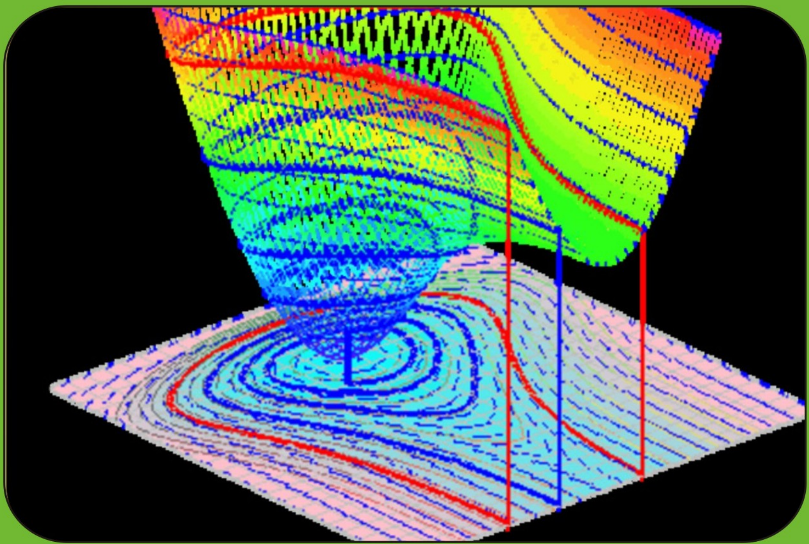
ننگرهار ساینس پوهنځی

خطي الجبر



ډاکتر عبداللـّه مهمند

خرخول منع دی ۱۳۹۴

خطي الجبر

Linear Algebra

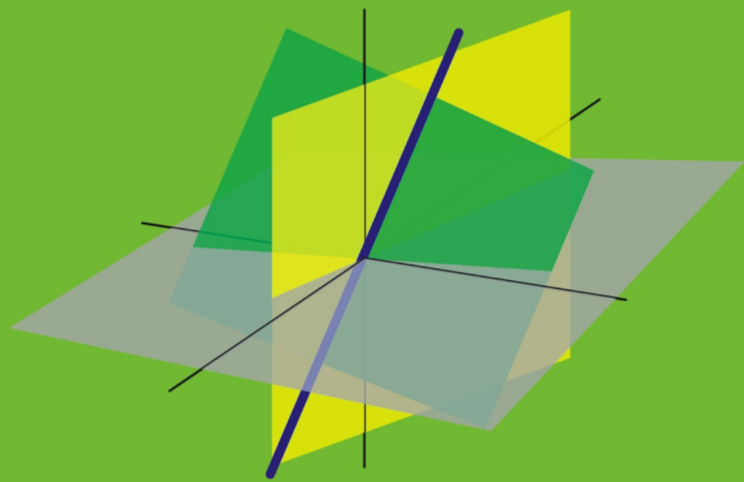
ډاکتر عبداللـّه مهمند
۱۳۹۴

Afghanic

Nangarhar Science Faculty

Dr Abdullah Mohmand

Linear Algebra



Funded by
German-Afghan University Society (DAUG)

ISBN 978-9936-620-21-6

Not For Sale 2016

بسم الله الرحمن الرحيم

خطي الجبر

ډاکتر عبدالله مهمند

د کتاب نوم　خطي الجبر
لیکوال　ډاکتر عبدالله مهمند
خپرندوی　ننگرهار ساینس پوهنځی
ویب پاڼه　www.nu.edu.af
چاپ شمېر　۷۵۰
د چاپ کال　۱۳۹۴
ډاونلوډ　www.ecampus-afghanistan.org
چاپ ځای　سهر مطبعه، کابل، افغانستان

دا کتاب د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې (DAUG) لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې په آلمان کې د افغانیک لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسؤلیت د کتاب په لیکوال او اړونده پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کابل
تیلیفون　۰۷۵۶۰۱٤٦٤۰
ایمیل　textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان 978-9936-620-21-6

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتـاب د علـم او پـوهې پـه لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کـې ډېـر مهـم رول لوبـولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چـې د زده کـړې د کیفیت پـه لوړولـو کـې مهـم ارزښـت لـري. لـه همـدې املـه د نړیوالـو پیژنـدل شـویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کـې نیولـو سره بایـد نـوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه لـه کـومي مننـه کـوم چـې دوامـداره زیـار یـې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړونـدو څـانگو کـې درسي کتابونـه تـألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کـړی دی او د پـوهې موتـور یـې پـه حرکـت راوسـتی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تـر څـو پـه خپلـو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مـواد برابـر او چـاپ کـړي، چـې لـه چـاپ وروسته د گرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کـړو د کیفیـت پـه لوړولـو او د علمي پروسې په پرمختگ کې یې نېک گام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپلـه دنـده بـولي چـې د گرانـو محصـلینو د علمـي سـطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسي مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کی د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې (DAUG) او زمـوږ همکـار ډاکـتر یحیی وردگ څخه مننه کوم چې د کتابونو د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چې نوموړې گټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څـو پـه نیـږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو وزیره

کابل، ۱۳۹۴

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلينو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لويو ستونزو څخه ګڼل کېږي. يو زيات شمير استادان او محصلين نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه ميتود تدريس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټيټ کيفيت فوتوکاپي کېږي.

تراوسه پورې موږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، کاپيسا، کابل او کابل طبي پوهنتون لپاره ۲۰۰عنوانه مختلف طبي او ۲۴ درسي کتابونه د ساينس، انجنيري، اقتصاد او زراعت پوهنځي (۹٦ طبي د آلمان د علمي همکاريو ټولنې DAAD، ۸۰ طبي سره له ۲۰ غير طبي د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې Kinderhilfe-Afghanistan او ۴ نور غير طبي د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې DAUG په مالي مرسته) چاپ کړي دي.

د يادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړونده پوهنځيو ته په وړيا توګه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.afghanistan-ecampus.org ويب پاڼې څخه ډاونلوډ کولای شئ.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتيژيک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کيفيت او زده کوونکو ته د نويو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړينه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د ليکلو فرصت برابر شي د تعليمي نصاب د ريفورم لپاره له انګريزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړين دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلين او استادان نشي کولای عصري، نويو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پيدا کړي."

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هيواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړينه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او چپټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځي، استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یاد شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د مولفینو او خپروونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مولف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د آلماني او افغاني پوهنتونونو ټولنې (German-Afghan University Society (DAUG څخه ډېره مننه کوو چې د دې کتاب په شمول یې د څلورو کتابونو د چاپ لګښت ورکړی دی.

په ځانګړې توګه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او CIM (Center for International Migration & Development) چې زما لپاره یې په تېرو پنځو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړي دي، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو له وزیرې پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنوال محمد عثمان بابري، مالي او اداري معین پوهنوال ډاکتر ګل حسن ولیزي، د ننګرهار پوهنتون پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مولف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو-کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبي او فضل الرحیم څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردګ، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، جنوري ۲۰۱۶

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.org

بسم الله الرحمن الرحيم

څرنګه خطی الجبر نن په نړئ کې د رياضياتويومهم جزګرځيدلی دی ، غواړم خطی الجبر ځني موضوعات چې زيات عموميت لري اوغيرله رياضي څخه په نورو مضامينوکې تری هم ډيره زياته استفاده کيږي ، دلته راټول اوپه تحريرکې راوړم. ددي ليکنی منابع د کتابونوترڅنګ د ورستيو کلونوځني لکچرونه ، چې په انګلسي اوجرمني ژبودخطي الجبري په برخه کې ورګړل شويدي ، هم شامل دی. آرزو لرم چې په مناسب وخت کې دي ته په مفصل ډول وسعت ورکړم تر څوخطی الجبرد زياتي استفادي وړ وګرځول شي. خطی الجبر ترنولسم پيړئ پوري د يو مستقل مضمون په شکل موجود نه و. بلکه يو قسمت د تحليلی هندسی و. د مثال په ډول Leibniz په 1690 کال کې يو فرمول د يو متريکس د ديترمينانت لاسته راوستلو لپاره پيدا کړ. مګر نن خطی الجبر نه يوازی يوه مهمه برخه د رياضياتو ګرځيدلي ده ، بلکه له خطی الجبرڅخه د ساينسی او اقتصادی مسايلو په حل کې هم تری ډيره استفاده کيږي. دلته کوښيښ شوی دی چې هغه رياضي سمبولونه استعمال شي، چې نن په نړئ کې مروج او په کتابوکې له هغه څخه استفاده کيږي اوتابع د يوي معيني ژبې نه وي. همدارنګه د نومونو په استعمال کې کوښيښ شوی دی چې د دو ژبو (پښتو او انګلسی) مروجه نومونو څخه استفاده وشي . البته هغه مفاهيم چې مونږپه خپلوملي ژبوکي هغه ته يوواحد اوستاندرد نوم نه لرو، په انګلسی ليکل شويدي . دا دهغو کسانولپاره چې د رياضی اونوروعلمو کتابونه په بين المللي ژبو مطالعه کوي ، د ګټي وړبه هم وي. هغه سمبولونه او اختصارات چې دلته استعمال شوی دي ، په اخيرکې مې تشريح کړی دی. د DAAD المانی موسسه څخه تشکرکوم چې د تدريس موقع راته د ننګرهاراوهرات د پوهنتونو د ساينس په پوهنځيو کې مساعده کړي وه. همدارنګه د Afghanic موسيسي څخه مننه کوم چه په چاپولو راسره مرسته کړيده. ا مکان لری چې په ليکلواو يا د جملاتو په جوړښت کې اشتبهات يا غلطی موجودي وي ، معذرت غواړم.

څرګنده ده هرعلمي اثر چه ليکل کيږي ځيني نيمګړتيلوي لري، نودمحترمولوستونکو څخه هيله کوم چې دا نيمګړتياوي دخپل وړانديز په ډول زما لاندي الکترونيکې پتې ته راوستاوي، تر څوپه راتلونکي کې په پام کې ونيول شي.

په درنښت

mohmandan@gmail.com

ډاکترعبدالله مهمند

فهرست

خطی وابسته (Linearly dependent) ،
خطی مسقل Linearly independent) ، مربوطه اساسی قضاياوي

پنځم فصل (شروع صفحه 92):

د فضای وکتور قاعده او بعد:

(basis and dimension of a vectorspace)

قاعده (basis) دیوی وکتوری فضا ، اساسی قاعده (canonical basis)،
قاعده (basis) دیوی فرعی فضا (subspace) ، د متریکس رنک (rank) ،
بعد (dimension) دیوی وکتوری فضا ، مربوطه اساسی قضاياوي

شپږم فصل (شروع صفحه 118):

د فرعی فضاو مجموعه (sum of subspaces):

بعد فرمول د فرعی فضاګانو (Dimension Formel for subspaces)
د فرعی فضاګانو مستقیمه مجموعه (direct sum of subspaces) ،
مربوطه اساسی قضاياوی

اوم فصل (شروع صفحه 127):

خطی میپینګ (یا نقش) (linear mapping):

هومورفیزم (homomorphism) ، مونومورفیزم (Monomorphism) ،
ایپومورفیزم (epimorphism) ، ایزومورفیزم (ismorphism) ،
ایندومورفیزم (Endomorphism) ، اوتومورفیزم (Automorphism)
Image او د یو خطی میپینګ kernel ،
بعد فرمول د خطی میپینګ (Dimension Formel for linear mapping) ،
اینوارینت (Invariant) فرعی فضا

اتم فصل (شروع صفحه 154):

دمتریکس اوخطی میپنګ ترمينځ رابطه:

(Linear Mapping and Matrix)

دخطی میپنګ مربوطه متریکس نظراساسی قاعدي ته
د متریکس مربوطه خطی میپنګ نظراساسی قاعدي ته
رابطه دخطی میپنګ (نقش) اومتریکس ترمينځ نظر دو مختلفو قاعدوته ،
skew Hermitain matrix ، Hermitain matrix ، adjiont matrix
idempotent matrix ، nilpotent matrix ، involutory matrix،
permutation matrix، ، مربوطه اساسی قضاياوي

نهم فصل (شروع صفحه 176):

مشخصه قیمتونه او مشخصه وکتورونه :

(*Eigenvalues and Eigenvectors*)

مشخصه وکتورونه (eigenvectors)
مشخصه قیمتونه (eigenvalues)
مشخصه فضا **(eigenspace)**
مشخصه تابع (characteristic function)
هندسی حاصل ضرب (geometric multiplicity)
الجبری حاصل ضرب (algebraic multiplicity)
ارتوگونال (orthogonal) متریکس ، دیاگونل (diagonal) متریکس ، diagonalizable متریکس ، معادل (equivalence) متریکس، مشابه (similar) متریکس ، **upper triangular matrix** (پورتنی مثلثی متریکس)، مربوطه اساسی قضایاوی

لسم فصل(شروع صفحه 199):

اقلیدی فضا (euclidean space):

Bilinearform ، سکالری حاصل ضرب (scalar product **)**، اقلیدی فضا (euclidean space) ، norm ، normed vector space ، متریک وکتوری فضا (metric space) ، ortogonal وکتورونه ، orthonormal وکتورونه ، اورتونورمال قاعده (orthonormalbasis)، gram-schmidt process ، وکتوری حاصل ضرب (vectorproduct)، semi-bilinear، unitary vector space ، hermitian، مربوطه اساسی قضایاوي

یولسم فصل (شروع صفحه 214):

د متریکسو ډولونه او استعمال یی:

Quadratic Form (دویمه درجه فورم اویا مربعی فورم)
negative definite ، positive definite ، positive semidefinite ، principal minor ، indefinite ، negative semidefinite
Hessian Matrix (هیس متریکس) ، jacobian matrix
local maximum (موضعی اعظمی اویا نسبی اعظمی)
local minimum (اصغری موضعی اصغری نسبی)
wronskian matrix ، Cayley-Hamilton theorem
مربوطه اساسی قضایاوي

دولسم فصل (شروع صفحه 237):

مثالونه او تمرینونه

لمړی فصل

(مجموعه , انځور(تصویر) او اړیکی (رابطه))

(Set , Mapping and Relation)

په دې فصل کښی غواړم ځنی مفاهیم اوقضایاوی چې وروسته په خطی الجبری کښی ورځینی استفاده کیږی په مختصرډول تشریح کړم.

تعریف 1.1: سیت (**set**) د Georg Cantor له خوا په 1874 میلادي کال کې په لاندې ډول تعریف شوی دی :

Set یوه مجموعه د اوبجیکتونو(Objects) ده چې ټول یو معین مشخصات ولری مګر یوله بل څخه فرق لري. دمثال په ډول که X سیت ساینس د پوهنځی محصلین وي . معین مشخصات دلته دساینس دپوهنځی محصل کیدل دي.

مګر هرمحصل له یوبل څخه فرق لری.مونږ یو سیت په لاندی ډول ښیو:

$$X = \{x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots\}$$

دلته $x_1, x_2, x_3 \dots\dots$ Objects دي چې د X د سیت د عناصرو (elements) په نوم یادیږی. دیوه سیت X د عناصروشمیرد cardinality په نوم یادیږي اومونږ هغه په $|X|$ سره ښیو. خالی سیت په $\emptyset$ سره ښودل کیږي.

تعریف 1. 2:

(a) که چیری X او Y دوه سیته وی. X ته فرعی سیت (subset) د Y ویل کیږی $(X \subseteq Y)$ په دې شرط چې :

$$\forall x \in X \Longrightarrow x \in Y$$

یوفرعی سیت X ته (proper subset) د Y $(X \subset Y)$ ویل کیږي په دې شرط چې په Y کښی ځنی عناصر موجود وي چې په X کې شامل نوی.

یعنی: $\exists a \in Y ; a \notin X$

د مثال په ډول

$$X = \{2,4,5\},\ Y = \{2,4,5,a,b\} \Longrightarrow X \subset Y$$

هرسیت یوخالی فرعی سیت لری. X او Y سره مساوی دی په دې شرط چې $X \subseteq Y$ او $Y \subseteq X$ وی. یعنی:

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$$

(b) دمعین سیت (finite set) لپاره ډول ډول تعریفونه موجود دي
R . Dedekind (1831-1916) معین سیت ***(finite set)*** دارنگه تعریف کړی:
یوسیت X ته معین ویل کیږي په دې شرط چې په X کی هیڅ یو فرعی سیت *(proper subset)* موجود نه وې چې *Cardinality* (دعناصرو شمیر) د X سره مساوی وی . یعنی

$$\nexists\ A \subset X\ ;\ |A| = |X|$$

اویاداچې :

$$\forall\ A \subset X\ ;\ |A| < |X|$$

مونږ معین سیت په $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ سره ښیو. دلته د X دعناصرو شمیر مساوی $n \neq \infty$ دی. یعنی $|X| = n$
هرهغه سیت چې معین نه وي د غیرمعین سیت (infinite set) په نوم یادیږي.
یعنی: $|X| = \infty$
مثال :

$$\mathbb{N} = \{\ 1,2,3\ ,3,4, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \{\ 0, 1,2,3\ ,3,4, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ \dots, -3, -2, -1\ ,0,1,2,3\ , \dots\}$$
$$2\mathbb{Z} = \{\ \dots, -6, -4, -2\ ,0,2,4,6\ , \dots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\ \Big|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

پورتنی سیتونه ټول غیرمعین دي . ځکه :

$$(\ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\ ,\ 2\mathbb{Z}\ \subset \mathbb{Z}\ )\ \wedge$$

$$(\ |\mathbb{N}| = \infty\ , |\mathbb{Z}| = \infty\ , |2\mathbb{Z}| = \infty\ , |\mathbb{Q}| = \infty\ , |\mathbb{R}| = \ \infty\ , |\mathbb{C}| = \infty\ )$$

مثال : دالاندی سیتونه معین دي

$$X = \{\ x\ \Big|\ \ x \text{ یو بحردی}\}$$
$$Y = \{\ y \in \mathbb{Z}\ \Big|\ -2 \leq y \leq 2\}$$

X او Y هریو 5 عنصره لری . یعنی $|X\ | = |Y| = 5$
مگر $X \nsubseteq Y$ او $Y \nsubseteq X$

$$W_1 :\ = \{w \in \mathbb{Z}\ | -15 \leq w \leq 16\quad\}$$

$$W_2 := \{w \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq w \leq 16 \quad \wedge \quad (even) \text{ جفت } w\}$$
$$= \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$$

لیدل کیږی چې $W_2 \subseteq W_1$ او $|W_2| = 8$

دا لاندی سیټونه خالی دی

$$W_3 := \{n \in \mathbb{N} \mid n < 0\} \quad , W4 := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\}$$

او $|W_3| = |W_4| = |W_5| = 0$

تعریف 1.3 : که چیری $X_1, X_2, \dots, X_n$ سیټونه وي :

اتحاد $(\boldsymbol{Union})$:

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n := \{x \mid \exists i \in \{1,2,3,..,n\}; x \in X_i\}$$

تقاطع $(\boldsymbol{intersection})$:

$$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n := \{x \mid x \in X_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\}$$

په پورتنی مثال کی $W_1 \cup W_2 = W_1$ او $W_1 \cap W_2 = W_2$ دی

مثال: که $\mathbb{R}_+$ سیټ دهغه حقیقی عددونه وي چې دصفرڅخه زیات اویا مساوی دی او $\mathbb{R}_-$ سیټ دهغه حقیقی عددونه وي چې دصفرڅخه کم اویا مساوی دی . یعنی

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

دهغوی اتحاد د حقیقی اعدادو سیټ او دهغوی تقاطع صفر دی.

یعنی $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ او $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

مثال:

$$X := \{x \in \mathbb{Z} \mid (-8 \leq x \leq 8)\}$$
$$Y := \{x \in \mathbb{Z} \mid (-8 < x < 8)\}$$

$8 \in X \implies 8 \in X \cup Y$

$-8 \in X \wedge -8 \notin Y \implies -8 \notin X \cap Y$

$5 \in X \wedge 5 \in Y \implies 5 \in X \cap Y$

مثال :

$A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{d,e,f\}$, $C = \{a,b\}$
$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A \cap B = \{d\}$

$C \subseteq \mathbf{A}$ **,** $A \cup C = \{a,b,c,d\} = A$, $A \cap C = \{a,b\} = C$

$A \setminus B = \{ a \in A \mid a \notin B \} = \{a,b,c\}$

$A \setminus C = \{ a \in A \mid a \notin C \} = \{ c, d \}$, $C \setminus A = \emptyset$

ځرنګه چې $C \subseteq A$ دی . بیا د $A \setminus C$ سیټ ته complement د C په A کې او د $A \setminus B$ سیټ ته relative Complement د B نظر A ته ویل کیږي

مثال:

$$W_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \ \vee \ x > 0\}$$

$$W_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \ \wedge \ x > 0\}$$

W_1 سیټ له هغوحقیقی اعدادو چې له صفرځخه لوی یا ($\vee$) له صفرځخه کوچنی وی تشکیل شوی ده . یعنی:

$$W_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$$

W_2 سیټ له هغوحقیقی اعدادو چې له صفرځخه لوی اود ($\wedge$) صفرځخه کوچنی وی تشکیل شوی ده . ځرنګه چې هغه ډول حقیقی عدد نه پیداکیږی. پس W_2 خالی ده یعنی: $W_2 = \emptyset$

تمرین 1.1 : دلاندی سیټونو عناصر (elements) پیدا کړی:

(a)

$$X := \{x \in \mathbb{Z} \mid (-1 \le x \le 6)\}$$

(b)

$$Y := \{x \in \mathbb{Z} \mid (1 \le x \le 7)\}$$

(c)

$$A: \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \le n \le 4 \}$$
$$M := \{x \in \mathbb{Z} \mid x = n^2 - 4 \ , n \in A\}$$

(d) $X \cup Y$ او $X \cap Y$ پیداکړی. البته دلته X او Y پورتني سیټونه دي

(e)

$$X := \{x \in \mathbb{Z} \mid (-2 \le x \le 2) \vee 6 \le x < 10\}$$

تعریف : که X یو معین سیت وی. که مونږد X ټول فرعی سیتونه په p(X) وښیو. یعنی: $p(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$

P(X) د X د power set په نوم یادیږی. که X یومعین سیت وی اودعناصرو (elements) شمیریي n وي. په دې صورت p(X) هم معین اود عناصرو شمیریي 2^n دی. یعنی: $|p(X)| = 2^n$

مثال: که X = {a,b} وي . په دی صورت دهغه فرعی سیتونه $A_1=\{a\}$ ، $A_2=\{b\}$، $A_3=\{a,b\}$ او Ø دي. یعنی:

$|p(X)| = 2^2 = 4$ او $P(X) = \{A_1, A_2, A_3, \emptyset\}$

که چیری د X سیت خالی وي. په دې صورت $p(X) = p(\emptyset) = \{\emptyset\}$ او $|p(\emptyset)| = 1$

تمرین:

(a) که X = {a, b, c} وي. P(X) او $|p(X)|$ پیداکړی

(b) که $X := \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 \le x^2 \le 16\}$ وي. د X سیت او $|p(X)|$ پیداکړی

تعریف 1.4: یوه تابع *(function* or *mapping)* له یوه سیت *A* څخه پر سیت *B* باندی یوه دا ډول رابطه ده چې دهرعنصر $a \in A$ لپاره یوازی یو عنصر $b \in B$ موجود وی چې د a د تصویر اویا انځور(map) په نوم یادیږي

یعني باید:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B \; ; \; f(a) = b$$

اوپه لاندې شکل ښودل کیږي :

$$f: A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a) = b$$

f (a) د mapping یا image (تصویر یا انځور) د a نظر f په نوم , A د Domain په نوم , B د Codomain په نوم او f(A) د A د Range اویا image په نوم یادیږي. هر Range یو فرعی سیت *(subset)* د Codomain دی.

دالاندی تابع د identity function په نوم یادیږی :

$$id : B \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto id(a) = a$$

مثال: B:= {d , e , g , h } , A:= { a , b , c }

$$f: A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a) = e$$
$$a \longmapsto f(a) = g$$
$$b \longmapsto f(b) = d$$

دا ډول تعریف د f درست نه دی. ځکه لمړی داچې a دوه تصویرونه لری .
دویم داچې c هیڅ تصویر نه لری.

مثال 1. 1 : د f دالاندی تعریفونه درست نه دي

(a)

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$a \longmapsto 2a$$

ځکه : $a = -1 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f(a) = f(-1) = -2 \notin \mathbb{N}$

(b)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto \sqrt{r}$$

ځکه د مثال په ډول $f(-2) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$
مگردالاندی تعریف د f لپاره درست دی

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$r \longmapsto \sqrt{r}$$

مثال: B:= {0 , 1 } , A:= { a , b , c }

(a)

$f: A \longrightarrow B$, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 1$

په دې مثال کښی range او codomain سره مساوی دی. یعنی هغه *B* دی

(b)

$g: A \longrightarrow B$, g(a) = 1 , g(b) = 1 , g(c) = 1

په دی مثال کښی domain مساوی *A* , codomain مساوی *B* او range مساوی {1} نظر g *ته* دی

نوټ: دوه تابع f او g هغه وخت مساوی دي که چیری دواړه عین domain (د مثال په ډول *A*) او د هر $a \in A$ لپاره باید $f(a) = g(a)$ صدق وکړی.

تعریف 1.5 : $f : A \rightarrow B$ یوه تابع (Mapping) ده.

f injective: $a, b \in A \;, \; f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$

(یعنی که مونږ $a, b \in A$ ولروچي $f(a) = f(b)$ وي. باید a = b شي)

اویاداچي: $a, b \in A \,, \; a \neq b \;\Longrightarrow\; f(a) \neq f(b)$

f surjective : $\forall\; b \in B, \exists\; a \in A \;;\; f(a) = b$

(یعنی دهر $b \in B$ لپاره باید یو $a \in A$ موجود وي چې $f(a) = b$ شي)

f bijective : f injective $\wedge$ f surjective

مثال: $B := \{d , e , g \} , A := \{ a , b , c \}$

$$
\begin{aligned}
f &: A \longrightarrow B \\
a &\longmapsto f(a) = e \\
b &\longmapsto f(b) = e \\
c &\longmapsto f(c) = d
\end{aligned}
$$

f یو injective نه دی. ځکه $f(a) = f(b) = e$ مګر $a \neq b$ دی

f یو surjective هم نه دی. ځکه د $g \in B$ لپاره هیڅ یو عنصرپه A کي نشته چي انځوريي g وی. یعنی:

$\nexists\; x \in A \,;\, f(x) = g$

مثال: $B := \{d , e \} , A := \{ a , b , c \}$

$$
\begin{aligned}
f &: A \longrightarrow B \\
a &\longmapsto f(a) = d \\
b &\longmapsto f(b) = d \\
c &\longmapsto f(c) = e
\end{aligned}
$$

f یو surjective دی مګر injective نه دی. ځکه $f(a) = f(b) = d$ مګر $a \neq b$

مثال: $B := \{d , e , g , h \} , A := \{ a , b , c \}$. مونږ نشوکولای یوه تابع $f : A \rightarrow B$ پیدا کړو چي surjective وی . ځکه

$|A| = 3 < 4 = |B|$ مګرد injective امکان شته.

مثال 1.2:

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\
a &\longmapsto 2a
\end{aligned}
$$

f یو injective دی . که مونږ $a , b \in \mathbb{Z}$ ولرو چې f(a) = f(b) وي.
باید ثبوت شی چې a = b کیږي

$$f(a) = f(b) \implies 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

f یو surjective نه دی. ځکه په $\mathbb{Z}$ کې هیڅ یوداسی عنصر نه پیداکیږی چې تصویریې نظر f ته طاق اعداد (د مثال په ډول یو) وی .

یعنی $\nexists\, x \in \mathbb{Z}\ ;\ f(x) = 1$

مثال 1.3 :

(a) دالاندی تابع bijective ده

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto 2a$$

injective توب واضح دی او surjective هم ده .ځکه :

$$b \in \mathbb{R},\ a := \frac{b}{2} \in \mathbb{R} \implies f(a) = f\left(\frac{b}{2}\right) = 2.\frac{b}{2} = b$$

(b) دالاندی تابع Injective ده. مګر surjective نه ده

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto \mathrm{f(n) = n + 1}$$

$m,n \in \mathbb{N}$, $f(m) = f(n) \Rightarrow m+1 = n+1 \Rightarrow m = n \Rightarrow f$ injective

دمثال په ډول د 1 لپاره هیڅ یوعدد m په $\mathbb{N}$ کښی نه پیداکیږی چې f(m) = 1 شی. پس surjective نه دی

مثال: دالاندي تابع نه injective او نه surjective ده

$$f:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathrm{z = a+ib} \longmapsto |z| = \sqrt{\mathrm{a^2 + b^2}}$$

$z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -3 -4i$

$f(z_1) = |z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$f(z_2) = |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

مګر $z_1 \neq z_2$ دی. پس injective نه دی.

Surjective هم نه ده. ځکه د هر $z \in \mathbb{C}$ لپاره $f(z) \geq 0$ کیږي.

تمرین 1.2: معلوم کړئ چې ولی دالاندی تابع نه injective او نه surjective کیدای شی

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto x^2$$

تعریف 1.6 : که مونږ دوه تابع $f: A \to B$ او $g: B \to C$ ولرو.
$g \circ f : A \to C$ د f او g د mapping combination (د تابعوترکیب)
په نوم یادیږي. په صورت عموم ترکیب د دوتابعوپه "ο" ښودل کیږي. تابع ترکیب
ته mappings composition هم ویل کیږي.

مثال : په دې مثال کښې غواړو $g \circ f$ پیداکړو

$$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$b \longmapsto b^2 - 1 \qquad\qquad a \longmapsto a + 1$$

$$g \circ f\,(a) = g(a+1) = (a+1)^2 - 1 = a^2 + 2a + 1 - 1$$
$$= a^2 + 2a$$

تمرین: $g \circ f$ پیدا کړی

(a)

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$b \longmapsto 2\sqrt{b} \qquad\qquad a \longmapsto a + 1$$

(b)

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad\qquad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$b \longmapsto 2\sqrt{b} \qquad\qquad a \longmapsto a + 1$$

لیما 1.1 : که مونږ دوه تابع $f: X \longrightarrow Y$ او $g: Y \longrightarrow Z$ ولرو. بیا :

(a) $f\ injective \ \wedge \ g\ injective \ \Longrightarrow \ g \circ f\ \ injective$

(b) $f\ surjective \ \wedge \ g\ surjective \ \Longrightarrow g \circ f\ \ surjective$

(c) $g \circ f\ \ injective \ \Longrightarrow f\ injective$

(d) $g \circ f\ \ surjective \Longrightarrow g\ surjective$

(a) ثبوت: که چیری د $a, b \in X$ لپاره $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ وی . پس باید
ثبوت شی چې a = b کیږي

$$g \circ f(a) = g \circ f(b) \Longrightarrow f(a) = f(b) \quad [\, g \text{ ځکه } injective \text{ يو}\ ]$$
$$\Longrightarrow a = b \quad [\, f \text{ ځکه } injective \text{ يو}\,]$$

(b) ثبوت : باید ثبوت شی چې :

$$\forall z \in Z, \exists x \in X; g \circ f(x) = z$$

$$f\ surj \implies \forall y \in Y\ \exists x \in X; f(x) = y$$
$$g\ surj \implies \forall z \in Z\ \exists y \in Y; g(y) = z$$

په نتیجه کې :

$$\mathrm{g(f(x))} = \mathrm{g(y)} = \mathrm{z} \implies g \circ f\ surj$$

تمرین 1.3 : (c) او (d) د 1.1 لیما ثبوت کړی .

تمرین 1.4:

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto 2n \qquad n \longmapsto 3n + 5 \qquad n \longmapsto -6n$$

(a) دلاندی توابعو ترکیب پیداکړی

$f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$

(b) کومی دهغوترکیبو injective اوکومی surjective دی

تعریف 1.7 : $f: A \to B$ یو bijective تابع ده . دهغی معکوسه تابع (inverse function) په لاندی ډول تعریف شوی دی :

$$f^{-1}: B \to A$$
$$b \longmapsto a := f^{-1}(b)$$

یعنی د $b \in B$ تصویر نظر f^{-1} ته همغه عنصر $a \in A$ دی چې f(a) = b کیږي او f^{-1} هم *bijective* دی

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}: B \to B \quad \wedge \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}: A \to A$$

مثال : دالاندی تابع Bijective ده

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x + 2$$

د هغی معکوسه تابع (f^{-1}) لاندی شکل لري

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \frac{y-2}{3}$$

ځکه:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3} \implies f \circ f^{-1}(y) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{3(y-2)}{3} + 2 = y$$

تمرین 1.5:

(a) ثبوت کړی چې د f تابع په پورتنی مثال کښی bijective ده .

(b) دلاندی تابع معکوس پیداکړی

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x + 1$$

تعریف :

(a) معین سیت په لاندی ډول هم تعریف شوی دی:

یو M سیت ته هغه وخت معین ویل کیږی که چیري :

$$f: M \to M \quad \text{injective} \quad \Leftrightarrow \quad f: M \to M \quad \text{surjective}$$

اویا په لاندی ډول :

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \ \wedge\ \exists \text{ bijective } f: M \to \{1,2,\dots,n-1\}$$
$$\Longrightarrow M \ \text{ finete (معین)}$$

(b) **countable set (دشمیروړسیت):**

یو سیت X د countable Set (دشمیروړ سیت) په نوم یادیږي، پدی شرط چې د X اوطبعی اعدادو د یو فرعی سیت (subset) ترمینځ یوه bijective تابع موجوده وي. که دارنګه یوه تابع موجوده نه وي، بیا un**countable** په نوم یادیږي.

یو سیت X د infinite countable (د شمارش وړ غیرمعین سیت) یادیږی ، په دې شرط چې د X او طبعی اعدادو $\mathbb{N}$ ترمینځ یوه bijective تابع موجوده وي . دمثال په ډول تام اعداد $\mathbb{Z}$ او ناطق اعداد $\mathbb{Q}$ د شمارش وړ غیرمعین سیتونه دي. مګردحقیقی اعدادو سیت $\mathbb{R}$ یو un**countable** دی. په لاندي مثال کی غواړم وښیم، چې $\mathbb{Z}$ یود شمارش وړ غیرمعین (infinite countable) سیت دی.

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$k \longmapsto f(k) = \begin{cases} 2k & (k \geq 0) \\ 2(-k) - 1 & (k < 0) \end{cases}$$

f injective:

$m,n \in \mathbb{Z}$, $f(m) = f(n)$

د m او n لپاره دري لاندي حالتونه موجود دي :

1 . $m,n \geq 0 \Longrightarrow f(m) = 2m \ \wedge\ f(n) = 2n \Longrightarrow m = n$

$\Longrightarrow$ f injective

2 . $m \geq 0 \wedge n < 0 \Longrightarrow f(m) = 2m \wedge f(n) = 2(-n)-1$

خرنگه چې $n < 0$ انتخاب شوی ، پس $2(-n) > 0$ دی او $2(-n)$ -1 یو طاق عدد دی . په تیجه کی $f(m) = 2m = 2(-n) - 1 = f(n)$ امکان نلري

3 . $m,n < 0 \Longrightarrow f(m) = 2(-m) - 1 \wedge f(n) = 2(-n) - 1$

$$f(m) = 2(-m) - 1 = f(n) = 2(-n) - 1 \Longrightarrow m = n$$

$\Longrightarrow$ f injective

f surjective: د $x \in \mathbb{N}$ لپاره دوه لاندي حالاتونه موجود دي:

لمړی حالت : x یو جفت عدد دی

$$x \text{ even}, x \geq 0 \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; 2k = x \Longrightarrow k = \frac{x}{2}$$

$$\Longrightarrow f(k) = f(\tfrac{x}{2}) = 2.\tfrac{x}{2} = x \Longrightarrow f \text{ surjective}$$

دویم حالت : x یو طاق عدد دی

$$x = 2.(-k) - 1 \Longrightarrow k = -\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$f(k) = f(-\frac{x+1}{2}) = 2.(-(-\frac{x+1}{2}) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

$\Longrightarrow$ f surjective

په نتیجه کی f بایجکتیف (bijective) دی. پس $\mathbb{Z}$ د شمارش وړغیرمعین سیت دی (infinite countable)

قضیه 1.1 : که A یو معین سیت وی . بیا دیوی تابع $f: A \to A$ لپاره دالاندی افادی دیوبل سره معادلي دی .

(i) f یو injective دی

(ii) f یو surjective دی

(iii) f یو *bijective* دی

ثبوت : خرنگه چې A معین دی اومونږ فرض کو چې n مختلف عنصره لری . یعنی

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

که *f* یو *surjective* نه وی . داپه دی معنی چې:

$$f\ not\ surjective \implies f(A) \neq A \implies \exists a \in A\,; a \notin f(A)$$

یعنی د f(A) د عناصروشمیر له n څخه کم دی . که m = $|f(A)|$ وی.
د *Birichlet* پرنسیپ وای. که چیری *n objects* په *m* *(m<n)* روکو کی تقسیم شی. په یوه روک کی باید دوه *object* وي . داپه دې معنی چې *f* یو *injective* نه دی . مگر دا د فرضیی تضاد دی. پس باید *f* یو *surjective* وی.

(i) ⇐ (ii)

که *f* یو *injective* نه وی . داپه دې معنی چې:

$$f\ not\ injective \implies \exists a, b \in A\,; a \neq b\ \wedge\ f(a) = f(b)$$

په دې حالت کې f(A) کولای شی اعظمی n-1 عنصر ولری . یعنی باید f(A) $\neq A$ وی . مگردا خلاف د فرضی ده. ځکه f یو surjective فرض شوی وه. پس باید f injective وی .

نوټ:

(a) د دومعینوسیتو *A* او *B* لپاره هم 1.1 قضیه صدق کوی. په دې شرط چې $|B| = |A|$ وي.

(b) د 1.1 قضیه د غیرمعین سیت لپاره صدق نه کوې. دمثال په ډول

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} n & (\text{که } n \text{ طاق}) \\ \frac{n}{2} & (\text{که } n \text{ جفت}) \end{cases}$$

f یو injective نه دی. ځکه:

$$f(3) = 3 = \frac{6}{2} = f(6) \quad \implies \quad f\ \text{not injective}$$

f مگر surjective دی : k∈ ℕ

لمړی حالت: که چیری k طاق وی. په دې صورت کی f(k) = k کیږی او f یو surjective دی

دویم حالت: که چیری k جفت وي. په دی صورت:

$$n := 2k \implies f(n) = f(2k) = \frac{2k}{2} = k \implies f\ \ surjective$$

(c) که چیری B یو معین سیت او A د هغه proper subset
(یعنی $A \subset B$) وی. په دې صورت مونږنشوکولای یوه bijective تابع ددی
دواړو سیټونو ترمینځ پیده کړو. مګردغیرمعینو سیټونو ترمینځ بیا دا امکان شته.
لاندی مثالونه دا واضح کوی
مثال 1.4:
(a)

$$f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (\text{که } n \text{ جفت}) \\ \frac{-(x+1)}{2} & (\text{که } n \text{ تاق}) \end{cases}$$

البته دلته 0 جفت عدد فرض شوی دی

f یو *injective* :

$x,y \in \mathbb{N}_0$

د $f(x) = f(y)$ حالت د ($x = 0 \ \wedge \ y \neq 0$) اویا ($x \neq 0 \ \wedge \ y = 0$) لپاره
صدق نه کوي. پس x او y دصفرخلاف فرض کوو .د *injective* د ثبوت لپاره
دالاندی دری حالته په نظرکښی نیسو:

$x,y \in \mathbb{N}$

case 1: $f(x) = \frac{x}{2}$, $f(y) = \frac{y}{2}$

$f(x) = f(y) \implies \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \implies 2.x = 2.y \implies x = y$

case 2: $f(x) = \frac{-(x+1)}{2}$, $f(y) = \frac{-(y+1)}{2}$

$f(x) = f(y) \implies \frac{-(x+1)}{2} = \frac{-(y+1)}{2} \implies -2.x - 2 = -2.y - 2$

$\implies x = y$

case 3 : $f(x) = \frac{x}{2}$, $f(y) = \frac{-(y+1)}{2}$

$f(x) = f(y) \implies \frac{x}{2} = \frac{-(y+1)}{2} \implies 2.x = -2.y - 2 \implies x + y = 1$

$x + y = 1$ امکان نه لری ، ځکه x او y طبعی اعداد دی.

ولیدل شول چې دریم حالت امکان نه لری. یعنې که x جفت اوy طاق وي. په دې صورت بیا f(x) = f(y) امکان نه لري. مګرپه لمړی او دویم حالت کښی f اینجکتیف دی.

f یو surjective هم دی. ځکه:

د $y \in \mathbb{Z}$ لپاره دری لاندی حالته موجود دی:

case 1 : y = 0

$$\frac{x}{2} = y = 0 \quad \vee \quad \frac{-(x+1)}{2} = y = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \ \vee \ -(x+1) = 0$$

$$-(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \notin \mathbb{N}_0$$

$$f(0) = \frac{0}{2} = 0$$

case 2 : y > 0

$x := 2y \in \mathbb{N}_0$

$\Longrightarrow f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y$ [ځکه 2y جفت دی]

case 3 : y < 0

$x := -2y-1 \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x) = f(-2y-1)$

$= \frac{-(-2y-1+1)}{2}$ [ځکه -2y-1 طاق]

$= \frac{2y}{2} = y$

په هردری حالتوکښی ولیدل شوه چې دهر $y \in \mathbb{Z}$ لپاره یو x په $\mathbb{N}_0$ کښی پیداکیږی چې $f(x) = y$ شي. $\mathbb{Z}$ او $\mathbb{N}_0$ دواړه غیرمعین دی او $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$ هم صدق کوی. بیاهم *bijective* ددواړوسیټونوترمینځ موجود دی

(b) دا لاندی Exponentialfunction بایجکتیف ده:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto e^x$$

e د اویلر عدد (Eulers Number) په نوم یادیږي

e = 2.718281828459

:injective

$x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(y)$

$\Longrightarrow e^x = e^y \Longrightarrow x = y \Longrightarrow \exp$ injective

:surjective

$y \in \mathbb{R}_+$, $x := \ln(y) \Longrightarrow e^x = e^{\ln(y)} = y$

$\Longrightarrow \exp(x) = e^x = y \Longrightarrow \exp$ surjective

$\mathbb{R}_+$ او $\mathbb{R}$ دواړه غیرمعین دي او $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ هم صدق کوی. بیاهم *bijective* ددواړوسیتونوترمینځ موجود دی.

تمرین 1.7 : معلوم کړی چې کومي دلاندی توابع surjective , injective اویا bijective دي

(a)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 + 1$$

(b)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x - 4$$

تعریف 1.8 : د A_i (i=1,2,3,…,n) سیتونو لپاره direct product of Sets په لاندی ډول تعریف شوی دی:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots . \times A_n$$
$$:= \{(a_1, a_2, \ldots . , a_n) \,|\, a_i \in A_i \,, i = 1,2, \ldots , n\}$$

که مونږ $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots . \times A_n$ وضع کړو. په دې صورت هر عنصر $a \in A$ لاندی شکل لري:

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n)$$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n)$ ته n-tupel ویل کیږی اومساویتوب د دو n – tupel دا ډول تعریف شوی دی:

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n) \,, b = (b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n) \in A$$
$$a = b \;:\Leftrightarrow\; a_i = b_i \;\forall\, i \in \{1,2, \ldots , n\}$$

که $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ وی په دی صورت direct product د A_i سیتونو د A^n په شکل لیکل کیږي.

direct product د Cartesian product په نوم هم یادیږي اوپه هندسه کښی تری زیاده استفاده کیږي. که د A سیت m عنصره اود B سیت n عنصره ولری. یعني $|A| = m$ او $|B| = n$.

که G سیت direct product د A او B وی. یعنی G = AxB . په دی صورت د G دعناصرو شمیر m.n دی. یعنی

$$|G| = |AxB| = |A|.|B| = m.n$$

پورته رابطه دزیاتو معینو سیتونو لپاره A_i (i=1,2,…,n) هم صدق کوی .

مثال:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$

$G = AxB = \{1,2,3\} \times \{a,b,c,d\}$

$= \{ (1,a),(2,a),(3,a),\{1,b),(2,b),(3,b),(1,c),(2,c),(3,c),(1,d)$

$,(2,d),(3,d) \}$

لیدل کیږی چې $|G| = 3.4 = 12$

مثال 1.5:

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1 , x_2)$

f injective:

$x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

که چیرې $f(x) = f(y)$ وي. باید ثبوت شي چې $x = y$ دی

$F(x) = f(y) \Longrightarrow (2x_1 , x_2) = (2y_1 , y_2)$

$\Longrightarrow 2x_1 = 2y_1 \wedge x_2 = y_2 \Longrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$

$\Longrightarrow x = y$

$\Longrightarrow$ f injective

f surjective:

$y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

باید یو $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ موجود وي چې $f(x) = y$ شی

$f(x) = f(x_1 , x_2) = (2x_1 , x_2):= y = (y_1,y_2)$

$\Longrightarrow 2x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Longrightarrow x_1 : = \frac{y_1}{2} \wedge x_2: = y_2$

$\Longrightarrow f(x) = f(x_1 , x_2) = f(\frac{y_1}{2}, y_2) = (2. \frac{y_1}{2} , y_2) = (y_1 , y_2) = y$

$\Longrightarrow$ f surjective

په نتیجه کې f یو bijective دی.

تمرین 1.6 : کومی لاندی تابع injective , surjective او bijective دی

(a)

$$f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

(b)

$$f : \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1$$

تمرين :

(a) دلاندی سیتونو عناصر (elements) پیدا کړی :

$W := \{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z} \,|\, (x + y = 0) \wedge (-3 \leq x, y \leq 3)\}$

$X := \{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z} | (x^2 = y^2) \wedge (-3 \leq x, y \leq 3)\}$

$Y := \{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z} | (x = 0 \vee y = 0) \wedge (-3 \leq x, y \leq 3)\}$

(b)

$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_2 = x_3\}$

u = (1,0,1) , v = (2,0,3), w = (0,1,0)

معلوم کړی چې د w,v,u څخه کوم یوپه W کې شامل اوکوم نه دی.

(c)

H:= { $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1+3x_2+2x_4=0$, $2x_1,x_2+x_3=0$}

u=(1,2,0,2) , v=(3,-1,-5,0) , w=(-1,1,1,-1)

معلوم کړی چې د w,v,u څخه کوم یوپه H کې شامل اوکوم نه دی.

تعریف 1.9 : یوه دوه ګوني رابطه (Binary operation) "$\oplus$" پریوه ست $M \neq \phi$ په لاندی ډول تعریف شوی ده:

$$\oplus: M \times M \to M$$
$$(a, b) \longmapsto a \oplus b$$

یعنی د هر $(a, b) \in M \times M$ لپاره فقط یوازی یو $c \in M$ موجود دی چې $c = a \oplus b$ شي.

مثال : په لاندی مثال کښی یوه دوه ګوني رابطه (Binary operation) " $\oplus$ " پر $\mathbb{Z}$ (تام اعداد) تعریف شوی ده

$$. \quad \oplus : \mathbb{Z} \; x \, \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \longmapsto \mathrm{a} \oplus \mathrm{b} = 2\mathrm{a} - \mathrm{b}$$

مګرکه $\oplus$ په لاندی ډول پر $\mathbb{N}$ (طبیعي اعداد) باندی تعریف کړو

$$\oplus: \mathbb{N} \, x\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \longmapsto \mathrm{a} \oplus \mathrm{b} = 2\mathrm{a} - \mathrm{b}$$

دا دوه ګوني رابطه نه ده . ځکه که a = 2 او b = 6 وي

$a \oplus b = 2a - b = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \notin \mathbb{N}$

مثال : په لاندی مثال کې یوه دوه ګونه رابطه (Binary operation) " $\odot$ " پر $\mathbb{R}$ (حقیقی اعدادو) تعریف شوی ده

$$\odot : \mathbb{R} \; x \, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathrm{a,b}) \mapsto \mathrm{a}\odot \mathrm{b} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})$$

مګر که $\odot$ په لاندی ډول پر $\mathbb{Z}$ (تام اعدادو) تعریف کړو

$$\odot : \mathbb{Z} \, x\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\mathrm{a,b}) \mapsto \mathrm{a}\odot \mathrm{b} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b})$$

دا دوه ګونه رابطه نه ده . ځکه که $a = 2$ او $b = 3$ وي

$$\mathrm{a}\odot \mathrm{b} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$

تعریف 1.10 : یو سیټ $M \neq \phi$ له یوی دوه ګوني رابطی " $\oplus$ " سره د الجبری جوړښت (Algebraic structure) په نوم یادیږی او مونږ هغه په $(M, \oplus)$ سره ښیو. یوسیټ M له دو دوه ګونورابطو (Binary operations) $\oplus$ او $\odot$ سره مونږ په $(M, \oplus, \odot)$ ښیو. یو $(M, \oplus)$ الجبری جوړښت (ساختمان) لپاره لاندی خواصونه نظردوه ګونې رابطې ته تعریف شوی دی:

(i) اتحادی (associativity)

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \qquad \forall \; a, b, c \in M$$

(ii) یو $e \in \mathrm{M}$ دلاندی خواصو سره د عینیت عنصر (identity) په نوم یادیږی

$$\forall a \in M \;\; e \oplus a = e \quad \wedge \quad a \oplus e = a$$

(iii) د هر $a \in \mathrm{M}$ لپاره یو $b \in \mathrm{M}$ دلاندی خواصو سره موجود وي

$$\mathrm{b}\oplus \mathrm{a} = \mathrm{e} \quad \wedge \quad \mathrm{a} \oplus b = e$$

b ته معکوس (inverse) د a ویل کیږي

(iv) تبدیلی(commutative) :

$$\forall a, b \in \mathrm{M} \;\; \mathrm{a} \oplus b = b \oplus a$$

د مثال په ډول $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$ او $(\mathbb{C}, +, .)$ الجبري جوړښت (ساختمان) لری چې هریوی دوه دوه ګوني رابطی "+" او " . " لری

مثال:

(a) د $\mathbb{R} \supset \{-1,1\}=:M$ سیت نظر ضرب "." ته یو الجبری جوړښت (ساختمان) لری. مګرنظر جمع "+" ته نلری . ځکه $1 + 1 = 2 \notin M$

(b) د $\mathbb{C} \supset \{-1,1,i,-i\}=:M$ سیت نظر ضرب "." یو الجبری جوړښت لری.
ځکه :

$(-1).(-1) = 1 \in M$, $(-1).(1) = -1\in M$, $(-1).i = -i\in M$,

$(-1).(-i) = I \in M$, $1.1 = 1\in M$, $1.i = i \in M$, $1.(-i) = -I \in M$,

$i.i = -1\in M$, $i.(-i) = -1.(i^2) = (-1).(-1) = 1\in M$,

$(-i).(-i) = 1.(i^2) = 1.(-1) = -1\in M$

مثال:- دالاندی دوه ګونه رابطه تبدیلی نه ده

$$\odot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(a,b) \longmapsto a\odot b = a^b$$

ځکه: $3 \odot 2 = 3^2 = 9$ مګر $2 \odot 3 = 2^3 = 8$

نوټ: د direct product د الجبري جوړښتونو (algebraic structures) بیا هم یو الجبري جوړښت دی. یعني که مونږ لاندي الجبري جوړښتونه ولرو:

$(A, \oplus)$, $(B, \odot)$

$G:= (A, \oplus)x(B, \odot)$

که د G دوه ګوني رابطه په " * " سره وښیو. بیا:

$x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in G = (A, \oplus)x(B, \odot)$

$x*y = (x_1\oplus y_1 , x_2\odot y_2)$

مثال: پر $\mathbb{R}$ باندي لاندي دوه ګوني رابطه تعریف شویده:

$$\odot : \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b) \longmapsto a\odot b = \frac{1}{2}(a+b)$$

$(\mathbb{R},+)$ او $(\mathbb{R}, \odot)$ الجبري جوړښتونه (algebraic structures) دي.

$G:= (\mathbb{R},+)\ x\ (\mathbb{R}, \odot)$

$x = (2, 4)$, $y = (1,6) \in G$

که د G دوه ګوني رابطه په " * " سره وښیو. بیا:

$x * y = (2, 4) * (1,6) = (2+1, 4 \odot 6) = (3, \frac{1}{2}(4+6)$

= (3,5)

تعریف 1.11 **:** یو الجبری جوړښت (algebraic structure) $(G,\oplus)$ که پورتنی (i),(ii) او (iii) خواصه ولری د گروپ (group) په نوم یادیږی . که چیری په یوه گروپ کې (iv) هم صدق وکړی. بیا هغه گروپ ته تبدیلي گروپ (commutative group) ویل کیږي.

مثال: $(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$ تبدیلی گروپونه دی. چې عنیت عنصریي صفر"0" او -a معکوس د a دی .

$(\mathbb{C},+)$ هم یو گروپ دی چې عنیت عنصریي صفر او -z=-a-ib معکوس د z=a+ib دی.

$(\mathbb{R}^*,.),(\mathbb{Q}^*,.)$ تبدیلی گروپونه دی چې عنیت عنصریي یو "1" او $a^{-1} = \frac{1}{a}$ معکوس د a دی.

ځکه $a.\frac{1}{a} = 1$ کیږی. مګر $(\mathbb{Z}^*,.)$ گروپ نه دی

تعریف 1.12**:** یو الجبری جوړښت $(R,\oplus\ ,\odot)$ د لاندی خواصونوسره د حلقی (Ring) په نوم یادیږی:

(1) $(R,\oplus)$ یو تبدیلی گروپ (commutative group) دی

(2) اتحادی (associativity) نظر "$\odot$" ته

$$(a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c) \qquad (\forall a,b,c \in R\ )$$

(3) توزیعی (distributivity) نظر $\odot$ او$\oplus$

$\forall a,b,c \in R$

$$a\odot(b\oplus c) = (a\odot b)\oplus(a\odot c)$$
$$\wedge$$
$$(b\oplus c)\odot a = (b\odot a)\oplus(c\odot a)$$

که چیری یورینگ (ring) عینیت عنصر(identity) نظر "$\odot$" ته ولری. بیا هغه رینگ د عینیت سره (ring with identity) په نوم یادیږی. یعنی که:

$$\exists I_R \in R;\ a\odot I_R = a \qquad (\ \forall a \in R\ \ )$$

عینیت عنصرنظر $\odot$ ته د واحد (unity) په نوم یادیږی. که R نظر "$\odot$" ته تبدیلی وی. بیا هغه ته تبدیلی رینګ (Commutative) واي. یعنی که

$$a\odot b = b\odot a \qquad (\ \forall a,b \in\ R\ )$$

مثال: $(\mathbb{Z}, +, .)$,$(\mathbb{Q}, +, .)$,$(\mathbb{R}, +, .)$ تبدیلی رینګونه دی چې واحد عنصر (unity) یې یو "1" دی

تعریف 1.13 : یوه تبدیلی حلقه (commutative Ring) $(\mathbb{K},+,.)$ که لاندی خواص ولری د Field (ساحه) په نوم یادیږی:

(i) یوواحد عنصر (unity) موجود وي

(ii) هر $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ معکوس پذیر (Invertible) وي . یعنی :

$\forall \ a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists \ b \in \mathbb{K}; \ a.b = I_R$

مثال : $(\mathbb{Q},+, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$ او $(\mathbb{C}, +, .)$ ساحی (fields) دی . مګر $(\mathbb{Z}, +, .)$ ساحه کیدای نشي . ځکه د مثال په ډول د $2 \in \mathbb{Z}$ لپاره نظر ضرب "." ته په $\mathbb{Z}$ کښی معکوس نشته.

تعریف 1.14: $A \neq \phi$ سیت دی. مونږ رابطه (relation) د عناصرو ترمینځ په "~„ سره ښیو . که چیری د a او b ترمینځ یوه رابطه "~ „ موجوده وی. بیا a~ b لیکو .

تعریف 1.15: یوه رابطه (relation) "~ „ پریوسیت $A \neq \phi$ باندی دلاندي خواصو سره د equivalence relation (معادله رابطه) په نوم یادیږی .

$a , b, c \ \in A$

(i) a~a (reflexive)

(ii) a~b ⇒ b~a (symmetric)

(iii) a~b ∧ b~c ⇒ a~c (transitive)

په ځینو کتابوکې reflexive ته انعکاس ، symmetric ته متناظر او transitive ته انتقالي ویل شوي دي.

مثال: د مساوات رابطه "=" پریوه سیت $A \neq \phi$ باندی یوه معادله رابطه (eq-relation) ده.

reflexive: a = a ⇒ a ~ a ($\forall \ a \in A$)

symmetric: a~b ⇒ a = b ⇒ b = a

⇒ b~a ($\forall \ (a, b) \in AxA$)

transitive: a~b ∧ b~c ⇒ a = b ∧ b = c ⇒ a = c

⇒ a~c $\forall \ (a, b), (b, c) \in AxA$

مثال: پر $\mathbb{Z}$ باندی دالاندی رابطه په نظرکې نیسو:

a $\sim$ b $: \Leftrightarrow$ a $\leq$ b ($(a,b) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$)

پورتنی رابطه reflexive او transitive ده. مگر symmetric نه ده. ځکه:

$2 \leq 3 \Rightarrow 2 \sim 3$

$3 \nleq 2 \Rightarrow 3 \nsim 2$

پس پورتنی رابطه یوه معادله رابطه (eq-relation) نه ده .

مثال 1.6: پر $\mathbb{Z}$ باندی دالاندی رابطه یوه معادله رابطه (eq-relation) ده .

$(a,b) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$

a $\sim$ b $: \Leftrightarrow 2 \mid$ a – b (a – b پر 2 قابل تقسیم دی)

:reflexive

a – a = 0 $\Rightarrow$ 2 | 0 $\Rightarrow$ a $\sim$ a

: symmetric

$(a,b) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, a $\sim$ b $\Rightarrow$ 2|a – b $\Rightarrow$ $\exists$ q$\in$ $\mathbb{Z}$; a – b = 2q

$\Rightarrow$ b – a = 2.(-q)

$\Rightarrow$ 2|b – a $\Rightarrow$ b $\sim$ a $\Rightarrow$ “$\sim$" symmetric

: transitive

$(a,b),(b,c) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, a $\sim$ b $\wedge$ b $\sim$ c $\Rightarrow$ 2|a – b $\wedge$ 2|b – c

$\Rightarrow$ $\exists$ m$\in$ $\mathbb{Z}$; a – b = 2m $\wedge$ $\exists$ n$\in$ $\mathbb{Z}$; b – c = 2n

$\Rightarrow$ b = a – 2m $\wedge$ c = b – 2n

$\Rightarrow$ c = a – 2m – 2n = a – 2(m+n)

$\Rightarrow$ c – a = - 2(m+n) $\Rightarrow$ a – c = 2(m+n) $\Rightarrow$ 2|a – c

$\Rightarrow$ “$\sim$" transitive

ثبوت شو چې "$\sim$" یوه معادله رابطه (eq-relation) ده .

مثال: پر $\mathbb{Z}$ (تام اعداد) دا "$\sim$" رابطه (relation) په لاندی ډول تعریف شوی ده : a,b, $c \in \mathbb{Z}$

a$\sim$b: $\Leftrightarrow$ a.b $\neq$ 0

a$\sim$ b $\Rightarrow$ a.b $\neq$ 0 $\Rightarrow$ b.a $\neq$ 0 $\Rightarrow$ b$\sim$a $\Rightarrow$ "$\sim$" symmetric

$a \sim b \ \wedge \ b \sim c \ \Rightarrow \ a.b \neq 0 \ \wedge \ b.c \neq 0$

$\Rightarrow a \neq 0 \ , b \neq 0 \ , c \neq 0$

$\Rightarrow \ a.c \neq 0 \ \Rightarrow a \sim c \Rightarrow$ "~" transitive

مګر reflexive نه ده . ځکه که $0 \sim 0$ وی ، باید $0.0 \neq 0$ شي.

پس "~" یوه معادله رابطه (eq-relation) نه ده.

تمرین:

(a) X د یوه ښوونځی شاګردان دی . پر X باندي لاندی رابطه (relation) تعریف شوی ده. $a,b \in X$

$a \sim b: \Leftrightarrow$ a د b سره په یوه ټولګی کښی دی

ثبوت کړی چي "~" یوه معادله رابطه (eq-relation) ده

(b) X د ساینس دپوهنځي محصلین دی. پر X باندي لاندی رابطه (relation) تعریف شوی ده. $a,b \in X$

$a \sim b: \Leftrightarrow$ a د b سره هم قد دی

ثبوت کړی چي "~" یوه معادله رابطه (eq-relation) ده

تعریف 1.15: $n, k \in \mathbb{N}$

$n! = 1.2.3\ldots..n$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!.(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

n! د factorial او $\binom{n}{k}$ د binomial coefficient په نوم یادیږي. البته دلته که k مساوی n اویا مساوی صفروي، بیا $\binom{n}{k}$ په لاندی ډول تعریف شویدی

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

مثال:

$5! = 1.2.3.4.5 = 120$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6.2} = \frac{120}{12} = 10$

تعریف 1.16: Kronecker symbol $\boldsymbol{\delta_{ij}}$

δ_{ij} یو رياضي سمبول دی. که *i* او *j* ایندکس *(index)* سره مساوي وي قيمت يي يو دی، اوکه مساوي نه وي بياي قيمت صفر دی. يعني:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{که } i = j \text{ وی}) \\ 0 & (\text{که } i \neq j \text{ وی}) \end{cases}$$

دویم فصل
د خطی معادلاتو سیستم
(System of linear Equation)

دلته مونږ د خطی معادلات سیستم په حقیقی اعدادو ($\mathbb{R}$) کښی مطالعه کوو. څه وخت چې مونږ د خطی معادلاتوسیستم دحل په برخه خبری کوو. دوه لاندی حالتونه مطرح کیږي.

(1) خطی معادلاتوسیستم حل لری.

په دې صورت دوه لاندی حالتونه ممکن دی:

(a) خطی معادلاتوسیستم زیات حلونه لری.

(b) خطی معادلاتوسیستم فقط یو حل لری.

(2) خطی معادلاتوسیستم هیڅ حل نلری

په لمړی مرحله کښی غواړم د یوی خطی معادلاتوسیستم دحل امکانات دځومثالو په ذریعه تشریح کړم.

مثال: 3x = 6

دا سیستم یوه معادله او یو مجهول لري. دا معادله حل لري اود هغه یو حل x = 2 دی . اوس غواړومعلوم کړو چې فقط یوحل لرې . که چیری $\bar{x}$ هم یوحل ددی معادلی وي

$$3x = 6 \ \wedge \ 3\bar{x} = 6 \Longrightarrow 3\mathrm{x} - 3\bar{x} = 6 - 6 = 0$$

$$\Longrightarrow 3(\mathrm{x} - \bar{x}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{x} - \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{x} = \bar{x}$$

ولیدل شوه چې دا معادله فقط یو حل لری.

تعریف 2.1: په یوه خطی معادلاتوسیستم کښی دالاندی عملیات د Elementary Operation (مقدماتی عملیاتو) په نوم یادیږی

(1) ضربول دیوی معادلی له یوه عدد خلاف د صفر سره

(2) ضربول دیوی معادلی له یوه عدد خلاف د صفرسره اوبیا دبلی معادلی سره جمع کول.

(3) تبدیلول ددو معادلوځایونه

دمقدماتی عملیاتود تطبیق پواسطه د خطی معادلاتوسیستم په حل کښی تغیرنه راځی
مثال 2.1:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \quad -2. \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

x + y = 5
2x – 2x – 2y – y = -10 + 1

$$x + y = 5$$
$$-3y = -9$$
$$-3y = -9 \implies 3y + 9 \implies y = \frac{9}{3} = 3$$
$$x + 5 = y \implies x + 3 = 5 \implies x = 5 - 3 = 2$$

ددی معادلو حل $(x, y) = (2{,}3)$ دی.
یادونه: دپورتنی مثال د سمبول تشریح:
-2.

لمړی معادله د 2- سره ضرب شوې او بیا ددومې معادلی سره جمع شوی ده .
خپله لمړی معادله تغیر نه کوی.
مثال 2.2 : دا سیستم دوه معادلی و دری مجهوله لری.

x – y + z = 1 .1 $\implies$ x – y + z = 1
-x + y – z = 0 x –x –y +y +z –z = 0 + 1
$\implies \quad 0 = 1$

ځرنګه چې 0 = 1 امکان نری. پس دا خطی معادلاتوسیستم حل نه لری.
مثال 2.3 : دا سیستم هم دوه معادلی و دری مجهوله لری.

x – y + z = 1 1. x – y + z = 1
-x + y – z = -1 0 = 0

په دې مثال کښی ولیدل شو چې که لمړی معادله د 1- سره ضرب شی دومه معادله لاس ته راځی. که مونږ فقط لمړی معدله په نظرکښی ونیسو اوکه x مساوی

په یو عدد λ او y مساوی په یو عدد μ وضع کړو. بیا کولای شو z په لاندی ډول پیداکړو:

$$x = \lambda \ , y = \mu \ \Longrightarrow z = 1 - x + y = 1 - \lambda + \ \mu$$

د هر λ , μ لپاره فقط یوازی یو حل د z لپاره موجود دی. په نتیجه کښی دا معادلات ډیرزیات حلونه لری

مونږد حلونو سیت په SLE (solution of linear equations) سره ښیوو. یعنی :

$$SLE(x, y, z) \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \ \middle| \ x = \lambda \ , y = \mu \ , z = 1 - \lambda + \mu \ \}$$
$$= \ \{(\lambda \ , \mu \ ,1 - \lambda \ \ + \mu \ )\}$$

د مثال په ډول که $\lambda = 0$, $\mu = 1$ انتخاب کړو:

$$z = 1 - \lambda + \mu = 1 - 0 + 1 = 2$$

او حل يي $(x, y, z) = (0,1,2)$ دی

اوکه $\lambda = 1$, $\mu = 3$ انتخاب شی. حل يي $(x, y, z) = (1,3,3)$ کیږی

دا ډول حل د پارامتری حل (parameterize Solution) په نوم یادیږی.

تمرین 2.1 : دا لاندی معادلی پارامتری حل لری . د حل ست SLE(x,y,z) پیدا کړی

(a)

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 2y + 2z = 6$$

(b)

$$2x + 2y - z = 6$$

مثال 2.4:

که مجموعه د دوعددو 62 او فرق دهغو مساوی 20 وی. هغه دوه عدده پیدا کړی.

حل: که دا اعداد x او y وی. د معادلو سیستم په لاندی ډول دی :

$$\begin{aligned} X + y &= 62 \quad 1. \\ X - y &= 20 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} X + y &= 62 \\ x + x + y - y &= 62 + 20 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ 2x = 82\ \Longrightarrow x = 41\ ,\ y = 62 - 41 = 21$

په نتیجه هغه عددونه 41 او 21 دی او د حل سیت { (41,21)= (x,y) } دی

مثال 2.5 : د پلار , ځوی او لور د عمرو مجموعه 70 کاله ده. که دپلارد عمر څخه د لور او دوه چنده د ځوی عمرکم شی ، بیا 5 باقی پاتی کیږی. که دپلارد عمرڅخه د ځوی اودری چنده د لورعمر کم شی ، بیا صفرباقی پاتی کیږی . د هر یوه عمرپیداکړی.

حل: که د پلارعمر x ، د ځوی عمر y او د لور عمر z وی. په دی صورت د معادلاتو سیستم لاندی شکل لري

$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \quad -1. \quad -1. \\ x - 2y - z &= 5 \\ x - y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ -3y - 2z &= -65 \quad -2. \\ -2y - 4z &= -70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 70 \\ -3y - 2z &= -65 \\ 4y + 0 &= -2\,.(-65) - 70 = 130 - 70 = 60 \end{aligned}$$

$$y = \frac{60}{4} = 15$$

$$-2z = -65 + 3y = -65 + 45 \ \Longrightarrow\ z = \frac{20}{2} = 10$$

$$x = 70 - y - z = 70 - 15 - 10 = 45$$

پیدا مو کړل چې پلار 45 کلن , ځوی 15 کلن او لور 10 کلنه ده

د معادلاتو حل $SLE(x, y, z) = \{(45,15,10)\}$

تمرین: د احمد او محمود د عمرونو مجموعه 50 کاله ده. لس کاله ورسته د محمود عمر د احمد د عمر $\frac{3}{4}$ کیږی . د هریوه عمر څوکاله ده

په پورتنی مثال کښی مو ولید چې یو خطی معادلاتی سیستم کولای شی یو حل، هیڅ حل او یا ډیر زیاد حلونه لري.

اوس د خطی معادلاتی سیستم عمومی حالت مطالعه کوو. یوه خطی معادله په صورت عموم لاندی شکل لري:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

دلته $a_1, a_1, a_1, \dots, a_n, b$ حقیقی اعداد او $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهول دی. په پورتنی معادله کښی باید مختلف حالتونه له یوبل څخه تفکیک کړو.

(a) که چیری $a_1, a_1, a_1, \dots, a_n$ ټول ضرایب صفرنه وي او a_m $(1 \leq m \leq n)$ لمړی خلاف د صفر ضریب وي . په دی صورت پورتنی معادله لاندی شکل اخلی :

$$o.x_1 + o.x_2 + o.x_3 + \cdots + o.x_{m-1} + a_m.x_m + \cdots + a_n.x_n = b$$

$x_1, x_1, \dots, x_{m-1}$ د free Variable په نوم یادیږی . یعنی کولای شو هریوه ته اختیاری قیمتونه ورکړو. او $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ د Not free Variable په نوم یادیږی. یعنی دوی مستقل نه دی اودنورو تابع دی .

ځرنګه چې $a_1, a_1, a_1, \dots, a_{m-1}$ ټول صفر فرض شوی وه . پس کولای شو چې له هغوی څخه صرف نظر وکړو .

$$a_mx_m + a_{m+1}x_{m+1} + \cdots + a_nx_n = b$$

ځرنګه چې $a_m \neq 0$ دی پس کوی شومعادله پر a_m تقسیم کړو.

$$x_m + \frac{1}{a_m}(a_{m+1}x_{m+1} + \dots\dots + a_nx_n\} = \frac{b}{a_m}$$

$$\Longrightarrow \quad x_m = \frac{1}{a_m}(b - a_{m+1}x_{m+1} - \dots\dots - a_nx_n)$$

لیدل کیږی چې قیمت د x_m تابع د انتخابی قیمتونو $x_n, \dots, x_{m+2}, x_{m+1}$ دی. په همدی ډول کولای شو هغه نور مجهول چې ضریب يي خلاف د صفردی پیداکړو.

(b) ټول ضرایب $a_1, \dots, a_n$ صفر دی.مګر $b \neq 0$ دی. په دی صورت هغه معادله لاندی شکل نیسي:

$$0x_1, 0x_2, \dots, o.x_n = b \quad \Longrightarrow 0 = b$$

ځرنګه $b \neq 0$ ده. مګردا حالت ممکن نه دی. پس معادله هیڅ حل نه لري.

(c) تول ضرایب $a_1, \dots, a_n$ صفر دی او b هم صفردی. په دی حالت کښی معادله دهر $x_1, \dots, x_n$ قیمت لپاره حل لری.

مثال

$$2x_2 + x_5 + 4x_6 = 16$$

په پورتنی معادله کښی د (a) حالت صدق کوی. ځکه $a_2 = 2 \neq 0$ دی.

$$x_2 + \frac{1}{2}(x_5 + 4x_6) = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = 8 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{4}{2}x_6 = 8 - \frac{1}{2}x_5 - 2x_6$$

که مونږ اوس $x_5 = \lambda$ او $x_6 = \mu$ $(\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R})$ وضع کړو. بیا

$x_2 = 8 - \frac{\lambda}{2} - 2\mu$ کیږي. د مثال په ډول که $\lambda = 4$ او $\mu = 6$ وي .

$$x_2 = 8 - \frac{4}{2} - 26 = 8 - 2 - 12 = -6$$

دپورته معادلی دحلونو سیت لاندی شکل لري :

$$SLE\ (x_2, x_5, x_6) = \ \{\left(8 - \frac{\lambda}{2} - 2\mu, \lambda, \mu\right)\}$$

تمرين 2.2

دحلونو سیت دلاندی معادلی پیداکړی.

$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 4$$

علاوه پرهغه که $x_5 = 6$ او $x_1 = 2$ وي . بیا x_3 پیدا کړی.

اوس غواړود خطی معادلاتو سیستم په عمومی صورت مطالعه کړو.

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \quad \textbf{(G)}$$

پورتنی خطی معادلاتو سیستم m معادلی او n مجهوله لری.

که $b_{\rm i} = {\rm o}$ $(i = 1,2,3,4, \dots)$ وي . بیادا معادلاتی سیستم د متجانس او یا د همو گین (Homogen) په نوم یادیږی. غیرله هغه غیرمتجانس (Inhomogen) دي. يو متجانس خطی معادلاتو سیستم همیش يو Zero-n-tupel حل (یعنی حل يي (0,0,...,0)) لری. په پورتنيو مثالوکي ولیدل شول چې د معادلاتو د حل لپاره کوشش شویدی چې مجهولوشمیره کمه شی. په عمومی ډول د خطی معادلاتود حل لپاره د مقدماتی عملیاتو

(elementary Operation) (1) , (2) او (3) څخه استفاده کیږی.
دیو خطی معادلاتي سیستم حل د ټولو $x_1, x_2, \dots, x_n$ پیدا کول دی چې دمعادلوشرایط پری تطبیق شی

قضیه 2.1 : که پر یو خطی معادلاتی سیستم مقدماتی عملیات تطبیق شي دهغه دحلونو سیټ تغیرنه کوی . یعنی د حلونوشمیر مخکښی د مقدماتی عملیاتواو ورسته له هغه سره مساوی دي .

ثبوت: که مونږ په یو خطی معادلاتی سیستم کښی دالاندی دوه معادلي ولرو:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad (a)$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \qquad (b)$$

(1) **ثبوت :** که د (a) معادله دیوه عدد $0 \neq \lambda$ سره ضرب شي. دالاندی (c) معادله لاس ته راځی:

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \qquad (c)$$

(2) **ثبوت** : که د (c) معادله د (b) سره جمع شي د (d) لاندی معادله لاس ته راځي :

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \cdots + \lambda a_{in}x_n$$
$$= (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 + (a_{k2} + \lambda a_{i2})x_2 + \cdots + (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n = b_k + \lambda b_i \qquad (d)$$

دحل سیټ د (b) او (d) معادلو سره مساوی دی. ځکه په دواړه خوا د معادلی یومساوی مقدار علاوه شوی دی. **(3) ثبوت** واضح دی.
د خطی معادلاتی سیستم دحل لپاره چې m معادلی او n مجهوله ولري . اکثراً د یو method (طریقې) څخه استفاده کیږي. په دی طریقه کښی کوشش کیږي چې لمړی یو مجهول کم شي . په خطی معادلاتی سیستم کښی بیا n-1 مجهول باقی پاتی کیږي. د مقدماتی عملیاتوپه استفاده که په همدی ډول ادامه ورکړل شي . دغه معادلاتی سیستم لاندی سطری زینه یی (row-echelon) شکل پیداکوی:

$$\left.\begin{array}{r} c_{1r_1}x_{r_1} + c_{1r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{2r_2}x_{r_2} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ . \\ . \\ +c_{kr_k}x_{r_k} + \cdots + c_{kn}x_n = d_k \\ 0 = d_{k+1} \\ . \\ . \\ 0 = \mathrm{d_m} \end{array}\right\} \quad \textbf{(S)}$$

$$1 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n \le n$$

پورتنی معادلی هغه وخت یوحل لری چې $d_{k+1} = d_{k+2} = \cdots = d_m = 0$ وي

مثال 2.7 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \quad -2. \quad -3. \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= -5 \quad 2. \\ -4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

د مقدماتی عملیاتو پر تطبیق مووکولای شوچې د معادلاتو سیستم زینه یی شکل پیداکړی. x_1, x_2, x_3 په لاندي ډول پیدا کیږي :

$$3x_3 = -9 \implies x_3 = -3$$

$$2x_2 = -5 - x_3 = -5 + 3 = -2 \implies x_2 = -1$$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 + 1 + 3 = 6$$

په نتیجه کښی: SLE(x,y,z) = {(6,-1,-3)}

مثال 2.8 : مونږدالاندي معادلاتی سیستم لرو:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \quad 1. \mid 2. \mid -1. \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1 \quad -1. \mid -2. \\ -x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \\ -2x_3 - x_4 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1 \\ 3x_4 - 6x_5 &= 3 \quad -1. \\ 3x_4 - 6x_5 &= a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1 \\ 3x_4 - 6x_5 &= 3 \\ 0 &= a - 1 \end{aligned}$$

پورتنی خطی معادلی حل نه لری که چیری $a \neq 1$ وی.

که $a = 1$ وی په دې صورت اخیري معادله o = o شکل نیسي. او د (S) معادلاتوله مخې پس دا معادلي حل لریی. دحل دپیداکولولپاره په لاندي ډول

پرمخ ځو:

څرنګه چې دریمه معادله دوه مجهوله لري باید یوی ته یو قیمت ورکړو.

$$x_5 = \lambda$$

$$3x_4 = 3 + 6x_5 = 3 + 6\lambda \Longrightarrow \; x_4 = 1 + 2\lambda$$
$$x_3 = 1 - 2x_4 + 3x_5 = 1 - 2(1 + 2\lambda) + 3\lambda$$
$$= 1 - 2 - 4\lambda + 3\lambda = -1 - \lambda$$

څرنګه چې په لمړی معادله کې x_3, x_4, x_5 پیژنو. پس باید دحل لپاره x_1 اویا x_2 ته یوقیمت ورکړو

$$x_2 = 2\mu$$
$$2x_1 = x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2\mu - (-1 - \lambda) + 1 + 2\lambda - \lambda$$
$$= 2\mu + 2 + 2\lambda$$
$$\Longrightarrow x_1 = \mu + 1 + \lambda$$

په نتیجه کې د حلونو سیت لاندې شکل لري :

$$SLE(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{(\mu + 1 + \lambda, 2\mu, -1 - \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)\}$$

قضیه 2.2 (Gaussian Algorithm) هرخطی معادلاتی سیستم (G) پس د مقدماتي عملیاتو د (S) په شکل راوړل کیدای شي .

ثبوت: که ټول ضرایب a_{ij} په (G) کې صفر وي. ثبوت یي واضح دی. اوس یو حالت په نظر کې نیسو چې هلته ټول a_{ij} صفرنه وي. په دی صورت لمړی ستن (ستون) (د چپ څخه شروع) چې ضریب یي خلاف د صفر وي. هغه بیا په r_1 اوضریب یي په a'_{i,r_1} ښیو. څرنګه چې $a'_{i,r_1} \neq 0$ دی کولای شو یو تعداد مقدماتی عملیات د (G) پر معادلاتی سیستم باندی په لاندی ډول تطبیق کړو:

$$\begin{aligned}
&a'_{1,r_1}x_{r_1} + a'_{1,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \quad \frac{-a'_{2,r_1}}{a'_{1,r_1}} \cdot \; \ldots \; \frac{-a'_{m,r_1}}{a'_{1,r_1}} \cdot \\
&a'_{2,r_1}x_{r_1} + a'_{2,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a'_{2,n}x_n = b'_2 \\
&\;\vdots \\
&a'_{m,r_1}x_{r_1} + a'_{m,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a'_{m,n}x_n = b'_m
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
a'_{1,r_1}x_{r_1} + a'_{1,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a'_{1,n}x_n &= b'_1 \\
a''_{2,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a''_{2,n}x_n &= b''_2 \\
&\;\vdots \\
a''_{m,r_1+1}x_{r_1+1} + \cdots + a''_{m,n}x_n &= b''_m
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(W)}$$

لیدل کیږي چې په m-1 ورستی معادلو کې $x_{r_1}, \dots, x_2, x_1$ نه لیدل کیږی . اوس کولای شوچې عین طریقه پر (W) معادلاتي سیستم تطبیق کړو. که په همدی ډول ادامه ورکړل شی. بالاخره د (G) معادلاتي سیستم د (S) شکل نیسی.

مثال 2.9 :

$$\begin{aligned} 0 + 2x_2 + 3x_3 &= 13 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \quad \frac{-a'_{2,r_1}}{a'_{1,r_1}} = \frac{-2}{1} \cdot \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

ځکه: $a'_{i,r_1} = 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 0 - 7x_2 + 5x_3 &= 1 \quad \frac{2}{7} \cdot \\ 2x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$
$$0 - 7x_2 + 5x_3 = 1$$
$$0 + 0 + \frac{31}{7}x_3 = \frac{93}{7} \implies 31x_3 = 93 \implies x_3 = 3$$
$$-7x_2 = 1 - 5x_3 = 1 - 5.3 = -14 \implies x_2 = 2$$
$$x_1 = 1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 - 6 + 6 = 1$$
$$\implies SLE(x_1, x_2, x_3) = \{(1,2,3)\}$$

تمرین 2.3 : د احمد، محمود او کریم د عمر مجموعه 95 کاله ده. د احمد او محمود د عمرمجموعه د کریم د عمر څخه 5 کاله لږ ده. مګرد احمد او کریم د عمر مجموعه 25 کاله د محمود عمر څخه ډیره ده. د هریوه عمر پیدا کړی

تمرین : دا لاندی معادلاتي سیستم حل کړی

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \quad = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10$$

دریم فصل

متریکس اودیترمینانت

(Matrix and Determinant)

تعریف 3.1 : مونږ یوه ساحه (Field) او یوه لاندي تابع په نظرکښی نیسو:

$$f: \{1,2,3, \dots, m\} \times \{1,2,3, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(i,j) \longrightarrow a_{ij}$$

دهر (i,j) لپاره یوازی یو $f(i,j) = a_{ij}$ په $\mathbb{K}$ کې موجود دی. i د لیکي (سطری) ایندکس (row index) او j د ستنی (ستونی) اندکس (column index) په نوم یادیږي . د f د تابع انځور(تصویر) د متریکس (matrix) په نوم یادیږي او a_{ij} د ماتریس عناصر (elements) دي او شمیریي مساوی m.n دی. مونږدلته د حقیقی اعدادو ساحه استعمالو. یعنی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ متریکس په لاندی ډول ښودل کیږي:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

دلته a_{ij} (i=1,2,3,…,n ∧ j=1,2,3,…,m) حقیقی اعداد دي. دا ډول متریکس د m لیکی (سطری) او n ستنی (ستونی) متریکس په نوم یادیږي . مونږ هغه په $M(mxn\,,\mathbb{R})$ ښیو.

که چیري دیومتریکس د لیکو (rows) او ستنو(columns) شمیرسره مساوې وې، ورته مربعي متریکس (square matrix) ویل کیږي اومونږبیا د $M(mxn\,,\mathbb{R})$ پرځای $M(\,n\,,\mathbb{R})$ لیکو.

تعریف 3.2 : که $A, B \in M(mxn\,,\mathbb{R})$ وې. یعنی

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

(a) د A او B متریکسو مجموعه په لاندې ډول ده:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او یا په مختصرډول:

$$(a_{ij})+(b_{ij})= v(a_{ij}+b_{ij})$$

دمثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

لیدل کیږي چې $A,B\in M(2x3\,,\mathbb{R})$ دي

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) ضرب دیوه $A\in M(mxn\,,\mathbb{R})$ متریکس د یوه حقیقی عدد $\lambda\in\mathbb{R}$ سره

$$\lambda.A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

(c) ددو متریکسو ضرب : $B\epsilon M(n\times k,\mathbb{R}), A\epsilon M(m\times n,\mathbb{R})$

د A اوB حاصل ضرب یو $C\epsilon M(m\times k,\mathbb{R}\,)$ متریکس دی. دوه متریکسه هغه وخت ضرب کیدی شي چې د ستونو(columns) شمیرد A مساوی د B د لیکو (rows) سره وې. د ضرب عملیه په لاندی ډول تعریف شوی ده :

$$A=(a_{ij})\quad (i=1,2,3,\dots m \quad ; \quad j=1,2.3,\dots n)$$

$$B=(b_{ij})\quad (i=1,2,3,\dots n \quad ; \quad j=1,2.3,\dots k)$$

که A.B=C وې. د C عناصر (elements) په لاندی ډول لاسته راځی :

څرنګه چې $C\epsilon M(m\times k,\mathbb{R}\,)$ دی. یعنی m لیکی او K ستنی لری . پس کولای شو C په لاندی ډول ولیکو:

$$C=(c_{ij})\quad (i=1,2,3,\dots m \quad ; \quad j=1,2.3,\dots k)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix}$$

مثال 3.1 :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې $A \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ او $B \in M(2 \times 4, \mathbb{R})$ دی. پس باید $A.B = C \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ وي.

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{2} a_{1i}b_{i1} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} = 1.1 + 2.0 = 1$$

$$c_{12} = \sum_{i=1}^{2} a_{1i}b_{i2} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} = 1.2 + 2.1 = 4$$

په همدی ترتیب کولای شود C متریکس نورعناصرهم پیدا کړو

$$C_{13} = 3 + 4 = 7 \quad , \quad C_{14} = 0 + 6 = 6$$

$$C_{21} = 2.1 + 1.0 = 2 \quad , \quad C_{22} = 2.2 + 1.1 = 5$$

$$C_{23} = 2.3 + 2 = 8 \quad , \quad C_{24} = 2.0 + 1.3 = 3$$

$$C_{31} = 3 + 0 = 3 \quad , \quad C_{32} = 3.2 + 1.1 = 7$$

$$C_{33} = 3.3 + 1.2 = 11 \quad , \quad C_{34} = 3.0 + 1.3 = 3$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرین:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

که $A.B = C$ وي. د C متریکس پیدا کړی.

تمرین:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & o & 1 & o \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} o & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ایا A.B امکان لری

(b) *B.A* پیدا کړی

تمرین: ایا د $A, B \in M(n\,, \mathbb{R})$ لپاره دالاندي رابطي صدق کوي:

(a) $(A - B)^2 = (A + B).(A - B)$

(b) $(AB)^2 = A^2 \,.\, B^2$

تمرین :

$A \in M(2 \times 4, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times 5, \mathbb{R})$, $C \in M(m \times 3, \mathbb{R})$

m او n پیدا کړئ چې حاصل ضرب د A.(B.C) امکان ولری

مثال 3.2:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \;, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

که *X.A=B* وي. غواړو د *X* متریکس پیدا کړو

$$X.A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} & -2x_{11} + 2x_{12} \\ x_{21} + x_{22} & -2x_{21} + 2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 3 \qquad .2 \\ -2x_{11} + 2x_{12} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 3 \\ 0 + 4\, x_{12} &= 4 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_{12} = 1 \,,\, x_{11} = 2$

په همدې ډول کولای شو لاندی معادلي حل کړو

$x_{21} + x_{22} = -1$
$-2x_{21} + 2x_{22} = -6$
$\Longrightarrow x_{21} = 1 \ , \ x_{22} = -2$

د X متریکس لاندی شکل لري :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

تمرین3.1:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \ , A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$$

که $A.X = B$ وي. د X متریکس پیداکړئ

تعریف 3.3 : یومتریکس $E_n \in M(n \times n, \mathbb{R})$ د واحد متریکس (Unity Matrix) په نوم یادیږي. په دې شرط چې $a_{ij} = 1$ (که $i=j$ وي) او $a_{ij} = 0$ (که $i \neq j$ وي) .

د مثال په ډول $E_4 \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ لاندې شکل لری

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نوټ : که مونږ $A,B,C,A_1,A_2,B_1,B_2 \in M(n \times n, \mathbb{R})$, C ولرو. دالاندی قوانین پری صدق کوی:

$A.E_n = E_n.A = A$
$(A.B).C = A(B.C)$ (associativity)
$(A_1 + A_2).B = A_1.B + A_2.B$ (distributivity)
$A.(B_1 + B_2) = A.B_1 + A.B_2$

څرنګه چې دا خواصونه تریوی اندازی پوری وا ضع دی. پس ثبوت څخه یي صرف نظرکو.

نوټ : په عمومی صورت $A.B = B.A$ صدق نه کوې. دمثال په ډول:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A.B = $\begin{pmatrix} 1.2+2.2 & 1.(-2)+2.(-1 \\ 2.2+1.2 & 2.(-2)+1.(-1) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

B.A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

لیدل کیږی چې A.B ≠ B.A دی

تعریف 3.4 : یو متریکس $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ د Nonsingular په نوم یادیږی په دې شرط چې یو متریکس $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ موجود وی چې $A.B = E_n = B.A$ شی . یعنی A متریکس معکوس پذیر (invertible) وي. B ته معکوس (inverse) متریکس د A ویل کیږی اومونږهغه په A^{-1} سره ښیوو. یو متریکس چې معکوس ونه لری د singular په نوم یادیږی

تعریف 3.5:

GL(n,ℝ):= { A∈ $M(nxn, \mathbb{R})$ │ A Nonsingular }

نوټ: دیوه متریکس د معکوس پیداکولولپاره مختلفی طریقی موجودی دی

لمړی طریقه : معکوس متریکس پیداکول د واحد متریکس له لیاری

که مونږیومتریکس $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ولرو. دهغه دمعکوس دپیداکولولپاره د واحد متریکس E_n څخه‌استفااده کو. په دې طریقه کښی پردواړو متریکسو A او E_n باندی د مقدماتی عملیات څخه استفاده کیږي او ترهغوپوری دوام ورکوترڅود A متریکس په واحد متریکس تبدیل شی.

مثال 3.3: غواړودلاندی متریکس معکوس پیدا کړو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

څرنګه $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$,) دی. پس د معکوس متریکس دپیداکولو لپاره د واحد متریکس E_2 څخه استفاده کوو

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

ترهغه پوری د مقدماتی عملیاتوڅخه پر A او E_2 باندی کار اخلو ترڅو د A متریکس په واحد متریکس بدل شی

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \quad -3.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

پس $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ځکه:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\3+2(\frac{3}{2}) & 0+2\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = E_n$$

تمرین 3.2:

(a) دلاندی متریکس معکوس پیداکړی :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

(b) ولی لاندی متریکس معکوس نه لری:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{pmatrix}$$

<u>دویمه طریقه : د معکوس متریکس پیداکول د خطی معادلاتو د حل له لیاری</u>

$$A, B \in GL(2,\mathbb{R}) \ , A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad , \ B = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

که د A متریکس معکوس B وی. په دې صورت باید دالاندی حالت صدق وکړی:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

د B متریکس د پورتنی معادلاتودحل څخه لاسته راځی.که $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$
او $n > 2$ وی بیا هم داطریقه صدق کوی

مثال 3.3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

که د B متریکس معکوس د A وی. پس باید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{11} + 0. b_{21} = 1$$
$$b_{12} + 0. b_{22} = 0$$
$$3b_{11} + 2. b_{21} = 0$$
$$3b_{12} + 2. b_{22} = 1$$
$$b_{11} = 1$$
$$b_{12} = 0$$
$$3.1 + 2b_{21} = 0 \Longrightarrow b_{21} = -\frac{3}{2}$$
$$3.0 + 2b_{22} = 1 \Longrightarrow b_{22} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

تمرین 3.3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د *A* معکوس متریکس پیدا کړئ. دلته ددواړو طریقوڅخه استفاده وکړئ.

مونږ.اوس غواړود (G) خطی معادلاتی سیستم ضرایب دیوه متریکس په ډول ولیکو

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A \in M(mxn,\mathbb{R})$ دضرايبو متريکس د (G) د معادلاتی سیستم په نوم یادیږی . b_i (i=1,2,...,m) او x_i (i=1,2,…,n) هم کولای شود متریکس په ډول ولیکوو

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x \in M(nx1,\mathbb{R})$ او $b \in M(mx1,\mathbb{R})$

که مونږ A او x سره ضرب کړو. بیا دلاندي متریکس لاس ته راځی:

$$A.x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

که د A سره b په لاندی ډول علاوه شی :

$$(A,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

د (A,b) متریکس د Extended Cofficient Matrix (یعنی د ضرایبو توسعه شوی متریکس) په نوم یادیږی

مثال 3.4:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال 3.5 :

$$2x_2 + 4x_4 + 6x_5 + 5x_7 = 3$$
$$x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 1$$
$$3x_6 + x_7 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ , b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A,b)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

مونږولوستل چې دحل نتیجه دیو خطی معادلاتی سیستم دمقدماتی عملیاتوپرتطبیق تغیرنه کوي . همدا ډول کولای شو سطری مقدماتی عملیات پریو متریکس په لاندی ډول تعریف کړو:

(1) ضربول د یوی لیکی دیوعدد خلاف دصفرسره

(2) ضربول د یوی لیکی دیوعدد خلاف دصفرسره اوبیادا لیکه دیوی بلی لیکی سره جمع کول

(3) بدلول اویاتعویض د دو لیکو

دا ډول مقدماتی عملیات پر یومتریکس باندی د Elementary Transformation په نوم یادیږی. که (A,b) د یوخطی معادلاتی سیستم extended cofficient matrix وی اود $(\hat{A},\hat{b})$ متریکس پس د مقدماتی عملیاتو (3, 2, 1) له (A,b) **څخه** لاسته راغلی وې . په دی صورت $Ax = b$ او $\hat{A}x = \hat{b}$ مساوی حل لری.

تعریف 3.6 : یو متریکس $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ که لاندي شکل ولری د سطري ذينه يي متريكس (Row- Echelon Matrix) په نوم یادیږی.

$$A = \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \quad \dots \end{pmatrix}$$

يو ذينه يې متريکس لاندې خواص لري :

(1) هغه عناصرچې د ستورى (*) په ځاى دى بايد خلاف د صفر وي او هغه دا لاندی عناصردي

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

(2) ترذینی لاندی عناصر باید صفر وی.

(3) ذينی دپاسه عناصرکيداى شی صفر او يا خلاف دصفر وې.

مثال 3.6 :

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\
2x_1 + x_3 \ \ + x_4 &= 9 \\
6x_1 - x_2 + x_4 &= 8 \\
4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0.x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
2x_1 + 0.x_2 + x_3 + x_4 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\
6x_1 - x_2 + 0.\ x_3 + x_4 &= a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + a_{33}x_{43} \quad a_{34}x_4 \\
4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= a_{41}x_1 - a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4
\end{aligned}$$

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 6 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix}$$

لمړی مقدماتی عملیاتو څخه استفاده کوواود لمړی اودویمی لیکی ځایونه بدلوو.

$$(\hat{A},\ \hat{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 6 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې $a'_{11} = 2 \neq 0$ دی. پس لمړی لیکه د $-\frac{a'_{31}}{a'_{11}} = -\frac{6}{2} = -3$ سره ضربو او بیا ددریم لیکی سره جمع کو. اوس بیا لمړی لیکه د $-\frac{a'_{41}}{a'_{11}} = -\frac{4}{2} = -2$ سره ضربو او د څلورمي لیکی سره جمع کو .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -19 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

دلته دویمه لیکه د $-\frac{-1}{1} = 1$ سره ضربواوددریمی لیکی سره جمع کوو. بیا دویمه لیکه د $-\frac{1}{1} = -1$ سره ضربو او دڅلوریمی لیکی سره جمع کوو

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -16 \end{pmatrix}$$

اوس دریمه لیکه د -2 $= -\frac{-4}{-2}$ سره ضربواوبیا دڅلورمی لیکی سره جمع کوو .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

که هرڅومره د مقدماتی عملیاتوڅخه استفاده وکړو. بیا هم نشوکولای چې یو "1" په څلورمه لیکه کې په صفر تبدیل کړو. اوس کولای شو دپورتنی زینه یي متریکس له مخی معادلي په لاندی ډول حل کړو:

$$x_4 = 4$$

$$-2x_3 - x_4 = -10$$

$$\Rightarrow\ -2x_3 = -10 + x_4 = -10 + 4 = -6 \ \Longrightarrow\ \ x_3 = 3$$

$$x_2 = 9 - x_3 - x_4 = 9 - 3 - 4 = 2$$

$$2x_1 = 9 - x_3 - x_4 = 9 - 3 - 4 = 2 \ \Longrightarrow x_1 = {}^{2}/_{2} = 1$$

نوټ: په عمومی ډول کولای شو دیو خطی معادلاتی سیستم چې m معادلی او n مجهول ولری دحل امکانات په لاندی ډول و څیړو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

که دضرايبو متریکس یي پس له مقدماتی عملیاتو لاندي شکل ولری:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

د متریکس دورستی لیکی له مخی کولای شوچې دپورتنی معادلاتی سیستم دحل امکانات ولټو:

(i) که ټول $a_{mi} = 0$ (i=1,2,…,n) او $b_m \neq 0$ وی. په دې صورت دامعادلاتی سیستم حل نه لری

(ii) که په ورستی لیکه کی فقط یوازې $a_{mn} \neq 0$ وی. په دې صورت دامعادلاتی سیستم فقط یو حل لری

(iii) که ټول $a_{mi} = 0$ (i=1,2,…,n) اوهم $b_m = 0$ وی. په دې صورت دامعادلاتی سیستم ډیرزیات حل لري

(iv) که په ورستی لیکه کی اقلاْ دوه $a_{mi} \neq 0$ (i=1,2,…,n) موجود وی. په دی صورت دا معادلاتی سیستم پارامیتری حل لری

نوټ: دحقیقی اعدادویو پولینوم لاندی شکل لری:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

f(x) یو n درجه یی پولینوم دی ، چې n دلته یو طبعی عدد دی

مثال: یوه 2 درجه یی پولینوم د لاندې شرایطو سره پیداکړی:

$f(1) = 2$, $f(2) = 7$, $f(3) = 14$, ,

مونږ فرض کوو، چې ځمونږ پولینوم لاندی شکل لری:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

اوس د f راکړل شوي قیمتونه وضع کوو

$$f(1) = a.1 + b.1 + c = a + b + c = 2$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = 7$$
$$f(3) = 9a + 3b + c = 14$$

د پورتنیو معادلاتود ضرایبو متریکس په لاندی ډول دی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ , } (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

پر (A,b) د مقدماتی عملیاتو وروسته لاندی متریکس لاسته راځی :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c = -1 , -2b – 3c = -1 $\Longrightarrow$ -2b = -1 + 3c = - 4 $\Longrightarrow$ b = 2
a = 2 - b - c = 2 -2 + 1 = 1

پس د f پولونیم لاندی شکل لری :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

ولیدل شول چې د متریکس له لیاری کولای شو یو پولینوم پیداکړو. په دی شرط چې دنوموړی پولینوم ځینی قیمتونه راکړل شوي وي

تمرین: که یوه دریمه درجه f(x) پولینوم لاندی قیمتونه ولری. بیا f(x) پیداکړی
F(1) = 0 , f(-1) = -6 , f(2) = 6 , f(-2) = -18

تعریف 3.7: دا لاندی تابع د Transposed Matrix په نوم یادیږی :

$$t: M(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(nxm, \mathbb{R})$$
$$A \longrightarrow A^t$$

د A^t متریکس transpose matrix په نوم یادیږی

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad , A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad , B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

که $A, B \in M(m, n, \mathbb{R})$، $C \in M(n, k, \mathbb{R})$، $\lambda \in \mathbb{R}$ وي. بیا پر t باندی دا لاندی قوانین صدق کوي :

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

(c) $(A.C)^t = C^t . A^t$

(d) $(A^t)^t = A$

تعریف 3.8 :

(a) یو متریکس $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ د متناظر (symmetric) په نوم یادیږی، په دی شرط چې $A = A^t$ وي اوورته skew symmetric ویل کیږي ، که چیري $A = -A^t$ وي . A^t د A ترانسپوز (transpose) دی.

د مثال په ډول دا لاندي متریکس symmetric دی

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & 5 \end{pmatrix}$$

ځکه $A = A^t$ دی

(b) $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. که هر $a \in A$ په $\bar{a}$ تعویض شي او بیا هغه متریکس چې لاس ته راځي د A د complex conjugate په نوم یادیږي اومونږ هغه په $\bar{A}$ سره ښیو. د مثال په ډول

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ 3 & 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 3 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

مثال: د x قیمت پیداکړی ، په دې شرط چې دا لاندی متریکس متناظر (symmetric) وي

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \mathrm{x}+2 \\ 2\mathrm{x}-3 & \mathrm{x}+1 \end{pmatrix}$$

که متریکس A متناظروی ، باید $A = A^t$ وی. یعنی

$$\begin{pmatrix} 4 & \mathrm{x}+2 \\ 2\mathrm{x}-3 & \mathrm{x}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2\mathrm{x}-3 \\ \mathrm{x}+2 & \mathrm{x}+1 \end{pmatrix}$$

دوه متریکسه هغه وخت دیوبل سره مساوی دي ، چې ټول عناصریي دیوبل سره مساوی وي . یعنی:

$$\mathrm{x} + 2 = 2\mathrm{x} - 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 5$$

پس:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

لیدل کیږی چې A یو متناظر (symmetric)متریکس دی

تمرین 3.4: دالاندي متریکسونه راکړل شویدي

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ثبوت کړی چې A یو symmetric او B یو skew symmetric متریکس دی.

نوټ 3.1:

(*a*) ښی معکوس (right inverse) اوچپ معکوس *(left* inverse*)* دیوه متریکس سره مساوی دی ،ځکه که *L* چپ معکوس او *R* ښی معکوس د $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ وي. پس باید

$$L.A = E_n \quad \wedge \quad A.R = E_n$$

$$\Rightarrow \ L = L.E_n = L.(A.R) = (L.A).R = E_n.R = R$$

(b) که $\lambda \neq 0$ وی . د λ E_n معکوس متریکس λ^{-1} E_n دی. ځکه:

$$(E_n \lambda).(\lambda^{-1} E_n) = E_n \lambda\lambda^{-1} E_n = E_n . E_n = E_n$$

تعریف *3.9* : که $A \in M(nxn, \mathbb{R})$ متریکس لاندی شکل ولری:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(a) د $A'_{ik} \in M(n-1, n-1, \mathbb{R})$ متریکس په لاندی ډول تعریف شوی دی :

A'_{ik} له A څخه په دې ډول لاسته راځی ، چې د *i* کرښی(*row*) اود k ستنی(*colmn*) څخه د A په متریکس کې صرف نظروشی . د مثال په ډول

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A'_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(b) د $A_{ik} \in M(nxn\,,\mathbb{R})$ متریکس دا ډول تعریف شوی دی :

A_{ik} له A څخه په دې ډول لاسته راځی ، چې $a_{ik} = 1$ وې اومتباقی عناصر د *i* کرښی (*row*) اود *k* ستنی (*colmn*) صفروې . د مثال په ډول

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

تعریف 3.10: $\mathbb{K}$ یوه ساحه (field) ، چې مساوی د $\mathbb{R}$ ده. په لاندی تابع *(mapping)* کی انځور(تصویر) د یومتریکس د دیترمینانت (Determinant) په نوم یادیږی.

$$\det: M(nxn\,,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A \quad \longmapsto \quad \det A = \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \,.\, a_{ik} . \det A'_{ik}$$

پورتنی Determinant د i کرښی (row) له لیاری دی .

دالاندی Determinant د k ستنی (column) له لیاری دی .

$$\det: M(nxn\,,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A \quad \longmapsto \quad \det A = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \,.\, a_{ik} . \det A'_{ik}$$

نوت: مونږ په دی فصل کی د دیترمینانت دپیداکولولپاره د حقیقی اعدادوڅخه استفاده کوو. یعنی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

پورتنی طریقه د لاپلاس (Laplace) په نوم یادیږی اومونږ دلته د دیترمینانت دپیداکولولپاره دهمدی طریقی څخه استفاده کوو . ډیري نوری طریقی هم د دیترمینانت دپیداکولولپاره موجودی دی. دمثال په ډول د *Sarrus* طریقه اود *Leibniz* طریقه . دیو $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ متریکس دیترمینانت په لاندی ډول پیداکیږي:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies detB = ad - bc$$

مثال 3.7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 0 \quad , A'_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \det A'_{11} = 2.0 - (1.1) = -1$$

$$a_{12} = 1 \quad , A'_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \det A'_{12} = 3.0 - (1.1) = -1$$

$$a_{13} = 2 \quad , A'_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \det A'_{13} = 3.1 - (1.2) = 1$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{i+k} a_{ik} \, det \, A'_{ik} =$$

$$= \quad (-1)^2 . 0 . (-1) + (-1)^3 . 1 . (-1) + (-1)^4 . 2 . 1 = 3$$

اویا په لاندي ډول پیدا کوی شو:

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = o. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1).(3.0 - 1) + 2.(3.1 - 2.1)$$

$$= 0 + 1 + 2 = 3$$

پورتنی دیترمینانت دلمړی کرښی *(row)* له لیاری پیداشوی دی

اوس غواړو det A د دریمی ستنی (*colmn*) له لیاری پیدا کړو .

$$detA = 2. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(3.1 - 2.1) - 1.(0.1 - 1.1) + 1$$

$$= 2 + 1 = 3$$

لیدل کیږي چې د دیترمینانت دپیداکولو لپاره د Laplace ددواړوطریقوڅخه استفاده وشوه . مګربیاهم په دیترمینانت کې تغییر نه دی راغلی .

نوټ: د $det: M(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع په عمومی ډول لاندی خواص لری :

(D₁) که $A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ وی. دلته a_i $(i = 1,2,3, \dots)$ د *A* متریکس i کرښه ده

$$det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \vdots \\ a''_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

په دې شرط چې $a_i = a'_i + a''_i$ وی . او

$$det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda . det\begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

په دې شرط چې $\lambda \in \mathbb{R}$ او $a_i = \lambda a'_i$ وی

(D₂) $detA = 0$

په دې شرط چې A دوه مساوی کرښی (سطر) اویا دوه مساوی ستنی (ستون) ولري.

(D₃) $detE_n = 1$

E_n یو واحد متریکس دی.

(D₄) $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda . A) = \lambda^n . detA$$

(D₅) $detA = 0$

که چیری د A یوه کرښه اویا یوه ستنه (ستون) مساوی صفروې

(D₆) $detA = -detB$

که چیری B له A څخه ددوکرښو (*rows*) دځای د بدلولوپواسطه لاس ته راغلی وې

(D₇) که **د** A یوه کرښه دیوه خلاف دصفرعدد سره ضرب اوبیا دبلی کرښی سره جمع شی . په دی صورت $detA$ تغییرنکوی .

(D₈) که د A متریکس لاندی شکل ولری :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & . & . \\ . & \lambda_2 & . & . & . \\ 0 & 0 & \lambda_3. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{detA} = \lambda_1 . \lambda_2 \; . \dots . \lambda_n$$

دلته : $a_{ii} = \lambda_i$ دی .

(D₉) که د A متریکس لاندی شکل ولری او A_1 ، A_2 مربعی متریکس وې :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \mathrm{detA} = (\mathrm{detA}_1).(\mathrm{detA}_2)$$

$A, B \epsilon M(n \times n, \mathbb{R})$ **(D_{10})**

$$\det(A.B) = detA.detB$$

$A\epsilon\ GL(n, \mathbb{R})$ **(D_{11})**

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

$A \epsilon M(n \times n, \mathbb{R}$ **(D_{12})**

$$\det A = \det(A^t)$$

نوټ: د $A, B \epsilon M(n \times n, \mathbb{R})$ لپاره په عمومی صورت لاندی افاده صدق نکوی :

$$\det(A + B) = det\ A + detB$$

دمثال په ډول

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\ ,\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 4 - 0 = 4$, $\det B = 0 - 1 = -1$,

$\det(A+B) = 8 - 2 = 6$

$\det(A+B) = 6 \neq 3 = 4 - 1 = \det A + \det B$

مثال 3.8 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$= -1.1.3 = -3$ [له مخې D_8]

مثال 3.9: پدي مثال کی د دیترمنانت د پیداکولو لپاره د (D_9) خاصیت څخه استفاده کوو

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = \det A_1 \,.\, \det A_2 = 3.1 = 3$

د (D_9) خاصیت د دیترمنانت د پیداکولو لپاره هغه وخت ګټور دی چې متریکس ډیرزیات عناصرولري

تمرین : د لاندي متریکس دیترمینانت پیداکړی

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

نوټ 3.2:

(a)

$A,B \in GL(n, \mathbb{R}) \implies A.B \in GL(n, \mathbb{R})$

یعنی که A,B معکوس متریکس ولري. په دې صورت $A.B$ هم معکوس متریکس لري. ځکه:

$$B^{-1}.A^{-1}(A.B) = B^{-1}(A^{-1}.A).B = B^{-1}(E_n).B = E_n$$

لیدل کیږي چې $B^{-1}.A^{-1}$ معکوس د $A.B$ دی. یعنی $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

(b) که $S \in GL(n, \mathbb{R})$ وی. بیا $S^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$ او $(S^{-1})^{-1} = S$

(c)

$$A \in GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A^t \in GL(n, \mathbb{R})$$

ځکه:

$$A.A^{-1} = E_n \implies (A.A^{-1})^t = (E_n)^t = E_n$$
$$\implies (A.A^{-1})^t = (A^{-1})^t \,.\, A^t = E_n$$

ولیدل شوه چې $(A^{-1})^t$ معکوس د A^t دی. یعنی $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

(d) هر $A \in GL(n,\mathbb{R})$ فقط یوازې یو معکوس متریکس لرې.

ثبوت: که چیرې B او C د A معکوس متریکسونه وي، بیا:

$A.B = E_n = B.A \quad \wedge \quad A.C = E_n = C.A$

$B = B.E_n = B.(A.C) = (B.A).C = E_n . C = C$

(e)

$A \in GL(n,\mathbb{R})$,$0 \neq c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c.A \in GL(n,\mathbb{R}) \wedge (cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$c := 3$

$3.A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$, $\det(3.A) = 18$

$(3.A)^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}.A^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

ولیدل شو چې:

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$$

نوټ: $A = (a_{ij}) \in M(nxn, \mathbb{R})$ او A'_{ij} په 3.9 تعریف کی تشریح شوی متریکس دی. $\det A'_{ij}$ ته د a_{ij} عنصر minor وایې او هغه په M_{ij} ښیو.

یعني $\det A'_{ij} = M_{ij}$

$C_{ij} := (-1)^{i+j} .M_{ij} = (-1)^{i+j} . \det A'_{ij}$

C_{ij} د a_{ij} د cofactor په نوم یادیږي. minor او cofactor مساوي دي، که $i+j$ جفت عدد وي. مونږ لاندي متریکس لرو:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

د A کوفکتورمتریکس (cof*a*ctor matrix) د پورتنیوتعریفوله مخې په لاندي شکل دی:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A'_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij} = (-1)^{i+j}\ C_{ij}$$

C^t ته adjugate matrix او یا adjoint matrix ویل کیږي.

نوټ: په ځینوکتابوکې د cof*a*ctor په ځای د adjunct کلیمه هم استعمالیږي

مثال 3.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \det A'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad M_{21} = \det A'_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$M_{12} = \det A'_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{22} = \det A'_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$M_{13} = \det A'_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad M_{23} = \det A'_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$M_{31} = \det A'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad M_{32} = \det A'_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$M_{33} = \det A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

ماینور (minors) مو پیدا کړل اوس غواړو د cof*a*ctor متریکس پیدا کړو.

$c_{11} = (-1)^{1+1} .M_{11}= 1.\ 1 = 1$

$c_{12} = (-1)^{1+2} .M_{12} = -1.(-1) = 1$

$c_{13} = -2$, $c_{21} = -2$, $c_{22} = 1$,

$c_{23} = 4$, $c_{31} = 2$, $c_{32} = 1$, $c_{33} = -1$

په نتیجه کې د cof*a*ctor متریکس لاندي شکل لري:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>دمعکوس دریمه طریقه :</u>

دلته لمړی د $A \in GL(n, \mathbb{R})$ متریکس څخه یوcof*a*ctor متریکس $C =$ $(c_{ij}) \in M(nxn, \mathbb{R})$ په لاندی ډول لاسته راوړو:

$$c_{ij} := (-1)^{i+j} detA'_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A'_{ij} په 3.9 تعریف کی تشریح شوی دی . معکوس د A له C څخه په لاندی ډول لاسته راځی:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} . C^t$$

مونږ. پوهیږوهرما تریکس چې معکوس ولری، دهغه دیترمینانت خلاف دصفردی

مثال 3.11:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مونږ فرض کوو چې $detA \neq 0$ دی اوغواړو د *A* معکوس پیداکړو

$$detA = ad - bc$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} . detA'_{11} = 1.d = d$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} . detA'_{12} = -1.c = -c$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} . detA'_{21} = -1.b = -b$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} . detA'_{22} = 1.a = a$$

$$C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} , \quad C^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA} . C^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

تمرین : ثبوت کړی چې پورتنی A^{-1} ماترکیس د A معکوس دی.

مثال: 3.12 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1.2 - 3.0 = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

که چیری A^{-1} متریکس د A معکوس وي. په دې صورت کولای شوچې A^{-1} په لاندی ډول پیدا کړو:

$$c_{ij} \coloneqq (-1)^{i+j} detA'_{ij} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{detA} \,.\, C^t$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}.\,detA'_{11} = 1.2 = 2$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2}.\,detA'_{12} = -1.3 = -3$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1}.\,detA'_{21} = -1.0 = 0$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2}.\,detA'_{22} = 1.1 = 1$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\,C^t = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

د امتحان لپاره

$$A.\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3 - \frac{2.3}{2} & \frac{2.1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نوټ : دیو $A \in M(nxn, \mathbb{R})$ متریکس لپاره لاندی افاده صدق کوی :

$$detA \neq 0 \iff \exists\, A^{-1} \in M(nxn, \mathbb{R}); A \,.\, A^{-1} = E_n$$

مثال 3.13: قادری دخپل کورنی سره باغ وحش ته تللی وه. کوچنیانود سرویس کرایه *6* افغانی اودلویانو *8* افغانی وه. قادری ټولی 34 افغانی کرایه ورکړه . دکور په لور د کوچنیانوکرایه 8 افغانی اود لویانو 10 افغانی وه . داواردقادری کورنی 44 افغانی د سرویس کرایه ورکړه . د کوچنیانو اود لویانوشمیرمعلوم کړی

حل: دکوچنیانوشمیر $=: x_1$, دلویانوشمیر $=: x_2$

$$X = (\,x_1 \;\; x_2\,)\;,\; A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}\;,\; B = (\,34 \;\; 44\,)$$

$$\det A = 6 \cdot 10 - (8 \cdot 8) = 60 - 64 = -4 \neq 0$$

څرنګه چې $\det A \neq 0$ دی. پس A یو معکوس متریکس A^{-1} لری . نظر 3.7 مثال ته کولای شوچې معکوس د A په اسانی سره پیداکړو

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

x_1 او x_2 په لاندی ډول لاس ته راځی :

$$X \cdot A = B \;\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\Rightarrow\; X \cdot E_2 = B \cdot A^{-1}$$
$$\Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$(\,x_1 \;\; x_2\,) = (34 \;\; 44) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \left(\,34 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 44 \cdot 2 \qquad 34 \cdot 2 + 44 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\,\right)$$
$$= \left(\,-\frac{170}{2} - \frac{88}{1} \qquad 68 - \frac{132}{2}\,\right) = \left(\,\frac{-170+176}{2} \qquad \frac{136-132}{2}\,\right)$$
$$= (\,3 \quad 2\,)$$

پیدا موکړه چې 3 کوچنیان او 2 لویان دي

تمرین 3.5: یومالداریومعین شمیراوزی اومیږي لری . هری اوزی د حمل په میاشت کی 5 لیتره شدي اوهري میږی 8 لیتره شدي ورکړی. چې ټولي 148 لیتره شدی شوي . مګرد ثورپه میاشت کی هری اوزی 8 لیتره شدی اوهری میږی 10 لیتره شدی ورکړی. چې ټولي 220 لیتره شدی په ثورکی شوي . د متریکس له لیاری معلوم کړی چې مالدارڅو اوزی او څومیږی لري

مثال 3.14: لاندي متریکس لرو

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p & 3 & 1 \\ 0 & 2 & p \end{pmatrix}$$

غواړوپیدا کړوچي د p کوم قیمت لپاره د A متریکس معکوس پذیر دی (invertible)

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{p} & 3 & 1 \\ 0 & 2 & \mathrm{p} \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \mathrm{p} \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} \mathrm{p} & 1 \\ 0 & \mathrm{p} \end{vmatrix}$$

$= (3p - 2) - p^2$

A هغه وخت معکوس متریکس لری چې $detA \neq 0$ وی

$(3p - 2) - p^2 = 0 \Rightarrow p^2 - 3p + 2 = 0$

$\Rightarrow (p - 1).(p - 2) = 0$

د A دیترمینانت هغه وخت صفرکیږی چې $p = 1$ اویا $p = 2$ وی . پس A هغه وخت معکوس متریکس لری چې $p \neq 1$ او $p \neq 2$ وي

تمرین: که په پورتنی مثال کی $p = 0$ وی. په دی صورت د A معکوس متریکس پیداکړی

تمرین 3.6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2c & -4 \end{pmatrix}$$

د c کوم قیمت لپاره د A متریکس معکوس (inverse) لري

تعریف 3.11: $A \in GL(n, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} هغه متریکس دی چې په 3.9 کی تعریف شویدی. لاندي متریکس د Adjunkte-matrix په نوم یادیږی

$$A^{ad} := (a_{ij}^{ad}) = \begin{pmatrix} detA_{11} & \cdots & detA_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ detA_{1n} & \cdots & detA_{nn} \end{pmatrix}$$

یعنی A^{ad} متریکس د $\det(A_{ji})$ $(i,j=1,2,...,n)$ څخه لاس ته راځی

مثال 3.15:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A_{11} = 4$

$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A_{12} = -1$

$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A_{12} = -3$

$A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A_{22} = 2$

دهغه adjunkte-matrix لاندی شکل لري

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

څلورمه طریقه : دلته د معکوس متریکس دپیدا کولولپاره د adjunkte-matrix څخه استفاده کیږی . یعنی که $A \in GL(n, \mathbb{R})$ وی. د A معکوس په لاندی ډول لاسته راځی :

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^{ad}$$

مثال 3.15:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} , \ detA = 2.4 - 1.3 = 5$$

په پورتنی مثال کی موولیدل چې

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\,\mathrm{A}^{ad} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

نوټ: که مونږد معکوس متریکس پیداکولولپاره دریمه اوڅلورمه طریقه په دقت سره مطالعه کړو. لیدل کیږی چې دواړه طریقی مشابه دی. په ځینوکتابوکی د معکوس متریکس پیداکولوله پاره له همدی طریقی څخه استفاده کیږی

تمرین 3.7:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د A معکوس پیدا کړی اوپیداکولو لپاره ددریمي او څلورمه طریقي څخه استفاده وکړی.

نوټ: Cramer طریقه : له دی طریقي څخه د خطی معادلاتی سیستم د حل لپاره استفاده کیږي. په دی شرط چی :

(i) د ضرایبومتریکس یی مربعی وي

(ii) د ضرایبومتریکس دیترمینات خلاف د صفروي

که مونږ لاندی خطی معادلاتی سیستم ولرو:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

د هغه د ضرایبو متریکس :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad , x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

دا معادلات هغه وخت د Cramer له لیاری حل کیدای شی چي $detA \neq 0$ وي. مونږ د *A* متریکس ستني (ستون) په $a^1, a^2, a^3, \dots, a^n$ سره ښيو. Cramer د معادلاتود حل لپاره د لاندي فورمول څخه استفاده کوي :

$$x_i = \frac{\det(a^1 \ a^2 \dots \ a^{i-1} \ b \quad a^{i+1} \dots \ a^n)}{\det A}$$

مثال 3.16 :

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$detA = 1(1.1 - 1.2) - 1(0.1 - 3.1) + 0(0.2 - 1.3)$$
$$= -1 + 3 = 2 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(1(1-2) - 1.(1-0) + 0) = \frac{1}{2}(-2) = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} . (1.(1-0) - 1.(0-3) + \ 0)$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} . (1(0-2) - 1.(0-3) + 1.(0-3))$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + 3 - 3) = -1$$

تمرین 3.8 : د لاندی معادلاتود حل لپاره د کریمر (Cramer) له طریقی څخه استفاده وکړی.

(a)

$$2x_1 + 3x_2 = 10$$
$$x_1 + 4x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

(b)

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 \qquad + 2x_3 = 9$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

څلورم فصل
وکتوری فضا
(Vector space)

تعریف 4.1 : $\mathbb{K}$ یوه ساحه (Field) ده . د V سیټ د وکتوری فضا په نوم نظر $\mathbb{K}$ ته یادیږی په دی شرط چې پرې لاندی دوه عملی تعریف شوی وي:

$$+: V \times V \to V$$
$$(u, v) \longmapsto u + v$$
$$\cdot : \quad \mathbb{K} \times V \to V$$
$$(\tau, v) \longmapsto \tau v$$

او V نظردي دو رابطو (عملیو) له مخی لاندي خواص ولري:

(v_1) : $(V, +)$ یو تبدیلی ګروپ (commutative group) وي. عینیت عنصریې د صفروکتورد ی چې مونږ هغه په " 0 " ښیواو معکوس عنصر (inverse element) د v په $-v$ سره ښیو.

(v_2) : د $v\ ,\ v_1, v_2 \in V$ او $\tau\ , \tau_1, \tau_2 \in K$ لپاره باید دا لاندي افادي صدق وکړي:

(i) $(\tau_1 + \tau_2)v = \tau_1 v + \tau_2 v$)

(ii) $\tau(v_1 + v_2) = \tau v_1 + \tau v_2$

(iii) $\tau_1(\tau_2 v) = (\tau_1 \tau_2)v$

(iv) $1. v = v$

مونږ یو وکتوری فضا V نظر د $\mathbb{K}$ ساحی ته په $(V, \mathbb{K})$ سره ښیو.

تعریف 4.2 : د یوي $\mathbb{K}$ ساحی لپاره مونږ د V سیټ دا ډول تعریف کوو:

$$V := \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} = \mathbb{K}^n$$

پر V باندی د " + " عملیه (Operation) په لاندی شکل تعریف شوی ده:

$$x, y \in V \ ,\ \lambda \in \mathbb{K}$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$
$$x + y = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n)$$

$\mathbb{K}^n$ نظر $\mathbb{K}$ ته یوه وکتوری فضا ده.

که $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ وي بيا $\mathbb{R}^n$ يوه وکتوری فضا نظر حقيقی اعدادوته ده. د $(\mathbb{R}^n ,+)$ عينيت عنصر $(0,0,0,\dots,0) = 0$ او $-x$ د x معکوس وکتوردی . يعنی:

$$-x = -(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$$

نوټ: مونږ دلته پس له دی د عموميت څخه تيرېږو او فقط د حقيقی اعدادو ساحه (Field) په نظرکی نيسو. يعنی $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ دی

مثال 4.1 :

(a) $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ دوه وکتوری فضا دی اود Map(V,W) سيټ په لاندی ډول تعريف شوی دی:

$$\text{Map}(V,W) := \{f \mid f : V \to W\}$$

پر $M := \text{Map}(V,W)$ کولای شو لاندی دوه عملي تعريف کړو:

$$+ : M \times M \to M$$
$$(f, g) \mapsto f + g$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times M \to M$$
$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

دلته :

$$\forall x \in V \ , \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\wedge$$

$$(\lambda, f)(x) = \lambda f(x)$$

$(M, \mathbb{K})$ يوه وکتوری فضا ده. ځکه $(M, +)$ يو تبديلي ګروپ دی چې عينيت عنصر يي د صفرتابع ده (يعنی $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ $f(x) = 0$) او $-f$ معکوس د f ده. همدارنګه د وکتوری فضا نورخصواص هم قابل تطبيق دي.

(b)

$$V := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}, a_i \in \mathbb{R} \}$$

V دهغوټولو پولينومو سيټ دی چې درجه يی کوچنی اويامساوی د n-1 وي په اسانی سره ثبوت کولای شو چې $(V, \mathbb{R})$ نظرپورتنی عملياتو چې په (a) کې تشريح شوي ، يوه وکتوري فضا ده.

نوټ 4.1 : په یوه $(V, \mathbb{K})$ وکتوری فضا کی لاندي افاده صدق کوي:

$0_v \,, v \in V \;,\; 0, \tau \in \mathbb{K}$

a) $0 \,.\, v = 0_v$

b) $\tau \,.\, 0_v = 0_v$

c) $\tau \,.\, v = 0_v \quad \Longrightarrow \quad \tau = 0 \quad \vee \quad v = 0_v$

d) $(-1).\, v = -\, v$

(a) **ثبوت:**

$$0 \,.\, v = (0+0).\, v = 0.\, v + 0.\, v \Longrightarrow 0.\, v = 0_v$$

(b) **ثبوت:**

$$\tau \,.\, 0_v = \tau(0_v + 0_v) = \tau.\, 0_v + \tau.\, 0_v \Longrightarrow \tau.\, 0_v = 0_v$$

(c) **ثبوت :**

که $\tau = 0$ وي ثبوت واضح دی. که $\tau \neq 0$ وی.بیا:

$$v = 1.\, v = (\tau.\, \tau^{-1}).\, v = \tau^{-1}(\tau.\, v) = \tau^{-1}.\, 0_v$$
$$= 0_v \quad [\text{ (b) له مخې }]$$

(d) ثبوت:

$$v + (-1)v = 1.\, v + (-1).\, v = (1-1).\, v$$
$$= 0.\, v = 0_v$$
$$\Longrightarrow (-1).\, v = -v$$

تمرین 4.1 : $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ یو Interval دی.

که $\{ f: I \to \mathbb{R} \,|\, f \; continue(\text{ متمادی }) \} =: C(I, \mathbb{R})$ وي. بیا ثبوت کړی چې $(C(I, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ نظرهغه عملیاتوچې په 4.1 مثال کی تعریف شوي دي ، یوه وکتوری فضا ده

تعریف 4.3 : $(V, \mathbb{K})$ یو وکتوری فضا او $W \subseteq V$. که W لاندي خواص ولري. هغه ته بیا د V فرعی فضا (Subspace) ویل کیږي.

$(uv_1) \qquad W \neq \emptyset$

$(uv_2) \qquad u, w \in W \quad \Longrightarrow \quad u + w \in W$

$(uv_3) \qquad u \in W \;,\; \tau \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \tau.\, u \in W$

قضیه 4.1 :$(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او W دهغه فرعی فضا ده. بیا W پخپله یوه وکتوری فضا ده.

ثبوت: څرنګه V اتحادی ، تبادلوی اود (v_2) خواص نظر " + " ته لري. پس دا پر W هم قابل د تطبیق دي.

$W \neq 0 \implies \exists v \in W \implies 0_v = 0.v \in W$ [د (uv_3) له مخې]
$v \in W \implies -1.v \in W$ [د (uv_3) له مخې]

له بلي خوا

$\implies -v = -1.v \in W$ [د 4.1 نوټ له مخې]

پس (W,+) یو تبدیلي گروپ او په نتیجه کی $(W, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده.

مثال 4.2 :

(a) $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \ x_2 = x_3\}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده.

حل:

$$0 = (0,0,0) \in W \implies W \neq \emptyset \implies (uv_1)$$
$$u = (u_1, u_2, u_3) \ , \ w = (w_1, w_2, w_3) \in W$$
$$\implies u + w = (u_1 + w_1 \ , u_2 + w_2 \ , u_3 + w_3)$$

څرنگه چې $u \ , w \ \in W$ دي. پس

$$u_2 = u_3 \ \wedge \ w_2 = w_3 \implies u_2 + w_2 = u_3 + w_3$$
$$\implies u + w \ \in W$$
$$\lambda \in \mathbb{R} \ , u \in W \implies \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

څرنگه چي $u_2 = u_3$ دی پس باید $\lambda u_2 = \lambda u_3$ وي . پس $\lambda u \in W$ او په نتیجه کی W یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده .

(b) ایا $W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x_1 \geq x_2\}$ یوه فرعي فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې ده

حل:

$$0 = (0,0) \in W \implies W \neq \emptyset \implies (uv_1)$$
$$u = (u_1, u_2) \ , \ w = (w_1, w_2) \in W$$
$$\implies u + w = (u_1 + w_1 \ , u_2 + w_2)$$

څرنگه چې $u \ , w \ \in W$ دی. پس

$$u_1 \geq u_2 \ \wedge \ w_1 \geq w_2 \implies u_1 + w_1 \geq u_2 + w_2$$
$$\implies u + w \ \in W$$
$$\lambda \in \mathbb{R} \ , u \in W \implies \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2)$$

که $\lambda = -1$ وي. بیا

$u_1 \geq u_2 \implies (-1).\, u_1 \leq (-1).u_2 \implies \lambda u \notin W$

په نتیجه کی W فرعی فضا په $\mathbb{R}^2$ کې نه ده .

مثال:

$$H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 3x_2 = 0\}$$

H یوه فرعي فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې ده

حل:

$2.0 + 3.0 = 0 \implies (0,0) \in H \quad \implies \quad H \neq \emptyset \quad \implies (uv_1)$

$u = (u_1, u_2)\ ,\ w = (w_1, w_2) \in H$

$\implies 2.u_1 + 3u_2 = 0 \ \wedge\ 2.w_1 + 3w_2 = 0$

$\implies 2.(u_1 + w_1) + 3.(u_2 + w_2) = 0$

$\implies u + v \in H$

$\lambda \in \mathbb{R}\ , u \in H \implies \lambda.(2.u_1 + 3u_2) = 0 \implies \lambda.u \in H$

ثبوت شو چې H یوه فرعي فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې ده

مثال : دالاندي سیټ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې نه ده.

$$W := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ (x_1)^2 = (x_3)^2\right\}$$

ځکه:

$u = (2,1,-2)\ ,\ w = (-3,1,-3) \in \mathbb{R}^3$

$2^2 = (-2)^2 \ \wedge\ (-3)^2 = (-3)^2$

$\implies u, w \in W$

$u + w = (2-3, 1+1, -2-3) = (-1, 2, -6)$

$(-1)^2 \neq (-3)^2 \implies u + w \notin W$

وښودل شو چې W فرعی فضا په $\mathbb{R}^3$ کې نه ده.

تمرین 4.2 :

(a) ثبوت کړئ چې $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = 2x_3\}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده .

(b) ثبوت کړئ چې $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 = x_2 = x_3\}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده .

(c) ثبوت کړئ چې ولی $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 = 1\}$ یوه

فرعی فضا په ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$) کې نه ده.

(d)

$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \; x_2 = x_3\}$

$H := \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+3x_2+2x_4=0 \, , 2x_1+x_2+x_3=0\}$

ثبوت کړئ چې W فرعی فضا په ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$) کې او H فرعی فضا په ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}$) کې ده

تمرین 4.3 : ایا $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq x_2\}$ یوه فرعی فضا په $\mathbb{R}^3$ کی ده

تمرین 4.4 : که په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی $v \in \mathbb{R}^2$ او $v \neq 0$ ولرو. ثبوت کړئ چې

$H = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې ده .

تمرین 4.5 :

(a) آیا $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 \leq \; x_3 \}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کی ده

(b) آیا $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \; x_1 \geq 0 \quad \wedge \quad x_2 \geq 0\}$ یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کی ده

(c)

$H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 5x_1 + 3x_2 = 0\}$

ثبوت کړئ چې H یوه فرعي فضا په ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$) کې ده

تمرین 4.6 :

(a) $w = (2,3,4) \in \mathbb{R}^3$ او $H_w := \{ \lambda . w \, | \lambda \in \mathbb{R} \}$

ثبوت کړئ چې H_w یوه فرعی فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده .

(b) مونږ(V, $\mathbb{K}$) وکتوری فصا لرو. $0 \neq \; w \; \in \; V$,

$H_w := \{ \lambda . w \, | \lambda \in \mathbb{K} \}$. ثبوت کړئ چې H_w یوه فرعی فضا په (V, $\mathbb{K}$) کی ده .

لیما 4.1: $(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا او $I = \{1,2,3, \ldots, n\}$ دی . که $W_i \; (i \in I \;)$ فرعی فضا په V کې وي . بیا تقاطع $W_i \; (i \in I \;)$ هم فرعی فضا په V کې ده . یعنی که $W \; := \bigcap_{i \in I} W_i \subseteq V$ وي . بیا W هم یوه فرعی فضا په V کې ده.

ثبوت:

$0 \in W_i \ (\forall i \in I) \Rightarrow 0 \in W \ \Rightarrow \ W \neq 0 \ \Rightarrow \ (uv_1)$
$u, v \in W \ \Rightarrow \ u, v \in W_i \ (\forall i \in I)$
$\Rightarrow u + v \in W_i (\forall i \in I) \Rightarrow u + v \in W \Rightarrow (uv_2)$
$\lambda \in \mathbb{R} \ , u \in W \Rightarrow u \in W_i \ (\forall i \in I)$
$\Rightarrow \lambda u \in W_i \ (\forall i \in I) \Rightarrow \lambda u \in W \ \Rightarrow \ (uv_3)$

نوټ: مګر اتحاد د فرعي فضاوپه عمومي صورت فرعي فضا نه ده.

$H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ 2x_1 + 3x_2 = 0\}$
$W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ 5x_1 + 3x_2 = 0\}$

H او W فرعي فضاوي په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې دي. مګر W∪H فرعي فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې نه ده. ځکه:

(3,-2) ∈ H , (-3,5) ∈W
⟹ (3,-2) , (-3,5) ∈ W∪H
(3,-2) + (-3,5) = (0,3)
(0,3) $\notin H$ ∧ (0,3) $\notin W \Rightarrow$ (0,3) ∉ W∪H

وښودل شو چې W∪H فرعي فضا په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ کې نه ده

ليما 4.2: (V, 𝕂) يوه وکتوری فضا ده او $\emptyset \neq H \subseteq V$. بيا :
H يوه فرعی فضا په V کی ده

$\forall u, v \in H; \ \lambda u + \mu v \ \in H \ (\forall \lambda \ , \mu \ \in \mathbb{K}) \ \Leftrightarrow$

ثبوت :

„ ⟸ "

$u, v \in H, \lambda \ , \mu \ \in \mathbb{K} \ \Rightarrow \ \lambda u, \mu v \ \in H$
$\Rightarrow \lambda u + \mu v \ \in H$ [ځکه H فرعی فضا ده]

" ⟹ "

$\lambda \ , \mu \ \in \mathbb{K}, \ u, v \in H \quad \Rightarrow \lambda u + \mu v \ \in H$

که μ =0 وضع شي. په دی صورت

$\lambda . u + 0 . v \ \in H \Rightarrow \ \lambda . u \in H$

که μ = λ = 1 وضع شي. په دې صورت

$1\,.u + 1.v \in H \Rightarrow u + v \in H$

ثبوت شو چې $\boldsymbol{H}$ یوه فرعی فضا په V کې ده

لیما 4.3 : W او W' دوه فرعی فضاوې په $(V, \mathbb{K})$ کې دي. که $W \cup W'$ هم یوه فرعی فضا په V کې وي. بیا $W' \subseteq W \quad \vee \quad W \subseteq W'$

ثبوت : مونږ فرض کووچې $W \nsubseteq W'$ دی. باید ثبوت شي چې $W' \subseteq W$ دی.

$W \nsubseteq W' \Rightarrow \exists\ w \in W \quad \wedge \quad w \notin W'$
$w' \in W' \quad \Rightarrow \quad w, w' \in W \cup W'$
$\Rightarrow w + w' \in W \cup W'$ [ځکه $W \cup W'$ فرعی فضا]

مګر $w + w' \notin W'$. ځکه که هغسی نه وي . پس

$w + w' \in W'$
$\Rightarrow \quad w = w + w' - w' \in W'$ [د (uv_2) له مخی]

مګر $w \notin W'$ وه پس باید $w + w' \notin W'$ باشد

$\Rightarrow w + w' \in W \cup W' \quad w + w' \notin W'$
$\Rightarrow w + w' \in W$
$\Rightarrow \quad w' = w + w' - w \in W \quad \Rightarrow \quad W' \subseteq W$

تعریف 4.4 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده . $I = \{1,2,3, \dots, r\}$ او $v_i \ (i \in I)$ وکتورونه په V کی دي . یو وکتور $v \in V$ ته د $v_1, v_2, v_3, \dots\dots, v_r$ وکتورو خطی ترکیب (Linear Combination) ویل کیږی په دې شرط $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots\dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ موجودی چې :

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

تعریف 4.5: یوه وکتوری فضا ده. $I = \{1,2,3, \dots, r\}$ او $v_i \ (i \in I)$ یوفامیل د وکتورو په V کی دی. سیت د ټولوهغو وکتورو په V کی چې د خطی ترکیب (Lin – Comb) په شکل د $(v_i)\ i \in I$ لیکل کیدای شي د مولد (generating by $(v_i)\ i \in I$ یا Span) په نوم یادیږي. یعنی

$$span_{\mathbb{K}}\big((v_i)\ i \in I\big) := \{v \in V | \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} ;$$
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r \}$$

که معلومه وي چې هدف کومه ساحه (Field) ده بیا کولای شود $span_{\mathbb{K}}$ په ځای فقط $span$ ولیکو.

لیما 4.4 : $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده. $I=\{1,2,3,\dots,r\}$ او $v_{i\in I}$ یو فامیل د وکتورو په V کې دی. بیا :

(1) Span(v_i) یوه فرعی فضا په V کې ده

(2) که $W\subseteq V$ یوه فرعی فضا په V کې او $v_i\in W$ ($\forall i\in I$) وي. په دی صورت $span(v_i)\subset W$.

(1) **ثبوت :** مونږ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dots=\lambda_r=0$ وضع کو

$$0=0v_1+0v_2+0v_3+\dots+0v_r$$
$$\Longrightarrow\quad 0\in span(v_i)\Longrightarrow span(v_i)\neq\emptyset\Longrightarrow (uv_1)$$
$$u,v\in span(v_i)\ \Longrightarrow\ \exists\ \lambda_i,\mu_i\in\mathbb{K}\ \ (i=(\,1,2,3,\dots,r)\ ,$$
$$v=\ \lambda_1v_1+\ \lambda_2v_2+\ \lambda_3v_3+\dots+\ \lambda_rv_r\ ,$$
$$u=\ \mu_1v_1+\ \mu_2v_2+\ \mu_3v_3+\dots+\ \mu_rv_r$$
$$u+v=\sum_{i=1}^{r}((\lambda_iv_i)+(\mu_iv_i))=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i+\mu_i)v_i$$
$$\Longrightarrow u+v\in span(v_i)\ \Longrightarrow (uv_2)$$
$$a\in\mathbb{K}\ ,\ \ u\in span(v_i)$$
$$\Longrightarrow\ \exists\ \lambda_i\in\mathbb{K}\ \ (\forall i\in I)\ ;\ u=\lambda_1v_1+\ \lambda_2v_2+\dots+\ \lambda_rv_r$$
$$\Longrightarrow au=(a\lambda_1)v_1+(a\,\lambda_2)v_2+\dots+(a\ \ \lambda_r)v_r$$
$$\Longrightarrow a.u\in span(v_i)\ \Longrightarrow (uv_3)$$

(2) ثبوت:

$$u\in span(v_i)$$
$$\Longrightarrow\ \exists\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\dots,\ \lambda_r\in\mathbb{K}\ ;$$
$$u=\ \lambda_1v_1+\lambda_2v_2\ +\dots+\ \lambda_rv_r$$

خرنګه چې $(\forall i\in I)$ $v_i\in W$ دی. پس $u\in W$ هم دی . په نتیجه کی $span(v_i)\subset W$

د لیما 4.4 څخه نتیجه اخلو چې $span(v_i)$ ترټولو کوچنی فرعی فضا په V کی ده چې ټول v_i په کی شامل دي (یا د هغه عناصردي).

مثال 4.3 : د ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$) په وکتوری فضا کې لاندي وکتورونه $span$ د $\mathbb{R}^n$ دي.

$$i=(1,2,3,\dots,n)\quad e_i=(0,0,0,\dots,0,1,0,0,0,\dots,0)$$

د e_i په وکتورکی یو "1„ د i په مختصه کی واقع دی . که $I = (1,2,3, \dots, n)$
وي په دی صورت $span(e_i)_{(i\in I)} = \mathbb{R}^n$

که $n = 2$ وي په دی صورت $e_1 = (1,0)$ او $e_2 = (0,1)$ دی

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1(1,0) + x_2(0,1) = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2) = x$$

پس لهذا کولای شو هر $x \in \mathbb{R}^2$ د e_i $(i = 1,2)$ وکتورو د خطی ترکیب (lin-comb) شکل ولیکو. یعنی

$$span(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$$

تعریف 4.6: $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده . $v_1, v_2, \dots, v_r$ وکتوروته په V کې خطی وابسته (Linearly dependent) ویل کیږي ، په دې شرط چې $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ اعداد (ټول صفر نه دي) موجود وي او لاندی رابطه صدق کړي:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

اویا داچې $v_1, v_2, \dots, v_r$ وکتورونه ته خطي وابسته ویل کیږي . که چیري لاندي افاده صدق وکړي:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$
$$\Longrightarrow \exists\ i \in \{1,2, \dots, r\};\ \lambda_i \neq 0$$

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_r$ وکتوروته خطی مستقل (Linearly independent) ویل کیږي. په دی شرط چې لاندی افاده صدق وکړي:

$$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\ \mathbb{K}\ ;\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \dots + \lambda_r v_r = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_r = 0$$

اویا داچې $v_1, v_2, \dots, v_r$ وکتورونه ته خطي مستقل ویل کیږي . که چیري لاندي افاده صدق وکړي:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$
$$\Longrightarrow \nexists\ i \in \{1,2, \dots, r\};\ \lambda_i \neq 0$$

مثال 4.4: په$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی $v_1 = (1,2)$ او $v_2 = (3,6)$ وکتورونه خطی وابسته دي.

حل : که مونږ $\lambda_1 = -3 \neq 0$ او $\lambda_2 = 1 \neq 0$ وضع کړو لیدل کیږی چې v_1 او v_2 خطی وابسته (lin-dep) دي. ځکه :

$$-3v_1 + 1v_2 = -3(1,2) + (3,6)$$
$$= (-3,-6) + (3,6) = (0,0) = 0$$

مثال 4.5 : په $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ وکتوری فضا کې $v_1 = (2,0,0)$ ، $v_2 = (0,3,4)$ او $v_3 = (0,1,5)$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي.

حل:

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1(2,0,0) + \lambda_2(0,3,4) + \lambda_3(0,1,5) = (0,0,0)$$
$$\Longrightarrow (2\lambda_1,0,0) + (0,3\lambda_2,4\lambda_2) + (0,\lambda_3,5\lambda_3) = (0,0,0)$$
$$\Longrightarrow 2\lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \wedge \quad 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -11\lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \lambda_2 = 0\,, \lambda_3 = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 0$$
$$\Longrightarrow v_1, v_2, v_3 \quad lin-indep$$

تمرین 4.6 : ایا په$(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ وکتوری فضا کی $v_1 = (1,2,3)$ ، $v_2 = (4,5,6)$ او $v_3 = (7,8,9)$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي.

تمرین 4.7 : په $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ وکتوری فضا کی لاندي وکتورونه راکړل شوي دي

$$u_1 = (2,-14,0) \quad , \quad u_2 = (0,3,-1) \quad , \quad u_3 = (-1,1,2)$$

(a) معلوم کړی چې ایا u_1, u_2, u_3 وکتورونه خطی وابسته (lin-dep) او که خطی مستقل (lin-indep) دي.

(b) ایا u_1, u_2 وکتورونه خطی وابسته (lin-dep) او که خطی مستقل دي

لیما 4.5 : $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده. $p,q \in \mathbb{N}$, V $v_i \in$ ($i = 1,\dots,p$) بیا دا لاندي افادي صدق کوي.

(I) $v \in V$

$$v \quad lin-indep \quad \Longleftarrow \quad v \neq 0$$

(II) $q \geq p$

$$v_1, v_2, \dots, v_p, \dots, v_q \quad lin-dep \Longleftarrow \quad v_1, v_2, \dots, v_p \quad lin-dep$$

(III) $v \in V$

v خطی ترکیب د v_i $(i = 1,\dots,p)$ وکتورو دی

$$v, v_1, v_2, \dots, v_p \quad lin-dep \quad \Longleftarrow$$

p > 1 (IV)

$v_1, v_2, \dots, v_p \quad lin - dep$

$\Leftarrow$

اقلا" یو v_i موجود دی چې خطی ترکیب
د پاتی نورو وکتوروويِ (lin-comb)

(V)

$\mathrm{v_1, v_2, \dots, v_p \ \ lin - indep}$

$\wedge \quad \mathrm{v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1} \quad lin - dep}$

$\Leftarrow$ v_{p+1} خطی ترکیب (lin-comb) د $v_1, v_2, \dots, v_p$ دی

n > 1 (VI)

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \quad lin - indep \Leftarrow \mathrm{v_1, v_2, \dots, v_n \ \ lin - indep}$

(I) **ثبوت:** د 3.1 نوټ له مخې:

$v \neq 0 \ , \ \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \lambda v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \vee \quad v = 0$

څرنگه چې $v \neq 0$ ده پس باید $\lambda = 0$ وي. په نتیجه کی v یو خطی مستقل وکتور دی.

(II) **ثبوت:**

$v_1, v_2, \dots, v_p \ \ lin - dep$

$\Longrightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \ \ (i = 1, \dots, p)$ (ټول λ_i صفرنه دی); $\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{p}} \lambda_i v_i = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \ \lambda_p v_p + 0.\lambda_{p+1} + \cdots + 0.v_q = 0$

$\Longrightarrow \ v_1, v_2, \dots, v_p, \dots, v_q \quad lin - dep$

(III) **ثبوت:** څرنگه چې v یو خطی ترکیب (lin-comb) د $v_1, v_2, \dots, v_p$ دی. پس

$\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad (i = 1, \dots, p) \ \ ; \ v = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{p}} \lambda_i v_i$

$\Longrightarrow -1.v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \ \lambda_p v_p \ = 0$

$\Longrightarrow v, v_1, v_2, \dots, v_p \quad lin - dep$

(IV) **ثبوت:**

$v_1, v_2, \dots, v_p \quad lin - dep$

$\Longrightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \ \ (i = 1, \dots, p) \ (not\ all \ \ \lambda_i = 0 \ ) \ ;$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

ځرنګه چې د خطی وابسته تعریف له مخې کم ترکمه باید یو $\lambda_i \neq 0$ موجود ه وي. پس کولای شو پورتنی معادله پر λ_i تقسیم کړو.

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_i} v_p$$

پورتنی معادله ښیې چې v_i یو خطی ترکیب د پاتې وکتورو دی.

ثبوت: (V)

$$v_1, v_2, \dots, v_p \ \ lin-indep \quad \wedge \quad v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1} \ \ lin-dep$$
$$\Longrightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \quad (i = 1, \dots, p+1) \ \ (not\ all\ \ \lambda_i = 0\ ) ;$$
$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i v_i = 0$$

په پورتنی معادله کی باید $\lambda_{p+1} \neq 0$ وي .که داسی نه وي. بیا v_i $(i = 1, \dots, p)$ خطی وابسته کیږي چې دا د فرضیی خلاف دی. پس کولای شو پورتنی معادله پر λ_{p+1} تقسیم کړو.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_{p+1}} v_2 + \cdots + \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} v_p + v_{p+1}$$
$$\Longrightarrow v_{p+1} = -\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} v_i$$
$$= -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p+1}} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{p+1}} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} v_p$$

لیدل کیږي چې v_{p+1} خطی ترکیب (lin-comb) د v_i $(i = 1, \dots, p)$ وکتورونو دی.

ثبوت: (VI)

$$\lambda_i \in \mathbb{K} \quad (i = 1, \dots, n-1) \ ; \ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0.v_n = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} \ \ [\text{ځکه } v_1, v_2, \dots, v_n \text{ مستقل خطي}]$$
$$\Longrightarrow v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \ \ \text{lin-indep}$$

لیما 4.6 : (V, K) یوه وکتوری فضا او $v_i \in V$ $(i = 1, \dots, p)$. بیا دالاندی افادي دیوبل سره معادل دي:

(1) $v_1, v_2, \dots, v_p$ مستقل خطی (lin-indep) دي .

(2) د $\forall v \in span\,(v_i)$ لپاره فقط یوازی یو خطی ترکیب د $v_1, v_2, \dots, v_p$ وکتوروموجود دی.

ثبوت:

1) $\Longleftarrow$ (2) مونږ فرض کوو چې دوه ډوله خطی ترکیبونه د v لپاره موجود دی. یعنی :

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i \quad (\lambda_i, \mu_i \in K \;;\; (i = 1,2,\dots,p))$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \;\; (i = 1,2,\dots,p)$ [ځکه v_i خطی مستقل دی]

$$\Longrightarrow \lambda_i = \mu_i \qquad (i = 1,2,\dots,p)$$

ولیدل شو چې فقط یوازی یو ډول خطی ترکیب دهر $v \in span(\,v_i)$ وکتور لپاره موجود دی .

(2) $\Longleftarrow$ (1) که $v_1, v_2, \dots, v_p$ مستقل خطی نوی، پس وابسته خطی دی او د 4.5 لیما له مخی یو ددی وکتورو خطی ترکیب دنورو وکتورودی. مونږفرض کوو چې هغه وکتور v_1 دی. پس:

$$\exists\, \lambda_i \in \mathbb{K} \;\; (i = 2,\dots,p);\; v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots \lambda_p v_p$$

$$\Longrightarrow v_1 - (\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots \lambda_p v_p) = 0$$

له بلی خوا:

$$0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 + \dots 0.v_p = 0$$

لیدل کیږی چې 0 وکتورلپاره دوه خطی ترکیبونه موجود دي. مګردا (1) افادي خلاف دی. پس د $v_1, v_2, \dots, v_p$ وکتورونه مستقل خطی دي

لیما 4.7 : $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ وکتوری فضا او $v, w \in \mathbb{R}^n$. بیا دالاندي افادی له یوبل سره معادل دي.

(i) $\quad v \neq 0 \quad \wedge \quad \nexists\, k \in \mathbb{R} \,;\; w = k.v$

(یعنی $v \neq 0$ او هیڅ یو حقیقی عدد $k \in \mathbb{R}$ نه پیدا کیږي چې $w = k.v$)

(ii) $\quad w \neq 0 \quad \wedge \quad \nexists\, m \in \mathbb{R} \,;\; v = m.w$

(یعنی $w \neq 0$ او هیڅ یو حقیقی عدد $m \in \mathbb{R}$ نه پیدا کیږي چې $v = m.w$)

(iii) $\exists\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;;\; \lambda v + \mu w = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

(یعنی v او w وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي)

ثبوت:

$(\mathbf{i}) \Longleftarrow (\mathbf{ii})$ مونږ فرض کوچې (ii) صدق نه کوي. یعنی

$w = 0 \quad \vee \quad \exists m \in \mathbb{R} \;;\; v = m.w$

لمړی حالت :

که $w = 0$ وي په دی صورت $w = 0.v$. مګردا د (i) سره تضاد دی .

دویم حالت :

$\exists m \in \mathbb{R} \;;\; v = m.w \quad \Longrightarrow \quad m = 0 \quad \vee \quad m \neq 0$

که $m = 0$ وي. بیا $v = 0.w = 0$ کیږي چې دا هم د (i) سره په تضاد کې ده.

که $m \neq 0$ وي. په دی صورت $w = \frac{1}{m}v$ کیږي . مګر دا خلاف د (i) دی.

$(\,\boldsymbol{ii}\,) \Longleftarrow (\,\boldsymbol{iii}\,)$ که (iii) درست نه وي. پس باید $\lambda \;\neq 0$ اویا $\mu \neq 0$ وي. مونږ فرض کوو چې $\lambda \neq 0$ دی. په دې حالت :

$$\lambda v = -\mu w \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{-\mu w}{\lambda}$$

مګردا خلاف (ii) دی. پس باید $\lambda = 0$ وي.

$\lambda v + \mu w = 0 \;\Longrightarrow\; \mu w = 0 \;\Longrightarrow\; \mu = 0$ [ځکه $w \neq 0$]

$\Longrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$

$(\,\boldsymbol{iii}\,) \Longleftarrow (\boldsymbol{i})$ که چیري (i) صدق ونکړي پس باید:

$v = 0 \quad \vee \quad \exists k \in \mathbb{R} \;;\; w = k.v$

که $v = 0$ وي . په دې صورت $1.v + 0.w = 0$ کیږي. مګر دا خلاف د (iii) دی.

بل حالت

$$\exists k \in \mathbb{R} \;;\; w = k.v \quad \Longrightarrow \quad 1.w - k.v = 0$$

مګردا هم خلاف د (iii) دی . پس $(\,iii\,) \Longleftarrow (\,i\,)$

یاددابنت : پر هر هغه دوه وکتوره چې دپورتني لیما یوه افاده صدق وکړې . بیا هغه دوه وکتوره خطی مستقل دی.

مثال: مونږ w, v, u وکتورونه په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لرو :

$v = (2, -3, 0)$, $u = (8, -12, 0)$, $w = (0,0,1)$

$v = (2, -3, 0) \neq 0 \wedge \nexists\, k \in \mathbb{R}$;

$$w = (0,0,1) = k.v = k.(2,-3,0)$$

$\Longrightarrow$ v,w lin-indep [لیما له مخې 4.7]

مګر

$\exists 4 \in \mathbb{R}$; u = $(8,-12,0) = 4.(2,-3,0) = 4$.v

$\Longrightarrow$ u – 4v = 0 $\Longrightarrow$ u,v lin-dep

مثال 4.6 : w, v_1, v_2, v_3 $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$w = (2,1,1)$, $v_1 = (1,5,1)$, $v_2 = (0,9,1)$, $v_3 = (3,-3,1)$

(a) v_1, v_2, v_3 وکتورونه خطی وابسته (lin-dep) په $\mathbb{R}^3$ کی دي

(b) w یو خطی ترکیب (lin-comb) د v_1, v_2, v_3 دی

(a) ثبوت: خطی وابسته (lin-dep) په دې معنی که مونږ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ولرو چې ټول صفر ندي او لاندی معادله صدق کوي

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1(1,5,1) + \lambda_2(0,9,1) + \lambda_3\,(3,-3,1) = (0,0,0) \quad (**)$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1, 5\lambda_1, \lambda_1) + (0, 9\lambda_2, \lambda_2) + (3\lambda_3, -3\lambda_3, \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -3\lambda_3$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + 9\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5(-3\lambda_3) + 9\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 9\lambda_2 - 18\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2 = 2\lambda_3$$

ددی معادلاتو حل مساوی $\{(-3\lambda_3, 2\lambda_3, \lambda_3) \mid \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ دی.

د مثال په ډول که $\lambda_3 = 1$ وضع شي. په دی صورت $\lambda_2 = 2$ او $\lambda_1 = -3$ کیږي.

که دا قیمتونه په $(**)$ معادله کی وضع شي

$$-3(1,5,1) + 2(0,9,1) + (3,-3,1) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow (-3,-15,-3) + (0,18,2) + (3,-3,1) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad -3 + 3 = 0 \quad , \ -15 + 18 - 3 = 0 \quad , -3 + 2 + 1 = 0$$

ولیدل شو چې د مثال په ډول $\lambda_2 \neq 0$ پیدا شوچې پورتنی معادله صدق کوي.
پس لهذا v_1, v_2, v_3 خطی وابسته وکتورونه دي.

(b) ثبوت: w یو خطی ترکیب د v_1, v_2, v_3 دی . ځکه:

$$-1.v_1 + 1v_2 + 1v_3 = -1(1,5,1) + (0,9,1) + (3,-3,1)$$
$$= (-1+0+3, -5+9-3, -1+1+1)$$
$$= (2,1,1) = w$$

مونږ $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -1$ پیدا کړل چې

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

کیږي . پس w یو خطی ترکیب (lin-comb) د v_1, v_2, v_3 وکتورو دی

یادداښت: v_1, v_2, v_3 وکتورونه که خطي مستقل نوي. بیا کولای شي له یوه څخه زیات وکتورونه د خطی ترکیب په شکل ولري

تمرین 4.8:

(1) ثبوت کړی چې لاندي وکتورونه خطی وابسته (lin-dep) دي

(a) u = (1,2) , v = (-2,-4) $\in \mathbb{R}^2$

(b) u = (1,2,3) , v = (-1,-2,1) , w = (0,0,2) $\in \mathbb{R}^3$

(c) u = (1,0,0) , v = (0, 0,2) , w = (5,0,5) $\in \mathbb{R}^3$

(2) ثبوت کړی چې لاندي وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي

(a) په $\mathbb{R}^4$ کې

$u_1 = (3,0,0,0)$, $u_2 = (0,3,0,0)$, $u_3 = (0,0,3,0)$, $u_4 = (0,0,0,3)$

b) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$ $\in \mathbb{R}^3$

(c) $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,0,2)$, $u_3 = (5,5,5)$ $\in \mathbb{R}^3$

(3)

$u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$, $w = (1,2,3)$ $\in \mathbb{R}^3$

ثبوت کړی چې د w وکتور یو خطی ترکیب (lin-comb) د u_1 , u_2 او u_3 دی

(4) مونږ $map(\mathbb{R}x\mathbb{R})$ وکتوری فضا چې په (4.1) تعریف شویده په نظرکی نیسو. ثبوت کړی چې لاندی توابع په $map(\mathbb{R}x\mathbb{R})$ کی خطی مستقل دی:

$$f_1(t) = e^t \qquad\qquad f_2(t) = e^{2t}$$

پنځم فصل

د وکتوری فضا قاعده او بعد

(Basis and Dimension of a vectorspace)

تعریف 5.1 : $(V,\mathbb{K})$ وکتوری فضا ده. یو وکتوري فامیل $(I=(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$ $1,2,\dots,n)$ د V مولد سیستم (Generating system or Span) په نوم یادیږي په دې شرط چې $V=span(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$ وي. یعنی هر $v\in V$ وکتور د $(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$ وکتورونو د خطی ترکیب په شکل ولیکل شي. دا په دی معنی

$$\forall\ v\in V\ \Longrightarrow\ \exists\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\in\mathbb{K}\,;$$
$$v=\lambda_1v_1+\ \lambda_2v_2\ +\cdots+\ \lambda_rv_r$$

تعریف 5.2 :

(1) $(V,\mathbb{K})$ وکتوری فضا ده . $(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$ (I= 1,2,...,n) وکتورو ته د V قاعده (Basis) ویل کیږی که چیري :

(a) $V=span(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$

(b) $(v_i)_{\mathrm{i\in I}}$ وکتورونه خطي مستقل (lin-indep) خاصیت ولري.

(2) $e_i\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,2,\dots,n)$ وکتورونه یوه قاعده د $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ وکتوری فضا ده او دې ته اساسی قاعد (Canonical or standard Basis) ویل کیږي .

نوټ: که $V=span(v_1,v_2,\dots,v_n)$ وې ، مونږ هغه په $V=\langle v_1,v_2,\dots,v_n\rangle$ اوکه $v_1,v_2,\dots,v_n$ یوه قاعده د V وی ، بیا مونږ هغه په $V=\langle\langle v_1,v_2,\dots,v_n\rangle\rangle$ سره ښیو.

قضیه 5.1 : که $(V,\mathbb{K})$ وکتوری فضا او $V=\langle\langle v_1,v_2,\dots,v_n\rangle\rangle$ وي بیا :

(1) $V\neq\langle v_1,v_2,\dots,v_{r-1},v_{r+1},\dots,v_n\rangle$

(یعنی $v_1,v_2,\dots,v_n$ ترټولو کوچنی وکتورو فامیل دی چې هغه مولد سیستم (Generating system) د V دی.)

(2) که $v\in V$ وی ، بیا $v_1,v_2,\dots,v_n,v$ وکتورونه خطی وابسته (lin-dep) دي.

(یعنی $v_1, v_2, \dots, v_n$ ترتېولو لوی د وکتورو فامیل دی چې په V کي خطی مستقل دي)

(1) ثبوت: که $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$ وي. یعی یو وکتور کم شي او که هغه $r = 1$ فرض کړو. بیا کولای شو ولیکو :

$$\exists\ \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in K\ ;\quad v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n$$
$$\Longrightarrow\ (-1)v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$
$$\Longrightarrow\quad v_1, v_2, \dots, v_n \qquad lin - dep$$

مګر دا درست نه ده ، ځکه $v_1, v_2, \dots, v_n$ قاعد (basis) راکړل شویده . په نتیجه کې $V \neq \langle v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$

ثبوت (2):

$$V = \langle\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle\rangle\ \Longrightarrow\ V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$
$$\Longrightarrow \forall v \in V\ , \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K\ ;$$
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$
$$\Longrightarrow\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + (-1)v = 0$$
$$\Longrightarrow\quad v_1, v_2, \dots, v_n, v \qquad lin - dep$$

ولیدل شوچې د یو وکتور په زیاتولوسره خپل خطی مستقل خاصیت له لاسه ورکوي.

نوټ: یووکتوری فضا کولای شې څو قاعدې (basis) ولري . مګرد ټولو قاعدو د وکتورنو شمیر په یوی وکتوری فضای کی سره مساوی دي.

مثال 5.1 : مونږ په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لاندې وکتورونه لرو :

$$e_1 = (1,0)\ ,\quad e_2 = (0,1)\ \in \mathbb{R}^2$$
$$v_1 = (1,1)\ ,\quad v_2 = (-1,2)\ \in \mathbb{R}^2$$

مونږ ښیو چې :

$$\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \qquad \wedge \qquad \mathbb{R}^2 = \langle\langle e_1, e_2 \rangle\rangle$$

یعنی { e_2 , e_1 } او { v_2 , v_1 } د $\mathbb{R}^2$ قاعدې دي

حل:

(1) د $\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ ثبوت لپاره باید وښیو :

(a) $\mathbb{R}^2 = \langle v_2, v_1 \rangle$

(b) v_2, v_1 خطی مستقل (lin-indep) دی.

(a) ثبوت:

د $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ ثبوت لپاره باید د هر $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ته $\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{R}$ اعداد دلاندی خواصو سره موجود وي:

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$
$$x = (x_1, x_2) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,2) = (\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, 2\lambda_2)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2 , \lambda_1 + 2\lambda_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \Bigg| \quad -1.$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 - x_1 = 3\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 3\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{3}$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{3} \quad \wedge \quad \lambda_1 = x_1 + \lambda_2$$
$$= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{3x_1 + x_2 - x_1}{3}$$
$$= \frac{\boldsymbol{x_2 + 2x_1}}{\boldsymbol{3}}$$
$$\Rightarrow x = (x_1, x_2) = \frac{x_2 + 2x_1}{3} v_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} v_2$$

په نتیجه کی $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$

(b) ثبوت:

که مونږ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ لپاره $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ ولرو، باید ثبوت شی چې $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ دي.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,2) = (\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, 2\lambda_2) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Bigg| \quad -1.$$

$$\Rightarrow 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow v_1, v_2 \quad \text{lin-indep}$$

په نتیجه کې $\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$

(2) **ثبوت:** د $\mathbb{R}^2 = \langle\langle e_1, e_2 \rangle\rangle$ ثبوت لپاره باید وښیو:

(c) $\mathbb{R}^2 = \langle e_2, e_1 \rangle$

(d) e_2, e_1 خطی مستقل (lin-indep) دي.

(c) **ثبوت** : د $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ثبوت لپاره باید د هر $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ته $\lambda_2 \, , \lambda_1 \in \mathbb{R}$ اعداد دلاندی خواصو سره موجود وي:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

$$x = (x_1, x_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \lambda_1 \quad \wedge \quad x_2 = \lambda_2 \;\Longrightarrow\; x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

(d) ثبوت:

که $\lambda_2, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ لپاره $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ ولرو. باید ثبوت شی چې $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ دي.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow \; e_1, e_2 \text{ lin-indep}$$

په نتیجه کی $\mathbb{R}^2 = \langle\langle e_1, e_2 \rangle\rangle$

مثال:

$$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_3\}$$

W یوه فرعي فضا په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ کې ده

$$v_1 = (1,0,1) \;, \quad v_2 = (0,1,0) \;\; \in W$$

مونږ بنيو چې $\{ v_2 \, , v_1 \}$ یوه قاعده د W ده. یعنې $W = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ دی باید ثبوت شی:

(a) $W = \text{span}(v_1 , v_2)$

(b) v_1 , v_2 lin-indep

(a) ثبوت:

د $W = \text{span}(v_1 , v_2)$ ثبوت لپاره باید د هر $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ته $\lambda_2 \, , \lambda_1 \in \mathbb{R}$ اعداد دلاندی خواصو سره موجود وي:

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2 (0,1,0)$$

$$= (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (0, \lambda_2, 0)$$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1)$

$\Longrightarrow \lambda_1 = x_1 = x_3 , \lambda_2 = x_2$

$\Longrightarrow W = < v_1 , v_2 >$

(b) ثبوت: که مونږ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ لپاره $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ ولرو. باید ثبوت شی چې $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ دی.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2 (0,1,0) = (0,0,0)$

$\Longrightarrow (\lambda_1,0, \lambda_1) + (0, \lambda_2,0) = (\lambda_1, \lambda_2 , \lambda_1) = (0,0,0)$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 0$

$\Longrightarrow$ v_1 , v_2 lin-indep (خطی مستقل)

که چیری یو $w \in \mathbb{R}^3$ موجود وې چې w ,v_1 , v_2 خطي مستقل شي.

څرنګه چې $W = < v_1 , v_2 >$ ثبوت شو. پس w یوخطي ترکیب د v_1 , v_2 دی. د 4.5 لیماله مخې w ,v_1 , v_2 خطي وابسته (lin-dep) دي. یعنې اعظمي وکتورو شمیر، چې خطي مستقل وي 2 دی . په نتیجه کې $W = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$

تمرین:

$H:= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+3x_2+2x_4=0 , 2x_1+x_2+x_3=0\}$

$u = (3,-1,-5,0) , v = (-1,1,1,-1)$

ثبوت کړی چې u,v یوه قاعده د H ده. یعنې H=<<u,v>>

قضیه 5.2 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده ، $V = \langle\langle v_1, v_2, \dots , v_r \rangle\rangle$. که $w \in V$ وکتور موجود وې چې:

$$w = \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \cdots + \tau_r v_r \in V \quad (\tau_i \in \mathbb{K} , \ i = 1, \dots , r)$$

او یو $k \in \{1,2, \dots , r\}$ موجود وی چې $\tau_k \neq 0$ شی . په دی صورت :

$$V = \langle\langle v_1, v_2, \dots , v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots , v_r \rangle\rangle$$

ثبوت: مونږ فرض کو چې $k = 1$ او $\tau_1 \neq 0$ دی. پس باید وښودل شي :

$$V = \langle\langle w, v_2, \dots , v_{k-1}, v_k , v_{k+1}, \dots , v_r \rangle\rangle$$

$v \in V \implies \exists \ \mu_1, \mu_2, \dots , \mu_r \in K$;

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r$$

$w = \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \cdots + \tau_r v_r$

$$v_1 = \frac{1}{\tau_1} w - \frac{\tau_2}{\tau_1} v_2 - \cdots - \frac{\tau_r}{\tau_1} v_r$$
$$v = \mu_1 \left(\frac{1}{\tau_1} w - \frac{\tau_2}{\tau_1} v_2 - \cdots - \frac{\tau_r}{\tau_1} v_r\right) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r$$
$$= \frac{\mu_1}{\tau_1} w - \frac{\mu_1 \tau_2}{\tau_1} v_2 - \cdots - \frac{\mu_1 \tau_r}{\tau_1} v_r + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r$$
$$= \frac{\mu_1}{\tau_1} w + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 \tau_2}{\tau_1}\right) v_2 + \cdots + \left(\mu_r - \frac{\mu_1 \tau_r}{\tau_1}\right) v_r$$
$$\Longrightarrow \quad V = \langle w, v_2, \dots, v_r \rangle$$

اوس باید ثبوت شی چې $w, v_2, \dots, v_r$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي .

مونږ فرض کوو چې $\mu w + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r = 0 \quad (\mu, \mu_i \in \mathbb{K})$

څرنگه چې $w = \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \cdots + \tau_r v_r$ دی. او مونږ د w پرځای لیکو :

$$\mu(\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \cdots + \tau_r v_r) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mu\tau_1 v_1 + \mu\tau_2 v_2 + \cdots + \mu\tau_r v_r + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mu\tau_1 v_1 + (\mu\tau_2 + \mu_2) v_2 + \cdots + (\mu\tau_r + \mu_r) v_r = 0$$

څرنگه چې $v_1, v_2, \dots, v_r$ خطی مستقل دی پس باید :

$$\mu\tau_1 = \mu\tau_2 + \mu_2 = \cdots = \mu\tau_r + \mu_r = 0$$
$$\tau_1 \neq 0 \implies \mu = 0 \implies \mu_2 = 0 \implies \mu_r = 0$$
$$\Longrightarrow \quad w, v_2, \dots, v_r \ \text{lin} - \text{indep}$$

په نتیجه کی:

$$V = \langle\langle w, v_2, \dots, v_r \rangle\rangle$$

مثال 5.2: مونږ په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لاندې وکتورونه لرو :

$$w = (-1,8)\,,\ v_1 = (1,1)\ ,\ \ v_2 = (-1,2) \ \in \mathbb{R}^2$$

دلته د 5.2 قضیې څخه استفاده کو او ښیو چې w اوv_2 وکتورونه یوه قاعده (basis) د $\mathbb{R}^2$ جوړوي. یعني $\mathbb{R}^2 = \langle\langle w, v_2 \rangle\rangle$

په 5.1 مثال کې مووليدل چې $\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ کیږي. لمړی باید ثبوت شي چې w یوخطي ترکیب د v_1 او v_2 دی. یعني:

$$\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ ;\ w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

په 5.1 مثال کې مو λ_1, λ_2 د $w = (x_1, x_2)$ له مخې پیدا کړل

$$\lambda_2 = \frac{x_2 - x_1}{3} \quad \wedge \quad \lambda_1 = \frac{x_2 + 2x_1}{3}$$

ځرنګه چې په دې مثال کې $(-1,8) = w$ ده

$$\lambda_2 = \frac{8+1}{3} = 3 \quad \wedge \quad \lambda_1 = \frac{8-2}{3} = 2$$

$$\Longrightarrow \quad w = 2v_1 + 3v_2 \quad \wedge \quad \lambda_1 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 = \langle\langle w, v_2 \rangle\rangle \quad [\ 5.2 \text{ قضيې له مخې }]$$

مثال : مونږ په $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لاندې وکتورونه لرو :

$$w = (0,2,2,3)\ ,\ u = (1,0,0,1)\ ,\quad v = (0,1,1,0)$$

له بلې خوا ليدل کيږي چې $\{ u,v,e_3,e_4 \}$ د $\mathbb{R}^4$ يوه قاعده جوړوي. يعنې:

$$\mathbb{R}^4 = \langle\langle u,v,e_3,e_4 \rangle\rangle$$

غواړو ثبوت کړو :

$$\mathbb{R}^4 = \langle\langle u,v,e_3,w \rangle\rangle$$

لمړی غواړو وښيو چې w خطي ترکيب د u,v,e_3, e_4 دی. يعنی

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\ ;\ w = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$$

$$(0,2,2,3) = \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,1,1,0) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1)$$

$$= (\lambda_1,0,0,\lambda_1) + (0,\lambda_2,\lambda_2,0) + (0,0,\lambda_3,0) + (0,0,0,\lambda_4)$$

$$= (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_4)$$

$$\Longrightarrow\ \lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2\ ,\ \lambda_1 + \lambda_4 = 3$$

$$\Longrightarrow\ \lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 0\ ,\ \lambda_4 = 3$$

ځرنګه چې $\lambda_4 = 3 \neq 0$ دی. پس د 5.2 قضيې کولای شو وليکو:

$$\mathbb{R}^4 = \langle\langle u,v,e_3,w \rangle\rangle$$

مثال:

$$V := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a + bx + cx^2 \quad (a,b,c \in \mathbb{R}) \}$$

V دهغه ټولوپولينومو سيټ دی چې درجه يې تر 2 کمه اويا مساوی وي.

د 4.1 په مثال کی موولیدل چې $(V, \mathbb{R})$ يوه وکتوری فضا ده. يوه قاعده يې $\{1,x,x^2\}$ ده. ځکه هر $f \in V$ يو خطی ترکيب د $1,x,x^2$ دی او خطي مستقل هم دي. ځکه:

$$f(x) := a + bx + cx^2 = 0 \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

البته دلته "0" د صفرتابع ده. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو

$f'(x) = b + 2cx = 0$

$f_1''(x) = 2c = 0 \Longrightarrow c = 0$

$b + 2cx = 2.0.x = 0 \Longrightarrow b = 0$

$a + bx + cx^2 = a + 0.x + 0.x^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

ثبوت شو چه $1,x,x^2$ خطي مستقل دي. په نتیجه کې:

$(V, \mathbb{R}) = \langle\langle 1,x,x^2 \rangle\rangle$

مثال:

$V:=\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x)=a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (a,b,c,d\in \mathbb{R})\}$

V دهغه ټولوپولینومو سیت دی چې درجه یی تر 3 کمه اویا مساوی وي.

د 4.1 په مثال کی موولیدل چې $(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا ده. یوه قاعده یی $\{1,x,x^2,x^3\}$ ده. ځکه هر $f \in V$ یو خطی ترکیب د $1,x,x^2,x^3$ دی. اوهمدارنګه د wronski متریکس (یوولسم فصل کې) له مخې $\{1,x,x^2,x^3\}$ خطی مستقل دي.

تمرین 5.2 :

(1) مونږ په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لاندې وکتورونه لرو :

$w = (1,-2) , \ v_1 = (1,1) \ , \quad v_2 = (-1,2) \ \in \mathbb{R}^2$

که $\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$ وې، بیا د 5.2 قضیې له مخې ثبوت کړی چې کومه یوه لاندې افاده صدق کوې اوکومه صدق نه کوې

(a) $\mathbb{R}^2 = \langle\langle w, v_2 \rangle\rangle$ (b) $\mathbb{R}^2 = \langle\langle v_1, w \rangle\rangle$

(2) د $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کی دا لاندی وکتورلرو :

$w = (2,0,-1,0) \quad \in \mathbb{R}^4$

د 5.2 قضیې له مخې ثبوت کړی چې کومه یوه لاندې افاده صدق کوې اوکومه صدق نه کوې

(a) $\mathbb{R}^4 = \langle\langle w,e_2, e_3, e_4\rangle\rangle$ (b) $\mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1,w, e_3, e_4\rangle\rangle$

(c) $\mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1,e_2, w, e_4\rangle\rangle$ (d) $\mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1, e_2, e_3, w\rangle\rangle$

تمرین 5.3: ثبوت کړی چې $(\mathbb{C}, \mathbb{R}) = \langle\langle 1, i \rangle\rangle$ دی .

لیما 5.1 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده .

$V = \langle\langle v_1, v_2, \dots , v_n \rangle\rangle \quad \wedge \quad V = \langle\langle w_1, w_2, \dots , w_k \rangle\rangle$

په دی صورت باید $n = k$ وي. یعنی د وکتورونو شمیر د دواړو قاعدو په V کی سره مساوي دی.

ثبوت : څرنګه چې $v_1, v_2, \dots, v_r$ د V یوه قاعده ده او $w_1, w_2, \dots, w_k$ وکتورونه خطی مستقل دي. پس د 5.1 دقضيي له مخې باید $k \le r$ وي

له بلي خوا $w_1, w_2, \dots, w_k$ هم د V یوه قاعده ده او $v_1, v_2, \dots, v_r$ خطی مستقل دي .پس د 5.1 قضيې له مخی باید $r \le k$ وي. په نتیجه کی $r = k$ دی.

تعریف 5.3 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده. د قاعدی د وکتورونوشمیرد V د بعد (*Dimension*) په نوم یادیږی او مونږ هغه په $\dim V$ سره ښیو . د مثال په ډول که د V قاعدی د وکتورونو شمیر مساوي n وي. یعنی

$$V = \langle\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle\rangle \implies \dim V = n$$

$\dim V = \infty$ [په دی صورت چې n غیر معین وي]

$\dim V = n$ [په دی صورت چې n معین وي]

د مثال په ډول $\dim \mathbb{R}^n = n$ دی . ځکه $e_1, e_2, \dots, e_n$ اساسی قاعده د $\mathbb{R}^n$ ده.

$\mathbb{R}^2 = \langle\langle e_1, e_2 \rangle\rangle \implies \dim\mathbb{R}^2 = 2$

مثال:

(a) M یوغیرمعین فرعی سیت په $\mathbb{R}$ کی دی

$\mathrm{Map}(M, \mathbb{R}) := \{ f: M \to \mathbb{R} \}$

$P(M, \mathbb{R}) := \{ p: M \to \mathbb{R} \mid p \text{ polynomial} \}$

$C(M, \mathbb{R}) := \{ f: M \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue} \}$

د $\mathrm{Map}(M, \mathbb{R})$ وکتوری فضا غیرمعین بعد او $P(M, \mathbb{R})$, $C(M, \mathbb{R})$ د هغه فرعی فضاوي دي چې غیرمعین بعدونه لري

تمرین:

$W := \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 \}$

$H := \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+3x_2+2x_4=0 , 2x_1,x_2+x_3=0\}$

dimW او *dimH* پیداکړی.

تمرین 5.4:

(a) که $w = (2,3,4) \in \mathbb{R}^3$ او $H_w := \{ \lambda.w \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ وي . په دی صورت $\dim(H_w)$ پیدا کړی.

(b) $(V, \mathbb{R})$ وکتوری فصا ده . $w \in V$ او $H_w := \{ \lambda.w \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ ده. بیا $\dim(H_w)$ پیداکړی

مثال 5.3 که پر $M(m \times n, \mathbb{R})$ باندي لاندی عمليي (operation) تعریف شی :

$$M := M(m \times n, \mathbb{R})$$
$$+ : M \times M \longrightarrow M$$
$$(A, B) \longmapsto A + B$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times M \to M$$
$$(\lambda.A) \longmapsto \lambda.A$$

پورتنی عملي پر M باندی درستی دی . ځکه :

$$A, B \in M \implies A + B \in M$$
$$\lambda \in \mathbb{R} , \ A \in M \implies \lambda.A \in M$$

$(M, +)$ یو تبدیلی گروپ دی چي معکوس د A د $-A$ متریکس دی او عینیت عنصر د صفرمتریکس دی. د وکتوری فضا نور خواص هم صدق کوي . په نتیجه کی $(M, \mathbb{R})$ یوه وکتوري فضا ده .

مثال: دالاندي سیت یوه فرعي فضا په $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ کې ده

$$H := \left\{ A \in M(2x2, \mathbb{R}) \middle| A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a + d = 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in H$$
$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$
$$a_1 + a_2 + d_1 + d_2 = a_1 + d_1 + a_2 + d_2 = 0 + 0 = 0$$
$$\implies A + B \in H$$

همدارنګه ثبوت کیدای شي چې:

$$\lambda \in \mathbb{R} , \ A \in H \implies \lambda.A \in H$$

په نتیجه کې H یوه فرعی فضا په $M(2x2, \mathbb{R})$ کې ده.

اوس غواړو د $M(m \times n, \mathbb{R})$ وکتوري فضا قاعده *(basis)* او بعد

پیدا کړو *(dimension)*

د $E_i^j \ (i = 1,2, \dots, m \quad \wedge \quad j = 1,2, \dots, n)$ متریکسونه چې لاندی تشریح شوي دی یوه قاعده (basis) $M(m \times n, \mathbb{R})$ جوړوي .

$$E_i^j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

دلته د یو "1"عدد په i لیکه او j ستنی (ستون) کی واقع دی .

د مثال په ډول ښیو چې د $E_i^j \ (i = 1,2 \quad \wedge \quad j = 1,2,3)$ متریکسونه یوه قاعده د $M(2 \times 3, \mathbb{R})$ وکتوری فضا ده

$$E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

باید وښودل شی:

(a) $M(2 \times 3, \mathbb{R}) = span\left(E_i^j \ (i = 1,2 \quad \wedge \quad j = 1,2,3)\right)$

(b) $(i = 1,2 \quad \wedge \quad j = 1,2,3) \quad E_i^j$ خطی مستقل (lin-indep) متریکسونه دی.

(a) ثبوت:

$$A \in M(2 \times 3, \mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

باید اعداد $c_{\mathrm{ij}} \in \mathbb{R} \quad (i = 1,2 \quad \wedge \quad j = 1,2,3)$ د لاندی خواصو سره موجود وي :

$$A = c_{11}E_1^1 + c_{12}E_1^2 + c_{13}E_1^3 + c_{21}E_2^1 + c_{22}E_2^2 + c_{23}E_2^3$$
$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11} = c_{11},\ a_{12} = c_{12}\ , a_{13} = c_{13}\ ,\ \ a_{21} = c_{21}\ ,$$
$$a_{22} = c_{22}\ , a_{23} = c_{23}$$

پس هر $A \in M(2 \times 3, \mathbb{R})$ یو خطی ترکیب (lin-comb) د E_i^j دی. یعنی :

$M(2 \times 3, \mathbb{R}) = <E_i^j$ (i=1,2 j = 1,2,3) >

(b) ثبوت: که مونږ لاندی حالات ولرو:

$$c_{11}E_1^1 + c_{12}E_1^2 + c_{13}E_1^3 + c_{21}E_2^1 + c_{22}E_2^2 + c_{23}E_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow c_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+c_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad c_{11} = c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{22} = c_{23} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad E_i^j\ (i = 1,2\ \ \wedge\ \ j = 1,2,3)\ \ lin - indep$$

نوټ *5.1* : د $M(m \times n, \mathbb{R})$ وکتوری فضا د قاعدي دوکتورنو شمیر مساوي $m \times n$ دی.یعنی $\dim(M(m \times n, \mathbb{R})) = m.n$ اوپه پورتنی مثال کی

$$\dim M(2 \times 3, \mathbb{R}) = 2.3 = 6$$

نوټ 5.2 : که مونږ د $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کی $a_1, a_2, \dots, a_n$ وکتورونه ولرو او $W := span(a_1, a_2, \dots, a_n)$ وي. بیا کولای شو د a_i وکتورونه د متریکس په شکل په لاندی ډول ولیکو :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

دلته $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ دی اود کربنی (سطری) وکتور شکل لري.
$e_1, e_2, \dots, e_n$ اساسی قاعده وکتورونه په $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی د لاندی واحد متریکس شکل لری.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

که د A متریکس په کربنې (سطری) زینه یي شکل راوستل شی په لاندی ډول معلومیږي .

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & \dots & \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{rr} & \dots\ \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

دلته $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$ (i=1,2,…,r) دی
په پورتنی متریکس کی هغه لیکي چې خلاف د صفردي د هغه مربوطه وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي. یعنی د r په شمیر وکتورونه دلمړیولیکو خطی مستقل دی. ځکه که مونږ $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2, \dots, r)$ ولرو

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_r b_r = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (c_1 b_{11}, c_1 b_{12}, \dots, c_1 b_{1n}) + (c_2 b_{21}, c_2 b_{22}, \dots, c_2 b_{2n}) + (c_3 b_{31}, c_3 b_{32}, \dots, c_3 b_{3n}) + \dots + (c_r b_{r1}, c_r b_{r2}, \dots, c_r b_{rn}) = (0, \dots, 0)$$

$$\Longrightarrow c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + c_3 b_{31} + \text{- - - - - -} + c_r b_{r1} = 0$$

څرنګه چې

$$c_2 b_{21} + c_3 b_{31} + \text{- - - - - -} + c_r b_{r1} = 0$$

$$\Longrightarrow c_1 b_{11} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad c_1 = 0 \qquad [\quad b_{11} \neq 0 \ \text{ځکه} \quad]$$

$$c_1b_{12} + c_2b_{22} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = 0$$

که په همدی ډول ادامه ورکړل شی په نتیجه ګی :

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

پس ثبوت شو چې د r په شمیر د لمړی لیکی خطی مستقل (*lin - indep*) دي.

نوټ 5.3 : په عمومی ډول کولای شووواېو چې که $a_1, a_2, \dots, a_m$ وکتورونه د A متریکس په شکل ولیکل شی او بیا هغه متریکس په یوسطري زینه یي متریکس B تبدیل شي. په دی صورت ټولي هغه د B کربښې چې خلاف د صفر وي چې هغه $b_1, b_2, \dots, b_r$ دی یوه قاعده د $W := span(a_1, a_2, \dots, a_m)$ جوړوي.

تعریف 5.4 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده . دا لاندی عملیات پر $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ وکتورونو مقدماتی عملیاتو (Elementary operation) په نوم یادیږی:

(i) تبادله اویا تعویضول د دو وکتورو ځای

(ii) ضرب کول دیو وکتور د $\lambda \in \mathbb{K} \neq 0$ سره

(iii) ضرب کول د یو وکتور د $\lambda \in K \neq 0$ سره اوبیا د بل وکتور سره جمع کول

قضیه 5.3 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده. د $(iii), (ii), (i)$ مقدماتی عملیات تطبیق پر $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ وکتورونو باندی $span\ (a_1, a_2, \dots, a_k)$ تغیر نه کوي.

ثبوت : $\lambda \in \mathbb{K}$, $i, j \in \mathbb{N}$ و $1 \leq i \leq j \leq k$

مقدماتی عملیه (i) واضح ده .

مقدماتی عملیه (ii)

$v \in span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$

$\Longrightarrow \exists\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}\ ;$

$$v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i a_i + \cdots + \mu_k a_k$$
$$= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \frac{\mu_i}{\lambda}(\lambda a_i) + \cdots + \mu_k a_k$$

$\Longrightarrow v \in span\ (a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k)$

$\Longrightarrow span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k) \subseteq span\ (a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k)$

$v \in span\ (a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k)$

$$\Longrightarrow \exists\ \mu_1,\ \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}\ ;$$

$$\mathrm{v} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i(\lambda a_i) + \cdots + \mu_k a_k$$

$$= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + (\lambda \mu_i) a_i + \cdots + \mu_k a_k$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{v} \in span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k) \Longrightarrow$$

$$span\ (a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k) \subseteq span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$$

په نتیجه کی

$$span\ (a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_k) = span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$$

مقدماتی عملیه (iii)

$$\mathrm{v} \in span\ (a_1, a_2, \dots, a_i\ , \dots, a_k)$$

$$\Longrightarrow \exists\ \mu_1,\ \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}\ ;$$

$$\mathrm{v} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i a_i + \cdots + \mu_k a_k$$

$$= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i \left(a_i + \lambda a_j\right)$$

$$+ \cdots + \left(\mu_j - \lambda \mu_i\right) a_j + \cdots + \mu_k a_k$$

$$\Longrightarrow \mathrm{v} \in span\ \left(a_1, a_2, \dots, a_i\ + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots\ ,\ a_k\right)$$

$$\Longrightarrow\ span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$$

$$\subseteq span\ \left(a_1, a_2, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_k\right)$$

$$\mathrm{v} \in span\ \left(a_1, a_2, \dots, a_i\ + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots\ ,\ a_k\right)$$

$$\Longrightarrow \exists\ \mu_1,\ \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}\ ;$$

$$\mathrm{v} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i \left(a_i + \lambda a_j\right)$$

$$+ \cdots +\ \mu_j a_j + \cdots + \mu_k a_k$$

$$= \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_i a_i + \cdots + \left(\mu_j + \lambda \mu_i\right) a_j$$

$$+ \cdots + \mu_k a_k$$

$$\Longrightarrow \mathrm{v} \in span\ (a_1, a_2, \dots, a_i\ , \dots\ ,\ a_k)$$

$$\Longrightarrow span\ \left(a_1, a_2, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_k\right)$$

$$\subseteq span\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$$

په نتیجه کی

$span\ (a_1, a_2, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_k) = pan\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$

تعریف 5.5 : $A \in M(mxn, \mathbb{K})$

مونږ د A متریکس کرښي (rows) په $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{K}^n$ او ستني (colmns) په $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}^m$ سره ښیو. د 4.4 لیما مخې $span(r_1, r_2, \dots, r_m)$ یوه فرعی فضا په $\mathbb{K}^n$ کې او $span(c_1, c_2, \dots, c_n)$ یوه فرعی فضا په $\mathbb{K}^m$ کې ده. $span(r_1, r_2, \dots, r_m)$ د row subspace (کرښې فرعی فضا) په نوم یادیږي اومونږ هغه په rs(A) سره ښیو. یعنی:

$$rs(A) := span(r_1, r_2, \dots, r_m)$$

$span(c_1, c_2, \dots, c_n)$ د Column subspace (ستونی فرعی فضا) په نوم یادیږي او هغه په cs(A) سره ښیو. یعني:

$$cs(A) := span(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

اویاداچې :

$$cs(A) = \{ A.x \mid x \in \mathbb{K}^n \} \quad , rs(A) = \{ x^t .A \mid x \in \mathbb{K}^m \}$$

تعریف 5.6: row rank (کرښي رنک) او column rank (ستنی رنک) په لاندي ډول تعریف شوي دی

$$rk_r(A) = dim(rs(A)) \ , \ rk_c(A) := dim(cs(A))$$

rk_c دلته column rank او rk_r د row rank دی.

د 5.3 قضې له مخې پوهیږو چې په span کې تغیر نه راځي که چیرته پری مقدماتي عملیات تطبیق شی. پس دیو A متریکس $rk_r(A)$ مساوي د هغه د خطی مستقلو لیکو شمیرسره او $rk_c(A)$ مساوي د خطی مستقل (lin-indep) ستنو (ستون) شمیر سره دی. یعني په یوه متریکس کې لاندي رابطي صدق کوي

$$rk_c(A) = dim(cs(A)) = rk_r(A) = dim(rs(A))$$

څرنګه چې $rk_c(A)$ او $rk_r(A)$ سره مساوي دی. وروسته له دی فقط rk(A) لیکو. یعنی: $rk(A) = rk_c(A) = rk_r(A)$

پس د یو A متریکس rank مساوي د هغه د خطی مستقل ستنو(یا کرښو) شمیر سره دی. یعنی که $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او د $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ وکتورو مربوطه متریکس A وي . بیا د A متریکس $Rank$ په لاندی ډول لاس ته راځي :

$$Rank(A) := \dim(span(a_1, a_2, \dots, a_k))$$

مثال 5.4: په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضای کی لاندي وکتورونه لرو :

$a_1 = (1,2,0)$, $a_2 = (2,0,1)$, $a_3 = (2,4,0)$

ددغو وکتورومتریکس په لاندي ډول دی :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

د مقدماتی عملیاتوتر تطبیق وروسته A د B متریکس شکل نیسی

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B د متریکس هغه کربښي چې صفرنه دي، د 5.3 نوټ له مخې خطی مستقل دي.
پس یوه قاعده د $\mathrm{rs(A)} = span(a_1, a_2, a_3)$ ، یعنی د
Row subspace (سطری فرعی فضا) ده او $b_1 = (1,2,0)$ ،
$b_2 = (0,-4,1)$ وکتورونه یوه قاعده د $\mathrm{rs(A)}$ جوړوي.
په نتیجه کې Rank(A) = dim(rs(A)) = 2 دی
مثال: غواړو د لاندي متریکس rank پیدا کړو

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې ورستی متریکس 2 خطي مستقل کربښي لري پس rank د A مساوي 2 دی.

مثال: $(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا ده.

(a) $0 \neq v \in V$

$H := span(v) = < v > = \{w \in V | w = \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$
$Rank(H) = \dim\big(span(v)\big) = 1$

(b) $v_1, v_2 \in V$ خطی مستقل وکتورونه او A دهغوي مربوط متریکس دی

$H := span(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle$

$$= \{w \in V | w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})\}$$
$$Rank(A) = Rank(H) = \dim\big(span(v_1, v_2)\big) = 2$$

مثال 5.5 : په $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی لاندی وکتورونه لرو :

$a_1 = (0,0,0,2,-1) \qquad a_2 = (0,1,-2,1,0)$
$a_3 = (0,-1,2,1,-1) \qquad a_4 = (0,0,0,1,2)$

د هغوي مربوطه متریکس په لاندی ډول معلومیږي .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrowtail$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} 1. \qquad \rightarrowtail$$

$$\rightarrowtail \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrowtail \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} -2. \quad -2.$$

$$\rightarrowtail \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} -1.$$

$$\rightarrowtail \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

د B متریکس هغه کرښي چې خلاف د صفر دي د *5.3* نوټ له مخی خطی مستقل (lin-indep) دي. پس د $W := span(a_1, a_2, a_3, a_4)$ فرعی فضا یوه قاعده ده . یعنی $b_1 = (0,1,-2,1,0)$ ، $b_2 = (0,0,0,1,2)$ او $b_3 = (0,0,0,0,5)$ یوه قاعده د W جوړوي. په نتیجه کی

Rank(A) = dimW = 3

تمرین: په $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی لاندی وکتورونه لرو :

$$a_1 = (1,2,0,2,-1) \qquad a_2 = (2,2,-1,0,0)$$
$$a_3 = (-2,-2,2,-4,1) \qquad a_4 = (1,2,0,4,-1)$$

(a) د پورتنیووکتورو مربوطه متریکس ولیکی .

(b) rank(A) پیداکړی

(c) د $H := span(a_1, a_2, a_3, a_4)$ قاعده (basis) پیدا کړی

(d) dimH پیدا کړی

لیما 5.2: $A\in M(nxn, \mathbb{K})$. بیا :

$$rk(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad det(A) \neq 0$$

ثبوت "⇐" : det(A) ≠ 0 لرو. باید ثبوت شي چې rk(A) = n دی که rk(A) = n نه وي. په دی صورت بیا:

$$rk(A) \neq n \quad \Rightarrow \quad rk(A) < n$$

پس باید وروسته د مقدماتی عملیاتو (elem-trans) د متریکس A څخه یو متریکس لاس ته راشي چې لږ ترلږه یوه لیکه یي مساوي صفر وي. څرنګه چې داعملیات دیترمینانت ته تغیرنه ورکوي. پس باید det(A) مساوي په صفروي. چې دا خلاف د فرضیي ده . پس باید rk(A) = n وي

ثبوت " ⇒ " مونږ لرو چې rk(A) = n دی. باید ثبوت شي چې

$\det(A) \neq 0$ دی.

ځرنګه چې $rk(A) = n$ دی . پس کولای شو د A متریکس د مقدماتی عملیاتو پرتطبیق په یو سطری ذینه يي متریکس B تبدیل کړو چې قطری عناصريي خلاف د صفر دي.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & . & . & . & . \\ . & \lambda_2 & . & . & . \\ 0 & 0 & \lambda_3. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(B) = \lambda_1 . \ \lambda_2 . \ \lambda_3 . \ \ldots . \ \lambda_n \neq 0$$

قضیه 5.4 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده ، w_1 , w_2 , w_3, ..., w_n خطی مستقل (lin - indep) وکتورونه‌په V کې دي.
که $V = \ll v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_r \gg$ وي. . بیا :

$$V = \ll w_1 , w_2 , w_3 ,\ldots, w_n, v_{n+1},\ldots, v_r \gg \ \wedge \ n \leq r$$

ثبوت : ثبوت لپاره د complete induction طریقی څخه استفاده کیږي
په complete induction دري لاندي حالتونه موجود دي

لمړی حالت : د $n = 0$ لپاره باید صدق وکړي

دویم حالت : مونږ فرض کو چې د $n - 1$ لپاره صدق کوي

دریم حالت : باید ثبوت شي چې د n لپاره هم صدق کوي

لمړی حالت واضح دی . ځکه د $n = 0$ لپاره :

$$\ll w_1 , w_2 , w_3 ,\ldots, w_n, v_{n+1},\ldots, v_r \gg$$
$$= \ll v_1, v_2 , v_3 , \ldots , v_r \gg$$

او $0 \leq r$ دی

دویم حالت : مونږ فرض کو چې $n - 1$ صدق کوي

$$w_1 , w_2 ,\ldots, w_n \text{ lin-indep} \implies w_1 , w_2 , \ldots, w_{n-1} \text{ lin-indep}$$

ځکه که هغسی نه وي بیا د 4.5 لیما له مخی **:**

$$w_1 , w_2 ,\ldots, w_{n-1} \text{ lin-dep} \implies w_1 , w_2 , \ldots, w_n \text{ lin-dep}$$

مګردا خلاف د فرضيي ده. پس کولای شو د induction د فرضيي له مخی ولیکو :

$$V = \langle\langle w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1}, v_n, \ldots, v_r \rangle\rangle$$

دریم حالت : د induction فرضی له مخې مونږ لرو : $n-1 \le r$

که $n-1 = r$ وي باید $V = \langle\langle w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1} \rangle\rangle$ صدق وکړي. مګردا د هغه خلاف دی چې په 5.1 قضیه کی بیان شوي دی . پس باید $n-1 < r$ وي . اویا يي ليکو $n \le r$. ځرنګه چې د induction فرضی له مخې:

$$V = \langle\langle w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1}, v_n, \ldots, v_r \rangle\rangle$$

پس کولای شو w_n دیو خطی ترکیب (lin-comb) په شکل ولیکو . یعنی:

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$;

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n v_n + \ldots + \lambda_r v_r$$

د $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_r = 0$ حالت صدق نه کوي ځکه په هغه صورت کی :

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \text{ lin-dep}$$

مګردا خلاف د فرضی دی. پس باید یو $\lambda_i \neq 0$ ($i = n, n+1, \ldots, r$) موجود وي . مونږ کولای شوهغه $\lambda_n \neq 0$ انتخاب کړو. اوس د 5. 2 قضيې له مخی کولای شو v_n د w_n سره عوض کړو اوپه نتیجه کی :

$$V = \langle\langle w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r \rangle\rangle$$

مثال: مونږ په ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}$) وکتوری فضا کې لرو

$u = (1,0,0,1)$, $v = (0,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$

په اسانی کولای شو ثبوت کړوچې u او v وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي. له بلي خوا پوهيږو چې $\mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle\rangle$ دی . پس د 5.4 قضيی له مخې لاس ته راځی:

$$\mathbb{R}^4 = \langle\langle u, v, e_3, e_4 \rangle\rangle$$

لیما 5.3 : $(V, \mathbb{K})$ یو وکتوری فضا ده چې n معین بعد لري . یعنی $\dim V = n$. بیا دالاندی افادي له يوبل سره معادلی دی :

(1) $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$

(2) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دی

ثبوت

$(1) \Rightarrow (2)$

که چیری $u_1,u_2,\ldots,u_n$ کتورونه خطی مستقل نه وي. بیا:

$u_1,u_2,\ldots,u_n$ lin-dep

$\Longrightarrow u_1,u_2,\ldots,u_n,u_{n+1}$ lin-dep [د 4.5 لیما له مخی]

یعنی که د وکتورو شمیر له n څخه زیاد شي بیا خطی مستقل کیدای نشي. او همدارنګه نشی کیدای د خطی مستقل وکتورو شمیر له n څخه کم شي . ځکه $\dim V = n$ دی . پس $u_1,u_2,\ldots,u_n$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي.

$(2) \Rightarrow (1)$

څرنګه چې $\dim V = n$ دی پس تعداد دهغو وکتورو چې خطی مستقل دی له n څخه زیات کیدای نه شي . یعنی

$\dim V = n \ \wedge \ u \in V \Longrightarrow u_1,u_2,\ldots,u_n , u$ lin-dep

د 4.5 لیما له مخې u یو خطی ترکیب (lin-comb) د $u_1,u_2,\ldots,u_n$ وکتورو دی. پس :

$$V = < u_1,u_2,\ldots,u_n >$$

له پورتنی لیما څخه نتیجه اخلو چې که مونږ پوه شو چې $\dim V = n$ معین د ی. په دې صورت:

$(a) \quad V = < u_1,u_2,\ldots,u_n > \ \Leftrightarrow \ V = << u_1,u_2,\ldots,u_n >>$

$(b) \quad u_1,u_2,\ldots,u_n$ lin-indep $\ \Leftrightarrow \ V = << u_1,u_2,\ldots,u_n >>$

قضیه 5.5 : $(W, \mathbb{K})$ د یو معین بعد وکتوری فضا ده.

(1) په W کی که هرخطی مستقل وکتوروسیت ته یو ډول وسعت ورکړل شي پر قاعده (basis) د W تبدیل کیدای شي .

(2) په W کی که د وکتورو هر سیت ته یو ډول وسعت ورکړل شي، په قاعده (basis) د W تبدیل کیدای شي په دې شرط چې دا وکتورونه یو span د W وي.

(1) ثبوت: $u_1,u_2,\ldots,u_k \in W$

$u_1,u_2,\ldots,u_k$ lin-indep

$\Longrightarrow W = < u_1,u_2,\ldots,u_k > \ \vee \ W \neq < u_1,u_2,\ldots,u_k >$

$W = < u_1,u_2,\ldots,u_k >$

$\Longrightarrow W = << u_1,u_2,\ldots,u_k >>$ [د 5.2 لیما له مخې]

$W \neq < u_1,u_2,...,u_k > \implies \exists\ u_{k+1} \in W ;\ u_{k+1} \notin span(u_1,u_2,...,u_k)$

$u_1,u_2,\dots,u_k\ ,\ u_{k+1}$ وکتورونه خطی مستقل دی . ځکه که هغسې نه وي. په دی صورت u_{k+1} د 4.5 لیما له مخی یو خطی ترکیب د $u_1,u_2,\dots,u_k$ دی. یعنی:

$u_1,u_2,\dots,u_k\ ,\ u_{k+1}$ lin-dep

$$\implies \exists\ a_1,a_2,\dots,a_k \in \mathbb{K}\ ;\ u_{k+1} = a_1u_1+ a_2u_2+\dots+ a_ku_k$$

مګردا د $u_{k+1} \notin span(u_1,u_2,\dots,u_k)$ سره په تضاد کی دی. پس

$u_1,u_2,\dots,u_k\ ,\ u_{k+1}$ خطی مستقل دي.

که $W = < u_1,u_2\ ,\ \dots,u_k,u_{k+1} >$ وي په دې صورت $u_1,u_2,\dots,u_k,u_{k+1}$ یوه قاعده د W ده . که داسي نه . یعنی

$$W \neq < u_1,u_2,\dots,u_k\ ,\ u_{k+1} >$$

پورتنی لیاره ته ترهغه پوری ادامه ورکو ترڅو خطی مستقل وکتورو سیت او span سیت سره مساوي شی . په هغه وخت د نوموړو وکتورو سیت یوه قاعده (basis) د W جوړوي

(2) ثبوت : مونږ فرض کو چي $W = < u_1,u_2,\dots,u_k >$ دی. که $u_1,u_2,\dots,u_k$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) وي. بیا دا basis هم ده. که داسی نه وي په دی صورت د 5.4 لیما له مخی یو وکتور دنورو وکتورو خطی ترکیب دی . که دا وکتور دمثال په ډول u_1 وي ، په دې صورت:

$$\exists\ a_2, a_3,\dots, a_k \in \mathbb{K}\ ;\ u_1 = a_2u_2 + a_3 u_3 + \dots+ a_ku_k$$

له بلی خوا:

$$u \in W = < u_1,u_2,\dots,u_k >$$
$$\implies \exists\ b_1, b_2,\dots, b_k \in \mathbb{K}\ ; u = b_1u_1 + b_2 u_2 + \dots+ b_ku_k$$
$$\implies u = b_1(a_2u_2 + a_3 u_3 + \dots+ a_ku_k) + b_2 u_2 + \dots+ b_ku_k$$
$$= (b_1a_2 + b_2)u_2 + (b_1a_3 + b_3)u_3 + \dots + (b_1a_k + b_k)u_k$$
$$\implies W = < u_2,u_3,\dots,u_k >$$

که $u_2,u_3,\dots,u_k$ بیا هم خطی مستقل نه وي. بیا پورتنی لیاره ته ترهغه پوری ادامه ورکو ترڅو د خطی مستقل وکتورو سیت span سیت سره مساوي شي.

نوټ: که $(V, \mathbb{K})$ یوه معینه وکتوری فضا او H دهغه فرعی فضا وي. بیا

$$dimH \leq dimV$$

مثال 5.6 : مونږ د $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کې لاندی وکتورونه لرو:

$u_1 = (1,-2,5,-3)$, $u_2 = (0,1,1,4)$, $u_3 = (1,0,1,0)$
$W := span(u_1,u_2,u_3)$

که A د پورتني وکتورو مربوطه ميتريکس وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که د A متريکس په ذينه يي متريکس تبديل شي لاندی شکل لري

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

د U په متريکس کی دري 3 کرښي خطی مستقل دي. او اوس هغه د وکتور په ډول ليکو

$v_1 = (1,-2,5,-3)$, $v_2 = (0,1,1,4)$, $v_3 = (0,0,1,\frac{5}{6})$
$span(u_1,u_2,u_3) = W = span(v_1,v_2,v_3)$ [د 5.3 قضيی له مخی]
$\Longrightarrow \quad W = \langle\langle u_1,u_2,u_3 \rangle\rangle$
$\wedge \quad W = \langle\langle v_1,v_2,v_3 \rangle\rangle$ [د 5.2 ليما له مخی]
$\Longrightarrow \quad dimW = 3$

که د U متريکس سره د $u_4 = (0,0,0,t)$ $(t \neq 0)$ کرښه علاوه شي . بيا U څلور کرښی خطی مستقل دی . يعنی

v_1,v_2,v_3, v_4 lin-indep
$\Longrightarrow \quad \mathbb{R}^4 = \langle\langle v_1,v_2,v_3, v_4 \rangle\rangle$ [د 5.2 ليما له مخی]

پورتنی مثال وښودل چې خطی مستقل وکتوروته وسعت ورکړل شو او په يوه قاعده (basis) تبديل شو

مثال 5.7 : په دې مثال کی غواړو 5.5 قضيه تطبيق کړو.

مونږ په $(\mathbb{R}^3 , \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (3,2,1)$ وکتورونه لرو u_1 او u_2 خطی مستقل دی، مګريو قاعده (basis) د $\mathbb{R}^3$ کيدای نه شی . ځکه بعد (dim) د $\mathbb{R}^3$ مساوي په 3 دی. پس بايد د خطی مستقل وکتورو شميرله 3 کم نه وي.

$\mathbb{R}^3 \neq span(u_1 , u_2) \Longrightarrow \exists \; u \in \mathbb{R}^3 ; u \notin span(u_1 , u_2)$

په اسانی سره ښودلی شو چې $u = (1,1,0)$ هغه ډول يو وکتور دی.

یعنی $u \notin span(u_1, u_2)$. که هغه ډول نه وي . یعنې :

$u \in span(u_1, u_2)$

$\Longrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \; \mathbb{R} \; ; \; u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$\Longrightarrow (1,1,0) = \lambda_1 \; (1,2,3) + \lambda_2 (3,2,1)$

$= (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 2\lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2)$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

د پورتنی معادلاتو مربوطه متریکس لاندی شکل لري :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

څرنګه $-1 = 0$ ممکن نه دی . پس پورتنی معادلات حل نه لری . په نتیجه کی $u \in span(u_1, u_2)$ نه دی .

د u_1, u_2 و u وکتورونه خطی مستقل (lin – indep) دي. که داسی نه وي د 4.5 لیما له مخې :

u_1, u_2, u lin – dep $\Longrightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \; ; \; u = a_1 u_1 + a_2 u_2$

$\Longrightarrow u \in span(u_1, u_2)$

مګردا خلاف د انتخاب د u دی. پس باید u_1, u_2 و u خطی مستقل (lin – indep) وي . د 5.2 لیما له مخې کوای شو ولیکو چې:

$\mathbb{R}^3 = < u_1, u_2, u >$

. په نتیجه کی u_1, u_2 او u وکتورونه یو قاعده د $\mathbb{R}^3$ ده. یعنی:

$\mathbb{R}^3 = << u_1, u_2, u >>$

مثال 5.8 : په دې مثال کی غواړم وښیم، چې څرنګه یوه قاعده (basis) د یوې فرعی فضا پیداکولای شو.

$$W := \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 2x_1 \}$$

لیدل کیږي چې W یوه فرعی فضا په $\mathbb{R}^4$ کې ده. د قاعدی د پیداکولولپاره یو وکتورچې صفر نه وي د مثال په ډول $u= (1,2,0,0) \in W$ به انتخاب کړو . په $\mathbb{R}^4$ کی د اساسی قاعدی e_1 اوe_2 وکتورونه په W کې شامل نه دي ، مگر e_3 او e_4 شامل دی . په اسانی ثبوت کیدای شی چې u , e_3 او e_4 وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) دي. پس د 5.2 لیما له مخی $W=<u,e_3,e_4>$ هم کیږي. په نتیجه کی یوه قاعده د W ده. یعنی:

$$W = <<u,e_3,e_4>> = <<(1,2,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) >>$$

$$\wedge \quad \dim W = 3$$

تمرین 5.5: مونږلاندي سیتونه لرو:

$$H:= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 2x_1 \}$$

$$W:= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_4 \}$$

$$V:= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+3x_2+2x_4=0 \,,\, 2x_1+x_2+x_3=0 \}$$

(a) ثبوت کړی چې H ، W او V فرعی فضاوي په $\mathbb{R}^4$ کې دي

(b) بعد (Dimension) د H ، W او V پیداکړی

شپږم فصل

د فرعی فضاو مجموعه
(Sum of Subspaces)

تعریف6.1: $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او $H_1, H_2, \ldots, H_n$ فرعی فضاوي په V کی دي .

$H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_n :=$
$$\{ h \in V \mid \exists\, h_i \in H_i \,; h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n \}$$
پورتنی مجموعه د فرعی فضا د مجموعه (Sum of Subspaces) په نوم یادیږي

قضیه6.1 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او H_1 ، H_2 فرعی فضاوي په V کی دي. بیا همدارنگه H_1+H_2 یوه فرعی فضا په V کی ده

ثبوت : $\mu, \tau \in \mathbb{K}$

$$0 \in H_1, 0 \in H_2 \implies 0 \in H_1 + H_2 \implies H_1 + H_2 \neq \emptyset$$
$$u, v \in H_1 + H_2$$
$$\implies \exists\, u_1, v_1 \in H_1 \wedge \exists\, u_2, v_2 \in H_2 \;;\; u = u_1 + u_2 \wedge v = v_1 + v_2$$
$$\implies \tau u + \mu v = \tau(u_1+u_2) + \mu(v_1+v_2)$$
$$= (\tau u_1 + \mu v_1) + (\tau u_2 + \mu v_2)$$
$$\tau u_1 + \mu v_1 \in H_1 \wedge \tau u_2 + \mu v_2 \in H_2 \implies \tau u + \mu v \in H_1 + H_2$$
په نتیجه کی $H_1 + H_2$ د 4.4 لیما له مخی یوه فرعی فضا په V کی ده .

لیما6.1 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او H_1, H_2 فرعی فضاوي په V کی دي . که $V = H_1 + H_2$ وي بیا دا لاندي افادي له یوبل سره معادلي دي :

(1) $H_1 \cap H_2 = \{ 0 \}$
(2) $\forall\, v \in V \;, \exists!\, h_1 \in H_1 \wedge \exists!\, h_2 \in H_2 \,; v = h_1 + h_2$
(3) $0 \neq h_1 \in H_1 \wedge 0 \neq h_2 \in H_2 \implies h_1, h_2$ lin-indep in V

ثبوت :

(1) $\Leftarrow$ (2) : که چیري $w_1 \in H_1$ او $w_2 \in H_2$ هم موجود وي چې $v = w_1 + w_2$ شي . یعنی

$$w_1 + w_2 = v = h_1 + h_2 \implies h_1 - w_1 = w_2 - h_2$$

$h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, $w_1 \in H_1$, $w_2 \in H_2 \implies -h_2 \in H_2$, $-w_1 \in H_1$
$\implies h_1 - w_1 = w_2 - h_2 \quad \in H_1 \cap H_2 = \{ 0 \}$
$\implies h_1 - w_1 = 0 \quad \wedge \quad h_2 - w_2 = 0$
$\implies h_1 = w_1 \;\wedge\; h_2 = w_2$

(2) ⇐ (3) : که h_1 ، h_2 خطی مستقل (lin-indep) نه وي پس باید خطی وابسته وي. په دی صورت کی د 4.5 لیما له مخې یو له دی وکتوروڅخه یو خطی ترکیب دنورو دی. مونږ فرض کوو چې h_1 خطی ترکیب د h_2 دی . یعنی :

$\exists\, \lambda \in K$; $h_1 = \lambda\, h_2 \implies h_1 - \lambda\, h_2 = 0$

له بلي خوا $V = H_1 + H_2$ دی . پس :

$o \in V \implies \exists\, w_1 \in H_1 \;\wedge\; \exists\, w_2 \in H_2$; $0 = w_1 + w_2$

له دی څخه لاسته راځي چې :

$h_1 - \lambda\, h_2 = 0 = w_1 + w_2$

مگردا خلاف د (2) دی. پس باید h_1 او h_2 خطی مستقل وي

(3) ⇐ (1) : که $H_1 \cap H_2 = \{ 0 \}$ نه وي. بیا کولای شو ولیکو :

$\exists\, v \in H_1 \cap H_2, v \neq 0 \implies v + (-1).v = 0$
$\implies v$, $-v$ lin-dep

مگر دا د (3) سره په تضاد کی دی . پس باید $H_1 \cap H_2 = \{ 0 \}$ وي .

نوټ : که د فرعی فضاو شمیر له 2 څخه زیات شي بیا په هغه صورت د 6.1 لیما (1) او (3) افادي سره معادلي نه دي. د مثال په ډول مونږ پوهیږو چې په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کی e_1 , e_2 و e_3 وکتورونه اساسی قاعده (canonical basis) جوړوي. یعنی $\mathbb{R}^3 = \langle\langle e_1, e_2, e_3 \rangle\rangle$
که H_1 , H_2 او H_3 په لاندي ډول وټاکل شي:

$H_1 = \mathrm{span}(e_1,e_2)$, $H_2 = \mathrm{span}(e_2,e_3)$, $H_3 = \mathrm{span}(e_1,e_3)$

د 4.4 لیما له مخې دا سیتونه فرعی فضاوي په $\mathbb{R}^3$ کی دي او $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{ 0 \}$ دی . ځکه :

$x = (x_1, x_2, x_3) \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$
$\implies \exists\, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
$x = a_1.e_1 + a_2.e_2 = b_1.e_2 + b_2.e_3 = c_1.e_1 + c_2.e_3$
$\implies (x_1, x_2, x_3) = (a_1,0,0) + (0,a_2,0) = (0,b_1,0) + (0,0,b_2)$
$= (c_1,0,0) + (0,0,c_2)$

$\Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (a_1,a_2,0) = (0, b_1,b_2) = (c_1,0,c_2)$
$\Longrightarrow (a_1 = 0 , c_1 = 0) \wedge (a_2 = 0, b_1 = 0)$
$\wedge (b_2 = 0, c_2 = 0)$
$\Longrightarrow (x_1, x_2, x_3 = (0,0,0) \Longrightarrow H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{ 0 \}$

مګر $e_1 \in H_1$, $e_2 \in H_2$ او $e_1 \in H_3$ په $\mathbb{R}^3$ کی خطی مستقل (lin-indp) نه دي . ځکه که مونږ د τ_1 τ_2 , $\tau_3 \in \mathbb{R}$ لپاره لاندي رابطه ولرو :

$\tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 + \tau_3 e_1 = 0$
$\Longrightarrow (\tau_1 , 0,0) + (0, \tau_2 , 0) + (\tau_3 ,0,0) = (0,0,0)$
$\Longrightarrow (\tau_1 + \tau_3 , \tau_2 , 0) = (0,0,0)$
$\Longrightarrow \tau_1 + \tau_3 = 0 \wedge \tau_2 = 0 \Longrightarrow \tau_3 = -\tau_1$

پورتني معادلي پارامیتري حل لري . یعنی:

$$SLE(x,y,z) = \{(\tau_1 , \tau_2 , \tau_3) \in \mathbb{R}^3 \ | x = \tau_1 , y = \tau_2 , z = \tau_3 \}$$
$$= \{(\tau_1 , 0 , -\tau_1 \}$$

که $\tau_1 = 2$ وضع شي. له هغه څخه $\tau_3 = -2$ لاس ته راځي او په نتیجه کی خطی مستقل نه دی. ولیدل شو چې که د فرعی فضاو شمیر له 2 څخه زیات شي بیا په هغه صورت د (1) او (3) افادي سره معادلي نه دي.

قضیه 6.2 : (Dimension Formel)

(V, $\mathbb{K}$) یوه وکتوری فضا چې معین بعد (Dimension) لري او H_1,H_2 فرعی فضاوي په V کې دي . بیا:

$$\text{Dim}(H_1+H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

ثبوت: مونږ فرض کوو چې:

$$H_1 \cap H_2 = \langle\langle v_1 , v_2 , v_3,\ldots, v_m \rangle\rangle$$

د 5.4 قضیی له مخې کولاي شو د H_1 او H_2 قاعدی (Basis) لاندي شکل ته راوړو :

$$H_1 = \langle\langle v_1 , v_2 , v_3,\ldots, v_m,w_1,w_2,\ldots,w_n \rangle\rangle$$

$$H_2 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_k \rangle\rangle$$

اوس باید ثبوت کړو چې :

$$H_1 + H_2 = \langle\langle v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n, u_1, u_2, \dots, u_k \rangle\rangle$$

یعنی باید ثبوت شي :

(a)

$$H_1 + H_2 = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n, u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$$

(b) پورتني وکتورونه د $H_1 + H_2$ په وکتوری فضا کي خطی مستقل دي (lin-indep)

ثبوت (a) :

$h \in H_1 + H_2 \implies \exists\ h_1 \in H_1 \ \wedge\ \exists\ h_2 \in H_2 ;\ h = h_1 + h_2$

څرنګه چې $H_1 = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ دی. پس

$$\exists\ \tau_i, \mu_j \in \mathbb{K}\ (i = 1,2,\dots,m \ \wedge\ j = 1,2,\dots,n);$$

$$h_1 = \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \dots \tau_m v_m + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n$$

همدارنګه $H_2 = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$ دی پس

$$\exists\ \tau_i', \mu_j' \in \mathbb{K}\ (i = 1,2,\dots,m \ \wedge\ j = 1,2,\dots,k);$$

$$h_2 = \tau_1' v_1 + \tau_2' v_2 + \dots + \tau_m' v_m + \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \dots + \mu_k' u_k$$

$$\begin{aligned} \implies h = h_1 + h_2 = &(\tau_1 + \tau_1')v_1 + (\tau_2 + \tau_2')v_2 + \dots \\ &+ (\tau_m + \tau_m')v_m \\ &+ (\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n \\ &+ \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \dots + \mu_k' u_k \end{aligned}$$

$$\implies H_1 + H_2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n, u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$$

(b) **ثبوت :** که چیري مونږ ولرو :

$$\begin{aligned} \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \dots \tau_m v_m + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n& \\ + \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \dots + \mu_k' u_k = 0 \qquad (*)& \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v := \tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \dots + \tau_m v_m + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots& \\ + \mu_n w_n \in H_1 \qquad (**)& \end{aligned}$$

$$\implies v + \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \dots + \mu_k' u_k = 0$$

$\Longrightarrow$ -v = $\mu_1^{'}$ u₁ +$\mu_2^{'}$ u₂+ ... + $\mu_k^{'}$ uₖ $\Longrightarrow$ -v ∈ H₂ $\Longrightarrow$ v ∈ H₂

$\Longrightarrow$ v ∈ $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$

$\Longrightarrow \exists\, \tau_i^{'} \in \mathbb{K}$ (i=1,2,3,…,m);

$v = \tau_1^{'}v_1 + \tau_2^{'}v_2 + \tau_3^{'}v_3 + \ldots + \tau_m^{'}v_m$

د 4.6 لیما له مخې فقط یو خطی ترکیب (lin-comb) امکان لري . پس باید په (**) معادله کې $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ وي

د (*) معادله بیا لاندې شکل نیسي :

$$\tau_1 v_1 + \tau_2 v_2 + \ldots \tau_m v_m + \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \ldots + \mu_k' u_k = 0$$

څرنګه چې پورتني وکتورونه یوه قاعده (basis) د H_2 جوړوي. پس خطی مستقیل (lin-indep) هم دی. پس باید:

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = \mu_1' = \mu_2' = \ldots = \mu_k' = 0$$

په نتیجه کې (b) هم ثبوت شو. اوس کولای شو ولیکو :

$\dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2) = \mathrm{m}$, $\dim H_1 = m+n$, $\dim H_2 = m+k$

$\dim H_1 + \dim H_2 = m + n + m + k = 2m + n + k$

$\dim(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = m + n + k = m + n + m + k - m$

$= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2)$

تمرین:

(a)

$\mathrm{H}_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2\}$

$\mathrm{H}_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3\}$

$\dim(H_1 + H_2)$ څودی

(b) $(V, \mathbb{R})$ یوه د معین بعد وکتوری فضا او H_2 , H_1 په V کې فرعي فضاوي دي . که $\dim(H_1 \cap H_2) = 3$, $\dim(H_1+H_2) = 12$ او

$\{ w_5 , w_4, w_3 , w_2 , w_1 \}$ یوه قاعده (Basis) د H_2 وي. بیا $dimH_1$ څودی.

تعریف 6.2 یوه وکتوری فضا $(V, \mathbb{K})$ ته direct product (مستقیمه مجموعه) د $H_1,H_2,\ldots, H_n$ فرعی فضاو ویل کیږي . په دی شرط چې :

(i) $V = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$
(ii) $h_i \in H_i$, $h_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$
$\Longrightarrow h_1,h_2,\ldots,h_n$ lin – indep

مونږ هغه په $V = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$ سره ښیو. که $n = 2$ وي په دی صورت د 6.1 لیما له مخې کفایت کوي که د (ii) پرځاي $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ صدق وکړي

قضیه 6.3 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده چې معین بعد (dimension) لري او H_2,H_1 فرعی فضاوي د V دي. بیا دا لاندي افادي له یو بل سره معادل دي :

(a) $V = H_1 \oplus H_2$
(b) $H_1 = \langle\langle u_1,u_2,\ldots,u_m \rangle\rangle \wedge H_2 = \langle\langle w_1,w_2,\ldots,w_n \rangle\rangle$
$\Longrightarrow V = \langle\langle u_1, u_2,\ldots,u_m ,w_1,w_2,\ldots,w_n \rangle\rangle$
(c) $V = H_1 + H_2 \wedge \dim V = \dim H_1 + \dim H_2$

ثبوت :

(b) $\Leftarrow$ (a)

$V = H_1 \oplus H_2 \Longrightarrow H_1 \cap H_2 = \{0\}$ [د تعریف له مخې]

$\Longrightarrow \dim(H_1 \cap H_2) = 0$

پس د 5.4 قضیې له مخې کولای شو ولیکو:

$V = \langle\langle u_1, u_2, u_3,\ldots, u_m , w_1,w_2, w_3 ,\ldots,w_n\rangle\rangle$

(c) $\Leftarrow$ (b)

مونږ پوهیږو چې $V \supseteq H_1 + H_2$ دی. اوس باید ثبوت شي چې $V \subseteq H_1 + H_2$ دی

$v \in V \Longrightarrow \exists\, \tau_i, \mu_j \in \mathbb{K}\ (i = 1,2,\ldots,m \wedge j = 1,2,\ldots,n)$;

$v = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2 + \ldots \tau_m u_m + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n$

$u := \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2 + \ldots \tau_m u_m$

$w := \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n$

$\Longrightarrow u \in H_1 \wedge w \in H_2 \Longrightarrow v = u + w \in H_1 + H_2$

$\Rightarrow V \subseteq H_1 + H_2$

په نتیجه کې:

$V = H_1 + H_2 \quad \wedge \quad \dim V = m + n = \dim H_1 + \dim H_2$

$(a) \Leftarrow (c)$

د 6.2 قضيې (dimension formel) له مخې:

$$\dim V = \dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

مګرد (c) له مخې $\dim V = \dim H_1 + \dim H_2$ دی. پس :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = 0 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow V = H_1 \oplus H_2$$

قضيه 6.4 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده چې n معین بعد لري او H_1 یوه فرعی فضای په V کې ده . بیا یوه فرعی فضا H_2 په V موجوده ده چې $V = H_1 \oplus H_2$ شي

ثبوت : که $H_1 = \langle\langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_m \rangle\rangle$ وي. بیا کولاي شو د 5.4 قضيې له مخې ولیکو :

$$V = \langle\langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n \rangle\rangle$$

که مونږ H_2 په لاندي ډول تعریف کړو :

$$H_2 = \mathrm{span}(u_{m+1}, \dots, u_n)$$

H_2 د 4.4 لیما له مخی یوه فرعی فضا په V کې ده اوښرنګه چې $u_{m+1}, \dots, u_n$ وکتورنه خطی مستقل دی. پس:

$$H_2 = \langle\langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle\rangle$$

په نتیجه کې (2) د 6.3 قضیه صدق کوي. پس لیکلی شو $V = H_1 \oplus H_2$

مثال 6.1 د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ **په** وکتوری فضا کې H_1 , H_2 او H_3 سیتونه لاندي تعریف شوي دی :

$$H_1 := \left\{ (r, 0) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}, \; H_2 := \left\{ (0, r) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\},$$
$$H_3 := \left\{ (r, r) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) په اسانی سره کولای شو ثبوت کړو چې H_1 , H_2 او H_3 فرعی فضاوي په $\mathbb{R}^2$ کې دي

(b) د H_1 یوه قاعده (Basis) د $e_1 = (1,0)$ وکتور , د H_2
د $e_2 = (0,1)$ وکتوراو د H_3 د $u = (1,1)$ وکتور دی. یعنې :

$H_1 = \ll e_1 \gg$, $H_2 = \ll e_2 \gg$, $H_3 = \ll u \gg$,
$\dim H_1 = \dim H_2 = \dim H_3 = 1$

د مثال په ډول مونږ پوهیږو چې e_1 خطی مستقل (lin-indep) په H_1 کې دی
اود خطی مستقل وکتوروشمیرهم په H_1 یو دی. ځکه که $w = (w_1,0)$ او e_1
خطی مستقل وکتورونه په H_1 کې وي . په دی صورت باید د $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$
لپاره لاندي افاده صدق وکړي

$$\tau_1 . e_1 + \tau_2 . w = 0 \implies \tau_1 = \tau_2 = 0$$
$$w = (w_1,0) = w_1(1,0) = w_1 e_1 \implies w_1 e_1 + (-1.\, W) = 0$$
$$\implies e_1, w \text{ lin-dep}$$

پس یوازي $H_1 = \ll e_1 \gg$ کیداشي او $\dim H_1 = 1$ دی .

(c) $\mathbb{R}^2 = H_1 + H_3$ ، $\mathbb{R}^2 = H_2 + H_3$ او $\mathbb{R}^2 = H_1 + H_2$

$$x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$\implies x = (x_1,x_2) = (x_1-x_2,0) + (x_2,x_2) \in H_1 + H_3$$
$$\implies \mathbb{R}^2 \subseteq H_1 + H_3$$

له بلي خوا پوهیږو چې $H_1 + H_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ دی. په نتیجه کې:

$$\mathbb{R}^2 = H_1 + H_3$$

همدارنګه کولاي شو نور حالات ثبوت کړو.

(d) $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3 = \{0\}$

$$h \in H_1 \cap H_3 \implies \exists\, h_1, h_2 \in \mathbb{R}\ ;\ h = (h_1,0) = (h_2,h_2)$$
$$\implies h_2 = 0 \implies h_1 = h_2 = 0$$
$$\implies h = (0,0) \implies H_1 \cap H_3 = \{0\}$$

همدارنګه کولاي شوپاتي حالات ثبوت کړو. په نتجه کې د 6.1 لیما په ساس
لیکلی شو:

$$\mathbb{R}^2 = H_1 \oplus H_2 \quad , \quad \mathbb{R}^2 = H_1 \oplus H_3 \quad , \quad \mathbb{R}^2 = H_2 \oplus H_3$$

تمرین 6.1 : د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کې H_1 , H_2 , H_3 او H_4 سیټونه په لاندي ډول تعریف شوي دي:

$$H_1 := \left\{ (r, 0,0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}, \quad H_2 := \left\{ (0, r, 0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\},$$
$$H_3 := \left\{ (0,0, r) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}, \quad H_4 := \left\{ (r, r, r) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) ثبوت کړي چې $\mathbb{R}^3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_4$

(b) ایا $\mathbb{R}^3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ رابطه هم صدق کوي ؟

تمرین 6.2: $(V, \mathbb{R})$ یو وکتوری فضای چې معین بعد لري او H_1 , H_2 فرعی فضاوي د V دي.که $\dim H_1 = 8$ ، $\dim H_2 = 12$ او $H_1 \cap H_2 = \langle\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle\rangle$ وي. $\dim(H_1+H_2)$ پیداکړی.

تمرین 6.3: که $\dim H_1 = 4$ ، $\dim V = 10$ او $V = H_1 \oplus H_2$ وي، بیا $\dim H_2$ خودی

اوم فصل
خطی میپنګ
(linear mapping)

تعریف 7.1 : $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ دوه وکتوری فضاوي دي. یوه تابع $L: V \to W$ د خطی میپنګ (linear mapping) په په نوم یادیږی، که چیري لاندي خواص ولري

$u,v \in V \quad , \lambda \in \mathbb{K}$

(1) $L(u+v) = L(u) + L(v)$

(2) $L(\lambda u) = \lambda . L(u)$

خطی میپنګ ته خطی نقش اویا خطی تابع هم ویل کیږي. په ځینو کتابو کې linear mapping د lineartransformation ، operator اویا د homomorphism په نوم هم یادیږي. که یو خطي میپنګ injective وې د monomorphism په نوم که surjective وې د epimorphism په نوم او که bijective وي د isomorphism په نوم یادیږي.
که V = W وي په دې صورت endomorphism ورته ویل کیږي
یو endomorphism چې *bijective* هم وي ، بیا automorphism ورته ویل کیږي .
د یو $L: V \to W$ خطي میپنګ په واسطه ځینې خطي ارتباطات د V او W په مینځ کې لاسته راځي. دمثال په ډول:

$$v \in span(v_1 , v_2,..., v_r)$$
$$\Rightarrow L(v) \in span(L(v_1), L(v_2), \ldots , L(v_r))$$

$v_1, v_2,\ldots, v_n$ lin-dep $\Rightarrow$ $L(v_1), L(v_1), \ldots, L(v_n)$ lin-dep

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$$
$$\Rightarrow L(v) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) + \ldots + \lambda_r L(v_r)$$

که L یو Isomorphism وې. بیا:

$v_1, v_2,\ldots, v_n$ lin-indep $\Rightarrow$ $L(v_1), L(v_1), \ldots, L(v_n)$ lin-indep

که H یوه فرعې فضا په V کې وې. بیا L(H) یوه فرعې فضا په W کې ده.

مثال 7.1: $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ دوه وکتوری فضاوي دی

(a) لاندی تابع یو خطی میپنګ **(lin-map)** دی

$$f : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto f(v) = 0$$

(b) همدارنګه دالاندي تابع یو خطی میپنګ lin-map دی

$$id : V \to V$$
$$v \to v$$

مثال 7.2 : مونږ د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضا په نظرکی نیسو

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1+x_2,x_3,0)$$

L یو خطی میپنګ (lin-map) دی . ځکه :

$x = (x_1,x_2,x_3),\ y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
L(x+y) &= L((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) \\
&= L(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\
&= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), x_3 + y_3, 0) \\
&= (x_1+ x_2, x_3, 0) + (y_1+ y_2, y_3, 0) \\
&= L(x_1,x_2,x_3) + L(y_1,y_2,y_3) = L(x) + L(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\lambda x) &= L(\lambda (x_1,x_2,x_3)) = L(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\
&= (\lambda x_1+ \lambda x_2, \lambda x_3, 0) = \lambda (x_1+ x_2, x_3, 0) = \lambda L(x)
\end{aligned}$$

ثبوت شو چې L یو خطی میپنګ (lin-map) دی

مثال : مونږد $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا په نظرکي نیسو. لاندي تابع automorphism ده

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (2x_1 ,x_2)$$

حل : په 1.4 مثال کي موولیدل چې L یو bijective دی. اوس غواړو ثبوت کړو چې L خطی میپنګ (lin-map) دی

$x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
L(x+y) &= L((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) \\
&= L(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&= (2.(x_1 + y_1) , x_2 + y_2) \\
&= (2.x_1+ 2. y_1) , x_2 + y_2)
\end{aligned}$$

$= (2.x_1, x_2) + (2. y_1, y_2)$
$= L(x_1,x_2) + L(y_1,y_2) = L(x) + L(y)$
$L(\lambda x) = L(\lambda (x_1,x_2)) = L(\lambda x_1, \lambda x_2)$
$= (2 \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda (2x_1, x_2) = \lambda L(x)$

ثبوت شو چې L يو automorphism دی.

مثال 7.3: $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ يو Interval دی.

$$C(I,\mathbb{R}) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue(متمادی)} \}$$

مونږپوهيږو چې $(C(I,\mathbb{R}), \mathbb{R})$ يوه وکتوری فضا ده

$s: C(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto \int_a^b f(x)dx$

s يو خطی ميپنګ (lin-map) دی

حل: $x, \lambda \in \mathbb{R}$

$f,g \in C(I,\mathbb{R})$, $s(f+g) = s(f+g)(x) = s(f(x) + g(x))$
$= \int_a^b (f(x) + g(x))dx$

$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x))dx$
$= s(f) + s(g)$

همدا ډول کولای شوثبوت کړو چې $s(\lambda f) = \lambda s(f)$ صدق کوي

تمرين 7.1 :

(a) په لاندی تابع کی b کوم قيمت واخلی ، چې خطی ميپنګ (lin-map) شي

$L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b$

(b) ايا لاندي تابع په ($\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$) وکتوری فضا کی يو خطی ميپنګ ($\mathbb{C} - lin - map$) دی

$L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \bar{z}$

(c) ايا لاندي تابع په ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) وکتوری فضا کی يو خطی ميپنګ ($\mathbb{R} - lin - map$) دی

$L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \bar{z}$

(d) ثبوت کړی چې لاندې تابع په ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$) وکتوری فضا کی یو خطی میپنګ (lin-map) دی

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1 , x_1 - x_2)$$

لیما 7.1 : (V, $\mathbb{K}$) او (W, $\mathbb{K}$) وکتوری فضاګاني دي . $L : V \to W$ ،
$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ، $u, v, 0_v \in V$ او $0_w \in W$. بیا :

(a) L lin-map $\Rightarrow L(0_v) = 0_w \ \wedge \ L(u - v) = L(u) - L(v)$

(b) L lin-map $\Leftrightarrow L(\lambda . u + \mu . v) = \lambda . L(u) + \mu . L(v)$

(a) ثبوت:

$L(0_v) = L(0. 0_v) = 0.L(0_v) = 0_w$

$$L(u - v) = L(u + (-) v) = L(u) + (-1) L(v)$$
$$= L(u) - L(v)$$

(b) ثبوت :

„$\Rightarrow$ “

$$L \text{ lin-map} \Rightarrow L(\lambda . u + \mu . v) = L(\lambda . u) + L(\mu . v)$$
$$= \lambda . L(u) + \mu . L(v)$$

“ $\Leftarrow$”

$$L(\lambda . u) = L(\lambda . u + 0.v) = \lambda . L(u) + 0.L(v) = \lambda . L(u)$$

که مونږ $\lambda = \mu = 1$ وضع کړو. په دی صورت :

$$L(u + v) = L((\lambda . u + \mu . v) = \lambda . L(u) + \mu . L(v) = L(u) + L(v)$$

$\Rightarrow$ L lin-map

مثال 7.4 : دالاندی تابع یو خطی میپینګ (lin-map) دی

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (-x_1 , x_2)$$

حل : د حل لپاره د 7.1 لیما څخه استفاده کو.

$x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda , \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(\lambda.x + \mu.y) &= L((\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu y_1, \mu y_2)) \\ &= L((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)) \\ &= (-\lambda x_1 - \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (-\lambda x_1 , \lambda x_2) + (-\mu y_1, \mu y_2) \\ &= \lambda L(x) + \mu L(y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ L lin-map

لیما 7.2 : $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ وکتوری فضا دي او $L : V \to W$ یو خطی میپنگ (lin- map) دی . $v_i \in V$, $\lambda_i \in K$ (i=1,2,...,n) . بیا :

(a) $L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n)$

$$= \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) + ...+ \lambda_n L(v_n)$$

(b) $v_1, v_2,......, v_n$ lin-dep

$$\Rightarrow L(v_1), L(v_1), ..., L(v_n) \text{ lin-dep}$$

(c) V' subspace (فرعی فضا) in V $\wedge$

W' subspace (فرعی فضا) in W

$\Longrightarrow$ $L(V')$ subspace in W $\wedge$ $L^{-1}(W')$ subspace in V

(d) $\dim(L(V)) \leq \dim V$

(e) L isomorph $\Rightarrow$ $L^{-1} : W \to V$ isomorph

(a) ثبوت:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) &= L(\lambda_1 v_1) + L(\lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 L(v_1) + L(\lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) \end{aligned}$$

که مونږ د په همدی ډول ادامه ورکړو بیا :

$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots.. + \lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) + \ldots.+ \lambda_n L(v_n)$

(b) ثبوت :

$v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ lin-dep

$\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K}\,(i = 1,2,\ldots,n)$, (ټول λ_i صفر نه دی) ;
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} L(\lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(v_i)$

$= L(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)$ [د (a) له مخې]

$= L(0) = 0$ [L خطی میپینګ]

$\Rightarrow \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) + \ldots.+ \lambda_n L(v_n) = 0$

$\Rightarrow L(v_1), L(v_1), \ldots., L(v_n)$ lin-dep

(c) ثبوت :

L(V´) یوه فرعی فضا په W کی ده. ځکه:

(1) $0 \in V' \Rightarrow L(0) = 0 \in L(V') \Rightarrow L(V') \neq \emptyset$

(2) $w_1, w_2 \in L(V') \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V'$; $L(v_1) = w_1$, $L(v_2) = w_2$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2) \in L(V')$

(3) $w \in L(V') \Rightarrow \exists\ v \in V'$; $L(v) = w$

$\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in V'$ [ځکه V' یوه وکتوری فضا ده]

$\Rightarrow \lambda w = \lambda L(v) = L(\lambda v) \in L(V')$

ثبوت شو چې L(V´) یوه فرعی فضا په W کی ده

$L^{-1}(W')$ یوه فرعی فضا په V کې ده. ځکه:

$L^{-1}(W') = \{v \in V \mid L(v) \in W'\}$

څرنګه چې L یو lin-map دی پس د 7.1 لیما له مخې:

$L(0) = 0 \in W' \Rightarrow 0 \in L^{-1}(W') \Rightarrow L^{-1}(W') \neq \emptyset$

$v_1, v_2 \in L^{-1}(W') \Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in W' ; L(v_1) = w_1 ,\ L(v_2) = w_2$

$\Rightarrow L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2 \in W'$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in L^{-1}(W')$

$v \in L^{-1}(W') \Rightarrow \exists\, w \in W' ; L(v) = w$

$\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow L(\lambda v) = \lambda L(v) = \lambda w \in W'$

$\Rightarrow \lambda v \in L^{-1}(W')$

ثبوت شوچې $L^{-1}(W')$ یو فرعی فضا په V کې ده.

(d) ثبوت: څرنګه چې $L(V)$ نظر (b) ته یوه فرعی فضا په W کې ده او مونږ فرض کو چې $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ وکتورونه یوه قاعده (basis) دهغه ده. یعنی

$$L(V) = \langle\langle w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \rangle\rangle$$

$\exists\, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in V ; L(v_1) = w_1, L(v_2) = w_2, \ldots, L(v_n) = w_n$

$\Rightarrow w_i = L(v_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ lin-indep [ځکه w_i یوه قاعده ده]

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ lin-indep [د (b) له مخې]

که داسي نه وي. یعني:

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ lin-dep

$\Rightarrow L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ lin-dep [له مخې (b)]

مګردا خلاف د قاعدي (basis) د خواصو دی. پس باید $v_1,v_2,v_3, ..., v_n$ خطي مستقل وي. مونږ په 5.1 قضیه کي ولوستل ، چې په وکتوری فضا کي د دقاعدی وکتورونه د هغه لویه وکتورو فامیل (کورنی) دی چې خطی مستقل (lin-indep) دي. پس :

$$n \leq \dim V \Rightarrow \dim(L(V) \leq \dim V$$

(e) ثبوت:

$w_1,w_2 \in W$

$\Rightarrow \exists\ v_1,v_2 \in V\ ;\quad w_1 = L(v_1) \wedge w_2 = L(v_2)$ [L-isom ځکه]

$\Rightarrow v_1 = L^{-1}(w_1) \wedge v_2 = L^{-1}(w_2)$

$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$

$L^{-1} \circ L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = L^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = L^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$

$\Rightarrow \lambda_1 L^{-1}(w_1) + \lambda_2 L^{-1}(w_2) = L^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$

$\Rightarrow L^{-1}$ Lin-map (خطی میپنګ)

له بلي خوا پوهیږو چې د بایجکتیف معکوس تابع هم بایجکتیف ده. پس L^{-1} یو isomorph دی .

لیما 7.3 : $(U, \mathbb{K})$, $(V, \mathbb{K})$ و $(W, \mathbb{K})$ وکتوری فضا دی . بیا:

$f: U \rightarrow V$ lin-map $\wedge$ $g: V \rightarrow W$ lin-map

$\Rightarrow g \circ f: U \rightarrow W$ lin-map

(یعني ترکیب ددوخطي میپګوهم خطي میپنګ دی)

ثبوت : $u\ ,\ u_1,u_2 \in U$ او $\lambda \in \mathbb{K}$

$g \circ f(u_1+u_2) = g \circ (f(u_1+u_2)$

$= g(f(u_1) + f(u_2))$ [ځکه f خطی میپنګ]

$= g\circ f(u_1) + g\circ f(u_2)$ [ځکه g خطی میپنګ]

په همدي ډول کولای شو ثبوت کړو چې $g\circ f(\lambda u) = \lambda g\circ f(u)$ دي.

تمرین 7.2 : ثبوت کړي چې دالاندي توابع خطی میپنګ (Lin-Map) دي

(a)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (3x_1+2x_2, x_1)$$

(b)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (2x_1+x_2,x_1,2x_2)$$

(c)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1,-x_1,x_2)$$

(d)

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1-x_2,2x_1+3x_2+2x_3)$$

(e)

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_3,2x_1,x_2)$$

تعریف 7.2 : $(V, \mathbb{K})$ ، (W,k) وکتوری فضاوي دي او $L : V \to W$ یو خطی میپنګ (Lin-Map) دی

$\mathrm{Im}(L) := L(V)$

$\mathrm{Ker}(L) := L^{-1}(0) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$

$\mathrm{Im}(L)$ د Image (تصویر) او $\mathrm{Ker}(L)$ د Kernel (هسته) نوم یادیږي.

لیما 7.4 : (V, $\mathbb{K}$) ، (W, $\mathbb{K}$) دوه وکتوری فضاوي او $L : V \rightarrow W$ یو خطی میپنگ (Lin-Map) دی
(1)

(a) Im(L) یوه فرعی فضا (Subspace) په W کې ده

(b) Ker(L) یوه فرعی فضا (Subspace) په V کی ده

(2) Im(L) = W $\Leftrightarrow$ L surjective

(3) Ker(L) = {0 } $\Leftrightarrow$ L injective

(4) L یو injective $\wedge$ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ خطی مستقل په V کی
$\Leftarrow$ $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ خطی مستقل په W کی

(5)

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \Longrightarrow \mathrm{Im}(L) = \langle L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n) \rangle$$

(6) که L یو isomorph وي. بیا

$$V = \langle\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle\rangle \Longrightarrow W = \langle\langle L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n) \rangle\rangle$$

(1) ثبوت:

(a) **ثبوت:** د 7. 2 لیما له مخی د Im(L) یوه فرعی فضا په W ده . ځکه هره وکتوری فضا په خپله فرعی فضا ده .

(b) ثبوت:

$0 \in V \Rightarrow L(0) = 0$ [د 7.1 لیما له مخې]
$\Rightarrow 0 \in \ker(L) \Rightarrow \ker(L) \neq \emptyset$
$u, v \in \mathrm{Ker}(L) \Rightarrow L(u) = 0 \wedge L(v) = 0$
$\Rightarrow L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow u + v \in \mathrm{Ker}(L)$
$u \in \mathrm{Ker}(L), \lambda \in \mathbb{K}$
$L(\lambda u) = \lambda L(u) = \lambda . 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{Ker}(L)$
ثبوت شو چې Ker(L) یوه فرعی فضا (Subspace) په V کی ده .

(2) ثبوت:

” $\Leftarrow$ ” مونږ پوهيږو چې $Im(L) \subseteq W$ ده

L surjective $\Rightarrow \ \forall w \in W , \ \exists v \in V ; L(v) = w$

$\Rightarrow \ w \in Im(L) \ \Rightarrow \ W \subseteq Im(L)$

په نتیجه کی $W = Im(L)$

”$\Rightarrow$ ” څرنګه چې $W = Im(L)$ دی. پس L باید یو surjective وي

(3) ثبوت:

“$\Leftarrow$„ که $Ker(L) = \{0\}$ نه وي . په دی صورت :

$Ker(L) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \in Ker(L) , v \neq 0 \Rightarrow L(v) = 0$

له بلي خوا پوهیږو چې $0 \in Ker(L)$ دی. پس

$L(v) = 0 = L(0) \Rightarrow v = 0$ [ځکه L اینجکتیف دی]

له دی څخه نتیجه اخلوچې $Ker(L) = \{0\}$ دی .

“ $\Rightarrow$„ که چیرته $u, v \in V$ ولرو چې $L(u) = L(v)$ وي . پس په دی صورت :

$L(u) - L(v) = 0 \Longrightarrow L(u - v) = 0 \Longrightarrow u - v \in Ker(L)$

$\Longrightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$

$\Longrightarrow$ L injective

(4) **ثبوت** : که $a_i \in K$ (i = 1,2,..., n) موجود وي چې :

$a_1L(v_1) + a_2L(v_2) + \ldots\ldots + a_nL(v_n) = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \, L(v_i) = 0$

$\Longrightarrow \quad L(\sum_{i=1}^{n} a_i \, v_i) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \, v_i \in Ker(L)$

$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \, v_i = 0$ [ځکه L انجکتیف]

$\Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0$ [$v_1,v_2,\ldots ,v_n$ lin-indep ځکه]

$\Longrightarrow L(v_1), L(v_2),\ldots\ldots , L(v_n)$ lin-indep (خطی مستقل)

(5) ثبوت : ځرنګه چې $V = <v_1,v_2, \ldots , v_n>$ دی. پس کولای شو د **V** هروکتورد خطی ترکیب (lin-comb) په شکل د $v_1,v_2, \ldots ,v_n$ وکتورو ولیکو. یعنی

$$v \in V \implies \exists\ a_1,a_2, \ldots , a_n \in \mathbb{K} ;\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$
$$\implies L(v) \in Im(L)\ \wedge$$
$$L(v) = L(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n)$$
$$= a_1L(v_1) + a_1L(v_2) + \ldots + a_nL(v_n)$$
$$\implies Im(L) = < L(v_1),L(v_2), \ldots ,L(v_n) >$$

(6) ثبوت:

$$L \text{ isomorph} \implies L \text{ surjective}$$
$$\implies Im(L) = W \quad [\text{د } (2) \text{ له مخی}]$$
$$\implies W = <L(v_1),L(v_2),\ldots,L(v_n)> \quad [\text{د } (5) \text{ له مخی}]$$

له بلې خوا:

$$V = << v_1,v_2,\ldots,v_n >> \implies v_1,v_2,\ldots,v_n \text{ lin-indep}$$
$$\implies L(v_1),L(v_2),\ldots,L(v_n) \text{ lin-indep} \quad [\text{د } (4) \text{ له مخی}]$$

په نتیجه کی:

$$W = << L(v_1),L(v_2),\ldots,L(v_n) >>$$

ځرنګه چې د V او W دقاعدو وکتورشمیرمساوي دی. پس dimV = dimW

قضیه 7.1 : $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ وکتوری فضاوې دي .
$V = << v_1 , v_2 \ \ldots , v_n >>$ او $w_1,w_1,\ldots, w_n \in W$. بیا

(1) فقط یوازي یو خطی میپنګ (lin-map) $L : V \to W$ چې $L(v_i) = w_i$ وي ، وجود لري $(i = 1,2,\ldots,n)$.

(2) $Im(L) = span(w_1,w_2,\ldots,w_n)$

(3) L injective $\Leftrightarrow$ $w_1,w_2,\ldots,w_n$ *lin - indep*

البته L خطی میپنګ په (2) او (3) کې د (1) څخه دی.

(1) ثبوت: مونږ باید ثبوت کړو چې :

(a) هغه ډول یوه L تابع موجوده ده

(b) L یو خطی میپنګ دی

(c) فقط یوازي یو هغه ډول خطی میپنګ موجود دی

(a) ثبوت :

$$V = << v_1 , v_2 , \ldots , v_n >>$$
$$\implies \forall\ v \in V\ \exists\ a_1,\ a_2 , \ldots ,\ a_n \in \mathbb{K}\ ;$$

$$\boldsymbol{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

څرنګه چې $v_1, v_2, \ldots, v_n$ یوه قاعده (basis) د V ده پس فقط یوازي یو
هغه ډول اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ موجود دي . مونږ L په لاندي ډول تعریف کوو:

$$L : V \to W$$
$$v \mapsto L(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i L(v_i)$$

لیدل کیږي چې د L تعریف درست دی. ځکه د هر v لپاره یوازی یو عنصر په W کی نظر L میپنګ ته موجود دی

(b) ثبوت : د 7.1 لیما له مخی کافی دی چې ثبوت شی :

$$L(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.L(u) + \mu.L(v) \quad (u,v \in \boldsymbol{V}, \lambda,\mu \in \mathbb{K})$$

څرنګه چې $V = \ll v_1, v_2, \ldots, v_n \gg$ دی. پس :

$$\exists\ a_i, b_i \in K\ (i = 1,2,\ldots,n);$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ , v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

$$\Longrightarrow \lambda.u = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i v_i \ , \ \mu.v = \sum_{i=1}^{n} \mu b_i v_i$$

$$\Longrightarrow L(\lambda.u + \mu.v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) w_i \quad [\text{د L تعریف له مخې}]$$

$$= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i) w_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i) w_i\right)$$

$$= \lambda.L(u) + \mu.L(v)$$

(c) ثبوت : که $f : V \to W$ هم یوخطی میپنګ وې چې
$f(v_i) = w_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ وي . بیا کولای شو د هر $u \in \boldsymbol{V}$ ولیکو:

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = f(u)$$
$$\Rightarrow L = f$$

(2) ثبوت :

"⊆"

$$\begin{aligned} v\in V &\implies \exists\, a_1,a_2,\ldots,a_n\in \mathbb{K}\ ;\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \\ &\implies L(v)\in Im(L) \ \wedge \\ &\qquad L(v) = a_1 L(v_1) + a_2L(v_2) + \ldots + a_nL(v_n) \\ &\qquad\quad = a_1 w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_nw_n \\ &\implies L(v)\in span(w_1,w_2,\ldots,w_n) \\ &\implies Im(L)\subseteq span(w_1,w_2,\ldots,w_n) \end{aligned}$$

" $\supseteq$ "

$$\begin{aligned} & w\in span(w_1,w_2,\ldots,w_n) \\ &\implies \exists\, b_1,b_2,\ldots,b_n\in \mathbb{K}\ ;\ w = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n \\ &\implies w = b_1 L(v_1) + b_2 L(v_2) + \ldots + b_n L(v_n) \\ &\qquad = L(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n) \\ &\implies w\in Im(L) \implies span(w_1,w_2,\ldots,w_n)\subseteq Im(L) \end{aligned}$$

په نتیجه کی $Im(L) = span(w_1,w_2,\ldots,w_n)$

(3) ثبوت:

" $\Rightarrow$ " که $w_1,w_2,\ldots,w_n$ خطی مستقل (lin-indep) نه وي. بیا په دی صورت :

$$\begin{aligned} &\exists\, a_1,a_2,\ldots,a_n\in \mathbb{K}\ ;\ (a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq(0,0,\ldots,0) \\ &\qquad \wedge\ a_1 w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_nw_n = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \ldots + a_n L(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow\ L(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \in Ker(L)$$

څرنګه چې L د فرضيي له مخې injective دی. پس د 7.4 لیما په اساس :

$$Ker(L) = \{0\} \Rightarrow\ a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$

څرنګه چې $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq(0,0,\ldots,0)$ دی. پس $v_1, v_2,\ldots,v_n$ وکتورونه خطی مستقل (lin-indep) کیدای نه شي. مګردا دنوموړي وکتورو د قاعده توب سره په تضاد کی واقع کیږي. پس باید $w_1,w_2,\ldots,w_n$ وکتورونه خطی مستقل وي.

" $\Leftarrow$ "

$$v \in Ker(L) \Rightarrow L(v) = 0 \;\wedge\; \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n;$$
$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$
$$\Rightarrow L(v) = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \ldots + a_n L(v_n)$$
$$= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n = 0$$

څرنګه چې $w_1, w_2, \ldots, w_n$ خطی مستقل دي.پس.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$
$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow Ker(L) = \{0\} \Rightarrow L \text{ injective}$$

قضیه 7.2: (dimension formel for linear mapping)

(V, 𝕂) او (W, 𝕂) وکتوری فضاوي چې معین بعد (dimension) لري او $L : V \to W$ یو خطی میپنګ (Lin-Map) دی. بیا:

$$\dim V = \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L))$$

یا

$$\dim V = \dim(Ker(L)) + rank(Im(L))$$

ثبوت : د 7.4 لیما له مخی پو هیږوچې Ker(L) یوه فرعی فضا په V او Im(L) یوه فرعی فضا په W کی ده. پس دواړه معین بعدونه لري. که مونږ $\dim(Ker(L)) = p$ او $\dim(Im(L)) = k$ وضع کړو. په هغه صورت کی $\in W$ $w_1, w_2, \ldots, w_k$ وکتورونه د لاندی خاصیت سره موجود دي :

$$Im(L) = \langle\langle w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle\rangle$$

یعنی $w_1, w_2, \ldots, w_k$ وکتورونه یوه قاعده (Basis) د Im(L) ده

$$w_i \in Im(L) \quad (i=1,1,\ldots,k)$$

$$\Rightarrow \exists\, v_i \in V; \quad L(v_i) = w_i \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

لمړی حالت : $Ker(L) \neq \{0\}$

که $Ker(L) = \langle\langle u_1, u_2, \ldots, u_p \rangle\rangle$ وي. مونږ غواړو ثبوت کړو چې :

$$V = \langle\langle u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle\rangle$$

یعنی پورتني وکتورونه یوه قاعده (Basis) د V ده. پس باید ثبوت شي :

(a) $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle$

(b) $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k$ وکتورونه خطی مستقل (Lin-indep) دي

ثبوت (a) :

$\forall\ v \in V$, $L(v) \in Im(L)$

$\Rightarrow \exists\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$;

$$L(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, w_i = \sum_{i=1}^{k} a_i\, L(v_i)$$

$$= L\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, v_i\right)$$ [ځکه L خطی میپنگ]

$$\Rightarrow L(v) - L\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, v_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow L\left(v - \sum_{i=1}^{k} a_i\, v_i\right)$$

$$= L(v - a_1v_1 - a_2v_2 - \ldots - a_kv_k) = 0$$

$$\Rightarrow v - a_1v_1 - a_2v_2 - \ldots - a_kv_k \in Ker(L)$$

څرنګه چې $u_1, u_2, \ldots, u_p$ یوه قاعده د $Ker(L)$ ده . پس :

$\exists\ b_1, b_2, \ldots, b_p \in \mathbb{K}$;

$$v - a_1v_1 - a_2v_2 - \ldots - a_kv_k$$

$$= b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_pu_p$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{p} b_i\, u_i + \sum_{i=1}^{k} a_i\, v_i$$

لیدل کیږي هغه وکتورونه چې شمیریي $p + k$ ته رسیږي. یو مولد سیستم (Span) د V دي. یعنی:

$$V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle$$

(b) ثبوت: که د $a_i, b_j \in \mathbb{K}$ ($j = 1,2,\ldots,k$ $i=1,2,\ldots,p$) لپاره لاندی معادله صدق وکړي

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\, u_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\, v_j = 0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow L\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\, u_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\, v_j\right) = L(0) = 0$$ [لیما 7.1]

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i\, L(u_i) + \sum_{j=1}^{k} b_j\, L(v_j) = 0$$

څرنګه چې $u_i \in Ker(L)$ ($i=1,2,\ldots,p$) دي. پس :

$$L(u_i) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,p)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i\, L(u_i) = 0 \quad \Rightarrow 0 + \sum_{j=1}^{k} b_j\, L(v_j) = 0$$

مونږ پوهیږو چې $L(v_j) = w_j$ ($j=1,2,\ldots,k$) دی. پس :

$$\sum_{j=1}^{k} b_j\, L(v_j) = \sum_{j=1}^{k} b_j\, w_j = 0$$

$\Rightarrow$ $b_1 = b_2 = ... = b_k = 0$ [ځکه w_j خطی مستقل دی]

$\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{k} b_j \ v_j = 0$

په نتیجه کی $(*)$ معادله لاندي شکل اخلي

$\sum_{i=1}^{p} a_i \ u_i = 0$

$\Rightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_p = 0$ [ځکه u_i خطي مستقل دی]

$\Rightarrow$ $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k$ Lin-indep

اوس غواړو ثبوت کړو چې $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k$ وکتورونه لاندي خواص لري :

(i) ترټولوکوچنی فامیل د وکتورو ، چې مولد سیستم **(gen-system)** د V دی .

(ii) ترټولو لوي فامیل د وکتورو، چې په V کی خطی مستقل (Lin-indep) دي.

ثبوت (i) : دمثال په ډول که $V = < u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k>$ هم صدق وکړی. په دی صورت :

$\exists \ a_i, b_j \in \mathbb{K}$ ($i= 2,...,p \quad j= 1,2,...,k$) ;

$$u_1 = a_2u_2 + a_3u_3 + ... + b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_kw_k$$

$$\Rightarrow \ a_2u_2 + a_3u_3 + ... + b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_kw_k - u_1 = 0$$

$$\Rightarrow \ u_1 , u_2 , \ldots ,u_p , w_1,w_2, \ldots ,w_k \ \text{Lin – dep}$$

مګرپورته وښودل شول چې دا وکتورونه خطی مستقل دي.

پس $V = < u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k>$ صدق نه کوي .

په نتیجه کی $u_1 , u_2 , \ldots ,u_p , w_1,w_2, \ldots ,w_k$ ترټولو د وکتورو کوچنی فامیل. چې مولد سیستم **(gen-system)** د V دی. پس (i) ثبوت شو .

ثبوت (ii) : که چیري یو $v \in \mathbf{V}$ موجود وي چې بیاهم $v, u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k$ خطی مستقل په V کی وي . څرنګه چې:

$V = < u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k>$

$\Rightarrow \exists \ a_i, b_j \in \mathbb{K}$ ($i= 1,2,...,p \quad j= 1,2,...,k$) ;

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + ... + b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_kw_k$$

$\Longrightarrow \; a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_kw_k - v = 0$
$\Longrightarrow \; u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k, v$ Lin- dep
ثبوت شو چې $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k$ ترتیولو د وکتورو لوي فامیل دی چې په V کی خطی مستقل (Lin-indep) دي او (ii) هم ثبوت شو.
په نتیجه کی ثبوت شو چې :

$V = \langle\langle u_1, u_2, \ldots, u_p, w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle\rangle$
$\Longrightarrow \; \dim V = p + k = \dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L))$

دویم حالت : $Ker(L) = \{ 0 \}$

$Ker(L) = \{0\}$
$\Longrightarrow \; \dim(Ker(L)) = 0 \; \wedge \; L$ injective [د 7.4 لیما له مخې]
که $\dim V = n$ وي . په دی صورت :
$\exists \; v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \; ; \; V = \langle\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle\rangle$
$\Longrightarrow L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ Lin-indep [د 7.4 لیما له مخې]

له بلي خوا:

$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$
$\Rightarrow \; Im(L) = \langle L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n) \rangle$
$\Rightarrow \; Im(L) = \langle\langle L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n) \rangle\rangle$
$\Rightarrow \; \dim(Im(L)) = n$
$\Rightarrow \; \dim V = 0 + \dim(Im(L))$
$= \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L))$

نوټ : dim(Im(L) ته Rank د L ویل کیږي اومونږ هغه په rk سره ښیو.
یعنی $rk(L) := \dim(Im(L))$
مثال 7.5 : مونږ دا لاندي تابع په نظرکي نیسو:

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 - x_2$$

غواړوپیدا کړو:
(a) L یو خطی میپنګ (Lin-map) دی

(b) Ker(L)

(c) قاعده (basis) د Ker(L)

(d) dim(Ker(L))

$Im(L) = \mathbb{R}$ (e)

ثبوت: (a)

$x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$L(x + y) = L((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = L(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$

$= (x_1+y_1) - (x_2+y_2)$

$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = L(x) + L(y)$

$L(\lambda x) = L(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda x_1 - \lambda x_2 = \lambda\ (\ x_1 - x_2\ ) = \lambda L(x)$

$\Rightarrow$ lin-map

ثبوت (b) :

$x = (x_1,x_2) \in Ker(L) \ \Rightarrow\ L(x_1,x_2) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow\ x_1 = x_2$

پس :

$Ker(L) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\ \}$

$= \{\ (r,r) \mid r\in \mathbb{R}\ \} = \mathbb{R}\ .\ (1,1)$

ثبوت: (c) $v = (1,1)$ وکتور یوه قاعده د $Ker(L)$ ده . ځکه :

د 6.4 لیما له مخې $Ker(L)$ یوه فرعی فضا په $\mathbb{R}^2$ کې ده او :

$x = (x_1,x_2) \in Ker(L) \ \Rightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ ;$

$x = (x_1,x_2) = (\lambda, \lambda) = \lambda\ .\ (1,1) = \lambda\ .\ v$

$\Rightarrow\ ker(L) = < v >$

څرنګه چې $0 = (0,0) \neq (1,1) = v$ دی. پس د 4.5 لیما له مخې v وکتور خطی مستقل (Lin-indep) دی. په نتیجه کې $v = (1,1)$ یوه قاعده د $Ker(L)$ ده . یعنی $Ker(L) = << v >>$

ثبوت (d) : وموليدل چې $Ker(L)$ دقاعدی د وکتورو شمير يو دی. پس $dim(Ker(L)) = 1$

ثبوت: (e)

$\forall\ x\in \mathbb{R}\ ,\ \exists\ (x,0) \in \mathbb{R}^2;\ L(x,0) = x - 0 = x$

$\Rightarrow L$ surjective $\ \Rightarrow\ Im(L) = \mathbb{R}$

له بلي خوا د 7.2 قضیه هم صدق کوي. ځکه :

$$\dim\mathbb{R}^2 = \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L)) \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + 1$$

قضیه 7.3 $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ وکتوری فضاوي دي چې مساوي معين بعد (Dimension) لري. يعنی $\dim V = \dim W = n$. که $L: V \to W$ يوخطی میپنګ (Lin-map) وي. بيا :

$$L \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ surjective}$$

ثبوت " $\Rightarrow$ "

L injective $\Rightarrow$ $Ker(L) = \{0\}$ [ليما 7.4 له مخې]

$\Rightarrow$ $\dim(Ker(L)) = 0$

$\dim V = \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L))$ [7.2 قضيی له مخې]

$\Rightarrow$ $n = 0 + \dim(Im(L))$ $\Rightarrow$ $\dim(Im(L)) = \dim W$

$\Rightarrow Im(L) = W$ [ځکه $Im(L)$ يوه فرعی فضا د **W** ده]

$\Rightarrow$ L surjective

ثبوت "$\Leftarrow$" :

L surjective $\Rightarrow Im(L) = W$ $\Rightarrow$ $\dim(Im(L)) = n$

$\dim V = \dim(Ker(L)) + \dim(Im(L)) \Rightarrow n = \dim(Ker(L)) + n$

$\Rightarrow$ $\dim(Ker(L)) = 0$ $\Rightarrow$ $Ker(L) = \{0\}$ $\Rightarrow$ L injective

مثال **7.6** : $A = (a_{ij})$, $A \in M(m\text{x}n, \mathbb{R})$

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A.x$$

د L_A تابع کولای شو په لاندي ډول وليکو :

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

L_A یوخطی میپنګ (Lin-map) دی. ځکه د هر $x,y \in \mathbb{R}^n$ او $\lambda \in \mathbb{R}$ لپاره لاندې رابطه صدق کوي

$$L_A(x + y) = L_A x + L_A y \quad , L_A(\lambda x) = \lambda\, L_A(x)$$

که مونږ اساسی قاعده (canonical basis) د $\mathbb{R}^n$ په نظرکې ونیسو لیدل کیږي چې $A.e_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ څخه د A د متریکس ستنې (ستون) لاس ته راځي . د مثال په ډول

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$L_A(e_1) = L_A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A.e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

په نتیجه کې کولای شو ولیکو:

$$\mathrm{Im}(L_A) = A.\mathbb{R}^n = \mathrm{span}(A.e_1, A.e_2, \ldots, A.e_n)$$

ځکه :

$$A.\mathbb{R}^n = \{ A.x \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

$$A.x \in A.\mathbb{R}^n \Rightarrow A.x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

A.x یو خطی ترکیب (Lin-comb) د $A.e_1, A.e_2, \ldots, A.e_n$ دی. ځکه که مونږ ولرو:

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \mathbb{R} \;;$$
$$A.x = \tau_1 . A.e_1 + \tau_2 . A.e_2, \ldots, \tau_n . A.e_n$$
$$\Rightarrow A.x = \tau_1 . \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + \tau_n . \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \tau_1\, a_{11} + & \cdots & +\tau_n\, a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1\, a_{m1} + & \cdots & +\tau_n\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

په پورتني معادله کې کولاي شو $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ پیدا کړو.

قضیه 7.4: $(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا چې $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ یې قاعده (Basis) ده. بیا د V او $\mathbb{R}^n$ ترمینځ فقط یوازې یو $L_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to V$ Isomorphism چې $L_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ وي. موجود دی.
دلته e_i په $\mathbb{R}^n$ د اساسی قاعدي وکتورونه دي

ثبوت : د 7.1 قضیې له مخې فقط یوازې یو هغه ډول خطی میپنګ (lin-map) امکان لري. له بلې خوا د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وکتورونه د V یوه قاعده ده پس:

$$V = \ll v_1, v_2, \ldots, v_n \gg \;\Rightarrow\; v_1, v_2, \ldots, v_n \text{ lin-indep}$$
$$\Rightarrow L_{\mathcal{B}} \text{ injective } \quad [\text{د 7.1 قضیې له مخې}]$$

څرنګه چې $\dim V = n = \dim \mathbb{R}^n$ دی ، پس $L_{\mathcal{B}}$ د 7.3 قضیې له مخې surjective هم دی. په نتیجه کې $L_{\mathcal{B}}$ یو Isomorphism دی .

تعریف 7.3: دوه وکتوری فضاوي $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ له یوبل سره Isomorph دی په دی شرط چې یو $L: V \to W$ Isomorphism موجود وي او مونږ هغه په $V \cong W$ سره ښیو. هر $V \cong W$ همدارنګه $W \cong V$ دی

قضیه 7.5 : $(V, \mathbb{K})$ او $(W, \mathbb{K})$ دوه وکتوری فضاوي دی چې معین بعد لري .
بیا :

$$\dim V = \dim W \quad \Leftrightarrow \quad V \cong W$$

ثبوت " $\Rightarrow$ "

$\dim V = \dim W = n$

$\Rightarrow \quad \exists\, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \quad \wedge \quad w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$;

$$V = \langle\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle\rangle \, , \, W = \langle\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle\rangle$$

د 7.1 قضیی له مخې یو خطی میپنګ $L: V \to W$ دلاندی خاصیت سره موجود دی:

$L(v_i) = w_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$

: Ker(L) ={0}

$u \in Ker(L) \;\Rightarrow\; u \in V \;\wedge\; L(u) = 0$

$\Rightarrow \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \, , \, u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \; w_i \; = \; \sum_{i=1}^{n} a_i \; L(v_i) \; = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \; v_i \right) = L(u) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0 \quad [w_1, w_2, \ldots, w_n \quad \text{lin-indep} \quad]$

$\Rightarrow \; u \; = \sum_{i=1}^{n} a_i \; v_i = 0 \;\Rightarrow\; Ker(L) = \{0\}$

$\Rightarrow$ L injective [د 7.4 لیما له مخې]

د **7.3** قضیې له مخې L یو surjective هم دی. پس $V \cong W$ دی

ثبوت "$\Leftarrow$"

$V \cong W \quad \Rightarrow \exists!\;\; L: V \to W$; L lin-map $\wedge$ L bijective

خرنګه چې V یومعین بعد لري، پس لیکلی شو:

$V = \langle\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle\rangle$
$\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_n$ lin-indep

$\Rightarrow$ $L(v_1)$, $L(v_2)$,....., $L(v_n)$ lin-indep [د 7.4 ليما له مخې]
$\Rightarrow$ dimV $\leq$ dinW

له بلي خوا :

$V \cong W \Rightarrow W \cong V \Rightarrow \dim W \leq \dim V$

په نتيجه کې dimV = dimW

تعریف 7.4 : (V, $\mathbb{K}$) او **(W, $\mathbb{K}$)** دوه وکتوری فضاوي دی او د Hom(V,W) سيت لاندی تعريف شوي دی

Hom(V,W): = { L : V → W | L lin-map (خطی میپنګ) }

قضيه 7.6 : که **(V, $\mathbb{K}$)** او **(W, $\mathbb{K}$)** دوه وکتوری فضاوي وي. بيا Hom(V,W) يوه فرعی فضا د Map(V,W) ده.

ثبوت: په 4.1 مثال کې مو وليدل چې Map(V,W) نظر $\mathbb{K}$ ساحه (Field) ته يوه وکتوری فضا او Hom(V,W) $\subseteq$ Map(V,W) ده .
بايد ثبوت شي :

f,g $\in$ Hom(V,W) , m$\in \mathbb{K}$
$\Rightarrow$ (f + g) $\in$ Hom(V,W) $\wedge$ mf $\in$ Hom(V,W)

u,v $\in$ V , $\tau, \mu \in$ K

$(f + g)(\tau u + \mu v) = f(\tau u + \mu v) + g(\tau u + \mu v)$

$= \tau f(u) + \mu f(v) + \tau g(u) + \mu g(v)$ [ځکه f , g خطي میپنګ]

$= \tau(f(u) + g(u)) + \mu(f(v) + g(v))$

$= \tau(f + g)(u) + \mu(f + g)(v)$

$\Rightarrow$ (f + g) lin-map [د 7.1 ليما له مخې]

$\Rightarrow$ (f + g) $\in$ Hom(V,W)

له بلي خوا:

$$m.f(\tau u + \mu v) = m(\tau f(u) + \mu f(v)) = \tau.m.f(u) + \mu.m.f(v)$$

$$= \tau.(m.f(u)) + \mu.(m.f(v))$$

$\Rightarrow$ m.f lin-map $\Rightarrow$ m.f $\in$ Hom(V,W)

ثبوت شو چې Hom(V,W) یوه فرعی فضا د Map(V,W) ده

تعریف 7.5 : $(V, \mathbb{K})$ وکتوری فضا , $L : V \to V$ یو lin-map او H یوه فرعی فضا په V کې ده. H د invariant په نوم نظر L ته یادیږي. په دی شرط چې $L(H) \subseteq H$ وي.

مثال: په $(\mathbb{R}^2 , \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کې لاندې خطی میپنګ لرو:

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (2x_1 , x_1 - x_2)$$

H یوه فرعی فضا ده مګر invariant نظر L نه دی. ځکه

$x = (-2,2) \in H$

$L(x) = L(-2,2) = (2.(-2), -2 - 2) = (-4, -4) \notin H \Longrightarrow L(H) \not\subseteq H$

مثال:

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (-x_2+x_3, -3x_1- 2x_2 + 3x_3, -2x_1 -2x_2 + 3x_3)$$

په اسانی سره کولای شو ثبوت کړو:

(a) L یوخطی میپنګ (lin-map) دی

(b **)** د $H = \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2 \}$ یوه فرعی فضا په $\mathbb{R}^3$ کې ده. اوس غواړو وښیو چې H نظر L ته یو ***invariant*** دی. یعنی $L(H) \subseteq H$

$x = (x_1,x_2,x_3) \in H \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$

$L(x) = L((x_1,x_2,x_3))$

$= (-x_2+x_3, -3x_1- 2x_2 + 3x_3, -2x_1 -2x_2 + 3x_3)$

$= (-x_2+ x_1 + x_2 , -3x_1- 2x_2 + 3(x_1+x_2) , -2x_1 -2x_2 + 3(x_1+x_2))$

$= (-x_2+ x_1 + x_2, -3x_1- 2x_2 + 3x_1 + 3x_2,$

$-2x_1 -2x_2 + 3x_1 + 3x_2))$

$= (x_1 , x_2, x_1 + x_2) \in H$

$\Rightarrow$ H invariant

تعریف 7.6 : $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده او د $Hom(V, \mathbb{K})$ سیت لاندی تعریف شوي دی

$Hom(V, \mathbb{K}) := \{ L : V \to \mathbb{K} \mid L$ lin-map (خطی میپنگ) $\}$
د 7.6 قضي له مخي $Hom(V, \mathbb{K})$ هم نظر $\mathbb{K}$ ته یوه وکتوری فضا ده اوهغه مونږ په $(V^*, \mathbb{K})$ سره ښيو. یعني:
$(V^*, \mathbb{K}) := Hom(V, \mathbb{K})$
وکتوری فضا V^* د V د dual space په نوم یادیږي.
که V معین بعد ولري او $v_1, v_2, \ldots, v_n$ يې یوه قاعده وي او v_i^* په لاندي ډول تعریف شوی وي:
$v_i^* : V \to \mathbb{K}$
$v_j \mapsto v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ $(i=1,2,3,\ldots,n \wedge j=1,2,3,\ldots,n)$
البته δ_{ij} د ***kronecker*** سمبول دی. پدي صورت کي v_i^* *(i=1,2,...,n)* یوه قاعده *(basis)* د V^* جوړوي او $\dim V = \dim V^*$
مثال: مونږ $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوري فضا داساسي قاعده *(canonical basis)* سره په نظرکي نیسو. د $\mathbb{R}^2$ وکتوري فضا ***dual space*** لاندي شکل لري:
$(\mathbb{R}^2)^* := Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \{ L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid L$ lin-map (خطی میپنگ)$\}$
غواړوثبوت کړو چې e_1^* او e_2^* یوه قاعده د $(\mathbb{R}^2)^*$ جوړوي
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} ; \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* = 0$
$\Rightarrow$
$\lambda_1 e_1^*(e_1) + \lambda_2 e_2^*(e_1) = \lambda_1 \delta_{11} + \lambda_2 \delta_{21} = \lambda_1 . 1 + \lambda_2 . 0 = 0$
$\lambda_1 e_1^*(e_2) + \lambda_2 e_2^*(e_2) = \lambda_1 \delta_{12} + \lambda_2 \delta_{22} = \lambda_1 . 0 + \lambda_2 . 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \ \wedge \ \lambda_2 = 0 \ \Rightarrow e_1^*, e_2^*$ lin-indep

په نتیجه کې e_1^* او e_2^* د 5.4 لیما له مخې یوه قاعده (basis) د $(\mathbb{R}^2)^*$ ده.

اتم فصل

خطی میپنګ او متریکس

(Linear Mapping and Matrix)

په دې فصل غواړو ارتباطات د یو خطی میپنګ (lin-map) اودهغه مربوطه متریکس مطالعه کړو. $(V, \mathbb{R})$ او $(W, \mathbb{R})$ دوه وکتوری فضاوي دي چې معین بعد (dimension) لري .

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ یوه قاعده د V , $\acute{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ یوه قاعده د W او $L: V \to W$ یو خطی میپنګ دی . مونږ د L مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ قاعدوته په $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L)$ سره ښیو. یعنی :

$$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = (a_{ij}) \in M(m\times n, \mathbb{R})$$

البته دلته $\mathcal{B}$ د domain قاعده او $\acute{\mathcal{B}}$ د codomain قاعده انتخاب شویده.

که $\acute{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ وي بیا د هغه مربوطه متریکس په $A_{\mathcal{B}}(L)$ ښیو.

څرنګه چې $\dim(V) = n$ او $\dim(W) = m$ دی. پس د L مربوط متریکس m کرښې (سطر) او n ستنې(ستون) لري.

لیما 8.1:

(a) د هر $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ خطی میپنګ (lin-map) لپاره فقط یوازې یو $A \in M(m\times n, \mathbb{R})$ متریکس نظر اساسی قاعدې (canonical basis) ته د لاندې خاصیت سره موجود دی:

$$L(x) = A.x \quad (\forall\ x \in \mathbb{R}^n)$$

البته x دلته ستونی متریکس دی .

(b) د هر $A \in M(m\times n, \mathbb{R})$ متریکس لپاره یوازې یوخطي میپنګ د لاندې خاصیت سره موجود دی:

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A.x$$

(a) ثبوت: که $e_1,e_2,\ldots,e_n$ اساسي قاعد (canonical basis) د $\mathbb{R}^n$ او $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m$ د $\mathbb{R}^m$ وي. بیا کولای شو ولیکو:

$$\mathbb{R}^n = \langle\langle e_1,e_2,\ldots,e_n \rangle\rangle \ , \ \mathbb{R}^m = \langle\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_m \rangle\rangle$$

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \exists!\ a_i \in \mathbb{R}\ (i=1,2,\ldots,n)\ ;\ x = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = x_1\ ,\ a_2 = x_2\ ,\ \ldots,\ a_n = x_n$$

$$L(x) = L(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$$

$$= x_1L(e_1) + x_2L(e_2) + \ldots + x_nL(e_n)$$

څرنګه چې $L(e_1)\ ,\ L(e_2)\ ,\ \ldots\ ,\ L(e_n) \in \mathbb{R}^m$ دي ، پس کولای شوولیکو:

$$\exists!\ a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{R}\ ;$$

$$L(e_1) = a_{11}\tilde{e}_1 + a_{21}\tilde{e}_2 + \ldots + a_{m1}\tilde{e}_m$$

$$= a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{m1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

په همدي ډول کولای شو تصویریا میپنګ د $L(e_2), \ldots, L(e_n)$ پیدا کړو. یعنې:

$$L(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots\ldots, L(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

که چیري $L(e_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ د یو بل ترڅنګ ولیکل شي د A متریکس لاسته راځي. یعنی:

$$A = (L(e_1), L(e_2), \ldots, L(e_n))$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

لیدل کیږي چې :

$$L(x) = x_1 L(e_1) + x_2 L(e_2) + \ldots + x_n L(e_n)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} . x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} . x_2 + \ldots\ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} . x_n$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} . x_1 + a_{12} . x_2 & + \ldots + & a_{1n} . x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} . x_1 + a_{m2} . x_2 & + \ldots + & a_{mn} . x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= A.x$$

نوټ: پورته ولیدل شول چې د خطي میپنګ مربوطه متریکس نظر اساسی قاعدی ته په لاندي شکل لاس ته راځي:

$$L(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

$L(e_i)$ دلته د مربوطه متریکس ستني (ستون) دي چې دا بیا د
$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m$ وکتورونو د خطي ترکیب ضرایب دي .
مګرکه قاعده اساسی قاعده (canonical basis) نه وي. بیا په عمومي ډول
پورتني رابطه صدق نه کوي .

اوس غواړوثبوت کړوچې یوازی یو هغه ډول متریکس موجود دی

$$\mathbb{R}^m = \langle\langle \ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m \ \rangle\rangle$$

$$\Longrightarrow \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_m \text{ lin-indep}$$

$$\Longrightarrow \exists! \ a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi} \in \mathbb{R} \quad ;$$

$$L(e_i) = a_{1i}\tilde{e}_1 + a_{2i}\tilde{e}_2 + \dots + a_{mi}\tilde{e}_m$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

د 4.6 لیما له مخې فقط یوازي یوډول $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$ موجود دي چې
دمتریکس ستني (ستون) جوړوي. پس فقط یوازې یو د A متریکس موجود دی چې
$L_A(x) = A.x$ شي

(b) ثبوت: د L_A تابع کولای شو په لاندي ډول هم ولیکو :

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

L_A یوخطی میپنګ (Lin-map) دی. ځکه د هر $x,y \in \mathbb{R}^n$ او $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ دلته د A متریکس ستني (colmns) دي.

$$A.(\lambda x + \mu y) = s_1.(\lambda .x_1 + \mu .y_1) + \ldots + s_n.(\lambda .x_n + \mu .y_n)$$

$$= \lambda .(s_1.x_1 + \ldots + s_n.x_n) + \mu (s_1.y_1 + \ldots + s_n.y_n)$$

$$= \lambda . Ax + \mu . Ay$$

$$= \lambda .L_A(x) + \mu L_A(y)$$

ثبوت شوچې L_A یوخطي میپنګ دی او L_A ته د A متریکس مربوطه خطي میپنګ ویل کیږي. که چیرې g_A همدارنګه یوخطي میپنګ وي. یعنې:

$$g_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A.x$$

$$L_A(x) = A.x = g_A(x) \ (\forall \ x \in \mathbb{R}^n) \implies L_A = g_A$$

مثال 8.1 : دلته غواړو د یو خطی میپنګ مربوطه متریکس نظر اساسی قاعدي ته پیدا کړو .ددې کار لپاره د ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$) وکتوری فضا په نظر کي نیسو. L په لاندي ډول تعریف شویدی:

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1, x_1 - x_2)$$

په اسانی سره کولای شو ثبوت کړوچې $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ دی .

پوهیږو چې په ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$) وکتوری فضا کي *(1,0)* $e_1 =$ او $e_2 = (0,1)$ وکتورونه اساسی قاعده ***(canonical basis)*** جوړوي . اوس تصویرونه د *e_1 , e_2* نظر *L* ته پیدا کو.

$L(e_1) = L(1,0) = (2.1 \ , \ 1 - 0 \ ) = (\ 2 \ , \ 1 \ )$

له بلي خوا $L(e_1) \in \mathbb{R}^2$ دی پس لیکلی شو:

$\exists! \ a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \ ; \ L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (\ a_{11}, a_{21} \ )$

$= (\ 2 \ , \ 1 \ )$

$L(e_2) = L(0, 1) = (2. \ 0 \ , \ 0 - 1 \ ) = (\ 0 \ , -1 \ )$

د اساسی قاعدی تصویرونه د L مربوطه متریکس ستني (ستون) تشکیله وي. که هغه متریکس په A وښیو

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

یعنی A مربوطه متریکس د L نظر اساسی قاعدي e_2 , e_1 ته دی .
اوس د A متریکس لرو او غواړو د هغه خطی میپنګ (lin-map) نظراساسی قاعدي ته پیدا کړو . څرنګه چې $A \in M \ (2x2, \mathbb{R} \ )$ دی پس باید خطی میپنګ $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ وي

$L(e_1) = (a_{11}, a_{21}) = (\ 2 \ , \ 1)$

$L(e_2) = (a_{21}, a_{22}) = (\ 0 \ , -1)$

$x = (x_1 \ , \ x_2 \ ) \in \mathbb{R}^2$

$L(x) = L(x_1 \ , \ x_2 \ ) = L((x_1,0) + (0,x_2))$

$= L(\ x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1.L(e_1) + x_2.L(0,1)$

$= x_1(2,1) + x_2(0,-1)$

$= (2x_1, \ x_1) + (0, - \ x_2) = (2x_1, \ x_1 - x_2)$

په نتیجه کې لیدل کیږي چې دهغه خطی میپنګ نظر اساسی قاعدي ته لاندي شکل لري :

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (2x_1,\ x_1 - x_2\ )$$

نوټ: د 8.1 لیما په استفادي سره کولاي شو په پورتني مثال کې د L خطی میپنګ نظر A متریکس ته په لاندي شکل پیدا کړو: $x = (x_1\ ,\ x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$

$$L(x) = L(x_1\ ,\ x_2\ ) = A.x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = (2x_1,\ x_1 - x_2\ )$$

مثال : دوه وکتوری فضاوي $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\ )$ او $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\ )$ لرو. د L تابع په لاندي شکل تعریف شوي ده:

$$L :\ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (2x_1 - 3x_2,\ x_1 - 2x_2 + x_3\ )$$

غواړو د L مربوطه متریکس نظر اساسی قاعدو ته پیدا کړو .
په اسانی سره کولای شو ثبوت کړو چې $L \in \mathrm{Hom}\ (\ \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\ )$ دی . مونږ د $\mathbb{R}^3$ اساسي قاعده په $\mathcal{B}$ او د $\mathbb{R}^2$ په $\acute{\mathcal{B}}$ سره ښیو. یعنی

$$\mathcal{B} = (\ e_1,\ e_2\ ,\ e_3) \quad , \acute{\mathcal{B}} = (e_1,\ e_2)$$

د L مربوطه متریکس باید 2 کرښې (سطر) او 3 ستنې (ستون) ولري .

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (2.1 - 3.0\ ,\ 1 - 2.0 + 0) = (\ 2\ ,\ 1\ )$$

له بلي خوا $L(e_1\ ) \ \in \mathbb{R}^2$ دی. پس لیکلی شو:

$$\exists!\ a_{11},\ a_{21} \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (\ a_{11},a_{21}\ ) = (\ 2\ ,1\ )$$

$$L(e_2) = L(0,\ 1,0) = (2.\ 0 - 3.1,\ 0 - 2.1+0\ ) = (\ -3\ ,\ -2\ )$$

$$L(e_3) = L(0,\ 0,1) = (2.\ 0 - 3.0,\ 0 - 2.0+1\ ) = (\ 0\ ,\ 1\ )$$

د $\mathcal{B}$ اساسی قاعدي تصویرونه د L مربوطه متریکس ستني (ستون) دی . یعنی

$$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

اوس $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L)$ =:A متریکس لرو او غواړو د هغه خطی میپنګ (lin-map) نظراساسی قاعدوته پیداکړو. څرنکه چې ($A \in M(2x3, \mathbb{R})$
دی پس باید خطی میپنګ $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ وي . د 8.1 لیما له مخې L خطی میپنګ نظر A متریکس ته په لاندې ډول لاسته راوړو:

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$L(x) = L(x_1, x_2, x_3) = A.x = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = (2x_1 - 3x_2, x_1 - 2x_2 + x_3)$$

پس L خطی میپنګ د A متریکس نظر اساسی قاعدې ته لاندې شکل لري :

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1 - 3x_2, x_1 - 2x_2 + x_3)$$

مثال 8.2: په دی مثال کې غواړو وښیو چې څرنګه کولای شو د یو L خطي میپنګ مربوطه متریکس A نظر دوه قاعدي چې راکړل شوي دی پیده کړو او همدارنګه معکوس یې.

د ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$) په وکتوری فضای دوه قاعدې $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ او $\acute{\mathcal{B}} = (w_1, w_2)$ راکړل شوي دي . مونږ نظر L تابع ته د $\mathcal{B}$ قاعده د Domain او $\acute{\mathcal{B}}$ قاعده Comdomain لپاره په نظرکې نیسو.

$W_2 = (-1,-1), w_1 = (1,-1), v_2 = (-1,1), v_1 = (1,1)$

(a) غواړو دلاندې خطي میپنګ مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ پیدا کړو

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

(b) غواړو دلاندي متريکس له مخې دهغه مربط خطی میپنګ نظر $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ پيدا کړو

$$A := A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **حل :** څرنګه چې $L(v_2), L(v_1) \in \mathbb{R}^2$ دی پس:

$\exists!\ a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$;

$$L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2\ ,\quad L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2$$

$$\Rightarrow L(v_1) = a_{11}(1,-1) + a_{21}(-1,-1) = (a_{11}, -a_{11}) + (-a_{21}, -a_{21})$$

$$= (a_{11} - a_{21}, -a_{11} - a_{21})$$

له بلي خوا:

$$L(v_1) = L(1,1) = (1+1, 1-1) = (2,0)$$

پس:

$$L(v_1) = (2,0) = (a_{11} - a_{21}, -a_{11} - a_{21})$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} - a_{21} = 2 \ \wedge\ -a_{11} - a_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \ a_{11} = 2 + a_{21} \quad \wedge \quad a_{11} = -a_{21} \quad \Rightarrow -a_{21} = 2 + a_{21}$$

$$\Rightarrow \ -2a_{21} = 2 \Rightarrow a_{21} = -1 \quad \wedge\ a_{11} = -a_{21} = 1$$

$$L(v_2) = a_{12}(1,-1) + a_{22}(-1,-1) = (a_{12}, -a_{12}) + (-a_{22}, -a_{22})$$

$$= (a_{12} - a_{22}, -a_{12} - a_{22})$$

له بلي خوا:

$$L(v_2) = L(-1,1) = (-1+1, -1-1) = (0,-2)$$

پس:

$$L(v_2) = (0,-2) = (a_{12} - a_{22}, -a_{12} - a_{22})$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_{22} = 0 \ \wedge\ -a_{12} - a_{22} = -2$$

$\Rightarrow \; a_{12} = a_{22} \;\; \wedge \;\; a_{12} = 2 - a_{22} \;\; \Rightarrow \;\; a_{12} = 2 - a_{12}$

$\Rightarrow \; 2\,a_{12} = 2 \;\; \Rightarrow \;\; a_{12} = 1 \;\; \wedge \;\; a_{12} = a_{22} = 1$

په نتیجه کې د L خطی میپنګ مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ قاعدو ته چې
مونږ. هغه په (L) $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ سره ښیو لاندې شکل لري :

$$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) حل :

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \; \exists!\, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \; ; \; x = a_1 v_1 + a_2 v_2$ [ځکه v_1 , v_2 قاعده]

$\Rightarrow \; (x_1, x_2) = a_1(1,1) + a_2(-1,1)$

$= (a_1, a_1) + (-a_2, a_2) = (a_1 - a_2, a_1 + a_2)$

$\Rightarrow x_1 = a_1 - a_2 \;\; \wedge \;\; x_2 = a_1 + a_2$

$\Rightarrow \; a_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \;\; , \;\; a_2 = \frac{x_2 - x_1}{2}$

مونږ. د مترکس مربوطه خطي میپینګ په L سره ښیوو

$L(x) = L(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)$

ځرنګه چې $L(v_2), L(v_1) \in \mathbb{R}^2$ او w_1 , w_2 یوه قاعده د $\mathbb{R}^2$ ده، پس:

$\exists!\, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \; ; \; L(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 \, ,$

$L(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2$

$\Rightarrow L(v_1) = a_{11}(1,-1) + a_{21}(-1,-1) = (a_{11}, -a_{11}) + (-a_{21}, -a_{21})$

$= (a_{11} - a_{21}, \; -a_{11} - a_{21}) = (1+1, -1+1) = (2, 0)$

$L(v_2) = a_{12}(1,-1) + a_{22}(-1,-1) = (a_{12}, -a_{12}) + (-a_{22}, -a_{22})$

$= (a_{12}- a_{22}\ ,\ -a_{12} - a_{22}) = (1-1, -1-1) = (0\ ,\ -2)$

خرنگه چې $x_1 = a_1 - a_2$ او $x_2 = a_1 + a_2$ دی. پس:

$x_1 + x_2 = a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = 2\, a_1$

$x_1 - x_2 = a_1 - a_2 - a_1 - a_2 = -2\, a_2$

$L(x) = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) = a_1(2,0) + a_2(0,-2)$

$= (2\, a_1, -2\, a_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2)$

د متریکس مربوطه خطي میپنګ لاندي شکل لري:

$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1+x_2,\ x_1 - x_2)$

تمرین 8.1 : د $(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$ په وکتوري فضا کې دوه قاعدي $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ او $\acute{\mathcal{B}} = (w_1,w_2)$ راکړل شوي دي.
$v_1= (1,1)\ ,\ v_2= (-1,1),\ w_1= (1,-1),\ w_2 = (-1,-1)$.
یو خطی میپنګ (lin-map) L په لاندي ډول تعریف شوي دی:

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1+x_2,\ x_1 - x_2)$

(a) د L خطی میپنګ مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ او اساسی قاعده (can-basis) ته پیدا کړې

(b) د L خطی میپنګ مربوطه متریکس نظر $\acute{\mathcal{B}}$ او اساسی قاعده (can-basis) ته پیدا کړې

تمرین 8.2 $v_1= (1,1)\ ,\ v_2= (-1,1) \in \mathbb{R}^2$. که $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ یوه قاعده په $(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$ او $\acute{\mathcal{B}} = (e_1,e_2,e_3)$ اساسی قاعده د $(\mathbb{R}^3,\ \mathbb{R})$ وي . L په لاندي شکل تعریف شوي دی :

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1+x_2,\ 3x_2\ ,\ 2\, x_1)$

(a) ثبوت کړې چې L یو خطی میپنګ دی

(b) د L خطي میپنګ مربوطه متریکس $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(\mathrm{L})$ نظربه $\mathcal{B}$ او اساسی قاعده (can-basis) $\acute{\mathcal{B}}$ ته پیدا کړي

(c) د (L) $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ متریکس چې په (b) لاس ته راځي د هغه خطی میپنګ L پیدا کړې.

تمرین : لاندي خطی میپنګونه (Lin-Maps) راکړل شوي د ي. دهغوي اړوند میتریکسونه نظراساسې قاعدی ته پیدا کړی

(a)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (3x_1+2x_2, x_1)$$

(b)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (2x_1+x_2,x_1,2x_2)$$

(c)

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1,-x_1,x_2)$$

(d)

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1-x_2,2x_1+3x_2+2x_3)$$

(e)

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_3,2x_1 ,x_2)$$

تمرین 8.3: L تابع لاندي تعریف شوي ده:

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1- x2 +2x_3, 4 x_1 + x_2 + 3x_3)$$

(a) ثبوت کړئ چې L يو خطی میپنګ دی .

(b) که $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ اساسی قاعده د $\mathbb{R}^3$ او $\acute{\mathcal{B}} = (e_1,e_2)$ اساسی قاعده د $\mathbb{R}^2$ وي بيا د $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(\mathrm{L})$ متریکس پيدا کړئ .

(c) د $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ (L) متریکس چې په (b) لاس ته راځي دهغه مربوطه خطی میپنګ L پيدا کړئ .

تمرين 8.4: $v_1= (2,1)$, $v_2= (1,1) \in \mathbb{R}^2$. که $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ يوه قاعده د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ او $\acute{\mathcal{B}} = (e_1,e_2,e_3)$ اساسی قاعده د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وي . L لاندي تعريف شوي ده

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1+x_2,\ 3x_2\ ,\ 2\ x_1\ )$$

$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(\mathrm{L})$ متریکس پيدا کړئ

تمرين 8.5: $v_1= (1,1)$, $v_2= (-1,1) \in \mathbb{R}^2$. که $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ يوه قاعده د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ او L په لاندي شکل تعريف شوي وي :

$$\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1\ ,\ x_2)$$

$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ متریکس نظر $\mathcal{B}$ ته پيدا کړئ .

دا لاندې ليما ښيي چې د خطی میپنګ (lin-map) اومتريکسو تر مينځ ارتباط نه يوازې په ستاندرد (standard) وکتوری فضاو (د مثال په ډول $\mathbb{R}^n$) کې موجود دي ، بلکه په عمومي ډول هم صدق کوي.

ليما 8.2: ($V, \mathbb{R}$) او ($W, \mathbb{R}$) دوه وکتوری فضاوي چې معين بعد (dimension) لري . $\mathcal{B} = (v_1, v_2,\ldots,v_n)$ يوه قاعده د V او $\acute{\mathcal{B}} = (w_1, w_2,\ldots,w_m)$ يوه قاعده د W ده. بيا د هر خطی میپنګ

$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = (a_{ij}) \in$ M(mxn, ℝ) لپاره فقط یوازې یو $L: V \to W$

متریکس د لاندې خواصو سره موجود دی :

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

ثبوت : څرنګه چې $L(v_j) \in W$ $(j=1,2,\ldots,n)$ دی . بیا کولای شو هغه د خطی ترکیب (lin-comb) په شکل ولیکو

$L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m$

$L(v_2) = a_{12}w_2 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m$

$\vdots$

$L(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m$

څرنګه چې $\acute{\mathcal{B}}$ یوه قاعده (basis) د W ده. پس د 4.6 لیما له مخې فقط یوازې یو ډول خطی ترکیب $a_{ij} \in \mathbb{R}$ امکان لري. اوس د پورتنیو معادلو ضرایب د متریکس په شکل دا ډول لیکو چې د k ستنه (ستون) د $L(v_k)$ معادلې ضرایب وي . د $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L)$ متریکس بیا لاندې شکل لري :

$$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

اوس غواړو ثبوت کړو چې دا لاندې تابع isomorphism ده

$$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}} : \mathrm{Hom}(V,W) \to M(m\times n, \mathbb{R})$$

$$L \longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = A$$

$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ یو خطی میپنګ (lin-map) دی:

$\tau \in \mathbb{R}$, $L, F \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = A = (a_{ij}) \in M(mxn, \mathbb{R}) \ \wedge$

$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(F) = B = (b_{ij}) \in M(mxn, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\}\,;\ L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \wedge$

$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$

$\Rightarrow (L+F)(v_j) = L(v_j) + F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$
$= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) w_i$

$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L+F) = M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) + M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(F)$

له بلي خوا :

$\tau\, L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \tau\ a_{ij} w_i$

$\Rightarrow \ M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(\tau L) = \tau\ (a_{ij}) = \tau\ M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L)$

په نتیجه کې $M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ یو خطی (lin-map) دی .

$\boldsymbol{M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}}$ **injective دی:** که مونږ ولرو:

L,F∈ Hom(V,W) , $M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(F)$

$\Rightarrow \ L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ = \ F(v_j)$

$\Rightarrow L = F \ \Rightarrow \ M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ injective

$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ **surjective** دی:

A∈ M(mxn, ℝ) ; $\overline{w_j}$:= $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \in W$

د 7.1 قضيې له مخې فقط يوازې يو L ∈ Hom(V,W) د (i=1,2,...,n)
$L(v_i)= w_i$ خواصو سره وجود لري. پس $M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ سورجکتيف هم دی. په نتيجه کې
$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}$ يو isomorphisim دی او فقط يوازې يو
$A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = (a_{ij}) \in M(mxn, \mathbb{R})$ متريکس موجود دی. يعني:

$$M_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(L) = A = (a_{ij}) \in M(mxn, \mathbb{R})$$

تعريف 8.1 : $A \in \mathrm{M}(\mathrm{n} \times \mathrm{n}, \mathbb{K})$ ، A symmetric او $x \in \mathbb{R}^n$ يو ستونی وکتور دی

(a) A متريکس د positive semidefinite په نوم ياديږي، که چيري :

$$x^t. A.x = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0$$

(b) A متريکس د negative semidefinite که چيري :

$$X^t. A.x = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j \leq 0$$

(c) د $x \neq 0$ لپاره A متريکس ته positive definite ويل کيږي. که چيري:

$$x^t. A.x = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0$$

(d) د $x \neq 0$ لپاره A متريکس ته negative definite ويل کيږي، که چيري:

$$x^t. A.x = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j < 0$$

نوت: $\sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i$ لاندي شکل تشريح کيدای شي :

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $0 \neq x \in \mathbb{R}^3$ [x یوستونی وکتور دی]

$X^t.A.x = (x_1,x_2,x_3).\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= (x_1,x_2,x_3).\begin{pmatrix} 2x_1 & - & x_2 \\ -x_1 + & 2x_2 & -x_3 \\ -x_2 & + & 2x_3 \end{pmatrix}$

$= x_1(2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 2x_3)$

$= 2 x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$ [$0 \neq x$ ځکه]

$\Rightarrow$ A positive definite

تعریف 8.2 :

$A \in M(n \times n,\ \mathbb{C})$, $\bar{A}$:= complex conjugate , $A^* := (\bar{A})^t$
(a) A^* متریکس د adjiont matrix د A په نوم یادیږي .

مثال

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 3 & 1-2i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2-i \\ 3 & 1+2i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^* = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2-i & 1+2i \end{pmatrix}$

(b) A متریکس ته self adjiont (یا Hermitain) ویل کیږي. که چیري $A^* = A$ وي.

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^* = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = A$$

ولیدل شول چې A یو self adjiont (Hermitian) متریکس دی .

تمرین: ایا دا لاندی متریکسونه Hermitian matrix دی

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2+\mathrm{i} & 4 \\ 2-\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} \\ 4 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) A متریکس ته skew Hermitain (یا antihermitain) ویل کیږي. که چیري $A^* = -A$ وي.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^* = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -1.\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$\Longrightarrow$ A skew Hermitain

تعریف 8.3 : $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$

(a) A متریکس د involutory matrix په نوم یادیږي. که چیري $A^2 = E_n$ وي.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4.4 + (-1).15 & -1.4 + (-1).(-4) \\ 15.4 + (-4).15 & -1.15 - (-4).(-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$\Longrightarrow A$ involutory

په عمومي ډول که هر یو $A \in M(2 \times 2, \mathbb{K})$ متریکس لاندي شکل ولري ، هغه involutory متریکس دی .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$$

البته $a,b \in \mathbb{K}$ او $b \neq 0$ دي

ځکه:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + 1 - a^2 & a.b - b.a \\ \frac{a.(1-a^2)}{b} + \frac{-a(1-a^2)}{b} & 1 - a^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

(b) A د nilpotent matrix په نوم یادیږي، که چیري یو $m \in \mathbb{N}$ موجود وي چې $A^m = E_n^0$ شي. E_n^0 د $M(2 \times 2, \mathbb{K})$ مربوطه صفرمتریکس دی.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2^0$$

$\Longrightarrow A$ nilpotent matrix

(c) A د idempotent matrix په نوم یادیږي که $A^2 = A$ وي

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12 & -4+3 \\ 48-36 & -12+9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = A$$
$\Longrightarrow$ A idempotent matrix

واحد متریکس idempotent متریکس دی

permutation matrix **(d)**

هره لاندي تابع چې bijective وي د permutation په نوم یادیږي

$f: \{1,2,3,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,3,\dots,n\}$

مونږ هغه په لاندي شکل لیکو

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutation matrix د f که مونږ په P_f سره وښیو، لاندي شکل لري:

$$P_f = \begin{pmatrix} e_{f(1)} \\ \vdots \\ e_{f(n)} \end{pmatrix}$$

$e_{f(1)}, e_{f(2)}, \dots, e_{f(n)}$ دلته $\mathbb{R}^n$ اساسي قاعدي دوکتورو خواص لري.

مثال: مونږ دالاندي permutation لرو:

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$, $f(4) = 5$, $f(5) = 3$

اوس هغه د متریکس په شکل لیکو

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}$$

permutation matrix د f په لاندي ډول لاسته راوړل کیږي:

$$P_f = \begin{pmatrix} e_{f(1)} \\ e_{f(2)} \\ e_{f(3)} \\ e_{f(4)} \\ e_{f(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د Permutation شمیر تابع د سیت د عناصرو دی. یعنې که سیت n عنصر ولري . بیا د Permutation شمیر مساوي n! دی. که پورتنی مثال په نظرکې ونیول شي

5! = 1.2.3.4.5 = 120

د Permutation شمیر یی 120 دی. دا په دی معنې چې 120 مختلف permutation متریکسونه موجود دي

تمرین:

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

permutation متریکس P_f او P_g پیداکړی

لیما 8.3: $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ یو idempotent متریکس دی. بیا دالاندي افادي صدق کوې:

(a) $A \neq E_n \Rightarrow A$ singular

(b) $\det(A) = 1 \vee \det(A) = 0$

(a) حل: که A یو singular متریکس نه وي. پس باید A^{-1} معکوس ولری

A idempotent $\Rightarrow A.A = A \Rightarrow A^{-1}.A.A = A^{-1}.A$

$\Rightarrow E_n .A = E_n \Rightarrow A = E_n$

مګر $A \neq E_n$ فرض شوي وه. پس A باید singular متریکس وي.

(b) حل:

A idempotent $\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)$

$\det(A^2) = \det(A.A) = \det(A).\det(A) = (\det(A))^2$

$\Rightarrow (\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(A)$

$\Rightarrow \det(A).[\det(A) - 1] = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \vee \det(A) = 1$

لیما 8.4: $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ یو nilpotent متریکس دی. بیا دالاندي افادي صدق کوې:

(a) $\det(A) = 0$

(a) حل: مونږ د $M(n \times n, \mathbb{K})$ مربوطه صفرمتریکس په E_n^0 سره ښیو

A nilpotent $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} ; A^m = E_n^0$

$$\Longrightarrow \det(A^m) = \det(E_n^0) = 0$$
$$\Longrightarrow (\det(A))^m = \det(A^m) = 0 \Longrightarrow \det(A) = 0$$

نـهم فصل

مشخصه (اختصاصي) قيمتونه اومشخصه (اختصاصي) وکتورونه

[Eigenvalues and Eigenvectors]

تعریف 9.1 : $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده .

$$\text{End}(V) := \{ L: V \to \mathbf{V} \mid L\text{- End} \}$$

تعریف 9.2 : $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا او $L \in \text{End}(V)$ دی. یو $\lambda \in \mathbb{K}$ د Eigenvalue (مشخصه اویا اختصاصي قیمت) په نوم یادیږي په دی شرط چې یو وکتور $0 \neq v \in V$ د لاندي خاصیت سره موجود وي:

$$L(v) = \lambda.v$$

v د L eigenvector (مشخصه اویا اختصاصي وکتور) نظر λ په نوم یادیږي. یو eigenvalue کولاي شي په زیات شمیر مشخصه وکتورونه (eigenvectors) ولري . معکوساً د هرمشخصه وکتورلپاره فقط یوازي یو مشخصه قیمت موجود دی.

د مثال په ډول که v مشخصه وکتور نظرλ ته وي. بیا $\mu.v$ هم د L مشخصه وکتور (eigenvector) نظر λ ته دی . ځکه

$$\mu \in \mathbb{K},\ \mu \neq 0 \quad , \quad L(\mu v) = \mu L(v) = \mu\, \lambda.v = \lambda\,(\mu v)$$

که $L(-v) = \lambda.v$ وي. بیا:

$$L(-v) = \lambda.v \implies L(-v) = -\lambda.(-v) \ \wedge\ L(v) = (-\lambda).\,v$$

یعني v او v− مشخصه وکتورونه نظرλ− ته دي

په عمومي صورت لاندي رابطي صدق کوي:

$$L(v) = \lambda.v \iff L(v) - \lambda.v = 0 \iff (L - \lambda \text{id})v = 0$$ و

تعریف 9.3: $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده , $L \in \text{End}(V)$ او $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\text{Eig}((L,\lambda) := \{v \in V \mid v \neq 0 \ \wedge\ L(v) = \lambda.v\} \cup \{0\}$$

$\text{Eig}((L,\lambda)$ د L Eigenspace (مشخصه فضا) نسبت λ په نوم یادیږي. هر $\text{Eig}((L,\lambda)$ د invariant خاصیت هم لري .

مثال 9.1: په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې لاندي تابع راکړل شویده

$$L : \mathbb{R} \mathrm{x} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1,-x_2)$$

لیدل کیږی چې $L \in End(V)$ دی. ټول وکتورونه چې $x = (x_1,0) \in \mathbb{R}^2$ شکل ولري، هغه مشخصه وکتورونه د L دی چې اختصاصی قیمت یي یو " 1" دی. ځکه:

$$L(x) = L(x_1,0) = 1. (x_1,0)$$

اوټول وکتورونه چې $x = (0,x_2) \in \mathbb{R}^2$ شکل ولري ، هغه مشخصه وکتورونه د L دی چې اختصای قیمت یي منفي یو "1-" دی. ځکه:

$$L(x) = L(0,x_2) = (0, -x_2) = -1. (0,x_2)$$

ودهغوي مشخصه فضاوي لاندي شکل لري :

$$Eig(L,1) = \mathbb{R} . e_1 = \{ r.(1,0) \mid r \in \mathbb{R} \}$$

$$Eig(L,-1) = \mathbb{R} . e_2 = \{ r.(0,1) \mid r \in \mathbb{R} \}$$

مثال : مونږ د $(V, \mathbb{R})$ په وکتوری فضا کې دا لاندي د identity تابع په نظر کې نیسو:

$$id : V \rightarrow V$$
$$v \longmapsto v$$

$id \in End(V)$ او فقط یوازی "1" عدد مشخصه قیمت کیداشي . مګرد V ټول وکتورونه نظر id ته مشخصه دی . ځکه $id(v) = 1.v$

مثال : $I \subseteq \mathbb{R}$ یو interval دی

$$V:= D(I, \mathbb{R}) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ arbitrary differentiable} \}$$

arbitrary differentiable په دی معنی چې اختیاری زیات د مشتق وړدي

$$L: V \rightarrow V$$
$$f \longmapsto f'$$

لیدل کیږي چې $L \in End(V)$ او هر $\lambda \in \mathbb{R}$ یو مشخصه قیمت مربوط د L دی. ځکه :

$f(x) := c.\, e^{\lambda x} \in V$

$L(f(x)) = L\,(c.\, e^{\lambda x}) = f'(\,c.\, e^{\lambda x}) = \lambda\, c.\, e^{\lambda x}$

$= \lambda\,(c.\, e^{\lambda x}) = \lambda.f(x)$

اودهر $c \in \mathbb{R}^*$ لپاره $f(x) := c.\, e^{\lambda x}$ د L یومشخصه وکتور (eigenvector نظر λ ته دی.

لیما 9.1: $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا , $L \in End(V)$ او $\lambda \in \mathbb{K}$. بیا :

(1) $Eig((L,\lambda)$ is Subspace (فرعی فضا) in V

(2) λ Eigenvalue (مشخصه قیمت) $\Leftrightarrow$ $Eig(L, \lambda) \neq \{0\}$

(3) $Eig(L, \lambda) \setminus \{0\} = \{v \in V \mid \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \;\wedge\; L(v) = \lambda.v\}$

(یعنی مساوي د ټولو اختصای وکتورو سیت نظر λ)

(4) $Eig(L, \lambda) = ker(L - \lambda \mathrm{id})$

(5) $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \;\wedge\; \lambda \neq \mu \;\Rightarrow\; Eig(L, \lambda) \cap Eig(L, \mu) = \{0\}$

(1) **ثبوت** :

$u,v \in Eig(L,\lambda) \Rightarrow L(u+v) = L(u) + L(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda\,(u+v)$

$\Rightarrow u + v \in Eig(L,\lambda)$

$a \in \mathbb{K}\,,\, u \in Eig(L,\lambda) \;\Rightarrow\; L(a.u) = a.L(u) = a.(\lambda u)$

په نتیجه کې $Eig(L,\lambda)$ یوه فرعی فضا په V کې ده .

د (2) او (3) ثبوت واضح دی

(4) ثبوت:

$v \in Eig(L,\lambda) \Rightarrow L(v) = \lambda v \Rightarrow L(v) - \lambda v = 0$

$\Rightarrow L(v) - \lambda \mathrm{id}(v) = 0$

$\Rightarrow (L - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(L - \lambda \mathrm{id})$

$\Rightarrow Eig(L,\lambda) \subseteq \ker(L - \lambda \mathrm{id})$

$v \in \ker(L - \lambda \mathrm{id}) \Rightarrow (L - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Rightarrow L(v) - \lambda v = 0$

$\Rightarrow L(v) = \lambda v$

$\Rightarrow v \in Eig(L,\lambda) \Rightarrow \ker(L - \lambda \mathrm{id}) \subseteq Eig(L,\lambda)$

ثبوت شو چې $\ker(L - \lambda \mathrm{id}) = Eig(L,\lambda)$ دی.

(5) ثبوت:

$w \in Eig(L, \lambda) \cap Eig(L, \mu)$

$\Rightarrow L(w) = \lambda w \wedge L(w) = \mu w \Rightarrow \lambda w = \mu w$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)w = 0$

خرنګه چې $\lambda \neq \mu$ دی. پس باید $w = 0$ وي او په نتیجه کې

$$Eig(L, \lambda) \cap Eig(L, \mu) = \{0\}$$

نوټ: پس له دی مونږ په دی فصل کې فقط د $V := (\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ وکتوری فضا چې معین بعد ولري او $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ وي په نظرکې نیسو.

نوټ: په 8.1 لیما کې موولیدل چې د هر $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ خطی میپنګ (lin-map) لپاره نظراساسی قاعده (canonical basis) ته فقط یوازې یو متریکس $A \in M(n x n, \mathbb{R})$ چې $L(x) = A$ وي، موجود دی. پس که λ یو مشخصه قیمت (eigenvelue) نظر L ته او x دهغه مشخصه وکتور

(eigenvector) وي. بیا کولای شو مشخصه قیمت او مشخصه وکتور داسي ولیکو : $Ax = \lambda x$
که ($E_n \in M(n x n, \mathbb{R})$ واحد متریکس (unity matrix) وي، بیا دا لاندې رابطه موجوده ده:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda (E_n . x) = (A - \lambda . E_n). x$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

که A د $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ مربوط متریکس نظر اساسی قاعدې ته او
$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ وي، بیا :

$$A.v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.v$$

لیدل کیږي چې v یومشخصه وکتور او 3 د هغه مربوطه مشخصه قیمت دی.

لیما 9.1: ($V, \mathbb{K}$) یوه و کتوری فضا ده چې معین بعد (*dimension*) لري ، $\lambda \in \mathbb{K}$ ، $L \in End(V)$ ، E_n واحد متریکس او($A \in M(n x n, \mathbb{R})$ د L مربوطه متریکس نظراساسی قاعدې (can-basis) ته دی . بیا:
λ مشخصه قیمت (*eigenvalue*) دی $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda . E_n) = 0$

ثبوت:

$\exists\, v \in V ;\ v \neq 0 \wedge L(v) = \lambda v$

$\Leftrightarrow L(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (L - \lambda\, id_v) v = 0$ [L lin-map]

$\Leftrightarrow \ker(L - \lambda\, id_v) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim(\ker(L - \lambda\, id_v)) \neq 0 \wedge \dim(im(L - \lambda\, id_v) < \dim V$

$\Leftrightarrow rank (L - \lambda\, id_v) < \dim V = n$ [د rank د تعریف له مخې]

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A - \lambda .E_n) < n$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda .E_n) = 0$ [د 7.5 لیما له مخي]

تعریف 9.4: $(V,\mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا چې $\dim(V) = n$ او $L \in End(V)$ دی. دالاندي تابع د مشخصه پولینوم (characteristic polynomial) په نوم نظر L ته یادیږي

$$\begin{aligned} P_L :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \lambda \mapsto \det(L - \lambda id) \end{aligned}$$

p_L کولای شو په لاندي شکل راوړو، په دی شرط چې $A = (a_{ij}) \in M(nxn, \mathbb{R})$ د L مربوطه متریکس نظر اساسی قاعده ته وي. **t** یو متحول دی

$P_L(t) = \det(A - tE_n)$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & .. & . & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & . & . & \vdots \\ \vdots & & & & \cdots & . \\ \vdots & & & & & . \\ a_{n1} & .... & & ... & & a_{nn}-t \end{pmatrix}\right)$$

حل د $P_L(t)$ پولینوم (یعنې $P_L(t) = 0$) نظر 9.1 لیما ته مشخصه قیمتونه (*eigenvalue*) دي.

مثال : دلته غواړو د یو خطی میپنګ مربوطه متریکس نظر اساسی قاعدي ته پیدا کړو .ددې کار لپاره د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوری فضا په نظر کي نیسو. L په لاندي ډول تعریف شویدی:

$$\begin{aligned} L :\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2) \mapsto (2x_1+x_2,\ x_2) \end{aligned}$$

په اسانی سره کولای شو ثبوت کړوچې $L \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ دی .

پوهیږو چې په ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$) وکتوری فضا کې *(1,0)* = e_1 او $e_2 = (0,1)$
وکتورونه اساسی قاعده ***(canonical basis***) جوړوي . اوس تصویرونه د
e_1 , e_2 نظر L ته پیدا کو.

$L(e_1) = L(1,0) = (2.1+0 ,\ 0) = (2 , 0)$

$L(e_2) = L(0, 1) = (2. 0 +1 , 1) = (1 ,\ 1)$

د اساسی قاعدی تصویرونه د L مربوطه متریکس ستني (ستون) تشکیله وي. که هغه متریکس په A وښیو

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یعنی A مربوطه متریکس د ***L*** نظر اساسی قاعدي ***e₁*** , e_2 ته دی .

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2 = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (2 - t) (1 - t) = 0$$

$\Longrightarrow t_1 = 1 \ \wedge \ t_2 = 2$

دوه مشخصه قیمتونه 1 او *2* موپیدا کړل. اوس غواړو دهغوي اختصاصي وکتورونه پیدا کړو. لمړی د 1 مشخصه قیمت لپاره

$(A - t.E_2)(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow x_1 + x_2 = 0 \ \Longrightarrow \ x_1 = - x_2$

$Eig(L,1) = \{(m,-m) \mid m\in \mathbb{R} \} = \{(m(1, - 1) \mid m\in \mathbb{R} \}$

د مثال په ډول که $x_2 = -2$ وضع شي ، $x_1 = 2$ کيږي او (2- ,2) مشخصه وکتور نسبت مشخصه قيمت $t = 1$ ته دی.

امتحان:

$L(x_1,x_2) = (2x_1+x_2,\ x_2\ )$

$L(2,-2) = (2.2 - 2, -2\ ) = 1.(\ 2, -2\ )$

د 2 مشخصه قيمت لپاره

$(\ A - t.E_2\ )(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow 0.x_1 + 1.\ x_2 = 0\ \wedge\ 0.x_1 + -1.\ x_2 = 0$

$x_2 = 0$ او x_1 هر حقيقی عدد کيدای شی

$Eig(L,2) = \{(m, 0)\ \big|\ m\in\ \mathbb{R}\ \} = \{m(1, 0)\ \big|\ m\in\ \mathbb{R}\ \}$

د مثال په ډول که $x_2 = 0$ او $x_1 = 3$ وضع شی ، مشخصه وکتوريي (3, 0) دی.ځکه:

$L(x_1,x_2) = (2x_1+x_2,\ x_2\ )$

$\Longrightarrow L(3,0) = (2.3+0,\ 0\ ) = (\ 2.3,0) = 2.(\ 3,0)$

مثال9.2 : که $L \in End(\mathbb{R}^2\ )$ او A مربوطه متريکس د L وي.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} -1-t & 6 \\ -1 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2\ ) = \begin{vmatrix} -1-t & 6 \\ -1 & 4-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2$$

$p_L(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1) . (t-2) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 1 \;, t_2 = 2$

1 او 2 مشخصه قیمتونه نظر L ته دي. د مشخصه وکتورو

(eigen vectors) پیدا کولولپاره باید لاندي معادلاتي سیستم حل شي

$(A - tE_2)(x) = 0$

$$(A - t.E_2)(x) = \begin{pmatrix} -1-t & 6 \\ -1 & 4-t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لمړی د $t = 1$ مشخصه قیمت لپاره :

$$(A - 1.E_2)(x) = \begin{pmatrix} -1-1 & 6 \\ -1 & 4-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_1 & +6x_2 \\ -1x_1 & +3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -2x_1 + 6x_2 = 0 \quad \wedge \quad -x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$

څرنګه چې پورتني معادلي پارامیتری حل لري. که مونږ $x_2 = m \; (m \in \mathbb{R})$ وضع کړو

$Eig(L,1) = \{(3m,m) \mid m \in \mathbb{R}\} = \{m(3,1) \mid m \in \mathbb{R}\}$

د مثال په ډول که $x_2 = 1$ وضع شي ، $x_1 = 3$ کیږي او (3, 1) مشخصه وکتور نسبت مشخصه قیمت $t = 1$ ته دی.

مثال 9.3 : که $L \in End(\mathbb{R}^2)$ او A مربوطه متریکس د L نظر قاعده اساسی (*standard Basis*) ته وي

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2) = \begin{vmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (5-t).(3-t) - 8$$

$$p_L(t) = t^2 - 8t + 7 = (t-7).(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 7 \ , t_2 = 1$$

1 او 7 مشخصه قیمتونه نظر L ته دي.
د مشخصه وکتورو (Eigen vector) بیدا کولو لپاره باید لاندي معادلاتي سیستم حل شي

$$(A - tE_2)(x) = 0$$

$$(A - t.E_2)(x) = \begin{pmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t = 7$ مشخصه قیمت لپاره :

$$(A - 7.E_2)(x) = \begin{pmatrix} 5-7 & -8 \\ -1 & 3-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_1 & -8x_2 \\ -1x_1 & -4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2x_1 - 8x_2 = 0 \quad \wedge \quad -x_1 - 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4x_2$$

ځرنګه پورتنی معادلي پارامیتری حل لري ، ($m \in \mathbb{R}$) $x_2 = m$ وضع کو

Eig(L,7) = {(-4m,m) │ m∈ ℝ }= {m(-4,1) │ m∈ ℝ }

د مثال په ډول که x_2 = -1 وضع شي ، x_1 = 4 کيږي. د هغه یومشخصه وکتورنظر t = 7 مشخصه قیمت ته (4,-1) دی.

تمرین 9.1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) A متریکس ته مربوط مشخصه وکتورونه پیدا کړی.

(b) B متریکس ته مربوط مشخصه وکتورونه پیدا کړی.

مثال 9.4: په دی مثال کې یوحالت ښیوچې په کې مشخصه قیمت حقیقی اعداد نه دی.

L∈ $End(\mathbb{R}^2)$ او A د L متریکس نظر اساسی قاعده (standard Basis) ته دی .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} 3-t & 4 \\ -4 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ -4 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (3-t) . (3-t) + 16 = t^2 - 6t + 25 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm\sqrt{36-4.25}}{2} = \frac{6 \pm\sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm\sqrt{-64}}{2}$$

څرنگه چې $\sqrt{-64}$ حقیقی عدد نه دی ، پس په ℝ کې مشخصه قیمتونه نه لري .

مثال: $A \in M(2x2 , \mathbb{C})$ لاندي شکل لري:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

د A متریکس د پورتني مثال شکل لري . مگر دلته نظرکمپلیکس اعدادو ته دی.

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm\sqrt{36-4.25}}{2} = \frac{6 \pm\sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm\sqrt{-64}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm\sqrt{(-1).64}}{2} = \frac{6 \pm\sqrt{i^2 \cdot 8^2}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 8i}{2} \pm \;= 3\pm 4i$$

ولیدل شو چي نظر $\mathbb{C}$ ته دوه مشخصه قیمتونه لري چي یو 3+4i اوبل 3-4i دی.

تعریف 9.5: ($L\in End(\mathbb{R}^n)$ او ($A \in (nxn, \mathbb{R})$ د L مربوطه متریکس نظر اساسی قاعده ته دی.

(a) که ($Eig(L, \lambda)$ مشخصه فضا (eigenspace) نظر λ مشخصه قیمت ته وي ، بیا (($dim(Eig(L, \lambda)$ د geometric multiplicity *(geom- multip)* په نوم یادیږي.

(b) که Characteristic polynomial (مشخصه پولینوم) نظر L ته لاندي شکل ولري :

$$P_L(t) = det(A - tE_n)$$

$$= (\lambda_1 - t)^{k1} \cdot (\lambda_2 - t)^{k2} \cdot \ldots\ldots \cdot (\lambda_n - t)^{kn}$$

ki د λ_i (i=1,2,…,n) د algebraic multiplicity (*algeb-multip*) په نوم یادیږي ا و مونږ هغه په ($\mu\,(P_L, \lambda_i$ سره ښیو.

مثال : ($L\in End(\mathbb{R}^3 , \mathbb{R})$. که $\mathcal{B}$ اساسی قاعده د $\mathbb{R}^3$ او A د L مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ ته وي

$$A := M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_L(t) = \det(A - tE_3) = \begin{vmatrix} -t & -1 & 1 \\ -3 & -2-t & 3 \\ -2 & -2 & 3-t \end{vmatrix}$$

د هغه مشخصه پولینوم (char-polyn) لاندي شکل لري

$$P_L(t) = -t^3 + t^2 + t - 1 = -(t-1)^2.(t+1)$$

مشخصه قیمتونه (eigenvalues) يي 1 او -1 دی. یعنی $\lambda_1 = 1$ او

$\lambda_2 = -1$. پس Algebraic multiplicity د λ_1 مساوي په 2 اود λ_2 مساوي په 1 دی. یعنی

$$\mu(P_L, \lambda_2) = 1 \text{ او } \mu(P_L, \lambda_1) = 2$$

د $\lambda_1 = 1$ مشخصه قیمت مربوطه مشخصه وکتورونه (eigen vectors) پیدا کولو لپاره باید لاندي معادلاتي سیستم حل شي

$$\begin{pmatrix} 0-1 & -1 & 1 \\ -3 & -2-1 & 3 \\ -2 & -2 & 3-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2$$

$$Eig(L,1) = \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2 \}$$

$$= \{ x_1(1,0,1) + x_2(0,1,1) \}$$

ځرنګه چې (1,0,1) ، (0,1,1) وکتورونه یوه قاعده د Eig(L,1) ده ، پس $\dim(Eig(L,1)) = 2$ دی. یعنی geometric multiplicity نظر $\lambda_1 = 1$ مشخصه قیمت ته مساوي 2 دی. د $\lambda_1 = -1$ مشخصه قیمت مربوطه مشخصه وکتورونه (eigen vectors) د لاندي معادلاتي سیستم د حل څخه لاس ته راځي .

$$\begin{pmatrix} 0+1 & -1 & 1 \\ -3 & -2+1 & 3 \\ -2 & -2 & 3+1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$- 4x_2 + 6x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} x_3 \quad \wedge \quad x_1 = \frac{1}{2} x_3$

که $x_3 = a$ وضع شي. البته a دلته یو حقیقی عدد دی. د هغه مربوط مشخصه فضا (eigenspace) لاندي شکل لري:

$$Eig(L,-1) = \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = \frac{1}{2} x_3 \ \wedge \ x_2 = \frac{3}{2} x_3 \}$$

$$= \{ (\frac{1}{2} a \ , \frac{3}{2} a \ ,a) \in \mathbb{R}^3 \} \ = \{ \frac{a}{2} \ (1,3,2) \mid a \in \mathbb{R} \}$$

څرنګه چې (1,3,2) وکتور یوه قاعده د Eig(L,-1) ده. پس
dim(Eig(L,-1)) = 1 . یعنی geometric multiplicity نظر
λ_1 = -1 مشخصه قیمت ته مساوي 1 دی.
لیما 9.2 : ($V,\mathbb{K}$) یوه وکتوری فضا چې معین بعد لري او $L \in End(V)$ دی.
که $v_1, v_2,\dots, v_m$ اختصاصی وکتورونه (eigenvectors) نسبت
$\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, …. , $\boldsymbol{\lambda_m}$ مختلف مشخصه قیمتونو(eigenvalues) ته وي ، بیا
$v_1, v_2, \dots, v_m$ خطی مستقل (lin-indep) دی او $m \le \dim V$ دی.
ثبوت: باید ثبوت شي:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0 \ (a_i \in \mathbb{K} , i = 1,2,\dots,m)$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

د ثبوت لپاره د complete induction طریقي څخه استفاده کو.
لمړی حالت: د $m = 1$ لپاره صدق کوي. ځکه:

$a_1v_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ [ځکه v_1 مشخصه وکتور دی]

دویم حالت : فرض کوچې د m-1 لپاره صدق کوي
دریم حالت: باید ثبوت شې چې د m لپاره هم صدق کوي

څرنګه چې v_i اختصاصي وکتورنطر λ_i دي. نولیکلی شو:

$$L(v_i) = \lambda_i v_i \quad (i\in \mathbb{N}\ , i = 1,2,\ldots,m)$$

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0\ (a_i\in \mathbb{K}\ , i = 1,2,\ldots,m) \quad (*)$$

$$\Longrightarrow L(a_1v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m) = L(0) = 0$$
$$\Longrightarrow a_1.L(v_1) + a_2.L(v_2) + \ldots + a_m.L(v_m) = 0$$

$$\Longrightarrow a_1.\lambda_1v_1 + a_2.\lambda_2v_2 + \ldots + a_m.\lambda_mv_m = 0 \quad (**)$$

که (∗) معادله په λ_1 کې ضرب اوبیا له (∗∗) څخه تفریق کړو، بیا لاندي معادله لاس ته راځي :

$$a_2.(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3.(\lambda_3 - \lambda_1)v_3$$
$$+ \ldots + a_m.(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0$$

Induction دفرضیی له مخې باید :

$$a_2.(\lambda_2 - \lambda_1)= 0\ , a_3.(\lambda_3 - \lambda_1) = 0\ ,\ldots,\ a_m.(\lambda_m - \lambda_1) = 0$$

څرنګه چې مشخصه قیمتونه یو له بل څخه مختلف دی . پس

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0\ ,\ \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0\ ,\ \ldots\ldots,\ \lambda_m - \lambda_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$$

(∗)معادله لاندي شکل نیسي:

$$a_1v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_m = 0$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ [ځکه $v_1 \neq 0$]

$\Rightarrow$ v_1 , v_2, …. V_m lin-indep

تعریف 9.6:

(a) یو $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ متریکس د diagonal matrix (قطري متریکس) په نوم یادیږي ، په دی شرط چې $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) . البته a_{ij} د A عناصر دی

(b) یو $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ متریکس ته diagonalizable متریکس ویل کیږي، په دی شرط چې یو متریکس $S \in GL(n, \mathbb{K})$ موجود وي چې $S^{-1}.A.S$ یو diagonal متریکس وی او مونږ هغه په D سره ښیو . یعنی :

$$D := S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & 0 \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

(c) $A,B \in M(m \times n, \mathbb{K})$
د A متریکس ته د B متریکس معادل (equivalence) ویل کیږي ، په دی شرط چې :

$\exists\, S \in GL(m, \mathbb{K}) \quad \wedge \quad \exists\, T \in GL(n, \mathbb{K}) \quad ; \quad B = S.A.T^{-1}$

(d) $A,B \in M(n \times n, \mathbb{K})$
د A متریکس ته د B متریکس مشابه (similar) ویل کیږي ، په دی شرط چې :

$\exists\, S \in GL(n, \mathbb{K})$; $B = S.A.S^{-1}$

که A او B متریکسونه مشابه وي، مونږ بیا هغه په $B \sim A$ سره ښیو.

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

A متریکس د B متریکس مشابه (similar) دی. ځکه:

که د S متریکس لاندي شکل ولري:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

نوټ:

(a)
(i)مشابه متریکسونه (similar matrices) مساوي دیترمینات لري
(ii) د مشابه متریکسو (similar matrices) مشخصه قیمتونه
(eigenvalues) سره مساوي دی. مګرد هغوي مربوطه اختصاصي وکتورونه
سره مساوي نه دی. دا حالات کولاي شی د 9.1 په تمرین کې امتحان کړی.

(b) معادل (equivalence) متریکسونه مساوي رنک (rank) لري
مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank}(A) = 1 = \text{Rank}(B)$$

پس A او B متریکسونه سره معادل دي
نوټ: <u>قطري متریکسونه خواص</u>
مونږ دا لاندي A او B قطري متریکسونه لرو:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

(a)

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & & & & \\ & a_{22} + b_{22} & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & 0 & & & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

(b)

$$A . B = \begin{pmatrix} a_{11} . b_{11} & & & & \\ & a_{22} . b_{22} & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & 0 & & & a_{nn} . b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (a_{11})^2 & & & & \\ & (a_{22})^2 & & 0 & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & 0 & & & (a_{nn})^2 \end{pmatrix}$$

تعریف 9.7: یومتریکس چې ټول عناصریی د اصلی قطرلاندی صفر وي د **upper triangular matrix** (پورتنی مثلثی متریکس) په نوم یادیږی او لاندی شکل لري

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

یعنی:

$i > j \implies a_{ij} = 0 \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$

لیما 9.3: د یو **upper triangular** (پورتنی مثلثی) متریکس اصلی قطر عناصر د هغه مشخصه قیمتونه (eigenvalues) دي

ثبوت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_L(t) = \det(A - tE_n)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11}-t & & & & \\ & a_{22}-t & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}-t \end{pmatrix}\right)$$

$$= (a_{11}- t).((a_{22}- t). \ldots. (a_{nn}- t) = 0$$

$$\implies t_1= a_{11} , t_2= a_{22} , \ldots , t_n= a_{nn}$$

ولیدل شوچې قطری عناصرد A متریکس د هغه مشخصه قیمتونه دي

لیما 9.4: $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ او $S \in GL(n, \mathbb{K})$. بیا:
(a) A او $S^{-1}.A.S$ عین مشخصه قیمتونه (eigenvalues) لري
(b) که $S^{-1}.A.S$ یو دیاگونال متریکس (diagonal matrix) وي، پدی صورت د $S^{-1}.A.S$ د اصلی قطر عناصرد A متریکس مشخصه قیمتونه دي
ثبوت: مونږ $S^{-1}.A.S$ په D سره ښیو. یعنی: $D := S^{-1}.A.S$
(a)

$$P_D(t) = \det(S^{-1}.A.S - tE_n) = \det(S^{-1}.A.S - S^{-1}.tE_n . S)$$

$$= \det(S^{-1}(A - tE_n).S)$$

$$= \det(S^{-1}). \det(A - tE_n) . \det(S)$$

$$= \frac{1}{\det(S)} . \det(S)(\det(A - tE_n) = \det(A - tE_n) = P_A(t)$$

لیدل کیږی چې د $S^{-1}.A.S$ او A مشخصه پولینوم سره مساوي دي. پس مساوي مشخصه قیمتونه هم لري

(b) ثبوت: که $S^{-1}.A.S$ دیاگونال متریکس (diagonal matrix) وي، بیا د 9.3 لیما له مخی د $S^{-1}.A.S$ اصلی قطری عناصر (diagonal elements) د هغه مشخصه قیمتونه دي. څرنګه چې د **(a)** له مخی مشخصه پولینومی د A او $S^{-1}.A.S$ سره مساوي دي. پس $S^{-1}.A.S$ د قطرعناصر د A مشخصه قیمتونه (eigenvalues) دي

قضیه 9.1: $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وکتورونه یوه قاعده د $\mathbb{K}^n$ ده. که $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وکتورونه ستنی (columns) د یو S متریکس وي. بیا:
(a) S متریکس معکوس پذیر (invertible) دی
(b) لاندي افادي دیوبل سره معادل دي
(i)

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(ii) v_j (j = 1,2, ... , n) د A مشخصه وکتور او λ_j دهغه مربوط مشخصه قیمت دی

ثبوت (a)

$v_1, v_2, \dots, v_n$ basis $\Longrightarrow$ $v_1, v_2, \dots, v_n$ lin-indep

$\Longrightarrow$ rank(A) = n $\Longrightarrow$ det(A) $\neq 0$ $\Longrightarrow$ A invertible

ثبوت (b)

A diagonalizable $\Leftrightarrow$ $\exists$ S $\in$ GL(n, $\mathbb{K}$) ;

$$S^{-1}.A.S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A.S = S.D$$

څرنګه چې $v_1, v_2, \dots, v_n$ وکتورنه د S ستني (columns) دي. پس

A.S = ($Av_1, Av_2, \dots, Av_n$) = S.D = ($v_1 \lambda_1, v_2 \lambda_2, \dots, v_n \lambda_n$)

$\Leftrightarrow$ $Av_j = \lambda_j v_j$ (j=1,2, … , n)

v_j (j = 1,2, ... , n) د A مشخصه وکتورونه مربوط λ_j مشخصه قیمتونه دي

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

غواړو ثبوت کړو چې A یو Diagonalizable متریکس دی. لمړی غواړو دهغه مشخصه قیمتونه پیداکړو

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} -2-t & 6 \\ -2 & 5-t \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det(A - t.E_2 = \begin{vmatrix} -2-t & 6 \\ -2 & 5-t \end{vmatrix} = (-2-t).(5-t) + 12$$

$$= t^2 - 3t - 10 + 12 = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

$$\Longrightarrow t_1 = 1 \quad \wedge \quad t_2 = 2$$

1 او *2* مشخصه قیمتونه دي. اوس غواړودهغه مربوطه اختصاصي وکتورونه وپیداکړ . لمړی د 1 مشخصه قیمت لپاره

$$(A - t.E_2)(x) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 6 \\ -2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad -3x_1 + 6x_2 = 0 \quad \wedge \quad -2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Eig(A,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 6x_2 = 0\}$$

$$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2x_2\}$$

دمثال په ډول د 1 = x_2 لپاره (2,1) یومشخصه وکتوردی
اوس د 2 مشخصه قیمت مربوط مشخصه وکتورونه پیداکړو

$$(A - t.E_2)(x) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 6 \\ -2 & 5-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad -4x_1 + 6x_2 = 0 \quad \wedge \quad -2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Eig(A,2) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1 + 3x_2 = 0\}$$

$$= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \tfrac{3}{2}x_2\}$$

دمثال په ډول د 2 = x_2 لپاره مشخصه وکتور (3,2) دی

اوس باید S متریکس داډول تعریف شی، چې ستني (columns) یی مشخصه وکتورونه وي. یعنی

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

det(S) = 1

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

لیدل کیږی چې $S^{-1}.A.S$ یو دیاګونال متریکس دی . پس دتعریف له مخی د A متریکس Diagonalizable دی

لسم فصل
اقليدي وكتوري فضا
(Euclidean space)

تعریف 10.1: $(V, \mathbb{K})$ یوه وکتوری فضا ده

$$
\begin{aligned}
s : V \times V &\to \mathbb{K} \\
(v,w) &\longmapsto s(v,w)
\end{aligned}
$$

د s تابع د لاندي خواصوسره د bilinearform په نوم یادیږي

$\lambda \in \mathbb{K}$ و $v, v', w, w' \in V$

(i) $s(v+v',w) = s(v,w) + s(v',w) \quad \wedge \quad s(\lambda.v,w) = \lambda.s(v,w)$

(ii) $s(v,w+w') = s(v,w) + s(v,w') \quad \wedge \quad s(v, \lambda.w) = \lambda.s(v,w)$

یو bilinearform ته symmetric (متناظر) ویل کیږي که چیري
$s(v, w) = s(w,v)$ وي ، د alternating په نوم یادیږي که چیري
$s(v, w) = - s(w,v)$ وي او **positive definite** دی که چیري $s(v,v)$
> 0 د هر $v \neq 0$ لپاره صدق وکړي

تعریف 10.2: ($\mathbb{R} -$ scalar product)

$(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا ده او که < , > چې لاندي تعریف شوي دی ، یو bilinearform وي

$$
\begin{aligned}
<, > : V \times V &\to \mathbb{R} \\
(v,w) &\longmapsto <v,w>
\end{aligned}
$$

< , > د لاندي خواصو سره د scalar product په نوم یادیږي

(i) $<v ,w> = <w, v>$

(ii) $<v, v> > 0$ (د $v \neq 0$)

یعنی یو bilinearform پر $(V, \mathbb{R})$ وکتوری فضا چې په عین وخت کې symmetric او positive definit وي ، scalar product ورته ویل کیږي

تمرین

$$< , > : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto <x,y>$$

$< , >$ په لاندي ډول تعریف شوي وې

$$<x,y> = <(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = x_1 . y_1 + x_2 . y_2$$

ثبوت کړی چې $< , >$ یو scalar product دی

مثال: $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ یو Interval . مونږ پوهیږو چې

$C(I,\mathbb{R}) := \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f\ continue($ متمادی $) \}$ یوه وکتوری فضا ده . دالاندي تابع یو bilinearform پر $C(I,\mathbb{R})$ دی

$$< , >: C(I,\mathbb{R}) \times C(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto <f,g> = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

تعریف 10.3: یوه $(V,\mathbb{R})$ وکتوری فضا د $\mathbb{R}$ – scalar product سره د اقلیدي وکتوري فضا (Euclidean space) په نوم یادیږي او مونږ هغه په $(V,<,>)$ سره ښیو

تعریف 10.4: (standard scalar product in $\mathbb{R}^n$)
پر $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ وکتوری فضا دا لاندي mapping تعریف شوي دی

$$< , > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto <x,y> := x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + \ldots + x_n . y_n$$

دلته $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دي

په اسانی سره کولای شوثبوت کړو :

$x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $<x+x',y> = <x,y> + <x',y> \quad \wedge \quad <\lambda.x,y> = \lambda.<x,y>$

(ii) $<x,y+y'> = <x,y> + <x,y'> \quad \wedge \quad <x,\lambda.y> = \lambda.<x,y>$

پس $< , >$ یو bilinearform دی

$$<x,y> = x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + \ldots + x_n . y_n$$

$$= y_1 . x_1 + y_2 . x_2 + \ldots + y_n . x_n = < y,x>$$

$\Rightarrow$ < , > symmetric

$<x,x> = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0 \Rightarrow < , >$ positive definite

پس < , > يو scalar product او په نتيجه کې $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ وکتوری فضا نظر < , > ته يو Euclidean space دی.

< , > د standard scalar product په نوم ياديږي. په ځينوکتابو کې ورته Canonical scalar product هم وای

تعريف 10.5: $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ يوه Euclidean فضا ده . دا لاندي تابع د Norm په نوم ياديږي

$$\| \ \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^0$$

$$x \longmapsto \|x\| := \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

د $\mathbb{R}^1$ په وکتوری فضا کې نورم مساوي د مطلقه قيمت سره دی .
يعنی $\|x\| = |x|$
وکتوری فضا د نورم سره د normed vector space په نوم ياديږي او هغه په $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ سره ښودل کيږي.

مثال

$$< , > : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto <x,y> := x_1 . y_1 + x_2 . y_2$$

$X = (1, 2) , y = (3,4) \in \mathbb{R}^2$

$<x,y> = 1.3 + 2.4 = 11$

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{1.1 + 2.2} = \sqrt{5}$$

يادداښت: که α زاويه د x او y تر مينځ وي. په دی صورت scalar product په لاندی ډول ليکی شو:

$$<x,y> = \| x \| . \| y \| . \cos\alpha$$

په دی شرط چې د **cosα** قیمت د لاندي افاده مطابق وي

$$\mathrm{Cos}\alpha := \begin{cases} > 0 & , \quad 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \\ < 0 & , \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \end{cases}$$

تعریف 10.6: پر $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ باندي d په لاندي ډول تعریف شوي دی

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^0$$

$$(x, y) \mapsto d(x,y) := \| y - x \|$$

d د distance Function اویا د metric په نوم یادیږي. دلته d (x,y) فاصله د x او y دو نقطو ترمینځ ده . د d تابع لاندي خواص لري :

$x,y,z \in \mathbb{R}^n$

(a) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetric)

(c) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

یوه وکتوری فضا د metric سره د metric space په نوم یادیږي او هغه په $(\mathbb{R}^n, d)$ ښودل کیږي. metric space د euclidean metric په نوم هم یادیږي

مثال

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+^0$$

$$(x, y) \mapsto d(x,y) := \| y - x \|$$

د مثال په ډول: $x = (1, -2, 2)$, $y = (3,0, 1) \in \mathbb{R}^3$

$$d(x,y) = \| y - x \| = \| (3,0,1) - (1,-2,2) \| = \| (2, 2, -1) \|$$

$$= \sqrt{< (2,2,-1) , (2,2,-1) >}$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

مثال:

$d : \mathbb{R} x\, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{0}$

$(x, y) \mapsto d(x,y) := |x - y|$

$(\mathbb{R}, d)$ یوه میتریکي فضا (metric space) ده . اویا په عمومي صورت :

$d : \mathbb{R}^{n}\, x\, \mathbb{R}^{n} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{0}$

$(x, y) \mapsto d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$(\mathbb{R}^{n}, d)$ هم یوه میتریکي فضا (metric space) ده .

تعریف 10.7**:** $(\mathbb{R}^{n}, \mathbb{R})$ یوه اقلیدي (Euclidean) فضا ده . $x,y \in \mathbb{R}^{n}$

(a) x او y په $\mathbb{R}^{n}$ کې اورتوگونال (orthogonal) دی ، که
$<x,y> = 0$ شي. د x او y وکتورو Orthogonal دا معنی چې x,y
پریوبل عمود دی او مونږ هغه په $x \perp y$ سره ښیو .

(b) x او y په $\mathbb{R}^{n}$ کې اورتونورمال (orthonormal) دی ، په دی شرط چې :

$<x,y> = 0 \quad \wedge \quad \| x \| = 1 = \| y \|$

(c) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وکتورونه په $\mathbb{R}^{n}$ کې orthogonalsystem دي ،

که $v_i \perp v_j$ ($j \neq i$) وي .

یو اورتوگونال سیستم ته **orthonormagsystem** ویل کیږي ، که چیرې

$\| v_i \| = 1$ د هر i لپاره . که یو اورتونورمل سیستم چې قاعده (basis) د $\mathbb{R}^{n}$ هم وي ، د orthonormalbasis په نوم یادیږي. په $\mathbb{R}^{n}$ کې اساسی قاعده **(canonicalbasis)** یو orthonormalbasis دی. د مثال په ډول په $\mathbb{R}^{2}$ کې e_1 او e_2 وکتورونه یو orthonormalbasis دی. ځکه:

$<e_1,e_2> = <(1,0),(0,1)> = 1.0 + 0.1 = 0 \Longrightarrow e_1,e_2$ orthogonal

له بلې خوا:

$\| e_1 \| = \sqrt{< e_1, e_1 >} = \sqrt{<,(1,0)\,,(1,0)\ >}$

$= \sqrt{1.1 + 0.0} = \sqrt{1} = 1$

$\| e_2 \| = \sqrt{< e_2, e_2 >} = \sqrt{<, (0,1)\,, (0,1)\ >}$

$= \sqrt{0.0 + 1.1} = \sqrt{1} = 1$

$\Longrightarrow e_1, e_2$ orthonormal

پوهیږو چې e_1 او e_2 یوه قاعده د $\mathbb{R}^2$ ده. پس orthonormalbasis هم ده.

نوټ: مونږ پوهیږو چې $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ یو normed vector space دی.
د gram-schmidt میتود په استفادی سره کولایی شو orthonormalbasis په $\mathbb{R}^n$ وکتوری فضا کی پیداکړو.
لمړی پر u او v دووکتوروباندی لاندی عملیه ، چې د projetion operator په نوم یادیږی ، تعریف شویده:

$$\text{Proj}_u(v) := \frac{<u,v>}{<u,u>}\,u$$

البته دلته $<\,,\,>$ سکالری حاصل ضرب دی.
gram-schmidt طریقه ،چې د gram-schmidt process په نوم هم یادیږی، په لاندی ډول ده :

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$u_1 := v_1$

$u_2 := v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2)$

$u_3 := v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3)$

$u_4 := v_4 - \text{proj}_{u_1}(v_4) - \text{proj}_{u_2}(v_4) - \text{proj}_{u_3}(v_4)$

$\vdots$

$u_n := v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \text{proj}_{u_i}(v_n)$

$w_i := \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad (I = 1,2,3,\ldots,n)$

w_i وکتورونه یوه اورتونورمال قاعده (orthonormalbasis) د $\mathbb{R}^n$ ده.

مثال:

$v_1 = (3,1)\,,\ v_2 = (2,2) \in (\mathbb{R}^2, \| \ \|)$

$u_1 := v_1 = (3,1)$

$u_2 := v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = v_2 - \frac{<u_1,v_2>}{<u_1,u_1>}.u_1 = (2,2) - \frac{<(3,1),(2,2)>}{<(3,1),(3,1)>}.(3,1)$

$= (2,2) - \frac{3.2+1.2}{3.3+1.1}.(3,1) = (2,2) - \frac{8}{10}(3,1) = (2,2) + \left(\frac{-12}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

$= \left(\frac{-2}{5} , \frac{6}{5} \right)$

$w_i := \frac{u_i}{\| u_i \|} \qquad (i = 1,2)$

$w_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{1}{\| (3,1) \|} . (3,1) = \frac{1}{\sqrt{9+1}} . (3,1) = \frac{1}{\sqrt{10}} . (3,1)$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \left(\frac{-2}{5} , \frac{6}{5} \right) = \frac{5}{\sqrt{40}} . \left(\frac{-2}{5} , \frac{6}{5} \right) = \frac{1}{2.\sqrt{10}} . (-2 , 6)$

$= \frac{1}{\sqrt{10}} . (-1 , 3)$

$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{10}} . (3,1) , \frac{1}{\sqrt{10}} . (-1,3) \rangle = \frac{-3}{10} + \frac{3}{10} = 0$

ولیدل شو چې w_1 او w_2 وکتورونه له یوبل سره orthogonal دي. اوس غواړو ثبوت کړو چې orthonormal هم دي

$\| w_1 \| = \| \frac{1}{\sqrt{10}} . (3,1) \| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{10} + \frac{1}{10}} = 1$

$\| w_2 \| = \| \frac{1}{\sqrt{10}} . (-1,3) \| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} = 1$

په اسانی کولای شوثبوت کړو چې w_1 او w_2 یوه قاعده د $\mathbb{R}^2$ ده. پس w_1 او w_2 وکتورونه orthonormalbasis جوړوي .

تعریف 10.8: (Vectorproduct in $\mathbb{R}^3$)

که مونږ د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ اقلیدي (Euclidean) وکتوري فضا په نظرکې ونیسواولاندي تابع ولرو:

$x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(v, w) \mapsto v \times w$

v x w په لاندي ډول تعریف شوې ده:

$v \times w := (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3\ ,\ v_1w_2 - v_2w_1)$

پورتنی تابع ته vectorproduct (وکتوری حاصل ضرب) په $\mathbb{R}^3$ کې ویل کیږي. لیدل کیږي چې د دو و کتورو vectorproduct بیرته یو وکتوردی. مګر د دو و کتورو scalar product یو عدد دی .

د ددو وکتورو vectorproduct چې پورته په $\mathbb{R}^3$ تعریف شوي دی ، کولای شو د determinant لیاري په لاندي شکل لاسته راوړو:

$u = (u_1, u_2, u_3)\ , v = (v_1, v_2, v_3)\ ,\ w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

که وغواړو چې د v او w دو وکتورو vectorproduct د دیترمینات له لیاري پیده کړو، باید د u مختصات په لمړی کرښه کې ولیکل شي . اوس هغه وکتورونه د متریکس په شکل لیکو

د A'_{1j} متریکس د A څخه په دا ډول لاسته راځي چې د لمړۍ کرښي اود j (j=1,2,3) ستني (ستون) څخه صرف نظر وشي. یعنی :

j=1

$$A_{11} = \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

j=2

$$A_{12} = \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}$$

j=3

$$A_{13} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

$v \times w = (\ (-)^{1+1}\ .\ \det(A'_{11}\ ),\ (-)^{1+2} \det(A'_{12}\ ),\ (-)^{1+3} \det(A'_{13}\ )\ )$

$= (1.(v_2w_3 - v_3w_2\ ), -1\ .\ (v_1w_3 - v_3w_1\ ), 1.(v_1w_2 - v_2w_1))$

مثال:

$u = (u_1,u_2, u_3)$,$v = (1,2, 3)$, $w = (2,-2, 1) \in \mathbb{R}^3$

غواړو Vectorproduct د v او w د ديترمينات له لياري پيده کړو

$$v \times w = ((-)^{1+1} \det(A'_{11}) , (-)^{1+2} \det(A'_{12}) , (-)^{1+3} \det(A'_{13}))$$

$$= (1.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} , -1. \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , 1. \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (2.1 - (-2.3) , -1. (1.1 - 2.3) , 1 . (-2) - 2.2)$$

$$= (8, 5 , -6)$$

نوټ: Vectorproduct دا لاندي خواص لري :

$v , v', w , w' \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) $(v + v') \times w = v \times w + v' \times w$

$v \times (w + w') = v \times w + v \times w'$

(2) $\lambda.v \times w = \lambda. (v \times w) \quad \wedge \quad v \times \lambda w = \lambda. (v \times w)$

(3) $w \times v = -v \times w \quad \wedge \quad v \times v = 0$

(4) $v \times w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v , w$ lin-dep (خطی وابسته)

ليما 10.3: دا ليما د Vectorproduct او scalerproduct تر مينځ اړيکي (ارتباط) ښيي

$u = (u_1,u_2, u_3)$,$v = (v_1,v_2, v_3)$, $w = (w_1,w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

$$(1) \quad < u \times v, w > = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad < u \times v, u > = < u \times v, v> = 0$$

(1) ثبوت :

$$u \times v = (u_2 . v_3 - u_3 . v_2,\ u_1 . v_3 - u_3 . v_1,.\ u_1 . v_2 - u_2 v_1)$$

$$< u \times v, w > = (u_2 . v_3 - u_3 . v_2) . w_1 + (u_3 . v_1 - u_1 . v_3) . w_2$$
$$+ (u_1 . v_2 - u_2 v_1) . w_3$$
$$= \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

البته پورته دیترمینات د وروستی لیکي له لیارې لاسته راغلی دی .

(2) ثبوت: **د** (1) له مخې لیکلی شو :

$$< u \times v, u > = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = 0$$

ځکه څه وخت چې دوه کربني (سطر) په یوه متریکس کې سره مساوي وي ، بیا د (D_2) له مخې د هغه دیترمیننت صفردی.

د $< u \times v, v> = 0$ ثبوت مشابه د هغه دی

تعریف 10.9: په $(V, \mathbb{C})$ په وکتوری فضای کې s په لاندې ډول تعریف شوي دی :

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$
$$(v,w) \longmapsto s(v,w)$$

s د لاندي خواصوسره د semi-**b**ilinear په نوم یادیږي

$v,v',w,w' \in V$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(i)\ s(v+v',w) = s(v,w) + s(v',w) \quad \wedge \quad s(\lambda.v,w) = \bar{\lambda}.s(v,w)$$

(ii) s(v,w+w´) = s(v,w) + s(v,w´) $\wedge$ s(v, λ.w) = $\bar{\lambda}$.s(v,w)

البته $\bar{\lambda}$ دلته complex conjugate (مزدوج) د λ دی

s ته positive definite ویل کیږي ، که چیرې s(v,v) > 0 دهر

v$\neq$ 0 لپاره صدق وکړي او s د hermitian په نوم یادیږي ، که

s(v,w) = $\overline{s(w,v)}$ وي.

تعریف 10.10: ($\mathbb{C} -$ scalar product)

$(V, \mathbb{C})$ یوه وکتوری فضا ده. اوکه < , > چې لاندي تعریف شوې دی ، یو semi-**bilinear** وې :

$$
\begin{aligned}
< , > &: V \times V \to \mathbb{C} \\
(v,w) &\longmapsto <v,w>
\end{aligned}
$$

< , > ته $\mathbb{C} -$ scalar product ویل کیږي ، که < , > hermitian او positive definite هم وي . بیا $(V, \mathbb{C})$ وکتوری فضا د $\mathbb{C} -$ scalar product سره د unitary vector space په نوم یادیږي .

تعریف 10.11: (standard scalar product in $\mathbb{C}^n$)

د مختلط (complex number) اعدادو په سیت کې هر z$\in \mathbb{C}$ د z=a+ib شکل لري، چې a,b $\in \mathbb{R}$ دي. $\bar{z}$ = a-ib . له بلي خوا پوهیږو چې $\mathbb{C}$ یوه وکتوری فضا ده او (a,b) یو وکتور په $\mathbb{R}^2$ وکتوري فضا کې دهر z=a+ib $\in \mathbb{C}$ ښخه دی . پر $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ وکتوری فضا باندي لاندي میپنګ تعریف شوي دی:

$$
\begin{aligned}
< , > &: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\
(x, y) &\longmapsto <x,y> := x_1 . \overline{y_1} + x_2 . \overline{y_2} + \ldots + x_n . \overline{y_n}
\end{aligned}
$$

دلته $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دی

x,x´,y,y´$\in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

په اسانی کیداي ثبوت شي چې:

(i) <x+x´,y> = <x,y> + <x´,y> $\wedge$ < λ.x,y> = $\bar{\lambda}$.<x,y>

(ii) $<x,y+y'> = <x,y> + <x,y'> \quad \wedge \quad <x, \lambda.y> = \bar{\lambda} .<x,y>$

پس $<\,,\,>$ یو semi-bilinear دی .

$<x,y> = x_1 . \overline{y_1} + x_2 . \overline{y_2} + \ldots + x_n . \overline{y_n}$

$= \overline{y_1} . x_1 + \overline{y_2} . x_2 + \ldots + \overline{y_n} . x_n$

$= \overline{y_1 . \overline{x_1}} + \overline{y_2 . \overline{x_2}} + \ldots + \overline{y_n . \overline{x_n}}$

$= \overline{y_1 . \overline{x_1} + y_2 . \overline{x_2} + \ldots + y_n . \overline{x_n}}$

$= \overline{< y, x >}$

$\Rightarrow <\,,\,>$ hermitian

$<x,x> = x_1 . \overline{x_1} + x_2 . \overline{x_2} + \ldots + x_n \overline{x_n} \geq 0$

$\Rightarrow <\,,\,>$ positive definite

پس $<\,,\,>$ یو scalar product او $(\mathbb{C}^n \,, \mathbb{C})$ نظر $<\,,\,>$ ته یو unitary space دی **.**

$<\,,\,>$ د standard scalar product په $\mathbb{C}^n$ کې دی. ځنې ورته Canonical scalar product هم وای .

مثال: غواړو په دی مثال کې standard scalar product په $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ کې واضح کړو

$x, y, w \in \mathbb{C}^2 \,, \lambda \in \mathbb{C}$

$x = (x_1,x_2) = (a_1+ib_1, a_2+ib_2) \,, y = (y_1,y_2) = (c_1+id_1, c_2+id_2)$

$w = (w_1,w_2) = (h_1+iq_1, h_2+iq_2)$

$<x+y,w> = < (x_1+ y_1 \,, x_2+ y_2), (w_1,w_2)>$

$= (x_1+ y_1). \overline{w_1} + (x_2+ y_2). \overline{w_2}$

$= <(a_1+ib_1+ c_1+id_1, a_2+ib_2+ c_2+id_2),(h_1+iq_1,h_2+iq_2)>$

$= (a_1+ib_1+c_1+id_1).(h_1-iq_1) + (a_2+ib_2+ c_2+id_2).(h_2-iq_2)$

$$= x_1.\overline{w_1} + y_1.\overline{w_1} + x_2.\overline{w_2} + y_2.\overline{w_2}$$

$$= <x,w> + <y,w>$$

$x, y, w \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$x = (x_1,x_2) = (a_1+ib_1, a_2+ib_2)$, $y = (y_1,y_2) = (c_1+id_1, c_2+id_2)$

$w = (w_1,w_2) = (h_1+iq_1, h_2+iq_2)$

$$<x+y,w> = < (x_1+ y_1 , x_2+ y_2), (w_1,w_2)>$$

$$= (x_1+ y_1).\overline{w_1} + (x_2+ y_2).\overline{w_2}$$

$$= x_1.\overline{w_1} + y_1.\overline{w_1} + x_2.\overline{w_2} + y_2.\overline{w_2}$$

$$= <x,w> + <y,w>$$

همدارنګه کولای شو ثبوت کړو چې $<x ,y+w> = <x,y> +<x,w>$ کیږي.

$$< \lambda x,w> = < (\lambda x_1, \lambda x_2), (w_1,w_2) > = \lambda x_1.\overline{w_1} + \lambda x_2.\overline{w_2}$$

$$= \lambda(x_1.\overline{w_1} + x_2.\overline{w_2}) = \lambda .<x,w>$$

$$<x, \lambda w> = <(x_1,x_2), (\lambda w_1, \lambda w_2) > = x_1.\overline{\lambda w_1} + x_2.\overline{\lambda w_2}$$

$$= x_1.\bar{\lambda}.\overline{w_1} + x_2.\bar{\lambda}.\overline{w_2} = \bar{\lambda}.(x_1.\overline{w_1} + x_2 .\overline{w_2})$$

$$= \bar{\lambda}.<x,w>$$

ثبوت شوچې $< , >$ یو semi-bilinear دی.

د positive definite او hermitian خواص مو په عمومي حالت کې ثبوت کړل. په نتیجه کې $< , >$ یو standard scalar product او $(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ یو unitary space دی .

نوټ: څرنګه چې $<z,z> \geq 0$ د $(\mathbb{C},\mathbb{C})$ په وکتوری فضا کې صدق کوي.
پس کولای شولاندي نورم پر هغه تعریف کړو:

$$\| \ \| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+^0$$
$$z \longmapsto \|z\| := \sqrt{<z,z>}$$

دمثال په ډول: $z = 3+i4$

$$\|z\| := \sqrt{<z,z>} = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{(3+i4).(3-i4)}$$
$$= \sqrt{3.3 + i4.3 - 3.i4 - (i.i).4.4} = \sqrt{3.3+4.4}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

تعریف 10.10: $(V,\mathbb{R})$ یوه euclidian وکتوری فضا ده چې معین بعد (dimension) لري . که s یو bilinearform او $\mathcal{B} = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$ دهغه قاعده (Basis) وي. بیا د s مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ ته لاندي شکل لري:

$$A_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} s(v_1,v_1) & s(v_1,v_2) & \ldots.. & s(v_1,v_n) \\ s(v_2,v_1) & s(v_2,v_2) & \ldots.. & s(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s(v_n,v_1) & s(v_n,v_2) & \ldots\ldots & s(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

که چیري $(V,\mathbb{C})$ یوه یونیتری (unitary) وکتوری فضا د معین بعد سره وي , s یو semi-bilinear او $\mathcal{B} = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$ د هغه قاعده (Basis) وي. د s مربوطه متریکس $\mathcal{B}$ کولای شو په عین ترتیب پیدا کړو.

مثال: په دی مثال غواړو په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضا کې د scaler product مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ قاعدي ته پیدا کړو

$v_1= (1,0,0)$, $v_2= (1,1,0)$, $v_3= (1,1,1)$

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} <v_1,v_1> & <v_1,v_2> & <v_1,v_3> \\ <v_2,v_1> & <v_2,v_2> & <v_2,v_3> \\ <v_3,v_1> & <v_3,v_2> & <v_3,v_3> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

یولسم فصل

متریکسوډولونه اودهغوي استعمال

تعریف 11.1:

A $\in M(n \times n, \mathbb{K})$, A sysmmetric ,

x $\in \mathbb{R}^n$, [x وکتورستونی است]

دالاندي تابع د quadratic Form (دویمه درجه فورم اویا مربعی فورم) په نوم نظر A متریکس یادیږي

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x^t . A . x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) . A . \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$q_A(x) = x^t . A . x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \right)$$

(a) $q_A(x)$ ته positive semidefinite ویل کیږي، پدي شرط چې دهر $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره $q_A(x) \geq 0$ صدق وکړی

(b) $q_A(x)$ ته positive definite ویل کیږي، پدي شرط چې دهر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ لپاره $q_A(x) > 0$ صدق وکړی

(c) $q_A(x)$ ته negative semidefinite ویل کیږي، پدي شرط چې دهر $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره $q_A(x) \leq 0$ صدق وکړی

(d) $q_A(x)$ ته negative definite ویل کیږي، پدي شرط چې د هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ لپاره $q_A(x) < 0$ صدق وکړی

(e) $q_A(x)$ ته indefinite ویل کیږي، پدي شرط که یوشمیر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود وي چې $q_A(x) \leq 0$ او یوشمیر $x \in \mathbb{R}^n$ موجود وي چې $q_A(x) \geq 0$ شي

مثال 11.1: غواړو quadratic Form دلاندی متریکس ذیل پیداکړو

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

A مربعی متریکس او sysmmetric (متناظر) دی.

$q_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x^t . A . x = (x_1,x_2) . A . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$q_A(x) = x^t. A. x = (x_1,x_2) . A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1,x_2) . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + x_2) . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1)^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + (x_2)^2 = (x_1)^2 + 4x_1x_2 + (x_2)^2$

$q_A(x)$ یو indefinite مربعی فورم دی . ځکه:

$x: = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y: = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$q_A(x) = \frac{1}{4} + 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} > 0$

$q_A(y) = \frac{1}{4} - 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0$

پس $q_A(x)$ یو indefinite دویمه درجه فورم (quadratic Form) دی

مثال 11.2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

$q_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x^t . A . x$

$q_A(x) = x^t.A.x = (x_1,x_2,x_3). \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= (x_1,x_2,x_3).\begin{pmatrix} 2x_1 & - & x_2 \\ -x_1 + & 2x_2 & -x_3 \\ -x_2 & + & 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 2x_3)$$

$$= 2 x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= 2 x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$$ [که $x \neq 0$ وي]

$\Longrightarrow$ $q_A(x)$ positive definite $\Longrightarrow$ A positive definite

تعریف 11.2: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ، A sysmmetric (متناظر) .
A_k (k=1,2,...,n) مربعي submatrix د A دی ، چې په کې د A n-k ستنو(colmns) اوکربنو(rows) څخه صرف نظروشی. د A_k Principal submatrix په نوم یادیږي، که چیري k له یوه څخه شروع اوپه n ختم شی. ($\det(A_k)$ د داډول A_k د principal minor په نوم یادیږي.
یو Principal submatrix د leading principal submatrix په نومیادیږي ، په دې شرط چې په ټولو A_k کي د A لمړی عنصر (یعنی a_{11}) شامل وي . ($\det(A_k)$ د داډول A_k د leading principal minor په نوم یادیږي.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_n = A$

مثال

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ و , $A_{1} = 1$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

leading principal submatrix دلته A_1، A_2 ، A_3 او $A_4 = A$ دي

نوټ: مونږ. پس لدي هغه A_k چي leading principal submatrix وي ، کار اخلو.

قضیه 11.1: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ، A sysmmetric (متناظر) ، $q_A(x)$ يو quadratic Form (دويمه درجه يا مربعي فورم)، A_k په 11.3 کی تعریف شوي متريکسونه او $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ د A مشخصه قیمتونه دي. بیا:

(1)

(a) $q_A(x)$ positive definite $\Leftrightarrow$ A positive definite

(b) $\det(A_k) > 0$ $(1 \leq k \leq n)$

(يعنی ټول leading principal minor مثبت وي)

$\Leftrightarrow$ A positive definite

(c) $\lambda_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ (يعنی ټول مشخصه قیمتونه مثبت وي)

$\Leftrightarrow$ A positive definite

(2)

(a) $q_A(x)$ nigative definite $\Leftrightarrow$ A nigative definite

(b) $(-1)^k . \det(A_k) > 0$ $(1 \leq k \leq n)$ $\Leftrightarrow$ A nigative definite

(c) $\lambda_i < 0$ $(1 \leq i \leq n)$ (يعنی ټول مشخصه قیمتونه منفي وي)

$\Leftrightarrow$ A nigative definite

(3)

(a) $q_A(x)$ positive semidefinite $\Leftrightarrow$ A positive semidefinite

(b) $\det(A_k) > 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$ $\wedge$ $\det(A_n) = 0$

$\Rightarrow$ A positive semidefinite

(c) $\lambda_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ $\Leftrightarrow$ A positive semidefinite

(4)

(a) $q_A(x)$ nigative semidefinite $\Leftrightarrow$ A negative semidefinite

(b) $(-1)^k \det(A_k) \geq 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$ $\wedge$ $\det(A_n) = 0$

$\Rightarrow$ A negative semidefinite

(c) $\lambda_i \leq 0$ ($1 \leq i \leq n$ $\Leftrightarrow$ A negative semidefinite

(5)
(a) A not positive definite
$\wedge$ A not nigative idefinite $\wedge$ $\det(A_n) \neq 0$
$\Longrightarrow$ A indefinite
(b) $\det(A_k) < 0$ (k even (جفت)) $\Longrightarrow$ A indefinite
(c) $\exists\ i, j \in \{1,2,\dots,n\}$ (i,j noneven (طاق) ;
($\det(A_i) < 0$ $\wedge$ $\det(A_j) > 0$)
$\Longrightarrow$ A indefinite
(d) $\exists\ a_{ii}, a_{jj} \in A$; $a_{ii} < 0$ $\wedge$ $a_{jj} > 0$ $\Longrightarrow$ A indefinite

د ثبوت څخه اوس صرف نظرکوم.

مثال 11.3:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 2$, $\det(A_1) = 2 > 0$

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = 4 - 1 = 3 > 0$

$A_3 = A$, $\det(A_3) = 2.(2.2 - 1) - (-1)(-2 - 0) = 6 - 2 = 4 > 0$

پس د پورتني قضي د (b) .1 په اساس:

$\Longrightarrow \det(A_k) > 0$ (k=1,2,3) $\Longrightarrow$ A positive definite

(b) واحد متریکسونه positive definite دي. دمثال په ډول:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 1$, $\det(A_1) = 1 > 0$,$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = 1 > 0$

$A_3 = A$, $\det(A_3) = 1.(1.1 - 0) = 1 > 0$

$\Longrightarrow$ E_3 positive definite

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} 4-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$p(t) = \det(A - t.E_2) = \begin{vmatrix} 4-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (4 - t) . (1 - t)$$

$p(t) = (4 - t) . (1 - t) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 4 \ , t_2 = 1$

ځرنګه چې اختصاصي قیمتونه ټول مثبت دي. پس باید A پورتنی قضي د c) (1)
)
په اساس یو positive definite متریکس وي. اوياکولاى په لاندي ډول یی
ثبوت کړو:

$A_1 = 4 \ , \det(A_1) = 4$

$A_2 = A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \det(A_2) = 4.1 - 0 = 4$

$\Longrightarrow$ A positive definite [له مخې (1) (b) پورتنی قضي د]

اویا دمربعي فورم له بیاري:

$$q_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x^t . A . x = (x_1, x_2) . A . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$q_A(x) = x^t. A. x = (x_1, x_2) . A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (4x_1 \quad x_2) . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4(x_1)^2 + (x_2)^2 > 0$$ [که $x \neq 0$ وي]

$\Longrightarrow$ $q_A(x)$ positive definite

$\Longrightarrow$ A positive definite [پورتنی قضي د (a) (1) له مخې]

مثال 11.4:
(a)

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A_2 = A$, $\det(A_2) = -9 - 0 = -9 < 0$

A indefinite : ځکه د پورتنی قضي (b).5 صدق کوي

یا

$a_{11} = -3 < 0 \;\wedge\; a_{22} = 3 > 0$

$\Longrightarrow$ A indefinite [پورتنی قضي د (d) (5) له مخې]

(b)

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A_1 = -2$, $(-1)^1 \det(A_1) = (-1).(-2) = 2 > 0$

$A_2 = A$, $(-1)^2 \det(A_2) = 1.(4 - 1) = 3 > 0$

$\Longrightarrow$ A negative definite [پورتنی قضي د (b) (2) له مخې]

مثال 11.5:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

: A indefinite

$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = -6 - 9 = -15 < 0$

$\Longrightarrow$ A indefinite [له مخې (5) (b) د قضی پورتنی]

یا:

$a_{11} = -2 < 0 \quad \wedge \quad a_{22} = 3 > 0$

$\Longrightarrow$ A indefinite [له مخې (5) (d) د قضي پورتنی]

مثال 11.6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = 2 - 16 = -14 < 0$

$\Longrightarrow$ A indefinite [له مخې (5) (b) د قضي پورتنی]

لیما 11.1: ($A=(a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ او positive definite . بیا:

(i) A معکوس متریکس لري. یعنی $A \in G,L(n, \mathbb{R})$

(ii) $a_{ii} > 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$

(i) ثبوت:

A positive definite

$\Longrightarrow \det(A_n) > 0$ [له مخې (1) (b) د قضي پورتنی]

$\Longrightarrow \det(A_n) = \det(A) > 0$

$\Longrightarrow A \in G,L(n, \mathbb{R})$

(ii) ثبوت: ثبوت لپاره د اساسی قاعده کتورونه په نظرنیسو.

A positive definite

$\Longrightarrow$

$e_1^t \,.\, A.e_1 = (1,0,0,\ldots,0).A.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} > 0$ [$e_1 \neq 0$ ځکه]

$\vdots$

$e_n^t \,.\, A.e_n = (0,0,0,\ldots,1).A.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_{nn} > 0$ [$e_n \neq 0$ ځکه]

قضیه 11.2: ($A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ، A sysmmetric (متناظر) ،

$0 \neq w=(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$Q_A(w) = w^t.A.w$ او λ, μ د A مشخصه قیمتونه دي. بیادالاني افادي دیوبل سره معادلي دي:

(a) $\det(A) > 0 \ \wedge \ a > 0$
(b) $Q_A(w)$ positive definite
(c) $\lambda, \mu > 0$

ثبوت:

(b) $\Leftarrow$ (a)

$$Q_A(w) = w^t.A.w = (x,y) . \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= (ax + by \quad bx + cy) . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2$$
$$= ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$= a\left(x + \frac{b}{a} y\right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)y^2$$

$$\det(A) > 0 \wedge a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{a} y\right)^2 + \left(\frac{ac-b^2}{a}\right)y^2 > 0$$
$$\Rightarrow Q_A(w) > 0 \Rightarrow Q_A(w) \text{ positive definite}$$

(c) $\Leftarrow$ (a)

د A مشخصه قیمتونه :

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} t - a & b \\ b & t - c \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2) = \begin{vmatrix} t - a & b \\ b & t - c \end{vmatrix}$$

$$= (t - a) . (t - c) - b^2 = t^2 - t.(a+c) - b^2$$

$$t = \frac{a+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}$$

$$\det(A) > 0 \ \wedge \ a > 0 \Rightarrow ac - b^2 > 0 \ \wedge \ a > 0$$
$$\Rightarrow ac > b^2 \geq 0 \ \Rightarrow c \geq 0 \qquad [\ a>0 \ \text{ځکه}\ ]$$

$(a + c)^2 > (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$ $[-4(ac - b^2) < 0$ ځکه $]$

$$\Longrightarrow \quad a + c > \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}$$
$$\Longrightarrow (a + c) - \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)} > 0$$

$$\lambda := \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} > 0$$

$$\mu := \frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} > 0$$

ثبوت شو چې مشخصه قیمتونه $\lambda > 0$ او $\mu > 0$ دي

تعریف 11.3 : (jacobian matrix)

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

که f ټول قسمی مشتقات ولري. بیا دالاندي متریکس jacobian matrix (میتریکس یاقوبی) په نوم یادیږي. $a \in \mathbb{R}^n$

$$J_f(a) := \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

مثال 11.7: لاندي تابع چې ټول قسمی مشتقات لري ، راکړل شویده

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z.\sin x , z^2 + z.\sin y)$$

دلته f_1 او f_2 :

$f_1 := x^2 + y^2 + z.\sin x$, $f_2 := z^2 + z.\sin y$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}$(x,y,z) = 2x + z.cosx , $\frac{\partial f_2}{\partial x}$(x,y,z) = 0

$\frac{\partial f_1}{\partial y}$(x,y,z) = 2y , $\frac{\partial f_2}{\partial y}$(x,y,z) = z.cosy

$\frac{\partial f_1}{\partial z}$(x,y,z) = sinx , $\frac{\partial f_2}{\partial z}$(x,y,z) = 2z + siny

jacobian matrix (میتریکس یاقوبی) یی لاندي شکل لري

$$J_f\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x + z.\cos x & 2y & \sin x \\ 0 & z.\cos y & 2z + \sin y \end{pmatrix}$$

مثال 11.8: لاندي تابع چې تول قسمی مشتقات لري ، راکړل شویده

$f : \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \alpha) \longmapsto (r.\cos\alpha\ ,\ r.\sin\alpha\ )$

$f_1 := r.\cos\alpha$, $f_2 := r.\sin\alpha$

$\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\alpha) = \cos\alpha$, $\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\alpha) = \sin\alpha$

$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(r,\alpha) = -r.\sin\alpha$, $\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(r,\alpha) = r.\cos\alpha$

jacobian matrix (میتریکس یاقوبی) یی دالاندي شکل لري

$$J_f(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\alpha) & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(r,\alpha) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\alpha) & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(r,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r.\sin\alpha \\ \sin\alpha & r.\cos\alpha \end{pmatrix}$$

اوس غواړو د $J_f(r,\alpha)$ دیترمینات پیدا کړو

$$\det(J_f(r,\alpha) = r.(\cos\alpha)^2 + r.(\sin\alpha)^2$$

$$= r.((\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2) = r.1 = r$$

تعريف 11.4: Hessian Matrix (هیس میتریکس) دیوه الماني رياضي دان Hesse (1811 – 1874) په نوم یاد شوی دی

$D \subset \mathbb{R}^n \quad , a \in D$

$C^2(D, \mathbb{R}^n) :=$

$\{f : D \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ 2 times differentiable and continue } \}$

$f(x_1,\dots,x_n) \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$

هیس متریکس (Hessian Matrix) چې مونږ هغه په $H_f(a)$ ښیواوپه لاندي شکل تعریف شویدي:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$H_f(a)$ هیس متریکس نظر f ته د a په نقطه کی دی

ځرنګه چې $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$ دي. پس هیس متریکس symmetric (متناظر) دی

مثال 11.9:

$f(x,y,z) \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z)=x^2+ y \cdot z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial x} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial y} = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial z} = 0$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 11.10:

$f(x,y) \in C^2(D, \mathbb{R}^2)$, $f(x,y)=2e^x \cdot y - y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^x.y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x - 3y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial x} = 2e^x.y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = 2e^x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 2e^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial y} = -6y$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^x.y & 2e^x \\ 2e^x & -6y \end{pmatrix}$$

نوټ: د هیس متریکس (Hessian Matrix)پواسطه کولای شو local maximum(موضعی اعظمی یا نسبی اعظمی) او local minimum (موضعی اصغری یا نسبی اصغری) نقطي پیدا کړو . یعنی:

- که دهیس متریکس ټول مشخصه قیمتونه (eigenvalues) په یوي انعطاف نقطه کي مثبت (یعنی positive definite) وي. پیصورت کی دانقطه نسبی

اصغری ده

- که دهیس متریکس ټول مشخصه قیمتونه (eigenvalues) په یوي انعطاف نقطه کي منفي (یعنی negative definite) وي. په دې صورت دانقطه نسبی اصغری ده
- که دهیس متریکس ځني مشخصه قیمتونه په یوي انعطاف نقطه کي منفي او ځني مشخصه قیمتونه مثبت (یعنی indefinite) وي. په دې صورت هغه نقطه نه نسبی اعظمی اونه نسبی اصغری ده. بلکه Saddle point (زینی نقطه) ده

مثال 11.11:

$f(x,y)\epsilon\, C^2(D, \mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = -x^4 + 2x^2 - y^2$

د local maximum (نسبی اعظمی) او local minimum (نسبی اصغری)
نقطودپیداکولولپاره باید دالاندي مراحل طی شي:

critical points (انعطاف نقطي) :

$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + 4x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$-4x^3 + 4x = 4x(-x^2 + 1) = 0 \implies x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

$-2y = 0 \implies y = 0$

پس د انعطاف نقطي:

critical points: (0,0) , (1,0) , (-1,0)

هیس متریکس (Hessian Matrix):

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} = -12x^2 + 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y} = -2$

د f هیس متریکس (Hessian Matrix) په لاندي ډول دی:

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

هیس متریکس د انعطاف په نقطوکی:

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H_f(1,0)$

اوس غواړو دپورتنیوهیس متریکسو leading principal minor پیداکړو

$A := H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H_f(1,0)$

$A_1 = -8 \Rightarrow (-1)^1.\det(A_1) = (-1).(-8) = 8 > 0$

$A_2 = A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^2.\det(A_2) = 1.\ 16 = 16 > 0$

$\Rightarrow H_f(-1,0)$, $H_f(1,0)$ negative definite [د 11.1قضي له مخې]

پس (1,0) او (-1,0) د f نسبی اعظمي (local maximum) نقطي دي

$A := H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$A_1 = 4 \Rightarrow \det(A_1) = 4 > 0$

$A_2 = A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -16 > 0$

$A := H_f(0,0)$ indefinite [د 11.1قضي له مخې]

پس (0,0) په f کي یوه ذینی نقطه (Saddle point) ده

مثال 11.12:

$f(x,y) \in C^2(D, \mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = 4y^3 - 6xy^2 + 3x^2y^2 - 6xy$

د local maximum (نسبی اعظمی) او local minimum (نسبی اصغری)
نقطودپیداکولولپاره باید دالاندي مراحل طی شي:

critical points (انعطاف نقطي) :

$\frac{\partial f}{\partial x} = -6y^2 + 6xy^2 - 6y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 - 12xy + 6x^2y - 6x$

$0 = -6y^2 + 6yx - 6y = -6y(y - x + 1)$ $(*)$

$0 = 12y^2 - 12xy + 6x^2y - 6x \Longrightarrow 2y^2 - 2xy + x^2y - x = 0$ $(**)$

د $(*)$ معادله هغه وخت صفرکيږي که چيري:

$y = 0 \lor y - x + 1 = 0 \Longrightarrow y = 0 \lor y = \frac{1}{x-1}$

اوس دا قيمتونه د $(**)$ په معادله کي وضع کوو اوغواړو x پيدا کړو

$Y = 0 \Longrightarrow 2.0 - 2x.0 + x^2.0 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$

$y = \frac{1}{x-1} \Longrightarrow 2(\frac{1}{x-1})^2 - 2x(\frac{1}{x-1}) + x^2(\frac{1}{x-1}) - x = 0$

پورتنی معادله په $(x+1)^2$ کی ضربوو

$2 - 2x(x-1) + x^2(x-1) - x(x-1)^2 = 0$

$\Longrightarrow 2 - 2x^2 + 2x + x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 + x = 0$

$\Longrightarrow 2 - x^2 + x = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = (x-2).(x+1) = 0$

$\Longrightarrow x = 2 \lor x = -1$

د انعطاف نقطي :

critical points: $(0,0)$, $(2, \frac{1}{x-1}) = (2,1)$, $(-1, \frac{1}{x-1}) = (-1,-\frac{1}{2})$

هيس متريکس د انعطاف په نقطوکی:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x} = 6y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -12y + 12xy - 6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -12y + 12xy - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y} = 24y - 12x + 6x^2$

د f هيس متريکس لاندي شکل لري:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y^2 & -12y+12xy-6 \\ -12y+12xy-6 & 24y-12x+6x^2 \end{pmatrix}$$

اوس د انعطاف نقاطي د هيس په متريکس کي وضع کوو

(0,0)

$$H := H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_f(t) = \det(H - t.E_2) = \det \begin{pmatrix} 0-t & -6 \\ -6 & 0-t \end{pmatrix}$$

$$= t^2 - 36 = (t+6).(t-6)$$

$(t+6).(t-6) = 0 \implies t = 6 \ , \ t = -6$

$\implies H_f(0,0)$ indefinite

څرنګه چي د (0,0) په نقطه کي مشخصه قيمتونه 6 او 6- دي، پس (0,0) نه نسبی اعظمی اونه نسبياصغري نقطه ده . بلکه يو Saddle point (زینی نقطه) ده

(2,1)

$$H := H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$$P_f(t) = \det(H - t.E_2) = \det \begin{pmatrix} 6-t & 6 \\ 6 & 24-t \end{pmatrix} = t^2 - 30t + 144 - 36$$

$$= t^2 - 30t + 108$$

هغه دوه مشخصه قيمتونه چي دپورتنی معادلي د حل څخه لاسته راځي، مثبت دي.

پس (2,1) يوه local minimum (موضعی اصغری یا نسبی اصغری) نقطه ده
که مونږ د 11.1 قضي څخه استفاده وکړو عين نتيجه لاسته راوړ

$$A := H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 6 \quad , \det(A_1) = 6 > 0$

$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$, $\det(A_2) = 144 - 36 = 108 > 0$

$\Longrightarrow H_f(2,1)$ positive definite

پس د 11.1 قضي په اساس ټول مشخصه قيمتونه يي مثبت دي

$(-1,-\frac{1}{2})$

$H = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$P_f(t) = \det(H - t.E_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - t & -6 \\ -6 & 6 - t \end{pmatrix}$

$= (\frac{3}{2} - t) . (6 - t) - 36 = t^2 - 7{,}5t - 27$

$t^2 - 7{,}5t - 27 = 0 \Longrightarrow t_{1,2} = 3{,}75 \pm \sqrt{(3{,}75)^2 + 27}$

ليدل کيږي چي يومشخصه قيمت مثبت اوبل يي منفی دی ، پس د $(-1,-\frac{1}{2})$ نقطه Saddle point (ذينی نقطه) ده.

تعريف 11.5: Wronskian Matrix : wronski (1776 –1853) يو پولنډی درياضی عالم وه او دا لاندي متريکس دهغه په نوم ياديږي:

$V := \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$S := \{f_i(x) \in V$ $(i=1,2,...,n)$ | واردمشتق وړ n-1 تابع $f_i(x)$ }

د S Wronskian Matrix چې مونږ هغه په $W(f_1,f_2,\dots,f_n)(x)$ سره ښيو، لاندي شکل لري:

$$W(f_1,f_2,\dots,f_n)(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & . & . & . & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & . & . & . & f_n'(x) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & . & . & . & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

د wronski متريكس پواسطه كولاى شو دپولينومو فضاى وكتورونو قاعده (basis) پيداكړو. ددي هدف لپاره دلاندي قضيي څخه استفاده كوو:
قصيه 11.3 : كه چيري د wronski متريكس ديترمينانت په يوه نقطه كي خلاف د صفروي، بيا دهغه مربوطه توابع خطی مستقلي (lin-indep) دي. يعنې:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}\ ;\ \det(W(x_0)) \neq 0 \implies f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \ \text{lin-indep}$$

همدارنګه دتفاضلي معادلاتو د حل لپاره د wronski متريكس څخه استفاده كيږی.
مثال 11.13:

$$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R}) \}$$

د فضاي وكتور$(V, \mathbb{R})$ يوه قاعده لاندي شكل لري:

$$V = \langle\langle 1,x,x^2,x^3 \rangle\rangle$$

ځكه:

$$f_1(x) := 1\ ,\ f_2(x) := x\ ,\ f_3(x) := x^2\ ,\ f_4(x) := x^3$$

د ورونسكي (wronski) متريكس لاندي شكل لري:

$$W(f_1,f_2,f_3,f_4)(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & f_4'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & f_4''(x) \\ f_1'''(x) & f_2'''(x) & f_3'''(x) & f_4'''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(W(f1,f2,f3,f4)(x)) = 1.1.2.6 = 12 \neq 0 \ \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\implies 1, x, x^2, x^3$ lin-indep (خطي مستقل) [دپورتنی قضيی له مخي]
د V له تعريف څخه معلوميږي چې توابع $1,x,x^2,x^3$ يي span جوړوي. يعنې:

$$V = \langle 1,x,x^2,x^3 \rangle$$

په نتيجه كې:

$$V = \langle\langle 1,x,x^2,x^3 \rangle\rangle \ \wedge \ \dim V = 4$$

قضیه 11.4: (Cayley-Hamilton theorem): $A \in M(n,\mathbb{K})$ ، $p_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$، $\lambda \in \mathbb{K}$. بیا $p_A(A) = E_n^0$. البته دلته E_n واحد متریکس او E_n^0 صفري متریکس دی.

ثبوت: ځرنګه چه ثبوت يي یوڅه پیچلی دی ، له ثبوت څخه يي صرف نظرکوم. مګردقضيي تطبيق په لاندي مثال کې واضح کيږي

مثال 11.14: $A \in M(2,\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a).(\lambda - d) - cb = \lambda^2 - (a + d)t + ad - bc$$

$$p_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 - da & -ab - bd \\ -ca - cd & -ad - d^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - da + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ca + cd - ca - cd & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_0$$

په نتيجه کې د Cayley-Hamilton قضیه صدق کوي.

مثال 11.15:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

د A مشخصه پولینوم دالاندي شکل لرې:

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$p_A(A) = A^3 - 2A^2 - 5A + 6E_3$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^3 - 2\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$- 5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -14 & 0 & -22 \\ -6 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -5 & 5 & -20 \\ -15 & -10 & 5 \\ -10 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نوټ: د $A \in M(n, \mathbb{K})$ مشخصه پولینوم (characteristic polynomial) په عمومي ډول لاندي شکل لري:

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

د $a_0 = (-1)^n \det(A)$ رابطې له مخې کولای شو معلوم کړوچه ایا د A متریکس معکوس لري. یعني:

$$a_0 \neq 0 \Longrightarrow (-1)^n \det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det A \neq 0 \Longrightarrow A \text{ invertible}$$

د Cayley-Hamilton قضیه په ریاضي اوفزیک کې د ځینومسایلو دحل لپاره استعمالیږي.

د مثال په ډول د کیلی هیملتون قضیي په واسطه د معکوس متریکس پیدا کول:

مونږ فرض کوو چه a_0 خلاف دصفردی. پس A^{-1} موجود دی. د Cayley-Hamilton دقضیی له مخې لیکلای شو:

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0E_n = E_n^0$$

$$a_0E_n = -(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A)$$

$$= (-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a1).A$$

$$a_0E_n.A^{-1} = (-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a_1).A.A-1$$

$$= (-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a_1)En$$

$$\Longrightarrow$$

$$a_0.A^{-1} = -A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a_1E_n$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_0}(-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \dots - a_1E_n)$$

مثال 11.16:

د A مشخصه پولینوم دالاندي شکل لري:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

په پورتني معادله کې:

$$a_2 = -6,\ a_1 = -11,\ a_0 = 6$$

د کیلي هیمیلتون قضیي له مخې:

$$p_A(A) = -A^3 - 6A^2 - 11A + 6E_3 = E_3^0$$

خرنګه چه $a_0 = 6 \neq 0$ دی، پس د A معکوس متریکس موجود دی. یعني:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}(-(-A^{3-1}) - a_{3-1}A^{3-2}) - a_1E_3)$$

$$= \frac{1}{6}(-(-A^2) - a_2A - a_1E_3)$$

$$=\frac{1}{6}(\,A^2+6A\ \ +11E_3)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}^2+6\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}15 & 23 & -17\\ -2 & 8 & -1\\ 4 & 22 & -9\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}5 & 7 & -5\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 8 & -3\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4 & -19 & 13\\ -2 & -5 & 5\\ -8 & -26 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{19}{6} & \frac{13}{6}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{6}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

دولسم فصل
مثالونه اوتمرينونه
[Examples and Exercises]

پدي فصل کې ددي کتاب دځينو موضوعاتولپاره مثالونه اوتمرينونه يوځل بيا راوړل شويدي

مثال 12.1 :

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (-2x_1+2x_2,-x_1+x_2)$$

ثبوت کړې ،چې L يوخطی ميپينګ دی. بيا (dem(Ker(L) او dim(Im(L)) پيداکړې .

: Lin-Map

$x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(x+y) &= L((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) \\ &= L(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (-2(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), -(x_1 + y_1)+x_2 + y_2) \\ &= (-2x_1 -2 y_1 + 2x_2 + 2y_2, -x_1 - y_1 +)+x_2 + y_2) \\ &= (-2x_1 + 2x_2 -2 y_1 + 2y_2, -x_1 +x_2 - y_1 + y_1) \\ &= (-2x_1 + 2x_2 , -x_1 +x_2) + (-2 y_1 + 2y_2, - y_1 + y_1) \\ &= L(x_1,x_2) + L(y_1,y_2) = L(x) + L(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\lambda x) &= L(\lambda (x_1,x_2)) = L(\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= (-2 \lambda x_1+ 2\lambda x_2, -\lambda x_1 + \lambda x_2) \\ &= \lambda ((-2x_1+ 2x_2, -x_1 +x_2) = \lambda L(x) \end{aligned}$$

: Ker(L)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(L) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid L(x) = 0\} \\ &= \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid L((x_1,x_2)) = (0,0) \} \\ &= \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (-2x_1+2x_2,-x_1+x_2) = (0,0) \} \\ &= \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \} = \mathbb{R}.(1,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

د Ker(L) يوه قاعده $u:=(1,1)$ ده. ځکه هروکتور د Ker(L) يوخطي ترکيب د u دی. څرنګه چې د u وکتورخلاف د صفردی، پس خطي مستقل هم دی. په نتيجه کې:

$$Ker(L) = <<u>> \Longrightarrow \dim(Ker(L)) = 1$$

: Im(L)

$$
\begin{aligned}
Im(L) := L(\mathbb{R}^2) &= \{L(x) \mid x \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{ L((x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ (-2x_1+2x_2, -x_1+x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \} \\
&= \{ (-x_1+x_2)(2,1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}.(2,1) \subseteq \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

د Im(L) یوه قاعده $v:=(2,1)$ ده. ځکه هروکتور د Im(L) یوخطي ترکیب د v دی. څرنګه چې د v وکتورخلاف د صفردی، پس خطي مستقل هم دی. په نتیجه کې:

$$Im(L) = <<v>> \Longrightarrow \dim(Im(L)) = 1$$

مثال 12.2: په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضاکې دوه قاعدې $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ او $\acute{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, w_3)$ په لاندې ډول راکړل شویدي.د $\mathbb{R}^3$ اساسی قاعده (canonical Basis) په $C = (e_1, e_2, e_3)$ سره ښیو. یعني

$v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$

$w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,0,3)$, $w_3 = (1,0,2) \in \mathbb{R}^3$

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_3, 2x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

(1)

(a) L یو خطي میپنګ (lin-map) دی.

(b) غواړو دL خطي میپنګ مربوطه متریکس $A_B^C(\mathrm{L})$ نظر $\mathcal{B}$ او اساسی قاعدې ته پیداکړو

(c) دلته غواړو د $A_B^C(\mathrm{L})$ متریکس ، چه په (b) کې مولاس ته راوړی ، مربوطه خطي میپنګ L پیداکړو

(2)

(i) غواړو دL خطي میپنګ مربوطه متریکس $A_B^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ نظر $\mathcal{B}$ او $\mathcal{B}'$ قاعدو ته پیداکړو

(ii) دلته غواړو د $A_B^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ میتریکس ،چه په (i) کې مولاس ته راوړی ، مربوطه خطي میپنګ L پیداکړو

حل (1):

(a): داثبوت لوستونکي ته پریږدو.

(b) : څرنګه چې $L(v_1), L(v_2), L(v_3) \in \mathbb{R}^3$ او e_1, e_2, e_3 یوه قاعده (basis) ده، پس لیکلی شو:

$\exists!\ a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$;

$L(v_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$

$L(v_1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$

$L(v_1) = L((2,0,0)) = (0,4,0) \implies (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (0,4,0)$

$L(v_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$

$L(v_2) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$

$L(v_2) = L((1,2,0)) = (0,2,2) \implies (a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (0,2,2)$

$L(v_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$

$L(v_3) = a_{13}(1,0,0) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$

$L(v_3) = L((0,1,1)) = (1,0,1) \implies (a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (1,0,1)$

په نتیجه کې مربوطه متریکس:

$$A_B^C(\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) : دا لاندې متریکس لرو:

$$A_C^{\mathcal{B}}(\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow\ \exists!\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\ ;\ x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ [ځکه v_1, v_2, v_3 قاعده]

$\Rightarrow\ (x_1, x_2, x_3) = a_1(2,0,0) + a_2(1,2,0) + a_3(0,1,1)$

$= (2a_1 + a_2, 2a_2 + a_3, a_3)$

$a_3 = x_3$

$2a_2 + a_3 = x_2 \Rightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{x_2 - a_3}{2} = \frac{x_2 - x_3}{2}$

$2a_1 + a_2 = x_1 \Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \frac{x_1 - a_2}{2} = \frac{x_1 - \frac{x_2 - x_3}{2}}{2} = \frac{2x_1 - x_2 + x_3}{4}$

$L(x) = L(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = a_1L(v_1) + a_2 L(v_2) + a_3 L(v_3)$

ځرنګه چې $L(v_1), L(v_2), L(v_3) \in \mathbb{R}^3$ دي. پس لیکلی شو:

$\exists!\, a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$;

$L(v_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$

$L(v_1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$

$\quad = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (0,4,0)$

$L(v_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$

$L(v_2) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$

$\quad = (a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (0,2,2)$

$L(v_3) = a_{13}e_1 + a_{22}e_2 + a_{33}e_3$

$L(v_3) = a_{13}(1,0,0) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1)$

$\quad = (a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (1,0,1)$

$L(x) = L((x_1,x_2,x_3)) = a_1L(v_1) + a_2 L(v_2) + a_3L(v_3)$

$\quad = \frac{2x_1-x_2+x_3}{4}(0,4,0) + \frac{x_2-x_3}{2}((0,2,2)) + x_3(1,0,1)$

$\quad = (0, 2x_1 - x_2 + x_3, 0) + (0, x_2 - x_3, x_2 - x_3) + (x_3, 0, x_3)$

$\quad = (x_3, 2x_1 - x_2 + x_3 + x_2 - x_3, x_2 - x_3 + x_3)$

$\quad = (x_3, 2x_1, x_2)$

په نتیجه کې هغه خطی میپنګ لاندي شکل لري :

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_3, 2x_1, x_2)$$

حل: (2)

(i) : چون $L(v_1), L(v_2), L(v_3) \in \mathbb{R}^3$ است پس:

$\exists!\, a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$;

$L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$

$L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$

$L(v_3) = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3$

$L(v_1) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,0,3) + a_{31}(1,0,2)$

$= (a_{11}, a_{11},0) + (0, 0, 3a_{21}) + (a_{31}, 0, 2a_{31})$
$= (a_{11} + a_{31}, a_{11}, 3a_{21}+ 2a_{31})$
$L(v_1) = L((2,0,0)) = (0,4,0) = (a_{11} + a_{31}, a_{11}, 3a_{21}+ 2a_{31})$

$a_{11} = 4$
$a_{11} + a_{31} = 0 \implies a_{31} = - a_{11} = - 4$
$3a_{21}+ 2a_{31} = 0 \implies 3a_{21} = - 2a_{31} = -2 (-4) = 8 \implies a_{21} = \frac{8}{3}$
$(a_{11} , a_{21}, a_{31}) = (4, \frac{8}{3},-4)$

$L(v_2) = a_{12}w_1+ a_{22}w_2 + a_{32}w_3$
$L(v_2) = a_{12}(1,1,0) + a_{22}(0, 0,3) + a_{32}(1, 0,2)$
$= (a_{12}, a_{12},0) + (0, 0, 3a_{22}) + (a_{32}, 0, 2a_{32})$
$= (a_{12} + a_{32}, a_{12}, 3a_{22}+ 2a_{32})$
$L(v_2) = L((1,2,0)) = (0,2,2) = (a_{12} + a_{32}, a_{12}, 3a_{22}+ 2a_{32})$
$a_{12} = 2$
$a_{12} + a_{32} = 0 \implies a_{32} = 0 - a_{12} = -2$
$3a_{22}+ 2a_{32} = 2 \implies 3a_{22} = 2 - 2a_{32} = 2 -2(- 2) = 6 \implies a_{22} = 2$
$(a_{12} , a_{22}, a_{32}) = (2,2 , -2)$

$L(v_3) = a_{13}w_1+ a_{23}w_2 + a_{33}w_3$
$L(v_3) = a_{13}(1,1,0) + a_{23}(0, 0,3) + a_{33}(1, 0, 2)$
$= (a_{13}, a_{13},0) + (0, 0, 3a_{23}) + (a_{33}, 0, 2a_{33})$
$= (a_{13} + a_{33}, a_{13}, 3a_{23}+ 2a_{33})$
$L(v_3) = L((0,1,1)) = (1,0,1) = (a_{13} + a_{33}, a_{13}, 3a_{23} + 2a_{33})$
$a_{13} = 0$
$a_{13} + a_{33} = 1 \implies a_{33} = 1 - a_{13} = 1 - 0 = 1$
$3a_{23} + 2a_{33} = 1 \implies 3a_{23} = 1 - 2a_{33} = 1 - 2 = -1 \implies a_{23} = -\frac{1}{3}$
$(a_{13} , a_{23}, a_{33}) = (0, -\frac{1}{3} ,1)$

پس مربوطه متریکس:

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \frac{8}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

حل (ii): متریکس ذیل را داریم:

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L}) := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \frac{8}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \exists!\, a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}\ ;\ x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ [زیرا v_1 , v_2 , v_3 قاعده]

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3) = a_1(2,0,0) + a_2(1,2,0) + a_3(0,1,1)$

$= (2a_1 + a_2,\ 2a_2 + a_3,\ a_3)$

$a_3 = x_3$

$2a_2 + a_3 = x_2 \Rightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{x_2-a_3}{2} = \frac{x_2-x_3}{2}$

$2a_1 + a_2 = x_1 \Rightarrow a_1 = \frac{x_1-a_2}{2} = \frac{x_1-\frac{x_2-x_3}{2}}{2} = \frac{2x_1-x_2+x_3}{4}$

$L(x) = L(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = a_1L(v_1) + a_2L(v_2) + a_2L(v_2)$

چون $L(v_1)\ , L(v_2), L(v_3) \in \mathbb{R}^3$ است. پس:

$\exists!\, a_{11},a_{21}, a_{31}, a_{12},a_{22}, a_{32}, a_{13},a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}\ ;$

$L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$

$= a_{11}(1,1,0) + a_{21}(0,0,3) + a_{31}(1,0,2)$

$= (a_{11}, a_{11},0) + (0,0,3a_{21}) + (a_{31},0,2a_{31})$

$= (a_{11} + a_{31}, a_{11}, 3a_{21} + 2a_{31}) = (4-4, \mathbf{4}, 3.\frac{8}{3} + 2.(-4))$

$= (0, 4, 0)$

$L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$

$= a_{12}(1,1,0) + a_{22}(0,0,3) + a_{32}(1,0,2)$

$= (a_{12}, a_{12},0) + (0,0,3a_{22}) + (a_{32},0,2a_{32})$

$= (a_{12} + a_{32}, a_{12}, 3a_{22} + 2a_{32}) = (2-2, 2, 3.2 + 2(-2))$

$= (0, 2, 2)$

$L(v_3) = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3$

$= a_{13}(1,1,0) + a_{23}(0, 0,3) + a_{33}(1, 0, 2)$

$= (a_{13}, a_{13},0) + (0, 0, 3a_{23}) + (a_{33}, 0, 2a_{33})$

$= (a_{13} + a_{33}, a_{13}, 3a_{23} + 2a_{33}) = (0+1,0, 3.(-\frac{1}{3})+2.1)$

$= (1, 0, 1)$

$x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$L(x) = L(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = a_1L(v_1) + a_2 L(v_2) + a_3L(v_3)$

$L((x_1,x_2,x_3)) = \frac{2x_1-x_2+x_3}{4}(0, 4,0) + \frac{x_2-x_3}{2}(0, 2, 2) + x_3(1,0,1)$

$= (0, 2x_1 - x_2 + x_3, 0) + (0, x_2 - x_3, x_2 - x_3)$

$+ (x_3,0, x_3)$

$= (x_3, 2x_1 - x_2 + x_3 + x_2 - x_3, x_2 - x_3 + x_3))$

$= (x_3, 2x_1, x_2)$

په نتیجه کې خطی میپینګ دالاندي شکل لري:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto (x_3, 2x_1, x_2) \end{aligned}$$

تمرین 12.1: په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضاکې دوه قاعدي $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3)$ او $\acute{\mathcal{B}} = (w_1,w_2,w_3)$ په لاندي ډول راکړل شویدي.د $\mathbb{R}^3$ اساسی قاعده (canonical Basis) په $C = (e_1,e_2,e_3)$ سره ښیو. یعنې

$v_1 = (1,2), v_2 = (0,3) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{B}:=(v_1,v_2)$

$w_1 = (1,5,1), w_2 = (0,9,1), w_3 = (3,-3,1) \in \mathbb{R}^3, \acute{\mathcal{B}}:= (w_1,w_2,w_3)$

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) &\longmapsto (x_1, 2x_1, x_2) \end{aligned}$$

(1)

(a) ثبوت کړې چې $\mathcal{B}$ د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ فضاي وکتور یوه قاعده ده

(b) ثبوت کړئ چې $\acute{\mathcal{B}}$ د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ فضاي وکتور يوه قاعده ده

(2)
(a) ثبوت کړئ چې L يو خطي ميپنګ (lin-map) دی.
(b) دL خطي ميپنګ مربوطه متريکس $A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}(\mathrm{L})$ نظر $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ ته پيداکړئ
(c) د $A_{B}^{C}(\mathrm{L})$ متريکس ، چه په (b) کې مولاس ته راوړی ،
مربوطه خطي ميپنګ L پيداکړئ

تمرين 12.2: مونږ د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ فضای وکتورپه پام کې نيسو

$v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_3, 2x_1, x_2)$$

(1) ثبوت کړئ چې د v_3,v_2,v_1 وکتورونه يوه قاعده د $\mathbb{R}^3$ ده.
(2) ايا L يو Isomorphism دی
(3) که L يو lin-map وي، بيا *ker(L)* او *Im(L)* پيديکړئ
(4) په دو طريقو ثبوت کړئ چې د $L(v_1)$, $L(v_2)$, $L(v_3)$ وکتورونه هم يوه قاعده د $\mathbb{R}^3$ ده

تمرين 12.3: په $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ وکتوری فضاکې لاندي وکتورونه راکړل شويدي:

$v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,0,1)$, $v_3 = (0,2,1) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (v_1,v_2,v_3)$
$w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,0,2)$, $w_3 = (0,1,2) \in \mathbb{R}^3$, $\acute{\mathcal{B}} := (w_1,w_2,w_3)$

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_3, 2x_1, x_2)$$

(1) ثبوت کړئ چې $\mathcal{B}$ او $\acute{\mathcal{B}}$ قاعدي (basis) د $\mathbb{R}^3$ دي
(2) د L خطی ميپنګ مربوطه متريکس نظر $\mathcal{B}$ او $\mathcal{B}'$ قاعدو ته پيدا کړئ
(3) که هغه متريکس چې په (2) کې لاسته راوړل شوی په $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ وښيو
(a) ديترمينانت $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ پيداکړئ
(b) د $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ متريکس rank پيداکړئ

(c) د $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{L})$ معکوس څه شکل لري

مثال 12.3 : دلته غواړم د 7.1 قضیی تطبیق په یوه مثال کي واضح کړم.
دوه لاندي وکتورونه په ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$) وکتوری فضا کي راکړل شوي دي :

$w_1= (2,3), w_2= (1,2) \in \mathbb{R}^2$

(1) په 5.1 مثال کي موولیدل چې $v_1 = (1,1)$ او $v_2= (-1,2)$ یوه قاعده د $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ده. هغه مونږ په $\mathcal{B}$ سره ښیوو.

(a) غواړو خطی میپینګ L نظر $\mathcal{B}$ ته دلاندي خواصو سره پیداکړو:

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;,\; L(v_i) = w_i \quad (i=1,2)$$

(b) غواړو د L مربوطه متریکس $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (L) نظر $\mathcal{B}$ ته پیداکړو.

(c) غواړو د $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (L) مربوطه خطی میپینګ نظر $\mathcal{B}$ ته پیداکړو.

(2) غواړويو خطی میپینګ L نظراساسي قاعدي ته دلاندي خواصوسره پیداکړو:

$$\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;,\; L(e_i) = w_i \quad (i=1,2)$$

(1) حل:

(a)

$$\mathbb{R}^2 = \ll v_1, v_2 \gg$$

$$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in \mathbb{R}^2 \implies \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;;\; x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

په هغه مثال کي موولیدل :

$$\lambda_1 = \frac{x_2+2x_1}{3} \;,\; \lambda_2 = \frac{x_2-x_1}{3}$$

$$L(x) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

$$= \frac{x_2+2x_1}{3} \cdot w_1 + \frac{x_2-x_1}{3} \cdot w_2 = \frac{x_2+2x_1}{3}.(2,3) + \frac{x_2-x_1}{3} \cdot (1,2)$$

$$= \left(\frac{2.(x_2+2x_1)}{3}, \frac{3.(x_2+2x_1)}{3}\right) + \left(\frac{x_2-x_1}{3}, \frac{2.(x_2-x_1)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_2+4x_1+\ x_2\ -x_1}{3}, \frac{3x_2+6x_1+\ 2x_2\ -2x_1}{3}\right)$$

$$= \frac{3(x_2+x_1)}{3}, \frac{5x_2+4x_1}{3})$$

$$= (x_1 + x_2, \frac{4x_1+5x_2}{3})$$

په نتیجه کي L لاندي شکل لري:

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1 + x_2, \frac{4x_1+5x_2}{3})$$

اوس غواړو ثبوت کړو چې L یو خطی میپینګ (L-Map) دی.

$R = (r_1,r_2)$, $s = (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$L(r+s) = L(r_1+s_1, r_2+s_2) = (r_1+s_1 + r_2+s_2, \frac{4(r_1+s_1)+5(r_2+s_2)}{3})$$
$$= (r_1+ r_2, \frac{4r_1+5r_2}{3}) + (s_1+ s_2, \frac{4s_1+5s_2}{3}) = L(r) + L(s)$$
$$L(\lambda r) = L(\lambda r_1, \lambda r_2) = (\lambda r_1 + \lambda r_2, \frac{4\lambda r_1+5\lambda r_2}{3})$$
$$= (\lambda(r_1 + r_2), \frac{\lambda(4r_1+5r_2)}{3}) = \lambda((r_1 + r_2), \frac{4r_1+5r_2}{3})$$
$$= \lambda L(r)$$

په نتیجه کي L یو خطی میپینګ (L-Map) دی.

اوس باید ثبوت شی چې $L(v_1) = w_1$ او $L(v_2) = w_2$ صدق کوي.

$$L(v_1) = L((1,1)) = (1 + 1, \frac{4+5}{3}) = (2,3) = w_1$$
$$L(v_2) = L((-1,2)) = (-1 + 2, \frac{4(-1)+2.5}{3}) = (1,2) = w_2$$

(b) حل: دلته خطی میپینګ L په نظرکي نیسو

څرنګه چې $L(v_2),L(v_1) \in \mathbb{R}^2$ دی او v_2,v_1 یوه قاعده د $\mathbb{R}^2$ ده، پس:

$\exists!\ a_{11},a_{21},a_{12},a_{22} \in \mathbb{R}$;

$L(v_1) = a_{11}v_1+ a_{21}v_2$, $L(v_2) = a_{12}v_1+ a_{22}v_2$

$$L(v_1) = a_{11}(1,1) + a_{21}(-1,2) = (a_{11}, a_{11}) + (-a_{21}, 2a_{21})$$
$$= (a_{11} - a_{21}, a_{11} + 2a_{21})$$

له بلي خوا د L خطی میپینګ خواصوله مخې:

$L(v_1)= w_1 = (2,3)$

پس:

$L(v_1) = (2,3) = = = (a_{11} - a_{21},\ a_{11} + 2a_{21})$

$\Rightarrow a_{11} - a_{21} = 2 \ \wedge \ a_{11} + 2a_{21} = 3$

$\Rightarrow -3a_{21} = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \ a_{21} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a_{11} = 2 + a_{21} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow (a_{11}, a_{21}) = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$

$L(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$

$= a_{12}(1,1) + a_{22}(-1,2) = (a_{12}, a_{12}) + (-a_{22}, 2a_{22})$

$= (a_{12} - a_{22},\ a_{12} + 2a_{22})$

له بلي خوا د L خطی میپینګ خواصوله مخي:

$L(v_2) = w_2 = (1,2)$

پس:

$L(v_2) = (1, 2) = (a_{12} - a_{22},\ a_{12} + 2a_{22})$

$\Rightarrow a_{12} - a_{22} = 1 \ \wedge \ a_{12} + 2a_{22} = 2$

$\Rightarrow -3a_{22} = 1 - 2 = -1 \ \Rightarrow \ a_{22} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \ a_{12} = 1 + a_{22} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow (a_{12}, a_{22}) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

په نتیجه کي د L خطی میپینګ مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ قاعده ته لاندي شکل لري:

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) حل: دلته د $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (L) متریکس مربوطه خطي میپنګ L لاسته راوړو

$\mathbb{R}^2 = \ll v_1, v_2 \gg$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \implies \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ ; x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\implies L(x) = L(x) = L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ځرنګه چې $L(v_2),L(v_1) \in \mathbb{R}^2$ دی او v_2,v_1 یوه قاعده د $\mathbb{R}^2$ ده، پس:

$\exists!\ a_{11},a_{21},a_{12},a_{22} \in \mathbb{R}$;

$L(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$, $L(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$

$L(v_1) = a_{11}(1,1) + a_{21}(-1,2) = (a_{11}, a_{11}) + (-a_{21}, 2a_{21})$

$= (a_{11} - a_{21},\ a_{11} + 2a_{21}) = (\frac{7}{3} - \frac{1}{3}, \frac{7}{3} + \frac{2}{3}) = (2,3) = w_1$

$L(v_2) = a_{12}(1,1) + a_{22}(-1,2) = (a_{12}, a_{12}) + (-a_{22}, 2a_{22})$

$= (a_{12} - a_{22},\ a_{12} + 2a_{22}) = (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}) = (1,2) = w_2$

په (a) کي موولیدل چې :

$$\lambda_1 = \frac{x_2+2x_1}{3}\ ,\lambda_2 = \frac{x_2-x_1}{3}$$

$$\begin{aligned} L(x) &= \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \\ &= \frac{x_2+2x_1}{3}(2,3) + \frac{x_2-x_1}{3}(1,2) \\ &= (\frac{2x_2+4x_1}{3}, \frac{3x_2+6x_1}{3}) + (\frac{x_2-x_1}{3}, \frac{2x_2-2x_1}{3}) \\ &= (\frac{2x_2+4x_1}{3} + \frac{x_2-x_1}{3}, \frac{3x_2+6x_1}{3} + \frac{2x_2-2x_1}{3}) = (\frac{3(x_2+x_2)}{3}, \frac{4x_1+5x_2}{3} \\ &= (x_1 + x_2, \frac{4x_1+5x_2}{3}) \end{aligned}$$

په نتیجه کي:

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1,x_2) \longmapsto (x_1 + x_2, \frac{4x_1+5x_2}{3})$$

د **(2) حل:** مونږ پوهیږو چې په $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ وکتوري فضا کی اساسی قاعده لاندي شکل لري:

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$\mathbb{R}^2 = \langle\langle e_1,e_2 \rangle\rangle$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \implies \exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\ ;\ x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$(x_1, x_2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$
$\Longrightarrow \quad x_1 = \lambda_1 \quad \wedge \quad x_2 = \lambda_2$
$L(x) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = x_1 . w_1 + x_2 . w_2 = x_1(2,3) + x_2(1,2)$
$= (2x_1, 3x_1) + (x_2, 2x_2)$
$= (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2)$

له بلي خوا:

$L(e_1) = L((1,0)) = (2+0, 3+0) = (2,3) = w_1$
$L(e_2) = L((0,1)) = (0+1, 0+2) = (1,2) = w_2$

پس خطی میپینګ L نظراساسی قاعده ته لاندي شکل لري :

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2)$

تمرین 12.4 : مونږ دلته د $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ فضای وکتورپه نظرکي نیسو.

$w_1 = (2,3,1)$, $w_2 = (1,2,1)$, $w_3 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$
$v_1 = (2,0,0), v_2 = (3,0,1), v_3 = (0,2,1) \in \mathbb{R}^3$

(1)

(a) ثبوت کړی چې د v_2, v_1 او v_3 وکتورونه یوه قاعده (basis) د $\mathbb{R}^3$ جوړوي. یعني:

$\mathbb{R}^3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle$

(b) د 7.1 قضیی له مخې یو خطی میپینګ L نظر $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ ته دلاندي خواصو سره پیداکړی:

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(v_i) = w_i \quad (i=1,2,3)$

(c) د L مربوطه متریکس $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ نظر $\mathcal{B}$ ته پیداکړی.

(2) خطی میپینګ L نظراساسي قاعدي ته دلاندي خواصوسره پیداکړو:

$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(e_i) = w_i \quad (i=1,2,3)$

مثال 12.4: غواړوپه دې مثال کي یو isomorphism د $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ او $M(2x2, \mathbb{R})$ فضاي وکتورو ترمینځ پیداکړو.

حل: مونږ پوهیږو:

$\mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle\rangle \wedge M(2x2, \mathbb{R}) = \langle\langle E_1^1, E_1^2, E_2^1, E_2^2 \rangle\rangle$

د 7.1 قضيې له مخې يو خطی میپنګ L دلاندي خواصوسره موجود دی:

$L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow M(2x2, \mathbb{R})$, $L(e_i) = E_i$ (i=1,2,3,4)

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$\Longrightarrow\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$; $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + + \lambda_4 e_4$

$\Longrightarrow\ x_1 = \lambda_1 \ \wedge\ x_2 = \lambda_2 \ \wedge\ x_3 = \lambda_3 \ \wedge\ x_4 = \lambda_4$

$$L(x) = L(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + + \lambda_4 e_4)$$

$$= \lambda_1 L(e_1) + \lambda_2 L(e_2) + \lambda_3 L(e_3) + + \lambda_4 L(e_4)$$

$$= \lambda_1 . E_1^1 + \lambda_2 . E_1^2 + \lambda_3 . E_2^1 + \lambda_4 . E_2^2$$

$$= x_1 . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

پس خطی میپنګ L په لاندي ډول دی

$$L: \mathbb{R}^4 \longrightarrow M(2x2, \mathbb{R})$$
$$X=(x_1,x_2,x_3, x_4) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

:L injective

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$

$L(x) = L(y) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow x = y \Longrightarrow$ L injective

:L surjective

$\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(M(2x2, \mathbb{R})$

L injective $\Longrightarrow$ L surjective [د *7.3* قضيې له مخې]

اويا

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2x2, \mathbb{R})$, $x := (x_1,x_2,x_3, x_4) = (a,b,c,d)$

$$L(x) = L((a,b,c,d)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow L \text{ surjective}$$

په نتیجه کی L یو isomorphism دی.

تمرین 12.5: $(W, \mathbb{R})$ وکتوری فضاده چې w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 وکتورونه یې یوه قاعده جوړوي او $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow W$ یو surjective خطی میپنګ دی.
ثبوت کړئ چې L یو injective هم دی.

مثال 12.5: که $L \in End(\mathbb{R}^2)$ او A د L مربوطه متریکس نظر اساسی قاعدي *(standard Basis)* ته په لاندي ډول وي:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) خطی میپنګ L نظر A متریکس ته پیداکړئ
(2) د L مشخصه قیمتونه (eigenvalues) کوم دي
(3) دمشخصه قیمتو مربوطه مشخصه وکتورونه (eigenvectors) پیدا کړئ اوامتحان یې کړئ
(4) ثبوت کړئ چې د *A* متریکس diagonalizable (د قطري کیدو وړ) دی

حل: (1)

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$L(x) = L(x_1,x_2) = A.x = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5x_1 - 8x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$
$$= (5x_1 - 8x_2, -x_1 + 3x_2)$$

په نتیجه کې د A متریکس مربوطه خطی میپنګ نظر اساسی قاعده ته لاندي شکل لري :

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (5x_1 - 8x_2, -x_1 + 3x_2)$$

حل: (2)

$$A - t.E_2 = \begin{pmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$p_L(t) = \det(A - t.E_2) = \begin{vmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (5 - t) . (3 - t) - 8$$

$p_L(t) = t^2 - 8t + 7 = (t - 7)^1 . (t - 1)^1 = 0$
$\Rightarrow t_1 = 7 \ , t_2 = 1$

1 او 7 د L مشخصه قیمتونه دي.
د t_1 او t_2 الجبري حاصل ضرب (algebraic multiplicity) 1 دی. یعني:
$\mu(P_L,7) = \mu(P_L,1) = 1$

(3) **حل:** مشخصه وکتورو (eigenvectors) پیداکولولپاره دالاندي معادلي حل کوو:

$(A - tE_2)(x) = 0$

$$(A - t.E_2)(x) = \begin{pmatrix} 5-t & -8 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t_1 = 7$

$$(A - 7.E_2)(x) = \begin{pmatrix} 5-7 & -8 \\ -1 & 3-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_1 & -8x_2 \\ -1x_1 & -7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2x_1 - 8x_2 = 0 \quad \wedge \quad -x_1 - 4x_2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -4x_2$$

خرنګه چې پورتنی معادلاي پارامیتری حل لري. که $x_2 = m \ (m \in \mathbb{R})$ وضع شي، بیا $v_1 = (-4m,m)$ یومشخصه وکتوردی اومربوطه eigenspace یي لاندي شکل لري

$$Eig(L,7) = \{(-4m,m) \mid m \in \mathbb{R}\} = \{(m(-4,1) \mid m \in \mathbb{R}\}$$

د مثال په ډول که $x_2 = -1$ وضع شي، بیا $x_1 = 4$ کيږي اويو مشخصه وکتور نسبت $t_1 = 7$ مشخصه قیمت ته $u := (4,-1)$ دی

امتحان: تعریف له مخې د مشخصه قیمت λ اومشخصه وکتور v لپاره باید $L(v) = \lambda v$ صدق وکړي:

$L(v_1) = L(-4m,m) = (5(-4m) - 8m,\ 4m + 3m) = (-28m,\ 7m)$

$= 7.(-4m,m) = t_1.v_1$

(-4,1) یوه قاعده د $Eig(L,7)$ فضاي وکتور ده. پس $\dim(Eig(L,7)) = 1$ دی.

پس geometric multiplicity (هندسی حاصل ضرب) دتعریف له مخې *1* دی

$t_2 = 1$

$$(A - 1.E_2)(x) = \begin{pmatrix} 5-1 & -8 \\ -1 & 3-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ د

$$= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 & -8x_2 \\ -1x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ 4x_1 - 8x_2 = 0 \quad \wedge \quad -x_1 + 2x_2 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 2x_2$$

څرنګه چې پورتنی معادلاي پارامیتری حل لري. که $x_2 = m\ \ (m \in \mathbb{R})$ وضع شي، بیا $v_2 = (2m,m)$ یومشخصه وکتوردی اومربوطه eigenspace يي لاندي شکل لري

$$Eig(L,1) = \{(2m,m) \mid m \in \mathbb{R}\} = \{(m(2,1) \mid m \in \mathbb{R}\}$$

د مثال په ډول که $x_2 = 1$ وضع شي، بیا $x_1 = 2$ کيږي اويو مشخصه وکتور نسبت $t_2 = 1$ مشخصه قیمت ته $v := (2,1)$ دی

(4) حل:

د 9.2 لیما له مخې u او v وکتورونه په $\mathbb{R}^2$ کې خطی مستقل دي. پس د 5.3 لیما له مخې لیکلی شو: $\mathbb{R}^2 = \ll u, v \gg$

یو $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ متریکس diagonalizable (د قطری کیدو وړ) دی، که چیري یو متریکس $S \in GL(n, \mathbb{K})$ موجود وي چې $S^{-1}.A.S$ یو diagonal متریکس شي.

که د S متریکس دا ډول تعریف شي چي ستني (column) يي u او v مشخصه وکتورونه وي. یعنی :

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \det(S) = 4.1 - (-2.1) = 6$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{14}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{6} + \frac{14}{6} & \frac{14}{6} - \frac{14}{6} \\ \frac{4}{6} - \frac{4}{6} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیدل کیږي چي $S^{-1}.A.S$ یو دیاګونال متریکس دی. پس تعریف له مخي د A متریکس Diagonalizable دی.

مونږ ولیدل چې د t_1 او t_2 مشخصه وکتورنه په عمومي ډول لاندي شکل درلود:

$V_1 = (-4m,m)$, $V_2 = (2m,m)$ $(m \in \mathbb{R})$

که m= -1 وضع بنې بیا u= (4,-1) او v=(-2,-1) کیږي

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ \det(S) = -6$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6}+\frac{2}{6} & -\frac{8}{6}-\frac{6}{6} \\ -\frac{5}{6}+\frac{4}{6} & \frac{8}{6}-\frac{12}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{14}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix} .. \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیدل کیږي چې $S^{-1}.A.S$ بیا هم یو دیاگونال متریکس دی او قطري عناصر یي مشخصه قیمتونه دي. پس A متریکس Diagonalizable دی.

تمرین 12.6 دالاندي متریکس راکړل شویدی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) د A متریکس مربوطه L خطي میپنګ نظر اساسي قاعده ته پیداکړې

(2) د A متریکس مشخصه قیمتونه (eigenvalues) کوم دي

(3) الجبري حاصل ضرب (algebraic multiplicity) یي پیداکړې

(4) د A متریکس مشخصه وکتورونه (eigenvectors) کوم دي

(5) مربوطه eigenspace یي پیداکړې

(6) هندسی حاصل ضرب (geometric multiplicity) یي پیداکړې

(7) که t_1, t_2, t_3 مشخصه قیمتونه او v_1, v_2, v_3 مشخصه ویکتورونه د A متریکس وي، بیاثبوت کړې چې دالاندې رابطه صدق کوې:

$$A.v_i = t_i . v_i \quad (i= 1,2,3)$$

(8) یو S متریکس پیداکړې چې $\det(S) \neq 0$ او $S^{-1}.A.S$ یو دیاګونال متریکس D وي. د D قطر باید د A مشخصه قیمتونه (eigenvalues) څخه تشکیل شوی وي.

مثال 12.6:

$v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,2,3) \in (\mathbb{R}^3, \| \ \|)$

$W := \text{span}(v_1, v_2)$

(1) $W = \ll v_1, v_2 \gg$. یعني باید ثبوت شي چې v_2 , v_1 یوه قاعده د W ده

(2) **(a)** او **(b)** حل لپاره د gram-schmidt له طریقي څخه استفاده کیږي

(a) د v_1 ، v_2 مربوطه orthogonalbasis څه شکل لري اوباید امتحان شي

(b) د v_1 ، v_2 مربوطه orthonormalbasis لاس ته راوړو

د (1) حل لوستونکی ته پریږدم

(2) حل:

د gram-schmidt د orthogonalbasis او orthonormalbasis د پیداکولو طریقه په لاندي ډول ده:

(a)

$u_1 := v_1 = (1,1,0)$

$u_2 := v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = v_2 - \frac{<u_1,v_2>}{<u_1,u_1>}.u_1$

$= (2,2,3) - \frac{<(1,1,0),(2,2,3)>}{<(1,1,0),(1,1,0)>}.(1,1,0)$

$= (2,2,3) - \frac{1.2+1.2+0}{1.1+1.1}(1,1,0) = (2,2,3) - \frac{4}{2}(1,1,0)$

$= (2,2,3) + (-2,-2,0) = (0,0,3)$

$<u_1, u_2> = <(1,1,0),(0,0,3)> = 1.0 + 1.0 + 3.0 = 0$

$\Rightarrow u_1, u_2$ orthogonal

اوس باید ثبوت شي چې u_1 او u_2 یوه قاعده د W ده

$X = (x_1, x_2, x_3) \in W = \text{span}(v_1, v_2)$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(2,2,3)$

$= (\lambda_1, \lambda_1, 0) + (2\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2)$

$= (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, 3\lambda_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$, $x_3 = 3\lambda_2$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; $x = a_1 u_1 + a_2 u_2$

$(x_1,x_2,x_3) = a_1(11,0) + a_2(0,0,3) = (a_1, a_1,0) + (0,0,3a_2)$
$= ((a_1, a_1, 3a_2)$
$a_1 = x_1 = x_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $a_2 = 3\lambda_2$
$\Rightarrow W = \text{span}(u_1,u_2) = < u_1,u_2>$

u_1 او u_2 خطي مستقل هم دي. ځکه:

$\mu_1 , \mu_2 \in \mathbb{R}$; $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0$
$\Rightarrow \mu_1(1,1,0) + \mu_2(0,0,3) = (0,0,0) \Rightarrow (\mu_1 , \mu_1, 3\mu_2) = (0,0,0)$
$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$

په نتیجه کې u_1 او u_2 د W اورتوګونال بیس (orthogonalbasis) جوړوي .

(b)

$w_i := \frac{u_i}{\| u_i \|} \qquad (i = 1,2)$

$w_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{1}{\|(1,1,0)\|} . (1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} . (1,1,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$w_2 = \frac{u_2}{\| u_2 \|} = \frac{1}{\|(0,0,3)\|} .(0,0,3) = \frac{1}{\sqrt{9}} . (0,0,3)$
$= \frac{1}{3} . (0,0,3) = (0,0,1)$

$<w_1,w_2> = < (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,1)) > 0 + 0 + 0 = 0$

لیدل کیږي چې w_1 او w_2 وکتورونه یوبل سره orthogonal دي.

w_1 او w_2 وکتورونه orthonormal هم دي. ځکه:

$\| w_1 \| = \| (\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$

$\| w_2 \| = \| (0,0,1) \| = \sqrt{1} = 1$

په اسانی سره ثبوت کیدای شي چې w_1 او w_2 یو قاعده د W ده. پس w_1 او w_2 وکتورونه یو orthonormalbasis جوړوي.

تمرين 12.7:

$v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,3)$, $v_3 = (2,1,1) \in (\mathbb{R}^3, \| \ \|)$

(1) $W = \langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle$. يعني ثبوت كړئ چې v_1 , v_2 , v_3 يوه قاعده د W ده

(2) **(a)** او **(b)** حل لپاره د gram-schmidt له طريقي څخه استفاده وکړئ

(a) د v_1 , v_2 , v_3 مربوطه orthogonalbasis څه شكل لري اوبايد امتحان شي

(b) د v_1 ، v_2 , v_3 مربوطه orthonormalbasis لاس ته راوړئ

مثال 12.7:

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a + be^x + ce^{2x} \ \ (a,b,c \in \mathbb{R}) \}$

د 4.1 مثال له مخی $(V, \mathbb{R})$ يوه وکتوری فضا ده، چه $\{1, e^x, e^{2x}\}$ يی يوه قاعده ده. ځکه:

اول: هر $f \in V$ کولای شو د $\{1, e^x, e^{2x}\}$ خطي ترکيب په ډول وليکو. پس:

$V = \langle 1, e^x, e2^x \rangle$

دويم: غواړود Wronski له لياري ثبوت کړوچه $\{1, e^x, e^{2x}\}$ خطي مستقل دي

$f_1(x) := 1$, $f_2(x) := e^x$, $f_3(x) := e^{2x}$

د ورونسکي (wronski) متريکس لاندي شکل لري:

$$W(f_1,f_2,f_3)(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\det\big(W(f1,f2,f3)(x)\big) = 1.(e^x.4e^{2x} - e^x.2e^{2x}$$

$$= 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x} \neq 0 \ \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\Longrightarrow \{1, e^x, e^{2x}\}$ lin-indep (خطي مستقل) [11.3 قضيی له مخي]

په نتيجه کي:

$V = \ll 1, e^x, e^{2x} \gg \ \wedge \ \dim V = 3$

تمرین 12.8:

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \ \ (a,b,c,d,e \in \mathbb{R}) \}$

(1) ثبوت کړئ چه $(V, \mathbb{R})$ یوه وکتوری فضا ده .

(2) یوه قاعده د $(V, \mathbb{R})$ پیدا کړئ

(3) dimV ځودی

تمرین 12.9:

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x)= ae^{mx}+be^{nx} \ \ (a,b \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}) \}$

مونږ د $((V, \mathbb{R})$ وکتوري فضا په پام کې نیسو

$f_1(x) := e^{mx}$, $f_2(x) := e^{nx} \in V \quad (m,n \in \mathbb{N})$

د wronski متریکس له مخي معلوم کړي، چه د m او n کومو قیمتولپاره $f_1(x)$ او $\mathbf{f_2(x)}$ خطي مستقل **(lin-indep)** دي.

سمبولونه (Symbols)

$\mathbb{N}$	د طبیعی اعدادو ست	$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	دپوره (تام) اعدادو ست	$\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q}$	د ناطق اعدادو ست	$\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	د حقیقی اعدادو ست	$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+^0$	د مثبت حقیقی اعدادو ست د صفرسره	
$\mathbb{R}_-^0$	د منفی حقیقی اعدادو ست د صفر سره	
$\mathbb{C}$	د موهومي اویاد مختلط اعدادو ست	$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\mathbb{K}$	ساحه (Field)	
$A:$	A تعریف شوي	
$a \Rightarrow b$	**د** a افادی ځخه د b افاده لاس ته راځي	
$a \Leftrightarrow b$	د a افادي څخه b او د b څخه a لاس ته راځي	
$A = \emptyset$	A یو خالی سیت دی	
$A \neq \emptyset$	A یو خالی سیت ندی	
$a \in A$	a یو عنصرد سیت A دی. اویاداچي a په A کی شامل دی	
$a \notin A$	a د A عنصر ندی. اویا داچي a د A په سیت کی شامل ندی	
$\forall a \in A$	دهر a لپاره چې د A په سیت کی شامل وي	
$\wedge$	(conjuction) **and**	
	دمثال په ډول: $a \wedge b$ د a افاده اود b افاده	
$\vee$	(disjunction) **or**	
	دمثال په ډول: $a \vee b$ د a افاده یاد b افاده	
$\cup$	د سیتونو اتحاد (union)	
$\cap$	د سیتونو تقاطع (intersection)	
$A \subset B$	A فرعی سیت (sub set) د B دی	
$A \subseteq B$	A فرعی ست (sub set) د B اویا مساوي د B سره دی	
$A \setminus B$	$\{ a \in A \mid a \notin B \}$	
$\exists b \in A$	یو b عنصر د A په سیت کی موجود دی	
$\nexists b \in A$	یو b عنصر د A په سیت کی جود نه لری	
$\exists!\, b \in A$	فقط یواځی یو b د A په سیت کی موجود دی	

< ,... , > مولد (generating system) اویا Span) دیوه فضای وکتور

<< , … , >> قاعده (Basis) **د** یو فضای وکتور

$A \in M(n \times m, \mathbb{K})$: متریکس m لیکي (rows) ، n ستني (colmns) لري اوعناصر يي د $\mathbb{K}$ د ساحي دي

$A \in M(n, \mathbb{K})$: مربعي متریکس n لیکي (rows) ، n ستني (colmns) لري اوعناصر يي د $\mathbb{K}$ د ساحي دي

$\boldsymbol{A_{\mathcal{B}}^{\acute{\mathcal{B}}}}$**(L)** د L خطي میپنګ مربوطه متریکس نظر $\mathcal{B}$ او $\mathcal{B}'$ قاعدو ته

اختصارات

lin-comb	خطی ترکیب (linear combination)
lin-dep	خطی وا بسته (linearly dependent)
lin-indep	خطی مستقل (linearly independent)
lin-map	خطی میپنګ (linear mapping)
Im(L)	تصویر (image) د L خطی میپنګ
Ker(L)	هسته (kernel) د L خطی میپنګ
geom – mult	geometric multiplicity
algeb – mult	algebraic multiplicity
E_n^0	n مربعي صفرمتریکس
E_n	n مربعي واحد متریکس

Greek Letters

(يونانى حروف)

Uppercase (لوي حروف)		lowercase (كوچني حروف)		
Α	alpha	α		
Β	beta	β		
Γ	gamma	γ		
Δ	delta	δ		
Ε	epsilon	ε	ϵ	epsilon variant
Ζ	zeta	ζ		
Η	eta	η		
Θ	theta	θ	ϑ	theta variant
Ι	iota	ι		
Κ	kappsa	κ		
Λ	lambda	λ		
Μ	mu	μ		
Ν	nu	ν		
Ξ	xi	ξ		
Ο	onmicron	o		
Π	pi	π		
Ρ	rho	ρ	ϱ	rho vaiant
Σ	sigma	σ	ς	sigma variant
Τ	tau	τ		
Υ	upsilon	υ		
Φ	phi	φ	ϕ	phi variant
Χ	chi	χ		
Ψ	psi	ψ		
Ω	omega	ω		

دلیکوال ځان پیژندنه

ځه د بلخ ولسوالی د مهمندانوپه کلي زیږیدلی یم. د مهمندانود لمړی ښونځی د فارغیدو وروسته د کابل دابن سینا په منځنی ښونځی کی شامل شوم. د دارالمعلیمین دفارغیدومی وروسته څوکاله مي دښونکی دنده درلوده. کابل د ساینس پوهنځی د فارغیدووروسته هلته د ریاضی په دیپارتمنت کی په علمی کادرکی وګمارل شوم. په هغه وخت کی د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځی او د المان فدرالی دولت د Rheinischen Friedrich Wilhelms Univesity ترمینځ توامیت موجود وه. په همدي اساس ماته بورس راکړل شواوزه دریاضي په څانګه کي د لوړوزدکړو لپاره المان ته ولاړم. هلته می لمړی دیپلوم اووروسته مي ډاکتری دریاضی په څانګه کي د Bonn ښار په پورتنی پوهنتون کی لاسته راوړه.
د 2009 تر 2014 پورې می د افغانستان په پوهنتونوکی (هرات ، ننګرهار) د خطي الجبر او معاصرالجبر تدریس کاوه.

References List

Prof. Gerd Fischer	Lineare Algebra 10. Auflage 1995
Prof. Klaus Jänich	Lineare Algebra 11. Auflage 2007
Jin Ho Kwak	Linear Algebra second Edition
H.J. Kowalsky	Lineare Algebra 12. Auflage 2003
Prof. Dr. Dirk Ferus	Lineare Algebra II , Wintersemester 2001/2
Prof.Dr.Ina Kersten	Analytische Geometrie und Lineare Algebra 2001
Prof.Dr.V.Bangert	Lineare Algebra Vorlesung von 2003
Serge Lang	Linear Algebra
Jim Hefferon	Linear Algebra 2014
Kenneth Kuttler	Linear Algebra, Theory And Applications 2012

Index

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 200 different medical and non-medical textbooks of Engineering, Science, Economics and Agriculture (96 medical books funded by German Academic Exchange Service, 80 medical with 20 non-medical books funded by German Aid for Afghan Children and 4 non-medical books funded by German-Afghan University Society) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Kapisa, Kabul and Kabul Medical universities. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical and non-medical colleges of the country for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to the Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **German-Afghan University Society (DAUG)** that has provided fund for four books including this one.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister Prof M Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazel Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul/Afghanistan, January, 2016
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Message from the Ministry of Higher Education

In history, books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science, and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of higher education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers and authors, and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty, and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields; so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to the German-Afghan University Society (DAUG) and our colleague Dr. Yahya Wardak that have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof. Dr. Farida Momand
Minister of Higher Education
Kabul, 2016

Book Name Linear Algebra
Author Dr Abdullah Mohmand
Publisher Nangarhar Science Faculty
Website www.nu.edu.af
No of Copies 750
Published 2016
Download www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by the **German-Afghan University Society (DAUG)**.

Administrative and Technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul
Office 0756014640
Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2016
Sahar Printing Press
ISBN 978-9936-620-21-6