ناطق عددونه وي، جذر کيدای نسي. پدی معنی چي د ناطقو ضريبو سره داسي پولينوم وجود نلري چي د هغه جذر دي د π عدد وي. دغه فرضيه بی درنګه ددی سبب سوه چي نوی مفهوم منځ ته راسي.

د α حقيقي (او يا مختلط) عدد د الجبري عدد په نامه يادوو ، که د a_0 , ... , a_n ناطق عددونه داسي وجود ولري، چي α د $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ، $|a_0|+|a_1|+...+|a_n| \neq 0$ د پولينوم جذر وي. هغه عدد چي الجبري نه وي ، نو دترانسندنت Transcendent عدد په نامه يې يادوو.

تمرين 7.2. وښياست چي د α عدديوازي او يوازي هغه وخت الجبري عدد دي، چي α د تامو ضريبو سره د غير صفری پولينوم جذر وي.

اويلر په 1744 کال کي د الجبری او ترانسندنت عددونو ترمنځ توپير کاوه، او داسي فرضيه يې کښيښودله: که s,r ناطق عددونه وي $r^{\alpha}=s$ ،بيا نو د α عدد يا الجبري او يا ترانسندنټ دي. د لژاندر فرضييې څه نا څه سل کاله او د اويلر فرضيه دوه سوه کاله د خپل ثبوت په انتظار کي پاته سوه. (د شلمي پيړي په سر کي يو دبل څخه جدا الکساندر اوسيپوويچ ګلفاند Aleksandr Osipovitch Gelfond (1906-1968) او ټ . شنايدر T.Schneider تر اپښودل سوو فرضيو قوي ادعاوي ثابتي کړي.

د نولسمي پيړي په لمړي نيمايي کي لا نه وه معلومه ، چي آيا تراسندنټ عدد وجود لري. په 1844 کي فرانسوي رياضي پوه ژوزيف ليوويل Joseph Liouville(1809-1882) داسي قضيه ثابته کړه : که د α عدد د هغه پولينوم جذر وی ، چي درجه يې n او ضريبونه يې ناطق عددونه وي،او α ناطق عدد نه وي، نو د c مثبت عدد داسي وجود لري، چی د اختياري $p,q\in Z$ ، $q\neq 0$ عددو دپاره لاندنۍ غير مساوات صدق کوي:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

د ليويل ددغي قضيي په مرسته په اساني سره ثابتيدلای سي، چي هر عدد د

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{a_k}{10^{k!}} \qquad , a_k \in \{0,1,...,9\}$$

په بڼه، ترانسندنټ دي.

تمرين 7.3. وښياست چي د $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+...+\frac{1}{10^{k!}}+...$ عدد ترا نسندنټ دي.

پدي ډول د ترانسندنټ عدد دوجود و سوال ته جواب ورکړه سو. د لژاندر د فرضيي ثبوت د π د عدد د ترانسندنټ والي په هکله يو بل مهم ګام ؤ چي په 1873 کي چارلس هرميټ Charles Hermite (1822-1901) سرته ورسوي. په 1874 پدی مسيرکي کانتور مهم برياليتوب تر لاسه کي. دغه برياليتوب د سيټ د تيوري د زيږيدو سبب او دهغه و ارزښتو ته د قدر په سترګه وکتل سوه. کانتور

وښودل چي د الجبري عددو سيټ د شمېر وړدي.پدی معنی چي دترانسندنټ عددو سيټ بي شمېره سيټ دي، يعنی بی شمېره ډېر ترانسندنټ عددونه وجود لري.

ښېلګه 7.2. پدی ښېلګه کي به وښيو چي د الجبري عددو سيټ د شمېر وړ سيټ دي.

که $f\in Z^n$ د تامو عددو ترتيب سوي n-ئېزه، يعنی $f=[a_0, \dots , a_{n-1}]$ وي ، نو :

$$P_f=\{ \alpha\in R;\ a_0+a_1\alpha+\dots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=0\}$$

ايږدو. پدي معنی، چي f پولينوم شفروي او P_f د هغه پولينوم د حقيقي جذرو سيټ دي. د الجبري عددو د تعريف پر اساس αيوازي او يوازی هغه وخت الجبري عدد دي، که داسي $n\in N$ او د تامو عددو n-ئېزه $f\neq[0, \dots, 0]$ وجود ولري، چي $\alpha\in P_f$ وي. ځکه نو:

$$Alg=\bigcup_{n\in N}\ \bigcup_{f\in Z^n-\{[0,\dots,0]\}} P_f \qquad (7.4)$$

په اساني ليدلای سو چي د $n\in N$ دپاره د Z^n سيټونه د شمېر وړ سيټونه دي. د الجبر څخه پوهېږو چي د P_f هر سيټ متناهي سيټ دي. ځکه نو د (7.4) څخه د 3.6.4 قضيي په مرسته استنباط کېږي،چي د Alg سيټ (يعني د الجبري عددو سيټ)د شمېر وړ سيټ دي.(پاملرنه وکي، چي دلته د ټاکني و اکسيومي ته ضرورت نسته).

تمرين 7.4. که $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ د تامو عددو د ضريبو سره پولينوم وي، نوکانتور د

$$N=n-1+|a_0|+|a_1|+\dots+|a_n|$$

عدد دهمدغه پولينوم د ارتفاع په نوم يادوي. هر N د متناهي شمېر پولينومو چي ارتفاع يې N وي، جواب ورکونکئ دي. پدي معنی چي دهر N دپاره متناهي $\Phi(N)$ الجبري عددونه وجود لري. نوموړي څېړنه داسي دقيق کړي، چي دهغه څخه د Alg د سيټ د شمېر وړ توب استنباط سي.

د ټولو حقيقي عددو سيټ R (د هغه د ترتيب د ساختمان او توپولوجي) سره د حقيقی کانتينووم Real Continuum په نامه هم يادېږي. ځکه نو د هغه بوج |R| د کانتينووم بوج په نامه يادېږي، او په **c** سره ښودل کېږي. فلهذا:

$$\mathbf{c}=|R| \qquad (7.5)$$

پدي لحاظ 7.1 قضيه وايي :

$$\mathbf{c}>\aleph_0 \qquad (7.6)$$

نور تمرينونه

5.7. فرضوو چي $p>1, p\in N,\ P\subseteq\langle 0,1\rangle$ (د ښېلګې په ډول $p=9$). د B او C دوه لوبغاړئ لايتناهي داسي لوبه کوي، چي په وار سره د $\{0, 1, \dots, p-1\}$ سيټ څخه رقمونه ټاکي. دقيق به وو ايو چي د B لوبغاړئ د $n=0, 1, \dots$ دپاره $a_{2n}\in\{0, 1, \dots, p-1\}$ يعنی جفت رقمونه ټاکي او د C لوبغاړئ طاق رقمونه يعنی $a_{2n+1}\in\{0, 1, \dots, p-1\}$ ټاکي. د B لوبغاړئ ، لوبه ګټي که د $\sum_{k=0}^{\infty}a_k.p^{-k-1}$ عدد د P په سيټ کي شامل وي ، غير له هغه څخه لوبه د C لوبغاړئ ګټي.

الف) که د P سيټ و شمېر وړ سيټ وي ، ثابته کي چي د C لوبغاړئ داسي لوبه کولای سي ، چي لوبه وګټي.

ب) د الف) د نتيجي څخه په استفاده سره د 7.1 قضيي بل ثبوت پيداکئ.

6.7. د 1.7 قضيي په ثبوت کي د تعديل (بدلون) په نتيجه کي ثابته کي چي د $^{N}\{0,1\}$ سيټ د شمېر وړ ندي.

7.7. په 1.7 تمرين کي نيمګړئ ترتيب سوي سيټ ^{N}N د $\succ$ ترتيب سره، په نظر کي نيسو. ثابت کي چي:

الف) د $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in {}^{N}N$ لاړ داسي وجود لری، چي :

$$f_0 \succ f_1 \succ \ ... \succ f_n \succ ...$$

ب)که د k_n تابع داسی تعريف کړو، چي د هر $m \in N$ د پاره $k_n(m)=n$ وي ، نو د $A=\{f \in {}^{N}N; (\forall n \in N); f \succ k_n\}$ سيټ خالي ند ی او کوچنئ ترين عنصر نلري.

8.7. که $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ او $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ د حقيقي عددو، د صفر څخه خلاف، دوه لاړه وي، نو وايو چي د $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ نظر د $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ ته ژر وده کوی (غټېږي) که : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ وي. ثابت کي چي:

الف) د هر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ دپاره داسي لاړ وجود لري چي ژر وده کوي.

ب) د لاړو د هر د شمېر وړ سيټ دپاره داسي لاړ وجود لري چي د هغه سيټ د هر لاړ په پر تله ژر وده کي.

9.7. الف) که په 1.7 ليما کي د ب) د فرضيي څخه تېر سو (پدی معنی چي د هغي فرضيي څخه صرفنظر وکو) ، نو په ليما کي به څه تغير راسي؟

ب)آيا د 1.7 ليما د خلاصو انتروالو دپاره هم صدق کوي؟

10.7. که K د حقيقي عددو سب فيلډ وي، نو د α عدد (حقيقي يا مختلط) د K پر فيلډ باندي د الجبري عدد په نامه ياديږي، که داسي پولينوم $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ وجود ولري چي $p(\alpha)=0$ او $a_0, a_1, ... ,a_n \in K$ وي. که د K فيلډ د شمېر وړ وي ، نو ثابت کي چي داسی حقيقي عدد وجود لري ، چي د K پر فيلډ باندي الجبري ندي.

11.7. الف) فرضوو چي د f تابع پر R باندي داسي تعريف سوي ده ، چي متمادي مشتق f' ولري. فرضوو چي $\alpha \in R$ دي.

$$M=\max\{1, \sup\{f'(x); x \in \langle \alpha-1, \alpha+1 \rangle\}\}$$

سره ابړدو. وښياست چي د $x \in \langle \alpha-1, \alpha+1 \rangle$ دپاره $|f(x)-f(\alpha)| \leqq M.|x-\alpha|$ صدق کوي.

ب)فرضوو چي $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ د تامو عددو دضريبو سره n ـ درجه اي پولينوم او د $\alpha\in R$ دپاره $f(\alpha)=0$ دي. فرضو چي M د الف په برخه کي تعريف سوي سيټ او $\alpha c=\frac{1}{M}$ دي. که α ناطق عدد نه وي ، نو د هر $\frac{p}{q}\in Q$ دپاره :

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqq\frac{c}{q^n}\cdot\left|\sum_{i=0}^{n}a_iq^{n-i}p^i\right|$$ صدق کوي.

ج) د ب) د برخي د نتيجي څخه په استفاده سره د ليو ويل قضيه ثابته کي.

8.3. د پريشله Dirichlet پرنسيپ

پدې مقاله کي به د هغه اصل او دهغه د استعمال په هکله وړغيږو، چي د لمړي ځل دپاره د پيټر گوستاف لوژن ـ پريشله (1805-1859) له خوا په کار ولويدي . دغه پرنسيپ په اصطلاح د « جابو » يا« کوتر خاني » د پرنسيپ په نامه هم ياديږي.

د کوتر خاني پرنسيپ په ساده ډول داسي فورمولبندي کوو:که په يوه کوتر خانه کي چي n جابي لر ی تر n اضافه کوترې ځاى پر ځاى سي ، نو لږ تر لږه په يوه جابه کي به دوي کوترې ځاى پر ځاى سوي وي.

اوس به يې د رياضي له مخي دقيقه فورمولبندي وکړو.

قضيه 1.8. (د پريشله پرنسيپ). که $|X|<|Y|$ او $f:Y\longrightarrow X$ وي، نو $y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$ داسي وجود لري ، چي $f(y_1)\neq f(y_2)$ دي.

ثبوت . که دغه ډول $y_1,y_2\in Y$ وجود نه درلودلاى ، نو د $f:Y\longrightarrow X$ مپينگ بايد ساده مپينگ وي. به هغه صورت کي بايد $|Y|\leqq|X|$ وي. خو دغه نتيجه د کانتور برنشتاين د قضيې 3.1. سره تضاد دي. q.e.d.

بېلگه 1.8. پدي بېلگه کي به وښيو چي د پراگ په ښار کي دوه انسانان چي پر سر باندي مساوي شمېر د ويښتانو لري ، ژوند کوي. فرضوو چي Y د پراگ د ښار د اوسيدونکو سيټ دي او X د 500000^N سيټ دي. پوهېږو چي $|Y|>|X|$ دي (ځکه چي د پراگ نفوس تر 500 000 ډېر دي).د f مپينگ د پراگ د هر اوسيدونکي y په مقابل کي د هغه پر سرد ويښتانو شمېر$f(y)$ ايږدي. څرنگه چي هيڅ انسان تر 999 499 اضافه ويښتان پر سر نلري، ځکه نو د f مپينگ د X په سيټ کي دي. د 8.1 قضيې پر اساس دوه مختلف اوسيدونکى y_2,y_1 وجود لري، چي $f(y_1)=f(y_2)$ دي ، بدي معنى چي مساوي شمېر ويښتان لري.

■

تمرين 1.8. وښياست چي په هغه کتابتون کي چي ډېر شمېر کتابونه لري (د بېلگي په توگه اضافه تر 5000) دوه مختلف کتابونه داسي وجود لري چي د صفحو شمېر يې سره مساوي دي.کولاى سي چي ثابته يې کى چي په ډېر لوى کتابتون کي چى اضافه تر يو ميليون کتابونه ولري ، دوه مختلف کتابونه داسي وجود لري چى د تورو شمېر يې سره مساوي دي؟

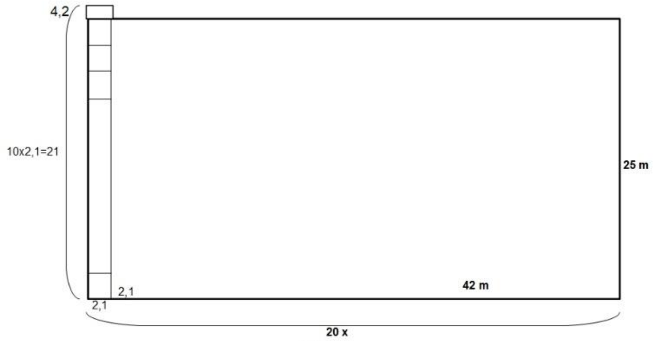
بېلګه 2.8. فرضوو چي m او n تر يوه لوی، داسي طبيعی عددونه دي چي يو پر بل دوېش ور نه وي. و به ښيو چي داسي طبيعی عدد $k>0$ وجود لري چي پر n باندي د m^k د وېشلو په نتيجه کي 1 باقي پاته کېږي.

د $m^1, m^2, \dots, m^{n+1}$ عددونه (د $Y=\{m^1,m^2, \dots, m^{n+1}\}$ سيټ) په نظر کي نيسو. د m^i د عدد و هر طاقت ته پر n باندی د هغه دوېش باقي $r_i=f(m^i)$ تخصيصوو .پدي معنی چي $r_i\in\{0,1, \dots, n-1\}=X$ دي. څرنګه چي $|Y|>|X|$ دي، نو د m^j,m^i دوه مختلف طاقتونه داسي وجود لري چي $r_i=f(m^i)=f(m^j)=r_j$ دي. فرضو دبېلګي په ډول $i<j$ دي. بيا نود m^j-m^i عدد پر n د وېش ور دي. خو $m^j-m^i=m^i(m^{j-i}-1)$ دي. د n او m عددونه يوپر بل دوېش ور ندي ، ځکه نو د m^i هم د n سره د وېش ور ندي. ددی ځايه استنباط کېږي چي د n عدد $m^{j-i}-1$ وېشي. دلته کفايت کوي چي $k=j-i$ سره کښېږدو. ■

تمرين 2.8. فرضو چي د m عدد د 2 او 5 سره د وېش ور ندي، بيا نو د m د عدد يو د طاقتو څخه په خپل د لسو پر قاعده د ارائي په وروستي ګروپ کي د 0001 رقمونه څرګندېږي. ثابت کئ.

بېلګه 3.8. په هغه باغچه کي چي 42×25 متره ده ، غواړو ونې داسي کښېږدو چي د هرو دوو ونو په منځ کي لږتر لږه 3m فاصله وي. ثابتو چي په دغه باغچه کي تر راکړه سوو شرطو لاندي 250 ونې نسو ايښودلای.

د موضوع ثبوت په غير مستقيم ډول سرته رسوو، پدي معنی ، فرضوو چي 250 ونې تر راکړه سوي شرطو لاندی اېښودلای سو. باغچه د 2,1 m ضلعی په مربعاتو پوښو . 240 مربعات لاسته راځي (3.19 شکل وګورئ)، دغه شمېر زموږ دپاره کافي دي. که په باغچه کي مو 250 ونې اېښودلی وای ، نو هرومرو به د مربعاتو څخه لږ تر لږه په يوه مربع کي دوی ونې اېښودل سوی وي (دلته Y د ونو سيټ او f(y) هغه مربع ده چي د y ونه پکښې اېښودل سوی ده).



شکل3.19

څرنګه چي د هغه مربع قطر چي ضلع يې 2,1 وي $2,1.\sqrt{2}<3$ دي، نو په دي حساب ونې يو او بل ته تر 3m نژدي دي.

د پريشله د اصل يوی بلي بڼي ته پاملرنه وکي.

قضيه 2.8. که $X=A\cup B$ وي، X لايتناهی سيټ وي، نو د A او B د سيټو څخه يو سيټ لايتناهی دي.

ثبوت: ثبوت يې بديهی دي. که دA او B سيټونه دواړه متناهی وي، نو بيا د هغو يو والی هم متناهي سيټ دي. پدی معنی که د A او B سيټونه متناهی وي ، نو د $f: {}^{N}n \to A$ او $g: {}^{N}m \to B$ بايجکشنونه و جود لري. په اسانی سره د $h: {}^{N}n+m \to A\bigcup B$ سرجکشن رسمولای سو. ددی ځايه زموږ ادعا د 6.4 قضيې څخه استنباط کېږي.

q.e.d

تمرين 3.8. د پريشله د پرنسيپ لاندی شکل ثابت کې: که $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ وي، X د شمېر وړ نه وي و نو لږتر لږه د A_n د سيټو څخه يو سيټ د شمېر وړ ندي.

لوستونکي ته دلته يو بل مفهوم ور پيادوو. که A⊆R اوx∈R وي ، نو د x د A دسيټ د ازدحام يا تجمع د نقطي (Bulk Point) په نامه يادوو که د هر ε>0 دپاره د a∈A ، a≠x نقطه داسي وجود ولري ، چي |a−x|<ε دي. د بېلګي په توګه د (a, b) په انتروال کې د a او b نقطې د ازدحام يا تجمع نقطې دي.

بېلګه 4.8. د حقيقی عددو R هر محدود لايتناهي سب سيټ د تجمع نقطه لري.

فرضوو چي A⊆R لايتناهي محدود سيټ دي.فرضوو چي K>0, K∈R داسي عدد دي چي $A\subseteq\langle -K,K\rangle$ دي. د استقراء په طريقه د $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ د انتروالو لاړ داسي جوړوو چي د 3.7.1 ليما د a) او b) خاصيتونه ولري اوسر بيره پر دي د هر n دپاره د $I_n∩A$ سيټ غير متناهي وي.

د I_0 څخه به يې راشروع کړو. $I_0=\langle -K, K\rangle$ ايږدو. $I_0∩A=A$ لايتناهي سيټ دي. که د $I_n=\langle a,b\rangle$ انتروال مو ترسيم کړی وي، نو لاندي اړيکه به صدق کوي:

$$A\cap I_n=\left(A\cap\left\langle a,\frac{a+b}{2}\right\rangle\right)\cup\left(A\cap\left\langle\frac{a+b}{2},b\right\rangle\right) \qquad (8.1)$$

څرنګه چي د $A∩I_n$ سيټ لايتناهي دي، نو د 2.8 د قضيې پر اساس په (8.1) اړيکه کې د مساوات په ښي خوا کي لږترلږه يو سيټ لايتناهي دي. هغه انتروال په I_{n+1} سره ښيو.

د 1.7.3 ليما پر اساس $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}I_n$ وجود لري. اوس به نو وښيو چي x د A د سيټ تجمع نقطه ده. فرضوو چي ε>0 دي. څرنګه چي د I_n د انتروالو اوږدوالي و صفر ته نژدی کيږي او x د هغوی څخه په هر يوه کې شامل دي، نو n داسي وجود لري چي $I_n⊆(x−ε, x+ε)$ دي. څرنګه چي د $A∩I_n$ سيټ لايتناهي دي، نو د $a∈ A∩I_n$ ، a≠x نقطه وجود لري . بيا نو |x−a|<ε دي، په حقيقت کي دغه زموږ غوښتنه وه.

تمرين 4.8. ثابت کي چي د حقيقې عددو R هر بې شمېره سب سيټ د تجمع نقطه لري. آيا د R د شمېر وړسب سيټ وجود لري ، چي د تجمع نقطه و نلري؟

نور تمرينونه

5.8. الف) وښياست چي داسي طبيعي عدد وجود لري ، چي د هغه د لسو پر قاعده ارائه کي د 1984 په گروپ سره ختمېږي او پر 1983 دوېش وړ دي.

ب) که د p او 10 عددونه يوپر بل د وېش وړ نه وي او a_0 ... $a_n a_{n-1}$ د اختياري عدد د لسو پر قاعده ارائه وي(پدی معنی چي a_i د هغه عدد رقمونه دي) ، نو داسي عدد وجود لري چي د p د عدد سره د وېش وړ وي او د لسو پر قاعده په ارائه کي د a_0 ... $a_n a_{n-1}$ په گروپ ختمېږي.

6.8. د 9.6. د تمرين د نتيجي څخه په استفادي سره لاندي دعوي ثابته کي : که $X \subseteq R^n$ د شمېر وړ سيټ نه وي، نو د X د سيټ د تجمع نقطه داسي وجود لري ، چي هغه په خپله په X پوري اړه لري.

7.8. دلته به داسي يو حالت وڅېړو: فرضوو چي $\mathcal{B}$ د X د سيټ د سب سيټو ، سيټ دي. f د $\mathcal{B}$ د سيټ څخه په $\langle 0, \infty \rangle$ داسي مپينگ دي، چي:

1. که $A,B,A \cup B \in \mathcal{B}$، $A \cap B = \emptyset$ وي، نو $f(A)+f(B)=f(A \cup B)$ دي.

2. که $A,B \in \mathcal{B}$، $A \subseteq B$ وي، نو $f(A) \leqq f(B)$

الف)فرضوو چي X اختياري سيټ دي ، $\mathcal{B}$ د X د سيټ د ټولو متناهي سب سيټو ،سيټ اود $A \in \mathcal{B}$ دپاره $f(A)=|A|$ دي. وښياست چي د f مپينگ پورتني دوه شرطونه پر ځای کوي.

ب) فرضوو چي د $X=\{x_n ; n \in N\}$ سيټ د شمېر وړ سيټ دي ، $\mathcal{B}=\mathcal{P}(X)$ دي فرضوو چي $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ د مثبتو حقيقي عددو لاړ داسي لاړ دي چي د $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ سلسله متقاربه وي. که د $A \in \mathcal{B}$ دپاره :

$$f(A)=\sum_{x_n \in A} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_A(x_n).a_n$$

کښېږدو، نو وښياست چي د f مپينگ پورتني دوه شرطونه پر ځای کوي.

ج) فرضوو چي $X=R$ دي، $\mathcal{B}$ د ټولو محدودو انتروالو سيټ دي. $f(A)$ د A د انتروال اوږدوالی دي. وښياست چي د f مپينگ پورتني دوه شرطونه پر ځای کوي.

د)فرضوو چي $X, \mathcal{B}, f$ پورتني دوه شرطونه پر ځای کوي، $X \in \mathcal{B}$ دي. که $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ داسي سب سيټ وي چي د $\mathcal{A}$ هر دوه سيټونه په خپل منځ کي سره ببل او د هر $A \in \mathcal{A}$ دپاره $f(\mathcal{A})>0$ وي، نو ثابت کي چي د $\mathcal{A}$ سيټ د شمېر وړ دي.

8.8. دهغي گلولي په منځ کي حجم يې V دي 11 مختلفي نقطې راکړه سوي دي.ثابت کي چي د ϱ او σ سطحې داسي وجود لري ، چي هغوي دواړه د گلولی تر مرکز تېرېږي او د گلولی يوه مقطع چي حجم يې $\frac{1}{8}V$ دي داسي تعينوي ، چي د ذکر سوو 11 نقطو څخه هيڅ نقطه په ځان کي نلري.

9.8. فرضوو چي x غير ناطق عدد دي. ثابت کي چي د هر $0<\varepsilon$ دپاره د u,v تام عددونه داسي وجود لري، چي $0<u+vx<\varepsilon$ صدق کوي.

ځلرم فصل
د متناهي او لايتناهي سره د شمېرنې اصول

د سيټو پر بوج باندي په طبيعی ډول د شمېرنې بنسټيزې عمليې تعريفوو او د هغوی خاصيتونه به و څېړو. د متناهي بوج په اړوند به وګورو چې دغه عمليې د طبيعی عددو پر سيټ باندي، د عمليو سره تطابق کوي.د طبيعی عددو پر سيټ باندی عمليې مو په 1.2 رساله کې په اکسيوماتيکي بڼه در و پيژندل. دغه حقيقت طبيعي دي ، ځکه چې په تاريخي لحاظ لمړني شمېرني د سيټونو پر بوج باندي عمليې وي او وروسته بيا پر حقيقي عددو د شمېرنې اصول دهغه څخه استنباط سوي دي.

د شمېرنې د عمليو نتيجې پر لايتناهي سيټو به په مقايسوی شکل خوار وي ؛په حقيقت کې هغه نتيجې يوازې په 2.1. تمرين، .1.1 ب) ، 2.1 ج) بېلګو ، 4.2.1قضيه او 4.7.1 قضيه کې فورمولبندي سوي دي.

د متناهي سيټو پر بوج باندي د عمليو په هکله ډيری په زړه پوری نتيجې د ترکيب په بڼه يعنی combinatorial charachter لاسته راوړای سو، چې په 4.4-6.4 رسالو کې به بحث پر وسي.

1.4. د شمېرنې عمليې د سيټو پر بوج باندي

پدې رساله کې د سيټو د بوج جمع ، ضرب او طاقت تعريفوو.و به ښيو چې د شمېرنې دغه ډول عمليې د سيټو پر بوج باندي پر طبيعي عددو باندي او يا پر حقيقي عددو باندي د شمېرنې و عمليو ته ورته خاصيتونه لري.

د لمړي ټولګي زده کونکي دري او ځلور داسي جمع کوي (4+3)، چې پر يوه لاس دري ګوتې او پر بل لاس ځلور ګوتې اوړدي کي او بيا ددواړو لاسو اوږدي سوي ګوتې شمېري. په بله اصطلاح په يوه لاس کې يې هغه سيټ چې بوج يې درى دي او په بل لاس کې يې هغه سيټ چې بوج يې ځلور دي را ښکاره کړه او په نتيجه کې يې دهغو دوو سيټو د يووالي بوج وشمېرئ. دغه کار بيله دي چې پدي پوه سي، په طبيعي ډول فرضوي چې هغه دوه سيټونه بايد مشترک عنصر ونلري . دغه ډول طبيعي کړنه زموږ دپاره د بوج د جمع د تعريف اساس ګرځي.

وايو چې د C د سيټ بوج د A او B د سيټو د بوج جمع ده، د |C|=|A|+|B| په څېر به يې ليکو، که د C په سيټ کې د A_1 او B_1 سيټونه داسي وجود ولري ، چې لاندي شرطونه پر ځای کي:

$$A_1 \cap B_1=\emptyset \qquad (1.1)$$

$$A_1 \cup B_1=C \qquad (1.2)$$

$$|A_1|=|A|\ ,\ |B_1|=|B| \qquad (1.3)$$

زموږ د قراردادو سره سم، کولای سو چې پورتنئ تعريف داسي هم فورمولبندي کو: که γ , β, α بوج وي، نو وايو چې γ د α او β د بوج د جمع حاصل دي، $\gamma=\alpha+\beta$ په څېر به يې ليکو، که د C ، A_1 او B_1 سيټونه د (1.1) او (1,2) خاصيتو سره داسي وجود ولري ، چې $|A_1|=\alpha$, $|B_1|=\beta$ وي.

طبعاً سمدلاسه دوه سواله پيداکېږي ، يو داچي آيا تل د بوج د جمع حاصل وجود لري ، بل داچي آيا زموږ تعريف صحيح دي؟

لمړئ به د تعریف درستوالي وڅېړو. په خپل ذات کي مو د $|A|+|B|$ بوج د A او B د سیټو په مرسته (نه د هغوی د بوج په مرسته) او دC د سیټ په مرسته تعریف کي. آیا د« تعریف» نتیجه به په هغه صورت کي چي د راکړه سوو سیټو په بدل کي نور سیټونه د عین بوج سره راواخلو، تغیر ونه کي؟ دقیقاً باید لاندنۍ استنباط ثابت کړای سو:

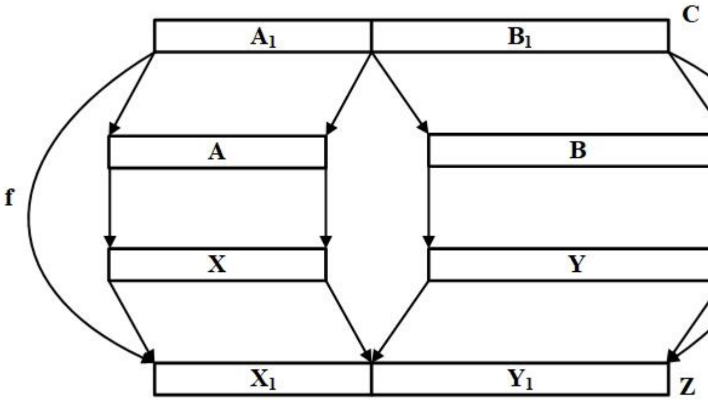
که $|A|=|X|$, $|B|=|Y|,|Z|=|X|+|Y|,|C|=|A|+|B|$ وي، نو $|C|=|Z|$ دي.

وبه ښیو چي پورتني ادعا په رشتیا صدق کوي. فرضوو چي:
$|A|=|X|$ $|B|=|Y|,|Z|=|X|+|Y|,|C|=|A|+|B|$دي. بیا نو د A_1 او B_1 سیټونه د $(1.1)-(1.3)$ خاصیتو سره او د X_1 او Y_1 سیټونه داسي وجود ولري ، چي $X_1\cup Y_1=Z$ ، $X_1\cap Y_1=\emptyset$ ، $|Y_1|=|Y|$, $|X_1|=|X|$ دي. دبوج د مساوات د انتقالي خاصیت پر بنسټ (الف3.1.1 قضیه) $|A_1|=|X_1|$ او $|B_1|=|Y_1|$ دي.پدی معنی چي د g,f بایجکشنونه د A_1 ، B_1 سیټوڅخه د X_1 , Y_1 پر سیټو باندي وجود لري (1.4 شکل وګورئ). د $h:C\to Z$ بایجکشن داسي ترسیموو:

د $x\in A_1$ دپاره $h(x)=f(x)$

د $x\in B_1$ دپاره $h(x)=g(x)$

پدی معنی چي $h=f\cup g$ دي.



شکل1.4

تمرین1.1. وښیاست چي د h مپینګ د C څخه پر Z باندي بایجکشن دي.

پدي ډول مو وښودل چي $|C|=|Z|$ دي ، یعنی زموږ تعریف صحیح دي. اوس به یې نو د موجودیت مسئله حل کو. که $A\cap B=\emptyset$ وي، نو کافي ده چي $C=A\cup B$ سره کښېږدو، بیانو څرګنده ده چي $|C|=|A|+|B|$ دي. که $A\cap B\neq\emptyset$ وي ، نو بیا به څه کوو؟دلته ضرور دي چي د A او B سیټونه په یو ډول سره «جدا»(پدی معنی چي یو دبله سره مشترکه برخه ونلري) ، کو. خو دغه کار په ډیره ساده ګی سره سرته رسیدلای سي. دوه مختلف عنصرونه رااخلو، د بېلګې په توګه 0 او 1 ، بیانو د $A_1=A\times\{0\}$ او $B_1=B\times\{1\}$ سیټونه جوړوو.لیدل کېږي چي $|A_1|=|A|$, $|B_1|=|B|$ او $A_1\cap B_1=\emptyset$ دي. اوس نو کفایت کوي چي $A_1\cup B_1=C$ سره کښېږدو او $|C|=|A|+|B|$ صدق کوي. پدي ډول مو د بوج د جمع د موجودیت سوال ته هم مثبت جواب ورکي.

بېلګه 1.1. الف) لاندنۍ اړیکه صدق کوي:

$$\left|(0,1)\right| = \left|(0,1)\right| + \left|\left\langle\frac{1}{2}, 1\right)\right|$$

کفایت کوي چي $A_1 = (0, \frac{1}{2})$ ، $B_1 = \left\langle\frac{1}{2}, 1\right)$ سره کښېږدو، او د 2.1.3 الف) د بېلګي د نتیجي یا د 1.1.3 ب) تمرین څخه کار واخیستل سي.

ب) د 6.3 رسالي د نتیجو پر اساس $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ کېږي، پدی معنی $|N| + |N| = |N|$ دي.
کافي ده چي $N = A_1 \cup B_1$ سره داسي کښېږدو ، چي A_1 به د ټولو جفتو طبیعي عددو او B_1 د ټولو طاقو طبیعی عددو سیټ وي.

ج) د هر سیټ A دپاره |A|=|A|+|∅| صدق کوي، پدی معنی چي |A|=|A|+0 دي

■

تمرین 2.1. د 1.3 او 3.3 رسالو د نتیجو په پکار اچولو سره ثابت کي چي **c+c=c** (په یاد یي ولري چي **c** د کانتینووم بوج دي!)

اوس به نو د بوج د ضرب حاصل تعریف کو. وایو چي د C د سیټ بوج د A او B د سیټو د بوج د ضرب حاصل دي، $|C| = |A|\cdot|B|$ لیکو، که :

$$|C| = |A \times B| \qquad (1.4)$$

وي. د حاصل ضرب موجودیت بدیهي دي ، ځکه چي $|A \times B| = |A|\cdot|B|$ دي. پاته کېږي د تعریف د صحیحوالي ضرورت .

تمرین 3.1. وښیاست که $|A| = |X|, |B| = |Y|$ وي، نو $|A|\cdot|B| = |X|\cdot|Y|$ دي.

بېلګه 2.1. الف) $0\cdot|A| = |A|\cdot 0 = 0$ ، ځکه چي $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$ دي.

ب) $|A|\cdot 1 = |A|$ ، ځکه چي $|A \times \{0\}| = |A|$ دي.کفایت کوي چي د x∈A دپاره f(x)=[x,0] کښېږدو او $f: A \xrightarrow[1-1]{} A \times \{0\}$ دي.

ج) د 2.6.3 قضیې نتیجه د $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ په شکل لیکلای سو.

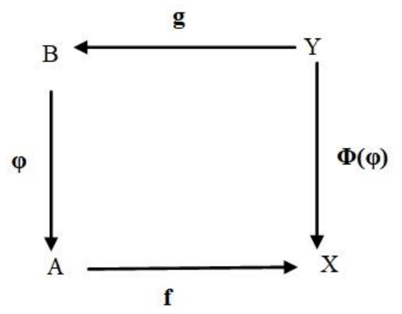
د) $|A|\cdot 2 = |A| + |A|$ دي. دلته کافي ده چي $A_1 = A \times \{0\}$ او $B_1 = A \times \{1\}$ سره وټاکو. په نتیجه کي $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, $|A_1| = |B_1| = |A|$ او $A_1 \cup B_1 = A \times \{0,1\}$ دي.

■

تمرین4.1. د 6.3 رسالي په مرسته دn∈N دپاره $\aleph_0 \cdot n$ تعین کي.

بله عملیه د بوج د طاقت عملیه ده. د 2.2 رسالي څخه يې درپياد کي چي د Y^X پذريعه مو د X د سيټ څخه د Y په سيټ کي د ټولو مپينګو سيټ په نښه کړي ؤ(2.2.7 و ګورئ).وايو چي د C د سيټ بوج د B د سيټ د بوج په طاقت د A د سيټ بوج دي، $|C|=|A|^{|B|}$ په شکل يې ارائه کوو ، که $|C|=|{}^{B}A|$ وي. د $|A|^{|B|}$ د طاقت موجوديت د ضرب د عمليې په شان ، بديهې دي.د تعريف د درستوالي ثبوت هم دونه مشکل ندي ، خو د فکري تجرد له مخي لږ څه پيچلي دي. بايد وښيو، چي که $|X|=|A|, |Y|=|B|$ وي، نو $|{}^{B}A|=|{}^{Y}X|$ دي.

فرضوو چي $|X|=|A|, |Y|=|B|$ دي.پدي معنی چي د $f:A \longrightarrow X$ او $g:Y \longrightarrow B$ بايجکشنونه وجود لري(پاملرنه وکي چي د بايجکشنو مسير په ډيره زيرکي سره غوره سوی دي). د $\Phi: {}^{B}A \longrightarrow {}^{Y}X$ بايجکشن و ترسيم ته ضرورت دي.زموږ د غوښتني د بايجکشن ترسيم ساده دي (4.2 شکل وګورې). که $\varphi \in {}^{B}A$ وي نو $\Phi(\varphi)=g \circ \varphi \circ f \in {}^{Y}X$ دي.



شکل 2.4

و به ښيو چي د Φ مپينګ بايجکشن دي. که فرضاً $\varphi_1, \varphi_2 \in {}^{B}A$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ وي، نو $b \in B$ داسي وجود لري ، چي $\varphi_1(b) \neq \varphi_2(b)$ دي. څرنګه چي د g مپينګ سرجکشن دي، نو د کم $y \in Y$ دپاره $b=g(y)$ ده. په آسانۍ سره ليدل کيږي چي $\Phi(\varphi_1)(y) \neq \Phi(\varphi_2)(y)$ پدي معني چي $\Phi(\varphi_1) \neq \Phi(\varphi_2)$ دي. د بلی خوا که $\psi \in {}^{Y}X$ وي، نو کفايت کوي چي $\varphi = g^{-1} \circ \psi \circ f^{-1}$ سره کښيږدو. بيانو $\Phi(\varphi)=g \circ \varphi \circ f = g \circ (g^{-1} \circ \psi \circ f^{-1}) \circ f = \psi$ دي . پدی معنی چي Φ هم سرجکشن دي.

بېلګه3.1. الف) دهر سيټ A دپاره $|A|^0=1$ صدق کوي. ځکه چي ${}^{\varnothing}A=\{\varnothing\}$ دي. په همدي ډول د $A \neq \varnothing$ دپاره $0^{|A|}=0$ دي، ځکه چي ${}^{A}\varnothing=\varnothing$ دي (پدی شرط چي $A \neq \varnothing$ وي!).

ب) دهر سيټ A دپاره $|A|^1=|A|$ دي. ځکه چي د $\Phi: A \longrightarrow {}^{\{0\}}A$ مپينګ چي $\Phi(x)=\{[0,x]\}$ پر نسخه تعريف سوي دي، د بايجکشن مپينګ دي.

ج)د 2.5.6 بېلګي د نتيجي پر بنسټ $|\mathscr{P}(A)|=2^{|A|}$ دي. که ${}^{B}A \subseteq \mathscr{P}(A \times B)$ ته ځير سو ، نو د A او B اختياري سيټو دپاره :

$$|A|^{|B|} \leqq 2^{|A| \cdot |B|} \qquad (1.5)$$

صدق کوي.

■

تمرين 5.1. د 6.3 رسالي د نتيجو په مرسته د $n\in N$ دپاره $\aleph_0^n$ و شمېري.

د سيټو پر بوج باندي هغه عمليې چي سمدلاسه مو تعريف کړي، پر طبيعي عددو باندي عمليو ته ورته خاصيتونه لري. د بېلګي په توګه ټوله عمليې يکنواخت (يو رنګه) monotone دي، پدي معنی که $|A|\leqq|X|$ او $|B|\leqq|Y|$ وي، نو :

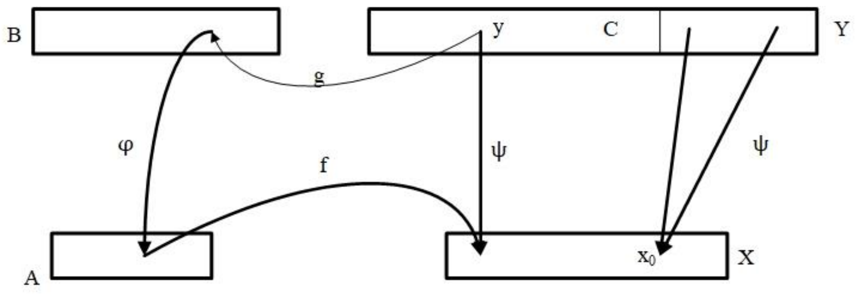
$$|A|+|B|\leqq|X|+|Y| \qquad (1.6)$$

$$|A|\cdot|B|\leqq|X|\cdot|Y| \qquad (1.7)$$

$$|A|^{|B|}\leqq|X|^{|Y|} \qquad (1.8)$$

د (1.6) او (1.7) ثبوت ساده دي ، اصلاً د هغوپه اړوند د تعريف د صحيحوالي دثبوت په لړ تغير سره ثابتيدلای سي. د (1.8) اړېکي ثبوت لږ څه پيچلی دی. کفايت کوي چي د $X\neq\emptyset$ حالت و څېړو. ځکه چي، که $X=\emptyset$ وي، نو نوموړي اړېکه د 3.1 الف) بېلګي د نتيجي څخه استنباط کيږي.

څرنګه چي $X\neq\emptyset$ دي، نو $x_0\in X$ وجود لري. د $|A|\leqq|X|$ او $|B|\leqq|Y|$ غير مساواتو څخه د $f:A\longrightarrow X$ انجکشن مپينګ او دY د کوم سب سيټ C دپاره د B $g:C\xrightarrow[1-1]{}B$ بايجکشن مپينګ موجوديت استنباط کيدای سي. د $\Phi:{}^{B}A\longrightarrow{}^{Y}X$ انجکشن مپينګ داسي ترسيموو(3.4 شکل وګورئ):



شکل 3.4

که $\varphi\in{}^{B}A$ وي، نو $\Phi(\varphi)=\psi$ سره ايږدو.، پداسي حال کي چي د $y\in C$ دپاره $\psi(y)=g\circ\varphi\circ f(y)$ او د $y\in Y-C$ دپاره $\psi(y)=x_0$ دی.

تمرين 6.1. وښياست چي د Φ مپينګ انجکشن دي.

بېلګه4.1. که د $|A|\leqq|X|$ او $|B|\leqq|Y|$په غيرمساواتو کي ، يو غير مساوات تېره (يعنی د $\leqq$ پر ځای$>$ وي) وي، نو په (1.8)-(1.6) غير مساواتو کي حتمی نده چي تېره غير مساوات دي صدق وکي. د بېلګي په ډول $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0+0$ او $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0\cdot1$ دي. د (1.5) پر بنسټ $2^{\aleph_0}\leqq\aleph_0^{\aleph_0}\leqq2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ صدق کوي.

■

د بوج په جمع او ضرب کي د طبيعی عددو د شمېرني اصول صدق کوي، د بېلګي په توګه د جمع عمليه تبديلي خاصيت لري:

$$|A|+|B|=|B|+|A| \qquad (1.9)$$

اتحادي خاصيت لري:

$$(|A|+|B|)+|C|=|A|+(|B|+|C|) \qquad (1.10)$$

د ضرب عمليه تبديلي خاصيت لري، يعني:

$$|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A| \qquad (1.11)$$

اتحادی خاصيت لري:

$$(|A|\cdot|B|)\cdot|C|=|A|\cdot(|B|\cdot|C|) \qquad (1.12)$$

د ضرب عمليه نظر د جمع عمليي ته توزيعي خاصيت لري:

$$|A|\cdot(|B|+|C|)=(|A|\cdot|B|)+(|A|\cdot|C|) \qquad (1.13)$$

تمرين 7.1. (1.9) –(1.13) اړېکي ثابت کئ.

د بوج د طاقت دپاره هم د طبيعی عددو د طاقت و خاصيتو ته ورته خاصيتونه صدق کوي:

$$|A|^{|B|+|C|}=|A|^{|B|}\cdot|A|^{|C|} \qquad (1.14)$$

$$(|A|\cdot|B|)^{|C|}=|A|^{|C|}\cdot|B|^{|C|} \qquad (1.15)$$

$$(|A|^{|B|})^{|C|}=|A|^{|B|\cdot|C|} \qquad (1.16)$$

د نموني په ډول به (1.16) ثابت کو. طبعآ کافي ده چي د بايجکشن مپينګ د $^{C}(^{B}A)$ د سيټ څخه د $^{B\times C}A$ پر سيټ باندي ترسيم کړو.که $\varphi\in{}^{C}(^{B}A)$ وي ، نو φ داسي مپينګ دي چي و هر $c\in C$ ته $\varphi(c)\in{}^{B}A$ دي. د $\psi\in{}^{B\times C}A$ مپينګ د $[b,c]\in B\times C$ دپاره د لاندني مساوان پذريعه تعريفوو:

$$\psi([b,c])=\varphi(c)(b) \qquad (1.17)$$

که $\Phi(\varphi)=\psi$ سره کښيږدو ، نو Φ زموږ مطلوب بايجکشن دي.يقيناَ، که $\varphi_1,\varphi_2\in{}^{C}(^{B}A)$ ، $\varphi_1\neq\varphi_2$ وي ، نو داسي c وجود لري، چي $\varphi_1(c)\neq\varphi_2(c)$ دي. پدي معنی چي $b\in B$ داسي وجود لري ، چي $\varphi_1(c)(b)\neq\varphi_2(c)(b)$ دي. د وروستي مساوات او (1.17) اړېکي څخه $\Phi(\varphi_1)\neq\Phi(\varphi_2)$ استنباط کيږي.

که $\psi\in{}^{B\times C}A$ ولرو ، نو کفايت کوي چي $\varphi(c)=h$ داسي تعريف کړو چي $h(b)=\psi([b,c])$ وي. پدی صورت کي $\Phi(\varphi)=\psi$ دي . پدی معنی چي د Φ مپينګ بايجکشن دي.

تمرين 8.1. د (1.14) او (1.15) مساواتونه ثابت کي.

بېلګه 1.5. الف) د 1.2)الف بېلګي پر اساس $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}\cdot 2$ صدق کوي. د 1.3)ب بېلګي او (1.14) له مخي : $2^{\aleph_0}\cdot 2=2^{\aleph_0+1}$ دي.

څرنګه چي $\aleph_0+1=\aleph_0$ کېږي، نو :

$$2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$

ب) د 1.4 بېلګي پر بنسټ $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$ صدق کوي. ځکه نو د (1.16) اړېکي پر اساس لاندنی مساوات صدق کوي:

$$(\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$

پدی معنی چي $({}^{N}N)^{N}$ يعني د طبيعی عددو د لاړو ، دلاړو سيټ د ټولو 0 او 1 د لاړو د سيټ ${}^{N}\{0,1\}$ سره مساوي بوج لري.

ج) د (1.15) په استفادي سره $2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ لاسته راځي.

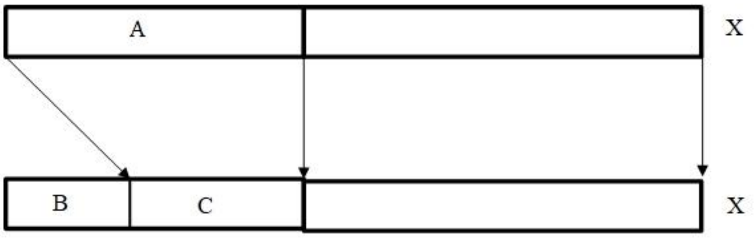
■

تمرين 9.1. د $n^{\aleph_0}$ بوج وشمېري.

بېلګه 6.1. که $|X|\geqq\aleph_0$ وي ، نو $|X|+\aleph_0=|X|$ دي. نوموړي ادعا به ثبوت کړو.

د $|X|\geqq\aleph_0$ څخه استنباط کېږي ، چي د A⊆X سيټ داسي وجود لري ، چي $|A|=\aleph_0$ دي.
پوهيږو چي $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ دي ، ځکه نو د C,B⊆A داسي وجود لري چي B∪C=A, B∩C=∅ ، $|B|=|C|=\aleph_0$ (4.4 شکل وګورئ) دي. په اساني سره ليدل کېږي،چي :

|X|=|X−A|+|A|=|X−A|+|C|=|X−B|



شکل 4.4

دبلي خوا |X|=|X−B|+|B| دي. ځکه نو |X|=|X|+|B| دي.

■

بېلګه7.1. پدي بېلګه کي به وښيو چي د غير ناطقو R−Q عددو د سيټ بوج د حقيقي عددو R د سيټ د بوج سره مساوي دي، پدي معنی چي **c**=|R−Q| دي.

پوهېږو چي $\sqrt{2}$ غير ناطق عدد دي. نو هرومرو د طبيعی عدد $n\in N$ دپاره $n+\sqrt{2}$ هم غير ناطق عدد دي. پدي حساب د $f(n)=n+\sqrt{2},\ f:N\xrightarrow{1-1}R-Q$ بايجکشن مپينګ ترسيمولای سو. پدي معنی چي $|R-Q|\geqq\aleph_0$ دي. دتېري ښېلګي پر اساس د $|R-Q|=|R-Q|+\aleph_0$ اړيکه صدق کوي. د بله پلوه $|R|=|R-Q|+|Q|=|R-Q|+\aleph_0$ لرو.

په مجموع کي **$|R-Q|=|R|=c$** لاسته راځي.

■

تمرين 10.1. د $R-Q$ د سيټ څخه د R پر سيټ د بايجکشن مپينګ ترسيم کي.

فرضوو چي د هر $t\in T$ دپاره د α_t بوج راکړه سوي دي. د بوج د سيسټم حاصل جمع داسي تعريفوو: د $\sum_{t\in T}\alpha_t$ د جمع حاصل د داسي سيټ C بوج دي، چي د نومړي سيټ دپاره د سب سيټو سيسټم $\{A_t,\ t\in T\}$ د لاندنيو خصوصياتو سره وجود لري:

$$\bigcup_{t\in T}A_t=C \tag{1.18}$$

$$A_t\cap A_{t'}=\varnothing\ ;\ t\neq t'\ ;\ t,t'\in T \tag{1.19}$$

$$|A_t|=\alpha_t\qquad;\ \forall t\in T \tag{1.20}$$

تمرين 11.1. ثابت کي چي د $\sum_{t\in T}\alpha_t$ د جمع حاصل تل وجود لري او دتعريف درستوالی ثابت کي. پاملرنه وکي چي دلته به مجبوره سي چي د غير مجاز ساختمان څخه کار واخلي.

ښېلګه 8.1. الف) وبه ښيو چي $\sum_{n\in N}n=\aleph_0$ دي. کفايت کوي چي د A_n ، $n\in N$ د سيټو سيسټم داسي جوړ کړو، چي د نومړي سيسټم سيټونه يو دبله سره مشترکه برخه ونلري ، $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=N$ وي او $|A_n|=n$ وي. کافي ده چي $n=0$ دپاره $A_0=\varnothing$ او د $n\in N,\ n>0$ دپاره $A_n=\{k\in N;\ \frac{1}{2}n(n-1)<k\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\}$ کښېږدو.

ب) پدي ښېلګه کي به وښيو که د هر $t\in T$ دپاره $\alpha_t=\alpha$ وي ، نو $\sum_{t\in T}\alpha_t=|T|\cdot\alpha$ دي.

فرضوو چي A اختياري سيټ دي او بوج يې د α سره مساوي کېږي. د $t\in T$ دپاره $A_t=\{[t,x];\ x\in A\}$ په نښه کوو. فرضوو چي $C=T\times A$ دي. ښيانو $|C|=|T|\cdot\alpha$ او د $(1.18)-(1.20)$ خاصيتونه صدق کوي.

ج) که د هر $t\in T$ دپاره $\alpha_t \leqq \beta_t$ وي ، بيا نو $\sum_{t\in T}\alpha_t \leqq \sum_{t\in T}\beta_t$ دي.ددی ادعا په ثبوت کي به زيرک لوستونکي دي ته متوجه سي چي د ثبوت په کړنلاره کي د غير مجاز ساختمان څخه کار اخلو او هغه عبارت دي د ټاکني د اکسيومي (Axiom of choice) څخه.

فرضوو چي $|C| = \sum_{t\in T}\alpha_t$ دي او د (1.18)−(1.20) خاصيتونه صدق کوي. همدا ډول فرضوو چي $|D| = \sum_{t\in T}\beta_t$ او $\{B_t, t\in T\}$ د D د سيټ د سب سيټو سيسټم دي د ذکر سوو خاصيتو سره.فلهذا د هر t دپاره $\alpha_t=|A_t|\leqq|B_t|=\beta_t$ دي. ځکه نو د $f_t : A_t \xrightarrow{1-1} B_t$ انجکشن وجود لري. د f انجکشن د C د سيټ څخه د D په سيټ کي د $x\in A_t$ دپاره $f(x)=f_t(x)$ سره تعريفوو. جزئيات پرېږدم و لوستونکي ته چي خپل يقين حاصل کي.

د) د ب) او ج) د بېلګو څخه په مستقيم ډول لاندي نتيجه لاسته راځي:

که د هر $t\in T$ دپاره $\alpha\leqq \alpha_t\leqq\beta$ وي ، نو $\alpha\cdot|T| \leqq \sum_{t\in T}\alpha_t \leqq \beta\cdot|T|$ دي.

■

تمرين 12.1. الف) که د T سيټ متناهي وي، د 8.1 بېلګي د ج) او د) د ثبوت دپاره د 3.1 رسالي اصول کفايت کوي. ثابت يې کي.

ب) د 8.1 بېلګي د الف) برخه د د همدي بېلګي د د) په مرسته ثابت کي.

د بوج د سيسټم حاصل ضرب هم په ورته ډول تعريفولای سو. د $\prod_{t\in T}\alpha_t$ د A_t سيټو د کارتيزين ضرب $\prod_{t\in T}A_t$ د بوج په صفت درک کوو، پداسي حال کي چي د هر $t\in T$ دپاره د A_t د سيټ بوج α_t دي.

تمرين 13.1. د بوج د سيسټم د حاصل ضرب د تعريف درستوالئ ثابت کي. دلته هم د ټاکني اکسيوم ته ضرورت لرو.

تمرين 14.1. فرضوو چي $T= T_1\cup T_2$, $T_1\cap T_2=\emptyset$ دي. بيا نو :

$$\sum_{t\in T}\alpha_t = \sum_{t\in T_1}\alpha_t + \sum_{t\in T_2}\alpha_t \qquad (1.21)$$

$$\prod_{t\in T}\alpha_t = \prod_{t\in T_1}\alpha_t \cdot \prod_{t\in T_2}\alpha_t \qquad (1.22)$$

پورتني اړيکي ثابت کئ.

بېلګه 9.1. الف) که د هر $t\in T$ دپاره $\alpha_t\leqq \beta_t$ وي، بيانو $\prod_{t\in T}\alpha_t \leqq \prod_{t\in T}\beta_t$ دي. په رشتيا هم ، فرضوو چي د هر $t\in T$ دپاره $|A_t|= \alpha_t$, $|B_t|= \beta_t$ دي. بيانو $\prod_{t\in T}\alpha_t = \left|\prod_{t\in T}A_t\right|$ او

دي. د هر tϵT دپاره $|A_t|\leqq|B_t|$ دي ، بدی معنی چي د $f_t:A_t\longrightarrow B_t$ د $\prod_{t\in T}\beta_t=\left|\prod_{t\in T}B_t\right|$
انجکشن مپینگ وجود لري. د $f:\prod_{t\in T}A_t\longrightarrow\prod_{t\in T}B_t$ انجکشن داسي تعریفوو:

که $\varphi\in\prod_{t\in T}A_t$ وي ، نو $f(\varphi)=\psi$ داسي ابېردو چي د هر tϵT دپاره $\psi(t)=f_t(\varphi(t))$ وي.

ب)که د هر tϵT دپاره $\alpha_t=\alpha$ وي، نو $\prod_{t\in T}\alpha_t=\alpha^{|T|}$ دي. که $\alpha_t=\alpha=|A|$ وي ، نو د $\prod_{t\in T}A_t$ کارتیزین ضرب ، پداسي حال کي چي د هر tϵT دپاره $A_t=A$ وي ، د T د سیټ څخه د A په سیټ کي د ټولو مپینګو سیټ ، یعنی A^T دي(8.5.2 بېلګه وګورئ).

ج) وبه ښیو چي $\prod_{n=1}^{\infty}n=2^{\aleph_0}$ دي. ځرنګه چي د هر $n\in N-\{0\}$ دپاره $n\leqq\aleph_0$ دي، نو د الف) او ب) پر اساس $\prod_{n=1}^{\infty}n\leqq\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ دي. په اساني سره لیدل کیږي چي $\prod_{n=1}^{\infty}n=\prod_{n=2}^{\infty}n$ دي. په وروستي ضرب کي بیا هم هر مضرب تر 2 لوی دي، ځکه نو ټوله د ضرب حاصل په مجموع کي تر $2^{\aleph_0}$ لوی یا مساوي دي. ■

نور تمرینونه

15.1. وښیاست چي د هر سیټ A دپاره د $|A|\geqq\aleph_0$ شرط د $|A|=|A|+1$ مساوات سره معادل دي.

16.1. که دA سیټ خالي نه وي او د $|A|=|A|+|A|$ مساوات صدق وکي، نوثابت کی چي $|A|\geqq\aleph_0$ دي.

17.1. فرضوو چي دA سیټ لږتر لږه دوه عنصره لري او $|A|=|A|\cdot|A|$ وي، بیا نو لاندې اړیکي ثابت کي:

الف) $|A|\geqq\aleph_0$ ؛

ب) $|A|\cdot\aleph_0=|A|$ ؛

ج) د هر m,n>0 د پاره $|A|^n=|A|^m$ دي.

18.1. ثابت کي چي د هر بوج $\alpha\geqq2$ دپاره $2^{\alpha}\leqq\alpha^{\alpha}\leqq2^{\alpha\cdot\alpha}$ صدق کوي.

19.1. ثابت کي چي لاندني اړیکي صدق کوي:

الف) $\aleph_0+\mathbf{c}=\mathbf{c}$ ؛

ب) $|Z\times\langle0,1)|=\mathbf{c}$ ؛

ج)$\aleph_0\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}$ ؛

د) $n\neq 0,\ n\in N$ دپاره $2\cdot\mathbf{c}=n\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}$.

20.1. وښياست چي د ترانسندنت حقيقي عددو د سيټ بوج **c** (کانتينووم) دي.

21.1. د بوج د سيستم د جمع او ضرب د عمليي دپاره تبديلي قانون ثابت کي. پدي معنی که $t,\alpha\in T$ بوج وي او $\varphi:T\longrightarrow T$ بايجکشن وي، بيا نو:

$$\sum_{t\in T}\alpha_t=\sum_{t\in T}\alpha_{\varphi(t)}$$

او

$$\prod_{t\in T}\alpha_t=\prod_{t\in T}\alpha_{\varphi(t)}$$

22.1. د اتحادی قانون عموممي بنه د 14.1 تمرين په څېر فورمولبندي او ثبوت کي.

23.1. فرضوو $T=\{0,1,...,n\},i\in T,\ \alpha_i$ بوج دي. ثابت کي چي:

$$\sum_{i\in T}\alpha_i=\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n$$

$$\prod_{i\in T}\alpha_t=\alpha_0\cdot\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_n$$

2.4. د کانتور قضيه

پدي رساله کي به ځني پارادکسونه (تنقيضونه) تحليل کړو، د هغو د سپړلو په نتيجه کي د سيټ د بوج او او دسيټ د ټولو سب سيټو ترمنځ اړيکه ثبوتولای سو.

تراوسه مو پر بوج باندي د شمېرني د عمليو په اړوند کم خاص د پام وړ نتيجه نده ثبوت کړي. علت يې دادي چي دغه ډول لاسته راوړني لږ دي. پدي رساله کي يو د کلاسيکو او مهمو غير مساواتو څخه ثابتوو. خو لمړی به يې دبله سره راوښلوو.

د نولسمي پېړي په پای کي د رياضي د پارادکسو څخه يو هم د رسل B. Russel پارادکس ؤ، په لاندي ډول دخلکو پر ژبه ؤ: يوه کلي يو سلمان (دلاک) درلودي، هغه د خپل دکان پر سرليک (لوحه) ليکلې وه چي د کلي ټولو هغو خلکو، چي پخپله ږيره نه خروي، ږيره يې ورخروی. يوه ورځ يو چا د دلاک څخه پوښتنه وکړه چي ستا ږيره څوک درخروی؟ که په خپله خپله ږيره ونه خروي ،نود «سلمان» په صفت بايد ږيره يې چېته خرولي واي او که يې پخپله ، خپله ږيره خرولی وي، نو هغه ددی کلی اوسيدونکئ ندی، ځکه چي د کلی دخلکو ،چي خپله ږيره پخپله نه خروی نو سلمان يې ورخروي.

پدی ډول يو تناقض منځ ته راغلی ، ددی حالت څخه دوتلو لار داده چي په دغه ډول خصوصياتوسلمان وجود نلري.

اوس به نو موضوع لږ څه په غور سره وڅېړو. د خلکو ټولنه په نظر کي نيسو. نوموړې ټولنه مختلفي اتحاديي جوړوي ،فرضوو چي دوي اتحاديي سره مساوی دي که هغوی عين غړي ولري، پدی معنی چي اتحاديه بيله خاص ساختمان څخه د خلکو ګروپ دی. اوس نو فرضوو چی هر

اتحاديه يو كنترولر لري، حتمی نده، خوكيدای سي چي د هغي اتحاديي غړي وي. پدي معنی چي د يوي اتحاديي كنترولر كيدای سي دهغی اتحاديي غړئ وي، خو حتمی نده. اوس نو سوال پيداكيږي چي آيا مختلفي اتحاديي مختلف كنترولران درلودلای سي؟ وبه ښيو، په هغه صورت كي چي ټولي ممكني اتحاديي جوړي كړو، داشئ امكان نلري.

كه فرضاً مختلفو اتحاديو مختلف كنترولران درلودلای ، نو و هري اتحاديي ته مو يو كنترولر اختصاص وركي. د دغه تخصيص څخه د نوي اتحاديي يعنی د كنترولرانو د اتحاديي $\mathscr{E}$ د جوړښت دپاره كار اخلو. يو كنترولر د دباندني كنترولر په نامه يادوو كه هغه د يو ی اتحاديي كنترولر وي او پخپله د هغي اتحاديي غړئ نه وي. د $\mathscr{E}$ اتحاديه به د دباندني كنترولرانو د اتحاديي په نامه ياد كړو. د $\mathscr{E}$ اتحاديه هم كنترولر k لري. اوس نو پوښتنه كيږي، چي آيا كنترولر k د $\mathscr{E}$ غړئ دي؟كه كنترولر k د $\mathscr{E}$ غړئ وي ، نو د اتحاديي د قانون له مخي هغه بايد دباندنئ وي ، پدی حساب بايد د $\mathscr{E}$ غړئ نه وي. كه د $\mathscr{E}$ غړئ نه وي ، نو څرنګه چي هغه دباندنئ كنترولر دي ، نو بايد د $\mathscr{E}$ غړئ وي.

تشريح يې ساده ده.د $\mathscr{E}$ اتحاديه دباندنئ كنترولر نسي درلودای. داتحاديو شمېرتر ممكنو كنترولرانو تر شمېرډېردي.

قضيه 1.2. (د كانټور قضيه). د هر سيټ X دپاره :

$$|X|<|\mathscr{P}(X)|$$

دي.

ثبوت. د X د سيټ څخه د $\mathscr{P}(X)$ په سيټ كي په اساني سره ساده مپينګ ترسيمولای سو. د بېلګي په ډول د $x\in X$ دپاره $f(x)=\{x\}$ نوموړی مپينګ دي. ځكه نو :

$$|X|\leqq|\mathscr{P}(X)|$$

اوس به نو ثابت كو چي په پورتني اړيكه كي مساوات صدق نه كوي.په غير مستقيمه بڼه يې ثابتوو.فرضوو چي $|X|=|\mathscr{P}(X)|$ دي. پدي معنی چي د X د سيټ او د $\mathscr{P}(X)$ ترمنځ دبايجكشن مپينګ $h:X\xrightarrow[1-1]{\text{ر}}\mathscr{P}(X)$ وجود لري.

د «دباندني كنترولرانو» پر اتحاديي ځانونه باوري كوو:

$$E=\{x\in X\ ;\ x\notin f(x)\} \qquad (2.2)$$

څرګنده ده چي $E\subseteq X$ دي.نو پدی لحاظ $E\in\mathscr{P}(X)$ دي .څرنګه چي د f مپينګ سرجكشن دي، نو د «كنترولر» $k\in X$ داسي وجود لري، چي $f(k)=E$ دي، خو د E د سيټ دتعريف له مخي:

$$x\in E\equiv x\notin f(x)$$

په خاص ډول :

$$k\in E\equiv k\notin f(k)$$

څرنګه چي $f(k)=E$ دي، نو:

$$k\in E\equiv k\notin E$$

زموږ مطلوب تناقض دي.

q.e.d.

نتيجه 1. د هر α بوج دپاره :

$$\alpha < 2^{\alpha} \qquad (2.3)$$

صدق کوي.

نتيجه 2. لويترين بوج وجود نلري.

نتيجه 3. د ټولو سيټو سيټ وجود نلري.

ثبوت. د تناقض په طريقه يې ثبوتوو. که د ټولو سيټو سيټ M وجود درلودلای، نو هر سيټ به د هغه عنصر وای. په خاص ډول $\mathcal{P}(M) \subseteq M$ وای.بيا به نو $|\mathcal{P}(M)| \leqq |M|$ وي.خو دغه حالت د 2.1 قضيې د ادعا سره تناقض لري. q.e.d.

تمرينونه

1.2. فرضوو چي X اختياري سيټ ، $A \subseteq X$ او $f{:}A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ مپينګ دي. ثابت کي چي د f مپينګ سرجکشن ندي.

2.2. فرضوو چي $h{:}\ \mathcal{P}(X) \longrightarrow X$ مپينګ دي.ثابت کي چي h ساده مپينګ ندي.

3.2. د کم سيټ X دپاره $|X| < |^{X}X|$ صدق کوي.

3.4. د طبيعی عددو سره د دوه ډوله شمېرنې په هکله

پدې رساله کي به د هغه حقيقت په هکله وږغېږو چي که څه هم په شعوري شکل مو نه غوښتل ، خو په ظاهره د طبيعی عددو د دوه ډوله شمېرنو سره مخامخ سوو. دلته به وښيو چي دغه ډول شمېرنه درست ده.

طبيعی عددوپه 1.2 رساله د حقيقي عددو څخه د جمع او ضرب عمليې په ميراث واخيستي. په حساب کي مو پر حقيقي عددو د طاقت عمليه هم زده کړه، پدی معنی چي د حقيقي عددو څخه د طاقت عمليه هم په ميراث اخيستلای سي.

په4.3 رساله کي مو قرارداد وکي ، چي د متناهي سيټ بوج به په طبيعی عدد سره ښيو. په تېره رساله کي مو د سيټو د بوج د جمع ، ضرب او طاقت عمليې زده کړي. ځکه نو وايو چي د طبيعي عددو سره په دوه رنګه شمېرنه کوو. که څه هم د عمليو تعريفونه يو دبل څخه بالکل بېل وه، خو وبه ګورو، چي هيڅ غلطي مو نده کړي. ددغی رسالی د ضرورت له مخي د جمع عمليه چي د حقيقي عددو څخه مو په ميراث اخيستي ده ، د $\oplus$ په ډول ښرګنده ؤ. د $+$ نښه به د طبيعي عدد د جمع دپاره د متناهي سيټو د بوج په صفت خوندی کو. دغه ښرګندونه په حقيقت کي د يوي شبېي دپاره ده، ځکه چي لاندني قضيه به ثبوت کړو.

قضيه 1.3. د دوو اختياري طبيعی عددو $m,n \in N$ دپاره لاندنۍ مساوات صدق کوي:

$$m + n = m \oplus n \qquad (3.1)$$

د قضيي د ثبوت دپاره د مرستندوی دعوی ځخه کار اخلو.

ليما 1.3. د دوو اختياري طبيعی عددو $m,n\in N$ دپاره لاندنۍ مساواتونه صدق کوي:

$$m+0=m \qquad (3.2)$$

$$m+(n\oplus 1)=(m+n)\oplus 1 \qquad (3.3)$$

ثبوت: د (3.2) مساوات د 1.1ج) بېلګي ځخه استنباط کېږي. و به ښيو چي د (3.3) مساوات صدق کوي.

په کينه خوا کي دداسي سيټ C بوج ځرګنديږي، چي $A\cap B=\emptyset, C=A\cup B$ او $|A|=m$ ، $|B|=n\oplus 1$ دي. په خاص ډول $B\neq\emptyset$ دي. فرضوو چي $b\in B$ او $D=B-\{b\}$ دي. البته $|D|=n$ دي (1.1 الف) تمرين وګورئ). ځکه نو $|A\cup D|=m+n$ دي. مګر $C=(A\cup D)\cup\{b\}$ دي ، پداسي حال کي چي $b\notin A\cup D$ دي. فلهذا نظر و 1.1 ب)تمرين ته $|C|=|A\cup D|\oplus 1$ دي. پدي ډول (3.3) مساوات ثابت سو. q.e.d.

تمرين 1.3 لاندنۍ « ځرګنده» ادعاوی په جزئياتو سره ثابت کي:

الف) که $x\in X, |X|=n\oplus 1$ وي ، نو $|X-\{x\}|=n$ دي ;

ب) که $y\notin Y, |Y|=n$ وي، نو $|Y\cup\{y\}|=n\oplus 1$ دي.

د قضيي ثبوت: قضيه د رياضي د استقراء په طريقه نظر و n ته ثابتوو. ثابتوو چي د هر m دپاره د (3.1)مساوات صدق کوي.

د $n=0$ دپاره زمونږ ادعا بديهي ده ، ځکه چي د هر m دپاره $m\oplus 0=m$ او نظر و (3.2) ته $m+0=m$ ده.

فرضوو چي د هر m دپاره د (3.1)مساوات صدق کوي. نظر و (3.3) ته $m+(n\oplus 1)=(m+n)\oplus 1$ دي. د استقراء د فرضيي له مخي $m+n=m\oplus n$ کېږي. ځکه نو:

$$m+(n\oplus 1)=(m\oplus n)\oplus 1=m\oplus(n\oplus 1)$$

q.e.d.

نتيجه 1. د دوو متناهي سيټو يووالۍ ، متناهي سيټ دي.

ثبوت: يقناً ، که B,A متناهي سيټونه وي. نو داسي n,m وجود لري، چي $|A|=n$, $|B-A|=m$ دي. بيانو $|A\cup B|=|A|+|(B-A)|=n+m$ دي. فلهذا نظر و ثابتي سوي قضيې ته د $A\cup B$ سيټ هم متناهي دي. q.e.d.

نتيجه 2. د متناهي سيټو متناهي يووالی، متناهي سيټ دي.

په دقيق ډول بايد ووايو که T متناهي سيټ وي او د هر $t\in T$ دپاره د A_t سيټ متناهي وی ، نو $\bigcup_{t\in T} A_t$ متناهي سيټ دي.

د رياضي د استقراء په طريقه نظرد T و بوج ته ، د نتيجه 1 په مرسته په آساني سره ثابتيدلای سي.

تمرين 2.3. پورتني نتيجه ثابته کئ.

پدي ډول د 1.3.قضيه موږته اجازه راکوي چي د جمع عين علامه + د طبيعي عددو د جمع او د سيټ د بوج د جمع دپاره په کار واچوو. ورته حالت د ضرب په هکله هم صدق ، خو دلته به د هغوی د جلا کولو دپاره نوی نښه معرفي نه کړو.

قضيه 2.3. که B,A متناهي سيټونه وي ، |A|=n, |B|=m نو |A×B|=m·n (m·n د حقيقي عددو د ضرب په مفهوم دي).

د جمع عمليي ته ورته لمړئ مرستندويه دعوی ثابتوو.

ليما 2.3. فرضوو چي B,A سيټونه دي، a∉A دي. بيا نو:

$$|\emptyset\times A|=0 \qquad (3.5)$$

$$|(A\cup\{a\})\times B|=|A\times B|+|B| \qquad (3.6)$$

ثبوت. تقريباً بديهي دي. (3.5) د ∅×A=∅ استنباط کيږي. (3.6) د لاندني بديهي مساوات پر اساس صدق کوي:

$$(A\times\{a\})\times B=(A\times B)\cup(\{a\}\times B)$$

$$A\times B\cap(\{a\}\times B)=\emptyset$$

$$|\{a\}\times B|=|B|$$

q.e.d.

د قضيي ثبوت: نظر و n ته درياضي د استقراء په طريقه يې ثابتوو. و به ښيو چي د هر m دپاره |A×B|=n·m صدق کوي.

د n=0 دپاره د (3.5) څخه استنباط کيږي.که قضيه د n دپاره صدق وکي ، |X|=n+1 ، |Y|=m وي، نو کافي ده چي x∈X راواخلو او د استقراء د قدم او (3.6) پر بنسټ لاندي مساوات صدق کوي:

$$|X\times Y|=|(X-\{x\})\times Y|+|Y|=n\cdot m+m=(n+1)\cdot m$$

q.e.d.

نتيجه 1. د متناهي سيټو د کارتيزين سيټ متناهي سيټ دي.

نتيجه 2. که دهر t∈T دپاره د A_t سيټ متناهي سيټ وي ، بيا نو د کارتيزين ضرب $\prod_{i\in T}A_t$ متناهي سيټ دي.

تمرين 3.3. د رياضي د استقراء په طريقه نظر د T و سيټ ته نتيجه 2 ثابت کئ.

راپياد به کړو چي دحقيقي عدد طبيعي طاقت د رياضي د استقراء په طريقه په لاندي ډول تعريف سوی دي:

$$a^0=1 \qquad (3.7)$$

$$a^{n+1}=a\cdot a^n \qquad (3.8)$$

که غواړو چي ثابت کو ، چي دغه ډول تعریف سوی د طبیعي عددو طاقت د سیټو د بوج و طاقت ته ورته دي ، نو کفایت کوي چي د متناهي سیټو دپاره ثابت کو، چي (3.7) او (3.8) خاصیتونه صدق کوي. د (3.7) مساوات نظر و 3.1 الف) بېلګي ته صدق کوي.

د (3.8) مساوات په مستقیمه توګه د (1.14) او 3.1 الف) بېلګي څخه استنباط کېږي. ځکه نو لاندنی قضیه صدق کوي.

قضیه 3.3. که B,A متناهي سیټونه ، $|B|=m, |A|=n$ وي، نو :

$$\left|{}^{A}B\right|=m^{n}$$

دي، پداسي حال کي چي طاقت د حقیقي عدد دطاقت په مفهوم درک کوو.

تمرین 4.3. ښېله دی چي د (1.14) اړېکي څخه کار واخلئ ، قضیه 3.3 په جزئیاتو ثابت کئ.

نتیجه. که B,A متناهي سیټونه وي ، نو ${}^{A}B$, $\mathcal{P}(A)$ متناهي سیټونه دي.

نور تمرینونه:

5.3. د $A_n=\{[k,l]\in N^2;\ \max\{k,l\}=n\}$ سیټ تعریفوو.و ښیاست چي :

الف) د $n\neq m$ دپاره $A_n\cap A_m=\emptyset$ دي.

ب) $|A_n|=2n+1$;

ج) د $n>0$ دپاره $N_n\times N_n=\bigcup_{i=0}^{n-1}A_i$;

د) $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=(n+1)^2$;

ه) پورتنئ څېړني (فیثاغورث ته په هغه وخت کي څرګنده وه) په مناسب ګراف کي ترسیم کئ.

6.3. د تېري بېلګي څېړنو ته ورته لاندني مساواتونه ثابت کئ.

الف) $\sum_{i=0}^{n}(3i^2+3i+1)=(n+1)^3$;

ب) $\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

7.3. فرضوو چي X متناهي سیټ دي. و ښیاست چي د X د سیټ د عنصرو شمېر یوازي او یوازي هغه وخت جفت دي، که د X داسي مپینګ وجود ولري ، چي $f:X\longrightarrow X$:

الف) $f\circ f=id_x$;

ب) د هر $x\in X$ دپاره $f(x)\neq x$ دي.

8.3. د راکړه سوی متناهي سیټ د سب سیټو شمېر څو دئ؟

4.4. د کمبیناتوریک Combinatorics(د ترکیب د شمېرنې) عنصرونه

د ځینو ساده متناهي سیټو ، چي په مختلفو اړیکو کي په زړه پوري دی، د عنصرو شمېر به وشمېرو. دغه کار پدی موخه نه کوو چي د نوموړو سیټو څخه استفاده وڅېړو ، خو د هغوی د بوج خصوصیت به موږته په زړه پوري وي.

نوی سمبول تعریفوو. که X سیټ ، $n \in N$ وي ، نو :

$$[X]^n = \{A \subseteq X;\ |A| = n\}$$

همدا ډول :

$$[X]^{\leqq n} = \{A \subseteq X;\ |A| \leqq n\}$$

$$[X]^{<n} = \{A \subseteq X;\ |A| < n\}$$

په نښه کوو.

لوستونکئ هرومرو فکر کولای سي چي څه ډول به د $[X]^{\geqq n}$, $[X]^{<\aleph_0}$, $[X]^{\leqq\aleph_0}$, $[X]^{\aleph_0}$ او داسي نور سیټونه تعریفیږي. څرګندوني په پوره اندازه واضح دي.

علاوه پر دي د Pr(X,Y) په ذریعه د X د سیټ څخه د Y په سیټ کي د ټولو ساده میپنګو سیټ په نښه کوو. د X د سیټ څخه پر خپل ځان باندي بایجکشن دX د سیټ د اوښتون Permutation په نامه یادوو او په Per(X) سره یې ښیو.

تمرین 1.4. الف)که X متناهي سیټ وي، نووښیاست، چي Per(X)=Pr(X,X) دي.

ب) وښیاست چي $Pr(N,N) \neq Per(N)$ دي.

بېلګه 1.4.فرضوو چي |A|=|B|, |X|=|Y| دي، وبه ښیو چي :

الف) $|[X]^n|=|[Y]^n|$;

ب) |Pr(X,A)|=|Pr(Y,B)| .

فرضوو چي $f: X \xrightarrow[1-1]{ر} Y$ ، $g: A \xrightarrow[1-1]{ر} B$ دي.لمړئ به د الف) دعوی ثابته کړو.

د $F:[X]^n \longrightarrow [Y]^n$ میپنګ په طبیعي توګه تعریفوو. که $A \in [X]^n$ وي ، نو $F(A)=f|A=\{f(x);\ x \in A\}$ سره ایږدو. څرنګه چي د f میپنګ ساده میپنګ دي ، نو F د $[X]^n$ څخه په $[Y]^n$ کي انجکشن دي. په اساني سره لیدل کېږي چي د F میپنګ پر $[Y]^n$ دي.

پاملرنه وکئ چي نوموړې ملاحظات په لمړي رساله کي د بوج د طاقت د تعریف و صحیح والي ته ورته دی. دغه حقیقت د لاندني ملاحظاتو په هکله هم صدق کوي.

ب) ددي برخي ثبوت ساده دي. که $\varphi\in Pr(X,A)$ وي ، نو $\Phi(\varphi)=f^{-1}\circ\varphi\circ g$ سره ایږدو او Φ زموږ مطلوب بایجکشن مپینګ دي.

■

موږ ته د متناهي سیټ X دپاره د $[X]^k$ د سیټ د عنصرو شمېر په زړه پوري دي. نظر و بېلګي ته دغه شمېر د X په سیټ ، دقیقاً د هغه په بوج ، پوري تړلی دي. ځکه نو :

$$\binom{n}{k}=\left|[\{0,\ ...,n-1\}]^k\right|$$

سره ایږدواو $\binom{n}{k}$ د ترکیبي عدد په نامه یادوو او «n پرk»ویل کېږي.

بېلګه 2.4. څرګنده ده چي $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ صدق کوي. ځکه چي:

$$\mathcal{P}(\{0,1,\ ...,\ n-1\})=\bigcup_{k=0}^{n}[\{0,\ ...,n-1\}]^k$$

د مساوات و ښي لاسته سیټونه په خپل منځ مشترکه برخه نلري. ■

تمرین 2.4. ثابت کي که $k\leqq n$ وي ، نو $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ دی.

بېلګه 3.4. وبه ښیو چي د $n>0$ دپاره لاندنۍ مساوات صدق کوي:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (4.1)$$

فرضوو چي $a\in X,\ |X|=n$ دي. د $\Phi:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ د بایجکشن مپینګ داسي تعریفوو.

فرضوو چي $A\subseteq X$ دي. که $a\in A$ وي ، نو $\Phi(A)=A-\{a\}$ دي ، او که $a\notin A$ وي ، نو $\Phi(A)=A\cup\{a\}$ سره ایږدو.د$\mathcal{A}$سیټ داسي په نښه کوو:{ $|A|$ جفت طبیعی عدد دي;$\mathcal{A}=\{A\subseteq X$. بیانو$\Phi(\mathcal{A})=\mathcal{P}(X)-\mathcal{A}$ دي، فلهذا $|\mathcal{A}|=|\mathcal{P}(X)-\mathcal{A}|$ دي. البته :

$$|\mathcal{A}|=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{2k}$$

پداسي حال کي چي k لویترین داسی طبیعی عدد دي چي $2k\leqq n$ دي. په ورته ډول :

$$\mathcal{P}(X)-\mathcal{A}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...$$

ددي ځايه (4.1) استنباط کېږي.

■

تمرين 3.4. لاندني عبارتونه د 2k≦n<2k+2 دپاره وشمېرئ:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}, \quad \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}$$

البته د k>n دپاره $\binom{n}{k}=0$ دي. څکه نو ترکيبي عددونه په اصطلاح د پاسکال د مثلث په بڼه ليکلای سو (5.4 شکل وګورئ):

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \iddots & & & & & & \ddots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & \cdots & & & \binom{n}{n} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{n} & & \binom{n+1}{n+1} \\ \iddots & & & & & & \ddots \end{matrix}$$

5.4 شکل

د پاسکال په مثلث کي عددونه په زړه پوري خاصيت لري، هغه داچي په يوه کرښه کي د دوو ګاونډيو عددو د جمع حاصل د هغي کرښي په تعقيب کرښه کي د هغو عددو «په منځ کي »عدد سره مساوي کېږي. دغه حقيقت لاندني قضيه په دقت سره فورمولبندی کوي.

قضيه 1.4. که 0≦ k≦n وي، نو لاندنئ مساوات صدق کوي:

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \qquad (4.2)$$

ثبوت. که k=n وي، دعوی بديهي صدق کوي، څکه چي :

$$\binom{n}{n+1}=0,\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

دي. پدي حساب د دعوی تصديق د k<n دپاره فرضولای سو.بيانو:

$$\binom{n+1}{k+1}=\left|[\{0,1,\ldots,n\}]^{k+1}\right|$$

البته:

$$[\{0,1,...,n\}]^{k+1} = [\{0,1,...,n\}]^{k+1} \cup \{A \subseteq \{0,1,...,n\}; |A| = k+1 \wedge n \in A\} \quad (4.3)$$

صدق کوي.

علاوه پر دي ، د (4.3) مساوات په ښئ خوا کي سيټونه يو دبله سره مشترکه برخه نلري. د هغوی د لمړي سيټ د عنصرو شمېر $\binom{n}{k+1}$ دی. د (4.2) اړېکي د ثبوت دپاره کافی ده چي وښيو چي د (4.3) مساوات په ښئ خوا کي ددوهم سيټ د عنصرو شمېر $\binom{n}{k}$ دی. که د $X \in [\{0,1,...,n-1\}]^k$ دپاره $\Phi(X)=X \cup \{n\}$ په نښه کو، نو واضح ده چي د Φ مپينګ د $[\{0,1,...,n-1\}]^k$ د سيټ څخه د $\{A \subseteq \{0,1,...,n\}; |A| = k+1 \wedge n \in A\}$ پر سيټ باندي بايجکشن دي. په نتيجه کي دعوی استنباط سوه.

q.e.d.

بېلګه 4.4. دحقيقي عددو د طاقت په هکله دوه حديزه binomial قضيه صدق کوي ، پدي معنی چي د $n \in N, x,y \in R$ دپاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (4.4)$$

پورتني اړېکه د رياضي د استقراء په طريقه ثابتو. د $n=0$ دپاره پر مساوات په بديهي ډول د شمېرني په نتيجه کي ځان باوري کولای سو.فرضوو چي (4.4) صدق کوي. بيانو:

$$(x+y)^{n+1} = x \cdot (x+y)^n + y \cdot (x+y)^n$$
$$= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

د $x^i y^{n+1-i}$ په لمړي حد کي د $\binom{n}{i-1}$ ضريبو سره او په دوهم حد کي د $\binom{n}{i}$ ضريبو سره ښرګنديږي. څکه نود (4.1) قضيي پر اساس په مجموع کي نوموړئ حد د $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ ضريب سره ښرګنديږي. څکه نو :

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i y^{n+1-i}$$

پدي ډول مساوات ثابت سو.

■

تمرين 4.4. د دوه حديزه قضيه بيله 1.4 قضيي څخه مستقيم د ترکيبي عددو د تعريف څخه ثابته کي.

1.4. قضيه د ترکيبي عددو د شمېرني دپاره په کارېږي. د n! (n فکتوريال) عدد يادونه کوو:

$$0!=1$$

$$(n+1)!=n!(n+1)$$

قضيه 2.4. د $k\leqq n$ دپاره لاندنۍ مساوات صدق کوي:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (4.5)$$

ثبوت. قضيه د رياضي د استقراء په طريقه ثابتوو. د n=0 دپاره د (4.5) مساوات په دواړو خواوو کي د 1 عدد لاسته راځي.

فرضوو چي (4.5) صدق کوي. د (4.1) د قضيي څخه په استفادي سره د k>0 دپاره به يي وشمېرو:

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}+\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}=$$

$$=\frac{n!(n+1-k)+n!k}{(n+1-k)!k!}=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

د k=0 او k=n دپاره پر (4.5) مساوات باندی خپل باور په مستقيم ډول د شمېرني په نتيجه کي لاسته راوړو – د مساوات دواړو خواوته د 1 عدد لاسته راځي. q.e.d.

اوس به بيرته خپله پاملرنه د نورو سيټو د بوج و شمېرني ته راواړوو.

قضيه 3.4. که |X|=n وي، نو |Per(X)|=n! دي.

ثبوت. خالي او يو عنصره سيټ يوازي يو اوښتون لري، چي هغه هم د 0!=1!=1 سره مطابقت کوي.

فرضوو چي د n عنصر لرونکي سيټ X د اوښتونو شمېر n! (يعنی Per(X)=n!) دي.
فرضوو چي د A سيټ n+1 عنصره لري. د A د سيټ څخه يو ثابت عنصر a∈A ټاکو. بيانو:

$$\text{Per}(A)=\bigcup_{x\in A}\{f\in \text{Per}(A);\ \ f(a)=x\} \qquad (4.6)$$

په ښۍ خوا کي د n+1 سيټو ،چي په خپل منځ کي دوه په دوه سره جلا دي، يو والي څرګندېږي. وبه ښيو چي :

$$|\{f\in Per(A)\ ;\quad f(a)=x\}|=n! \qquad (4.7)$$

که هر $f\in Per(A)$ ، $f(a)=x$ ته $\Phi(f)=f|(A-\{a\})$ تخصیص ورکو.، نو څرګنده ده چي Φ د نوموړي سیټ بایجکشن دي د $Pr(A-\{a\}, A-\{x\})$ پر سیټ باندي. نظر و 1.4 الف) بېلګي ته وروستئ سیټ د $Pr(A-\{a\}, A-\{a\})=Per(A-\{a\})$ سره مساوي بوج لري.، او د استقراء د فرضیي پربنسټ $n!$ دي. پدی معنی چي (4.7) صدق کوي.زموږ مساوات په 4.3 رساله کي د 8.1 ب) بېلګي پر استناد استنباط کېږي. q.e.d.

قضیه 4.4. که $|X|=n$, $|Y|=m$, $n\leqq m$ وي، نو :

$$|Pr(X,Y)|=\frac{m!}{(m-n)!} \qquad (4.8)$$

ثبوت.دn دپاره د ریاضي د استقراء په طریقه یي ثابتوو.لاندني ادعا (د بیان تابع) ثابتوو:

$\mathcal{V}(n)$: د هر $m\geqq n$ دپاره د (4.8) اړېکه صدق کوي.

$\mathcal{V}(0)$ او $\mathcal{V}(1)$ په بدیهي شکل صدق کوي ، ځکه چي $|Pr(\emptyset, Y)|=1$ دي. فرضوو چي $\mathcal{V}(n)$ صدق کوي او $|B|=m$, $|A|=n+1$, $n+1\leqq m$ دي. دلته هم د تېري قضیي و ثبوت ته ورته چم ورسره کوو. د A د سیټ څخه یوثابت عنصر$a\in A$ ټاکواو د $Pr(A,B)$ سیټ نظر د a د عنصر و تصویرته وېشو، پدی معنی چي نظر ودی ته چي د a د عنصرتصویر چیري ترسیمیږي، په هغه نقطه کي نوموړئ سیټ وېشو:

$$Pr(A,B)=\bigcup_{x\in B}\{f\in Pr(A,B);\ \ f(a)=x\} \qquad (4.9)$$

په اساني سره لیدل کېږي چي، د هر $x\in B$ دپاره لاندني اړېکه صدق کوي:

$$|\{f\in Pr(A, B);\ f(a)=x\}|=|Pr(A-\{a\};\ B-\{x\})| \qquad (4.10)$$

د استقراء د فرضیي پر بنسټ وروستئ سیټ $\frac{(m-1)!}{(m-1-n)!}$ عنصرونه لري.د 8.1 ب) د بېلګي په مرسته د (4.9) مساوات څخه مطلوبه نتیجه لاسته راځي:

$$|Pr(A,B)|=m\cdot\frac{(m-1)!}{(m-1-n)!}=\frac{m!}{(m-(n+1))!}$$

q.e.d.

تمرین 5.4. (4.10) مساوات ثابت کئ.

موږ ته نور عددونه چي د شکل له مخي و تېرو عددونه ورته دي، هم په زړه پوري دي. د $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ په ذریعه دټولومپینګوشمېر د n عنصره سیټ څخه د k عنصره پر سیټ باندي په نښه کوو.

تمرین 6.4. لاندني عددونه محاسبه کئ:

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$$

عموماً د $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ شمېرنه پیچلي ده، موږ به یې په راتلونکي رساله وشمېرو. دلته به اوس یوه په زړه پوري اړیکه ثابته کړو.

بېلګه 5.4. د $n,k\in N$ دپاره لاندني اړیکه صدق کوي:

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

فرضوو چي $|A|=k$, $|B|=n$ دي. که $X\in[A]^i$ وي، نو د $\{f \in {}^B A;\ \ H(f) = X\}$ د سیټ بوج $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ دي. کافي ده چي در پیاد یې کي چي:

$${}^B A = \bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{X\in[X]^i} \{f \in {}^B A;\ H(f) = X\}$$

دي، او د (4.11) اړیکه موږته په آشنا طریقه لاسته راوړلای سو.

■

تمرين 7.4. د $S_{n,k}$ په ذریعه د n عنصر لرونکي سیټ د تجزیې شمېر پر k غیر خالي سیټو ، سره په نښه کوو. پدي معنی چي $S_{n,k}$ د سیټو شمېر دي ، پداسي ډول چي $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(N_n)$ ، $|\mathscr{A}|=k$ ، $\emptyset\notin\mathscr{A}$ دي. په $\mathscr{A}$ کي سیټونه په خپل منځ کي مشترک عنصر نلري ، پدي معنی چي هغوی په خپل منځ کي دوه په دوه جدا دي ، او د هغوي یووالئ N_n دي. وښیاست چي :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = k!\cdot S_{n,k} \qquad (4.12)$$

د A غیر خالي سیټ څېړو.نوموړئ سیټ د الفباء د سیټ په نامه او د هغه عنصرونه د حروفو(توري) په نامه یادوو. د الفباء د سیټ A متناهي لاړ $f:N_n \longrightarrow A$ په A کي د لغات(کلمي) په نامه یادوو. د f د لاړ اوږدوالی ، طبیعي عدد n دي او د کلمي د اوږدوالي په نامه یې یادوو. د f کلمه به په $f(n-1),...,f(1),f(0)$ لیکو. د بېلګي په ډول که $A=\{a,b,c,d,e\}$ د الفباء سیټ وي ، نو a, aaa، $abba$,$abeceda$, $edeb$ د A د سیټ کلمي دي. د هغوی اوږدوالئ په ترتیب سره 4,7,4,3,1 دي. د $f: N_n \longrightarrow A$ کلمه د $g: N_m \longrightarrow A$ تر کلمي لاندي کلمه ده ، که $m\geqq n$ وي، او $f=g|N_n$ دي. د بېلګي په توګه د $a, abe, abece$ کلمي تر $abcedea$ کلمي لاندي کلمي دي.

بېلګه 6.4. بیاهم د مردکو و بېلګي ته راګرځو(2.2.2 او 6.2.2 ب) بېلګي وګورئ) . د مردکو د ټول نتیجه د $\{=, >, <\}$ د الفباء پذریعه ارائه کوو. په دقت سره باید ووایو که k ځلي د ټول عملیه سرته ورسیږي ، نو هغه د k په اوږدوالي کلمي سره په $\{=, >, <\}$ الفباء کي ارائه کوو.

اوس به نو دلته مشخصه کړنلاره ، ستراتېژي ، د سپکې مردکي د موندلو دپاره پيدا کړو. په 2.2.2. بېلګه کي د ستراتېژي بېلګه ترسيم سوی ده. په $\{=, >, <\}$ الفباء کي کلمه په راکړه سوي ستراتيژي کي صحيحه ده، که نوموړی کلمه په قبوله سوي ستراتېژي کي لنډ ترين لاړ داسی ترسيم کي چي د هغه په نتيجه کي سپکه مردکه پيداسي. د2.2.2 په بېلګه کي 2.2 شکل په راکړه سوي بېلګه کي ټوله صحيحي کلمې ترسيم سوی دي.که په قبول سوي ستراتېژي کي دوی مختلفې کلمي درستي وي ، نو هغوی به يو تر بل لاندي نه وي.

■

تمرين 8.4. $n=3^k$ مردکې راکړه سوي دي. هغوی په $n-1,...,1,0$ سره نښاني سوی دي. هر $i<n$ عدد د درو پر قاعده (8.8.2 تمرين وګورئ) ليکو: $i=\sum_{j=0}^{k-1} x_j^{(i)} \cdot 3^j$. د k په قدم کي د تللو ستراتېژي به داسی وي: په j ـام تللوکي ($j=1,2, ..., k$) هغه دوي مردکې سره مقايسه کي چي $x_{j-1}^{(i)}=0$ او $x_{j-1}^{(i)}=1$ دي.

الف) صحيح کلمه په هغه صورت کي تعين کئ ، چي پوهېږئ چي i ـمه مردکه سپکه ده.

ب)د راکړه سوی نسخي ټوله صحيح کلمي تعين کئ.

که د A په الفباء کي n حروف (توري) ولرو، پدی معنی چي $|A|=n$ دي، بيا نو د ټولو هغو کلمو شمېرچي اوږدوالئ يې k وي، n^k دي. دغه حقيقت په مستقيم ډول د بوج د طاقت د تعريف څخه استنباط کيږي.

بېلګه 7.4. فرضوو چي $\mathscr{A}$ د A د تورو په سيټ کي د کلموداسي سيټ دي، چي لاندني دوه خاصيته لري:

1. د $\mathscr{A}$ د سيټ د هری کلمي اوږدوالي ترk اضافه نده، يا په بله اصطلاح هره کلمه يې تر k اوږده نده .

2. که g,f د $\mathscr{A}$ د سيټ دوي مختلفي کلمې وي، بيانود fکلمه د g تر کلمي لاندي نده.

موږته د $\mathscr{A}$ د سيټ بوج په زړه پوري دی. فرضوو چي $\mathscr{B}$ د A د الفباء ، د k په اوږدوالي د ټولو کلمو سيټ دي.د $R\subseteq\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ دوه ئيزه اړيکه داسي تعريفو:

$[f, g]\in R \equiv$ د g کلمه د f تر کلمي لاندي ده.

دږهم شرط تضمينوي چي پورتنۍ اړيکه يو مپينګ دي او لمړئ شرط تضمينوي چي $H(R)=\mathscr{A}$ دي. پدی ډول د $R:D(R) \longrightarrow \mathscr{A}$ ، $D(R)\subseteq\mathscr{B}$ دي.

څرنګه چي د $\mathscr{B}$ د سيټ بوج $|A|^k$ دي. نو د 5.4.3. قضيې پر بنسټ $|\mathscr{A}|\leqq|A|^k$ دي.

■

بېلګه 4.8. که $3^k<n$ وي ، نو د k تللو د لاړ دپاره داسي ستراتېژي وجود نلري چي دn مردکو دپاره د سپکې مردکي موندل ممکن کي. په غير مستقيم يا د تناقض په طريقه به يې ثبوت کو. فرضو چي دغه ډول ستراتيژي و جو دلري. په $\mathscr{A}$ باندي د نوموړې ستراتيژي ټول صحيح کلمې په

نښه کوو. فرضوو چي $f: \mathscr{A} \longrightarrow \{0,1, ..., n-1\}$ مپینګ دي. د f مپینګ داسي تعریفوو چي هر صحیحی کلمي ته د سپکي مردکي عدد تخصیصوي. څرنګه چي هره د $\{0,1, 2, ..., n-1\}$ مردکو څخه ممکن سپکه وي، نو د f مپینګ د $\{0,1, 2, ..., n-1\}$ پر سیټ دي. د 5.4.3 قضیې پر اساس $|\mathscr{A}|\geqq n$ دي. د تیري بېلګي او د 6.4. بېلګي پر اساس $|\mathscr{A}|\leqq 3^k$ دي او داهم مطلوب تناقض دي.

■

تمرین 9.4. وښیاست چي د n مردکوپه منځ کي د سپکي مردکي د موندلو دپاره د k تللو د لاړ دپاره یوازي او یوازي هغه وخت ستراتیژي وجود لري، چي $3^k>n$ وي.

په پای کي بیاهم یادونه کوو، هغه سیټونه چي پدي رساله کي مو وڅېړل ډېر پیژندل سوی سیټونه دي و درياضي په مختلفو شقوقو کي تر مختلفو نومو لاندي تبارز کوي. د $[X]^n$ دسیټ عنصرونه د X د سیټ n ـام صنف (ټولګې) د ترکیب په نامه یادیږي. په راکړه سوی الفباء کي کلمې یا معادل دهغه د A^n د سیټ عنصرونه د n ـام صنف (ټولګي) د بدلون variation په نامه یادیږي. د $Pr(N_n, X)$ د سیټ عنصرونه د n ـام صنف (ټولګي) د بدلون variation ، بېله تکراره، په نامه یادیږي.

نور تمرینونه

10.4. د (2.4) مساوات او 2.4. بېلګي په مرسته د 3.4. تمرین د جمع په شمېرنو باندي ځان باوري کي.

11.4. الف) 2.4. قضیه د 4.4 او 3.4. قضیو په مرسته ثبوت کئ.

ب) 4.4. قضیه د 2.4 او 3.4. قضیو په مرسته ثبوت کئ.

12.4. وښیاست چي : $|Pr(N,N)| = |{}^{N}N| = 2^{\aleph_0}$ دي.

13.4. د N_n د سیټ د ټولو k عنصر لرونکو ، غیر خالي، او دوه په دوه بېل سیټو ، د سیستم بوج څودي؟ دقیقاً یې داسي فورمولبندي کوو:

$$|\{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(N_n)-\{\emptyset\}\ ;\ |\mathscr{A}| = k \wedge(\forall A,B\in\mathscr{A})(A\neq B\rightarrow A\cap B=\emptyset)\}|$$

14.4. فرضوو چي B,A متناهي سیټونه دي، $|A|=n$, $|B|=k$ دی. فرضوو چي $f:A \longrightarrow B$ مپینګ دي.

$$\mathscr{R}=\{f^{-1}(\{x\});\ x\in H(f)\}$$

د $A\in\mathscr{R}$ دپاره $g(A)=x$ دي ، که د هر $y\in A$ دپاره $f(y)=x$ وي.

الف) وښیاست چي $\mathscr{R}$ د A تجزیه ده.

ب) وښیاست چي $g:\mathscr{R} \xrightarrow{1-1} B$ دي.

ج) د f مپینګ د $\mathscr{R}$ او g په مرسته ترسیم کی.

د)د الف)،ب) ،ج) او (4.12) مساوات په مرسته (4.11) ثابت کئ.

15.4. ثابت کړئ ، که $n>k$ وي ، نو

$$\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot\begin{bmatrix} n-i \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\cdot\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}$$

دي.

16.4. فرضوو چې $\mathscr{A}$ د A په سیټ کې د کلمو داسې سیټ دی ، چې د 7.4بېلګې لمړئ او دوهم خاصیت پر ځای کوي.د $\mathscr{A}$ د سیټ د بوج پورتنئ حدس چې په نوموړي بېلګه کې تقریبي شمېرل سوی دي، دقت ته نژدې کړئ پداسې حال کې چې پوهېږئ چې د $\mathscr{A}$ په سیټ کې n کلمې وجود لري چې دهغوي اوږدوالي تر k کوچنئ دي.

17.4. د مردکو د تول داسې ستراتېژي پیدا کړي، چې په 8.4 بېلګه کې د f مپینګ، ساده مپینګ نه وي.

18.4. فرضوو چې A متناهي الفباء $a\in A$ ده . $\mathscr{A}$ د A په سیټ کې د هغو کلمو سیټ دي چې اوږدوالئ یې k دي. د $\mathscr{A}$ په سیټ کې د هغو کلمو شمېر چې د a تورئ یوازې یو ځل په ځان کې ولري، څودی؟

19.4. لاندنې نښې تعریفوو:

$$\binom{n}{\leqq k} = \left|[X]^{\leqq k}\right|$$

$$\binom{n}{<k} = \left|[X]^{<k}\right|$$

پداسې حال کې چې X اختیاري سیټ دي او بوج یې د n سره مساوي کېږي.ثابت کړئ چې لاندنې اړیکې صدق کوي:

a) $\binom{n+1}{\leqq k} = \binom{n}{\leqq k} + \binom{n}{<k}$;

b) $\binom{n}{\leqq k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{<k}$;

c) $\binom{n}{\leqq k} = 2^n$, د $k\geqq n$ دپاره ;

d) $\binom{n}{\leqq 0} = 1$.

20.4. د $\binom{n}{\leqq k}$ او $\binom{n}{<k}$ عددو دپاره د پاسکال مثلث رسم کې.

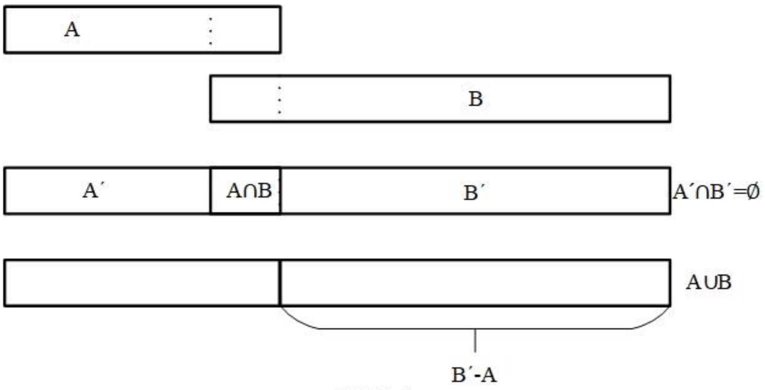
5.4. شمولیت Inclusion – حذف Exclusion

د متناهي سیټونو دمتناهي یووالې د بوج په هکله به یو مهم مساوات ثابت کو ، او دهغو د استعمال ځایونه به په څو بېلګو کي توضیح کو.

که غواړو چي |A∪B|=|A|+|B| وي ، نود A∩B=∅ د شرط غوښتنه ضرورده. د هغو دوو سیټو د اتحاد A∪B د بوج په هکله چي دوی په خپل منځ کي مشترکه برخه ولري، څه ویلای سو؟ ساده جواب یي د لاندني مساوات په ذریعه ارائه کېږي.

$$|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B| \qquad (5.1)$$

لکه په 6.4 شکل کي چي ترسیم سویده، کولای سو په آساني سره یي ثابت کو. (5.1) غوندي مساواتونه په اصل کي د متناهي سیټو په هکله په زړه پوري دي.



شکل 6.4

بېلګه 1.5. د هغو طبیعي عددو شمېر به وشمېرو چي تر n کوچني او د 100 سره ګډ وېشونکۍ ولري. څرنګه چي $100=2^2\cdot5^2$ دي ، نو یو عدد د 100 سره ګډ وېشونکۍ یوازي او یوازي هغه وخت لري، چي پر 2 یا 5 دوېش وړوي. فرضوو چي A د ټولو طبیعي عددو سیټ دي چي کوچنۍ تر n او پر 2 د وېش وړ وي او B د ټولو طبیعي عددو سیټ دي چي کوچنۍ تر n او پر 5 د وېش وړ وي. د A∪B د سیټ بوج باید تعین کو. په آساني سره یي شمېرلای سو:

$$|A|=\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

$$|B|=\left[\frac{n+4}{5}\right]$$

د A∩B سیټ هغه طبیعی عددونه چي تر n کوچني او پر 10 د وېش وړ وي. پدي معنی چي:

$$|A\cap B|=\left[\frac{n+9}{10}\right]$$

پدي ډول د (5.1) پر اساس لرو:

$$\left|A\cup B\right|=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+4}{5}\right]-\left[\frac{n+9}{10}\right]$$

■

تمرین 1.5. د (5.1) په مرسته وښیاست چې د درو سیټو C,B,A دپاره :

$$|A\cup B\cup C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|=|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|$$

د پورتني تمرین مساوات ته کولای سو چې د اختیاري متناهي شمېر سیټو دپاره عمومیت ورکړو.موږ ته به په خاص ډول د متناهي سیټو په اړوند په زړه پوري وي. په هر حالت کې د هغه تخصیص سوی مساوات د شمولیت Inclusion او حذف Exclusion د پرنسیپ په نامه یادیږي.

قضیه 1.5. (د شمولیت او حذف اصل). فرضوو چې $A_n,\ldots,A_2,A_1$ متناهي سیټونه دي. بیانو لاندنۍ مساوات صدق کوي:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i\neq j}\left|A_i\cap A_j\right|+ \\ &+\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k\\ i\neq k}}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|-\ldots+(-1)^{n+1}\,|A_1\cap\ldots\cap A_n|\end{aligned} \tag{5.2}$$

او یا معادل :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ T\neq\varnothing}}^{n}(-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right| \tag{5.3}$$

تبصره : که موافقه وکړو چې ، $\bigcap_{i\in\varnothing}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ سره په نښه کو ، نو د (5.3) مساوات ځانته ساده تره ښه غوره کوي.:

$$\sum_{T\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}^{n}(-1)^{|T|}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=0$$

ثبوت: قضیه نظر د یووالي عنصرو وشمېر ته $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ، د ریاضي د استقراء په ذریعه ثابتوو.

فرضوو چې x د $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ یوازنۍ عنصر دي.دغه عنصر د k سیټو $1\leqq k\leqq n,\ A_k,\ldots,A_2,A_1$ غړی دي. کولای سو چې فرضیه کښیږدو چې $x\in A_1,\ldots,A_k$ دي او $x\notin A_{k+1},\ldots,A_n$ دي. بیانو د $i\leqq k$ دپاره $|A_i|=1$ دی او د $i>k$ دپاره $|A_i|=0$ دي. همدا ډول د $i,j\leqq k$ دپاره $|A_i\cap A_j|=1$ او په نورو حالتو کې مساوي په صفر سره کیږي.په عمومي ډول $\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=1$ یوازي او یوازي هغه وخت صدق کوي ، چې $T\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ وي. ځکه نو د (5.2) اړخکي ښي خوا په:

$$k-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-...+(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$$

سره مساوي کېږي. د (4.1) مساوات له مخې دغه عدد $1=\binom{k}{0}$ دی. فلهذا د (5.2) مساوات صدق کوي.

اوس به نو فرض کړو چې د(5.2) مساوات د اختياري داسي سيټو دپاره چې يووالې يې m عنصرونه ولري صدق کوي. فرضوو چې $A_n, ..., A_2, A_1$ داسي اختياري سيټونه دي، چې $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=m+1$ دي. د $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ څخه يو ثابت عنصر $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ټاکو. د تېر حالت په څېر د x عنصر د $A_n, ..., A_2, A_1$ د سيټو د n ـئېزې څخه د k په سيټو پوري اړه لري.ښېله دي چې عموميت مو نقض کړی وي، فرضولای سو چې $x\in A_1, ..., A_k$ دي. د $i=1,2, ..., n$ دپاره $M_i=A_i-\{x\}$ سره ايږدو.بيانو د $i>k$ دپاره $M_i=A_i$ سره ايږدو.البته لاندني مساواتونه صدق کوي:

$|A_i|=|M_i|+1$, د $i\leqq k$ دپاره ;

$|A_i|=|M_i|$, د $i>k$ دپاره ;

$|A_i\cap A_j|=|M_i\cap M_j|+1$, د $i,j\leqq k$ دپاره ;

$|A_i\cap A_j|=|M_i\cap M_j|$ په معکوس حالت کې .

په عمومي ډول ليکلای سو:

$$\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|+1,$$ که $T\subseteq\{1, ..., k\}$

$$\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|$$ که $T\not\subseteq\{1, ..., k\}$

بيانو لاندني مساواتونه صدق کوي:

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i|=\sum_{i=1}^{n}|M_i|+k$$

$$\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|=\sum_{i\neq j}|M_i\cap M_j|+\binom{k}{2}$$

په عمومي ډول ليکلای سو:

$$\sum_{\substack{T\in\{1,...,n\}\\|T|=l}}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|=\sum_{\substack{T\in\{1,...,n\}\\|T|=l}}\left|\bigcap_{i\in T}M_i\right|+\binom{k}{l}$$

پدی حساب لاندني مساوات لاسته راځي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{i\neq j}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k\\ i\neq k}}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n+1}\,|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|M_i\right| + k - \sum_{i\neq j}\left|M_i \cap M_j\right| - \binom{k}{2} + \ldots =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left|M_i\right| - \sum_{i\neq j}\left|M_i \cap M_j\right| + \ldots\right) + \left(k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{k}{n}\right)$$

د اړېکې په وروستئ برخه کې د جمع دوه حده دي.لمړئ حد یې د استقراء د فرضیې له مخې $\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = m$ کېږي او دوهم حد یې د (4.1) پر اساس :

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{k}{n} = k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1$$

کېږي.ځکه نو (5.2) صدق کوي. q.e.d.

بېلګه 2.5. د اویلر تابع φ د عددونو په تیوري کې داسی تعریف کېږي: $\varphi(n)$ تر n کوچنئ د طبیعی عددو شمېر دي چې د n سره ګډ وېشونکئ ونلري. وپه ښیو چې که $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ ، $p_1, \ldots, p_k$ اولیه عددونه دي او $e_i > 0, e_i \in N$ دي، بیا نو :

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \qquad (5.4)$$

په A_i داسي سیټ په نښه کوو چې هغه ټوله هغه عددونه چې تر n کوچني او پر p_i د وېش وړ وي ، په ځان ولری ، یعنی: $A_i=\{l<n\ ;\ l \vdots p_i\}$. دلته نو $\varphi(n)$ د لاندني سیټ د عنصرو شمېر دي.

$$\{0,1, \ldots, n-1\} - (A_1 \cup \ldots \cup A_k)$$

څرګنده ده چې $A_i = \left\{0, 1\cdot p_i, 2\cdot p_i, \ldots, \left(\frac{n}{p_i} - 1\right)\cdot p_i\right\}$ صدق کوي.پدې معنی چې د A_i سیټ $\frac{n}{p_i}$ عنصرونه لري.همدا راز د $i \neq j$ دپاره $A_i \cap A_j$ ، $\frac{n}{p_i \cdot p_j}$ عنصره لري. ځکه نو د (5.2) له مخې :

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i} - \sum_{i\neq j}\frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

د لاندني مساوات :

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup \ldots \cup A_k| = n - \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i} - \sum_{i\neq j}\frac{n}{p_i p_j} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

تر ساده سمبالولو وروسته (5.4) مساوات لاسته راځي.

■

تمرين 2.5. فرضوو چي $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ ، $p_1,\ldots,p_k$ اوليه عددونه ، $e_1,\ldots,e_k \in N$ او $e_1,\ldots,e_k > 0$ دي. بيا نو د هغو طبيعی عددو شمېر چي تر m کوچني او د n سره ګډ وېشونکئ ونلری مساوي کېږي په :

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m+p_i-1}{p_i}\right]-\sum_{i\neq j}\left[\frac{m+p_ip_j-1}{p_ip_j}\right]+\ldots+(-1)^{k+1}\left[\frac{m+p_1\cdot\ldots\cdot p_k-1}{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}\right]$$

بېلګه 3.5. د $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ عدد به وشمېرو. نوموړئ عدد د n عنصر لرونکي سيټ د ټولو مپينګو شمېر د k عنصر لرونکي پر سيټ باندي تعينوي(4 –مه رساله وګورئ). فرضوو چي |A|=n او B={1,2,...,k} دي. د k , ... ,i=1 دپاره :

$$M_i = \{f \in {}^{A}B;\; i \notin H(f)\}$$

په نښه کوو. بيانو $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ د ${}^{A}B-\bigcup_{i=1}^{k}M_i = {}^{A}B-\bigcup_{i\in B}M_i$ د سيټ بوج دي.

که T⊆B ، |T|=l>0 وي. نو د $\bigcap_{i\in T}M_i$ سيټ د ${}^{A}(B-T)$ د سيټ سره مساوي کېږي. پدي معنی چي $(k-1)^n$ عنصرونه لري. د (1.5) قضيې څخه په مستقيمه توګه لاندی مساوات لاسته راځي:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}M_i\right| = k\cdot(k-1)^n - \binom{k}{2}\cdot(k-2)^n+\ldots+(-1)^{k+1}\binom{k}{k}\cdot(k-k)^n$$

ځکه نو:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = k^n - \left|\bigcup_{i=1}^{k}M_i\right| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\cdot(k-i)^n \qquad (5.5)$$

■

بېلګه 4.5. که f د X د سيټ اوښتون permutation او f(x)=x وي. بيا نو x د f د اوښتون د ثابتي نقطي په نامه يادېږي. د p_n په ذريعه د n عنصره سيټ د اوښتونو شمېر بېله ثابتي نقطي څخه په نښه کوو. د بېلګي په ډول فرضوو چي X={1, ..., n} او $M_i = \{f \in Per(X);\; f(i)=i\}$ دي.

بيانو :

$$p_n = \left|Per(X)-\bigcup_{i=1}^{n}M_i\right|$$

په اساني سره ليدل کېږي چي د $T\subseteq\{1, \ldots ,n\}$, $|T|=l$ دپاره :

$$\left|\bigcap_{i\in T} M_i\right| = |Per(X-T)| = (n-l)!$$

دي. فلهذا د (1.5) قضيې پر اساس :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}\cdot(n-2)! + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot 1 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\cdot(n-i)!$$

لاسته راځي.ځکه نو:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\cdot(n-i)! \qquad (5.6)$$

■

تمرين 3.5. وښياست چي د ټولو اوښتونود شمېر نسبت و ټولو اوښتونو و شمېر ته بېله ثابتي نقطی څخه د e (اويلر عدد) و عدد ته نژدي کېږي.پدي معنی چي $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{p_n} = e$ دی.

نور تمرينونه

4.5. فرضوو چي A_1 , ... ,A_n سيټونه دي (حتمی نده چي هغوی دی متناهي سيټونه وی) . د هغوی دپاره د شموليت او حذف پرنسيپ فورمولبندی او ثابت کي.

5.5. فرضوو چي A متناهي الفباء او a∈A ده. د A په الفباء کي د k په اوږدوالي څو کلمي وجود لری، چي د a توریٔ دي m ځله په ځان کي ولري؟

6.5. فرضوو چي $A=\{1,2,...,m\cdot n\}$, $m,n>0$ دي. وښياست چي د A د سيټ د تجزيې شمېر په n سيټو باندی ، په داسي ډول چي هر سيټ m عنصره لري او هيڅ سيټ يې انتروال ندي ، مساوی دی په:

$$\frac{(m\cdot n)!}{n!(m!)^n} - \frac{(m\cdot n-m+1)!}{1!(n-1)!(m!)^{n-1}} + \frac{(m\cdot n-2m+2)!}{2!(n-2)!(m!)^{n-2}} - \ldots + (-1)^n$$

7.5. د يوي ښونځي 64 زده کونکي په 5 د خپلي خوښی چارو په گروپو کي وېشل سوی دي. هر د گروپ لږ تر لږه 19 غړي لري. هر دری گروپونه لږترلږه يو مشترک غړی لري، هيڅ زده کونکیٔ د څلورو گروپو غړیٔ ندي. ثابت کي چي دوه گروپه وجود لري چي لږ تر لږه 5 مشترک غړي لري.

8.5. فرضوو چي M په فضاء کي د 5 نقطو سيټ دي، پداسی ډول چي هيڅ څلور نقطې په يوه سطحه کي ندي پرتې. فرضوو چي R د 7 سطحو سيټ دي، پداسي ډول چي لاندې خصوصيات ولري:

1. د R د سيټ هره سطحه لږترلږه يوه نقطه د M د سيټ په ځان کي لري.

2. د M د سیټ هیڅ نقطه د R د سیټ په پنځو سطحو کي ندی پرتي.

الف) ثابت کي چي د $P,Q\in M$ دوی مختلفي نقطي داسی وجود لری ،چي د PQ خط د R د سیټ د هیڅ دوو سطحو پر تقاطع ندی پروت.

ب) د M او R د سیټو بېلګي د نوموړو خاصیتو سره پیداکړي.

6.4. بیاهم د یریشله (Dirichlet) د پرنسیپ په هکله

هغه څه چي مو تراوسه زده کړه د یریشله د پرنسیپ د عمومي بڼي دپاره لږ تر لږه په دوه مسیره کي ورڅخه کار اخلو. د وېش د اړېکي ډېر ساده خو ځانګړي حالتونه به، چي د سیټ د تیوري دپاره افزار سول، وڅېړو.

لمړئ به د 1.8.3 قضیي عمومي شکل ثابت کو.

قضیه 1.6. (د یریشله پرنسیپ). فرضوو چي Y,X داسي سیټونه دي چي د هغوی دپاره $|X|>|Y|.\alpha$ ؛α اختیاري بوج په نښه کوي ؛ صدق کوي. فرضوو چي f د X د سیټ څخه د Y په سیټ کي مپینګ دی. بیانو $y\in Y$ داسي وجود لري چي د $\{x\in X;\ f(x)=y\}$ د سیټ بوج کوچنئ یا مساوی، تر α ندی.

ثبوت. $A_y=\{x\in X;\ f(x)=y\}$ سره په نښه کوو. بیانو:

$$X=\bigcup_{y\in Y}A_y$$

دی. د $y_1\neq y_2, y_1,y_2\in Y$ دپاره $A_{y_1}\cap A_{y_2}=\varnothing$ صدق کوي. که د هر $y\in Y$ دپاره $|A_y|\leqq\alpha$ وای، نو د 8.1 ب)،ج) بېلګو پر اساس به $|X|\leqq \alpha\cdot|Y|$ وای ، خو دغه حالت زموږ د فرضیي خلاف دي. ځکه نو داسي y وجود لری چي د A_y بوج کوچنئ یا مساوی، تر α ندی.

نتیجه 1. فرضو چي $|X|=n,\ |Y|=m,\ f:X\longrightarrow Y$ دي. که $m\cdot k<n$ وي ، نو داسي $y\in Y$ وجود لری ، چي د $\{x\in X;\ f(x)=y\}$ سیټ لږترلږه k+1 عنصره لري.

ثبوت. دلته کافی ده چي در په یاد یي کئ ، که د یوه سیټ بوج کوچنئ یا مساوی، ترطبیعی عدد k نه وی، نوبیا هغه سیټ لږتر لږه k+1 عنصره لری. دلته د 1.6 قضیي څخه کار اخلو.

q.e.d.

نتیجه 2. فرضوو چي $f:X\longrightarrow Y$ ، X لایتناهي سیټ او Y متناهي سیټ دي. بیانو داسي $y\in Y$ وجود لری ، چي د $\{x\in X;\ f(x)=y\}$ سیټ لایتناهي دي.

ثبوت. که د هر $y\in Y$ دپاره د $\{x\in X;\ f(x)=y\}$ سیټ متناهي وای، نو بیا به یې $m_y\in N$ عنصره درلودلای. بیانو د ماکسیمم (اعظمي) پرنسیپ پر اساس داسي $m\in N$ وجود لري ، چي د $y\in Y$ دپاره $m_y\leqq m$ دي. اوس نو کافي ده چي د 1.6 قضیي څخه کار واخلو. q.e.d.

بېلګه 1.6. فرضوو چې د $k\geqq 2, \{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ په الفباء کې $\mathcal{K}$ د هغو کلمو سیټ دي ، چې اوږدوالئ یې n دي. د $\mathcal{K}$ په سیټ کې هرې دوی مختلفې کلمې لږترلږه په دوو تورو کې یودبله سره فرق لرى. د $\mathcal{K}$ د سیټ بوج به څو وي؟

دریاضې د استقراء په طریقه به یې ثابت کو، چې د $n\geqq 2$ دپاره $|\mathcal{K}|\leqq k^{n-1}$ دي.

لمړئ خو به $n=2$ سره وڅېړو. د $\mathcal{K}$ سیټ به پر k سب سیټو $\mathcal{K}_1$, ... , $\mathcal{K}_k$ داسي ووېشو، چې د $\mathcal{K}_i$ په سیټ کې د $\mathcal{K}$ د سیټ هغه کلمې ځای پر ځای کوو چې د a_i په توري سره پېل کېږي. که $|\mathcal{K}|>k$ وای، نو د $\mathcal{K}_i$ د سیټو په منځ کې داسي سیټ سته چې د $\mathcal{K}$ د سیټ یوازی دوی داسي کلمې لري، چې هغوی یوازي په دوهم توری کې یودبله سره بېل دي، خو دا امکان نلري. ځکه نو $|\mathcal{K}|\leqq k$ دي.

فرضوو چې زموږ قضیه د $n-1$ دپاره صدق کوي. د تېر ځلې په ډول د $\mathcal{K}$ سیټ به پر k سب سیټو $\mathcal{K}_1$, ... , $\mathcal{K}_k$ نظر د کلمې و لمړي توري ته وېشو. که $|\mathcal{K}|>k^{n-1}$ وای، نو د 1.6 قضیې د لمړې نتیجې پراساس داسي i و جود لري ، چې $|\mathcal{K}_i|>k^{n-2}$ دی. د $\mathcal{M}$ سیټ د $\mathcal{K}_i$ د سیټ د کلمو څخه داسي جوړو، چې په هغه کې لمړئ توري حذفوو. د $\mathcal{M}$ د سیټ کلمې په دي حساب د $k-1$ په اوږدوالې دي او هرى دوي مختلفي کلمي لږترلږه په دوو تورو کې فرق سره لري. د استقراء د فرضیې له مخې $|\mathcal{M}|\leqq k^{n-2}$ دي . خو دغه حالت زموږ د فرضیې سره مغایرت لري.

لوستونکئ دي هڅه وکي دغه ډول سیټ $\mathcal{K}$ چې نوموړې خاصیتونه ولرى او بوج یې k^{n-1} وي، پیداکړي.

■

اوس به نو یو بل مفهوم تعریف کو، چې موږ ته د یریشله پرنسیپ دعمومي بڼې د تعریف امکانات د معکوس لوري څخه برابروي. فرضوو چې β,α د سیټو(متناهي یا لایتناهي) بوج دی، m,n مثبت طبیعي عددونه دي. د وېشلو(تجزیې) اړېکه:

$$\alpha\longrightarrow(\beta)^m_n \qquad (6.1)$$

پدی معنی ده چې هرد X سیټ چې بوج یې α دي او د هر مپینګ $F:[X]^m\longrightarrow N_n$ (د N_n پر ځای بل سیټ چې بوج یې n وي ،هم ټاکلای سو) ، داسي سیټ $Y\subseteq X$ او $i<n$ وجود لرى چې $|Y|=\beta$ او د هر $x\in[Y]^m$ دپاره $F(x)=i$ دي. د (6.1) اړېکي نفې به په:

$$\alpha\nrightarrow(\beta)^m_n$$

سره ښیو.

په پورتنې تعریف کې د F مپینګ د رنګولو په نامه یادوو. ددي مپینګ قیمتونه رنګونه دي، چې په $1,0$, ..., $n-1$ سره یې په نښه کوو. د $Y\subseteq X$ سیټ د متجانس یا یو رنګه سیټ په نامه یادېږي، که د هر $y,x\in\in[Y]^m$ دپاره $F(x)=F(y)$ دي. پدي معنی که داسي $i<n$ وجود ولري چې د هر $x\in[Y]^m$ دپاره $F(x)=i$ وي.

ددغه ډول ترمینولوژي په مرسته کولای سو چې د $\alpha\longrightarrow(\beta)^m_n$ اړېکه داسي تعریف کو:د α په بوج سره سیټ دهر m عنصر لرونکي سب سیټ چې په n رنګه رنګ کېږي، یو رنګه سیټ

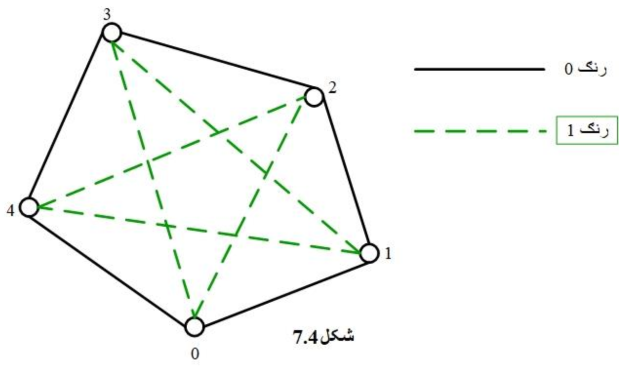
چي بوج يې β دی، وجود لري[13].په اسانۍ سره ليدل کېږي چي د يريشله پرنسيپ ، 1.8.3 قضيه، د متناهي سيټو دپاره په معادل ډول د وېشنې د اړېکي په ذريعه ارائه کولای سو: که $k>n$ وي، نو $k \longrightarrow (2)_n^1$ دي. همداسي د 1.6 قضيې نتيجه 1 په معادل ډول ارائه کولای سو: که $n>m \cdot k$ وي، نو $n \longrightarrow (k+1)_m^1$ دي.

تمرين 2.6. فرضوو چي $n' \leqq n, \beta' \leqq \beta, \alpha' \geqq \alpha$ دي. ثابت کئ ، که $\alpha \longrightarrow (\beta)_n^m$ وي، نو $\alpha' \longrightarrow (\beta')_n^m$ دي.

د (6.1) د وېشلو(تجزيې) اړېکي تر ټولو په زړه پوري حالت m=2 دي. په دغه حالت کي په مجموع کي پرابلم ته ، د ګراف په تيوري کی موږته د څرګندو مفهومو په مرسته ، په بل نظر کتلای سو.

فرضوو چي $F:[X]^2 \longrightarrow N_n$ د رنګولو عمليه ده. د X, $[X]^2$ جوړه ، غوټې لرونکئ ګراف(Nodal Graph) ، دقيقآ ، کامل (بی مسيره) ګراف دي. X د ګراف د غوټو سيټ او F يې دضلعو رنګ دي . د (6.1) د وېشلو (تجزيې) اړېکه د غوټو په کافي اندازه لوی سيټ Y د موجوديت داسي غوښتنه کوي، چي $|Y|=\beta$ او ټوله ضلعې چي د Y د سيټ غوټې يودبله سره نښلوي ، په عين رنګ ، رنګ سوی وي.

بېلګه 2.6. $5 \longrightarrow (3)_2^2$ صدق نه کوي.ځکه چي په 5 غوټې کامل ګراف کي ، 7.4 شکل وګوري، چي د هغوی ضلعې په دوو رنګو رنګ سوي دي، «يو رنګه مثلث » وجود نلري.



شکل 7.4

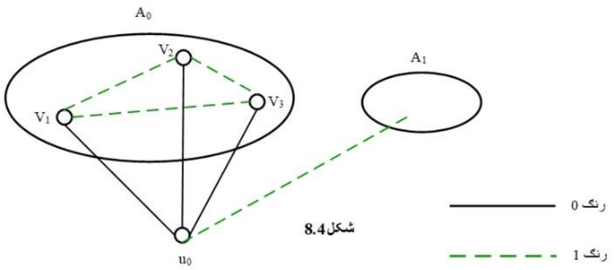
بېلګه 3.6. پدې بېلګه کي به وښيو چي $6 \longrightarrow (3)_2^2$ صدق کوي. کامل ګراف د شپږو غوټو $u_0, u_1, ..., u_5$ سره داسي په نظر کي نيسو، چي د هرو دوو غټو په منځ کي ضلع د 0 يا 1 په رنګ ، رنګ سوي دي. بايد وښيو چي د هغوی په منځ کي يو رنګه مثلث وجود لري. يوه غوټه ، د بېلګي په ډول u_0 ، ټاکو. په نتيجه کي نظر د ضلع و رنګ ته د u_0 د $u_1, ..., u_5$ سره نښلولو. $u_1, ..., u_5$ غوټې پر دوو برخو (سيټو) A_1, A_0 وېشو ، پدې معنې :

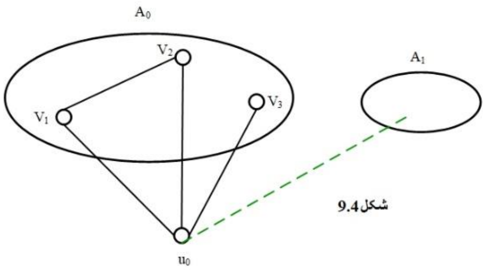
$u \in A_i \equiv$ د $\{u_0, u\}$ ضلع د $i(i=0,1)$ په رنګ، رنګ سوی ده.

[13] نوموړئ واقعيت داسي هم فورمولبندی کولای سو: که د α په بوج سره سيټ راکړه سوی وي او موږ وغواړو چي د هغه سيټ هر m عنصر لرونکي سب سيټ په n رنګه رنګ کو، نو دهغوی په منځ کي به داسي يوسب سيټ وجود ولری، چي په يوه رنګ رنګ سوی وي او بوج يې β دي.(ژباړن)

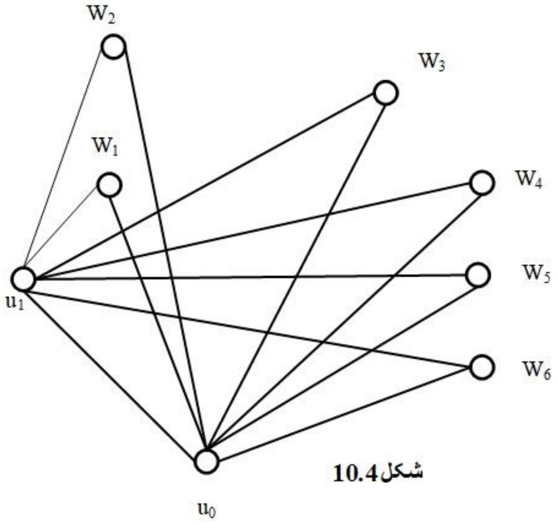
څرنګه چي $A_1 \cup A_0$ پنځه عنصره لري،نو د 1.6 قضيي د لمړي نتيجي پر اساس لږ تر لږه يو د هغو سيټو څخه 3 عنصره لري. فرضوو چي $|A_0| \geqq 3$ او د v_1, v_2, v_3 د همدي سيټ دري عنصره دي. دوه حالته منځ ته راتلای سي: يو داچي د v_1, v_2, v_3 دري سره غوټي په خپل منځ کي په رنګ 1 وصل سوی دي ، بيانو دغه غوټي يو رنګه مثلث تعينوي(8.4 شکل وګورئ) . او که دغه حالت منځ ته رانسي، نو دوي غوټي ، د بېلګي په ډول v_1, v_2 ، داسي وجود لري چي د u_0 د غوټي سره په رنګ 0 وصل سوی دي. پدي حالت کي بيا د v_1, v_2, u_0 دري څوکي دي چي يو رنګه مثلث تعينوي (9.4 شکل وګورئ) .

■





بېلګه 6.4. پدي بېلګه کي به وښيو چي $(4)_2^2 \longrightarrow 24$ صدق کوي.پدي معنی چي کامل ګراف د 24 غوټو سره راکړه سوی دي، چي ضلعې يې په دوو رنګو يعنی 0 او 1 سره رنګ سوی دي. يوه ثابته غوټه u_0 په نظر کي نيسو. د تېري بېلګي په څېر 12 غوټې داسي پيداکوو چي د هغوی د نښلېدو کرښې، $\{u_0, v_1\}, \ldots, \{u_0, v_{12}\}$ په يوه رنګ i، رنګ سوی وي. د $v_1, \ldots, v_{12}$ د غوټو په منځ کي يوه غوټه ، د بېلګي په ډول $u_1 = v_1$ سره ټاکو. د $v_2, \ldots, v_{12}$ د غوټو په منځ کي 6 غوټې ، $w_1, \ldots, w_6$ داسي پيدا کوو چي د $\{u_1, w_1\}, \ldots, \{u_1, w_6\}$ ضلعې ياد نښلېدو کرښې په عين رنګ j ، رنګ سوی وي.اوس نو بايد دوه حالتونه و څېړو: که $i=j$ وي، نو د $w_1, \ldots, w_6$ غوټو په منځ کي دوي غوټې ، د بېلګي په توګه u_2, u_3 داسي ټاکو چي د $\{u_2, u_3\}$ ضلع د i په رنګ ، رنګ سوي وي (10.4 شکل وګورئ).بيانو د u_0, u_1, u_2, u_3 غوټې يو رنګه سب ګراف معرفی کوي چي د i په رنګ ، رنګ سوی دي. که د $w_1, \ldots, w_6$ غوټو په منځ کی زموږ د نظر غوټې وجود ونلری، نو د $w_1, .., w_6$ سب ګراف پخپله داسي يورنګه ګراف دی، چي په $1-i$ رنګ ، رنګ سوی دي.

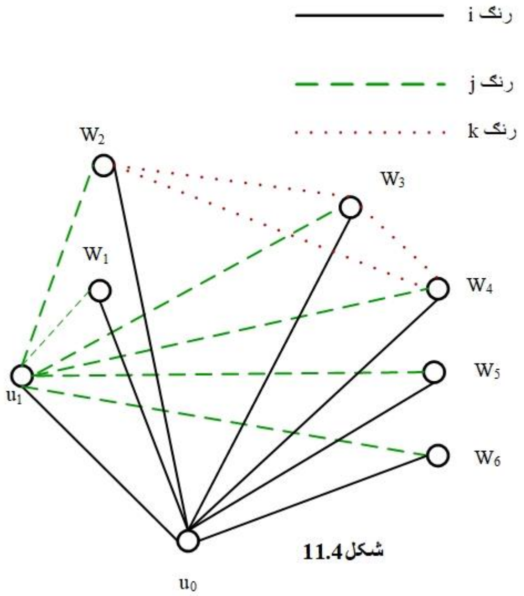


شکل 10.4

دوهم حالت که $i \neq j$ وي، نو په هغه صورت کي (11.4 شکل وګورئ)، مسئله ډيره ساده ده ، ځکه چي د 3.6. بېلګي پر اساس د w_1, ... ,w_6 غوټو په منځ کي د u_2, u_3, u_4 يو رنګه مثلث داسي پيدا کولای سو چي د هغه ضلعی د k په رنګ، رنګ سوی دي. اوس نو که $k=i$ وی، نو د u_0 غوټه پر اضافه کوو. پدي ډول د u_0, u_2, u_3, u_4 يو رنګه سب ګراف لاسته راځي. که $k \neq i$ وي، نو هرومرو به $k=j$ سره وي. پدي صورت کي د u_1 غوټه پر اضافه کوو او د u_1, u_2, u_3, u_4 يو رنګه ګراف لاسته راځي.

■

تمرين 3.6. د 3.6. بېلګي څخه په استفاده ثابت کئ چي $(3)_3^2 \longrightarrow 17$ صدق کوي.



شکل 11.4

پدی رساله کي د رامسئ Ramsey د قضيو ثبوت زموږ موخه ده، چی په خاص حالت کي د $n=2$ دپاره يي ثبوت راوړو.

قضيه 2.6. (Ramsey Theorem). د n , k اختياري طبيعی عددو دپاره :

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^n_k \qquad (6.2)$$

صدق کوي.

قضیه 3.6. (Ramsey Theorem). د m,n , k اختیاري طبیعی عددو دپاره د p طبیعی عدد داسي وجود لري، چي:

$$p \longrightarrow (m)^n_k \qquad (6.3)$$

صدق کوي.

لمړئ به په ادعاؤ کي د ساده والی او څرګندوالي په خاطرځني لنډوني راوړو، ځکه نو n=2 حالت به زموږ دپاره په لمړي ګام کي په زړه پوري وي.

بېلګه 5.6. پدي بېلګه کي به وښیو چي که 3.6. قضیه د k≧2 دپاره صدق کوي، نو د k+1 دپاره هم صدق کوي، دقیقاً: که د هر m دپاره داسی p وجود ولري،چي $p \longrightarrow (m)^2_k$ صدق وکي ، نو بیا د هر m دپاره داسی p وجود لري،چي $p \longrightarrow (m)^2_{k+1}$ صدق کوي.

فرضوو چي m اختیاری طبیعی عدد او k≧2 دي.فرضوو چي زموږ ادعا د k دپاره صدق کوي. څرنګه چي k≧2 دي. نو زموږادعا د 2 دپاره هم صدق کوي. ځکه نو p_0 داسي وجود لری ، چي $p_0 \longrightarrow (m)^2_2$ صدق کوي. همدا راز p داسي وجود لري ، چی $p \longrightarrow (p_0)^2_k$ صدق کوي. و به ښیو چي :

$$p \longrightarrow (m)^2_{k+1} \qquad (6.4)$$

صدق کوي.

فرضوو چي $|X| = p$, $F:[X]^2 \longrightarrow \{0,1,...,k\}$ دي. د $H:[X]^2 \longrightarrow \{0,1,...,k-1\}$ مپینګ داسي تعریفوو، چي د $x \in [X]^2$ دپاره که F(x)<k وي H(x)=F(x) دي او که F(x)=k وی، نو H(x)=k−1 سره ایږدو. پدي معنی چي « د k−1 او k دوه رنګه» مو سره یوځای او په یوه رنګ واړول. پدي حساب یو رنګ لږ سو ، ځکه نو د قضیي د فرضیي پر اساس د $p \longrightarrow (p_0)^2_k$ د H د سیټ د رنګولو دپاره د Y⊆X یو رنګه سب سیټ د p_0 په بوج وجود لري. که د Y و غوټو د نښلولو کرښي د 0,1,...,k−2 د رنګو څخه په یوه رنګ، رنګ سوي وي، نو د Y سیټ د F دپاره هم یو رنګه سیټ دي. څرنګه چي هرومرو p_0≧m دي.نو د (6.4) دپاره مو مطلوب سیټ وموندي.

که د H په رنګولو کي د Y په سیټ کي د غوټو د نښلولو کرښي د k−1 په رنګ رنګ سوی وی، نو د F په رنګولو کي هغوی په دوو رنګو چي عبارت دی د k−1 او k څخه ، رنګ سویدي. خو د $p_0 \longrightarrow (m)^2_2$ پر اساس بیا دF په رنګولو کي د Z⊆Y ، |Z|=m یو رنګه سیټ وجودلري.

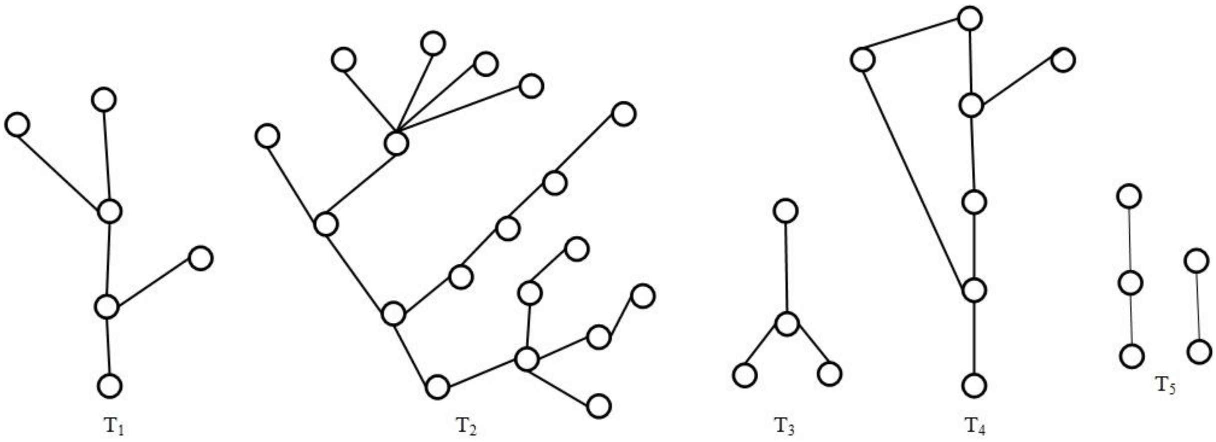
پدي ډول مو (6.4) اړیکه په ثبوت ورسوله. که غواړو چي د 3.6. قضیه د n=2 دپاره ثابت کو، نود لاسته راوړه سوي نتیجو پر بنسټ کافی ده چي ثابت کو چي دهر m دپاره داسي p وجود لري چي $p \longrightarrow (m)^2_2$صدق کوي.

■

تمرین4.6. وښیاست چي د n=2 دپاره 2.6. قضیه د $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)_2^2$ څخه استنباط کیږي.

موږ کولای سو چي د لاسته راوړه سوی نتیجو پر بنسټ د رامسۍ دواړه قضیې مستقیم خو تر ډیره حده پیچلي ثابت کو. اوس به دلته یو نوی مفهوم معرفي او د هغه د خاصیتو په مرسته به بیا نوموړې قضیې ثابت کو.

نیمګړۍ ترتیب سوي سیټ T, ≦ د ونې(درختي) په نامه یادوو ، که د هر u∈T د T(u)={v∈T; v<u} ټوټه ترتیب سوي سیټ وي او T کوچنی ترین عنصر ولري. په 12.4 شکل کي T_2, T_1 ونې دي ، خو T_5, T_4, T_3 ونې ندي.



شکل12.4

د ونې کوچنۍ ترین عنصر د ونې د ریښې (Root) په نامه یادوو.د ونې عنصرونه د ونې د څوکې (Summit) په نامه یادوو.پدې رساله کي به یوازی هغه ونې T څېړو ، چي د هغې د هرې څوکې v دپاره د T(v) ټوټه متناهي وي. پدې معنی چي زموږ په ونو کي هره څوکه چي د ریښې څخه خلاف وي ، یوبلافاصله وړاندیني Predecessor (سلف)لري. د v د څوکې جګوالی (ارتفاع) د T(v) په ټوټه کي د عنصرو شمیر دي. د v د څوکې د څانګو درجه دهغه سیټ بوج دي ، چي بلافاصله دv د څوکې په تعقیب څوکې په ځان کي ولري. د T د ونې څانګه (Bough) عبارت د اعظمی ځنځیر څخه ده چي په هغه کي بېله دي چي کړۍ یې خلاصی کړو ، بله څوکه نسو اضافه کولای. د څانګې بوج د څانګې د اوږدوالي په نامه یادیږي.د ونې جګوالی(ارتفاع) د ونې د ټولو څوکو سپریمم دي.

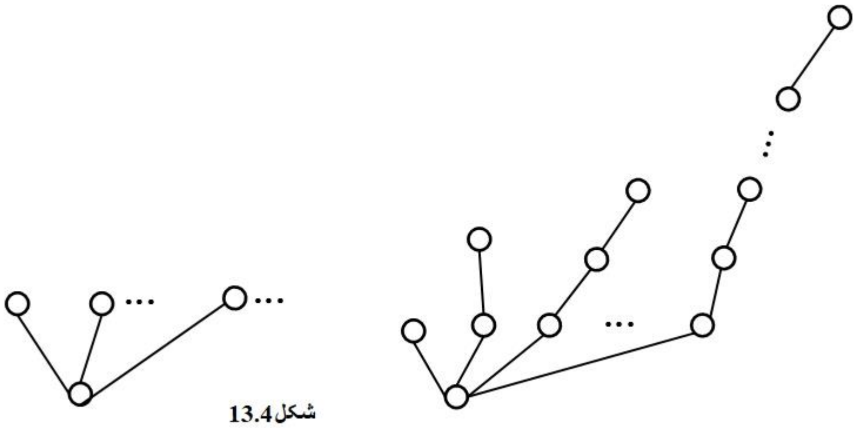
بېلګه 6.6. فرضوو چي $\mathscr{A}$ د A په الفباء کي د ټولو کلمو سیټ دی چي د سب کلمې په اړیکه کي سره ترتیب سوی دي. $\mathscr{A}$ ونه ده. خالی کلمه د ونې ریښه ده، د څوکې جګوالی (ارتفاع) د کلمی اوږدوالی دی. د هری څوکې د څانګې درجه |A| (د A د سیټ بوج) دی.د $\mathscr{A}$ د ونې جګوالی(ارتفاع) $\aleph_0$ دی. د نوموړې ونې څانګې به دلته معرفی کو. فرضوو چي $f \in {}^N A$ دی . د

$$\{f|N_n \; ; n \in N\} \qquad\qquad (6.5)$$

سیټ د $\mathscr{A}$ د وني ښانګه ده. په ښرګند ډول f د A د الفباء لایتناهي لاړ دي. که ددی لاړ د شروع ټول متناهي برخي راواخلو ، نو هغوی به د (6.5) ښانګي جوړي کړي. په اساني سره لیدل کیږي، چي معکوسه ادعا هم صدق کوي ، یعنی د $\mathscr{A}$ د وني هره ښانګه د (6.5) بڼه لري.

■

تمرین 5.6. فرضو چي $\mathscr{B}$ د A په الفباء کي د ټولو هغو کلمو سیټ دي، چي اوږدوالئ یې تر k کوچنئ وي. ددی وني جګوالی (ارتفاع) به څو وي، ټولي ښانګي یې معرفي کي ، د ښانګو شمېر به یې څو وي او د ښانګو جګوالی به یې څو وي؟



شکل 13.4

په پورتنۍ شکل کي دوی وني دي. دلمړي وني جګوالی(ارتفاع) یوه او د ریښي د ښانګودرجه یې $\aleph_0$ده. د دوهمي وني جکوالی $\aleph_0$دی او هره ښانګه یې متناهي ده. ددی واقعیتو په پرتله یو ډیره مهمه ادعا صدق کوي.

قضیه 4.6. (د کونیګ König لیما). فرضوو چي د T ,≦ د وني هره څوکه متناهي د ښانګي درجه لري. که T لایتناهي سیټ وي ، نو په T کي لایتناهي اوږده ښانګه وجود لري.

د قضیي ثبوت په نمونهٔ بڼه د یریشله د پرنسیپ د 1.6 قضیې دوهمه نتیجه په کار اچوي.

د هري څوکي $v\in$T دپاره :

$$A_v=\{u\in T\ ;\ v<u\}$$

د v د څوکي ټوله تالي (اخلافو) سیټ په نښه کوو. یعنی د v د څوکي په تعقیب د ټولو څوکو سیټ دي. که $v_n, \ldots, v_1$ داسي څوکي وي ، چي بلافاصله د v د څوکي په تعقیب وي ، نو :

$$A_v=\{\ v_1, \ldots, v_n\}\cup A_{v1}\cup \ldots \cup A_{vn} \qquad (6.6)$$

د ریاضي د استقراء پذیریعه د T د وني لایتناهي ښانګه ترسیموو. دوني ریښه په x_0 سره په نښه کوو. ښرنګه چي د x_0د ښانګي درجه متناهي ده ، نو $A_{x_0}=T-\{x_0\}$ لایتناهي ده. ځکه نو د یریشله د پرنسیپ له مخي د (6.6) څخه استنباط کیږي چي د x_0بلا فاصله تالي(خلف) x_1 داسي وجود لري، چي A_{x_1} لایتناهی ښانګه ده.که د x_n څوکه داسي ولرو چي A_{x_n} لایتناهي وي.ځکه نو د عین دلیل

پر اساس د x_n بلافاصله تا لي (خلف) x_{n+1} داسي وجود لري، چی $A_{x_{n+1}}$ لايتناهی سيټ دی. پدي ډول د $\{x_n ; n \in N\}$ سيټ د T په ونه کي زموږ مطلوبه لايتناهی څانګه ده.

q.e.d.

تمرين 6.6. د T د وني د هري څوکی د څانګي درجه کوچني يا مساوي په k سره ده. که د T ونه لږ تر لږه $1+\sum_{i=0}^{n-1} k^i$ څوکي ولري، بيانو ثابت کي چي داسي څانګه وجود لري ، چي اوږدوالي يې تر n زيات دي. د تېر ثبوت د تعديل په نتيجه کي دعوی ثبوت کئ.

اوس به نو د 2.6 قضيې په ثبوت لاس پوری کو. د 3.6 او 4.6 بېلګو څېړني زموږ د ثبوت اساس تشکيلوي. څرنګه چي په دغه حالت کي د نورو په پرتله اساساً ډېر اوږد «ځنځير » بايد په نظر کي ونيسو، ځکه نو د وني د مفهوم څخه کار اخلو.

د 2.6 قضيې ثبوت: د 4.6 تمرين پر بنسټ د $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)_2^2$ ثبوت کافی دی.

فرضوو چي F په دوو رنګو، رنګول دي $F:[X]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ ، $|X|=\aleph_0$. غواړو چي د X د سيټ په يوه رنګ، رنګ سوي سب سيټ پيداکو. فرضوو چي د {0, 1} په الفباء کي T د ټولو کلمو ونه ده . د T هری څوکي $v \in T$ ته د $X_v \subseteq X$ سيټ، که $X_v \neq \emptyset$ وي، نو $a_v \in X_v$ عنصر، تخصيصوو.

د T د وني ريښي $\emptyset$ ته $X_\emptyset = X$ او د X د سيټ اختياري عنصر $a_\emptyset \in X$ تخصيصوو. فرضوو چي د ټولو څوکو v دپاره چي جګوالی يې تر n کوچنئ يا مساوی وی ، a_v, X_v مو تعريف کړيدي. فرضوو چي $w \in T$ د n+1 په جګوالي د T د وني يوه څوکه ده. پدي معنی چي $w \in \{i_j\}_{j=0}^{n}$ ، $i_j \in \{0,1\}$ دي. ددی څوکي بلافاصله وړاندينئ په $v=\{i_j\}_{j=0}^{n-1}$ په نښه او په لاندي ډول يې تعريفوو:

$$X_w=\{x \in X_v ; F(\{x, a_v\})=i_n \} \qquad (6.7)$$

اوس نو که د X_v سيټ خالي نه وي (پدي معنی چي a_v تعريف سوی دي) ، نو $X_w=\emptyset$ سره ايږدو. برعکس که $X_w \neq \emptyset$ وي، نو a_w د X_w د سيټ اختياري ، خو ثابت عنصر دي.

اوس به نو د پلار v او زوی w ترمنځ اړيکه وڅېړو. که w_1 او w_2 دواړه د v د څوکي بلا فاصله تالی(خلف) وي، نو هرو مرو به :

$$X_{w1} \cup X_{w2}=X_v-\{a_v\} \qquad (6.8)$$

صدق کوي. ددی ځايه په اساني سره ثابتيدلای سي، چي د $u<v$ دپاره :

$$X_v \subseteq X_u \qquad (6.9)$$

د $S=\{v \in T;\ X_v \neq \emptyset\}$ سيټ په نظر کي نيسو. د (6.8) څخه استنباط کيږي، چي د S سيټ لايتناهي دی. S د T د وني يوه برخه ده(S د T سب سيټ دي).د کونيګ د ليما 4.6. پر اساس د S په ونه کي لايتناهي اوږده څانګه A وجود لري. که د v څوکه د A پر څانګه پرته وي، نو دهغه بلافاصله تالی (خلف) د 0 يا 1 د اضافه کيدو په نتيجه کي لاسته راغلی دي. که د $v \in A$ د څوکي تالی(خلف) دA په څانګه کي د 0 د اضافه کيدو په نتيجه کي لاسته راغلی وي ، نو دغه څانګه به په A_0 سره په نښه کو.

په عین ترتیب سره د A_1 سیټ تعریفوو. څرنګه چي $A=A_0 \cup A_1$ لایتناهي دي ، نو د A_0 او A_1 د څانګو څخه ، لږ تر لږه، یوه یې لایتناهي ده. فرضوو چي ، دبېلګي په توګه A_0 لایتناهي ده.

وبه ښیو چي د $Y=\{a_v \; ; \; v \in A_0\}$ سیټ د F په رنګولو کي یو رنګه سیټ دي ، علاوه پر دي په Y کي د غوټو نښلونکي ضلعی په 0 رنګ ، رنګ سوي دي.

فرضوو چی، $a_v, a_w \in Y$, $v,w \in A_0$ دي. څرنګه چي A_0 څانګه ده ، نو یابه $v<w$ وي او یا به $w \leqq v$ وي.فرضوو چي $v<w$ دي. د w څوکه $w=\{i_j\}_{j=0}^{k}$ لاړدي.څرنګه چي $v<w$ دي، نو داسي $l<k$ وجود لري ، چي $v=\{i_j\}_{j=0}^{l}$ دي.د v د څوکي بلافاصله تالی (خلف) په $w_1=\{i_j\}_{j=0}^{l+1}$ سره په نښه کوو. څرنګه چي $v \in A_0$ دي، نو هرومرو به $i_{l+1}=0$ وي ، او د (6.7) پر اساس د هر $x \in X_{w1}$ دپاره $F(\{a_v, x\})=0$ دي. څرنګه چي $a_w \in X_w$ ، $w_1 \leqq w$ دي، نو د (6.9) پر اساس باید $F(\{a_v, a_w\})=0$ وي.

q.e.d.

تمرین 7.6. تېر ثبوت داسي تعدیل کي چي په مستقیم ډول سره د $k \geqq 2$ دپاره $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)_k^2$ ثابت کي.

تمرین 8.6. د تیر ثبوت د تعدیل او د 6.6 تمرین د نتیجي څخه په استفاده سره ثابت کی چي $m \longrightarrow (n)_2^2$ ، په داسي حال کي چي $m=1+\sum_{i=0}^{2n-3} 2^i = 2^{2n-2}$ دي.

د رامسئ قضیه 3.6 د p د عدد موجودیت تضمینوي . په تیرو ثبوتو کي موندل سوي p کوچنئ ترین ممکن عدد ندي. د بېلګي په ډول په 8.6 تمرین کي د $m \longrightarrow (3)_2^2$ دپاره $m=2^4=16$ دي ، خو پوهېږو چي $6 \longrightarrow (3)_2^2$ صدق کوي.

که د N(n, k) پذریعه کوچنئ ترین طبیعی عدد په نښه کو ، چي دهغه دپاره $N(n,k) \longrightarrow (n)_k^2$ صدق وکي ، نو د رامسئ قضیه به یوازي د هغه د موجودیت تضمین وکي ، خو د هغه شمېرنه ډیر مشکل کار دي او تر اوسه یوازي په محدودو حالتو کي N(k,n) شمېرل سوی دي.

تبصره: د کونیګ د قضیي په ثبوت کي د ټاکني د اکسیومي څخه کار اخیستل سوی دي، که فرض کو چي د T سیټ د شمېر وړ دي ، نو کولای سو چي په ثبوت کي د انتخاب د اکسیومي د استعمال څخه صرفنظر وکو. هغه هم پداسي ډول چي د T سیټ په لاړ پیبو او لمړي عنصر چي د A_{xn} په سیټ اړه لري ، ټاکو. هغه عنصر لکه د 4.6 قضیي په ثبوت کي په x_{n+1} سره په نښه کوو. پدی ډول د رامسئ د قضیي په ثبوت کي بیا د کونیګ د قضیي څخه د شمېر وړ سیټو دپاره کار اخلو او د ټاکني د اکسیومي څخه صرفنظر کوو.

نور تمرینونه

9.6. که X د حقیقی عددو داسي سیټ وي چي بوج یې تر 12 لوی وي، نوثابت کي چي د $x,y \in X$ دوه عدده داسي وجود لري:

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<2-\sqrt{3}$$

10.6. ثابت کي چي د محدب څورلس ديوالي د 9 څوکوپه منځ کي داسي يوه څوکه وجود لري چي د هغه څخه 5 ضلعي راوزي.

11.6. هڅه وکي چي د 1.6 بېلګي ته ورته نتيجي په هغه صورت کي لاسته راوړي ، چي د $\mathcal{K}$ په سيټ کي دوی کلمي يودبله سره لږتر لږه په درو ټکو کي فرق سره ولري.

12.6. الف) ثابت کي چي په 5 څوکو لرونکي مکمل ګراف کي، چي په دوه رنګه ، رنګ سويدي، يورنګه مثلث ، په هغه صورت کي چي دواړه رنګونه په مساوي اندازه په کار اچول سوي وي، وجود نه لري.

ب) د 5 څوکي لرونکي مکمل ګراف چي په دوه رنګه ، رنګ سوی وي او يورنګه مثلث ونلری، څو مختلف د رنګولو امکانات وجود لري؟

ج) ثابت کي چي په 6 څوکو لرونکي مکمل ګراف کي، چي په دوه رنګه ، رنګ سويدي، لږ تر لږه دوه يورنګه مثلثونه وجود لري.

د) ثابت کي چي په 11 څوکو لرونکي مکمل ګراف کي، چي په دوه رنګه ، رنګ سويدي، لږ تر لږه 22 يورنګه مثلثونه وجود لري.

13.6. د وېش (تجزيي) لاندي اړېکي ثابت کي:

$$a)66\longrightarrow(3)_4^2$$
$$b)327\longrightarrow(3)_5^2$$
$$c)192\longrightarrow(5)_2^2$$

7.4. د کانتينووم continuum بوج

پدي رساله کي د کانتينووم بوج به «وشمېرو» او د هغه په زړه پوري او ناوړي نتيجي به استنباط کو.

د حقيقی عددو د سيټ بوج مو د کانتينووم |R|=**c** په نامه يادکي. پوهيږو چي $c>\aleph_0$ دي.دغه حقيقت ډيری مهمی نتيجي لري.هغه داچي د بېلګي په توګه د ترانسندنتو عددو شمېر تر الجبری عددو زيات دي. دلاندني مهمی دعوی ثبوت نژدی لاس په لستوني راته پروت دي ،او ددی دعوی نتيجي به هم وڅېړو.

قضيه 1.7. $c=2^{\aleph_0}$.

ثبوت. د 2.8.2 او 2.8.4 بېلګو د نتیجو پر بنسټ د $f:\mathcal{P}(N)\longrightarrow\langle 0,1\rangle$ او $h:\langle 0,1\rangle\longrightarrow\mathcal{P}(N)$ ساده مپینګونه وجود لري. د کانتور- برنشتاین د قضیې څخه سمدستي $|R|=|\langle 0,1\rangle|=|\mathcal{P}(N)|=2^{\aleph_0}$ استنباط کیږي.

q.e.d.

بېلګه 1.7. د $n>0$ دپاره:

$$\mathbf{c}^{n}=\mathbf{c}^{\aleph_0}=\mathbf{c} \qquad (7.1)$$

صدق کوي.

په رشتیا هم ، د 1.7 قضیې پر اساس لیکلای سو:

$$\mathbf{c}^{n}=(2^{\aleph_0})^{n}=2^{n\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\mathbf{c}$$

همدا ډول:

$$\mathbf{c}^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\mathbf{c}$$

د لاسته راغلي مساواتو و نتیجو ته ځیر سئ. که په خپلو څېړنو کي د کارتیزین سیستم را داخل کو . نوکولای سو چي R د مستقیم خط او R×R د سطحی سره منطبق کړو. د (7.1) اړیکي پر اساس د مستقیم خط او سطحي بوج سره مساوي دي.

■

کله چي کانتور دغه نتیجه معرفی کړه، نو د وخت د ریاضي پوهانو په منځ کي یې لړترلړه شور ماشور را ګډ کي. ځکه چي هغوی ته «بی معنی» برېښیدله ، چي د مستقیم خط او سطحي د نقطو شمېر دي «سره مساوی» وي. دغه نتیجه په لمړي نظر پارادکس یا ضد و نقیض معلومیده ، ځکه چي د هغه وخت (د نولسمي پیړي په پای کی) ریاضي پوهانو د مستقیم خط او سطحي د ساختمان د تصور څخه ځان نسوای خلاصولای. ځکه نو د کانتور ادعا یې داسی تعبیروله چي ګواکي مستقیم خط او سطحه سره «مساوي» دي. د دغه ډول حالت سره موږ په 2.3 رساله کي مخامخ سوو. په عین حال کي حقیقت خو دادی چي مستقیم خط او سطحه د هغوی د ساختمان له مخي یودبله سره «مساوی ندی»، د بېلګي په ډول د مستقیم خط څخه پر سطحه باندي متمادي بایجکشن مپینګ وجود نلري. دغه واقعیت د 1.2.3 بېلګي او د ریاضي په انلایز کي د معکوس مپینګ د متمادیت په هکله، د مشهوری قضیې څخه استنباط کیږي.

تمرین 1.7. الف)ثابت کي، که $f:\langle 0,1\rangle\longrightarrow\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ متمادي بایجکشن وي، نو f^{-1} متمادی دي.

ب)ثابت کي چي د $\langle 0,1\rangle$ څخه پر $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ متمادی بایجکشن مپینګ وجود نلري.

ج) ثابت کي چي د R×R څخه په R متمادی انجکشن مپینګ وجود نلري.

د) ثابت کي چي د R څخه پر R×R متمادی بایجکشن مپینګ وجود نلري.

واضح ده چي د $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ څخه پر $\langle 0,1\rangle$ باندي ، متمادی د سرجکشن مپینګ وجود لري.

طبعآ سوال طرح کیږي، چي آیا معکوسه ادعا هم صدق کوي؟ متمادی سرجکشن مپینګ د $\langle 0,1\rangle$ څخه پر $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ باندی د پئانو د منحنی په نامه یادوو. ژوسیپه پئانو GIUSEPPE PEANO (1858-1932) ریاضي پوهان په خپله لاندني ادعا سره هک پک کړه.

قضیه 2.7. د پئانو منحنی وجود لري.

ثبوت: ثبوت به پر دوو برخوو ووېشو. په لمړۍ برخه کي به د کانتور د سیټ $\mathcal{C}$ څخه پر $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ باندي متمادي مپینګ رسم کړو. په دوهم ګام کي به نوموړي مپینګ ته پر $\langle 0,1\rangle$ انتروال باندي پراختیا ورکړو. هغه لوستونکي چي دمتمادی مپینګو د پراختیا د قضیو سره په توپولوجی کي آشنا وي و کولای سی چي د ثبوت ددوهمي برخي څخه صرفنظر وکي.

فرضوو چي $x\in\mathcal{C}$ دي. بیانو د هر $i\in N$ او $x_i\in\{0,\ 2\}$ دپاره د x دریئیزه ارائه $x=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\cdot 3^{-i-1}$ ده. $w(x)=[y,z]$ په داسی ډول ایږدو، چي $y=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_{2i}}{2}\cdot 2^{-i-1}$ او $z=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_{2i+1}}{2}\cdot 2^{-i-1}$ وي. په آساني سره لیدل کیږي، چي $w:\mathcal{C}\longrightarrow\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ مپینګ دي.

وبه ښیو چي د w مپینګ متمادی دي. د متمادیت د ثبوت دپاره فرضوو چي $x\in\mathcal{C}$ او ε اختیاري مثبت عدد دي. غواړو چي د δ عدد داسي پیدا کړو، چي د هر $y\in\mathcal{C}$ دپاره چي، $|y-x|<\delta$ وي، بیانو د $w(x)$ او $w(y)$ ترمنځ فاصله تر ε کوچني وي. د ارشیمیدس د پرنسیپ پر اساس k داسی وجود لري ، چي $2^{-k}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ دي. $\delta=3^{-2k}$ ایږدو. اوس نو که $y\in\mathcal{C}$ او $|y-x|<\delta$ وي، نو د x او y په دریئېز ارائه کي لمړي $2k$ رقمونه مساوي دي. بیا نو د $w(x)$ او $w(y)$ مختصات(کورډینات) په دوه ئېزه ارائه کي لمړي k رقمونه مساوي لري. پدي لحاظ د هغوی ترمنځ فاصله تر

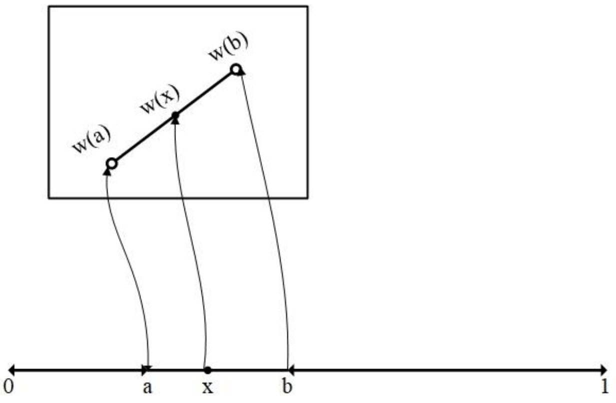
$$\sqrt{(2^{-k})^2+(2^{-k})^2}=\sqrt{2}\cdot 2^{-k}<\varepsilon$$

لویه نده.

پاته سوه پرتوله $\langle 0,1\rangle$ انتروال باندي د w د تابع د پراخولو مسئله. فرضوو چي $x\in\langle 0,1\rangle-\mathcal{C}$. پدي معنی چي کوچنئ ترین n داسي وجود لري، چي $x\in C_n$ (3.8.2 ببلګه وګورئ) دي. C_n د 3^n انتروالو یووالي دي، ځکه نو $x\in(a,\ b)$ پداسي حال کي چي $a,b\in\mathcal{C}$ ، $(a,\ b)\subseteq C_n\subseteq\langle 0,1\rangle-\mathcal{C}$ دي. اوس نو :

$$w(x)=w(a)+\frac{w(b)-w(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

ایږدو. (پاملرنه وکئ، چي $w(a),w(x),\ldots$ د حقیقی عددو مرتبي جوړی دي.). 14.4 شکل یې واضح ترسیمولای سي. البته د تابع دغه ډول پراختیا ، متمادی پراختیا ده.



شکل14.4

تمرین 2.7. ثابت کي ، چي د w تابع متمادی ده.

د پئانو منحني د حقیقي عددواو د هغوی د خاصیتو په هکله تصورات تر ډیره حده تر خپل تاثیر لاندی راوستل. د یوی خوا څخه د منحنیو نظریي او د هغوی توپولوژیکي خاصیتوڅېړني منځ ته راغلی، او د بلی خوا د R او R^2 دخاصیتود بېلوالی په هکله پلټني پيل سوي.دبُعد (Dimension) مفهوم منځ ته راغی او ددی مفهوم چار چاپېر ډیره مهمه تیوری راوزیږیدله. دحیرانتیا دوهمه خبره کیدای سی، چي د حقیق عددو د متمادی تابع ګانو د سیټ د بوج مسئله وي. د R څخه په R کي د ټولو تابع ګانو د سیټ بوج:

$$|R|^{|R|} = c^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c$$

دي ، نظر د کانټور و قضیې 1.2 ته تر **c** ډیر دی.

قضیه 3.7. د R څخه په R کي د ټولومتمادی تابع ګانو د سیټ $\mathfrak{F}$ بوج **c** دي.

ثبوت: هر حقیقی عدد متمادی تابع –ثابته تابع تعینوي. ځکه نو $|R| \leqq |\mathfrak{F}|$ دي. فرضوو چي Φ د $\mathfrak{F}$ په ${}^{Q}R$ په لاندی ډول تعریف سوی مپینګ دي:

$$\Phi(f)=f|Q$$

وبه ښیو چي د Φ مپینګ، ساده مپینګ دي. فرضوو چي $f_2,f_1\in\mathfrak{F}$ دوی مختلفی متمادی تابع ګاني دي.بیا نو $x\in R$ داسي وجود لري، چي $f_1(x)\neq f_2(x)$ دي. $\varepsilon=\frac{1}{2}|f_1(x)-f_2(x)|>0$ سره په نښه کوو. د f_1 و f_2 تابع ګانو د متمادیت څخه د δ_2,δ_1 مثبتو عددو موجودیت داسی استنباط کیږي ، چي د $i=1,2$ دپاره د $|x-y|<\delta_i$ د شرط د پر ځای کیدو څخه د $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$ شرط تصدیق کیږي. فرضوو چي δ د δ_2,δ_1 څخه کوچنئ ترین دي. بیانو د 1.2 قضیې پر اساس ناطق عدد $r\in(x-\delta, x+\delta)$ وجود لري. بیانو $|f_1(x)-f_1(r)|<\varepsilon$, $|f_2(x)-f_2(r)|<\varepsilon$ دي.ځکه نو $f_1(r)\neq f_2(r)$ دي. فلهذا $f_1|Q\neq f_2|Q$ دي.

پدي ډول مو د انجکشن مپینګ $\Phi: S \longrightarrow {}^{Q}R$ ترسیم کي. ددی اسیته:

$$|S|\leqq|{}^{Q}R|=c^{\aleph_0}=\mathbf{c}$$

دي.

q.e.d.

نور تمرینونه

3.7. د 8.2 رسالې په حواله د کانتور د سیټ $\mathfrak{C}$ بوج $2^{\aleph_0}$ دي. د $\mathfrak{C} \longrightarrow \langle 0,1\rangle$:f د انجکشن مپینګ تعریف او دهغه په مرسته ثابت کي،چي $\mathbf{c}=2^{\aleph_0}$ دي.

4.7. که $x, y \in \langle 0,1\rangle$, $x=\sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k-1}$, $y=\sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot 2^{-k-1}$ وي. z=f(x,y) سره داسي ایږدو، چي: $z=\sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 2^{-2k-1}+\sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot 2^{-2k-2}$ وي.

الف) ثابت کي چي د $f:\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \longrightarrow \langle 0,1\rangle$ مپینګ ساده دی.

ب) د تیر ثبوت څخه د **c.c=c** د مساوات د مستقیم ثبوت دپاره کار واخلی.

ج) د f تابع ولی غیر متمادی ده؟ دهغي د غیر متمادیت نقطي پیدا کړئ.

5.7. د تیر تمرین اندیښنو ته ورته وښیاست، چي د n,m>0 دپاره $\mathbf{c}^m=\mathbf{c}^n$ دي.

6.7. د حقیقی عددو د لاړو د سیټ ^{N}R بوج څو دی. د $\left\{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in {}^{N}R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 1\right\}$ د سیټ بوج څودي؟

7.7. د کانتور د سیټ $\mathfrak{C}$ څخه پر $\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}$ باندی متمادی بایجکشن ترسیم کئ.

8.7. د 2.7 قضیې په ثبوت کي د پئانو ترسیم سوي منحني قیمتونه د $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{13}{54}$ په عددو کي پیداکئ.

9.7. د $[R]^n, [R]^{\leq\aleph_0}, [R]^{\aleph_0}$ بوج څو دي؟

10.7 دوه مفهومه بیا هم ذهن ته راوړي. د X⊆R د ګڼ سیټ په نامه یاد کي، که د اختیاري a,b∈X ، a<b دپاره (a, b)∩X≠∅ . که x∈R ، A⊆R وي، نو د x+A پذریعه د {x+y; y∈A} سیټ په نښه کوو ، همدا ډول x−A تعریفوو. لاندني ادعاوی ثابتي کي.

الف) که X د Rګڼ سب سیټ او a∈R وي، نو د a+X سیټ هم ګڼ سیټ دي.

ب) که A و B د R د سیټ د شمېر وړ سب سیټونه وي، بیانو a∈R داسي وجود لری، چي (a+A)∩B=∅ دي.

ج)که X⊆R د شمېر وړ سیټ وي، بیانو د شمېر وړ ګڼ سیټ A داسی وجود لري ، چي A∩X=∅ دي.

د) که X⊆R د شمېر وړ سیټ وي، بیانود

$\mathfrak{F}_x=\{f\in {}^{R}R$; پہ هره نقطه کي متمادی ده $x\in R-X$ د f $\}$

د سیټ بوج کانتینووم (**c**)دي.

ه) د R څخه پہ R کي د متزایدو(متنازل ، غیر متزاید، غیرمتنازل) تابع ګانو د سیټ بوج کانتینووم (**c**)دي.

11.7. ثابت کي، که پہ 5.7.3 بېلګه کي د **B** لوبغاړئ ، د ګټلو ستراتیژي ولری ، نو $|P|=\mathbf{c}$ دي.

12.7. د $A\subseteq R$ سیټ د تړلي سیټ پہ نامه یاد کړی ؤ، که د هر $x\in R-A$ دپاره $\varepsilon>0$ داسی وجود ولري، چی $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subseteq R-A$ وي. د A غیر خالي ، تړلئ سیټ د بشپړ Perfect سیټ پہ نامه یادیږي ، که منزوی نقطې (9.6.3 بېلګه وګورئ) ونلری. فرضوو چي T د $\{0, 1\}$ پہ الفباء کي د ټولو (متناهي) کلمو ونه وي(6.6 بېلګه وګورئ) .

الف) فرضوو چي $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ د تړلو انتروالوداسي لاړد ی چي د 1.7.3 لیما د a) او b)

خاصیتونه لري، که A تړلئ سیټ وی او د هر n دپاره $I_n\cap A\neq\varnothing$ وي، نو $A\subseteq\bigcap_{n=0}^{\infty}I_n$ دي.

ب) فرضوو چي د A سیټ بشپړ سیټ دي.د T پر سیټ باندي د f مپینګ داسي تعریف کړي، چي د هغه قیمتونه تړلي انترولونه وي او لاندنې ادعاوی صدق وکي:

1. د هر $x\in T$ دپاره $f(x)\cap A\neq\varnothing$ وي.

2. که $x\leqq y,\ x,y\in T$ وي، نو $f(x)\subseteq f(y)$ دي.

3. که y_2,y_1 د $x\in T$ د څوکي بلافاصله تالی(خلف) وي، نو $f(y_1)\cap f(y_2)=\varnothing$ دي.

4. که د $x\in T$ د څوکي جګوالئ n وي، نو د f(x) د انتروال اوږدوالئ تر 2^{-n} کوچنئ دی.

ج)ثابت کي، چي د بشپړ سیټ بوج **c** دي.

د) ثابت کي، چي دهر تړلي او بي شمېره سیټ بوج **c** دي.

پنځم فصل
د ښه ترتیب(اوډلو) Well Order په هکله

د طبیعی عددو N ښه ترتیب د ریاضی د استقراء غوندی پیاوړی وسیله زموږ په دسترس کي ایږدي. ځکه نو ددغه مفهوم د عمومیت د امکان څېړنه د نورو سیټو دپاره طبیعی غوښتنه وه. د ښه ترتیب سوي سیټو تیوری نن ورځ ډېره بډایه او د لایتناهی سیټو دپاره پیاوړی نتیجي وړاندی کوي. موږ به دلته یوازي په لنډه توګه د هغو مهمو نتیجو یادونه وکو، چي د بېلګي په توګه د تېر فصل سره نژدی اړیکي لري.

په 1.5 رساله کي به د ښه ترتیب سوی سیټو مهمترین خاصیتونه وڅېړو. 2.5 رساله مو دلایتناهی ښه ترتیب سوی سیټو د بوج جمع او ضرب په هکله دهیسنبرګ قضیو ته وقف کړیده. 3.5 رساله پر راکړه سوی سیټ د ښه ترتیب د موجودیت سوال ته د ټاکني د اکسیومی په اړوند اختصاص سوی ده.

4.5 رساله د ټاکني د اکسیومی په اړوند د یو لړمسئلود راغونډولو ذهنی انتخاب دي. فکر کوم چي د ټاکني داکسیومی او n عنصر لرونکي سیټو په منځ کي د اړیکو څېړنه (3.4—5.4 بېلګي) د ټاکني د اکسیومی د اساسی دندی په درک کي ډېره مرسته کوي.

1.5. ترتیبي ډولونه(ټیپونه) Ordinal Types او دهغوی اوډنه

د ښه ترتیب سوی سیټو په اړوند اساسی مفهومونه به تاسوته در وپېژنواو دهغوی مهمترین خاصیتونه به وڅېړو. د هغوی نور خاصیتونه به د تمرینو په شکل وړاندی سي.

د $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ ښه ترتیب سوي سیټونه دي. متزاید ساده مپینګ $f : X_1 \xrightarrow{} X_2$ د X_2 پر سیټ باندي د $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ د سیټو د آیزومورفیزم (هم شکله) په نامه یادیږي.که دغه ډول آیزومورفیزم وجود ولري، نو وایو چی د $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ سیټونه مساوي ترتیبي ټیپ لری. دغه واقعیت په لاندی ډول لیکو:

$$\mathbf{t}(X_1, \leqq_1)=\mathbf{t}(X_2, \leqq_2) \qquad (1.1)$$

همدا ډول لکه د بوج مفهوم چي مو تعریف نه کئ، د ترتیبي ټیپ مفهوم هم نه تعریفوو، خو برسېره پردي هغوی په یوناني کوچنیو حروفو $\xi, \zeta, \eta, \lambda, \alpha, \beta$ سره ښیوو. که دمتن څخه څرګنده وي، چي هدف مو کم ترتیب دي، نو د $\mathbf{t}(X, \leqq)$ پر ځای یوازي $\mathbf{t}(X)$ لیکو.

تمرین 1.1. الف) ثابت کئ چي د مساوی ټیپ اړیکه انعکاسی، تناظری او انتقالی خاصیتونه لري.

ب) ثابت کئ چي دوی ښه ترتيب سوي متناهی سيټونه يوازی او يوازی هغه وخت مساوی ترتيبی ټيپونه لری ، که د هغوی بوج سره مساوی وي.

د $N_n, \leqq$ ترتيبي ټيپ به په n او د $N, \leqq$ ترتيبي ټيپ به په ω_0 او يا په ساده ډول يوازی په ω سره ښيو.

اوس به نو ترتيبي ټيپونه واوډو . فرضوو چي $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ ښه ترتيب سوي سيټونه دي. وايو چي د $X_1, \leqq_1$ ترتيبي ټيپ د $X_2, \leqq_2$ تر ترتيبي ټيپ کوچنئ دي، په لاندي ډول يې ليکو:

$$\mathbf{t}(X_1, \leqq_1) < \mathbf{t}(X_2, \leqq_2) \qquad (1.2)$$

که $a \in X_2$ داسي وجود ولري، چي د $X_1, \leqq_1$ ترتيبي ټيپ د $X_2(a), \leqq_2$ د ټوټي سره مساوي ترتيبي ټيپ ولري.

بېلګه 1.1. الف) د هر $n \in N$ دپاره $\mathbf{t}(N_n) < \mathbf{t}(N)$ ، يدی معنی ، چي $n < \omega$ دي.

ب)د طبيعی عددو «نوی» ترتيب مو د ترتيبي ټيپ په صفت تعريف کي. په آساني سره ليدل کيږي، چی دغه تعريف ، دهغه تعريف سره چي طبيعی عددو ته د R څخه په ميراث ورپاته سوی دي، منطبق دی.

ج)د N پر سيټ باندی د R ښه ترتيب داسی تعريفوو:

$nRm \equiv$ (n جفت او m طاق دي)$\vee$(m, n دواړه هم جنسه (يا دواړه جفت او يا دواړه طاق)دي او $n \leqq m$ دی)

په 1.5 شکل کي د N, R ښه ترتيب سوی سيټ انځور سوی دي. البته $N, \leqq$ د N(1), R سره مساوي ترتيبی ټيپ لري ، ځکه نو $\mathbf{t}(N, \leqq) < \mathbf{t}(N, R)$ دي.

■

شکل 1.5

تمرين 2.1. وښياست چي د «کوچنئ ترتيبي ټيپ درلودل» اړيکه انتقالي خاصيت لري.

پوښتنه کيږي، چي آيا د ترتيبي ټيپو د اوډلو تعريف درست دي؟ يدی معنی چي آيا دغه اړيکه د بېلګي په ډول ، ضد انعکاسي ده. په اساني سره ليدل کيږي ، چي د بېلګي په ډول خطی ترتيب سوی سيټ $R, \leqq$ د خپلي ټوټي سره آيزومورف (هم شکله) دي.خو دغه حالت د ښه ترتيب سوي سيټ په هکله محال دی.

ليما 1.1.فرضوو،چي $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ ښه ترتيب سوي سيټونه دي. فرضوو چي g,f د $X_1, \leqq_1$ څخه د $X_2, \leqq_2$ پر يوي ټوټي باندی آيزومورفيزمونه دي. بيا نو f=g دي.

ثبوت: اصلاً د رياضي د استقراء په طريقه ثابتيږي. په غير مستقيم ډول به يې ثبوت کو.
فرضوو،چي $f\neq g$ دي.

$$A=\{x\in X_1 , f(x)\neq g(x)\}$$

سره په نښه کوو. نظر و فرضيې ته A د X_1 غير خالي سب سيټ دي. پدى معنى چي هرومرو به کوچنۍ ترين عنصر $a\in A$ ولري.

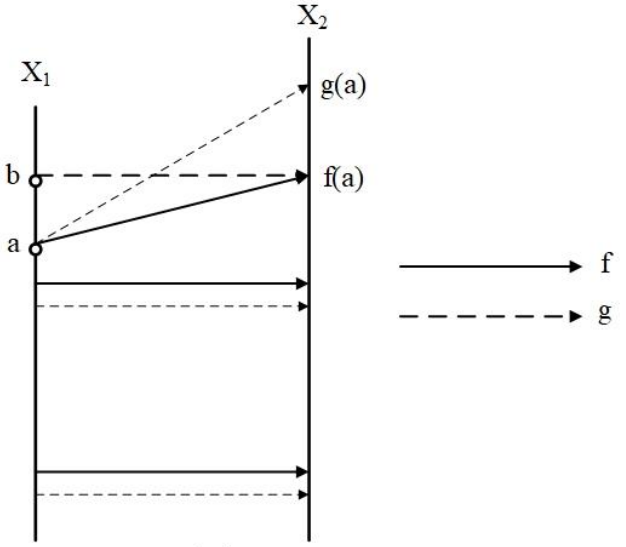
$$f(a)\neq g(a) \qquad (1.3)$$

$$f(x)=g(x) \quad \text{څخه استنباط کيږي} \quad x <_1 a \text{ د} \qquad (1.4)$$

د (1.3) پر اساس به يا $f(a) <_2 g(a)$ او يا $g(a) <_2 f(a)$ وي. د تناظر په خاطر کافي ده، چي يو حالت ، دبېلګي په ډول $f(a) <_2 g(a)$ په نظر کي ونيسو(2.5 شکل وګورئ).

څرنګه چي د g د مپينګ د قيمتو ساحه $\mathbf{H}(g)$ د X_2 د سيټ ټوټه ده، نو $f(a)\in \mathbf{H}(g)$ دي. فلهذا $b\in X_1$ داسي وجود لري،چي $f(a)=g(a)$ دي. نظر (1.3) اړېکي ته $b\neq a$ دي او د (1.4) پر اساس $b <_1 a$ ندي.څکه نو بايد $a <_1 b$ وي. بيانو هرومرو $g(a) <_2 g(b) = f(a)$ صدق کوي، خو وروستي اړيکه زموږ د فرضيې خلاف ده.

q.e.d.



2.5شکل

نتيجه . هيڅ يو د ښه ترتيب سوي سيټوڅخه د خپل داسي ټوټي سره چي د يوه عنصر په ذريعه تعين سوى وي آيزومورف ندي. پدي معنى چي د ښه ترتيب سوي سيټ $X, \leqq$ په هکله هيڅکله:

$$\mathbf{t}(X, \leqq)<\mathbf{t}(X, \leqq)$$

صدق نه کوي.

په رشتياهم د ليما پر اساس پر خپله ټوټه باندي id_x د $X, \leqq$ يوازنۍ آيزومورفيزم دي.

د ښه ترتيب سوي سيټو په هکله يوه د مهمترينو قضيو څخه ثابتوو.

قضيه 1.1. فرضوو،چي $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ ښه ترتيب سوي سيټونه دي. دلاندنيو درو حالتو څخه يوازي يوحالت منځ ته راتلای سي.

1. $\mathbf{t}(X_1, \leqq_1)=\mathbf{t}(X_2, \leqq_2)$,
2. $\mathbf{t}(X_1, \leqq_1)<\mathbf{t}(X_2, \leqq_2)$,
3. $\mathbf{t}(X_1, \leqq_1)>\mathbf{t}(X_2, \leqq_2)$.

ثبوت : بايد ثابته کو ، چي د پورتنيو امکاناتو څخه په عين وخت کي دوه امکانه نه پيښيږي او بل داچي تل يو د پورتنيو امکاناتو څخه صدق کوي.

که فرضاً په عين حال کي 2. او 3. صدق وکي، نو د :

$$g: X_2, \leqq_2 \longrightarrow X_1(b), \leqq_1 \quad و \quad f: X_1, \leqq_1 \longrightarrow X_2(a), \leqq_2$$

آيزومورفيزمونه وجود لري. $c=g(a)$ به په نښه کو. په اساني سره ليدل کيږي، چي $f\circ g$ د $X_1, \leqq_1$ څخه د $X_1(c), \leqq_1$ پر ټوټه باندي آيزومورفيزم دي. مګر دغه حالت ليما 1.1 نقضوي.

د قضيي د ثبوت دوهمه برخه مغلقه ده. فرضوو چي 1. او 3. صدق نه کوي، د f آيزومورفيزم د $X_1, \leqq_1$ دسيټ څخه د $X_2(a), \leqq_2$ پر يوه ټوټه باندي ترسيموو. فرضوو چي $X_1 \neq \emptyset$ دي.

لمړئ خو به د ترسيم مفکوره افشاء کو. د X_1 د سيټ کوچنئ ترين عنصر ته د X_2 د سيټ کوچنئ ترين عنصر تخصيصوو. که د f مپينګ په کمه نقطه کي نه وي تعريف سوی، نو بيا هم کوچنئ ترين عنصر ټاکو او هغه ته بياد X_2 د سيټ هغه کوچنئ ترين عنصر «چي تراوسه لا په کار نه وی اچول سوي» تخصيصوو. په 2.2 رساله کي مو دغه ډول کړنلاره تعقيب کړه او بيا مود هغي رسالي په ضميمه کی په مشخصه توګه تاسوته عملی لار دروښودل . هغي کړنلاري ته ورته دلته هم پر مخ ځو.

فرضوو چي $\mathscr{F}$ د ټولو هغه مپينګو h سيټ دي،چي $\mathbf{D}(h)$ د X_1 د سيټ يوه ټوټه ، $\mathbf{H}(h)$ د X_2 د سيټ يوه ټوټه او h د $\mathbf{D}(h)$ څخه پر $\mathbf{H}(h)$ باندي آيزومورفيزم دي. د $\mathscr{F}$ سيټ خالي ندی، ځکه چي د بېلګي په ډول $\emptyset \in \mathscr{F}$ دي.

اوس به يوه ډيره مهمه مسئله معرفی کو. فرضوو چي $h_1,h_2\in \mathscr{F}$ دي. بيانو $A_1= \mathbf{D}(h_1)$ او $A_2= \mathbf{D}(h_2)$ د X_1 د سيټ ټوټي دي ، پدي معنی چي يا به $A_1\subseteq A_2$ او يا به $A_2\subseteq A_1$ وي. فرضوو چي د بېلګي په ډول $A_1\subseteq A_2$ دي. بيا نو $h_1,h_2|A_1$ دX_2 پر ټوټو باندی د A_1 د ټوټي آيزومورفيزمونه دي او د ليما 1.1 پر اساس بايد:

$$h_1(x)=h_2(x) \quad \text{د } x\in A_1 \text{ دپاره} \tag{1.5}$$

صدق وکي. د (1.5) مساوات موږته په لاندی ډول د F د مپينګ د تعريف اجازه راکوي:

$$F(x)=y \equiv (\exists h\in\mathscr{F})(x\in\mathbf{D}(h)\wedge h(x)=y) \tag{1.6}$$

په اساني سره ليدل کيږي، چې $\mathbf{D}$(F) د X_1 د سيټ ټوټه ، $\mathbf{H}$(F) د X_2 د سيټ ټوټه او F د $\mathbf{D}$(F) څخه پر $\mathbf{H}$(F) باندي آيزومورفيزم دي. بر سېره پر دي F∈𝔉 دي.

وبه ښيو چې $\mathbf{D}(F)=X_1$ باندی دي. په غير مستقيم ډول يې ثابتوو. فرضوو چې$\mathbf{D}(F)\neq X_1$ دي. پدی معنی چې د کم $a\in X_1$ دپاره $\mathbf{D}(F)=X_1(a)$ دي. څرنګه چې 3. صدق نه کوي، نو دا هم امکان نلري، چې $\mathbf{H}(F)=X_2$ وي. ځکه نو د کم $b\in X_2$ دپاره $\mathbf{H}(F)=X_2(b)$ دي. کفايت کوي چې $\mathbf{H}=F\cup\{[a, b]\}$ سره کښيږدو.پدی معنی چې $\mathbf{H}$ د a په عنصر کي د F د ميپنګ پراخيدنه (توسعه) ده او $\mathbf{H}(a)=b$ ده. واضح ده چې $\mathbf{H}\in$𝔉 ده او د (1.6) پر اساس $a\in \mathbf{D}(F)$ دی او داهم هغه تناقض دي چې موږيې په لټه کي ؤ.

وموښودله، چې $\mathbf{D}(F)=X_1$ او F د X_2 د سيټ پر ټوټه باندي د X_1 آيزومورفيزم دي. ددی اسيته 2. صدق کوي.

q.e.d.

تمرين 3.1. ثابت کړ ، چې په ترتيب سره $\mathbf{H}$(F), $\mathbf{D}$(F) د X_2,X_1 د سيټو ټوټې او F د هغوی آيزومورفيزم دي.

بېلګه 2.1. الف) غير خالی ښه ترتيب سوی سيټ $X,\leqq$ يوازي او يوازي هغه وخت د ترتيبي ټيپ ω خاوند دی، که لوی ترين عنصر ونلري او د هر $x\in X$ دپاره د $X(x)$ ټوټه لوی ترين عنصر ولري.

په حقيقت کي که $\mathbf{t}(X,\leqq)>\omega$ وای، نو $x\in X$ داسي وجود درلودلای،چې $\mathbf{t}(X(x))=\omega$ وای. خو دغه ټوټه لوی ترين عنصر نلري. که $\mathbf{t}(X,\leqq)<\omega$ وای، نو بيا به د X سيټ لوی ترين عنصر درلودلای. نظر د (1.1) قضيې ته بايد $\mathbf{t}(X,\leqq)=\omega$ وي.

ب) ښه ترتيب سوی سيټ يوازي او يوازي هغه وخت متناهي دی، چې دهغه هره ټوټه لوی ترين عنصر ولري. په رشتيا هم که $X,\leqq$ متناهي نه وي،نو د (1.1) قضيې پر اساس $\mathbf{t}(X,\leqq)\geqq\omega$ دي.بيانو د X د سيټ يوه ټوټه بېله لوی ترين عنصر څخه ده.

■

که $X,\leqq$ ښه ترتيب سوي سيټ او $a\in X$ وي. بيانو د $X(a),\leqq$ سيټ هم ښه ترتيب سوي سيټ دي. د a د عنصرد ترتيبي ټيپ تر مفهوم لاندي د $X(a),\leqq$ د ټوټي ترتيبي ټيپ درک کوو.

که دوه ښه ترتيب سوي سيټونه مساوي ترتيبي ټيپ ولری ، نو واضح ده چې دهغوی بوج هم سره مساوي دي.ځکه نو د ترتيبي ټيپو د بوج په هکله ږغېدلای سو. که ξ ترتيبي ټيپ وي، نو |ξ | د اختياری ښه ترتيب سوی سيټ ، چې ترتيبي ټيپ يې ξ وي، بوج په نښه کوي. د بېلګي په ډول $|n|=n$ او $|\omega| = \aleph_0$ دي.

بېلګه 3.1. که η, ξ ترتيبي ټيپونه وي، بيانو د (1.1) قضيې پر اساس يوازي يو د درو امکاناتو ، يعنی $\eta>\xi$, $\eta<\xi$, $\eta=\xi$ صدق کوي. وبه ښيو چې ترتيبي ټيپونه ښه ترتيب سوی دي. پدی معنی که يوسيټ ولرو او يا د ترتيبي ټيپ يو معقول خاصيت ولرو، بيانو که لږترلږه يودغه ډول وجود ولري ، بيانو د هغوی څخه کوچنۍ ترين هم وجود لري. فرضوو چې $\mathcal{V}(\xi)$ د ترتيبي ټيپو «معقول» خاصيت دي (د بېلګي په ډول د 2.5 رسالي پېل وګورئ) او فرضوو چې ξ_0 داسي وجود لري، چې $\mathcal{V}(\xi_0)$

صدق کوی. فرضوو، چي د ښه ترتيب سوي سيټ $X,\leqq$ ترتيبي ټيپ ξ_0 دي. که دهيڅ $\eta<\xi_0$ دپاره $\mathcal{V}(\eta)$ صدق ونه کي، نو ξ_0 کوچنۍ ترين ترتيبي ټيپ دي، چي دهغه دپاره $\mathcal{V}$ خاصيت صدق کوي. که $\eta<\xi_0$ د $\mathcal{V}$ د خصوصيت سره وجود ولري، نو د:

$$A = \{x\in X\ ;\ \mathbf{t}(X(x),\leqq)\ \text{لري}\ \text{خاصيت}\ \text{د}\ \mathcal{V}\}$$

سيټ غير خالي دي، فلهذا کوچنۍ ترين عنصر $a\in A$ لري. بيانو د $X(a)$ ترتيبي ټيپ زموږ مطلوب کوچنۍ ترين ترتيبي ټيپ دي، چي د$\mathcal{V}$ خا صيت لري.

■

فرضوو چي ξ ترتيبي ټيپ دي.وايو،چی ξ تجريدسوي(منزوي) ترتيبي ټيپ دي،که داسي ترتيبي ټيپ $\xi>\eta$ وجود ولري، چي د هغوی ترمنځ ، بعني د ξ او η ترمنځ بل ترتيبي ټيپ وجود ونلري. په آساني سره ليدل کيږي ، چي د $X,\leqq$ ترتيبي ټيپ يوازی او يوازي هغه وخت منزوي دي، چي X لوی ترين عنصر ولري. د صفر څخه خلاف ترتيبي ټيپ چي منزوي نه وي ، د سرحدي limit ټيپ په نامه ياديږي.

بېلګه 4.1. د صفر څخه خلاف هرمتناهي ترتيبي ټيپ ، منزوی دي. د ω ترتيبي ټيپ سسرحدي ټيپ دي. د N او R ترتيبي عددونه (R د .1.1 ج) د بېلګي دی) هم سرحدي دي.

■

فرضوو،چي $X_1,\leqq_1$ او $X_2,\leqq_2$ ښه ترتيب سوي داسي سيټونه دي، چي مشترکه برخه ونلري. دهغوی يووالی $X_1\cup X_2$ داسي ترتيبوو، چي د X_1 د سيټ عنصرونه د X_2 د سيټ تر عنصرو کوچني دي. پر X_1 او X_2 باندی دهغوی اصلي ترتيب حفظوو. ددغه ډول ښه ترتيب سوي سيټ ،ترتيبي ټيپ د $\mathbf{t}(X_1,\leqq_1)$ او $\mathbf{t}(X_2,\leqq_2)$ د ټيپو د جمع په نامه ياديږي او په $\mathbf{t}(X_1,\leqq_1)\oplus\mathbf{t}(X_2,\leqq_2)$ سره يي ښيو. په اساني سره ليدل کيږي، چي دغه ډول د جمع عمليه اتحادي خاصيت لري، خو تبديلي خاصيت نلري.

بېلګه 5.1. الف) $n\oplus\omega=\omega\neq\omega\oplus n$

ب)فرضوو،چي Rد 1.1 ج) بېلګي دN د سيټ ښه ترتيب دي. بيانو $\mathbf{t}(N,R)=\omega\oplus\omega$ دي.

ج) که $\xi<\eta$ وي، نو $\lambda\oplus\xi<\lambda\oplus\eta$.ځکه چي که $\mathbf{t}(X_1,\leqq_1)=\lambda$ ، $\mathbf{t}(X_2,\leqq_2)=\eta$ او $\mathbf{t}(X_2(a),\leqq_2)=\xi$ وي ، نو $\mathbf{t}((X_1\cup X_2)(a))=\lambda\oplus\xi$ کيږي.

تمرين 4.1. د N پر سيټ ښه ترتيب و لاندنيو ټيپو ته ترسيم کئ:

$\omega\oplus\omega\oplus\omega$ ، $\omega\oplus\omega\oplus\omega\oplus\omega$ او داسي نور.

د هر ترتيبي ټيپ ξ دپاره تر هغه کوچنۍ ترين لوی(مشر)[14] ترتيبي ټيپ $\xi\oplus 1$ وجود لري . نوموړي ترتيبي ټيپ تل منزوی وي. البته هر منزوی ترتيبي ټيپ دغه ډول ښه لري.

[14] په درو خوندو او وړونو کي کشر ترين په نظر کي ونيسي، نو مياڼځوی يي د هغه کوچنۍ ترين مشر دي.(ژباړن)

د دوو ښه ترتیب سوي سیټو $X_1, \leqq_1$ او $X_2(a), \leqq_2$ کارتیزین ضرب $X_1 \times X_2$ د قاموس په ډول(لکسیکوګرافیک)اوډو:

$$[u, v]<[x, y] \equiv (u <_1 x) \vee (u=x \wedge v<_2 y)$$

تمرین 5.1. ثابت کئ، چي $X_1 \times X_2, \leqq$ ښه ترتیب سوي سیټ دی.

د ترتیبي ټیپو ضرب د ترتیبي سیټو د کارتیزین د ضرب د ټیپ په شکل ، خو په معکوس ترتیب سره ، تعریفوو، یعنی:

$$\mathbf{t}(X_2, \leqq_2) \oplus \mathbf{t}(X_1, \leqq_1) = \mathbf{t}(X_1 \times X_2, \leqq)$$

زموږ په څېړنو کي د ترتیبي ټیپو طاقت ته ضرورت نه پیداکیږي، ځکه نود هغه تعریف لوستونکو ته یې د تمرین په شکل پرېږدم.

تراوسه ټوله هغه ترتیبي سیټونه چي موږ و څېړل، د شمېر وړ سیټونه وه. طبعاً پوښتنه کیږي، چي آیا بې شمېره ښه ترتیب سوی سیټ وجود لری؟ پدی معنی چي بې شمېره ترتیبي ټیپ سته او که نه؟ددی پوښتني جواب مثبت دي، خو د بی شمېره ښه ترتیب سوی سیټ جوړښت ډېر مجرد(ابسترکت) دی.

ضمیمه – بی شمېره ترتیبي ټیپUncountable Ordinal Type

یو ښه ترتیب سوی بی شمېره سیټ به دلته تشریح کو.نوموړی سیټ په ریاضي کي زښت مهم رول لوبوي او د هغه جوړښت او د جوړولو طریقه یي ددغه ډول سیټو دپاره نمونه ده.ددغه جوړښت مبتکر آنري لبیګ HENRI LEBESGUE (1875-1941) دی.

نظر د 5.6.3 قصیې ته هر ښه ترتیب سوي د شمیر وړ سیټ د ناطقو عددو Q د سیټ سره، چي نظر و لوی والي $\leqq$ ته ترتیب سوی وی، آیزومورف دي. ځکه نو د هر د شمېر وړ ترتیبي ټیپ ξ دپاره $X \subseteq Q$ داسي وجودلري، چي $\xi = \mathbf{t}(X, \leqq)$.

تمرین 6.1. د ناطقوعددو داسي سب سیټ $X \subseteq Q$ پیداکئ، چي دهغه ترتیبي ټیپ $\omega \otimes \omega$ وي.

لاندنئ سیټ به مطالعه کو:

$$\mathcal{D} = \{\, X \subseteq Q \;;\; X, \leqq \text{ ښه ترتیب سوی دي} \,\} \qquad (1.7)$$

د $\mathcal{D}$ پر سیټ د معادلیت اړیکه E داسي تعریفوو :

$$[A, B] \in E \equiv \mathbf{t}(A, \leqq) = \mathbf{t}(B, \leqq)$$

پدي معنی ، چي د $A, B \in \mathcal{D}$ دوه سیټونه هغه وخت معادل دي، که هغوی عینی (مساوي) ترتیبي ټیپ ولري. فرضوو چي $\mathcal{R}_E$ دمعادلیت په ټولګیو باندي د $\mathcal{D}$ د سیټ تجزیه ده. که $[A]_E, [B]_E$ د $\mathcal{R}_E$ د تجزیې دوي ټولګي وي، نو :

$$[A]_E < [B]_E \equiv \mathbf{t}(A, \leqq) < \mathbf{t}(B, \leqq)$$

سره ايږدو.د (1.1) قضيي پر اساس د ≤ ,$\mathfrak{R}_E$ سيټ خطي ترتيب سوى دي. د 3.1 بېلګي له مخي همدغه سيټ ښه ترتيب سوى دي. البته دهر $[A]_E\in \mathfrak{R}_E$ دپاره د $\mathfrak{R}_E([A]_E)$ دټوټي ترتيبي ټيپ د≦ ,A د ترتيبي ټيپ سره مساوي دي.

تمرين 7.1. پورتني ادعا په جزئياتو سره ثابت کئ.

پدي ډول د $\mathfrak{R}_E([A]_E)$ هره مناسبه (proper) ټوټه د شمېر وړ ده. وبه ښيو، چي د $\mathfrak{R}_E$ سيټ بی شمېره دي. ثبوت به د تناقض په طريقه سرته ورسوو. که $\mathfrak{R}_E$ د شمېر وړ وای، نو بيا به $A\in \mathfrak{D}$ داسي وجود درلودلای، چي $\mathbf{t}(\mathfrak{R}_E, \leqq)= \mathbf{t}(A, \leqq)$ وای. لاکن $\mathbf{t}(\mathfrak{R}_E, \leqq)=\mathbf{t}(\mathfrak{R}_E([A]_E), \leqq)$ دي. دغه حالت د 1.1 ليما نتيجه نقضوي.

پدی ډول مو ښه ترتيب سوي بی شمېره سيټ پيدا کئ، چي د هغه هره مناسبه ټوټه د شمېر وړ ده. البته د دغه ډول خصوصيت درلودونکي هر دوه سيټونه يو دبل سره آيزومورف دي، پدي معنی چي د هغوی ترتيبي ټيپ سره مساوی دي. د دغه ډول سيټ ترتيبي ټيپ په ω_1 او د هغه بوج په $\aleph_1$ سره په نښه کوو. فلهذا:

$$\omega_1= \mathbf{t}(\mathfrak{R}_E, \leqq), \quad \aleph_1=| \mathfrak{R}_E|=| \omega_1|$$

په ياد يې ولرئ، چي د ξ ترتيبي ټيپ يوازي او يوازي هغه وخت دشمېر وړ دی، چي $\xi<\omega_1$ وي.

تمرين 8.1. وښياست چي $\aleph_1 > \aleph_0$ دی، او د X داسي سيټ وجود نلري، چي $\aleph_1 > |X| > \aleph_0$ وي. پدي معنی چي $\aleph_1$ د $\aleph_0$ تالی(بلافاصله خلف)دي.

د تېر ساختمان کوچنئ تعديل د لبيګ د تجزيې په نامه مشهوره دی او د حقيقی عددو د ځېړنو دپاره يوه زښته مهمه وسيله ده. د بېلګي په ډول د سيټونو په ترسيمي تيوري کي ، چي د بحث مسئله يې ،څه ډول د حقيقی عددوځني سيټونه ساده تعريف سوی دي ، د لبيګ تجزيه ديو لړ مهمو نتيجو د لاسته راوړلو دپاره ښه وسيله ده(د بېلګي په ډول [7] وګوري).

پوهېږو، چي د ناطقو عددو سيټ Q د شمېر وړ دي. پدی معنی چي هغه په لاړ کي اوډلای سو $Q =\{ r_n ; n\in N\}$. که $x\in\langle 0,1\rangle$ حقيقي عدد وي، بيانو دهغه عدد دوه ئيزه ارائه $x=\sum_{n=0}^{\infty} x_n\cdot 2^{-n-1}$ وجود لري، (که فرضاً دوی ارائي وجود ولري، نوهغه ارائه به وټاکو چي متناهی وي) . د x و عدد ته د ناطقو عددو سيټ f(x) په لاندي ډول تخصيصوو:

$$f(x)=\{r_n ; x_n=1\}$$

اوس نو د h مپينګ د $\langle 0,1\rangle$ څخه پر ټولو د شمېر وړ ترتيبي ټيپو پر سيټ يعنی پر هغه ټيپو، چي تر ω_1 کوچني وی، تعريفوو. تعريف يې ساده دي:که ≦ ,f(x) ښه ترتيب سوی سيټ نه وي، نو $h(x)=0$ سره ايږدو، اوکه ≦ ,f(x) ښه ترتيب سوی سيټ وي، نو $h(x)=\mathbf{t}(f(x), \leqq)$ سره ايږدو ، يعنی h(x) د ناطقو عددو دسيټ f(x) ترتيبي ټيپ دي، چي د حقيقی عدد x پذريعه «شفر» کړئ دي.
فرضوو چي د $\xi < \omega_1$ دپاره $L_\xi =\{x\in\langle 0,1\rangle; h(x)=\xi\}$ دي. بيانو $\{L_\xi;\ \ \xi<\omega_1\}$ د $\langle 0,1\rangle$ د انتروال پر $\aleph_1$ غير خالی سيټو تجزيه ده. دغه تجزيه د لبيګ د تجزيې په نامه ياديږي. ددی تجزيې

اصلی مفهوم د $\langle 0,1\rangle$ پر انتروال باندي دh نسبتاً «ښه» تعریف سوي مپینګ دي. یعنی دغه مپینګ د کانتینووم c د بوج سیټونه پر هغو سیټو چي د هغوی ترتیبي ټیپ تر ω_1 کوچني وی،یعنی پرداسي سیټ چی بوج يې $\aleph_1$ دی ، تعریفوي.د c او $\aleph_1$ ترمنځ دغه یوازنۍ «ښه» اړیکه ده.

نور تمرینونه

9.1. فرضوو چي $X, \leqq$ ښه ترتیب سوی سیټ ، $Y \subseteq X$ دي.

$$R=\{[y, x]\in Y\times X \, ; \, \mathbf{t}(Y(y), \leqq)=\mathbf{t}(X(x), \leqq)\}$$

په نښه کوو.

الف) ثابت کئ، چي R د Y څخه په X کي مپینګ دي.

ب) ثابت کئ، چي $\mathbf{t}(Y, \leqq)\leqq\mathbf{t}(X, \leqq)$.

10.1. د دوو اختیاري نیمګړی ترتیب سوي سیټو $X_1, \leqq_1$ او $X_2, \leqq_2$ دپاره کولای سو د مساوی ټیپ مفهوم تعریف کو.

الف) نوموړئ تعریف فورمولبندي او هڅه وکئ چي د نیمګړي ترتیب سویو سیټو ټیپونه سره پرتله کئ.

ب) د نیمګړي ترتیب سوی سیټود ټیپونو جمع او ضرب تعریف کئ.

ج) لاندنې مساواتونه او غیر مساواتونه ثابت کئ(ټوله سیټونه د لویوالي پر اساس ترتیب سوی دي)

$$\mathbf{t}(Q)\oplus\mathbf{t}(Q)=\mathbf{t}(Q)\oplus 1\oplus\mathbf{t}(Q)=\mathbf{t}(Q)$$

$$\mathbf{t}(R)\oplus\mathbf{t}(R)\neq\mathbf{t}(R)\oplus 1\oplus\mathbf{t}(R)=\mathbf{t}(R)$$

$$\mathbf{t}(Q)\otimes\mathbf{t}(Z)=\mathbf{t}(Q)\otimes\mathbf{t}(N)=\mathbf{t}(Q)$$

$$\mathbf{t}(R)\otimes\mathbf{t}(Z)\neq\mathbf{t}(R)\otimes\mathbf{t}(N)\neq\mathbf{t}(R)$$

$$\mathbf{t}(\langle 0,1\rangle)\otimes\mathbf{t}(N)=\mathbf{t}(\langle 0,1\rangle)$$

د) که η د نیمګړې ترتیب سیټ X, R ټیپ وي، نو η^* د X, R^{-1} ټیپ دي. لاندنې مساواتونه ثابت کئ:

$$\mathbf{t}(Z, \leqq) = \omega^* \oplus \omega$$

$$\mathbf{t}(Q, \leqq)^* = (Q, \leqq)$$

$$(\xi \oplus \eta)^* = \eta^* \oplus \xi^*$$

11.1. فرضوو چي د f تابع دهر ترتیبي ټیپ ξ کوچنئ تر λ ، دپاره تعریف سوی ده، او دهغي قیمتونه هم ترتیبي ټیپونه دي.

الف) که f غیر متنازل وي، $\lim_{\xi<\lambda} f(\xi)$ تعریفوو. ولی دغه تعریف یوازي د لمیټ λ دپاره په زړه پوري دي؟

ب) ثابت کړئ ، که د f تابع متزایده وي او λسرحدي(لمیټ) عددو ي، نو

$$\lim_{\xi<\lambda} f(\xi) = \sup\{f(\xi);\quad \xi<\lambda\}$$

12.1. د ترتیبي ټیپو د جمع اوضرب دپاره و (3.3),(3.2) او (3.6),(3.5) مساواتو ته ورته مساواتونه صدق کوي:

$\alpha\oplus 0=a$ $\qquad$ $\alpha\otimes 0=0$

$\alpha\oplus(\beta\oplus 1)=(\alpha\oplus\beta)\oplus 1$ $\qquad$ $\alpha\otimes(\beta\oplus 1)=(\alpha\otimes\beta)\oplus\alpha$

که β سرحدي (لمیټ) وي، نو :

$\alpha\oplus\beta=\lim_{\xi<\beta}(\alpha\oplus\xi)$ $\qquad$ $\alpha\otimes\beta=\lim_{\xi<\beta}(\alpha\otimes\xi)$

الف) پورتني مساواتونه ثابت کړئ.

ب) د پورتنیو مساواتو څخه په استفاده سره وښیاست، چی د طبیعي عددو جمع او ضرب د ترتیبي ټیپو په صفت د هغه جمع اوضرب سره، چي د حقیقی عددو څخه په میراث راته پاته سوی دي، مطابقت لري.

13.1. فرضوو چي $X_1,\leqq_1$ او $X_2,\leqq_2$ ښه ترتیب سوي سیټونه دي.د X_1 څخه په X_2 کي دټولو مپینګو سیټ ${}^{X_1}X_2$ کولای سو چي د قاموس په بڼه(لکسیکوګرافیک) ترتیب کو: f<g دي، که د کوچنیترین $x\in X_1$ ، چی $f(x)\neq g(x)$ وي ، $f(x)<_2 g(x)$ صدق وکي. لاندني ادعاوی ثابتي کړئ:

الف) ${}^{X_1}X_2,\leqq$ خطي ترتیب سوی سیټ دي.

ب) ${}^{N}\{0,1\},\leqq$ خطي ترتیب سوی سیټ ندی.

ج) که X_1 متناهي سیټ وي ، نو ${}^{X_1}X_2,\leqq$ خطي ترتیب سوی سیټ دي.

14.1. فرضوو چي $X_1,\leqq_1$ او $X_2,\leqq_2$ ښه ترتیب سوي سیټونه دي، $X_2\neq\emptyset$ او α د X_2 د سیټ کوچنۍ ترین عنصر دی. په $\mathcal{Y}$ باندی د هغو تابع ګانو سیټ $f\in{}^{X_1}X_2$ په نښه کوو، چي دهغوی دپاره د$\{x\in X_1;\ f(x)\neq\alpha\}$ سیټ متناهي وي.د $\mathcal{Y}$ پر سیټ د قاموسي ترتیب پر خلاف ترتیب تعریفوو. که $f,g\in\mathcal{Y}$ وي، نو $f<g$ داسي تعریفوو، که د $\{x\in X_1;\ f(x)\neq\alpha\vee g(x)\neq\alpha\}$ سیټ لوی ترین عنصرx_0 دپاره $f(x_0)<_2 g(x_0)$ صدق وکي.

الف) ثابت کړئ، چي د $\mathcal{Y},\preceq$ سیټ ښه ترتیب سوي سیټ دی.

ب) د $\mathcal{Y},\preceq$ د سیټ ترتیبي سیټ د $X_1,\leqq_1$او $X_2,\leqq_2$ د سیټو د ترتیبي ټیپو د طاقت په نامه یادوو او داسي به یي لیکو:

$$\mathbf{t}(\mathcal{Y}, \preceq)=\mathbf{t}\left(X_2, \leqq_2\right)^{t(X_1, \leqq_1)}$$

ثابت کئ ، چی د α, β, λ اختیاري ترتیبي ټیپو دپاره (λ حدی (لمیټ) ترتیبي ټیپ دی) دباره لاندی مساواتونه صدق کوي:

$$\alpha^0=1$$

$$\alpha^{\beta\oplus 1}=\alpha^{\beta}\oplus\alpha$$

$$\alpha^{\lambda}=\lim_{\xi<\lambda}\alpha^{\xi}$$

ج) د $X\subseteq Q$ سیټ داسي پیداکي، چي د لوی والي پراساس تر ω^{ω} ترتیبي ټیپ پوری ترتیب سوی وي.

15.1. فرضوو، چي $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ترتیبي ټیپونه دي. $\alpha\leqq\beta, \gamma\leqq\delta$ دي.

الف) وښیاست، چي لاندی اړېکي صدق کوي:

$$\alpha\oplus\gamma\leqq\beta\oplus\delta$$
$$\alpha\otimes\gamma\leqq\beta\otimes\delta$$
$$\alpha^{\gamma}=\beta^{\delta}$$

ب) ثابت کئ، چي که $\gamma<\delta$ وي، نو الف) په برخه کي هم تېره غیر مساوات صدق کوي.

ج)که د الف په برخه کي $\alpha<\beta$ وي ، نو بیا هم حتمي تېره غیر مساوات صدق کوي؟ په عکس حالت کي ضده بېلګه پیدا کئ.

16.1. فرضوو چي، $h:N\times N\longrightarrow N$ بایجکشن دي، پدی معنی، چي جوړه کونکئ تابع راکړه سوي. که $A\subseteq N$ وي، نو $h^{-1}(A)$ د N پر سیټ دوه ئېزه اړېکه ده.

الف) ثابت کئ، چي د هر لایتناهي د شمېر وړ ترتیبي ټیپ ξ دپاره د $A\subseteq N$ سیټ داسي وجود لري، چي $N, h^{-1}(A)$ ښه ترتیب سوي سیټ د ترتیبي ټیپ ξ سره دي.

ب) د $\mathcal{P}(N)$ د سیټ د «لبیګ تجزیه» ترسیم کئ،پدي معنی ،چي د $\mathcal{P}(N)$ د سیټ مپینګ د ټولو د شمېر وړ ترتیبي ټیپ پر سیټ باندي ترسیم کئ.

17.1. فرضوو، چي $\left\{X_t, \leqq_t;\ t\in T\right\}$ د ښه ترتیب سوی سیټو سیستم دي. فرضوو، چي $\mathcal{K}$ ددغه سیستم د ټولو «تارو» سیټ دي، چي دمساوي ترتیبي ټیپ د عنصرو څخه اودل سوی وي. پدي معنی، چي $f\in\mathcal{K}$ یوازی او یوازی هغه وخت چي $\mathbf{D}(f)\subseteq T$ وی او لاندی خصوصیات ولري:

1. د هر $t\in\mathbf{D}(f)$ دپاره $f(t)\in X$ دی.

2. د هر $t_1, t_2\in\mathbf{D}(f)$ دپاره $\mathbf{t}(X_{t_1}(f_{t_1}))=\mathbf{t}(X_{t_2}(f_{t_2}))$ دي ، یعني د $f(t_1)$ او $f(t_2)$ عنصرونه د مساوي ترتیبي ټیپ خاوندان دي.

3. $\mathbf{D}(f)$ د T د سیټ اعظمی سب سیټ دي. پدي معنی، چي که $t\in T-\mathbf{D}(f)$ وي، نو په X کي د $s\in\mathbf{D}(f)$ دپاره د $f(s)$ په ترتیبی ټیپ عنصر وجود نلري.

الف) که د$\mathscr{N}$ سیټ په طبیعی ډول ترتیب کو، بیانو ښه ترتیب سوی سیټ لاسته راځي. (ثابت یی کئ).

ب)ثابت کئ،چي دهر $t\in T$ دپاره د$\mathscr{N}$ ترتیبي ټیپ تر $\mathbf{t}(X_t, \leqq_t)$ لوی اویا مساوی دي.

ج) ثابت کئ،که $\{\alpha_t, t\in T\}$ د ترتیبي ټیپو سیستم وي، نو $\alpha=\sup\{\alpha_t, t\in T\}$ وجودلري.

2.5. ښه ترتیب سوي سیټونه او بوج

پدي رساله کي د ښه ترتیب سوی سیټو د خاصیتو څخه د سیټو د بوج او د هغوی د شمېرني په هکله دغیر بدیهی معلومات دلاسته راوړودپاره په کار واچوو.

که $X, \leqq$ ښه ترتیب سوی سیټ او $\alpha\in X$ وی،نود $X, \leqq$ ترتیبي ټیپ دهغه د ټوټي $X(\alpha), \leqq$ تر ترتیبی ټیپ لوی دي. خو دغه خاصیت دهغوی د بوج په هکله حتمي نده چی صدق وکي. کیدای سي، چي $|X(\alpha)| = |X|$ وي. 1.1.5 ج)بېلګه وګوری.د ترتیبي ټیپو په ژبه ویلای سو، چي داسي ترتیبي ټیپونه $\xi<\eta$ وجود لري،چي $|\eta|=|\xi|$ دي. د 1.1ج) او 5.1.ب) د بېلګو نتیجې کولای سو، چي د $|\omega\oplus\omega|=|\omega|(=\aleph_0)$ د مساوات پذریعه ارائه کو. دبلی خوا داسی ترتیبي ټیپ ζ وجود لري،چي د $\zeta<\xi$ دپاره $|\zeta|<|\xi|$ صدق کوي.د بېلګي په ډول هر طبیعی عدد دغه ډول دي، ω_0, ω_1 هم ، همدا ډول دي. دغه ډول ζ ټیپ د ابتدائي ټیپ په نامه یادوو.

قضیه 1.2.دهرترتیبي ټیپ η دپاره ابتدائي ترتیبي ټیپ ξ، $\xi\leqq\eta$ داسي وجودلري،$|\xi|=|\eta|$ دي.

ثبوت : فرضوو، چي $X, \leqq$ ښه ترتیب سوی سیټ او فرضوو، چي د هغه ترتیبي ټیپ $\eta=\mathbf{t}(X, \leqq)$ د هغه ابتدائي ترتیبي ټیپ ندي. پدي معنی، چي د $\alpha\in X$ عنصر داسي وجود لري، چي $|X(\alpha)| = |X|$ دي. څرنګه چي د X سیټ، ښه ترتیب سوی سیټ دي، نو کوچنئ ترین عنصر$\alpha\in X$ دنوموړي خاصیت سره لري. لوستونکي په آساني سره ځان باوري کولای سي، چي $\xi=\mathbf{t}(X(\alpha), \leqq)$ مطلوب ابتدائي ترتیبي ټیپ دي.

q.e.d.

تمرین 1.2. د 2.1. قضیې ثبوت تکمیل کي او د 3.1. بېلګي د مفکورو سره پرتله کي.

بېلګه 1.2. که ξ لایتناهي ترتیبي ټیپ وي، نو د عین بوج سره ترتیبي ټیپ η وجود لري، چي $\eta>\xi$ او هغوی ابتدائي ترتیبي ټیپونه ندي.

په رشتیا هم د1.1 قضیې پر اساس $\xi \leqq \omega$ اود 6.1.4 بېلګې پر بناء
$|\xi\oplus\omega\oplus\omega| = |\xi\oplus\omega| = |\xi\oplus n| = |\xi|$او داسي نور. برسېره پردي $\xi \oplus \omega$ کوچني ترين سرحدي (لميټ) ترتيبي ټيپ دي، چي تر ξ لوی، خو د ξ سره د مساوي بوج درلودونکي دي.

■

تمرين 2.2. که ξ لايتناهي ترتيبي ټيپ وي، نو بيا سرحدی (لميټ) دي.

راسي چي د ترتيبي ټيپو جوړښت ته د بله اړخه ځيرسو.

قضيه 2.2.دهرترتيبي ټيپ ξ دپاره د $\lambda,n\in N$ ترتيبي ټيپونه داسي وجود لري، چي :

λ سرحدي دي يا $\lambda=0$ (2.1)

$\xi= \lambda\oplus n$ (2.2)

برسيره پر دي د غه ډول λ,n ترتيبي ټيپونه يوه ستوي (unique) دي.

ثبوت: که $\xi=0$ يا سرحدي ترتيبي ټيپ وي، نو بيا کافی ده چي $\lambda= \xi$ او $n=0$ سره کښېږدو.فرضوو، چي ξ منزوی ترتيبي ټيپ دي. د A سيټ په لاندي ډول په نښه کوو:

$$A=\{ \eta< \xi; (\exists n\in N)\ \eta\oplus n= \xi\}$$

د A سيټ غير خالی دي، ځکه چي د کوم α دپاره $\xi= \alpha \oplus 1$ دي.ځکه نو $\alpha\in A$ دي. فرضوو چي λ د A د سيټ کوچنۍ ترين عنصر دي. بيانو $n\in N$ داسي وجود لري، چي (2.2) صدق کوي. که $\lambda\neq 0$ او يا λ سرحدي نه واي، نو د کوم $\beta< \lambda$ دپاره $\lambda= \beta \oplus 1$ وای. بيانو $\xi= \beta \oplus(n+1)$ دي. پدي معنی، چي $\beta\in A$ دي. دلته مو د λ د کوچنۍ والي د فرضيي سره تناقض پيداکړي. فلهذا (2.1) هم صدق کوي. يوه ستوی والي يې د 14.1 تمرين څخه استنباط کېږي.

q.e.d.

تمرين 3.2. په مستقيمه توګه په 2.2 قضيه کي د λ او n يوه ستوي والئ ثابت کي.

د ترتيبي ټيپ ξ تجزيه د $\lambda \oplus n$ د جمع په حاصل باندي موړته دا اجازه راکوي، چي دξ ترتيبي ټيپ ، نظر د n د عدد وجفت يا طاق ته، په جفت او طاق باندي ووېشو. پدي معنی چي د ξ ترتيبي ټيپ جفت دي، که د n عدد جفت وي، غير له هغه طاق دي. فلهذا ټوله سرحدي ترتيبي ټيپونه جفت دي.

بېله کمي ستونځي څخه د $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ مساوات ثبوت ته عمومي بڼه ورکولای سو(1.1.4 ب) بېلګه وګورئ).لمړئ به يوه ساده کومکي دعوی ثبوت کو.

ليما 1.2. که α لايتناهي ابتدائي ترتيبي ټيپ وي، $\lambda<\alpha$ منزوی نه وي، بيانو $\alpha \leqq\lambda\oplus\omega$ دي.

ثبوت: که $\lambda=0$ وي، نو $\lambda\oplus\omega=\omega$ کوچنۍ ترين لايتناهي ابتدائي ترتيبي ټيپ دي ځکه نو $\alpha \leqq\lambda\oplus\omega$ دي.

که $\lambda>0$ وي، بیانو λ سرحدي، پدی معنی چي لایتناهي دي. د 1.2 بېلګي پر اساس $|\lambda|=|\lambda\oplus\omega|$ او څرنګه چي α ابتدائي ترتیبي ټیپ دي، بیانو $|\lambda|<\alpha$ دي. ددي ځایه (د 1.1 قضیې په مرسته) $\lambda\oplus\omega<\alpha$ استنباط کیږي.

q.e.d.

قضیه 3.2. (G.HESSENBERG) فرضوو،چي $X, \leqq$ لایتناهي، ښه ترتیب سوی سیټ دي.بیا نو:

$$|X|+|X|=|X| \qquad (2.3)$$

ثبوت: د 2.1 قضیې پر اساس فرضولای سو، چي د $\alpha=\mathbf{t}(X, \leqq)$ ترتیبي ټیپ، ابتدائي دي.

لاندني سیټونه په نښه کوو:

$A=\{ a\in X;$ جفت دی $a\}$

$B=\{ a\in X;$ طاق دی $a\}$

د 1.5 په رساله کي دموافقي له مخي د A سیټ هغه $a\in X$ عنصرونه په بر کي نیسي، چي د $X(a)$ د ترتیبي ټیپ ټوټه جفته ده. همدا ډول دB په هکله. البته $X=A\cup B$ ، $A\cap B=\emptyset$ دي. ځکه نو کافي ده چي $|A|=|B|=|X|$ ثابت کو.

د $f: X\longrightarrow A$ بایجکشن به ترسیم کو. که $a\in X$ وي، نو د $X(a)$ د ټوټي ترتیبي ټیپ د مناسب λ او n دپاره ،چي د (2.1) ،(2.2) خاصیتونه ولري، $\lambda\oplus n$ دي. د 2.1 لیما پر اساس $\lambda\oplus 2n<\lambda\oplus\omega\leqq\alpha$ دي. ځکه نو د $b\in X$ عنصر ، هغه هم یوه ستوی!، داسی وجود لري، چي $\mathbf{t}(X(b), \leqq)=\lambda\oplus 2n$ دي. $f(\alpha)=b$ سره ایږدو. البته د f مپینګ ساده دي. که $x\in A$ وي، نو $\mathbf{t}(X(x))=\delta\oplus 2n$ دي او $y\in X$ داسي وجود لري، چي $\mathbf{t}(X(y))=\delta\oplus n$ دي. بیانو $f(y)=x$ دي، ځکه نو f مطلوب بایجکشن مپینګ دي.

q.e.d.

نتیجه. فرضوو چي $X, \leqq$ ښه ترتیب سوي سیټ، $|Y|\leqq|X|$ ، بیا نو $|X|=|X|+|Y|$ دي.

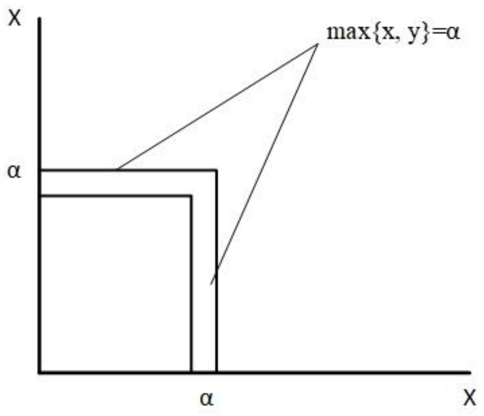
ثبوت: په رشتیا هم ، په ترتیب سره لاندي اړیکه صدق کوي:

$$|X|\leqq |Y|+|X|\leqq|X|+|X|=|X|$$

q.e.d.

په ورته ډول د $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ مساوات ثابتولای سو. ګرهارد هیسن برګ GERHARD HESSENBERG (1874-1922) په اصل کي ددی مساوات عمومي ښه په ډیره پیچلې شکل ثابته کړه. موږ د ښه ترتیب سوی سیټ $X, \leqq$ د کارتیزین ضرب $X\times X$ د یوه ښه ترتیب څخه کار اخلو. ښه ترتیب پدي ډول تعریفوو:

او $\max\{x, y\}=\max\{u, v\}$ وي، یا $\max\{x, y\}<\max\{u, v\}$ سره ایږدو ، که $[x, y]\lesssim[u, v]$ دوه ئېزي په قاموسي ډول ترتیب سوي دي، یعنی $x<u$ یا $x=u$ او $y\leqq v$ دي (3.5 شکل وګوري او د 17.3 شکل سره یې پرتله کي).



شکل3.5

تمرین 4.2. ثابته کي چي $\lesssim$ $X\times X,$ ښه ترتیب سوي ، سیټ دي.

لیما2.2. (P. E. B. JOURDAN). فرضوو چي $\leqq$ $X,$ د ابتدائي ترتیبي ټیپ لایتناهي ښه ترتیب سوي سیټ دي. بیانو :

$$\mathbf{t}(X\times X, \leqq)= \mathbf{t}(X, \leqq) \qquad (2.4)$$

د لیما څخه په مستقیمه توګه لاندني ادعا استنباط کیږي.

قضیه 4.2. (G. HESSENBERG). که $\leqq$ $X,$ ښه ترتیب سوي لایتناهي سیټ وي، بیانو:

$$|X|\cdot|X|=|X| \qquad (2.5)$$

دلیما ثبوت: لمړئ خو دی حقیقت پاملرنه وکي: که $A=X(a)$ یوه ټوټه وي، نو $A\times A\subseteq X\times X([a, a])\subseteq(A\cup\{a\})\times(A\cup\{a\})$ دي.

ظاهرآ به پیاوړي ادعا ثابته کو ، چي دهغه څخه بیا د لیما ثبوت استنباط کیږي. که A لایتناهي او ابتدائي ترتیبي ټیپ د X د سیټ ټوټه وي، نو د $\leqq$ $A,$ او $\lesssim$ $A\times A,$ د ټوټو ترتیبي ټیپونه سره مساوي دي.

فرضوو چي،زموږ ادعا حقیقت نلري، پدی معنی چي د A د سیټ ابتدائي ترتیبي ټیپ او $A\times A$ د سیټ ابتدائي ترتیبي ټیپ ، داسي ټوټه وجود لري، چي دوی په خپل منځ کي سره مساوی ندي. ځرنګه چي د $\leqq$ $X,$ سیټ ښه ترتیب سوي سیټ دي، نو کولای سو فرض کو، چي د A ټوټه د ذکر سوي خاصیتو سره د کوچنئ ترین ترتیبي ټیپ درلودونکي ده.

څرنګه چي د A سیټ خالي ندي، نو $|A\times A|\geqq|A|$ دي. د A د ټوټي ترتیبي ټیپ، ابتدائي دي، ځکه نو باید :

$$\mathbf{t}(A\times A, \lesssim)\geqq\mathbf{t}(A, \leqq)$$

وي. که تېره غير مساوات صدق کولای، يعنی $\mathbf{t}(A\times A, \preceq)>\mathbf{t}(A, \leqq)$ وای، نو د $[x, y]\in A\times A$ داسي وجود درلودلای ، چی د A او $A\times A([x, y])$ ټوټو به مساوی ترتيبي ټيپونه درلودلای. فرضوو چي $v=\max\{x,y\}\in A$ او z د هغه بلافاصله تالي(خلف) دي. البته $z\in A$ او $A(z)=A(v)\cup\{v\}$ ، بيانو :

$$A\times A([x, y])\subseteq A\times A([v, v])= A(z)\times A(z) \qquad (2.6)$$

که د $A(z)$ ټوټه متناهي وای، نود$A(z)\times A(z)$ ټوټه به هم متناهي وای. خو دغه حالت دهغه حقيقت سره چي $A\times A([x, y])$ د A په څېر مساوي ترتيبي ټيپ ، يعنی لايتناهي بوج لري، مغايرت لري. ځکه نو د$A(z)$ ټوټه لايتناهي ده. د 2.1 قضيي پر اساس $u\leqq z$ داسي وجود لري، چي $|A(u)|=|A(z)|$ دي او د $A(u)$ د ټوټي ترتيبي ټيپ ، ابتدائي دي. د $A(u)$ ترتيبي ټيپ د A د ټوټي تر ترتيبي ټيپ کوچنئ دي. ځکه نو د $A(u)$ د ټوټی دپاره قضيه صدق کوي ، يعني $\preceq$,$A(u)\times A(u)$ او $\leqq$,$A(u)$ مساوي ترتيبي ټيپونه لري ، ځکه نو مساوي بوج هم لري :

$$|A(u)\times A(u)|=|A(u)|$$

گام پر گام د (2.6) پر اساس :

$$|A|=|A\times A([x, y])|\leqq|A(z)\times A(z)|=|A(u)\times A(u)|=|A(u)|$$

لاسته راځي. خو دغه حالت دهغه واقعيت سره چي A ابتدائي ترتيبي ټيپ لري ، مغايرت کوي، پدي معنی چي $|A(u)|<|A|$ دي.

q.e.d.

نتيجه.که $X, \leqq$ لايتناهي ښه ترتيب سوي سيټ وي، Y غير خالي داسی سيټ وي،چي $|Y|\leqq|X|$ وي، نو :

$$|Y|\cdot|X|=|X|.$$

د سيټ ښه ترتيبوالي د بوج په طاقت راوستلو کی زموږ سره مرسته نسي کولای. دغه مسئله مشکله ده، په خاص مفهوم سره يې جواب نلرو- 4.6 رساله وگورئ.

ضميمه – د ترانسفای نايټ Transfinite استقراء په هکله

د رياضي د استقراء د ثبوت طريقه د طبيعی عددو د سيټ د ښه ترتيب پر خاصيت باندی استوارده – د 2.1.3 قضيي ثبوت وگورئ . ځکه نو پدي هيله يو چي د دغه ډول ثبوت طريقه د ښه ترتيب سوي سيټ دپاره هم ومومندو. د 2.2 ليما ثبوت ، دغه ډول يو ثبوت ؤ. دلته به ددغه ډول ادعا عمومي ښه فورمولبندي کو.

قضيه 5.2. (د ترانسفای نايت استقراء په هکله) . فرضوو چي $X, \leqq$ ښه ترتيب سوي سيټ دي.$\mathcal{V}$ د X پر سيټ باندي تعريف سوي د بيان تابع ده.که د IS(Induction Step) استنباط :«که د هر $x<a\in X$ دپاره $\mathcal{V}(x)$ صدق وکي، نو $\mathcal{V}(a)$ صدق کوي» ، بيانو $\mathcal{V}(x)$ د $x\in X$ د هر عنصر دپاره صدق کوي.

کله کله بهتره ده ، چي د استقراء گامو (IS) ته تفاوت قايل سو.ځکه نو لاندي دعوي فورمولبندي کوو.

قضیه 6.2. (د ترانسفای نایت استقراء په هکله) . فرضوو چې $X, \leqq$ ښه ترتیب سوې سیټ دې. $\mathcal{V}$ د X پر سیټ باندې تعریف سوې د بیان تابع ده. فرضوو چې لاندنې شرطونه صدق کوي:

IS_1 : $\mathcal{V}(x)$ د X د سیټ د کوچنې ترین عنصر x دپاره صدق کوي؛

IS_2 : که $\mathcal{V}(x)$ صدق وکي، نو د x د تالی(بلافاصله خلف) y دپاره $\mathcal{V}(y)$ صدق کوي؛

IS_3 : که x د ترتیبي ټیپ سرحدي (لمیټ) عنصر وي او د هر $y<x$ دپاره چې $\mathcal{V}(y)$ صدق وکي، بیا $\mathcal{V}(x)$ هم صدق کوي.

بیانو د هر $x\in X$ دپاره $\mathcal{V}(x)$ صدق کوي.

تمرین 4.2. 5.2. او 6.2.قضیې ثابتې کئ.

د 4.2.2 قضیې په څېر د ترانسفای نایت استقراء د ثبوت د طریقې دپاره هم ورته کړنلارې ته ضرورت سته.

قضیه 7.2. (دترانسفای نایت استقراء د ساختمان په هکله).فرضوو چې $X, \leqq$ ښه ترتیب سوې سیټ دې. فرضوو چېY غیر خالي سیټ ، $a\in Y$ ، $f:X\times Y \longrightarrow Y$ او $g:X\times \mathcal{P}(Y) \longrightarrow Y$ دې. بیا نو د X څخه په Y کې یوازنۍ مپینګ $F:X \longrightarrow Y$ د لاندنیو خاصیتو سره وجود لري:

که x د X کوچنۍ ترین عنصر وي ، نو $F(x)=a$ دي؛ (2.7)

که y د x تالی (بلافاصله خلف) وي، نو $F(y)=f(x,F(x))$ دي؛ (2.8)

که $x\in X$ سرحدي (لمیټي) ټیپ وی، نو $F(x)=g(x,\{F(y);\ y<x\})$ دي. (2.9)

ثبوت: ددې قضیې ثبوت هم د 4.2.2 د قضیې و ثبوت ته ورته دي. د ټولو F مپینګو سیټ $\mathfrak{F}$ چې د (2.7)–(2.9) خاصیتونه ولري او د X د سیټ پر یوه ټوټه تعریف سوي دي، را اخلو.و به ښیو چې $\bigcup \mathfrak{F}$ زموږ مطلوب مپینګ دي.لوستونکې کولای سي چې دثبوت جزئیات په خپله د کاغذ پر مخ راوړي او یا په اړونده کتابو کې پیدا کړي.

q.e.d.

بېلګه 2.2. فرضوو $K, +, \cdot, 0, 1$ د واحد عنصر درلودونکۍ رینګ دي. فرضوو چې $\preceq$ د K د سیټ د ښه ترتیب اړیکه ده.و به ښیو چې د K د رینګ هر آیدیال J د K د رینګ په کم اعظمی آیدیال I کې نغښتۍ ، یعنی $I\supseteq J$ دي. د I آیدیال د ترانسفاینایټ استقراء په طریقه ترسیموو. د K د رینګ څخه د هغه د آیډیالو په سیټ کې د F مپینګ تعریفوو، پدې معنی چې د $x\in K$ دپاره $F(x)$ د K د رینګ آیډیال دي. دغه مپینګ به لاندنې خاصیتونه ولري:

1. د هر $x,y\in K$ ، $x\preceq y$ دپاره ، $J\subseteq F(x)\subseteq F(y)$ دي.

2. د هر $x\in K$ دپاره یا $x\in F(x)$ دي او یا د M داسې آیدیال وجود نلري، چې x په ځان کې ولري، یعنی $x\in M$ وي، او د ټولو $y\prec x$ دپاره $F(y)\subseteq M$ وي.

که $I=\bigcup_{x\in K}F(x)$ سره په نښنه کو ، نو په اساني سره ليدل کيږي، چي I اعظمی آیډيال $I\supseteq J$ دي. په رشتيا هم لمړئ شرط د I د آیډيال تضمين کوي، پدي معنی چي I آیډيال او $I\supseteq J$ دي. که I اعظمی نه وای، نو بيابه د M آیډيال داسي وجود درلودای، چي $M\neq I,\ M\supseteq I$ وای. پدي حساب $x\in M-I$ ، $x\notin I$ به وجود درلودلای، چي $x\notin F(x)$. فلهذا ددوهم شرط پر بنسټ به داسي آیډيال وجود نه درلودای ، چي د $F(x)$ آیډيال ته داسي پراختيا ورکي چي د x عنصر په ځان کي ولري. دغه حالت د M د موجوديت سره مغايرت کوي.

دF مپينګ د ترانسفای نايټ استقراء په طريقه ترسيموو. لمړئ خو دلته د الجبرد يوه حقيقت يادونه کوو.که M د K د رينګ آیډيال ، $x\in K$ وی، نو :

$$M[x]=\{y+ax\ ;\ y\in M,\ a\in K\}$$

يا $M[x]$ آیډيال دي او يا که $1\in M[x]$ وی، نو $M[x]=K$ دي. اوس به نود F مپينګ تعريف کو. که x_0 د $\preceq$ ، K کوچنئ ترين عنصر وي، نو $F(x_0)=J[x_0]$ دي، که $F(x_0)$ آیډيال وي، او که $J[x_0]=K$ وي، نو $F(x_0)=J$ سره ايږدو. همدا ډول که مو $F(x)$ تعريف کړی وي او y د x تالي(بلافاصله خلف) وي، نو $F(y)=F(x)[y]$ سره ايږدو، که $F(y)$ آیډيال وي او $F(y)=F(x)$ سره ايږدو، که $F(x)[y]=K$ وي. که x سرحدي ټيپ وي، نو $\bigcup_{y\prec x}F(y)$ آیډيال دي اود $F(x)$ قيمت يا $\left(\bigcup_{y\prec x}F(y)\right)[x]$ او يا $\bigcup_{y\prec x}F(y)$ دي. البته پاسنئ لومړی او دوهم شرط پر ځای کيږي.

■

تمرين 5.2. د 7.2. قضيې د f او g مپينګونه ، چي په تېره مسئله کي مو کار ځني واخيست ترسيم کئ.

تمرين 6.2. د 1.1 قضيي په ثبوت کي مو د F مپينګ د ترانسفای نايټ استقراء په طريقه تعريف کي، د هغه جوړښت تشريح او د 7.2. قضيې د f او g مپينګونه ددغه جوړښت دپاره ترسيم کئ.

نور تمرينونه

7.2. ددی دپاره چي د 4.2 قضيي او 2.2 ليما ثبوت مو ښه درک کړئ وي، په عين ترتيب سره د $\aleph_1\cdot\aleph_1=\aleph_1$ خاص حالت ثابت کئ.

8.2. که د $X\subseteq R$ سيټ داسي وي، چي $X, \leqq$ (د X عنصرونه دلوی والی پر اساس ترتيب سوي دي) ښه ترتيب سوي ، سيټ وي، نو ثابته کئ چي د X سيټ د شمېر وړ دي.

9.2. فرضوو چي $\preceq$ د حقيقي عددو ښه ترتيب دي.

الف)که $X\subseteq R$ داسی سب سيټ وي، چي د هر $x,y\in X$ دپاره :

$$x\preceq y\ \equiv\ x\geqq y$$

صدق وکي($\geqq$ د عنصرو ترتيب د لوی والي پر اساس په نښنه کوی)، بيا نو X د شمېر وړ سيټ دي.

ب) ثابت کې، چې $(\aleph_1)^2_2 \longrightarrow 2^{\aleph_0}$ دي.

10.2. فرضوو چې ξ, η ترتيبي ټيپونه دي. د ξ⊕ η او ξ⊗ η جفت او طاق والي د هغوی داجزاؤ د جفت او طاق والي په اړوند څه ډول رابطه لري؟

11.2. که λ او υ سرحدي (لميټ) ترتيبي ټيپونه وي، وايو چې υ په λ پوري منحصر کانفاينل [15] (Confinal) دي، که د {f(ξ); ξ<λ} ترتيبي ټيپو داسي متصاعد لاړ وجود ولري، چې $\nu = \lim_{\xi<\lambda} f(\xi)$ وي.(10.1 تمرين وګوري)

الف) ثابت کړئ چې د تعريف د شرطو څخه د ξ<λ دپاره f(ξ)< υ استنباط کيږي.

ب) ثابت کړئ چې د هر سرحدی ترتيبی ټيپ υ دپاره داسي ترتيبي ټيپ λ وجود لري، چې υ په λ پوري منحصر (Confinal) دي.

ج)کوچنئ ترينه λ چې په υ پوري منحصره ده په **cf(υ)** سره ښيو .ثابت کړئ چې **cf(υ)** ابتدائي ترتيبي ټيپ دي.

د) هغسي سرحدي ترتيبي ټيپ پيداکړئ، چې **cf(υ)**<υ وي.

12.2. د 16.1 تمرين د نتيجو څخه په استفاده سره ثابت کړئ، چې د هر سيټ X دپاره د α ترتيبي ټيپ داسي وجود لري، چې |X|≦|α | صدق نه کوي.

3.5. هر سيټ ښه ترتيبولای سو؟

پدي رساله کي به وښيو چي دهر سيټ د ښه ترتيبولو امکان د سيټ د جوړيدو د نوی پرنسيپ سره ، يعنی د انتخاب د اکسيومي سره معادل دي .

د تيرې رسالي مهمې نتيجي (قضيه 3.2. ، قضيه 4.2. ، ښيلګه 2.2.) داسي جوړښت درلودی:که ≦ ,X ښه ترتيب سوي وي، نو X .... خاصيتونه لري. د ادعا په فرضيه کي د ≦ ,X د ښه ترتيب ، غوښتنه کوو. د استنباط په نتيجه کي به مو پر ښه ترتيب سترګي پټي کړي. د استنباط د نتيجي دپاره د ≦ دوه ئيزي اړيکي د موجوديت تثبيت په داسي ډول کافی دی، چې د ≦ ,X سيټ ښه ترتيب سوي وي. وايو چې د X سيټ ښه ترتيبولای سو(د ښه ترتيب وړ دی) ، که د ≦ دوه ئيزه اړيکه داسي وجود ولري، چې د ≦ ,X سيټ ښه ترتيب سوی وي. پدی معنی چې، دښيلګي په ډول، قضيه 3.2. داسي هم فورمولبندي کولای سو: که د X سيټ ښه ترتيبيدلای سي، نو |X|=|X|+|X| دي.

ښيلګه 1.3. هر متناهي سيټ ښه ترتيبيدلای سي. په رشتيا هم، که X متناهي سيټ وي، نو داسي طبيعی عدد n وجود لري، چې $f\colon X \longrightarrow N_n=\{0, 1, ..., n-1\}$ د بايجکشن مپينګ دي.

فرضوو، چې:

$$R=\{[x,y]\in X\times X;\quad f(x) \leqq f(y)\}$$

په اساني سره ليدل کيږي، چې X, R ښه ترتيب سوي سيټ دي.

[15] د confinal کلمه په انګريزی ، انګليسي کي مروجه ده، په امريکايي انګليسی کي ورته cofinal وايي (ژباړن)

■

تمرین 1.3. الف) ثابت کئ چي، که $|X|=|Y|$ وي اود Y سیټ ښه ترتیبیدلای سي ، نو د X سیټ هم ښه ترتیبیدلای سي.

ب)ثابت کئ، چي که د X سیټ د شمېر وړ وي، یا $|X|=\aleph_1$ وي، نو د X سیټ ښه ترتیبیدلای سي.

طبعاً پوښتنه کېږي، آیا هر سیټ ښه ترتیبولای سو؟تر اوسه پوری خو د حقیقي عددو سیټ R ښه نسو ترتیبولای.

تمرین 2.3. آیا د حقیقي عددو سیټ R ښه ترتیبولای سو؟

د اینودل سوي پوښتني د جواب مقدمات به برابر کو. فرضوو چي X سیټ او $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)$ داسي سیټ دي، چي $\emptyset\notin\mathcal{F}$ ، پدي معنی، چي $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ دي. د $f:\mathcal{F}\longrightarrow X$ مپینګ د $\mathcal{F}$ دپاره د ټاکونکئ Selector په نامه یادوو، که د هر $A\in\mathcal{F}$ دپاره $f(A)\in A$ وي. پدی معنی چي د f مپینګ د X د سیټ د هر سب سیټ څخه یو عنصر ټاکي.

بېلګه 2.3. که د X سیټ ښه ترتیبیدلای سي $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ ، نو د $\mathcal{F}$ دپاره ټاکونکئ وجود لري.

څرنګه چي د X سیټ ښه ترتیبولای سو، نو د تعریف پر اساس د X د سیټ دپاره د $\leqq$ ښه ترتیب وجود لري. د f ټاکونکئ داسي تعریفوو، چی د $A\in\mathcal{F}$ و هر سیټ ته د$\leqq$ په ترتیب کي، د هغه سیټ کوچنئ ترین عنصر تخصیصوي. د فورمول په ذریعه یي داسي لیکلای سو:

$$f=\{[A, x]\in\mathcal{F}\times X \,;\, x\in A \wedge (\forall y\in A)(x\leqq y)\}$$

■

تمرین 3.3. ثابت کئ، چي د هر $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ دپاره یوازي او یوازي هغه وخت ټاکونکئ وجود لري، چی د $\mathcal{P}(X)-\emptyset$ دپاره ټاکونکئ وجود ولري.

د تخنیکي دلایلو پر اساس اوز نور مفهومونه هم تعریفوو. فرضوو چي $\{A_t;\, t\in T\}$ د غیر خالي سیټو سیستم دی. د T پر سیټ دf مپینګ د $\{A_t;\, t\in T\}$ د سیټو د سیستم د ټاکونکئ په نامه یادوو، که دهر $t\in T$ دپاره $f(t)\in A_t$ وي.

تمرین 4.3. ثابت کي ،چي د X د سیټ دغیرخالي سب سیټو، سیټ یوازي او یوازي هغه وخت ټاکونکئ لري، که د X د سیټ هر د غیر خالي سب سیټو سیستم ټاکونکئ ولري.

بېلګه 3.3. د ریاضی په انالایز کي د هاین د تابع ګانو د متمادیت د معیار سره هرومرو پېژندګلوي لري: فرضوو چي f د R څخه په R کي تابع او $a\in R$ دي. f دa په نقطه کي یوازي او یوازي هغه وخت متمادي ده، چي د حقیقي عددو د هر لاړ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دپاره ، چي $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ وي، $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ صدق وکي.

د کیڼ څخه وښئ ته استنباط په اساني سره ثابتیږي. و معکوس استنباط ته په غور سره ګورواو په غیر مستقیمه توګه یي ثابتوو. پدي معنی، فرضوو چي د f تابع د a په نقطه کي نده متمادی او راځو

داسي لاړ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ لټوو، چې و a ته تقارب کوي(نژدې کېږي) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ، خو د $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ و f(a) ته تقرب نه کوي(نه نژدې کېږي).د هغه واقعیت څخه ، چې د f تابع د a په نقطه کې نده متمادی،دداسي ε>0 موجودیت استنباط کېږي چې دهر δ>0 دپاره داسي $x\in(a-\delta, a+\delta)$ وجود لري، چې $|f(x)-f(a)| \geqq \varepsilon$ دي. د کړنلاري مفکوره یې په لاندي ډول ده: $\delta = \dfrac{1}{n+1}$ سره اېږدو اوحقیقي عدد $x_n \in \left(a-\dfrac{1}{n+1}, a+\dfrac{1}{n+1}\right)$ داسي (ټاکو!) ،چې $|f(x_n)-f(a)| \geqq \varepsilon$ وي. تاسو چې هر څونه هڅه وکې د لمړي فصل د پرنسیپو په مرسته دغه ډول سیټ - $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ نسئ تعریفولای!دلته زموږ سره د ټاکونکې مفهوم مرسته کوي.

$A_n = \left\{x\in\left(a-\dfrac{1}{n+1}, a+\dfrac{1}{n+1}\right);\quad |f(x)-f(a)| \geqq \varepsilon\right\}$ په نښه کوو. د فرضیې پر بنسټ د $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ لاړ د R د سیټ دغیر خالي سب سیټو سیستم دي . زموږ مطلوب لاړ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ددغه سیټو د سیستم ټاکونکئ دي. فلهذا د هاین دقضیې ددغې برخې د ثبوت دپاره د سیټو د یوه معین سیستم د ټاکونکئ موجودیت ضروردي.

■

بېلگه 4.3. په بېلگه 8.1.4. ج) مو د $\sum\limits_{t\in T}\alpha_t \leqq \sum\limits_{t\in T}\beta_t$ غیر مساوات د t∈T ، $\alpha_t \leqq \beta_t$ د بوج د سیستم دپاره، ثابت کې. ثبوت بنه سم «پاک» نه ؤ. فرضوو چې A او B داسي سیټونه دي، چې $|A| = \sum\limits_{t\in T}\alpha_t$ او $|B| = \sum\limits_{t\in T}\beta_t$ دي. بیانود $\{A_t;\, t\in T\}$ او د $\{B_t;\, t\in T\}$ د سیټو سیستمونه داسي وجود لری ، چې په خپل منځ کی دوه په دوه مشترکه برخه نلري او (4.1.18), (4.1.20) صدق کوي.
څرنگه چې د هر t∈T دپاره $\alpha_t \leqq \beta_t$ دي. بیانو د $f: A_t \longrightarrow B_t$ د انجکشن مپینگ وجود لري . د لمړي فصل د پرنسیپو په مرسته د $\{f_t: A_t \longrightarrow B_t,\, t\in T\}$د انجکشن سیستم نه سو ترسیمولای.
څکه نو داسي کړنلاره غوره کوو، فرضوو:

Φ_t={f: $A_t \longrightarrow B_t$; ساده مپینگ دي f}

دفرضیې پر اساس $\alpha_t \leqq \beta_t$دي، څکه نو $\Phi_t \neq \emptyset$ دي. فرضوو چې $\{f_t;\, t\in T\}$ د $\{\Phi_t;\, t\in T\}$ د سیستم ټاکونکئ دي. اوس نو د $\{f_t;\, t\in T\}$ د انجکشن د سیستم په مرسته په اساني سره د A د سیټ څخه د B په سیټ کي انجکشن رسمولای سو.

■

تمرین 5.3. ثابت کي چي د $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ هر سیټ یوازي او یوازي هغه وخت ټاکونکئ لري، چي د هر $f: X \longrightarrow Y$ سرجکشن دپاره د $g: Y \longrightarrow X$ انجکشن داسي وجود ولري، چي $g\circ f = id_Y$ دي. د 2.2.16. او 2.2.17. تمرینونه د ددغي نتیجي سره پرتله کئ. هغه لوستونکئ چي د 2.5 رسالي ضمیمه یې په غور سره لوستي وی، په اساني سره درک کولای سي، چي د غیر خالي

سيټو د سيسټم $\{A_t;\ t\in T\}$ د ټاکونکي موجوديت د دي ادعا سره معادل دي، چي ددغه سيسټم ضرب $\prod_{t\in T} A_t$ غير خالي دي.

ټوله دغه ياد سوي بېلګې موږ ودی حقيقت ته څرمه کوي، چي دغير خالي سيټو د هر سيټ دپاره بايد د ټاکونکي موجوديت فرض کړو. دغه غوښتنه د اکسيومي په څېر فورمولبندي کوو.

د ټاکني اکسيومه (Axiom of Choice) . د غير خالي سيټو د هر سيټ $\mathcal{F}$ دپاره ټاکونکئ وجود لري.

پدي حساب د 3.3 او 3.4 بېلګې د ټاکني د اکسيومي څخه استنباط کېږي. خو تر هغوی قوی تره ادعا صدق کوي.

قضيه 1.3. (د څرملو Zermelo قضيه). که د $\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ سيټ ټاکونکئ ولري، نو د X سيټ ښه ترتيبيدلای سي.

ثبوت يې موږ دلته په لنډ ډول راوړو. لوستونکئ کولای سي چي مفصل ثبوت په نورو کتابو کي وګوري او يا يې جزئيات په خپله ثبوت کي. فرضوو چي f د $\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ ټاکونکي دي. د ثبوت مفکوره داسي ده، د X سيټ داسي ترتيبوو، چي $f(X)(\in X)$ کوچنئ ترين عنصر دي ، د هغه څخه کوچنئ ترين لوی عنصر به $f(X-\{f(X)\})$ وي، او داسي نور.

معمولاً لکه د 5.2.7, 5.1.1., 2.2.4 قضيو په ثبوت کي پر مخ ځو. فرضوو چي $\mathfrak{R}$ د $R\subseteq X\times X$ د ټولو دوئيزو اړيکو سيټ دي ، بداسي ډول، چي لاندی ادعاوي صدق کوي:

$A\subseteq X$ داسي وجود لری، چي $R\subseteq X\times X$ او A,R ښه ترتيب سوی سيټ دي (3.1)

د هر $x\in A$ دپاره $f(X-A_R(x))=x$ صدق کوي (3.2)

ګام پر ګام د لاندنيو ادعاوو ثبوت په اسانۍ سره سرته رسيدلای سي:

الف) که $R_1,R_2\in \mathfrak{R}$ وي، نو يا $R_1\subseteq R_2$ او يا $R_2\subseteq R_1$ دي؛

ب) د $\bigcup\mathfrak{R}=\{[x,y]\in X\times X;\ \exists R\in \mathfrak{R}:[x,y]\in R\}$ سيټ په $\mathfrak{R}$ اړه لری.

ج) $X, \bigcup\mathfrak{R}$ ښه ترتيب سوي سيټ دي.

q.e.d.

تمرين 6.3. د الف) ، ب) او ج) ادعاوي ثابت کئ.

د قضيه 1.3 او بېلګې 2.3. په استناد مستقيماً لاندني قضيه صدق کوي.

قضيه 2.3. د ټاکني اکسيومه د « هرسيټ ښه ترتيبولای سو» سره معادله ده.

د څرملو قضيه د تېري رسالي د نتيجو سره يو ځاي اوز مهمي نتيجي لري.

قضيه 3.3. د ټاکني د اکسيومي څخه استنباط کېږي ، چي د B,A هرو دوو سيټو دپاره يا $|A|\leqq|B|$ او يا $|B|\leqq|A|$ صدق کوي. سر بېره پر دي که د A او B د سيټو څخه يو سيټ يې لايتناهي وي، نو $|A|+|B|=|A|\cdot|B|=\max\{|A|,|B|\}$ صدق کوي.

ثبوت. فرضوو چي د ټاکني اکسيومه صدق کوي. بيا نو د څرملو د قضيي پر اساس د R او S دوه ئېزي اړېکي داسي وجود لري، چي A, R او B, S ښه ترتيب سوی سيټونه دي. د قضيي 1.1 له مخي به يا $t(A, R)\leqq t(B, S)$ او يا $t(B, S)\leqq t(A, R)$ وي.په لمړي حالت کي د A, R د سيټ څخه د B, S د سيټ پر ټوټه آيزومورفيزم داسي وجود لري، چي نوموړی آيزومورفيزم په عين حال کي د A د سيټ څخه د B په سيټ کي د انجکشن مپينګ دي.فلهذا $|A|\leqq|B|$ کېږي. په عين ډول د دوهم حالت استدلال مخ ته وړو.

د بوج د جمع او ضرب په هکله ادعاوي مستقيماً د 3.2 او 4.2 قضيو د نتيجو څخه استنباط کېږي.

q.e.d.

قضيه 4.3. د ټاکني د اکسيومي څخه استنباط کېږي ، چي په هر رينګ کي چي واحد عنصر ولري، کولای سو هر آيډيال و اعظمی آيډيال ته پراختيا ورکړو.

ثبوت. فرضوو چي K د واحد عنصر لرونکي رينګ دی. د څرميلو د قضيي په استناد د K د رينګ $\leqq$ ښه ترتيب وجود لري. اوس نو کافي ده چي د بېلګي2.2 نتيجه په کار واچوو.

q.e.d.

د «متناهي سيټ » و مفهوم ته راګرځو. په 3.4 رساله کي مو «د ډډيکينډ پر اساس د متناهي سيټ» مفهوم معرفي کي. د قضيي 3.4.3. پر اساس هر متناهي سيټ ، د ډډيکينډ په مفهوم هم متناهی دي. معکوس استنباط يې د ټاکني اکسيومي ته اړتيا لري.

قضيه 5.3. د ټاکني د اکسيومي څخه استنباط کېږي ، هر متناهي سيټ د ډډيکيند په مفهوم متناهي دي.

ثبوت : فرضوو چي د A سيټ متناهي ندی. د قصيي 3.3 له مخي يا $|A|<|N|$ او يا $|N|\leqq|A|$ دي. لمړئ حالت منځ ته نه راځي، ځکه نو د $f:N\longrightarrow A$ انجکشن مپينګ وجود لري. فرضوو چي $X=A-\{f(0)\}$ دي. ليدل کېږي چي $|X|=|A|$ او $X\neq A, X\subseteq A$ دي. فلهذا د A سيټ د ډډيکينډ په مفهوم هم متناهي ندي.

q.e.d.

د لوستونکو د معلومات دپاره د رياضي ځني مهمي قضيي ، چي په خپل ثبوت کي د ټاکني داکسيومي څخه کار اخلي، معرفی کو. ددی قضيو په هکله سر ببره پر دي پوهېږو چي بيله ټاکني د اکسيومي څخه د هغوی ثبوت ناممکن دی. په لمړي قدم کي د انالايز درياضي يو لړ قضيي دي، چي د هاين و معيار ته ورته دي. د بېلګي په ډول د حقيقي عددو سيټ A يوازي او يوازي هغه وخت تړلی دی، چي د A د سيټ د هر متقارب لاړ لميټ په A پوري اړه ولري. بله بېلګه يې د لبيګ د اندازي Lebesgue Measur د σ - اديتيف (σ-Aditive) (σ ـ جمع) په هکله ادعا ده. د تفاضلي معادلاتو د حل د موجوديت په هکله د پئانو قضيه يې بله بېلګه ده. د محاسبوي رياضي (Numerical Mathematics) د تدريجي حل د ميتودو ډېري قضيي دي،لکه هره وکتوري فضاء بيس (قاعده) لری، چي د ټاکني اکسيومي ته اړتيا لري. د رياضي په بېلو څانګو کي، لکه توپولوجي، د اندازي تيوري، د احتمالاتو تيوري، او د تابع ګانو په انالايز کي د ټاکني اکسيومه يوه ضروره وسيله ده. د تابع ګانو د انالايز په اصطلاح بنسټېزه قضيه ، د هاهن ـ باناخ (Hahn-Banach) د قضيي ثبوت، اساساً د ټاکني پر

اکسيومي ولاړ دي. په توپولوجي کي د تيخونوف قضيه ، د توپولوژيکي تړلي (Compact) فضاؤ د ضرب په هکله قضيه ، په خاص مفهوم سره ، د ټاکني د اکسيومي سره معادله ده.

له بده مرغه د ټاکني اکسيومه اوز بي ډوله نتيجي هم لري، د بېلګي په ډول د ټاکني د اکسيومي په مرسته د حقيقي عددو داسي سيټ جوړولای سو ، چي هغه د لبيګ په مفهوم د اندازي وړ ندي.

ضميمه – د څورن ليما (Zorn Lemma)

د ټاکني داکسيومي ډېري مهمي نتيجي مو د څرملو د قضيې، يعنی د سيټو د ښه ترتيب، په وسيله لاسته راوړي. رياضي پوهان د هغو طريقو د لټولو په هڅه کي سوه، چي هلته د سيټو د ښه ترتيب څخه کار نه وي اخيستل سوي او هغوی هغه څه چی لټول ، وموندل. حتي ډېر امکانات يې پيدا کړل.تر ټولو مشهوره او بريالي ادعا د جرمني ـ امريکايي رياضي پوه ماکس څورن ادعاوه ، که څه هم په ورته بڼه لس کاله تر هغه دمخه پولنډی رياضي پوه کازيمير کوراتوسکي KAZIMIER KURATOWSKI(1986-1980) فورمولبندي کړي وه.

نيمګړی ترتيب سوي سيټ $X, \leqq$ د استقرائي ترتيب (Inductive ordered) سوي سيټ په نامه يادوو ، که هر ځنځير د X په سيټ کي د لوړي خوا محدود وي.

بېلګه 5.3. الف) فرضوو چي $K, +, \cdot, 0, 1$ داسي رينګ دي چي واحد عنصر ولري. د نوموړي رينګ د ټولو آيډيالو سيټ په $\mathfrak{M}$ سره په نښه کوو او د سب سيټ د اړېکي پر بنسټ يې ترتيبوو.و به ښيو چي د $\mathfrak{M}$ سيټ استقرائي ترتيب سوی دي.

فرضوو چی $\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{M}$ ځنځير دي، پدی معنی، چی که $J_1, J_2\in\mathfrak{R}$ وي، نو يا به $J_1\subseteq J_2$ وي او يا به $J_2\subseteq J_1$ وي. لاندنۍ سيټ په نښه کوو:

$$I=\{x\in K; (\exists J\in\mathfrak{R})\ x\in J\} \qquad (3.3)$$

که $J\in \mathfrak{R}$ وي، نو $J\subseteq I$ دي. پدي ډول ، که غواړو ثابته کو، چي $\mathfrak{R}$ د لوړی خوا محدود دي، کافی ده چي وښيو $I\in\mathfrak{M}$ ، يعنی I آيډيال، دي. لوستونکۍ کولای سي په نورو خاصيتو يې په خپله ځان باوری کي. موږ به دلته يوازي دهغه يو خاصيت ثابت کو. فرضوو چي $x,y\in I$ دی، نو وبه ښيو چي $x+y\in I$ دي. نظر (3.3) ته د J_1 او J_2 آيډيالونه$J_1, J_2\in\mathfrak{R}$ داسي وجود لری، چي $x\in J_1$ او $y\in J_2$ دي. څرنګه چي $\mathfrak{R}$ ځنځير دي، نو بايد يا $J_1\subseteq J_2$ ، او يا $J_2\subseteq J_1$ وي. دبېلګي په ډول که فرض کو، چي $J_1\subseteq J_2$ دي، نو $x,y\in J_2$ دي. مګر J_2 خو آيډيال دی ، بيانو $x+y\in J_2$ دي. بياهم د (3.3) پر بنسټ $x+y\in I$ دي.

ب) فرضوو چي B,A سيټونه دي. په $\mathfrak{F}$ باندی د ټولو ساده ميپنګو سيټ چي $\mathbf{D}(f)\subseteq A$ او $\mathbf{H}(f)\subseteq B$ دی، په نښه کوو. $\mathfrak{F}$ د سب سيټ د اړېکي له مخي ترتيبوو. فرضوو چي $\mathfrak{R}$ په $\mathfrak{F}$ کي ځنځير دي. د پاس په شان ورته :

$$F=\{[x, y]\in A\times B \ ; (\exists f\in\mathfrak{R})[x,y]\in f\}$$

ايږدو. په اساني سره ښودلای سو ، چي $F\in\mathfrak{F}$ او F د $\mathfrak{R}$ لوړنۍ سرحد دي. پدي معنی ، چي $\mathfrak{F}$ استقرائي ترتيب سوی دي. ■

تمرین 7.3. فرضوو، چي $\mathscr{R}$ د ټولو دوه ئېزو اړېکو $R\subseteq X\times X$ داسي سيټ دي، چي (3.1) صدق کوي.ثابت کئ :

الف) $\mathscr{R}$ که د سب سيټ د اړېکي له مخي ترتيب کو،نو په هغه صورت کي چي $|X|\geqq\aleph_0$ وي، استقرائي ندي ترتيب سوي.

ب) $\mathscr{R}$ که داسي ترتيب کو: $R_1<R_2$ دي که $R_1=R_2\cap(A_1\times A_1)$ او A_1 په A_2, R_2 کي ټوټه ده، بيانو $\preceq$,$\mathscr{R}$_استقرائي_ترتيب سوي دي.

د څورن ليما داسي ادعا کوي: که $\leqq$,X استقرائي ترتيب سوي سيټ ، $x\in X$ وي، نو لوی ترين عنصر $a\in X$ داسي وجود لري، چي $a\geqq x$ دي.

بېلګه 6.3. الف) د 5.3. الف) بېلګي د نتيجي او د څورن د ليما څخه د .2.2 بېلګي نتيجه استنباط کېږي.

ب) د 5.3. ب) بېلګي د نتيجي او د څورن د ليما پر اساس د 3.3 قضيي لمړي برخه استنباط کېږي. په رشتيا هم، فرضوو،چي $f\in\mathscr{F}$ لويترين عنصر دي. که $\mathbf{H}(f)\neq B, \mathbf{D}(f)\neq A$ وای، نو بيا $a\in A-\mathbf{D}(f)$ او $b\in B-\mathbf{H}(f)$ را اخلو او f پراخوو، يعني:

$$f'=f\cup\{[a,b]\}$$

البته $f'\in\mathscr{F}$ دي او $f'\neq f,\ f'\supseteq f$ دي. خو دغه حالت د عنصر د لوی والي په مقابل کي تناقض لري. ځکه چي موږ ويلی ږه، چي f لوی ترين عنصر دي. که $\mathbf{D}(f)=A$ وي، نو $|A|\leqq|B|$ دي او که $\mathbf{H}(f)=B$ وي، نو $|B|\geqq|A|$ دي.

تمرین 8.3. ثابت کئ، چي د څورن د ليما څخه «هر سيټ ښه ترتيبولای سو» استنباط کېږي.

قضيه 6.3. د څورن ليما د ټاکني د اکسيومي سره معادله ده.

د ثبوت لنډه طرحه راوړو: فرضوو چي د څورن ليما صدق کوي. او $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}(X)-\{\emptyset\}$ راکړه سوي دي. د $\mathscr{F}$ دپاره بايد ټاکونکي پيداکړو.د ثبوت مفکوره پدي کي ده ، چي موږ د ټولو نيمګړي ټاکونکو سيټ$\mathscr{S}$ را اخلو او دهغه لويترين عنصر د $\mathscr{F}$ دپاره ټاکونکئ دي. دقيقاً، فرضوو ، چي$\mathscr{S}$ د ټولو داسي مپينګو f سيټ دي، چي $\mathbf{D}(f)\subseteq\mathscr{F}$ او د $A\in\mathbf{D}(f)$ دپاره $f(A)\in A$ دي. د$\mathscr{S}$ سيټ، چي د سب سيټ د اړېکي له مخه ترتيب سوی دي، استقرائي ترتيب سوي دي. که f د$\mathscr{S}$ لويترين عنصر وي، نو بايد $\mathbf{D}(f)=\mathscr{F}$ وي.که داسي نه وي، نو کولای سو چي f ته داسي د 6.3. الف) د بېلګي په ډول پراختيا ورکړو.

برعکس، که د ټاکني اکسيومه صدق کوي، نو کولای سو ، دبېلګي په توګه ، داسي کړنلاره غوره کو:

فرضوو، چي $\leqq$,X استقرائي ترتيب سوي سيټ ، $x\in X$ وي. د څرملو د قضيي پر بنسټ د X پر سيټ د $\preceq$ ښه ترتيب وجود لري. د ترانسفاينايټ استقراء په طريقه د X $f:X\longrightarrow$ مپينګ داسي تعريفوو، چي $\mathbf{H}(f)$ د $\leqq$ په ترتيب کي ځنځير جوړ کي. دغه ځنځير لوړترين سرحد a لري او د جوړښت څخه استنباط کېږي، چي a يې په عين حال کي لويترين عنصر او $a\geqq x$ دي. د f مپينګ داسي جوړوو: فرضوو، چي x_0 د$\leqq$ په ترتيب کي د X د سيټ کوچنئ ترين عنصر دي. بيانو $f(x_0)=x$ سره اېږدو. فرضوو، چي د هر $z<y$ دپاره مو f تعريف کي، او سربېره پردي هغوی د$\leqq$ په ترتيب کي،

ځنځير تشکيلوي. دغه ځنځير د لوړي خوا محدود دي. د$\leqq$ په ترتيب کي w د کوچنۍ ترين عنصر په صفت داسي را اخلو، چي د $\{f(z); z<y\}$ د سيټ لوړترين سرحد وي. که $y>w$ وي، نو $f(y)=y$ سره اپړدو. که $y>w$ نه وي، نو $f(y)=w$ سره اپړدو. د **H(f)** دځنځيرد جوړښت په وخت کي د X د سيټ هر عنصر «آزمويو»، پدي ترتيب ددغه ځنځير لوړترين سرحد لوترين عنصر تضمينوي.

q.e.d.

نور تمرينونه

9.3. د ټاکني د اکسيومي څخه په استفادي سره قضيه4.6.3. ثابته کئ.

10.3. دلاندني ادعا په ثبوت کي ، د ټاکني د اکسيومی د استفادي ځاي وښياست.که د $A\subseteq R$ د سيټ د هر متقارب لاړ لميټ په A اړه ولري، نو د A سيټ تړلئ دي. (د تړلي سيټ تعريف د تمرين 12.7.4. څخه راواخلئ).

11.3. فرضوو، چي $X, \leqq$ استقرائي ترتيب سوي سيټ دی. f د$\mathscr{P}(X)-\emptyset$ دپاره ټاکونکئ دي.

الف) ثابت کئ، که $A\subseteq X$ لوی ترين ځنځير وي، نو دهغه لوړترين سرحد ، دهغه لوی ترين عنصر دي.

ب) فرضوو، چي $x\in X$ دي. په $\mathscr{R}$ باندي د X د سيټ ټوله ځنځيرونه A د لاندنيو خاصيتو سره په نښه کوو:

1. $x\in X$ دي.

2. د هر $y\in A$ دپاره $y=f(B)$ ، بداسي حال کي، چي B د $\{u\in A; u<y\}$ د ځنځير لوړ ترين سرحد دي.

ثابت ک، چي $\mathscr{R}$ لويترين عنصر لري.

ج) د ټاکني د اکسيومی څخه د الف) او ب) څخه به استفادي سره د ځورن ليما ثابته کئ.

12.3. د تمرين 12.2 د نتيجي څخه په استفادي سره ثابت کئ، چي د ټاکني اکسيومه د لاندني ادعا سره معادله ده:

که Y,X سيټونه وي، نو $|X|\leqq|Y|$ او يا $|Y|\leqq|X|$ دي.

4.5. ببله ټاکني اکسيومي څخه د ژوند په هکله

پدي رساله کي به اوز اکسيومي وڅيړو ، چي د ټاکني تر اکسيومي کمزوري دي، خود رياضي په مختلفو څانګو کي د مهمو ادعاؤ د ثبوت دپاره کفايت کوي.

د سيټ په تيوري کي د ټاکني اکسيومه خاص ځای لري. په اصل کي د نوی سيټونو د جوړولو بل پرنسيپ دي. د 3.1. رسالي په پرتله يې توپير د هغه په «نه جوړونکي» (nonconstructive)بنياد کي دي. د 3.1. رساله موږ ته د سيټ موجوديت تضمينوي، چي دخپلو خاصيتو په ذريعه په يوه ستوي ډول تشريح سوی دي. په بل عبارت، دغه ډول سيټ ، که وجود ولري ، نو يکړ دي. د ټاکني اکسيومه ،

که څه هم د سیټ موجودیت –ټاکونکئ راته تضمینوي، خو هغه په یوه ستوی بنه نه تعینوي. امکان لري، چې دغه ډول ټاکونکئ ډېر وي. پاملرنه وکي، چې د ټاکني د اکسیومي سره د معادلیت په ادعاؤ کي حالت ورته شانته دي. د څرملو قضیه د راکړه سوي سیټ بنه ترتیب تضمینوي ، خو دغه ترتیب په یوه ستوي بڼه ندي تعین سوي. څکه نود هغو نتیجو په پرتله چي بېله ټاکني اکسیومی څخه ثابت سوي دي، باید د ټاکني اکسیومي په مرسته ثابتي سوي نتیجو ته ډېرد احتیاط په سترګه وګورو. د نېکه مرغه (6 ـام فصل په جزئیاتو سره وګورئ) که د ټاکني د اکسیومي د استفادي په نتیجه کي د کومو« پرتو» (یعنی تناقض) سره مخامخ سو، نو بېله هغه څخه یې هم لاسته راوړای سو.

دغه کتاب داسي لیکل سوی دي ،چي 1–4 فصل پوري ، 1.5 او 2.5. رسالي ټولی نتیجي بېله ټاکني اکسیومي څخه ثابتي سوي دي. قضیه 4.6.3 استثناء ده (خو د هغی نتیجي بیا د ټاکني اکسیومي ته اړتیا نلري) . د بوج جمع او ضرب ، دبېلګي په ډول بېلګه8.1.4 ج) هم مستثنی وه – و دغه حقیقت ته مي په مناسبه شېبه کي ، ستاسو پاملرنه څرمه کوله.

په یقین سره کیدای سي چي لوستونکئ اعتراض وکي او ووایي ، چي د ریاضي انالایز بېله هاین د معیار څخه د متمادیت په اړوند او یا بېله د تړلي سیټ د معیار څخه ، جي په تمرین 10.3. کي مو یادونه وکړه ، ډیره خواره ده. په حقیقت کي ریاضي بېله ټاکني د اکسیومي څخه دونه په زړه پوري نده.د بله پلوه د ټاکني اکسیومه یو لړ ([7] وګورئ) بې ډوله نتیجي هم لري.څکه نو بنه به دا وي ، چي د ټاکني داکسیومي کمزوره بنه ولټو ، څو د بي ډوله نتیجو مخنیوي وسي، خو د ډېرو مهمو نتیجو ثبوت راته میسر کي. ددغه ډول اکسیومو څخه به اوز معرفي او دهغوی قدرت به سره پرتله کو.

د ټاکني اکسیومه به ، لکه په نورو کتابو کي ، په **AC** (Axiom of Choice) سره په نښه کو.

د ټاکني اکسیومي اوز کمزوري بڼې به معرفی کو.

د تابعي (متعلقي) ټاکنی **DC** (Dependent Choice) اکسیومه: که R د X پر سیټ باندي داسي دوه ئېزه اړېکه وي، چي:

$$(\forall x\in X)(\exists y\in X)(xRy) \qquad (4.1)$$

بیانو د هر a∈X دپاره د X ⟶ f:N مپینګ د لاندنیو خاصیتو سره وجود لري:

$$f(0)=a \qquad (4.2)$$

$$f(n)Rf(n+1) \quad \text{دهر } n\in N \text{ دپاره} \qquad (4.3)$$

بېلګه 1.4. فرضوو، چي A⊆X, X=R دي، A تړلئ سیټ ندي.

فرضوو، $z\in\bar{A}-A$ دي ، پدي معنی چي z∉A دي، خو د هر ε>0 دپاره (z−ε, z+ε)∩A≠∅ دي. فرضوو،چي د R اړېکه په لاندی ډول سره تعریف سوي ده:

$$[x, y]\in R \equiv (x,y\in A \wedge |x-z|>2\cdot|y-z|)$$

البته د R اړېکه د A پرسیټ (4.1) خاصیت پر ځای کوي (ثبوت یې لوستونکي ته ورپرېږدم).د تابعي ټاکني اکسیومي څخه د R ⟶ f: N مپینګ موجودیت داسي استنباط کېږي، چي **H(f)⊆A** او د $\lim_{n\to\infty} f(n)=z\notin A$ وجود لري.(د a وظیفه د A د سیټ اختیاري عنصر ، چي |a−z|<1 وي، اجراء

کولای سي. فلهذا د تابعي ټاکني اکسیومي **DC** څخه استنباط کېږي، چي د $A\subseteq R$ سیټ یوازي او یوازي هغه وخت تړلئ دي ، چي دA د عنصرو د متقارب لاړ لمیټ د A په سیټ کي شامل وي. ■

تمرین 1.4. ثابت کئ چي د **DC** څخه د هاین معیار استنباط کېږي.

فرضوو، چي α کم بوج په نښه کوي. $\mathbf{AC}_\alpha$ وایي : د هر سیټ X او د هر $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ دپاره ، چي :

$$A\in\mathcal{F}\rightarrow|A|=\alpha \qquad (4.4)$$

صدق وکي، ټاکونکئ وجود لري.

د $\mathbf{AC}^\alpha$ اکسیومه وایي: د هر سیټ X او د هر $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ ، $|\mathcal{F}|\leqq\alpha$ دپاره ټاکونکئ وجود لري.

بلاخره ، د ټاکني کمزوري اکسیومه **WAC**(Weak Axiom of Choice) وایي: که $\{\Phi_n , n\in N\}$د سیټونو داسي سیستم وي،چي $\left|\bigcup_{n=0}^{\infty}\Phi_n\right|\leqq \mathbf{c}$ **وي**، بیانو د نوموړي سیستم دپاره ټاکونکئ وجود لري.

تمرین 2.4. ثابت کئ چي د **WAC** څخه لاندي ادعاوي استنباط کېږي:

الف) د هاین د متمادیت معیار.

ب) لکه په بېلګه1.4. کي مو فورمولبندي کړه، د $\mathcal{R}$ د تړلو سب سیټو د تقارب معیار.

ج)د R د شمېر وړ سب سیټو د شمېر وړ یووالی، د شمېر وړ سیټ دي.

بېلګه 2.4. البته د $AC^{\aleph_0}$ څخه **WAC** استنباط کېږي. و به ښیو چي د **DC** څخه $AC^{\aleph_0}$ استنباط کېږي. فرضوو چي X سیټ دي او $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ د شمېر وړ دی. څکه نو (البته کولای سو چي فرض کو $\mathcal{F}\neq\emptyset$ دي) $F:N\longrightarrow\mathcal{F}$ وجود لري. پر $N\times X$ باندي د R اړیکه په لاندي ډول تعریفوو:

$$[n, x]R[m, y]=(m=n+1\wedge x\in F(n)\wedge y\in F(m))$$

البته (4.1) صدق کوي. فرضوو چي $a\in F(0)$ دي. نظر و **DC** ته د $f:N\longrightarrow N\times N$ مپینګ داسي وجود لري، چي $f(0)=[0, a]$ او (4.3) صدق کوي. بیانو f د $\mathcal{F}$ د سیستم دپاره هم ټاکونکئ تعینوي. اوس نو کفایت کوي چي $g(n)=x\equiv f(n)=[n, x]$ سره کښېږدو.

■

و تمرین 2.4. ته ورته ښودلای سو ، چي **WAC** همدا ډول $AC^{\aleph_0}$ او **DC** څخه د ریاضي د انالایز ټولي مهمی ادعاوې ثبوتوي. په عین حال کي معلومه ده ، چي ټوله ذکر سوي اکسیومي د ټاکني تر اکسیومي کمزورې دي.

په پای کي به خپله پاملرنه په زړه پوري ، اساسآ د $n\in N$ دپاره د $\mathbf{AC}_n$ د اکسیومو ترمنځ د ترکیبي شمېرنې د اړیکو و پرابلم ته وقف کړو.

د بېلګي په ډول $\mathbf{AC}_2$ پدی معنی دي: د هرو دوه عنصره سيټو د سيټ دپاره ټاکونکئ وجود لري. او يا په معادل ډول ويلای سو: که $\{A_t;\ t\in T\}$ د دوه عنصره سيټو سيستم وي، بيانو د هغوي کارتېزين ضرب $\prod_{t\in T} A_t$ غير خالي سيټ دي.

بېلګه 3.4. که د m عدد د n عدد وېشي ، نو $\mathbf{AC}_n$ څخه $\mathbf{AC}_m$ استنباط کېږي.

فرضوو، چي $n=m\cdot k$ او $\mathcal{F}\subseteq[X]^m$ دي. د $\mathcal{F}$ دپاره بايد ټاکونکئ پيداکوو. ددي دپاره چي $\mathbf{AC}_n$ په کار واچوو، لمړئ د $\mathcal{F}$ څخه n عنصره سيټ جوړوو، ددي دپاره لاندنئ سيټ تعريفوو:

$$\mathcal{G}=\{A\times\{1,2,\ldots,k\}\ ;\ A\in\mathcal{F}\}\subseteq[X\times\{1,2,\ldots,k\}]^n$$

نظر و $\mathbf{AC}_n$ ته د $\mathcal{G}$ دپاره د g ټاکونکئ وجود لري. د $A\in\mathcal{F}$ دپاره کافي ده ، چي د $f(A)$ په مقابل کي د $\{1,2,\ldots,k\}$ د ترتيب سوي جوړي لمړئ جزء کښېږدو. البته f د $\mathcal{F}$ دپاره زموږ مطلوب ټاکونکئ دي. $g(A\times\{1,2,\ldots,k\})\in A\times\{1,2,\ldots,k\}$

■

بېلګه 4.4. وبه ښيو، چي د $\mathbf{AC}_2$ څخه $\mathbf{AC}_4$ استنباط کېږي. بيانو نظر و پاسني بېلګي ته دوي دواړه ، يعنی $\mathbf{AC}_2$ او $\mathbf{AC}_4$ سره معادل دي. فرضوو، چي $\mathcal{F}\subseteq[X]^4$ ، $\mathcal{G}=[X]^2$ او g د $\mathcal{G}$ ټاکونکی دی(موجوديت يې د $\mathbf{AC}_2$ استنباط کېږي). دنوموړي ټاکونکي څخه د $\mathcal{F}$ دپاره د f د ټاکونکي په جوړولو کي ، کار اخلو. لمړئ د f د جوړښت د طرح مفکوره لنډ بيانوو. فرضوو، چي $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\in\mathcal{F}$ دي. په n_i سره د $[A]^2$ د سيټ د هغوعنصرو شمېر په نښه کوو،چي د g ټاکونکئ يې د $i=1,2,3,4,\ a_i\in A$ د عنصر په مقابل ايږدي. ځرنګه چي ، زموږ په خصوصي حالت کي، $|[A]^2|=\binom{4}{2}=6$ دي، نو $n_1+n_2+n_3+n_4=6$ دي. فرضولای سو،چي $n_1\leqq n_2\leqq n_3\leqq n_4$ دي. فرضوو، چي $B=\{a_i\in A;\ n_i=n_1\}$ دي. په يقين سره ويلای سو، چي لږترلږه $a_1\in B$ دي. د بلی خوا $B\neq A$ دي ، ځکه چی $n_1=n_2=n_3=n_4$ نسي کيداي(ځکه چي 6 پر 4 د وېش وړ ندي) . فلهذا د B سيټ بايد 2,1 او يا 3 عنصره ولري. په هرحالت کي د A د سيټ څخه يو عنصر ټاکلای سو: که $|B|=1$ وي، نو د A د سيټ څخه هغه يوازنئ عنصر چي د B په سيټ کي دي ټاکو؛ که $|B|=2$ وي،نو $g(B)$ ټاکو او بلاخره که $|B|=3$ وي، نو د $A-B$ څخه يوازنئ عنصر ټاکو.

ددی حقيقت د ښودلو دپاره، چی د f ټاکونکي ساختمان د 3.1. رسالي د پرنسيپو پر اساس صورت نيولئ دي، د پورتني مفکورو لنډه طرحه دلته راوړو. د Φ مپيڼګ داسي تعريفوو: د $A\in\mathcal{F}$ او $x\in A$ دپاره :

$$\Phi(A,x)=|\{X\in[A]^2\ ;\ g(X)=x\}| \qquad (4.5)$$

سره ايږدو.پدي ډول $\Phi(A, a_i)=n_i$ دي. علاوه پر دي د Ψ مپيڼګ داسي تعريفوو:

$$\Psi(A)=\{x\in A;\ (\forall y\in A)\ \Phi(A,x)\leqq\Phi(A,y)\} \qquad (4.6)$$

په ساده ګي سره ليدل کېږي، چي $\Psi(A)=B$ دي. اوس نو $\mathcal{F}$ پر درو برخو ، يعنی $\mathcal{F}_1$,$\mathcal{F}_2$ او $\mathcal{F}_3$ سره د لاندني نسخي مطابق يې وېشو:

$$\mathcal{F}_i=\{A\in \mathcal{F};\ |\ \Psi(A)=i\} \qquad (4.7)$$

ټاکونکئ f داسي تعريفوو: که $A\in \mathcal{F}_1$ وي ، نو $f(A)=x$ سره ايږدو، پداسي حال کي، چي $\Psi(A)=\{x\}$ دي؛ که $A\in \mathcal{F}_2$ وي، نو $f(A)=g(\Psi(A))$ او که $A\in \mathcal{F}_3$ وي، نو $f(A)=x$ ،پداسي حال کي، چي $A-\Psi(A)=\{x\}$ دي. لوستونکي کولای سي چي پر جزئياتو يې خپل ځان باوري کي.■

بېلګه 5.4. پدي بېلګه کي به وښيو، چی د $AC_2\wedge AC_3$ څخه AC_8 استنباط کيږي.

دلته به په اصل کي د .4.4 بېلګي ومفکوري ته لږ څه تعديل ورکړو. فرضوو $\mathcal{F}\subseteq[X]^8$ او $\mathcal{G}=[X]^2$ دي. فرضوو g د $\mathcal{G}$ دپاره ټاکونکئ دي. د Φ او Ψ مپينګونه د تېري بېلګي په ډول د (4.5) او (4.6) اړېکو په ذريعه تعريفوو. په نتيجه کي د $\Psi(A)$ سيټ د A د سيټ،داسي سب سيټ دي، چي $1\leqq|\Psi(A)|\leqq 7$دي. د $\mathcal{F}$ سيټ د (4.7) اړېکی پذريعه پر اوو برخو $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_7$ وېشو.د$\mathcal{F}_1$او$\mathcal{F}_7$ څخه ټاکنه بديهی ده. د$\mathcal{F}_2$او$\mathcal{F}_6$ څخه ټاکنه د g پذريعه (يعنی د AC_2 په مرسته) عملی کيږي، د$\mathcal{F}_3$او$\mathcal{F}_5$ څخه ټاکنه د AC_3 په مرسته صورت نيسي او د $\mathcal{F}_4$ څخه ټاکنه د AC_4 په مرسته ټاکنه صورت نيسي (دغه ټاکنه د بېلګي 4.4 پر اساس صدق کوي) .

■

تمرين 3.4.

الف) د بېلګي5.4. ادعاوي په جزئياتو سره ثابت کئ.

ب) وښياست، چي د $AC_2\wedge AC_5$ څخه AC_8 استنباط کيږي.

ج)وښياست، چي د $AC_2\wedge AC_3$ څخه AC_6استنباط کيږي.

نور تمرينونه

4.4 د رياضي د استقراء په طريقه ثابت کئ، چي دهر $n>0, n\in N$ دپاره AC^n صدق کوي.

5.4. ثابت کئ، چي د AC_c څخه **WAC** استنباط کيږي.

6.4. د قضيي 3.8.2 ثبوت ببله ټاکني اکسيومی څخه معرفی سوی ؤ، ځکه نو ډېر پيچلئ ؤ. نوموړی قضيه د **WAC** په مرسته ثبوت کئ.

7.4. فرضوو p اوليه عدد، $n>p$ ، n پر p د وېش وړ دی.

الف) ثابت کئ، چی د $\binom{n}{p}$ عدد دپر n د وېش وړ ندی.

ب) فرضوو $\mathcal{F}\subseteq[X]^n$ او $\mathcal{G}=[X]^p$ او g د $\mathcal{G}$ دپاره ټاکونکئ دي. و .4.4 او 4.5 بېلګو ته ورته د Φ او Ψ مپينګونه تعريف کئ.

ج) ثابت کئ چي د AC_p څخه لاندني ادعا استنباط کيږي:

که $\mathcal{F}\subseteq[X]^n$ وي، نو د $F: \mathcal{F}\longrightarrow \mathcal{P}(X)$ مپيمګ داسي وجود لري، چي د هر $A\in \mathcal{F}$ دپاره $\emptyset\neq F(A)\subseteq A$ ، $F(A)\neq A$ دي.

8.4. د 7.4 ج) تمرین د نتیجو څخه په استفاده سره لاندني استنباطونه ثبوت کئ:

الف) $\mathbf{AC_2 \wedge AC_3 \wedge AC_5 \rightarrow AC_{15}}$;

ب) $\mathbf{AC_2 \wedge AC_3 \wedge AC_5 \rightarrow AC_{16}}$;

ج) $\mathbf{AC_2 \wedge AC_3 \wedge AC_{11} \rightarrow AC_{16}}$;

د) $\mathbf{AC_{10} \rightarrow AC_8}$;

ه) $\mathbf{AC_2 \wedge AC_5 \wedge AC_7 \rightarrow AC_{10}}$;

ی) $\mathbf{AC_2 \wedge AC_3 \wedge AC_7 \rightarrow AC_{14}}$.

شپږم فصل

د سیټ د تیورۍ ماوراء (مافوق) رياضيMetamathematics

دغه فصل تر ډېره حده معلوماتي خصوصيت لري. په 1.6 رساله کي د څرملو- فرنکل د سيټ د تيوري اکسيوماتيک سيستم به و څېړو او دهغه اړېکه به زموږ له خوا په تېرو فصلو کي معرفی سوي تيورى سره وښيو. 2.6. رساله فقط يوه جزئي ځنډه د هغه څخه چي د هغه عنوان يې وعده ورکوي، تاسوته در معرفي کوي. نور يې لوستونکئ ، د بېلګي په ډول په [18] کي موندلاى سی.

ددی دپاره چي په 4.6. رساله کي مو د سيټ د تيورى د ماوراء (Meta)رياضي ځني مهم خصوصيات مو تاسوته در پيژندلي وي، نو په 3.6. رساله کي په ډېر لنډ ډول سره د ثبوت د تيوري بنسټيز مفهومونه درته معرفی کوو.

1.6. دسيټ د تيوري اکسيوماتيک کول Axiomtization of set thoery

دلته به د سيټ د تيورى د اکسيوماتيک کولو د ډولو څخه يو ډول تشريح او د هغو څخه به زموږ پرنسيپونه ، چي په 3.1. رساله کي مو معرفی کړه ، استنباط کړو.

زموږ بنسټيز مفهومونه عبارت دي له سيټ او په سيټ پورى د اړه درلودلو د اړېکي څخه. سيټونه به دلته په $x,y,u,v,...,x_1,x_2$, $A,B,X,...$, سره ښيو او د اړه درلودلو اړېکه به په $\in$ سره ښيو. ضرورى، چي د سيټ د تيورى د فارمول مفهوم دقيق معرفي کو.

اتوميک (نه تجزيه کيدونکئ) فارمول د $x=y$, $x\in y$ بڼه لري، پداسي حال کي چي د x او y د حروفو پر ځاى ، چي سيټونه په نښه کوي، نور اختيارى حرفونه ځاى نيولاى سي. د سيټ د تيوري فارمول د منطقي ترونکو (عمليو) $\vee,\wedge,\rightarrow,\equiv,\neg$ او کوانټيفيکاتورو $\exists$,$\forall$ په مرسته د اتوميک فارمولو څخه لاسته راځي.

بېلګه 1.1. قرارداد موکړئ ؤ، چي د سيټ د تيوري فارمول :

$$(\forall x)(x\in y \rightarrow x\in z)$$

په لنډ ډول سره $y\subseteq z$ ښيو.

همدا ډول د :

$$(\forall v)(v\in u \equiv (v=x \vee v=y))$$

فارمول مو په لنډ ډول لکه $u=[x, y]$ په نښه کړي ؤ.

■

تمرين 1.1. د سيټ د تيوري لاندني فارمولونه مو څه ډول ليکل؟

$$(\forall x)(x\in y \equiv (x\in u \vee x\in v))$$

$$(\forall x)(x\in y \equiv (x\in u \wedge x\in v))$$

$(\forall x)(x\in y \equiv (x\in u \wedge \neg x\in v))$

د سیټ د تیوري اکسیومي به معرفي کو. ټولي اکسیومی(د هغوی شمېر لایتناهي دی) د سیټ د تیوري فارمولونه دي. د آسانتیا په خاطر به دهغوی په لیکلو کي، د هغه لنډیزو څخه ، چي مخکي مو اشاره ورته وکړه ، کار اخلو.

د پراخېدو اکسیومه Axiom of Extensionality

$x=y \equiv(\forall u)(u\in x \equiv u\in y)$

د جوړه کېدو اکسیومه Axiom of Pairing

$(\forall x)(\forall y)(\exists u)\ u=\{x, y\}$

د بوج اکسیومه Axiom of Power Set

$(\forall x)(\exists y) (\forall z) (z\in y \equiv z\subseteq x)$

د لایتناهي اکسیومه Axiom of Infinity

$(\exists A)(\exists x)\ x\in A \wedge (\forall y)(y\in A\rightarrow y\cup\{y\}\in A))$

د سب سیټو د اکسیومي شیما Axiom Schema of Sub Sets

که φ د سیټ د تیوري داسي فارمول وي، چي A نه احتوا کوي ، بیا نولاندي فارمول اکسیومه ده:

$(\forall x_1)...(\forall x_n)(\forall x)(\exists A)(\forall y)(y\in A \equiv (y\in x \wedge \varphi(y, x_1, ..., x_n)))$

د تعویض د شیما اکسیومه Axiom Schema of Replacement

که φ د سیټ د تیوري داسي فارمول وي، چي A نه احتوا کوي ، بیا نولاندي فارمول اکسیومه ده:

$(\forall x)(\exists z)(\forall y)(\varphi(x, y, x_1, ..., x_n)\equiv y\in z)\rightarrow$

$\rightarrow(\forall B)(\exists A)(\forall y)(y\in A\equiv(\exists x)(x\in B\wedge \varphi(x, y, x_1, ..., x_n)))$

د نظم اکسیومه Axiom of Regularity

$(\forall x)[(\exists y)(y\in x)\rightarrow(\exists y)(y\in x \wedge \neg(\exists z)(z\in y \wedge z\in x))]$

د څرملو ـ فرنکل Zermelo-Fraenkel د اکسیومو سیستم به په **ZF** سره په نښه کوو. پاس ذکر سوي اکسیومي د نوموړي اکسیوماتیکي سیستم اکسیومي دي. که پر نوموړو اکسیومو د ټاکنې اکسیومه اضافه کړو ، نو د **ZFC** د اکسیومو سیستم لاسته راځي(یعنی **ZFC= ZF+AC**   دي).

اوس به نو په لنډ ډول د اکسیومو ورول ته ځیر سو. د لایتناهي اکسیومي څخه استنباط کېږي، چي لږ تر لږه یو سیټ وجود لري (هغه مو دلته په A سره ښودلئ دي). د سب سیټو د شیما د اکسیومي پر بنسټ د B سیټ داسي وجود لری،چي:

$(\forall y)(y\in B\equiv(y\in A \wedge \neg y=y))$

(دلته زموږ د φ فارمول ¬y=y دي).د پراخېدو د اکسیومي پر بنسټ دغه ډول سیټ یکړ دي او په ∅ په نښه کي.

په 3.1. رساله کي د $\mathbf{P_5}$ په اصل کي اوس ويلای سو، چی «د بیان بنه تابع» یعنی څه: پدي معنی چي هغه د سیټ د تیوري فارمول دي او د $\mathbf{P_5}$ پرنسیپ د سب سیټو د شیما د اکسیومي څخه استنباط کېږي. د $\mathbf{P_1}$ پرنسیپ د جوړه کېدو د اکسیومي څخه استنباط کېږي. $\mathbf{P_4}$ د بوج د اکسیومي څخه استنباط کېږي.

په 5.2. رساله کي مو لاندني نښه معرفي کړه:

$$x=\bigcup y \equiv (\forall u)(u\in x\equiv(\exists z)(z\in y \wedge u\in z))$$

پدي معنی ، چي x د هغو سیټو د یووالي سیټ دي ، چي په y اړه لري. پوهېږو ، چي لاندني اړېکه صدق کوي:

$$x\cup y=\bigcup\{x, y\} \qquad (1.1)$$

او د سیټو د سیستم $\{A_t;\ t\in T\}$ دپاره:

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup\{A_t;\ t\in T\} \qquad (1.2)$$

دي. وبه ښیو ، چي د هر سیټ B دپاره $A=\bigcup B$ وجود لري. ددی موخي دپاره کافي ده ، چي د $y\in x$ د فارمول دپاره د تعویض د شیما د اکسیومي څخه کار واخلو. بیانو د استنباط فرضیه صدق کوي

$$(\forall x)(\exists z)(\forall y)(y\in x \equiv y\in z)$$

(کافي ده ، چي z=x وټاکو) فلهذا:

$$(\forall B)(\exists A)(\forall y)(y\in A \equiv (\exists x)(x\in B \wedge y\in x))$$

یعنی:

$$(\forall B)(\exists A)\ A=\bigcup B$$

د (1.1) اړېکي پر بناء د $\bigcup B$ د موجودیت څخه د $\mathbf{P_2}$ پرنسیپ استنباط کېږي. د (1.2) پر اساس د سیټو د یووالي د سیستم موجودیت استنباط کېږي ، او دغه موجودیت د یوه پلوه په.5.2. رساله کي دهغه دتعریف دپاره او د بله پلوه په 8.5.2. تمرین کي د کارتیزین سیستم د موجودیت دپاره ضرور ؤ.

ترتیب سوي جوړه څه شي ده، پدی هکله باید یودبله موافقي ته ورسېږو. د تعریف د امکاناتو څخه یو امکان یې په لاندی ډول دي:

$$[x, y] = \{\{x, x\}, \{x, y\}\} \qquad (1.3)$$

پیاد مودي ، چي په 5.1. رساله کي مو د مرتبي جوړي څخه یوازني غوښتنه دا وه ، چي د (1.3.4) اړېکه باید صدق وکي. که [x, y] د (1.3) پذریعه تعریف کو، نو (1.3.4) بیا صدق کوي.

که R اړېکه وي، نو :

$$\mathbf{D}(R)=\{x\ ;\ (\exists y)[x,y]\in R\}$$

$$\mathbf{H}(R)=\{x; (\exists y)[y, x]\in R\}$$

تراوسه خو $\mathbf{D}(R)$ او $\mathbf{H}(R)$ په غير مجاز ډول تعريف سوي دي، نه پوهېږو ، چي آيا وجود لري. په متن کي مو پر دغه پرابلم سترګي پټي کړي وی، او تل مو فرضول، چي $R\subseteq A\times B$ دي. بيانو د $\mathbf{D}(R)$ موجوديت د سب سيټو د شيما د اکسيومي څخه استنباط کېدلي. ځکه چي:

$$\mathbf{D}(R)=\{x\in A ; (\exists y)[x,y]\in R\}$$

دي. همدا ډول د $\mathbf{H}(R)$ په هکله استدلال کوو.

له نېکه مرغه په اسانۍ سره موندلای سو، چي په عمومي ډول :

$$\mathbf{D}(R)=\{x\in\bigcup\bigcup R\ ; (\exists y)[x,y]\in R\}$$

صدق کوي. فلهذا د $\mathbf{D}(R)$ د سيټ موجوديت د $\mathbf{ZF}$ په اکسيومو کي تضمين دي. همدا ډول د $\mathbf{H}(R)$ د سيټ موجوديت تضمين دي.

پاته سوه د $\mathbf{P_3}$ پر پرنسيپ د باور کولو مسئله. لوستونکئ په اساني سره (د (1.3) په مرسته) ثابتولای سي، چي:

$$A\times B=\{u\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)); (\exists x\in A)(\exists y\in B)\ u=[x, y]\}$$

پدي ډول د $A\times B$ د سيټ موجوديت د $A\cup B$, $\mathcal{P}(A\cup B)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ د موجوديت او د سب سيټو د شيما د اکسيومي څخه استنباط کيږي.

د لايتناهي اکسيومي څخه په 2.6 رساله کي کار اخلو. ټوله پاته اکسيومي موپه کار واچولي، پاته سوه يوازي د نظم اکسيومه.

دنظم اکسيومه يوازي تخنيکی خصوصيت لري او دونه بنسټيز رول نه لوبوي. د بېلګي په ډول د نظم د اکسيومی څخه د هرسيټ z دپاره $z\notin z$ صدق کوي. په رشتيا هم، د نظم په اکسيومه کي $x=\{z\}$ سره ابړدو. بيانو $y\in x$ داسي وجود لري، چي $y\cap x=\emptyset$ دي. خو د $y\in x$ څخه استنباط کيږي، چي $y=z$ دي، پدي معنی $z\cap\{z\}=\emptyset$ دي ، او ددی ځايه استدلال کولای سو، چی $z\notin z$ دي.

تمرينونه

1.1. فرضوو چي φ د سيټ د تيوري فارمول دي، چي د ميپنګ دتعريف دپاره «مقرره» يا دستور وضع کوي ، پدي معنی چي :

$$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\varphi(x, y_1)\wedge\varphi(x, y_2)\rightarrow y_1= y_2)$$

ثابت کي، چی د هر سيټ A دپاره د f (ميپنګ) سيټ داسي وجود لري، چي:

$$[x, y]\in f\equiv(x\in A\wedge\varphi(x, y))$$

صدق کوي.

2.1. وښياست ، چي د هر سيټ x دپاره $x\neq x\cup\{x\}$ دي.

3.1. فرضوو، چي R داسي سيټ دي چي دهغه هر عنصر ترتيب سوي جوړه ده، وښياست چي R^{-1} وجود لري.

4.1. ثابت کي د ټولو سیټو سیټ وجود نلري.

5.1. الف) ثابت کي، چي د y,x سیټونه ، چي دهغوی دپاره x∈y او y∈x وجود نلري.

ب) ثابت کي، چي د z,y,x سیټونه ، چي دهغوی دپاره x∈y∈z∈x وی، وجود نلري.

2.6. د سیټ په تیوري کي د حقیقي عددو د جوړښت په هکله

په دي رساله کي به په لنډډول وښیو ، چي څه ډول کولای سود ZF د اکسیومو پر اساس د حقیقي عددو سیټ (2.1.1)-(2.1.8) خاصیټو سره ترسیم کو. لوستونکئ کولای سي ددی موضوع جزئیات په نورو کتابو کي ، د بېلګي په توګه په [18] کي ولولي.

لمړئ د طبیعی عددو د سیټ جوړول ضرور دي. نوموړئ سیټ به (2.1.9) او (2.1.10) خصوصیات ولري او پر هغه به د ریاضي د استقراء د ثبوت طریقه «کارکوي». البته نه په پوهیږوچي صفراو یا x+1 څه شي دي. د صفر په بدل کي هر شي چي وي ټاکلای سو.منتهی د تخنیکی دلایلو په سبب ∅=0 سره اېږدو. د x+1 عملیه ، ټل یو نوی شئ ایجابوي او هغه باید د x څخه متفاوت وي. د تمرین 2.1 پراساس د x+1 پر ځای xU{x} را اخلو. فلهذا هغسي سیټ غواړو ، چي لاندني خصوصیات ولري:

$$\emptyset \in X \qquad (2.1)$$

(2.2) که x∈X وی،نو xU{x}∈X دي.

(2.3) که د Y سیټ (2.1) او (2.2) خاصیتونه ولري، نو X⊆Y دي.

در پیاد یي کي ، چي (2.3) غوندي خاصیت په 1.2 رساله کي موږ ته د ریاضي د استقراء په طریقه د ثبوت امکان برابراوه.

تمرین1.2. د 1.2 رسالي ته ورته مفکوروپر بنسټ ثابت کئ، که د (2.1) او (2.2) په خصوصیاتو سیټ وجود ولري، نو داسي سیټ وجود لري چي (2.1)—(2.3) خاصیتونه ولري.

په (2.1) او (2.2) خصوصیاتو سره د X د سیټ موجودیت د لایتناهي د اکسیومي څخه استنباط کېږي. خو بله کړنلاره مو هم غوره کولای سوای. د لایتناهي اکسیومه په دوو نورو اکسیومو الیشوو، هغه داچي « لږ تر لږه یو سیټ وجود لري» او « په (2.1) او (2.2) خصوصیاتوباندي سیټ وجود لري». لمړي اکسیومه مو د خالي سیټ ∅ د موجودیت دپاره په کار ده، ترهغه وروسته کولای سو چي دوهمه اکسیومه فارمولبندي کو. که لوستونکئ دی ته تیار وي چي د سیټ د تیوري په اکسیوماتیکی سیستم کي دغه ډول استثناء قبوله کي، نو بیا مجبوره ندي چي د لاندني قضیي اندېښنه ورسره وي.

قضیه 1.2. د (2.1) او (2.2) په خصوصیاتو باندي سیټ وجود لري.

ثبوت : د تخنیکي پلوه یي ثبوت بدجوله دي. موږ دلته دهغه بنسټیزي ټکي راوړو او جزئیات یي لوستونکئ ته پرېږدو.

فرضوو A سیټ دي، موجودیت یي د لایتناهي اکسیومه تضمینوی ، اوa∈A دي. د φ فارمول «مپینګ» داسي لیکو،چي د a عنصر ته ∅ تعیینوي.که د x و عنصر ته د y عنصر تعیین کي، نو د

$x\cup\{x\}$ عنصر ته $y\cup\{y\}$ تعيينوي. په دغه ډول تعريف سوي مپينګ کي د A د سيټ تصوير د (2.1) او (2.2) په خصوصياتوباندي يوسيټ دي. دغه ادعا زموږ د ثبوت دپاره کافي ده.

د $\varphi(x,y)$ فارمول لاندي بڼه لري:

$$(\exists z)([x,y]\in z \wedge [a,\emptyset]\in z \wedge (\forall u)(\forall v)([u,v]\in z\rightarrow$$

$$\rightarrow [u\cup\{u\}],\ v\cup\{v\}]\in z))$$

دغه فارمول د تعويض د اکسيومي د شيما فرضيې پر ځای کوي. څکه نو د X سيټ داسي وجود لري، چي:

$$y\in X \equiv (\exists x\in A)\ \varphi(x,y)$$

په اسانی سره ليدل کيږي، چي د X سيټ د (2.1) او (2.2) خاصيتونه لري.

q.e.d.

تمرين 2.2. پورتنې قضيه په جزئياتو سره ثابته کړئ.

د قضيې (او يا د «ذکرسوو» اکسيومو) او 1.2. تمرين په استناد ويلای سو چي د (2.1)—(2.3) په خصوصياتو سيټ وجود لري. د (2.3) خاصيت موږ ته نوموړي سيټ يکړتوب او يا بيساري توب تضمينوي. دغه سيټ په N سره او دهغه عنصرونه په طبيعي عددو سره ښيو. علاوه پر دي $\emptyset=0$ او د $x\in N$ دپاره $x+1=x\cup\{x\}$ سره ايږدو. زموږ د عرف او عادت سره سم 0+1 لکه 1 ، 1+1 لکه 2 ، 2+1 لکه 3 ...او داسي نور، ليکو.

تمرين 2.3. وښياست، چي $1=\{\emptyset\}$ ، $2=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ دي.

د N پر سيټ د $\leqq$ اړيکه داسي تعريفوو:

$$x\leqq y \equiv (x=y \vee x\in y) \qquad (2.4)$$

قضيه 2.2. د $\leqq$,N سيټ ښه ترتيب سوي سيټ دي.

لمړئ و کمکي دعوا ته ضرورت لرو.

ليما 1.2. د هر $x,y\in N$ ، $x\neq y$ دپاره يا $x\in y$ او يا $y\in x$ دي.

ثبوت: د (2.1)—(2.3) خاصيتونه موږ ته د استقراء په طريقه د ثبوت اجازه راکوي. څکه نو دغه کړنلاره به تعقيب کو. لمړئ به دوه سيټونه په نښه کو:

$$B_y=\{x\in N;\ y\in x \vee y=x \vee x\in y\}$$

$$A = \{y\in N;\ B_y=N\}$$

د ليما د ثبوت دپاره کفايت کوي چي د $A=N$ مساوات ثابت کو.

لمړئ خو به وښيو،چي د A سيټ (2.1) او (2.2) خصوصيات لري.بيانو د (2.3) پر اساس د ليما ادعا صدق کوي.

په لمړي گام کي په وښيو ،چي $B_\emptyset$=N يعني ∅∈A دي. البته، $\emptyset\in B_\emptyset$ دي. که $x\in B_\emptyset$ وي، نو يا بايد x=∅ او يا ∅∈x وي. په دواړه حالتو کي $\emptyset\in x\cup\{x\}$ دي. ځکه نو $x\cup\{x\}\in B_\emptyset$ دي. فلهذا د $B_\emptyset$ سيټ د (2.1) او (2.2) خاصيتونه لري، پدي معنی ، چی $B_\emptyset$=N دي.

په عين ډول د استقراء گام اخلو: که B_x=N وي ، نو $B_{x\cup\{x\}}$ =N دي.

q.e.d.

تمرين 4.2. ثابت کي، چي د هر x∈N دپاره د B_x=N څخه $B_{x\cup\{x\}}$ =N استنباط کيږي.

اوس به نو راسو د قضيي 2.2. ثبوت ته: د ≦ اړيکه انعکاسي ده. د 5.1 الف) تمرين پر بنسټ نوموړي اړيکه ضد تناظري ده. فرضوو، چی x≦y او y≦z دي. که x=y يا y=z وي، نو x≦z بديهي ده. فرضوو، چي x≠y او y≠z دي. بيانو x∈y او y∈z دي. د ليما 1.2. په استناد يا x=z او يا z∈x دي. د x=z حالت د 5.1 الف) تمرين پر بنسټ منځ ته نه راځي. همدا ډول د 5.1 الف) تمرين له مخي د x∈z حالت منځ ته نه راځي. ځکه نو x∈z دي، يعنی د ≦ اړيکه انتقالي ده.

فرضوو، چي A⊆N غير خالي دي. د نظم د اکسيومي پر اساس داسي a∈A وجود لري، چي a∩A=∅ دي، پدي معنی ، چي د x∈A دپاره x∈a صدق نه کوي. ځکه نو د ليما 1.2. په استناد د x∈A دپاره a≦x ، يعنی a د A د سيټ کوچنۍ ترين عنصر دي.

q.e.d.

اوس نو ضرور دي، چي د طبيعي عددو جمع او ضرب تعريف کو.

قضيه2.3. د $f:N\times N\longrightarrow N$ يوازنۍ مپينگ په لاندې خصوصياتو وجود لري:

$$f(x,0)=x \qquad (2.5)$$

$$f(x,y+1)=f(x,y)+1 \qquad (2.6)$$

ثبوت: موږ ته آشنا جوړښتونه او مفکوري به دلته کاپی کړو. د 1.3.4 قضيي په شان کولای سو ثابت کو، چي دغه ډول مپينگ نهايت يو وجود لري. پاته سو ددغه ډول مپينگ د موجوديت سوال. ترجزئياتو يې تېرېږو ، ځکه چي جوړښت يې د 4.2.2. قضيې و ثبوت ته ورته دی.لاندنۍ سيټ په نښه کوو:

$\mathscr{F}$= {h⊆N^3 ; h مپينگ دي , [0,0]∈D(h), دپاره (2.6) او (2.5) صدق کوي[x,y], د [x,y+1]∈D(h)}

بيانو $f=\bigcup\mathscr{F}$ زموږ مطلوب مپينگ دي.

تمرين 5.2. قضيه 3.2. په جزئياتو ثبوت کئ.

(2.5) او (2.6) شرطونه موږته د طبيعي عددو پيژندل سوي د جمع خاصيتونه را پيادوي.پد ی ډول د f(x,y) قيمت د x+y په بڼه ليکو او د x,y∈N طبيعي عددو د جمع په نامه يادوو.

تمرين 6.2. د طبيعي عددو د ضرب موجوديت ثابت کئ.

اوس نو د طبيعي عددو سيټ N لرو، چي پر هغه باندي جمع او ضرب تعريف سويدي ، او پر هغه د رياضي د استقراء د ثبوت طريقه «کارکوي»، (ځکه چي ≦ ,N سيټ ښه ترتيب سوي سيټ دي). مورږته په آشنا کړنلاره باندي د N سيټ ته د تامو عددو Z و رينګ ته پراختيا ورکو. د μ يو شي (څېز) Object رااخلو، د بېلګي په ډول μ=[0, 0] يا μ={{∅}} دي. د [μ, n] مرتبه جوړه په n− سره ښيو.

$$Z=N\cup(\{\mu\}\times(N-\{0\}))$$

ايږدو. پدي معنی،که z∈Z وي، نو z∈N يا د کم n∈N−{0} دپاره z=−n دي. د Z د دوو عنصرو $z_1,z_2\in Z$ دپاره دهغوی جمع $z= z_1+z_2$ داسي تعريفوو:

1. که $z_1,z_2\in N$ طبيعي عددونه وي، نو z يعنی د هغوی د جمع حاصل د طبيعی عددو د جمع حاصل z_1+z_2 دي.

2. که $z_1\in N$ ، $z_2=-m$ ، $m\in N-\{0\}$ وي، نود $z_1\geqq m$ دپاره $z= z_1-m$ دي، خو د $z_1<m$ دپاره $z=-(m- z_1)$ دي.

3. که $n,m\in N-\{0\}, z_2=-m, z_1=-n$ وي، نو $z=-(n+m)$ دي.

4. که $z_2\in N, z_1=-n$ وي، نو و دوهم حالت ته ورته پر مخ ځو.

په ورته شان د Z د سيټ ددوو عنصرو ضرب تعريفوو. او پدي هکله چي Z انتګرال دومين Integral Domain (تبديلي رينګ دواحد عنصر درلودونکي، پر صفر دوېش دوړتوب ماسيوا) دي، خپل ځان باوري کو. بل ګام – دفيلډ په صفت د Q د سيټ جوړښت او د ددکينډ د مقطع په مرسته د هغه پراختيا د R و فيلډ ته – زه باور لرم ، چي لوستونکئ د موضوع سره آشنا او يا د هغه په هکله په کتابو کي (د بېلګي په ډول [7],[9],[17],[18]) لوستلای سي. البته دغه ټوله جوړښتونه د **ZF** د سيټ د تيوري په چوکاټ کي عملي سوي دي.

نورتمرينونه

7.2. ثابت کئ، چی د هر طبيعی عدد n∈N دپاره n={0,1,2, ..., n−1} صدق کوي.

8.2. ثابت کئ، چي د X⊇N سيټ داسي وجود لري، چي د "x∈y ∨ x=y" اړېکي په ذريعه په ترتيبي ټيپ ω+ω پوري ښه ترتيب سوي دي.

9.2. د X سيټ د ترتيبي عدد Ordinal Number په نامه يادوو، که د "x∈y ∨ x=y" اړېکي په ذريعه ښه ترتيب سوي وي، او د هر سيټ x∈X دپاره x⊆X دي.ثابت کي :

الف) هر n∈N ترتيبي عدد دي؛

ب) N ترتيبی عدد دي؛

ج) N∪{N} ترتيبي عدد دی.

10.2. ثابت کئ، چي دوه ترتيبي عددونه يوازي او يوازی هغه وخت يودبله سره مساوي دي، چي مساوي ترتيبي ټيپ ولري.

11.2. ثابت کئ، چي د هر ښه ترتيب سوي سيټ دپاره (د 10.2 په استناد ، يوازني) ترتيبي عدد وجود لري، چې د نوموړي سيټ سره مساوي ترتيبي ټيپ لري (فقط د 1.2. قضيې ثبوت کاپې کي) .

3.6. د دريم د طرد قانون صدق نه کوي؟

په دي رساله کي به په لنډ دول د ثبوت د تيوري بنسټيزي تشريح کو ، څووکولای سو تاسوته په راتلونکي رساله کي د سيټ د تيوري د مافوق رياضي ځني مهمي نتيجي در وپيژنو.

د تېري پيړۍ په پای او ددي پيړي په سرکي [16]رياضي د بحران سره مخامخ سوه. د بحران د نتېجي د يوی برخي سره لوستونکئ آشنا دي: د سيټ تيوري منځ ته راغله ، او دهغه په اړوند ژوري نتېجي ، دبېلگي په ډول د حقيقي عددو په هکله، لاسته راغلي. خو په عين حال کي ځني پاردکسونه (تنقيضونه) هم ورسره رامنځ ته سوه. د نېکه مرغه ددغو پارادکسو څخه ډير يې بېله سيټ د مفهوم څخه هم فورمولبندي کيدای سوای. ځکه نو هغه د رياضي د منطق او يا په مجموع کي درياضي پارادکسونه گڼلای سو. د بېلگي په ډول د دلاک (سلمان) پارادکس ، چي د کلی د ټولو نارينوو، چي په خپله خپله رېږه نه خروي، رېږه يې ورخروله ، د سيټ ومفهوم ته ضرورت نلري.

دغه حالت رياضي پوهان دي ته وهڅول ، څود رياضي و بنسټيزي ته په ځېر سره پاملرنه وکي او لمړئ د هغه بنسټيزي ستني، چي پر هغوی ټوله رياضي ولاړه ده ، ټينگي کي. دهغو ستنو څخه يې يوه ستن د رياضي منطق او دهغه اساسي برخه –دثبوت تيوري، ده.

د رياضي پوهانو دی ته پام سو، هغوی اصلاً په دي نه پوهيږي، چي په رياضي کي ثبوت څه شي دي. ځکه يې نو د ثبوت مفهوم او دهغه په اړوند نژدي مفهومونه په دقيق ډول فورمولبندي کړه.

لمړئ خو بايد پاملرنه وکو، چي رياضي تل په مشخصه ژبه ويل کوي. کله چي په 1.6. رساله کي مو د سيټ تيوري ترسيموله ، نو زموږ په ژبه کی سربېره پر حرفو ، دوي نښې (سمبولونه) ، ∈,= احتوا کولي. ټوله پاته فارمولونه مو يوازي د (اټومي فارمولو څخه) د منطقي مفصلو(د ميم په زور سره، يعنی تړونکي) او د کوانټورو په مرسته ارائه کوله. که غواړو چي د طبيعی عددو تيوري په اکسيوماتيکه بڼه څرگنده کو، نو زموږ ژبه به د =,≦,1,0 ,+,... نښې (سمبولونه) احتوا کوي. ټوله فارمولونه چي د طبيعی عددو په هکله ويل کوي، ددغو نښو (د هغوی په اړوند اټومي فارمولو څخه) د منطقي تړونکو او کوانټورو په مرسته فورمولبندي سوي دي.

درياضي د تيوری فورماليزم د هغه تيوري د ژبي او اکسيومو په ذريعه راکړه سوي دي. اکسيومي د تيوري په ژبه کي فارمولونه دي. د بېلگي په ډول د **ZF** د سيټ تيوري د ∈,= په ژبه او په 1.6. رساله کي د اکسيومو په ذريعه راکړه سوي ده. د گروپ د تيوري د فورماليزم ژبه =,·,1 او اکسيومي يې د گروپ د تيوري اکسيومې دي(اتحادي قانون، د معکوس عنصر موجوديت او داسي نور) . امکان لری چي لوستونکئ دی د طبيعی عددو د تيوري د فورماليزم سره ، چي ژبه يې ≦,1,0 ,+,. او اکسيومي يې د پئانو اکسيومې دي، آشنا وي.

د تيوري اکسيومي د رياضي هغه غوښتني دي، چي پر حقيقت بناء دي. ځني فارمولونه تل حقيقت لري، هغوی د تاوتولوجي په نامه يادېږي. د بېلگي په ډول لاندنې فارمولونه تاوتولوجي دي:

---

[16] د نولسمي پيړي په پای او د شلمي پيړي په سر کي (ژباړن)

$$\mathcal{V}\to\mathcal{V},\ \mathcal{V}_1\to(\neg\,\mathcal{V}_2\to\mathcal{V}_1),\ (\forall x)\,\mathcal{V}(x)\to(\exists x)\,\mathcal{V}(x),$$

$$(\exists x)(\mathcal{V}_1(x)\vee\mathcal{V}_2(x))\to(\exists x)(\mathcal{V}_1(x)\vee(\exists y)\,\mathcal{V}_2(y))$$

ثبوت څه شي دي؟ په ثبوت کې رياضي پوه غواړي چې ځانته قناعت ورکړي، چې هغه فارمول چې «قضيه» ارائه کوي، پدي شرط حقيت لري، چې دهغي تيوري اکسيومی چې موږ کار پکښې کوو ، حقيقت ولري. د ثبوت ساده ترينه بڼه مستقيم ثبوت دي، چې ګام پر ګام تر هغه وختنه د حقيقي فارمولو راوړل دي څو د قضيې ثبوت لاسته راسي. يوازي هغه فارمولونه راوړو، چې حقيقت ولري اود لاندنيو درو دليلو پر بنسټ د هغوی څخه استنباط سوي وي.

1. راوړل سوي فارمول د تيوري اکسيومه ده

2. راوړل سوي فارمول تل حقيقت لري، يعنی تاوتولوجي ده.

3. راوړل سوي فارمول په «ساده ډول» تر هغه د مخکني فارمول څخه استنباط سوی دي.

په $\mathbf{T}$ باندی د د رياضي د تيوری فورماليزم په نښه کوو. فرضوو چې $\mathcal{V}$ د تيوری په ژبه کي فارمول دي. که د $\mathcal{V}$ د فارمول ثبوت ، چې د هغي تيوري اکسيومي په کار اچوي، وجود ولري، نو وايو چې د $\mathcal{V}$ فارمول د $\mathbf{T}$ په تيوري کي د ثبوت وړ دي(يا په بله اصطلاح د $\mathcal{V}$ فارمول د $\mathbf{T}$ په تيوري کي ثابتيدلای سي) او د $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ په شکل يې ليکو. که د $\mathbf{T}$ په تيوري کي د $\mathcal{V}$ فارمول د ثبوت وړ نه وي ، نو $\mathbf{T}\nvdash\mathcal{V}$ په شکل يې ليکو. د بېلګي په ډول که $\mathcal{V}$ د سيټ د تيوري يو پيچلئ فارمول معرفي کي ، چي لنډه بڼه يې $(\forall x)(|X|<|\mathcal{P}(X)|)$ ده، نو 1.2.4 قضيه وايې:

$$\mathbf{ZF}\vdash\mathcal{V}$$

همدا ډول پاته قضيې د 1. څخه تر 5. پوري هغه واقعيت ارائه کوي ، چې د هغوی اړوند فارمولونه د په $\mathbf{ZF}$ او يا $\mathbf{ZFC}$ کی د ثبوت وړ دي.البته دغه څرګندونه په ساده ډول ده.

د $\mathbf{T}$ په تيوري کي *تناقض* (يا پارادکس) داسي يو حالت دي ، چې د $\mathcal{V}$ يوداسي فارمول پيدا کوو ، چي هغه پخپله يعنی $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ او د هغه نفي يعنی $\mathbf{T}\vdash\neg\mathcal{V}$ په نوموړي تيوري کی د ثبوت وړ دي. په دغه ډول تيوري کي هر څه ثابتولای سو. دغه ډول تيوری د متناقضي contradictory تيوري په نامه يادوو. البته د يوي تيوري د معقوليت ساده ترين معيار دادی ، چي بايد متناقضه نه وي. د کانتور د سيټ تيوری هغه ډول چي کانتور جوړه کړي وه ، د فورماليزم په چوکاټ کي لا نه وه راغلي،څو په هغه کي د پاردکسو د موندلو په نتيجه کی معلومه سوه ، چي متناقضه ده. ددي پيړي په سرکي (دشلمي پيړۍ په سر کي) ارنستو څرملو E.Zermelo اوابراهام فرنکل Abraham Fraenkel(1891−1965) د $\mathbf{ZF}$ د سيټ فورمالي (صوري) تيوري ترسيم کړه او د هغي په هکله تر نن ورځي پوري چا د هغي تناقض ندی په ګوته کړی. پدی لړ کي رياضي پوهانو وموندل، چي که د $\mathbf{ZF}$ تيوري غير متناقضه وي ، نو د هغي عدم تناقض نسي «ثابتيد لای». پدي معنی چي تر نن ورځي پوري که د دي تيوري عدم تناقض ندی ثابت سوي ، نو موږد $\mathbf{ZF}$ تيوري په غير متناقض والي ډاډه يو. ځکه نو په ښه نيت سره فرضولای سو، چي د $\mathbf{ZF}$ تيوري غير متناقضه ده. په تعقيب يې زموږ ټوله څېړنی پر دغه فرضيه استواري دي.

اوس نو ستاسو پاملرنه د مسئلي و بنسټ ته راګرځوم. د مخکني تحليل او تجزيې په نتيجه هر څه ثابتيدلای سي. د اقليديس د هند سي پنځمه اکسيومه، د موازي خطو په هکله ، در پياد کئ، 2000

کاله دغه سوال ، چي آیا د اقلیدس د هندسی پنځمه اکسیومه صدق کوي یا نه ، لا ینحل پاته ؤ . دنوموړي مسئلي حل په نولسمي پیړي کي لوی بحث راوپاراوه، ځکه چي ډېر خلک په هغه نه پوهیدل. دغه ناپوهی د سوء تفاهم اصلي علت ؤ. که د اقلیدس د هندسي تیوری ، بېله پنځمي اکسیومي څخه په $\mathbf{T}$ سره وښیو، او $\mathcal{V}$ د اقلیدس پنځمه اکسیومه په نښه کي، نو ذکر سوي لاینحله مسئله دوه تعبیره لري. لمړئ دا چي ($\mathbf{T}\vdash(\mathcal{V}\vee\neg\mathcal{V})$ ؟ دوهم تعبیر یې $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ یا $\mathbf{T}\vdash\neg\mathcal{V}$ ؟ دي. دلمړي تعبیر جواب په بدیهي بڼه، هو ، یعنی $\mathbf{T}\vdash(\mathcal{V}\vee\neg\mathcal{V})$ دي. ددوهم تعبیر جواب نفي دي، نه $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ او نه $\mathbf{T}\vdash\neg\mathcal{V}$ صدق کوي. هیله ده چي لوستونکئ می پدي ډاډه کړی وي، چي د مفهومو د تعریف او تشریح څخه ماسیوا د پورتنیو سوالو درک مشکل دي. دمفهومو څخه می هدف د ثبوت د وړتیا مفهوم دي او بېله دغه مفهوم څخه ، که څوک وغواړي یا نه ، بیدرنګه یې دوهم تعبیر په فکر کي راګرځي، یعنی « نه $\mathcal{V}$ صدق کوي او نه $\neg\mathcal{V}$ ».خو دا حقیقت نه لري، ځکه نو درک یې ستونزمن دي.

ورته حالت د سیټ په تیوري کي هم ؤ. د ډېرو مهمو فارمولو په هکله پوښتنه پیدا سوه ، چي آیا $\mathbf{ZF}\vdash\mathcal{V}$ او یا $\mathbf{ZF}\vdash\neg\mathcal{V}$ (او یا په $\mathbf{ZFC}$ کي) . څرګنده سو چي پدي حالتو کي د دریم د طرد قانون صدق نه کوي، پدي معنی، چي دډېرومشخصو فارمولو $\mathcal{V}$ دپاره نه $\mathbf{ZF}\vdash\mathcal{V}$ اونه $\mathbf{ZF}\vdash\neg\mathcal{V}$ صدق کوي. په 4.6 مه رساله کي به پدي هکله مشخصې بېلګي راوړم.

د وروستیو ادعاؤ د محتوی تفصیل به دلته په دقیق نظر وګورو. که $\mathbf{T}$ تیوري او $\mathcal{V}$ د نوموړې تیوري په ژبه فورمول وي، نو بیا څلور امکانات لرو:

الف) $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ او $\mathbf{T}\nvdash\neg\mathcal{V}$؛

ب) $\mathbf{T}\nvdash\mathcal{V}$ او $\mathbf{T}\vdash\neg\mathcal{V}$؛

ج) $\mathbf{T}\nvdash\mathcal{V}$ او $\mathbf{T}\nvdash\neg\mathcal{V}$ ؛

د) $\mathbf{T}\vdash\mathcal{V}$ او $\mathbf{T}\vdash\neg\mathcal{V}$.

د د) حالت البته وایي ، چي زموږ تیوري متناقضه ده. زموږ دپاره یوازې هغه تیوری ګاني په زړه پوري دي، چي متناقضي نه وي. په هغه صورت کي د الف) ، ب) یا ج) حالت منځ ته راځي. د الف) او ب) حالتونه پدي هکله فیصله کوي، چي آیا د $\mathbf{T}$ په تیوري کي $\mathcal{V}$ یا که $\neg\mathcal{V}$ صدق کوي. خو کیدای سي چی دریم حالت ، یعني ج) رشتیاوي. پدغه ډول حالت کي د $\mathcal{V}$ فارمول د $\mathbf{T}$ د تیوري د نه فیصله کیدونکي Undecidable قضیې په نامه یادوو. د بېلګي په ډول د اقلیدس پنځمه اکسیومه په هندسه کي نه فیصله کېدونکي ده.نوري ساده بېلګي هم وجود لري: د بېلګي په ډول د ګروپ په تیوري کي تبدیلي قانون نه فیصله کېدونکئ دي.

په پای کي د یوي مهمي اړیکي یادونه غواړم. فرضوو چي $\mathbf{T}$ تیوري او $\mathcal{V}$ یوفورمول دي. وایو چي د $\mathbf{T}$ تیوري ته مو د $\mathcal{V}$ په اکسیومه پراختیا extension ورکړی ده (د $\mathbf{T}+\mathcal{V}$ په څېر یې لیکو) . په نتیجه کي لاسته راغلی تیوری یوازی او یوازی هغه وخت غیر متناقضه ده ، چي $\mathbf{T}\nvdash\neg\mathcal{V}$ وي. لوستونکي په اساني سره ددغه حقیقت په هکله فکر کولای سی.

4.6. د سيټ د تيوري نه فيصله کېدونکي قضيې

دسيټ د تيورى د هغو پرابلمو ، چې د سيټ په تيوري کې نه فيصله کېدونکي دي، ځنې ساده بېلګې به راوړو

لمړئ خو به د ټاکني د اکسيومي په هکله درته ووايم، چې په 1938 د ويانا رياضي پوه کورت ګدل (1906-1978)KURT GÖDEL ځرګنده کړه، چې که د **ZF** تيوري غير متناقضه وي نو نوموړى تيوري د ټاکني د اکسيومي په ګډون، يعنى **ZFC** هم غير متناقضه ده. دغه حقيقت داسى هم تعبيرولاى سو، که د سيټ په تيوري کى د ټاکني داکسيومي په شمول تناقض ثابت کړاى سو ، نو د سيټ په تيوري کى بېله ټاکني اکسيومي څخه هم تناقض ثابتولاى سو. په 1963 کي کوهن PAUL J. COHEN وښودله، چي **ZF⊬AC** . پدې معنى چي د ټاکني اکسيومه د **ZF** په تيوري کي نه فيصله کېدونکي قضيه ده. د تېري پيړي په دېرشو کلو کي پدې هکله ځني قسمي نتيجې و فرنکل A. Fraenkel او اندرېئي موستوسکي ANDRZEJ MOSTOWSKI ته څرګندي وي، خو هغه هم د **ZF** په تيوري کي د مشخص تعديل په نتيجه کي. د نوموړي نتيجي د لاسته راوړلو د طريقو د صيقل په نتيجه کي کيداى سواى ، چي ثابته سى ، چي د **ZF** په تيوري کي نسى ثابتيدلاى ، که يو سيټ متناهي وي نو د ددکيند په مفهوم هم متناهي دي.

اوس به نو خپل وخت د سيټ د تيوري د ټاکني اکسيومى په شمول ، يعنى **ZFC** په تيوري کي نه فيصله کېدونکو قضيو ته وقف کړو.

د 3.5. رسالي د نتيجو پر بنسټ پوهېږو، چي د **ZFC** په تيوري کي د $\aleph_1$ او $2^{\aleph_0}$ بوج په هکله پوهېږو $\aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0}$ يا $2^{\aleph_0} < \aleph_1$ صدق کوي. څرنګه چي د $\aleph_1$ تر بوج يوازني کوچنئ ترين بوج $\aleph_0$ (په حقيقت کي د $\aleph_1$ بوج مو دغه ډول تعريف کړى ؤ) دي، نو د کانتور د قضيې 1.2.4. په استناد نسى کيداى چي $2^{\aleph_0} < \aleph_1$ وي، ځکه نو :

$$2^{\aleph_0} \geqq \aleph_1 \tag{4.1}$$

بايد صدق وکي. فرضيه:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \tag{4.2}$$

د کانتينووم د فرضيې Continuum Hypothesis په نامه يادېږي. د کانتور په شمول ډېرو رياضي پوهانو هڅې کړيدى چي نوموړي فرضيه ثبوت کي. د نوموړي فرضيې معادل د حقيقي عددو په ژبه داسي وايې: که $X \subseteq R$ د شمېر وړ سيټ نه وي ، نو $|X|=|R|$ دي.

د کانتينووم د فرضيې څخه ډېري په زړه پورى ادعاوي استنباط کېږي. په 1938 کال کي د ګدل د علمي مقالي او په 1963 کال کي د کوهن د علمي مقالي پر بنسټ د **ZFC** په تيوري کي د کانتينووم فرضيه نه فيصله کېدونکي قضيه ده. علاوه پر دي د **ZFC** په تيوري کي هر يو د $2^{\aleph_0} = \aleph_2, 2^{\aleph_0} = \aleph_3, 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ ، او داسي نور مساواتو څخه ، نه فيصله کېدونکي ادعاوي دي.

د **ZFC** په تيوري کي به يوه بله نه فيصله کېدونکي قضيه راوړم. دحقيقي عددو خطي ترتيب سوي سيټ $R, \leqq$ لاندي خاصيتونه لري:

کوچنئ ترين او لوى ترين عنصر نلري (4.3)

که x<y وي ، نو z داسي وجود لري، چي x<z<y (4.4)

د ددکینډ پرنسیپ صدق کوي (4.5)

د شمېر وړګې سب سیټ Q احتوا کوي (4.6)

په R کي په خپل منځ کی یودبل څخه جلا (یعنی چي مشترکه

برخه ونلري) خلاصو انتروالو هر سیټ د شمېر وړ دی (4.7)

البته هر خطي ترتیب سوي سیټ، چي (4.6) خاصیت ولري ، نو (4.7) خاصیت هم لري. د 6.6.3. قضیي څخه په استفاده سره په اساني ثابتیږي چي هر خطي ترتیب سوي سیټ چي د (4.3)-(4.6) خاصیتونه ولري ، نو د حقیقي عددو د سیټ R سره آیزومورف (هم شکله) دي. میخائیل یاکوفلیویچ سوسلین (1919-1894)MICHAEL JAKOVLEVITSCH SUSLIN په 1919 کي فرضیه طرحه کړه ، چي نن ورځ د سوسلین د فرضیي په نامه یادیږي. د سوسلین فرضیه وایي، هر خطي ترتیب سوی سیټ ،چي د (4.3),(4.4),(4.5) او (4.7) خاصیتونه ولري د حقیقي عددو د سیټ R سره آیزومورف دي.په شپېتو کلو کي د توماس یېخ THOMAS JECH، روبرت سولووئ ROBERT SOLOVY او ستانلئ تا ننباوم STANLEY TANNENBAUM د علمي مقالي په استناد څرګنده ده ، چي د سوسلین فرضیه د **ZFC** په تیوري کي نه فیصله کیدونکي قضیه ده.

په پای کي د **ZFC** په تیوري کي د نه فیصله کیدونکي قضیي یوه بله په زړه پوري بېلګه راوړم. فرضوم چي لوستونکئ د لبیګ د اندازي د تیوري د اساساتو سره پېژندګلوي لري. که د $A \subseteq \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ سیټ د لبیګ په مفهوم د اندازي وړ وي او د هر $x \in \langle 0,1\rangle$ دپاره د هغه د مقطع $A_x = \{y \in \langle 0,1\rangle;\ [x,y] \in A\}$ اندازه مساوي په 1 وي، بیانو نژدي د هري مقطع :

$$A^y = \{x \in \langle 0,1\rangle;\ [x,y] \in A\}$$

اندازه مساوي په 1 ده، دغه اساسي نتیجه ده، چي د فوبینی[17]د قضیي سره ، د څو بعدي انتګرالو رالنډونه و یو بعدي انتګرال ته، اړوند لري. دسیټ د اندازي دوړتوب فرضیه دلته بنسټیز رول لوبوي. ځکه چي د ټاکني د اکسیومي څخه په استفادي سره داسي د A سیټ هم ترسیمولای سو، چي د اندازي وړ نه وي او نوموړئ خاصیت به ونلري. البته پوښتنه کېږي چي کولای سو د مبالغي تر پولی پوری ولاړ سو او ووایو چي:د A سیټ دضد فوبینی سیټ په نامه یادوو ، که $A \subseteq \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ ، د A_x د هري مقطع اندازه مساوي په 1 او هره د A^y د مقطع اندازه مساوي په 0 سره وي. پوهېږو چي د **ZFC** په تیوري کي د ضد فوبینی د سیټ دموجودیت مسئله د فیصلي وړ نده.

5.6. نتیجه ؟

هڅه مو وکړه ، چي لوستونکو ته د سیټ د تیوري ځنی بنسټیزي او کلاسیکي مفکوری ، چي دریاضي پوهانو پر لایتناهي د موټه د راګرځولو نتیجي دی، ور وښیو. په پای کي غواړم چي یوازي پر یوه شي ټینګار وکړم ، هغه داچي ، لکه څنګه چي په څو ځله مي تکرار کړه، د سیټ تیوري د ریاضي

---

[17] ګیدو فوبینی (1943-1879)Guido Fubini ایټالوي ریاضي پوه (ژباړن)

د لايتناهي د تيوري په صفت منځ ته راغلي ده. که تر 4.6. رسالي تېر سو ، نو د سيټ تيوري د لايتناهي يوازنۍ تيوري ده. د اقليدس هندسه د په پېړيو يوازنۍ د فضاء تيوري وه.د هغي خاصيتونه مو اساساً هغه وخت ښه درک کړای سوای، چی په څنګ کي يې نوري ، غير اقليدسي، تيوريګاني او دغه ډول مجرد مفهومونه لکه توپولوژي، منځ ته راغلي. فکر کوم د افرضيه به هم پر ځای نه وي، که ووايو چي لايتناهي هغه وخت ښه درک کولای سو، چی په څنګ کي يې د هغه د څېړنې دپاره نوري تيوريګانی منځ ته راسي؟

ليکوال ته تراوسه د لايتناهي يوازنۍ تيوري چی زموږد تيوري څخه فرق لري، د سيټ د تيوري بديل Alternative Set Thoery د پيتر وپيينکا[18] Petr Vopěnka(1935-2015) او د هغه د ښوونځي [19] په هڅه منځ ته راغلی او پراختيا ورکړه سوي ده. ممکن بل نظر به هم پر لايتناهی په زړه پوري وي.

[18] پيتر وپيينکا چکئ رياضی پوه او فيلوسوف.(ژباړن)

اندکس

ا

ارشیمید 30

ارسطو 14

اړیکه، دوه ئېزه(غبرګوني) 11

– انتقالي 11
– انعکاسي 11
– تناظري 11
– غبرګیزه 11
– معکوسه 11
– معادلیت 12
– د وېشلو(تجزیې) 155
– ضد انعکاسي 11
– ضد تناظري 11
– n - ئېزه 11

اکسیومه

– داکستنزیونالیټي 202
– د بوج 202
– دتابعي ټاکني 197
– د ټاکني 192
– دټاکني کمزوري 198
– د جوړه کیدو 202
– دلایتناهي 202
– دشیما د تعویض 202
– د نظم 202

اکسیومي د سیټ د تیوری 202

الفباء 181

الکوئین د یورک 81

الیف 127

اقلیدیس 2

انتروال ، تړلئ 21

– خلاص 21

انجکشن 28

انفیمم 63

اوړدوالی ، څانګې 160

– کلمي 144

اوبنتون 138

اویدوکسوس 14

اویلر، ل 60

آیزومورفیزم 65

ب

بایجکشن 31

بدلون 146

– بېله تکراره 146

بلزانو Bolzano, B 2

بوج 77

– کانتینووم 165
– کوچنئ یا مساوي 79
– مساوی 77
– طاقت 124

بورالي-فورتي ، 5

پ

پارادکس(تنقیض) 1

پرنسیپ د ارشمید 19

– ددکینډ 15
– دیریشله 118
– داعظمی حد 95
– حذف 149
– شمولیت 149
– د سیټ د جوړولو 6
– د قطر 112
– یو په بل کی ابېنودل سوی انتروالو 113

پئانو ، ژ . 166

د پئانو منحني 166

د پئانو اکسیومي 209

ټ

تابع 31

– د اویلر 151
– د سیټ کرکتري 47
– جوړه کونکي 103
– بیاني 4

تارسکي ، ا. 97

تالي (خلف) 64

تاننباوم ، س . 213

تاوتولوجي 209

تجزیه ، د سیټ 13

– لبیګ 177

ترتیب (اوډل) نیمګړی 60

– خطي 64
– ښه 64
– لیکسیکوګرافیک 176

ترتیبي ټیپ 171

– بوج 176

ترکیب 138

تړونکي 201,v

تناقض په تیوری کي 210

تفاضل ، متناظر 8

تیوری د ثبوت 209

– درياضي فارموليزيشن 209
– د سیټ د تیوری بدیل 214
– متناقضه 210
– غیر متناقضه 210
– عدم تناقض 210

ټ

ټاکونکۍ 189

– د سیټو د سیستم 189

ټوټه 64

– مناسبه 64
– په عنصر تعین 64

ټیپ ترتیبي 170

– ابتدائي 181
– نیمګړی ترتیب سوی سیټ 178
– مساوي 170
– منزوي 175
– کانفاینل 188
– ترتیبی سرحدي 175
– کوچنۍ 171
– مساوی 171
– جفت 182
– طاق 182

ث

ثبوت، مستقیم 210

ج

جګوالی د ځانګي 160

– دوني 160

جمع د بوج 123

– د ترتیبی ټیپو 175
– سلسلو 66
– دبوج د سیستم 129

جوړه ،مرتبه(اوډلي) 6

ح

حرف(توری) 145

ځ

ځرګندونه د p پر قاعده 73

– دp پر قاعده دورانی 73
– دp پر قاعده حقیقی عدد 74

ځرملو، ا 52

ځورن، م. 193

څ

څنځیر 62

د

ددیکیند، ر 15

دریئېزه 10

دیریشله ، پ، ج، ل 118

ډ

ډیاګرام ، ها سه 61

د وین – 10

ر

رسل ، ب . 5

ریچارد ، ی 5

رنګول 155

ژ

ژئ (ضلع) 58

س

ساحه ، د تعریف 23

– د قیمتو 23

سب (لاندی)،سیټ 6

– ګراف 59
– فیلډ 117
– کلمه 160

سپریمم 15,63

سرجکشن 30

سرحد، کښتنئ 63

– پورتنئ 63
– د حقیقي عددو پورتنئ15

ستراتېژي 53

– د ګټلو 54

سلسله ، د فوریر 2

– عددی 66
– متقاربه 66
– هندسي 67

سلوستر ، ج.ی. 96

سوسلین، م. ی. 213

سولووئ ، ر 213

سیستم د سیټو 42

– د څرملوفرنکل د اکسیومو 202

سیټ ، ضد فوبیني 213

– د کانتور 70
– نیمګړئ ترتیب سوی 60
– ښه ترتیب سوي 64
– متجانس 155
– ګڼ 164
– ګڼ ترتیب سوي 64
– استقرائي ترتیب سوي 193
– یورنګه 155
– متناهي 90
– ددیکیند په مفهوم 92

–– د تارسکي په مفهوم 97

– خطي ترتیب سوي 64
– لایتناهي 90
– دشمېر وړ 99
– بی شمېره 99
– بشپړ 169
– طاقت 7
– خالي 6
– د تامو عددو 20
– دحقیقي عددو 15
– د طبیعي عددو 16
– دناطقو عددو 20

––– دلوړي خوا محدود 15

– په لاړ پیپل کېږي 100
– د ښه ترتیب وړ 189
– دخوځښتو 53
– تړلئ 170
– تصویر په مپینګ کي45
– د کښتي خوا محدو 64
– دلوړي خوا محدود 64

سیټونه ، یودبله بېل 8

– مشترکه برخه 8
– تفاضل 8

ش

شمول Inclusion 6

شنایدر ، ټ . 115

شیما،د سب سیټ داکسیومو 202

– د تعویض 202

ض

ضرب ، د بوج 123

– د بوج د سیستم 130
– د سیټو کارتیزین 7
– د n سیټو 11
– د ترتیبي ټیپو 176
– د سیټو د سیستم 50

ط

طریقه ، د کانتور د قطر 111

– تک – تاک 108

ع

عدد

– ناطق 20
– الجبری 115
– ترانسندنت 115
– طبیعی 16
– حقیقي 14
– ترکیبي 139
– د p پر قاعده 67
– ترتیبي 208

عدد مکمله برخه 67

عنصر کوچنئ 62

– لوی 62
– کوچنئ ترین 62
– لوی ترین 62

عنصرونه ، د پرتلي وړ 62

ف

فارمول ، اټومي 209

– د سیټ د تیوری 209

–په تیوری کی د ثبوت وړ 210

فرضیه

– د کانتینووم 212
– د سلویستر 96
– د سوسلین 213

فرنکل ، ا 210

فضاء ، بنستیزه 9

فکتوریال 142

ق

قاعده 22

قطر diagonal 12

قضیه د دوه حدیزه 141

– بلزانو 49
– د ترانسفاینایټ استقراء 186
– څرملو 191
– رامسئ 158
– درياضی د استقراء 17
– د رياضی د استقراءپه مرسته د جوړښت په هکله 32
– کانتور 133
– کانتور-برنشټاین 87
– وایرشتراس 48
– د نه فیصله کېدونکي 212

ک

کانتور، ج 5

د – دیس کانتینووم 70

کانتینووم ، حقیقی 116

کړی 58

کلمه (لغات) 144

– صحیحه 144

کوانتیفیکاتور 201, v

کوراتوسکي ، ک. 193

کوشي ، ا،ل 15

کوهن ، پ 212

ګ

ګاليله، ګ 2

ګالای ، ت 96

ګاوس ، ک . ف . 2

ګراف

– غوټي لرونکی 58
– مسير لرونکي 58
– بی مسيره 58
– کامل (مکمل) 59

ګلفاند ، ا. او. 115

ل

لاړ 31

– بلزانو-کوشي 71
– متناهي 31
– متقارب 66
– ژر وده کوي 117

لامبرت ، ی. ه . 114

لايتناهي ، آني 1

– ممکن 1

لبيګ ، ه . 176

لژاندر ، ا. م. 115

لميټ 66

لوبه 52

– ختميدونکي 54

دلوبي نتيجه 52

لوبغاړی يي ګټي 52

لايبنتڅ، ګ . و. 14

ليما ، د کونيګ 161

– دڅورن 193

ليرخ ، م . 3

ليوويل ، ژ . 115

م

معادليت 12

معيار، د متماديت 189

– د ګټلو 52

مپينګ 22

– بايجکتيف 30
– انجکشن 30
– تطابق 28
– ساده 28
– سرجکشن 30
– معکوس 28

مپينګونه ، ترکيب 27

مثلث د پاسکال 140

مشترکه برخه 9

– دسيټو د سيستم 43

مفهوم ، غبرګ 60

– ځان غبرګي 62

مقطع ، ددیديکيند 65

موستوسکي، ا. 212

مېرئ ، چ . 15

ن

نقطه

– د ازدحام يا تجمع 121
– تجريدسوی(منزوی 110
– د اوښتلو، ثابته 152

نيوټن ، ا 14

و

وايرشتراس ، ک . 15

ونه 160

د وني ريښه 160

دونی ځانګه 160

دوني څوکه 160

– درجه 160

ه

هاوزدورف ، ف. 106

هرمیټ ، چ. 115

هیسنبرګ ، ګ. 183

ی

یارنیک ، و. 3

یووالې د سیټو 7

– د سیټو د سیټ 47

– د سیټو د سیستم 47

ییخ ، ت. 213

مآخذ

يوازي دهغو كتابو فهرست راوړم ، چي د لاسته راوړلو امكانات يې وجود لري او په كتاب كي مو پر هغوي حواله وركړي ده اويا لوستونكي ته يې توصيه كوم . البته د فهرست انتخاب ذهني دي.

1.ALEXANDROV, P.S.: Úvod do obecné theorie množin a funkci. Akademia, Praha 1954.

2.BALCAR, B.−ŠTEPÁNEK, P: Teoria množin. SPN, Praha 1974.

3.BOLZANO, B.: Paradoxy nekonečna. Akademia, Praha 1963.

4.BOSÁK, J.: Grafy a ich aplikácie. Alfa, Bratislava 1980.

5.BOURBAKI, N.: Théorie des Ensembles. Hermann, Paris 1960 (ruský preklad Mir, Muskva 1965).

6.BUKOVSKÝ, L.:Teoria množín. 2. vydanie, Rektorát Univerzity P.J. Šafárika, Košice 1984.

7. BUKOVSKÝ, L.: Štruktúra reálnej osi. Veda, Bratislava 1979.

7a. BUKOVSKÝ, L.:The Structure of the Real Line, Birkhäuser 2011.

8. ČECH, E.:Bodové množiny. Akademia, Praha 1966.

9.JARN ÍK, V.:Diferencální počet I. Akademia, Praha 1955.

10.KOSMÁK, L.:Množinová algebra. Alfa, Bratislava 1978.

11.KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Pree, New York 1972.

12.KURATOWSKI, K.:Wstep do teorii mnogości i topologii. 6.vydanie, PWN, Warszawa 1975.

13. KURATOWSKI, K.−MOSTOWSKI, A:Teoria mnogości. 3. vydanie, PWN, Warszawa 1975(ruský preklad Mir, Muskva 1970).

14.LAVROV, I. A.−MAKSIMOVA, L. L. :Zadači po teoriji množestv, matematičeskoj logike i teoriji algoritmov. Nauka, Moskva 1975.

15.MAREK, W.−ONYSZKIEWICZ, J.:Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach. 4. vydynie, PWN, Warszawa 1978.

16.SIERPINSKI, W:Cardinal and ordinal numbers. PWN, Warszawa 1965.

17. ŠALÁT, T.: Teoretická aritmetika. Rektorát Univerzity Komenského, Bratislava 1979.

18. Šalát, T.:Reálne čísla. Alfa, Bratislava 1982.

19.Vopěnka, P. : Mathematics in the Alternative Set Theory. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979 (ruský preklad Mir, Muskva 1983).

[10] او [18] د سیټ د تیوري مهمې برخې به بر کی نیسی، چې موږ یا دلته ندي راوړی او یا مو ډیر په لنډ ډول راوړی دي. [12] کتاب د سیټ د تیوري ډیر ښه او په متوسطه سویه درسي کتاب دي. په نړي کي یو د منتشرو کتابو څخه [13] دي. لوستونکۍ ډېري کلاسیکي او په زړه پوری مفکوري په [16] کي موندلای سي. که څه هم د [5] کتاب لوستل لږ څه مشکل دی ، خو ډیري په زړه پوري برخی ، په خاص ډول د لایتناهی کمبیناتوریک (ترکیب) ، په بر کي نیسي. د زده کړي دپاره ښه مرستندوي د سوالو مجموعي [14] او [15] دي. د مسئلي نوري څېړنې د بېلګي په ډول په [2] او [7] کتابو کي راوړل سوي دي. په [2] کتاب کي د لایتناهي ترکیب پېچلې مسئلي څېړل سوي دي، خو په [7] کي لکه لوستونکۍ چی د نامه څخه پوهېدلای سی، دسیټ په تیوري کي نه فیصله کېدونکو قضیو په هکله ژور معلومات لاسته راوړای سي. تاریخي معلوماتونه تر ډېره حده د [11] کتاب څخه رااخیستل سوي دي.

د ژباړن یادداشت

راسي چي پنځوس کاله مخکې د لیسي ددوری د هندسی و کتاب ته مراجعه وکو. تر هغه ځایه چي زما پیادیږي ، نقطه دهغه هندسي شکل په صفت چي ابعاد ونلري ، یعنی طول،عرض او ضخامت ونلري، تعریف سوی وه. هیڅ چا د هغي په موجودیت باندی اعتراض نه کاوه ، پدی معنی آیا داسي یو شي چي ابعاد ونلري، وجود لری ؟ یو مستقیم خط د (لایتناهي؟) نقطو څخه تشکیل سوی دي. د مستقیم خط په لیدوسره ځنګه کولای سم چي د هغه یوی معینی نقطی ته ورسیږو؟ د بلي خوا په لرغوني یونان کي د اټوم کلمه د نه تجزیه کیدونکي ذری دپاره په کار اچول سوی وه، خو معاصر فزیک او تکنالوژي هغه اټوم هم تجزیه کي. آیا نقطه هم تجزیه کیږي؟ که جواب مثبت وی ، نو تر کمه حده؟ څه ډول کولای سو د هغه عمق ته ورسیږو؟څونه نقطې باید یودبل په څنګ کي کښېږدو، څو یو قطعه خط لاسته راسی؟

د اقلیدس د هندسی ددوو اصولو یادونه کوم.

1 هر دوه هندسی شکلونه ، چي یوپربل منطبق وی ، نو هغوی سره مساوی دي.

2 کُل تر جزء لوی دي.

د لایتناهي مفهوم که په ساده ډول په نظر کي ونیسو ، نو هر هغه شئ چي متناهي نه وی ، لایتناهي دي. طبیعی عددونه لایتناهي دی ، خو طبیعی جفت عددونه هم لایتناهي دی، که څه هم طبیعي جفت عددونه د ټولو طبیعی عددو جزء دي. د هر طبیعی عدد په مقابل کي یو جفت عدد ایښودلای سو. حقیقي عددونه هم لایتناهي دي. خو که د هر طبیعی عدد په مقابل کي پر مستقیم خط یوه (نقطه ؟) کښېږدو ، مستقیم خط به مو سوری سوری وی، د بېلګې په ډول د یوه او دوو ترمنځ ټولي نقطې به کم طبیعی عدد ته نه وی تخصیص سوی. پوښتنه کیږي چي آیا دواړه لایتناهي سره مساوی دی؟

د مسئلی تاریخي تکامل نه یوازي ددی کتاب په مقدمه کي ، بلکه په هر فصل کي تعقیب سوی دي، خو دونه باید ووایم چي دغه ډول پوښتنې وی ، چي دچکي ریاضي پوه برنارد بلزانو او وروسته د هغه پر اساس د الماني ریاضي پوه جورج کانتور په ذریعه، د نولسمي پیړي په پای او د شلمي پیړي په سر کي، د سیټ د تیوري دزیږیدو منشاء وګرځیدي. دریاضي په ټولو څانګو ، په فزیک او نورو علومو کي، هر چیري چي د لایتناهي د مفهوم سره مخامخ کیږو نو هلته به

هرومرو د سیټ تیوري خپل ښاغلئ ځای لری. ځکه نو وایو چي دسیټ تیوری د لایتناهي تیوری ده.

په تېره پیړي کي د سیټ د تیوری د تحقیقاتو په پرمختګ کي درو ښوونځیو ډیر مهم رول لوبولی دي. مرکزونه یې په روسیه ، پولینډ او د وخت په چکوسلواکیا کي وه. د چکسواکیا ښوونځي د چکي تکړه ریاضي پوه او فیلوسوف پروفیسر پیتر وپېینکا په لاربښونه ، چي ددی کتاب مؤلف پروفیسر بوکوفسکي هم دهغه سمینار غړی ؤ ، لاس په کار وه.

پروفیسر بوکوفسکي د 1939 کال د سپټمبر پر نهمه د مرکزي سلواک پود کریوان په کلی کي زیږېدلي دی. د لیسی په دوره کي د ټول سلواک د ریاضی د مسابقاتو اتل راوتلي دی. دکمینیوس په پوهنتون کي یې د ریاضي په څانګه کی دعالي تحصیلاتو څخه وروسته خپله دوکتورا د پراګ د چارلس په پوهنتون کي اخیستی ده. لکه چي مخکي مي یادونه وکړه په پراګ کي د پروفیسر وپېینکا د سمینار د تکړه او فعاله غړو څخه شمېرل کیدي.

زما د تحصیل په وخت کي پروفیسر بوکوفسکي د کوشیخ د ښار د پاول یوزف ښافاریک د پوهنتون د ساینس د پوهنځي په چوکاټ کي د سیټ د تیوری سمینار رهبری کاوه او پدی برخه کي وځانته د یوه خاص مکتب درلودونکي ؤ. بنده ددغه سمینار د غړیتوب افتخار درلودی او په دغه برخه کي یې خپل تحصیلات پای ته ورسول.

د حقیقي عددو د محور د ساختمان په هکله د پروفیسر بوکوفسکي اثر د نړي په سطحه یو د مهمو آثارو څخه دي. سیټونه او دهغوی په هکله واقعیتونه د پروفیسر صاحب هغه اثر دی چي ترجمه یې د ریاضي مینه والوته وړاندی کوم. پدی اثر کي پروفیسر صاحب په ډیر مهارت سره د سیټ د تیوری ډیر مجرد مفهومونه په مشخصو بېلګو کی معرفی کړیدی. دی کتاب د ژباړني ځانګړتیا پدی کي هم ده ، چي ډیرنوی مفهومونه او تعریفونه د پښتو وژبي ته په لمړي ځل داخلیږی. هڅه سوی ده چي موضوعات د ریاضي د وچ فارمول د چوکاټه بهر د ژبي د ښکلا په چوکاټ کي د خپل دقت او معرفت د ښکلا سره ملګری پاته سي. د بېلګي په ډول د ریاضي په مروجو کتابو کي د ترادف مفهوم مأ نوس دی، خو دلته ما دهغه دپاره د لاړ د لغت څخه کاراخیستی دی . زما په نظر په ترادف کي د سیټ د عنصر و د قطارولو پر ځای د سیټ د عنصرو په لاړ پېیل، هدف ډیر څرګند او واضح افاده کوي.

د سیټ د عنصرو شمېر ، چي دسیټ د تیوری ډیره مهمه برخه ده په انګریزی ژبو کتابو کي ورته Power of Set ویل سوی دی . دلته ما د سیټ د بوج کلمه ورته ټاکلی ده. د بوج لغت می د جمع او مفرد په مفهوم استعمال کړی دی. کله چي وایم پر بوج باندی د جمع او ضرب عملیې ، نو دلته هدف د بوج د لغت څخه د ژبی له مخه د هغه د جمع بڼه ده.په ورځني ژوند کي ، د بېلګي په ډول د بوجی کلمه (یوه بوجي اوړه او لس بوجي اوړه) هم د مفرد او هم د جمع په بڼه استعمال سوی ده. د سوء تفاهم د مخنیوی دپاره د کتاب په متن کي د هر مفهوم سره د هغه انګلیسی معادل هم راوړه سوی دی.

تراوسه پوری د ریاضي په اړوند زما لیکني او ژباړني د معاصرو ریاضایاتو د بنسټېزو معرفی او نشر دی . پدی اثر کی نه یوازی د سیټ د تیوری بنسټیزه بلکه د هغی د استعمال بېلګې د ریاضی په نورو څانګو کي هم معرفی سوی دی.

Bad Vilbel 13.04.2020

س.ا. نیازمن

Abstract

"In spite of belief that, the world around us is essentially finite, mathematics, physics and some other natural sciences cannot exist without a concept of infinity “([7a] Introduction).

I am very happy that Prof. Dr.Lev Bukovský, DrSc. allowed me to translate his book "Sets and all that about them" into the Pashtu language.

The book is intended for all those who are interested in Mathematics and who at least have the knowledge of Lycée level.

The book is structured into six chapters. In the first chapter, the language and basics of naïve set theory will be introduced. Here the term of infinity is dealt with in details, it is clarified which possible sets exist, which operations can byße executed on them and finally is defined the term of relation.

The second chapter tells us about the use and misuse of the term of sets, introduces us to the set of real numbers and some properties of their smallest subset, i.e. natural numbers. After introducing the term of mapping, there follows some basic application of set theory in other sections of mathematics, such as geometry, theory of games, or the equation solution. Binary relation on a given set determines the simplest mathematical structure. Having more details about real numbers is necessary to deal with the term of sequence.

The question how many elements are contained in a set, is dealt with in the third chapter. Here the terms cardinality of sets, finite sets as well as some of their properties, and countable or uncountable sets are introduced. Based on the Cantor diagonal method, the uncountability of the set of real numbers is proven.

The arithmetic operations on cardinal numbers, some elements of combinatorics, Cantor theorem and the cardinality continuum is the content of the fourth chapter.

Well-orders of sets and their relation to its cardinality will be explained in the fifth chapter. This chapter slowly dives into the abstract world of theory of sets. Here the relation of well-ordered sets to the axiom of choice is explored.

Chapter five examines questions regarding the well-order of sets and gives us answers to whether it is possible to make every set well-

ordered, and if yes, under which conditions. Here the axiom of choice respectively weak axiom of choice play substantial role. Some examples of theorems in mathematical analysis are shown, which use the axiom of choice in their proof, as they are not provable otherwise.

A brief excursion into the metamathematics of set theory is taken in the last chapter of this book. It also introduces the Zermelo-Fraenkel axiomatization of set theory, considers some terms of proof theory und shows some undecidable theorems of the set theory.

This book transfers the knowledge about sets in detail, rich on examples and exercises and contributes excellently to the teaching of mathematics.

د افغانستان د پوهنتونونو د انجنيري، زراعت، طبيعي علوم، اقتصاد، ښوونې او روزنې او ژورناليزم چاپ شوو درسي کتابونو لست (ننگرهار، کابل، کابل پولی تخنیک، هرات، بلخ او خوست) ۲۰۱۵_۲۰۲۰

شمیره	د کتاب نوم	ليکوال	پوهنتون	شمیره	د کتاب نوم	ليکوال	پوهنتون
۱	عالي کلکولس رياضي I 534 A رياضي	حميدالله يار	ننگرهار	۲	د عالی رياضياتو عمومی کورس	محب الرحمن جنتی	ننگرهار
۳	د نفوسو جغرافيه	پروفيسور لطف الله صافی	ننگرهار	۴	عالي کلکولسII	نظر محمد	ننگرهار
۵	فزيکی کيميا III کيمياوی کنتيک او کتلسس، کروماتوگرافی او اسپکتروسکوپی	پوهاند دوکتور خير محمد ماموند	ننگرهار	۶	IIفزيکی کيميا الکتروليتی محلولونه او الکترو کيميا	پوهاند دوکتور خير محمد ماموند	ننگرهار
۷	د د ودانيو د تودولو تخنيک لومړی برخه، دسون تخنيک	داکتر غلام فاروق مير احمدی	ننگرهار	۸	د ژويو فزيولوژي	پروفيسور غنچه گل حبيب صافی	ننگرهار
۹	معيار های جديد اعمار ساختمان	انجنير محمد عمر تيموری	ننگرهار	۱۰	د متيورولوژی مبادی	پروفيسور عبدالغياث صافی	ننگرهار
۱۱	الجبر او د عددونو تيوری لومړی برخه	سطان احمد نيازمن	ننگرهار	۱۲	چگونگی مصرف انرژی در ساختمان های رهايشی	انجنير محمد عمر تيموری	ننگرهار
۱۳	د اوسپيز کانکرېټي عناصرو د لومړی صنفي کار متوديکي لارښود	پوهندوی ديپلوم انجنير عبادالرحمن مومند	ننگرهار	۱۴	د ژوند چاپېريال	پوهاند عارف الله مندوزی	ننگرهار
۱۵	عضوی کيميا، کړيوال ترکيبونه	پوهاند دوکتور محمد غوث حکيمی	ننگرهار	۱۶	جامداتو ميخانيک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
۱۷	د ودانيو د جوړولو مهندسي اساسات دويم ټوک	ديپلوم انجنير اسدالله ملکزی	ننگرهار	۱۸	د ودانيو د جوړولو مهندسي اساسات لومړی ټوک	ديپلوم انجنير اسدالله ملکزی	ننگرهار
۱۹	کيميايي عنصرونه دويم ټوک	محمد طاهر کاښی	ننگرهار	۲۰	کيمیایي عنصرونه لومړی ټوک	محمد طاهر کاښی	ننگرهار
۲۱	عمومی رياضيات	کل محمد جنت زی	خوست	۲۲	د اقتصاد او تجارت اصطلاحات (انگليسي-پښتو تشريحي قاموس)	پوهنيار عبدالله عادل او امان الله ورين	ننگرهار
۲۳	خطي الجبر	داکتر عبدالله مهمند	ننگرهار	۲۴	روانشناسی و ضرورت آن در جامعهٔ افغانستان	داکتر اعظم دادفر	کابل پوهنتون
۲۵	مبادی اقتصاد زراعتی	پوهاند ولی محمد فائز	بلخ	۲۶	اساسات هندسه ترسيمی مسطح	پوهنوال سيد يوسف مانووال	بلخ
۲۷	تأسيسات و تجهيزات تخنيکی ساختمان	انجنير محمد عمر تيموری	کابل پولی تخنيک	۲۸	د راديويي خپرونو توليد	پوهنوال دوکتور ماستر واحدي	خوست
۲۹	د خاورې تخريب او د چاپيريال ککړتيا	پوهنيار محمد حنيف هاشمي	خوست	۳۰	تيوری و سياست بودجه عامه	پوهنوال داکتر سيد محمد تينگار	کابل
۳۱	حيوانات مفصليه	پروفيسور داکتر ديپلوم علی آقا نحيف	هرات	۳۲	عضوي کيميا، د اروماتيک او هيتروسيکليک برخه	پوهنوال ډاکتر گل حسن وليزی	کابل
۳۳	د پروژې تحليل او مديريت	پوهاند محمد بشير دويال	ننگرهار	۳۴	د انجنيری ميخانيک	پوهنوال محمد اسحق رازقی	ننگرهار
۳۵	کلکولس او تحليلي هندسه، لومړی برخه	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار	۳۶	کلکولس او تحليلي هندسه، دوهمه برخه	پوهندوی سيد شير آقا سيدي	ننگرهار

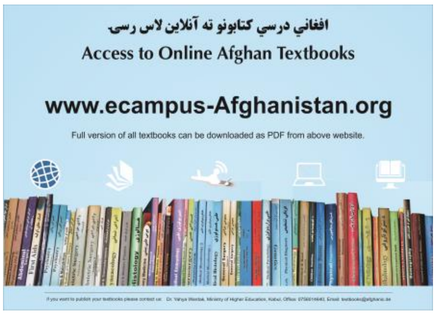
۳۷	د کرنیزو محصولاتو بازار موندنه	پوهاند محمد طیب	ننگرهار	۳۸	کارتو گرافی با اساسات توپوگرافی	پوهنوال دوکتور محمد طاهر عنایت	ننگرهار
۳۹	انرژي سمپا کوونکي ودانی	اسد الله ملکزی	ننگرهار	۴۰	د موادو مقاومت	پوهنمل بهرام امیری	خوست
۴۱	فزیکی کیمیا گازونه او کیمیاوی ترمودینامیک	پوهاند خیر محمد ماموند	ننگرهار	۴۲	اطلاعاتو ته د لاسرسي لارې چارې	دانش کروخیل	ننگرهار
۴۳	حیاتی جغرافیه	پوهاند لطف الله صافی	ننگرهار	۴۴	د فاضله اوبو انجنیري	زلمی خالقی	ننگرهار
۴۵	د ریاضي په هلکه خبرې اترې	سلاطان احمد نیازمن	ننگرهار	۵۶	اقتصادي جیولوجي (کانپوهنه-فلزي کانونه)	پوهاند دوکتور شریف الله سهاک	ننگرهار
۴۷	گروه های اجتماعی بسته (مطالعه جامعه شناختی سکتها)	داکتر احمد سیر مهجور	کابل پوهنتون	۴۸	گرم شدن کره زمین	محمد نعیم نسین	بلخ
۴۹	الجبر او د عددونو تیوري دوهمه برخه	سلطان احمد نیازمن	ننگرهار	۵۰	اعمار ساختمانها (اساسات، مواد و سیستم ها)	پوهندوی دیپلوم انجنیر امان الله فقیری	کابل پولیتخنیک
۵۱	په سیول انجنیري کې د اټوکډ استعمال	پوهنوال میا پاچا میاخیل	ننگرهار	۵۲	وترنری عمومي پتالوژي	پوهندوی محمد طاهر کاکړ	ننگرهار
۵۳	انجنیري جیودوزی (سرو)	پوهندی گل حکیم شاه سیدی	ننگرهار	۵۴	جیومورفولوژي	پوهنوال عزت الله	ننگرهار
۵۵	د تلویزیوني خپرونو تولید	پوهنوال داکتر ماستر واحدی	خوست	۵۶	اوسپنیز کانکریټي عناصر، لومړی برخه	پوهنوال دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننگرهار
۵۷	زولوجی فقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار	۵۸	زولوجی غیرفقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننگرهار
۵۹	د تهداب انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقی	ننگرهار	۶۰	الجبر معاصر	داکتر عبدالله مهمند	بلخ
۶۱	رهنمود موثریت حفظ انرژی در تعمیرات	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	کابل	۶۲	معاصر الجبر	داکتر عبدالله مهمند	خوست
۶۳	د افغانستان د پوهنتونونو د درسی کتابونو چاپول	داکتر یحیی وردک	ټولو ته	۶۴	آلماني د افغانانو لپاره	داکتر یحیی وردک	ټولو ته
۶۵	آلمانی برای افغانها	داکتر یحیی وردک	ټولو ته	۶۶	د پروژې مدیریت په عمل کې	محمد داود علم او یو اف . گهل	ننگرهار
۶۷	صنعتي اقتصاد	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننگرهار	۶۸	نباتي فزیولوژي لومړی جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست
۶۹	نباتي فزیولوژي دوهم جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخیل	خوست	۷۰	د ساختمانونو تحلیل (لومړی برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار
۷۱	د ساختمانونو تحلیل (دویمه برخه)	پوهاند محمد اسحق رازقی	ننگرهار	۷۲	د مهندسانو د پاره ساختماني ستاتیک زده کړه	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننگرهار
۷۳	سیټونه او هر څه د هغوی په هکله	سلطان احمد نیازمن	ننگرهار				

ټول کتابونه له دې ویبپاڼې څخه ډونلوډولای شی : www.ecampus-afghanistan.org

مرسته کوونکی: د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې، د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې، د آلمان د فدرالی جمهوریت جنرال کنسولگري، کانراد ادناور بنسټ، میخایل کلبت، سلواک اید، په جرمنی کې د اناسیس کمپنی او افغانیک

تطبیق کوونکی: ډاکټر یحیی وردگ د لوړو زده کړو وزارت، څلورمه کارته، کابل افغانستان، اپریل ۲۰۲۰

دفتر:075601640، ایمیل: textbooks@afghanic.de



Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 311 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism and Agriculture (96 medical textbooks funded by German Academic Exchange Service, 190 medical and non-medical textbooks funded by Kinderhilfe-Afghanistan, 7 textbooks funded by German-Afghan University Society, 2 textbooks funded by Consulate General of the Federal Republic of Germany, Mazar-e Sharif, 3 textbooks funded by Afghanistan-Schulen, 2 textbooks funded by SlovakAid, 1 textbook funded by SAFI Foundation, 8 textbooks funded by Konrad Adenauer Stiftung and 1 textbook funded by inasys) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic and Kabul Medical universities. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:
"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit ".

We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.
I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.
It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.
We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 190 medical and non-medical textbooks so far.
I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me from 2010 to 2016 in Afghanistan.
In our ministry, I would like to cordially thank Acting Minister of Higher Education Prof Abdul Tawab Balakarzai, Administrative & Financial Deputy Minister Prof Dr. Ahmad Seyer Mahjoor (PhD), Financial Director Ahmad Tariq Sediqi, Advisor at Ministry of Higher Education Dr. Gul Rahim Safi, Chancellor of Universities, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project .
I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz and Fahim Habibi in the office for publishing and distributing the textbooks.

Dr Yahya Wardak
Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul, Afghanistan, February, 2020
Mobile: 0706320844
Email: textbooks@afghanic.de

Message from the Ministry of Higher Education

In history, books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science, and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of higher education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers and authors, and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty, and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and our colleague Dr. Yahya Wardak that have provided opportunities for publishing this book.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof Abdul Tawab Balakarzai
Acting Minister of Higher Education
Kabul, 2020

Book Name Sets and All That About Them
Author Prof Lev Bukovský
Translator Sultan Ahmad Niazman
Publisher Nangarhar University, Science Faculty
Website www.nu.edu.af
Published 2020, First Edition
Copies 1000
Serial No 305
Download www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Karte – 4, Kabul
Office 0756014640, 0706320844
Email textbooks@afghanic.de

All rights reserved with the author.

Printed in Afghanistan 2020, Afghanistan Times Printing Press

ISBN 978-9936-633-42-1

په 2019 کي د پروفیسر بوکوفسکي د زیږېدو د 80 یمې کالیزی په مناسبت د SET-MATH تر عنوان لاندی یو اونیئېزبین المللی
کنفرانس ترتیب سوی ؤ ، چي په هغه کي د نړی د سیټ د تیوری مخورو ریاضي پوهانو ګډون او په خپلو علمي مقالو یې تزئین کړي ؤ.