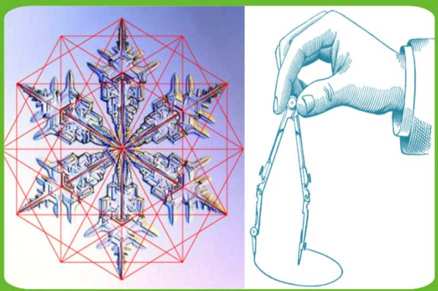
اساسات هندسه ترسیمی مسطح

پوهنوال سید یوسف مانووال

Afghanic



پوهنځی تعلیم و تربیه
Education Faculty

Dari PDF
2016

Sponsored by
Consulate General
of the Federal Republic of Germany
Mazar-e Sharif

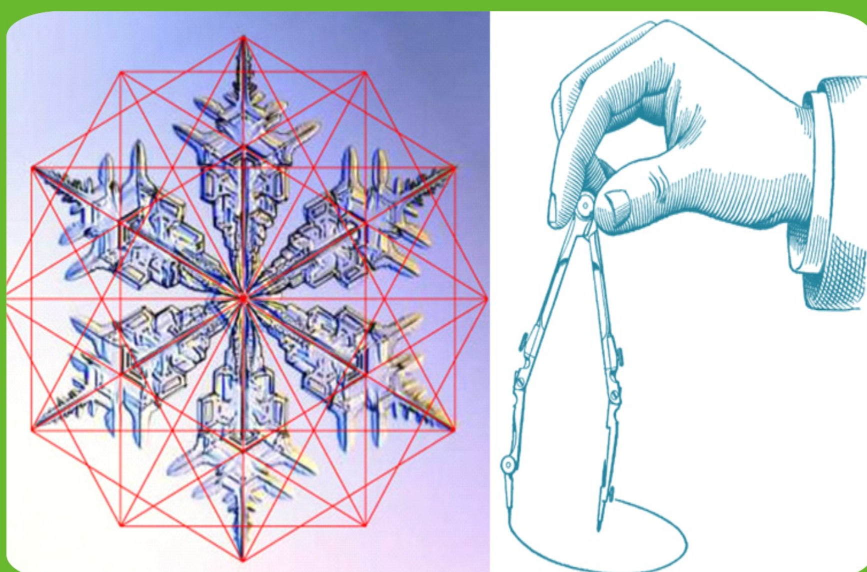
Fundamentals of Drawing Geometry in Surface

Prof Said Yosuf Mannowal

Download: www.ecampus-afghanistan.org

پوهنځی تعلیم و تربیه

اساسات هندسه ترسیمی مسطح



تمویل شده توسط

سرکنسولگری
جمهوری فدرال آلمان
مزار شریف

پوهنوال سید یوسف مانووال

۱۳۹۵ فروش ممنوع است

همرای سی دی

اساسات هندسه ترسیمی مسطح

Fundamentals of Drawing Geometry in Surface

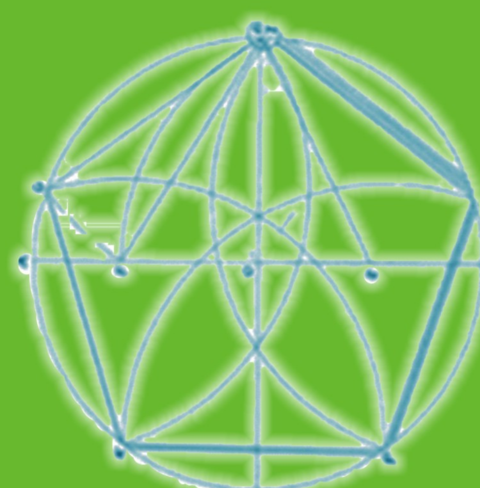
پوهنوال سید یوسف مانووال
۱۳۹۵

Education Faculty

Afghanic

Prof Said Yosuf Mannowal

Fundamentals of Drawing Geometry in Surface



Sponsored by

Consulate General
of the Federal Republic of Germany
Mazar-e Sharif

ISBN : 978-2-910000-01-1

9 782910 000011 >

Not for Sale 2016

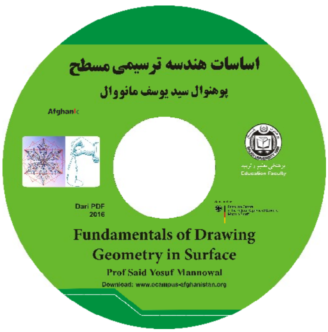
With CD

بسم الله الرحمن الرحیم

اساسات هندسه ترسیمی مسطح

پوهنوال سید یوسف مانووال

چاپ اول



نام کتاب اساسات هندسه ترسیمی مسطح

مؤلف پوهنوال سید یوسف مانو وال

ناشر پوهنتون بلخ، پوهنځی تعلیم و تربیه

ویب سایت www.ba.edu.af

تیراژ ۱۰۰۰

سال ۱۳۹۵، چاپ اول

داونلود www.ecampus-afghanistan.org

چاپ مطبعه افغانستان تایمز، کابل

این کتاب توسط جنرال کنسولگری جمهوری فدرال آلمان در مزار شریف تمویل شده است.

امور اداری و تخنیکی این کتاب توسط مؤسسه افغانیک انجام یافته است.

مسؤولیت محتوا و نوشتن کتاب مربوط نویسنده و پوهنځی مربوطه می باشد. ارگان های کمک کننده و تطبیق کننده مسؤول نمی باشند.

اگر میخواهید کتابهای درسی شما چاپ گردد، با ما به تماس شوید:

داکتر یحیی وردک، وزارت تحصیلات عالی، کابل

دفتر ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰

ایمیل textbooks@afghanic.org

ای اس بی ان ۱ – ۰۱ – ۹۱۰۰۰۰۰ – ۲ – ۹۷۸

پیام وزارت تحصیلات عالی

در جریان تاریخ بشریت کتاب و اثر علمی برای کسب، حفظ، پخش و نشر علم و دانش نقش عمدۀ را بازی کرده و جز اساسی پروسه درسی پنداشته میشود که در ارتقای کیفیت تحصیلات دارای ارزش خاص میباشد. از اینرو باید با در نظر داشت نیازهای روز، معیارهای شناخته شدۀ جهانی و ضروریات جوامع بشری، کتب و مواد درسی جدید برای محصلین آماده و چاپ گردد.

از اساتید و مؤلفین محترم کشور قلباً اظهار سپاس و قدردانی مینمایم که با سعی وتلاش دوامدار در جریان سالهای متمادی با تألیف و ترجمۀ کتب درسی دَین ملی خود را اداء و موتور علم و دانش را به حرکت در آورده اند.

از سایر اساتید و دانشمندان گرانقدر نیز صمیمانه تقاضا مینمایم که در رشته های مربوطۀ خود کتب و سایر مواد درسی را تهیه و به چاپ برسانند، بعد از چاپ به دسترس محصلین گرامی قرار داده تا در ارتقای کیفیت تحصیلات و در پیشرفت پروسه علمی، قدم نیکی را برداشته باشند.

وزارت تحصیلات عالی وظیفۀ خود میداند تا جهت ارتقای سطح دانش محصلین عزیز کتب و مواد درسی جدید و معیاری را به رشته های مختلف علوم آماده و چاپ نماید.

در اخیر از جنرال کنسولگری جمهوری فدرال آلمان در مزار شریف و همکار ما داکتر یحیی وردک صمیمانه تشکر و قدر دانی مینمایم، که زمینۀ چاپ و تکثیر کتب درسی اساتید و سایر دانشمندان گرانقدر را مهیا و مساعد ساخته اند.

امیدوارم این کار سودمند ادامه و توسعه یابد، تا در آینده نزدیک در هر مضمون درسی حد اقل یک کتاب درسی معیاری داشته باشیم.

با احترام

پوهنوال دوکتور فریده مومند

وزیر تحصیلات عالی

کابل، ۱۳۹۵

چاپ کتب درسی

استادان گرامی و محصلان عزیز!

کمبود و نبود کتب درسی در پوهنتون های افغانستان یکی از مشکلات عمده به شمار میرود که محصلان و استادان را با مشکلات زیاد روبرو ساخته است. آنها اکثراً به معلومات جدید دسترسی نداشته و از چپتر ها ولکچرنوت های استفاده مینمایند که کهنه بوده و در بازار به کیفیت پایین فوتوکاپی وعرضه میگردد.

برای رفع این مشکلات ما تا به حال به تعداد ۲۲۳ عنوان کتب مختلف درسی پوهنځی های طب، ساینس، انجنیری، اقتصاد، تعلیم و تربیه و زراعت (۹٦ عنوان کتب طبی توسط کمک مالی انجمن همکاریهای عملی آلمان DAAD، ۱۰۰ عنوان کتب طبی جمع ۲۰ عنوان کتب غیر طبی توسط کمیتهٔ جرمنی برای اطفال افغانستان kinderhilfe-Afghanistan و ۴عنوان کتاب غیر طبی توسط جمیعت پوهنتونهای آلمانی و افغانی DAUG) پوهنتون های ننگرهار، خوست، کندهار، بلخ، هرات، کاپیسا، کابل و پوهنتون طبی کابل را چاپ نمودیم. قابل یاد آوری است که تمام کتب چاپ شدهٔ مذکور بصورت مجانی برای تمام پوهنتون های کشور توزیع گردیده اند.

تمام کتاب های چاپ شدهٔ طبی و غیرطبی را از پورتال www.ecampus-afghanistan.org داونلود نموده میتوانید.

در حالیکه پلان ستراتیژیک وزارت تحصیلات عالی (۲۰۱۰ – ۲۰۱۴) کشور بیان می دارد:

« برای ارتقای سطح تدریس، آموزش و آماده سازی معلومات جدید، دقیق و علمی برای محصلان، باید برای نوشتن و نشر کتب علمی به زبان های دری و پشتو زمینه مساعد گردد. برای ریفورم در نصاب تعلیمی، ترجمه از کتب و مجلات انگلیسی به دری و پشتو حتمی و لازمی میباشد. بدون امکانات فوق نا ممکن است تا محصلان و استادان در تمامی بخش ها به پیشرفت های مدرن و معلومات جدید زود تر دسترسی بیابند.»

ما میخواهیم که این روند را ادامه داده، تا بتوانیم در زمینهٔ تهیه کتب درسی با پوهنتون های کشور همکاری نماییم و دوران چپتر و لکچرنوت را خاتمه دهیم. نیاز است برای مؤسسات تحصیلات عالی کشور سالانه حداقل به تعداد ۱۰۰ عنوان کتاب درسی چاپ گردد.

از تمام استادان محترم خواهشمندیم که در بخش های مسلکی خویش کتب جدید تحریر، ترجمه و یا هم لکچرنوت ها و چپتر های خود را ایدیت و آمادهٔ چاپ نمایند و در اختیار ما قرار دهند، تا با کیفیت عالی چاپ و به طور مجانی به دسترس پوهنځی های مربوطه، استادان و محصلین قرار داده شود.
همچنان در مورد نکات ذکر شده پیشنهادات و نظریات خود را به آدرس ما شریک ساخته، تا بتوانیم مشترکاًدر این راستا قدم های مؤثرتری را برداریم. ازمحصلین عزیز نیز خواهشمندیم، که در امور ذکر شده با ما و استادان محترم همکاری نمایند.
قابل تذکر است که از طرف مؤلف وناشر نهایت کوشش گردیده تا محتویات کتب به اساس معیار های بین المللی آماده گردد. درصورت موجودیت مشکلات درمتن کتاب، از خوانندگان محترم خواهشمندیم تا نظریات و پیشنهادات شانرا بصورت کتبی به آدرس ما و یا مؤلف بفرستند، تا در چاپ های آینده اصلاح گردد.
از جنرال کنسولگری جمهوری فدرال آلمان در مزار شریف تشکر می نمایم که چاپ این کتاب را برای پوهنتون بلخ به عهده گرفته است.
بطور خاص از دفتر جی آی زیت (GIZ) و CIM (Center for International Migration & Development) یا مرکز برای پناهندگی بین المللی و انکشاف، که برایم امکانات کاری را طی پنج سال گذشته در افغانستان مهیا ساخته است، اظهار سپاس و امتنان مینمایم.
از محترمه پوهنوال دوکتور فریده مومند وزیر تحصیلات عالی، محترم پوهنوال محمد عثمان بابری معین علمی، محترم پوهنوال دوکتور گل حسن ولیزی معین اداری و مالی، محترم پوهندوی مکمل الکوزی رییس پوهنتون بلخ، محترم دوکتور محمد صابر مومند مشاور پوهنتون بلخ، رؤسای محترم پوهنتون ها و استادان گرامی تشکر مینمایم که پروسهٔ چاپ کتب درسی را تشویق و حمایت نموده اند.
همچنان ازهمکاران محترم دفتر هرکدام حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبی و فضل الرحیم نیز تشکر مینمایم که در قسمت چاپ نمودن کتب همکاری نموده اند.

داکتر یحیی وردک، مشاور وزارت تحصیلات عالی
کابل، می ۲۰۱۶
نمبر تیلیفون دفتر: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
ایمیل آدرس: textbooks@afghanic.org

سپاس گزاری

استادان عالیقدری که در پوهنتونها وموسسات تحصیلات عالی افغانستان مصروف تدریس ریاضیات میباشند آگاه اندکه تاامروز در زمینه اساسات هندسه ترسیمی مسطح لکچرنوت های متعددی به میتودها وشیوه های متنوع و مختلف توسط استادان محترم به صورت مستقلانه درهرموسسه تحصلی تهیه و تدریس گریده است، اماکتاب جامعی که توسط مرجع ذیصلاحی مانند ریاست انسجام امور اکادمیک و استادان صاحب نظر تایید شده باشد تألیف و به دسترس استادان پوهنتونها و موسسات تحصیلات عالی درسراسر افغانستان قرار نگرفته است تا به صورت واحد تدریس گردد کمبود کتب درسی دراین زمینه از نیاز مندی های اولیه وزارت محترم تحصیلات عالی میباشد .

خوشبختانه، دراین اواخر با مساعد شدن شرایط ، عده زیادی از استادان محترم کمر همت بسته به تألیف ده ها عنوان کتاب درسی مورد نیاز وزارت محترم تحصیلات عالی پرداخته اند. از جمله این کتاب درسی، یکی آن همین کتاب دست داشته میباشد که با اجازه ، حمایت و تشویق وزارت محترم تحصیلات عالی مخصوصاً ریاست محترم انسجام اموراکادمیک، ریاست محترم پوهنتون بلخ، ریاست محترم پوهنحی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ تالیف و در اختیار استادان گرانقدر، محصلان عزیزو دیگر علاقمندان در پوهنحی های تعلیم و تربیه ، انجنیری قرار خواهد گرفت می خواهم از تمام مرجع محترم نهایت تشکر و ابراز سپاس نموده ، موفقیتهای مزید شان را در ارایه خدمات صادقانه فرهنگی و علمی از خداوندج متعال مسئلت نمایم .

مسلماً تالیف کتاب جامعی اساسات هندسی ترسیمی مسطح ایجاب صرف وقت، تلاش شبانه روزی طاقت فرسا و حتی داشتن تیم کاری را می کند، چنانچه در کشورهای دیگر این امر مهم توسط کار تیمی و گروهی اجرا میگرد، مؤلف نسبت این خدمت علمی را به رهنمای و کمک استادان گرانقدرهریک، محترم پوهاند دکتورسید قیوم شاه(باور)، پوهاند عبدالحق (ایمل)و پوهاند دکتورمحمد انوری(غوری) استادان پوهنحی ساینس پوهنتون کابل انجام داده است، که لطف فراون این بزگوارن ، اثری که در پیش چشمان شما خواننده عزیز قرار دارد ، مورد تایید قرار گرفته و باصدور تقریظ های عالمانه آنها اجازه چاپ یافته است از ایشان اظهار سپاس و تشکر می نمائیم. همچنان از زحمات محترم پوهنمل احمد خالد(موحد) استاد دیپارتمنت ریاضیات پوهنحی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ ،استاد محترم پوهاند محمد طاهر(نسیمی) استاد دیپارتمنت بیالوژی پوهنحی تعلیم وتربه پوهنتون بلخ پوهاند حبیب الله (احدی) ، داود شاه (راجی) استادان دیپارتمنت ادبیات دری ، پوهنمل الحاج غلام دستگیر استاد دیپارتمنت روانشناسی و خلیل احمد (اسحق زی) استاد دیپارتمنت کیمیا پوهنحی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ که در قسمت تصحیح این اثراز نگاه شیوه نگارش معیاری مؤلف را یاری و کمک رسانیده اند ، قلباً قدر دانی نموده موفقیتهای روز افزون شان را از بارگاه ایزد منان آروز مندم. و نیز از اعضای محترم دیپارتمنت ریاضی پوهنحی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ و خاصتاً از پوهنیار محمد اصغر انوری ،عمران خان عطائی که در بخش تایپ و جمشید شهزاد در بخش صفحه آرائی کمک و یاری نموده اند سپاسگذاری مینمائیم.

پوهنوال سید یوسف مانووال

پیشگفتار

سپاس فراوان از پروردگار توانا که توفیق تألیف اساسات هندسه ترسیمی مسطح برای بنده عنایت فرمود، که از سالهای پیش نیاز مبرم به تألیف چنین کتاب در این پو هنحی احساس میشد.
هندسه به عنوان ابزاری برای درک وتوصیف فضایی که ما در آن قرار گرفته ایم، شهودی ترین و واقعی ترین قسمت ریاضی میباشد.
دانشمندان هندسه را علم شناخت دنیایی که درآن زنده گی میکنیم، تلقی مینمایند.
به دلیل جنبه چندگانه هندسه ، ریاضیدانان جهان به اتفاق نظر آغازآموزش هندسه از سالهای کودکی وادامه آنرا به شکل متناسب درتمام طول برنامه درسی ریاضی ضروری میدانند.
در کشور عزیزما، دروس هندسه جزء نصاب درسی همه صنوف مکاتب وپوهنتونها میباشد، که علاقمندی جوانان با آموزش ریاضیات واز جمله به هندسه زیاد هستند تجارب نشان میدهند که رسم شکل های هندسی یا ساختمان های هندسی عنصر اصلی آموزش ریاضی است، زیرا توسط رسم شکل های هندسی بخشهای زیادی از هندسه مانند: تعریف ها ، قضیه ها ، روابط متری ، مکان های هندسی ، تبدیل های هندسی وغیره مورد استفاده قرار میگرند، شکل ها نه تنها موضوع بحث مسایل هندسی را تشکیل میدهند ، بلکه همچنان کمک هائی به حل هرگونه مسایل نیز میکنند که در ابتدا هیچ رابطۀ به هندسه ندارد، یعنی علمیکه به کمک آنها میتوان بین نقطه ،خط ، سطح وحجم را بطۀ بر قرار کرد.
هندسه ترسیمی است، که به حل بسیاری از مشکلات میتوان فایق آمد، از طرف دیگر ترسیمات شکل ها هندسی وسیله جالب در گسترش درک مفاهیم هندسی میباشند که تصورات ذهنی را تجسم میبخشد.
ویافتن یک نمایش هندسی روش حل برای یک مسأله غیر هندسی برداشتن گام مهم به جانب حل آن مسأله است که بدون شک رسیدن به این اهداف فراگیری هندسه ترسیمی مسطح که درتمام ساحات زنده گی انسانها مانند: مهندس ساختمانها ، هنرهای زیبا وغیره رول رهنمودی را داراست. ازآنجای که پوهنحی های تعلیم وتربیه پوهنتونها برای مکاتب وموسسات تحصیلات عالی دررشته های مختلف علوم مانند: انجنیری ، ریاضی ، فزیک ، کیمیا ، اقتصاد ، آرت ، زراعت وصنایع وغیره معلمان واستادان را تربیه می نمایند . به سبب آن که، آنها درترسیم شکل های هندسی آنطوریکه لازم است آشنائی ودسترسی کامل پیدا کنند، از این لحاظ دررشته های اختصاصی ریاضی ، ریاضی وفزیک که همیشه سروکار با هندسه دارند، به فراگیر آن لازم و ضروری پنداشته میشود .
درصنوف سوم سمتر پنجم تدریس مضمون هندسه ترسیمی مسطح از طرف مقامات صالحه لازم پنداشته شده است وتدریس مضمون هندسه ترسیمی یک جزء حتمی آموزش در دوره تحصیلی لسانس میباشد، ولی کتابی که درآن قواعد و قضایای هندسه ترسیمی مسطح با تاکید دقت موضوع مطرح شده باشد، بسیار

کم و اندک است بنابراین دیپارتمنت ریاضیات ، پوهنخی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ برای اینجانب وظیفه سپرد تا به تألیف کتابی تحت عنوان (اساسات هندسه ترسیمی مسطح) مطابق مفردات موجوده که ضرورت مبرم دپیارتمنت ریاضی است، جهت ترفیع علمی به رتبه علمی پوهنوال اقدام نمایم .خوشبختانه موضوع از طرف وزارت محترم تحصیلات عالی منظور گردیده ودرمدت زمان تعیین شده کتاب هذا تحت عنوان (اساسات هندسه ترسمی مسطح) تکمیل که در تألیف، این کتاب کوشش زیاد به عمل آمد تا تمام اصول وموازین ملی وبین المللی تالیف ومطابق مفردات داده شده، موضوعات به زبان ساده عام فهم تحریر وتسلسل منطقی در آن رعایت گردیده است.

این کتاب برای استادان و محصلان پوهنتون ها وشاگردان مکاتب ، مراکز آموزشی اعم از دولتی و خصوصی بسیار مفید و با اهمیت می باشد .

این کتاب برای محصلانی که بطور وسیع در قابلیت های ریاضی شان با استداد هستند تهیه شده و بسیاری از مطالب آن مناسب آنهائی است که زمینه های متوسط ، ضعیف در هندسه دارند، یعنی کتاب هم برای محصلان ضعیف و هم برای محصلان کنج کاو ، و هم برای آنهائی که با هنرهای آزاد ریاضیات علاقه دارند و مناسب آنهائی که سودای معلم ریاضی شدن را در سر میپروارند آموزنده است .

در اخر هرفصل این کتاب ، جهت بلند بردن مهارت های مسلکی محصلان و علاقمندان مسأیل ذکر شده ، تحریر گردیده است که به حل مسأیل آن استاد میتوانند مطمئین گردد، که مفاهم اساسی درک شده است و فصول گوناگونی این کتاب به نوع وسیع و مستقل و موضوعات داخل هر فصل مطابق علاقمندان میباشد. کتابی را که پیش روی مطالعه می نمایید با هر نوع مشکلات وزحمات ، به پایه اکمال رسانیده و در آخربا ذکر چند مطلب از خوانده گان و علاقه مندان تقاضا مندم ، که اگر انتقادات و پیشنهاداتی جهت بهبود چاپ بعدی آن داشته باشند با جبین باز پذیرفته خواهد شد.

پوهنوال سید یوسف مانووال

فهرست مطالب

صفحه | عناوین

فصل سوم

ترسیم مضلع های منظم

فصل چهارم

ترسیم دوایر

عناوین	صفحه

فصل هفتم

روش های حل مسئله های هندسی به وسیله ترسیم های هندسی

فصل هشتم

کاربرد ترسیم های اشکال هندسی

فصل نهم

ترسیم های هندسی پیشرفته اقلیدس

فصل دهم

ترسیم نقاط و خطوط در فضای سه بعدی

بخش رهنمائی و حل مسائل

فهرست اشکال

شکل **صفحه**

اشکال فصل اول

فهرست اشکال

اشکال فصل دوم

فهرست اشکال

اشکال فصل سوم

فهرست اشکال

شکل	صفحه

فهرست اشکال

فهرست اشکال

شکل	صفحه

اشکال فصل چهارم

فهرست اشکال

اشکال فصل پنجم

اشکال فصل ششم

فهرست اشکال

فهرست اشکال

فهرست اشکال

فهرست اشکال

اشکال فصل هفتم

فهرست اشکال

اشکال فصل هشتم

فهرست اشکال

اشکال فصل نهم

اشکال فصل دهم

فهرست اشکال

فهرست اشکال و حل مسائل

فهرست اشکال

فهرست اشکال

اشکال ضمیمه 1

فهرست اشکال

فهرست اشکال

شکل	صفحه

فهرست اشکال

فهرست اشکال

شکل	صفحه

اشکال ضمیمه دوم

مقدمه

هندسه ترسیمی مسطح عبارت از هندسه است که نمایش ،ترتیب،ترسیم اشکال هندسی مانند مثلث ، مربع، مستطیل، لوزی،معین، ذوذنقه، دایره،کثیرالاضلاع وغیره را به روی کاغذ نشان میدهد.

اساسات هندسه ترسیمی مسطح ویا علم اشکال، یک رکن اساسی ریاضیات است قواعد و دساتیرعمدهٔ آن عموماً بر قضایای کلاسیک هندسه اقلیدس استوار میباشند.

ضرب المثل های چون " شنیدن کی بود مانند دیدن" و"یک تصویر با ارزش ترا ست ازهزار کلمه" از سابق رواج داشته، احتمالاً بسیاری از مردم با این قسم نظریات موافق اند، اما کاربرد بعضی از ضرب المثل ها برای همه آشکارنیست.

یک شکل یا تصویردر گفتگو ها وارتباط های کلامی نقش مؤثری دارد. و می تواند ارتباط بین مکان ها وموقعیت های دور ازهم را به ساده گی وروشنی نشان دهد. نقاشان، انجنیران، مهندسان، طراحان، طنزنویسان، نویسنده گان، شاعران... میناتوران وصنعت گران و غیره... افکار خود را با اشکال وتصاویر، طرح ها ونقاشی ها قابل مشاهد ه می سازند. درریاضیات نیز شکلها وتصویر های کلی می توانند که به حل مسایل موردنظر کمک کنند . زیرا رسم شکل های هندسی یا ساختمان های هندسی را بسیاری از ریاضی دانان، عنصر اصلی آموزش ریاضی می دانند که توسط رسم شکل های هندسی ، بخش های زیادی مانند،تعریف ها، قضیه ها، رابطه های متری، مکانهای هندسی، تبدیل های هندسی و... مورد استفاده قرارمی گیرد .

ترسیم اشکال هندسی مسطح وسیلهٔ جالب در گسترش درک مفاهم هندسی و روش های ترسیم اشیای مادی که به گونه گسترده جهان بشری را فرا گرفته است، به هندسه ترسیمی مسطح بستگی دارد .

و متکی بر قواعد دساتیر و قضایایی کلاسیک هندسه اقلیدس میباشد که تصوارت و خیالات را به حقیقت مبدل میسازد .

ترسم شکل های هندسی در تقویت قوه تفکر و شگوفایی استعداد ها نقش مهمی بر عهده دارند .

هندسه ترسیمی مسطح منشأ عمده ثروت کشف است که به نوبه خود نیروی آفرینش ریاضیات میباشد، و بسیاری از ریاضیدانان بصورت طرح های هندسی فکر می‌کنند. ریاضیدانان و دانشمندان که به کشفیات بزرگی نایل گردیده اند و نظریه های آن‌ها تحولی درجهان علم به وجود آورده است، از اثراین

این است که هندسه در آغاز کار درذهن و اندیشه آن‌ها جا داشته و باعث شگوفای استعداد ها و پیشرفت کارشان گردیده است، می باشد.

جورج پولیا ۱۹۸۵ میگوید(اگر تعلیم و تربیت عمومی درسدد ارزانی داشتن اندیشه نظام منطق به دانش جویان است ، باید در آن مقام خاص برای استدلال های هندسی در نظر گرفته شود .حتی استدلال های ساده ممکن است از دید گاه هوش افزایی سودمند واقع شوند). هندسه با اشیأ و پدیده های جهان اطراف ما نیز رابطه تنگا تنگ دارد، که بسیاری ها از این ارتباط بی خبر اند و نمیدانند که چگونه در عمل از هندسه استفاده کرد . در حالی که هندسه نه تنها مدل های از فضای فزیکی را میسازد ، بلکه برای هر بخش که مفهوم و خاصیت آن قالب هندسی داشته باشند مودل تهیه می‌کنند .و می‌توان هندسه را تمثیل برای یاد دادن و یادگرفتن استدلال استنتاجی است ،یاد کرد .

موضوع اصلی کتاب هم چنان که عنوان آن دلالت می‌کند، هندسه ترسیمی مسطح میباشد، که رابطه بین مهارت درهندسه و مهارت در روش حل مسایل را خاطر نشان کرده است .

ازاینکه ما درهندسه ترسیمی مسطح به اشکال وترسیمات سروکار داریم، پس لازم است تا از یک سلسله مفاهیم اولیه هندسی معلومات داشته باشیم، زیراکه مفاهیم اولیه در حقیقت پایه های اساسی هندسه ترسیمی مسطح میباشند.

علم هندسه ترسیمی مسطح مانند همه علوم دیگراز مشاهده وتجربه ناشی شده، وارتباط مستقیم با احتیاجات اقتصادی بشر دارد ومتکی براسلوب، دساتیر وقواعد جداگانه میباشد .

کلمه هندسه یک کلمه یونانی است، به معنی (اندازه زمین) تاریخ هندسه به سده ها ی قبل از میلاد میرسد. ملل قدیم مشرق زمین مصریها وبابلیها اطلاعات زیادی در باره بعضی مطالب مربوط به هندسه داشته اند، آن‌ها این اطلاعات را مستقیماً از تجربه ومواردی که احتیاج به‌اندازه گیری قطعات زمین، ساختن انواع ظروف خانه ها ،ساختمانها ومطالعه ستاره گان داشته اند به دست آورده اند. بعد ها این مقدمات دانش هندسه از این ملل به یونان منتقل شد. اولین ریاضی دانان یونانی که درحقیقت آن‌ها را باید شاگردان عالمان مشرق زمین دانست، حتی پیش از سده ۶ از میلاد به یک سلسله خواص ساده اشکال هندسی آشنا بوده اند. در این وقت این دانشمندان ابتدا خواص ساده اشکال هندسی را مستقیماً از تجربه بدست میآوردنند وسپس آن‌ها خواص پیچیده ترمیگرفتند و وسایلی مانند خط کش نا مدرج و پرکار درانجام دادن ترسیمات اشکال به افلاطون فیلسوف بزرگ یونانی که حدود یک قرن پیش از اقلیدس از (۴۲۷ تا ۳۷۴) قبل از میلاد میزیست نسبت داده‌شده است افلاطون درترسیم دایره از پرکال و خط کش نامدرج کار میگرفت، اندازه اش به علت این که نمیتوانست برای رسم دایره به همان شعاع حرکت کند از

بین میرفت، تا اینکه اقلیدس در سده سوم قبل از میلاد میزیست، بسیاری از این خواص را جمع آوری نمود. خدمت اقلیدس هم همین است که برای نخستین بار تمام خواص را در باره شکلهای هندسی تا زمانی او کشف کرده بودند در کتاب خود بنام (مقدمات)، جمع آوری وتحت نظم معین درآورد، نخستین کسیکه هندسه را به طریقه منطقی منظم کرد اقلیدس بود، او برای اثبات یک حکم ریاضی مشاهدات وتجربیات روزانه را کافی نمیدانست، بلکه استدلال های منطقی را هم لازم میدانست. هندسه درمیان علوم ریاضیات وضع خاص دارد این خصوصیات دراینجا که قضایای وخواص اشکال که درهندسه مورد مطالعه قرار میگیردند، تنها از راه یک سلسله قضاوت اثبات نمیشود، بلکه دربسیاری موارد از راه تأمل ومشاهده مستقیم بدست میآیند. مثلاً: تساوی زوایای مجاور به قاعده مثلث متساوی الساقین ویا تساوی دومثلث که دارای اضلاع برابر باشندو بسیار ازخواص دیگر شکل های مستقیم از راه مشاهده نتیجه میشود. روشن بودن مطلب هندسی کمک می‌کند تا بسیاری از مفاهیم هندسی قبل ازآنکه دقیقاً اثبات شوند راکشف کنیم. مشاهده مستقیم شکل های هندسی دریونان قدیم بیش از دوهزار سال قبل یکی از راه های اساسی برای شناخت این ویا آن خاصیت هندسی شکلها بود، یونانی های قدیم هندسه را از مصر گرفتند وآنها مطالب مجاز وپراگنده ای که برای مصریها روشن بود جمع ومرتب کردند و آن‌ها را قضاوت واستدلال شکل دادند وتنها از این راه بود که توانستند خواص جدید برای اشکال هندسی کشف کنند. درحدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد، اقلیدس هندسه دان یونانی درکتاب خود بنام (مقدمات) برای نخستین بار طرح اساسی برای هندسه ریخت او کوشش کرد اصطلاحات بظاهر واضح را با دقت شرح دهد ومفاهیمی را که معرف ساده ترین شکل های هندسی هستند مانندنقطه ، خط ، سطح ورابطه متقابل بین آن‌ها، یعنی آنچه را که تا آنزمان خود بخود معلوم شمرده میشدرا تحت نظم درآورد.اقلیدس برپایه این توصیف توانست، چنان هندسهٔ کامل ومنطقی بسازد که تا امروز قدرت نسبی خود را حفظ کرده است .

کلمه ترسیم حداقل به سه مفهوم بکار میرود:

۱- توصیف مسئله هندسی مورد حل .
۲- توصیف جریان حل مسئله .
۳- توصیف رسم تکمیل شده که ازحل مسئله نتیجه میشوند.

دودلیل عمده برای توجه به شکل ها در حل مسئله ها وجود دارد :

۱- اگرمسئله مایک مسئله هندسی بوده باشد،باید برای آن یک شکل درنظربگیریم. این شکل ممکن است درذهن وتخیل ما باشد. یا بر روی یک ورق کاغذ ترسیم شده باشد، ... ولی اگربخواهیم همه جزئیات را یکی پیش ازدیگری آزمایش کنیم، نمی توانیم همه آن‌ها را همزمان درخاطر نگاه داریم . بلکه ملاحظه آن پس ازآن که بر روی کاغذ ترسیم شده باشد ، امکان پذیر است . یک کمیت جزئی که

درتخیل ما نقش بسته باشد ممکن است فراموش شود، ولی اگربر روی کاغذ بیاید باقی می ماند. وچون به آن باز گردیم مارا به یاد ملاحظات قبلی می اندازد وازبعضی ناراحتی هایی که در امربه یاد آوردن ملاحظه قبلی حاصل می آید، ما را خلاص می کند.

۲- به صورت خاص استفاده ازشکل هارا درمسایل ساختمان های هندسی (ترسیم هندسی) مورد بحث قرارمیدهیم .

ملاحظه تفصیلی چنین مسئله رابا رسم کردن شکل مشتمل بر مجهول وفرضیه ها آغاز میکنیم، که در آن همه این عامل ها بدان سان که درصورت مسئله بیان شده، جمع آمده است برای آنکه مسئله را به صورت مشخص وجداگانه بفهمیم لازم است که هر فرضیه وهر جزء از شرط را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم. سپس همه اجزاء را دوباره به هم می پیوندیم. وشرط را به صورت یک کل ملاحظه می کنیم (تجزیه وترکیب مجدد) ودرآن می کوشیم که پیوند های گوناگون را که مستلزم آنهاست، همزمان درنظرمیگیریم وآنها را ببینیم . به ندرت امکان آن است که بدون رسم کردن یک شکل بر روی کاغذ بتوانیم همهٔ این جزئیات را از هم جدا سازیم وبا ر دیگر آن‌ها را با هم ترکیب کنیم اکنون به بحث درباره نکته های مربوط به رسم عملی شکلها می پردازیم:

الف: آیا شکل ها رابابد درست رسم کنیم یا تقریبی ، واین کار با اسباب های ترسیم صورت می گیرد یا با دست، بدون اسباب؟

هردوگونه شکل مزایایی مخصوص به خود دارند!

ب: شکل کشیده شده نباید هیچ خصوصیت نا خواسته ای را داشته باشد ، اجزای مختلف شکل نباید از ارتباط های ظاهری خبر دهند که در مسئله خواسته شده باشند.

شکل های هندسی وگراف ها درهمه علوم نه تنها درفزیک،ریاضی،کیمیا،انجینری ،مهندسی... وغیره کاربرددارددبلکه درعلم اقتصادوحتی درروانشناسی وغیره علوم اجتماعی نیزبکارمی رود. با کاربردیک نمایش هندسی مناسب در آن می کوشیم که همه جزئیات رابه زبان شکلها بیان کنیم وهرگونه مسئله رابه شکل مسئله های هندسه آوریم .بدین ترتیب ،حتی اگر مسئله شمایک مسئله هندسی نیست، می توانید کوشش کنید تابرای آن یک شکل بکشید.یافتن یک نمایش هندسی روشن برای یک مسئله غیرهندسی برداشتن گام مهم به جانب حل آن مسئله است ودرنتیجه می توان گفت که ترسیم یک شکل هندسی روابط معین را بین خطوط ،دوایروغیره نشان می دهد وازلحاظ فلسفی ،ترسیم هارامی توان به صورت روشهای حل مسائل هندسی خاص مطابق بامجموعه ثابتی ازقواعدتلقی نمود.

این کتاب که تحت عنوان (اساسات هندسه ترسیمی مسطح) تألیف گردیده است، دارای ده فصل بوده که در فصل اول اصول اقلیدس ، مفاهیم اولیه هندسه، اشکال ترسیمات اساسی اقلیدس، اکسییوم های ترسیم توسط پرکار و خط کش نامدرج، ابزار ها برای ترسیم اشکال هندسی مکان‌های هندسی، در فصل دوم ترسیم قطعه خط مساوی به یک قطعه خط داده‌شده، ترسیم ناصف عمودی یک خط، تنصیف کردن یک قطعه خط، ترسیم خط عمود بریک قطعه خط، ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه واقع در خارج آن خط ترسیم ناصف الزاویه یک زاویه، ترسیم زاویه برابر به یک زاویه داده‌شده، ترسیم یک خط موازی با یک خط داده‌شده از یک نقطه خارج آن، ترسیم خط مفروض از نقطه روی آن خط، ترسیم دو خط موازی، تقسیم قطعه خط به پنج حصه مساوی، تقسیم یک قطعه خط به nحصه مساوی، تقسیم یک قطعه خط به نسبت معین k، اعداد ترسیم پذیر، در فصل سوم ترسیم مثلث ها، ترسیم چهار ضلعی های منظم، ترسیم پنج ضلعی منظم، ترسیم شش ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع، ترسیم هفت ضلعی منظم ، ترسیم هشت ضلعی منظم با معلوم بودن مربع ،ترسیم نه ضلعی منظم، ترسیم ده ضلعی منظم، ترسیم یازده ضلعی منظم، ترسیم دوازده ضلعی منظم، ترسیم سیزده ضلعی منظم، ترسیم پانزده ضلعی منظم محاط به دایره به شعاع Rترسیم هفده ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R، در فصل جهارم معرفی دایره ، ترسیم دایره ، ترسیم مرکز دایره،مماس ها، مماس های مشترک دو دایره، ترسیم دوایر مماسی، تقسیم دایر به چهار و هشت قسمت مساوی، تقسیم دایره به شش قسمت مساوی، تقسیم دایره به دوازده قسمت مساوی، تقسیم دایره به سه وپنج قسمت مساوی، تقسیم دایره به هفت قسمت مساوی، ترسیم وسط های هندسی بین دوقطعته خط، در فصل پنجم معرفی مضلعات محاطی و محیطی در دایره،ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محاط در یک دایره ، ترسیم مربع محاط دریک دایره، ترسیم دایره محیطی بر یک مثلث، ترسیم دایره محاطی در مثلث، ترسیم شش ضلعی منظم محاط در یک دایره ، ترسیم شش ضلعی منظم محیطی در یک دایره ، ترسیم دوازده ضلعی منضم محاط در دایره، در فصل ششم تبدیل های هندسی،تعریف تبدیل، انتقال، دوران، تناظر مرکزی، تناظر محوری، تجانس یا تشابه مرکز دار، انعکاس، در فصل هفتم روش های حل مسئله‌های هندسی به وسیله ترسم هایی هندسی، روش استفاده از قضایای معروف، روش سازنده، روش تحلیلی، ترسیم‌های هندسی به کمک تبدیل های هندسی، ترسیم‌های هندسی با استفاده از مکان‌های هندسی، ترسیم‌های هندسی با استفاده از شکل های کمکی، ترسیم‌های هندسی با استفاده از روش های تشابه، ترسیم‌های هندسی با قاط کردن کاغذ، ترسیم تنها با یک وسیله، در فصل هشتم کار برد ترسیم‌های اشکال هندسی، اثبات مطابقت های الجبری، حل هندسی معادله های الجبری، روش تناسب ها، روش اضافه کردن مساحت ها، روش خیام برای حل هندسی معادله ای درجه سوم ، حل هندسی غیر مساوات، استفاده از رسم شکل های هندسی برای اثبات قضیه ها، استفاده از رسم شکل های هندسی باری پیدا کردن خاصیت های جدید، تبدیل مساحت ها، در فصل نهم ترسیم‌های پیشرفته اقلیدس، استفاده از قسمت های

تحلیلی یک مسئله، ترسیمات و اثبات های بدون امکان، ترسیم تضعیف حجم مکعب، ترسیم تثلیث هر زاویه، ترسیم تربیع در دایره، ودر فصل دهم ترسیم نقاط و خطوط در فضای سه بعدی، فضای سه بعدی، تعین نقاط در فضای سه بعدی، ترسیم نقطه در مستوی ها ارتسام V , H ، ترسیم نقطه درسیستم مستوی های ارتسام W,V, H معلومات مختصر در باره طریقه های اساسی ارتسام ومرتسمات قایم نقطه.

بر علاوه در اخیر هر فصل خلاصه هر فصل کتاب نامه و مسائل مربوط هر فصل تحریر گردیده است. جهت بهتر روشن شدن موضوعات در اخیر این کتاب به صورت مجموع رهنمایی و حل مسائل هر فصل صورت گرفته است ونیز برای علاقه مندان ضمایم به صورت خلاصه و دلچسپ تحریر گردیده است که به تکمیل این کتاب به رضای خداوند ج مشکلات درسی مضمون هندسه ترسیمی حل و هم علاقه مندان پوهنتون های دیگر و معلمان مکاتب منحیث مآخذ و ازدیاد معلومات از آن استفاده خوبی نموده میتوانند.

فصل اول

اساسات هندسه ترسیمی مسطح

علم هندسه ترسیمی مسطح مانند همه علوم دیگراز مشاهده وتجربه ناشی شده، وارتباط مستقیم با احتیاجات اقتصادی بشر دارد ومتکی براسلوب، دساتیر وقواعد جداگانه میباشد.

ازاینکه ما درهندسه ترسیمی مسطح به اشکال وترسیمات سروکار داریم، پس لازم است تا از یک سلسله مفاهیم اولیه هندسی اشکال ترسیمات اساسی اقلیدس، اکسیوم های ترسیم توسط پرکار و خط کش نامدرج، مکان‌های هندسی، ابزار ها برای ترسیم اشکال هندسی معلومات داشته باشیم، زیراکه مفاهیم اولیه در حقیقت پایه های اساسی هندسه ترسیمی مسطیلح میباشند. در این فصل هرکدام آنهارا مطالعه مینمائیم.

۱.۱.اصول اقلیدس

اقلیدس همه حقایق هندسی را به سه دسته تقسیم می کند :

اصول موضوعه ؛ اصول متعارفه وقضایا، دوحالت اول به حقایق ساده اطلاق میشوند که هیچ گونه شکی در صحت آن‌ها وجود نداشته ومستقیماً از مشاهده نتیجه میشود بنابر این اصول می توانستند به عنوان اولین احکام هندسی محسوب شوند. وبرای نتیجه گیری منطقی سایر حقایق هندسی مورد استفاده قرار گیرند

نوع سوم حقایق، یعنی قضایا به احکامی اطلاق میشوند که احتیاج به اثبات داشتند، یعنی میبایست با کمک احکام دونوع اول و از راه قضاوت های منطقی وبهم پیوسته ، آن‌ها را نتیجه گرفت .

مفاهیم هندسه ترسیمی مسطح یا علم شکلها برمبنای دستگاه های اکسیوماتیک اقلیدسی استوار میباشد. واصول موضوعه و متعارفی اقلیدسی که درترسیم شکل های هندسی رول مهم را بازی می کند، عبارتند از :

اصول موضوعه و اصول متعارفه

اصول موضوعه

- از یک نقطه می‌توان خط مستقیم برهر نقطه دیگر ترسیم کرد.
- هرخط مستقیم را می‌توان به امتداد خودش تا بی نهایت امتداد داد.
- از هر نقطه بحیث مرکز وبا شعاع برابر قطعه خط می‌توان یک دایره را ترسیم کرد .
- تمام زاویای قایمه باهم مساوی اند.

- اگر مستقیم قاطع دو مستقیم را طوری قطعه نمایند، که در آن مجموعه زوایای یکطرفه داخلی کمتر از دوقایمه باشند، در آنصورت دو خط در همان طرف همدیگر را قطع مینمایند. ودارای خواص ذیل میباشد

  - با ابزار ومفاهیم دستگاه قابل بیان باشد .
  - ریشه تجربی داشته باشد .

اصول متعارفی

- دومقدار مساوی با مقدار سوم باهم مساوی اند.
- اگر به دو مقدار مساوی مقادیر مساوی بیا فزاییم، حاصل جمع ها با هم مساوی اند.
- اگر از دومقدار مساوی مقادر مساوی را کم کنیم باقی مانده هابا هم مساوی اند.
- دوچیز قابل انطباق باهم برابر اند .
- کل از جز بزرگتر است .

هردو اصول موضوعه ومتعارفی پایه های اساسی برای ساختمان هندسه ترسمی مسطح میباشند .

۲.۱. مفاهیم اولیه هندسه

در هندسه مفاهیم چون نقطه ؛ خط ،مستوی وفضابه عنوان مفاهیم اساسی در نظر گرفته میشود، که اساس هندسه میباشد وهرمفهوم دیگر بااستفاده از آن‌ها قابل تعریف میباشد. حالا به بررسی هریکی آن‌ها میپردازیم.

اقلیدس قبل از هرچیز به تعریف دقیق مفاهیم اساسی هندسه پرداخت که در زیر تعریف شده اند .

نقطه : اساسی ترین عنصر درهندسه که فقط موقیعت دارد، اما طول وعرض وضخامت ندارد، نقطه میباشد نقطه توسط یک خال نشان داده‌شده میتواند ،نقطه توسط حروف بزرگ انگلیسی A , B , C و .... ارایه میشود. سایر مفاهیم وعناصر دیگر چون خط مستوی و غیره به وسیله نقطه به وجود میآیند، نقطه عنصر بدون بعد میباشد، یعنی دارای طول وعرض ارتفاع نمیباشد. به عباره دیگر، نقطه را عنصر صفر بعدی میدانیم .

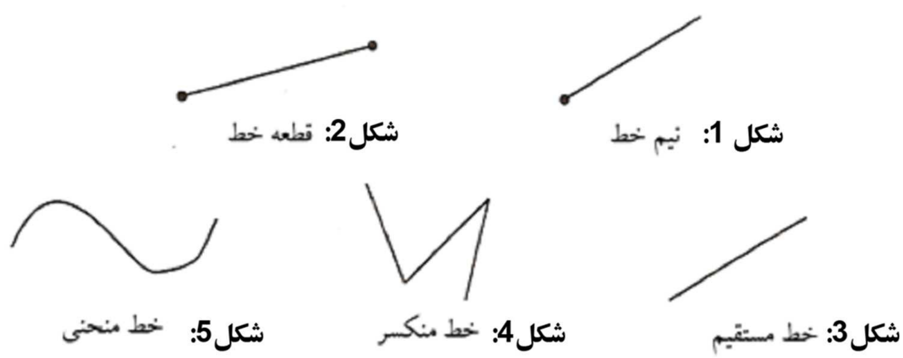
خط : خط طولی است که دارای عرض وضخامت نمی باشد. خط از حرکت نقطه ایجاد میگردد خط میسری از نقاط متمادی است که بوسیله نوک قلم یا تباشیر ایجاد شده میتوانند. یک خط بوسیله دوحرف بزرگ ویا یک حرف کوچک نشان داده میشود، مثلاً ،به AB یا a نشان میدهیم(۱۷، صص۳-۴).

اقسام خط: یک خط از حیث استقامت، اشکال مستقیم ،منحنی ویا ترکیبی از آن‌ها را دارد.

خط مستقیم: از حرکت نقطه بدون اینکه جهت آن تغییر نماید بوجود میآید خط مستقیم بطورنا متناهی در دو جهت امتداد دارد. خط مستقیم بین دونقطه عبارت از کوتاه ترین مسافه بین آنهاست محل تقاطع دو خط مستقیم عبارت از یک نقطه است، خط مستقیم را مختصراً بنام خط نیز یاد می‌کنند .

خط منکسر: از ترکیب خطوط مستقیم ایجاد میگردد، طوری که به یک استقامت نباشد، مانند دندانهای اره ، کناره برگ درخت وغیره ...

خط منحنی: از حرکت نقطه ایکه جهت آن طوری متمادی تغییر کند بوجود میآید مانند، هلال ، ابرو وغیره . انواع خطوط فوق الذکرقرارذیل نشان داده‌شده اند .



سطح: سطح آن قسمت از جسمی فزیکی است که آنرا از فضا جدا مسیازد، دارای طول وعرض بوده ولی ضخامت ندارد، مانند سطح آب ، سطح میز وغیره ...

سطح مستوی : مستوی یک مفهوم ناتعریف شده درهندسه است. مستوی یک سطح صاف میباشد، مانند سطح آب وسطح دیوار مستوی حدود ندارد ومعمولاً درشکل های چهار ضلعی توسط سه حرف ویک حرف کلان نشان داده میشود، مانند مستوی R, S, T یا مستوی X (۲۸، صص۲، ۳ و۵).

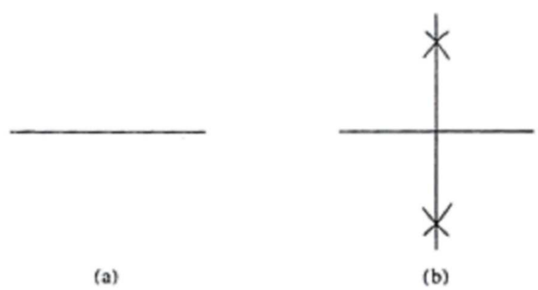
شکل ۶ : سطح مستوی

همهٔ این تعریف ها این مفهوم را میرسانند که مفاهیم نقطه خط وغیره تنها بیان یک نمایش ظاهری نیستند، بلکه درعین حال مفاهیمی را بیان می‌کنند با این اتکا بر آن‌ها می‌توان نتایج منطقی بعدی را بیان کرد. اگر چه این تعاریف از نظر علوم امروزی کافی نیست، ولی مفاهیم علمی آن اولین قدم درراه تشکیل ونظم مفاهیم هندسی بشمار میرود این تعریف ها را باید نقطه شروع همه کار های بعدی درهندسه دانست که خود بخود راه تکامل بعدی را معیین می‌کنند.

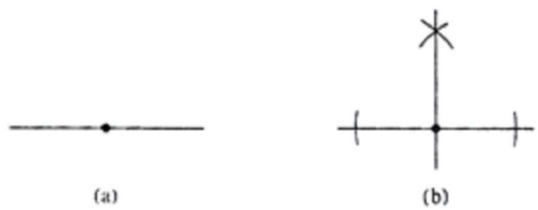
۳.۱. اشکال ترسیمات اساسی اقلیدس

انتقال قطعه خط ، تنصیف قطعه خط ، رسم عمود بر یک قطعه خط از نقطه معین واقع برآن، تنصیف زاویه ، رسم زاویه مساوی بایک زاویه ،رسم عمود از یک نقطعه خارج یک خط برآن ، رسم یک مثلث با معلوم بودن یک زاویه ودوضلع آن وزاویه از آن، رسم یک مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن ،رسم مماس از یک نقطه خارج یک دایره برآن، رسم خط از نقطه به موازات خطی مفروض ازنمونه های اشکال ترسیمات اساسی اقلیدس میباشند.این موضوعات بطور مختصر ذیلاً نشان داده‌شده اند که در فصل های بعدی درمورد هرکدام آن‌ها بحث خواهد شد.

شکل7: انتقال قطعه خط

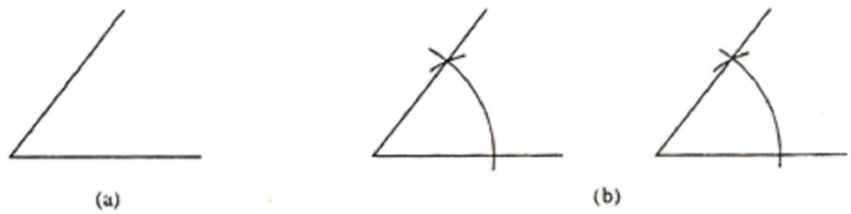


شکل8: تنصیف قطعه خط

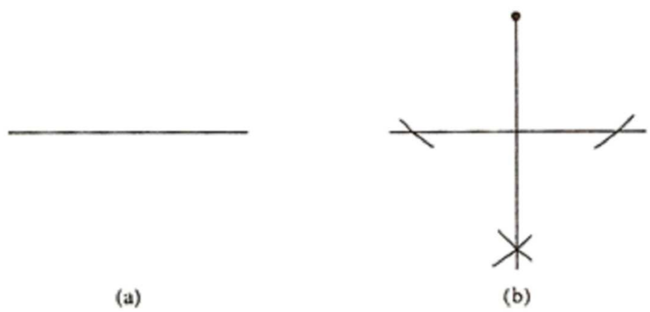


شکل9: رسم عمود بر یک خط از
نقطهٔ معینی واقع بر آن

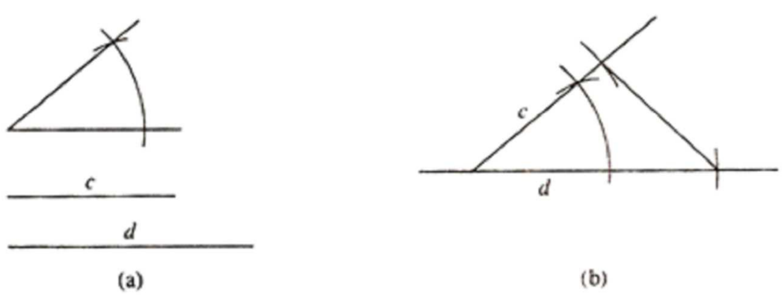
شکل10: تنصیف زاویه



شکل11: رسم زاویه‌ای مساوی با یک زاویه

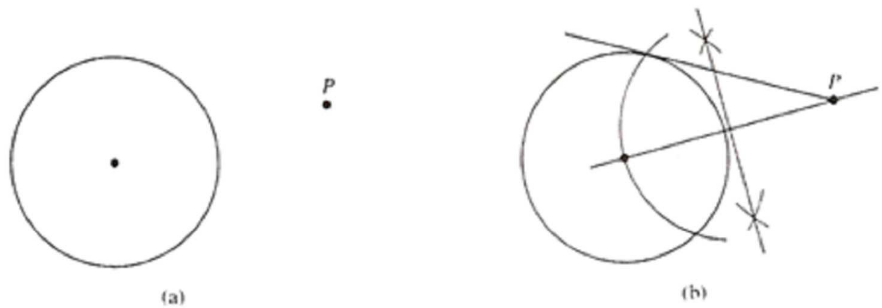


شکل12: رسم عمود از یک نقطه خارج یک خط بر آن

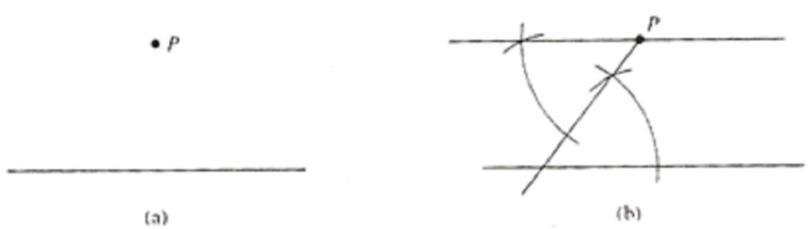


شکل13: رسم یک مثلث با معلوم بودن یک زاویه و دو ضلع آن زاویه از آن

شکل14: رسم یک مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن



شکل15: رسم مماس از یک نقطهٔ خارج یک دایره بر آن



(۲،

شکل16: رسم خطی از نقطه‌ای به موازات خطی مفروض

صص۴۵۴-۴۵۶).

۴.۱. اکسییوم های ترسیم توسط پرکار و خط کش نامدرج .برای حل یک مسئله خاصتاًرسم کردن یک شکل هندسی ،بایدفرض های مسئله یا تعدادشرط ها ی لازم برای حل مسئله به‌اندازه کافی باشد .تعدا شرط‌های لازم برای رسم بعضی شکل های هندسی به صورت زیراست :

برای تعیین یک نقطه ،دوشرط لازم است : نقطه رامی توان فصل مشترک دومکان هندسی دانست .برای تعیین یک خط ،ازلحاظ مشخص شدن آن به کمک دونقطه ،چهارشرط وازلحاظ داشتن نقطه وجهت آن سه شرط لازم است .برای تعیین یک دایره ،ازلحاظ جای مرکزواندازه شعاع آن ،سه شرط لازم است دوشرط برای تعیین مرکزویک شرط برای تعیین شعاع آن .

بایدتوجه داشت که تعدادشرطهای لازم برای تعیین یک شکل ازلحاظ اندازه باشرطهای لازم برای تعیین آن شکل ،ازنظروضعیت باهم یکسان نیست، به طورمثال ،برای رسم یک قطعه خط ازنظراندازه (که وضع قرارگرفتن آن در سطح موردنظرنیست) تنهایک شرط لازم است که همان اندازه قطعه خط می باشد .اماا گربخواهیم قطعه خط رسم کنیم که موقعیت در سطح شکل (نقطه ابتداوانتهای آن)مشخص باشد به چهارشرط نیازاست بدیهی است که بامعلوم بودن دونقطه ابتداوانتهای یک قطعه خط طول آن نیزمشخص است .برای تعیین دایره ازلحاظ اندازه تنها یک معلوم که همان اندازه شعاع دایره باشد کافی است .زیرا دراین صورت یک نقطه از سطح شکل رامرکزقرارداده وباداشتن اندازه شعاع دایره رسم می شود.اما تعیین دایره ازلحاظ موقعیت در سطح شکل ،به سه شرط نیازدارد.دوشرط برای تعیین مرکزویک شرط هم برای تعیین اندازه شعاع ،تادایره رسم شود.

چون دربیشتر مسائل ترسیمی اساس وپایه هندسه،رسم یک شکل ازلحاظ اندازه ضلعهاوزاویه هاموردنظراست، بنابراین تعدادمعلوم ها یاشرطهای راکه ازاین دیدگاه برای ترسیم مورداستفاده باشدبررسی می کنیم .

- برای رسم یک قطعه خط تنها یک معلوم که اندازه آن می باشدلازم است .

- برای رسم یک دایره تنهایک معلوم که اندازه شعاع آن می باشدلازم است .

- برای رسم یک مثلث سه شرط لازم است :

الف :اندازه های سه ضلع مثلث، ب :اندازه دو ضلع ویک زاویه مثلث.ج : اندازه دو زاویه ویک ضلع مثلث

برای رسم یک مثلث متساوی الساقین یا قایم‌الزاویه دوشرط وبرای رسم مثلث متساوی الاضلاع یک شرط کافی است.

تبصره۱: برای رسم مثلث سه جزء معلوم رانمی توان سه زاویه در نظر گرفت ، زیرا بامعلوم بودن دو زاویه زاویه سوم نیز مشخص است.

تبصره ۲: رسم مثلث بامعلوم بودن سه ضلع ودو ضلع ویک زاویه ، دو زاویه ویک ضلع حالتهای کلاسیک رسم مثلث نامیده می شود.

برای رسم مثلث، شرطهای داده‌شده می توانند بسیار متنوع وگونا گون باشند. یک چهار ضلعی (چهارضلعی محدب)با داشتن پنج شرط رسم می شودسه شرط برای رسم یک مثلث حاصل ازسه رأس چهار ضلعی ، دوشرط برای تعیین رأس چهارم

برای چهارضلعی های مانند متوازی الاضلاع، مستطیل،مربع ، لوزی، ذوذنقه، چهارضلعی محاطی تعداد شرطهای لازم کمتر از پنج شرط میباشد.

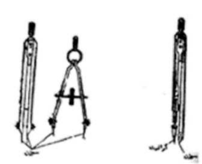
بطورمثال، برای رسم چهارضلعی محاطی وذوزنقه چهار شرط لازم است (حداقل یک ازمعلومها باید ضلع)باشد .برای رسم متوازی الاضلاع یا ذوذنقه متساوی الساقین سه شرط لازم است.(حداقل یکی ضلع باشدودومعلوم دیگر دو زاویه اصلی آن‌ها باشد). برای رسم لوزی ومستطیل دوشرط لازم است(برای مستطیل هیچکدام ازدوشرط زاویه نباشد. وبرای لوزی حداقل یک شرط ضلع باشد). برای رسم مربع یک شرط (این شرط نبایدزاویه باشد) لازم است هرچهارضلعی با رسم قطرهابه چندمثلث تجزیه می شودازین نظررسم چند ضلعی ها به کمک رسم مثلث ها انجام می شود.برای رسم پنج ضلعی شش ضلعی ودیگر چند ضلعی ها نیز می توان تعداد شرط‌ها را تعیین کرد. بدیهی است برای چند ضلعی های منظم نسبت به چند ضلعی های نامنظم شرایط کمتر لازم است(۱۰، ص ۳۲)

۵.۱. ابزارها برای ترسیم اشکال هندسی

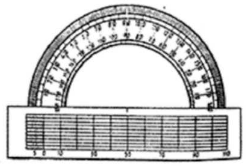
برای ترسیم اشکال هندسی ابزارمختلفی مانند: خط کش، پرکار، نقاله ، ومثلث وجود دارند. به کمک خط کش مدرج می توان خط مستقیم یاقطعه خط ها به طولهای مختلف راترسیم کرد،وطول قطعه خطها را اندازه گرفت.

به کمک پرکار می توان دایره‌های که مرکز و شعاع شان داده‌شده باشد رسم کرد. با استفاده از نقاله می توان زاویه ها را اندازه گرفت. همچنین زاویه ای به‌اندازه ،موردنظررا رسم کرد.که یک ضلع آن مشخص باشد. بااستفاده از مثلث می توان زاویه قایم رسم کرد. ابزارهای دیگر برای ترسیم مانند خط کش موازی ،پستوله ،پاینتوگراف مربع وغیره وجود دارد.

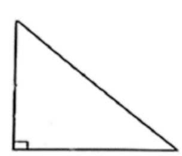
بعضی از ابزارها برای ترسیم اشکال هندسی ذیلاً نشان داده‌شده است .



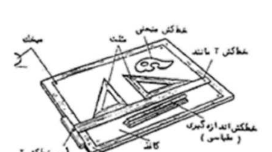
شکل17: دوسوزنه



شکل18: نقاله



شکل19: مثلث



شکل20: خط کش

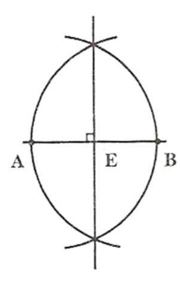
برای ترسیم شکلهای هندسی می توان از تعداد محدودی ابزار ترسیم استفاده کرد. بطور مثال می توان شکل را تنهابااستفاده از خط کش وپرکار یا با استفاده ازپرکارترسیم کرد.

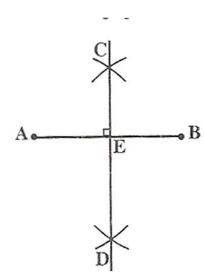
ریاضی دانان یونانی باستان برای رسم شکلهای هندسی، تنها از خط کش غیر مدرجاستفاده می کردند.ابداع این روش رابه افلاطون نسبت می دهند اماامروز خط کش غیرمدرج وپرکارراخط کش وپرکاراقلیدسی می‌نامند(۱۱، ص۳۲).

الف: خط کش اقلیدس : که آن را مختصراًخط کش (ستاره) نامید. مدرجنیست با آن صرفا می توان خط مستقیم رسم کرد که از دونقطه مفروض بگذرد، غیر از آن نمی توان عملی را با خط کش انجام داد. بطو رمثال : با آن نمی توان فاصله بین دو نقطه را اندازه گرفت اما به وسیله آن می‌توان ادعا کرد که دوقطعه خط متساوی (هم طول)اند.

ب: پرکاراقلیدس : با پرکاراقلیدس که آن را بطورمختصر پرکار نامید، فقط می توان دایره‌ای رسم کرد که مرکزآن نقطهٔ مانند (P) باشد وازنقطه مفروض دیگری مانند(Q) بگذرد. این تنها عملی است که می توان با پرکار انجام داد. بطورمثال: اگر نقطه سومی مانند(P') جداگانه از (Q) و (P)مفروض باشد نمی توان سوزن پرکار را در (p’) قرار داد ودایره‌ای به این مرکز و شعاع PQ رسم کرد. به این دلیل که پرکار اقلیدسی را پرکار فروریختنی (Collapsing compass) می گویند بدین معنی که محض حرکت دادن سوزن پرکار ازنقته ای به نقته ای دیگر پرکارفرومیریزد.

مثال از یک مسئله ترسیمی ساده حل‌شده باپرکارمدرن وبعد پرکاراقلیدسی تفاوتی درروشی راکه به کاربردتوضح می دهدندار، شکل(الف)روش آشنائی یافتن وسط یک قطعه خط با ترسیم را نشان می دهد. درین شکلAC و BC استفاده شده زیرا طول آن را می توان با استفاده از یکی ازدوسرآن به عنوان مرکز قوس مطلوب معین کرد در حال که شعاع دلخواه AC را با استفاده از پرکاراقلیدسی نمی توان باردیگربانقطه Bعنوان مرکز دایره در نظر گرفت (۲۸، ص۵).





شکل ۲۱ : تنصیف قطعه خط

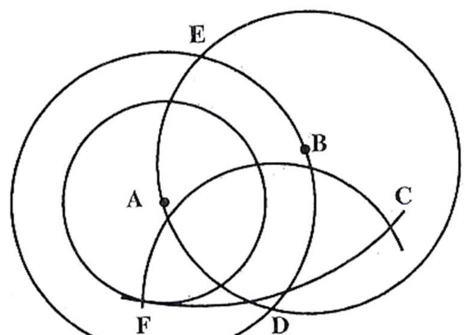
به نظرمی آید که پرکارهای مدرن امروزی قوی تر از پرکاراقلیدسی باشند. عجیب آن که این دوابزارها معادل یکدیگرند. یعنی هرترسیمی را که باپرکارامروزی می توان انجام داد با پرکاراقلیدسی نیز می توان انجام داد.

به قضیه زیرتوجه کنید:

قضیه ۱. پرکارمتعارف وپرکاراقلیدسی ازلحاظ ریاضی معادل اند.

اثبات: نشان می دهیم که یک دایره رامی توان باپرکاراقلیدسی بامعلوم بودن مرکزآن،دونقطه دیگری که طول شعاع آن را مشخص می‌کنند رسم کرد. یعنی مسئله مان ساختن دایره‌ای به مرکزAوشعاع BC است.

۱- دایره به مرکزA وعبورکننده از B رسم می‌کنیم.
۲- دایره به مرکز Bوعبورکننده از A رارسم می‌کنیم این دو دایره در DوE برخورد می کند.
۳- دایره به مرکز Eوعبورکننده از C را رسم می‌کنیم.
۴- دایره به مرکزD وعبورکننده از C را رسم می‌کنیم
۵- دایره‌های مرحله های (۳) و(۴) باردیگردر نقطه F یکدیگر را قطع می‌کنننددایره به مرکز A وشعاعAF مطلوب است.

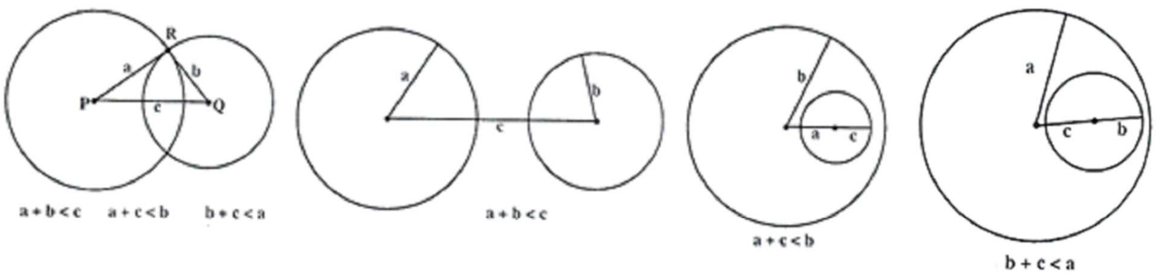


شکل۲۲ : ترسیم داویر به مرکزو شعاع معلوم

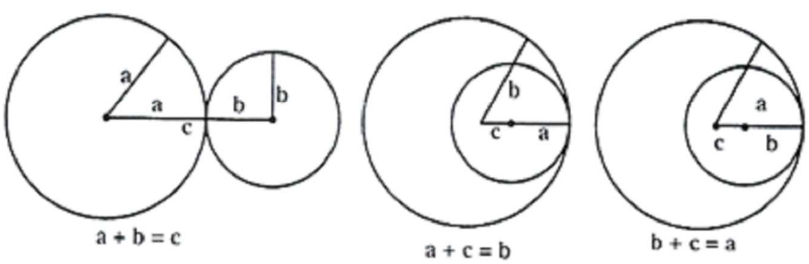
باهمه محدودیت هایی که برای خط کش وپرکار اقلیدسی ذکرشد، درزمان حاضرروش ترسم باخط کش وپرکاراز لحاظ ریاضی مورد توجه فراوان است وهنگامی که به یافتن شکلهای که بااین روش رسم می‌شوند، می پردازیم به مسئله‌های جالبی برمی خوریم . بعضی ازین مسئله ها دررسم تخنیکی ارزشی علمی دارد ونقشه کشان حرفه یی آنهارا میدانستند. به هرحال ازروش که برای رسم شکلهای هندسی استفاده کنیم ابزارهای ترسیم فزیکی ونظریه ریاضی متناظرباآنهادراختیارماست.درهرحالت نظریه ریاضی

دقیق است، ولی حاصل کار باابزارهای فزیکی تقریبی بیش نیست. برای توجیه ترسیم‌های که باخط کش وپرکارانحام می شود به قضیه ای نیاز است که چگونگی برخورد دایره‌ها را بیان کند. فرض کنید دو دایره به شعاعهای aو bداریم که فاصله مرکزهای شان cاست. اگر مانند شکل الف دایره‌ها یکدیگررا در دونقطه قطع کند هریک از اعداد aوbوcازمجموع دوعدد دیگر کوچکتر است.
اگراز سه طریق مختلف ازنابرابری مثلثی در مثلث PQR استفاده کینم این سه نابرابری به دست می آید. ولی اگر یکی ازین نابرابریها درجهت دیگرمرکزقرارداشته باشددایره‌ها یکدیگررا قطع نمی کنند.
حالت های که در هرشکل دیگرنشان داده‌شده اند اگر مجموع دوتا ازین عددها با عدد سوم برابر باشد دایره‌ها مماس می‌شوند. این وضعیت در قضیه زیرتعریف شده است.

قضیه دو دایره : دو دایره به شعاع های a و b داده‌شده اند فاصله بین مرکزهای آن‌ها c است اگر هرکدام از عدد هایa وb وc از مجموع دو عدد دیگرکوچکترباشد دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند و این در دو طرف خطی که دو مرکز را به هم وصل می کنند قرار دارد .



شکل23:قطع دوایر در دونقطه



شکل24: دوایر مماس

(۴،ص ۱۲۴).

۶.۱. مکان‌های هندسی

وقتی پره های یک هلیکوبتردرحال چرخیدن هستند نوک پره ها مجموعه نقطه‌های از فضای اطراف هلیکوبتررامشخص می کندکه دارای خصوصیت مشترک هستند. خصوصیت این نقطه‌ها آن است که همگی از محورچرخشی پره هابه یک‌فاصله اند. وچنین تعریف می نمائیم(۲۱، ص۳۱).

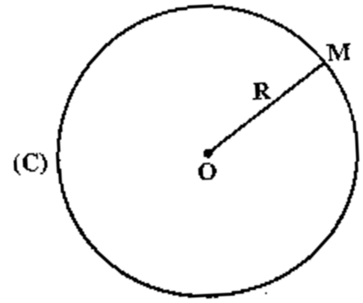
تعریف: مکان هندسی مجموعه همه نقطه‌های سطح یافضااست که دارای خصوصیت مشترک هستند، عضواین مجموعه می باشد. برای مشخص کردن مکان‌های هندسی سه مرحله ذیل بایددرنظرگرفته شود.این مرحله هاتوسط استدلال استقرأریاضی حاصل میشوند.

۱- به‌اندازه کافی نقاط راکه دارای عین خاصیت باشد

۲- این نقاط رابا هم وصل می‌کنیم تایک شکل حاصل شود

۳- مکان هندسی را تعریف نموده وبعداًهرنقطه را در مجموعه نقاط که دریافت شده اندجستجو نموده تااز صحت آن مطمن شویم

مثال۱. می خواهیم مکان هندسی نقطهٔ ای از سطح را بیابیم که از یک نقطه ثابت داده‌شده به فاصله واحدباشد. درقدم اول خصوصیت مشترک هم فاصله بیان شده پیدا می‌کنیم. این نقطه‌ها درشکل زیر نشان داده‌شده اند.



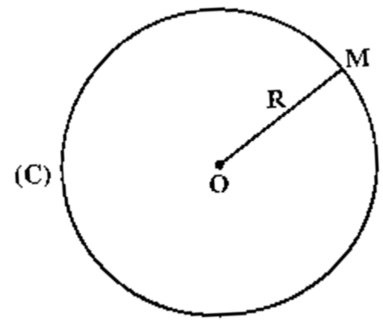
شکل ۲۵ : دایره

دوم شکل حاصل یک دایره به نظرمی رسد سوم مکان هندسی موردنظریک دایره به مرکز(O) و شعاع (R) است فاصله هر نقطه روی این دایره از مرکزآن یعنی (O) برابرواحداست. همچنین اگرفاصله نقطه مانند،M ازO برابرواحدباشد آنگاه $OM = R$ پس OM یک شعاع دایره خواهد بود درنتیجه M روی دایره است

مکان‌های هندسی، یکی ازابزارهای مهم ولازم برای ترسیم شکلهای هندسی می باشد. برای تعیین یک نقطه از دو مکان هندسی((دوشرط))، برای تعیین یک خط مستقیم اگربخواهیم بادونقطه مشخص شود، چهارمکان هندسی(چهارشرط).واگربخواهیم بایک نقطه ویک جهت مشخص شود به سه شرط نیازمندیم .

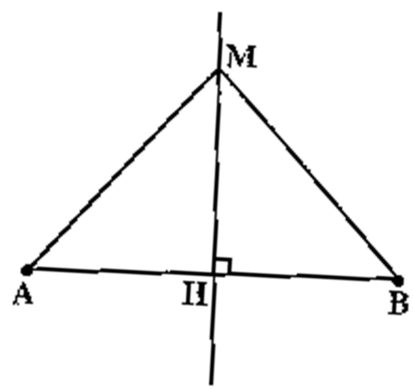
مکان‌های مهم هندسی: درینجابه معرفی برخی ازمکانهای هندسی درهندسه ترسیمی مسطح می پردازیم که درترسیم‌های هندسی کاربردبیشتر دارند.

۱- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که از نقطه ثابتی واقع در آن سطحه به فاصله ثابتی باشد یک دایره است.



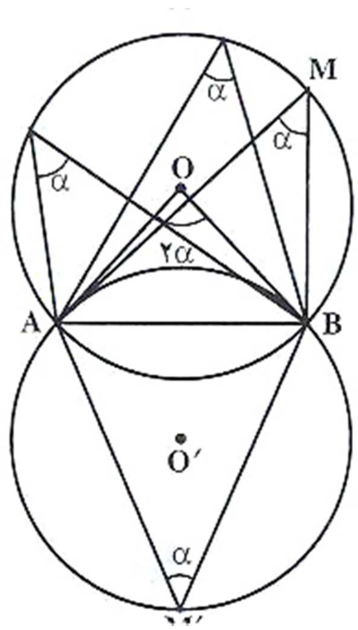
شکل ۲۶ : دایره

مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که ازدونقطه ثابت A وB واقع در آن سطح به یک‌فاصله است ناصف عمودی قطعه خط ABاست.



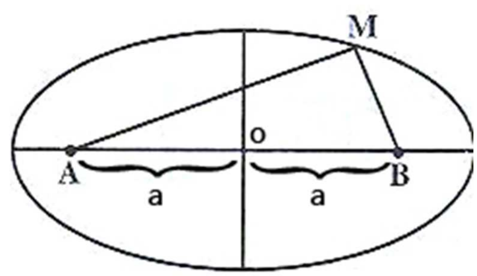
شکل ۲۷ : ناصف عمودی

۲- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطحه که ازآن نقطه قطعه مفروض AB تحت زاویه معلوم ∝ دیده می شود. بخشهای ازدو دایره مساوی است. که بردونقطه Aو B می گذرند وزاویه مرکزی روبه رو به وترمشترک شان برابر ∝ ۲ است این قوسها را، قوس های اساسی با قوس های حاوی زاویه∝ می‌نامند(۲۱، ص۳۵).



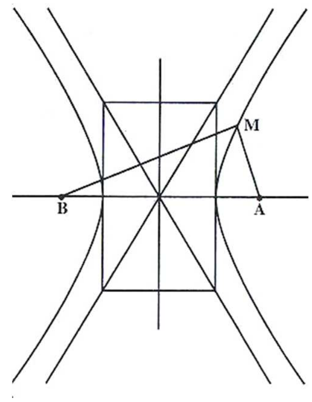
شکل ۲۸ : دوایر متقاطع

۳- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که مجموعه فاصله شان ازدونقطه ثابت Aو B برابرثابت 2a است، یک الپیس به محراق Aو B وعددثابت 2a است



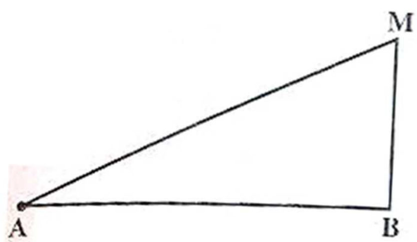
شکل ۲۹ : الپیس

۴- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که تفاضل فاصله‌اش ازدونقطه ثابتA و B برابرمقدارثابت 2a است یک هایپربول به کانونهای Aو B وعددثابت 2a است.



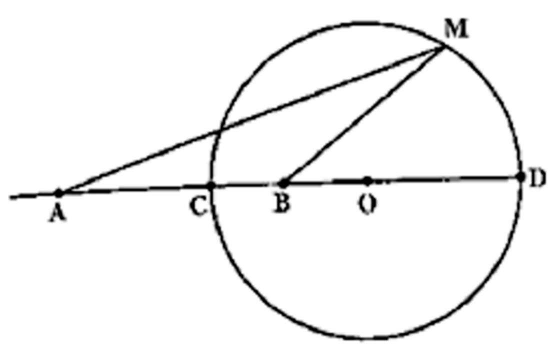
شکل ۳۰: هایپربول

۵- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که حاصل ضرب فاصله‌اش ازدونقطه ثابت A وB واقع در آن سطحه مقدارثابتی است یک منحنی درجه چهاراست.



شکل ۳۱: منحنی درجه چهار

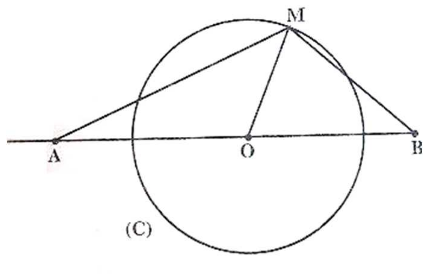
۶- مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که نسبت فاصله‌اش از دونقطه ثابت Aو B واقع در آن سطحه مقدارثابتی است، یک دایره است که قطرش قطعه خط AوB را به نسبت K تقسیم می کند. این دایره را دایره آپولینوس می‌نامند($k \neq 1,0$)



شکل ۳۲: دایر اپولینوس

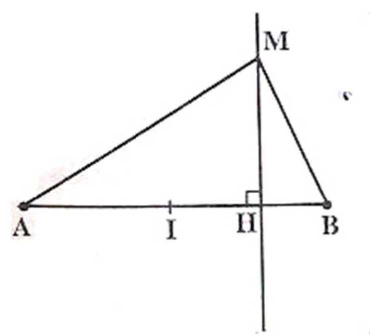
۷- مکان هندسی نقطهٔ که مجموع مربعهای فاصله هایش ار دونقطه ثابت A و B برابرمقدارثابت k^2 است یک دایره است که مرکزش نقطه (O) وسط قطعه خطAB و شعاع اش

$R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است.



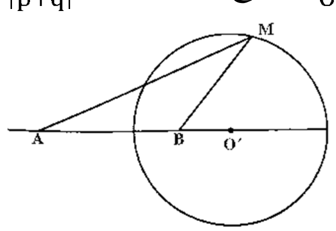
شکل ۳۳ : دایره

۸- مکان هندسی نقطهٔ که تفاضل مربعهای فاصلهاش ازدونقطه ثابت Aو B برابرمقدارثابت K^2 است، خطی مستقیم عمودبر AB درنقطه مانند Hبه قسمی که اگر I وسط خط AB باشد ، $IH=\frac{K^2}{2AB}$ است .



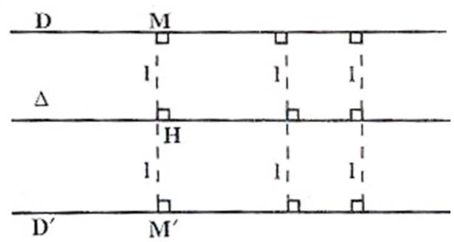
شکل ۳۴ : مثلث مختلف الاضلاع

۹- مکان هندسی نقطه Mاز یک سطح که بین فاصله هایش ازدونقطه ثابت A وB واقع در آن سطح وعددهای PوQوr رابطه $\overline{pM}\ A^2 + qMB^2 = r$ برقرار باشد ($\frac{-q}{P} \neq ۱$)یک دایره است به مرکز $\acute{O}$ چنان که $\frac{\overline{O'A}}{\overline{OB}} = \frac{-q}{P}$ و شعاع $R = \frac{\sqrt{r(p+q)-a^2pq}}{|p+q|} = k_1.$ است که a طول قطعه خط AB است .



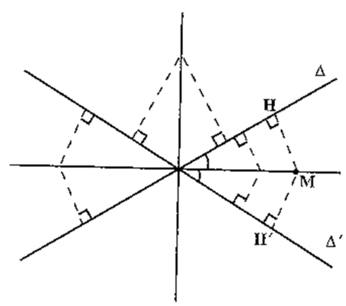
شکل ۳۵: دایره اپولینوس

۱۰-مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که از یک خط مستقیم Δ واقع دریک سطح به فاصله معلوم l باشند دو خط مستقیم موازی آن خط دردوطرف آن و به فاصله l ازآن است .



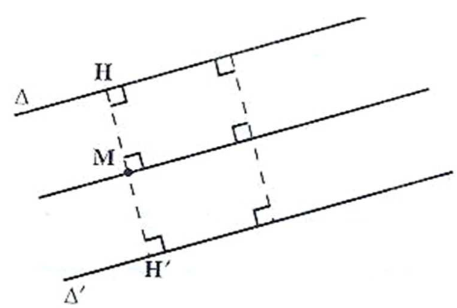
شکل ۳۶ : سه خط موازی و هم فاصله

۱۱-مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که ازدوخط متقاطع واقع در آن سطح به یک‌فاصله است ناصف الزاویه های بینی آن دو خط است.



شکل ۳۷ : ناصف الزاویه زوپای متقابل به راس

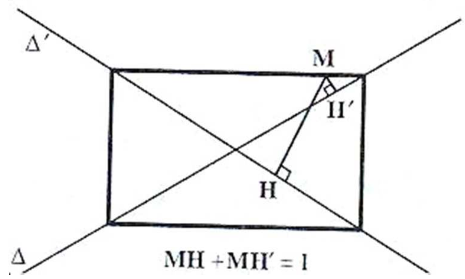
۱۲-مکان هندسی نقطه ای از یک سطح که ازدوخطی موازی واقع در آن سطح به یک‌فاصله است یک خط موازی آن دو خط، بین آن ها و به یک‌فاصله از آن ها است.



شکل ۳۸ :سه خط موازی و هم فاصله

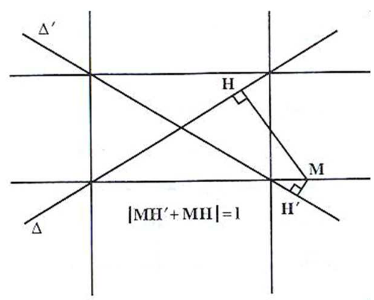
۱۳-مکان هندسی نقطه از یک سطح که مجموع فاصله‌اش ازدوخط متقاطع واقع در آن سطح برابرمقدارثابت I باشد ضلع های مستطیلی است که آن دو خط قطرهای آن هستند. وفاصله

هرراس آن مستطیل ازقطرمقابلش برابراست. یاد داشت : اگردوخط متوازی باشند دو خط مکان هندسی (درصورت وجود) موازی آن ها هستند.



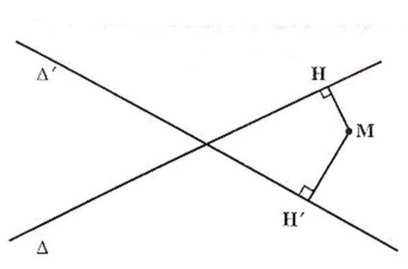
شکل ۳۹ : نمایش قطرهای مستطیل

۱۴–مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که تفاضل فاصله‌اش ازدوخط ثابت واقع در آن سطح برابر مقدارثابت l باشد . امتداد ضلع های مستطیلی است که آن دو خط قطرهای آن اند. وفاصله هرراس مستطیل ازضلع مقابلش برابر l است.



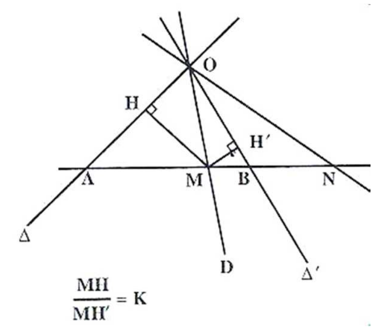
شکل۴۰ : نمایش و قطرهای مستطلیل

۱۵–مکان هندسی نقطهٔ که حاصل ضرب فاصله‌اش ازدوخط ثابت واقع در آن سطح مقدارثابتی است هایپربول است که آن دو خط مجانب های آن هستند.



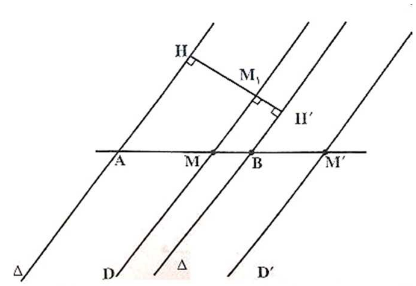
شکل۴۱ : هایپربول

۱۶-مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که نسبت فاصله‌اش ازدوخط متقاطع واقع در آن سطح مقدارثابتی باشد، دو خط مستقیم است.که برنقطه تقاطع آن دو خط میگذرند وباآن دو خط یک سیستم توافقی می سازند.



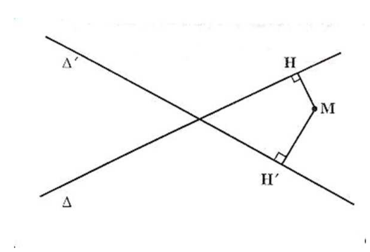
شکل۴۲ الف : خطوط توافقی و راس سیستم توافقی خطوط

یاد داشت :اگردوخط مفروض متوازی باشنددوخط مکان هندسی نیز باآنها موازی اند (رأس سیستم توافقی درفاصله بینهایت ها واقع است).



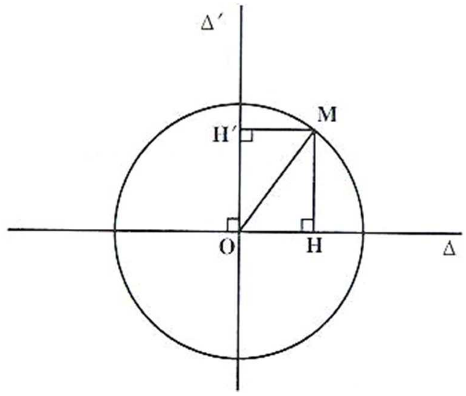
شکل۴۲ب : خطوط توافقی و راس سیستم توافقی خطوط

۱۷-مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که مجموع مربعهای فاصله راس ازدوخط متقاطع واقع در آن سطح مقدارثابت K^2 باشد یک الیپس است که قطربزرگش برناصف الزاویه حاده ببین آن دو خط منطبق است.



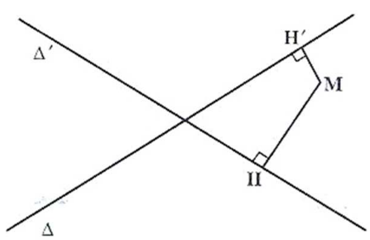
شکل ۴۳ : نمایش الیپس که قطربزرگش برناصف الزاویه حاده بین دو خط منطبق

تبصره: اگردوخط متقاطع برهم عمود باشند،مکان هندسی نقطه M یک دایره است که مرکزش محل برخورد آن دو خط است.



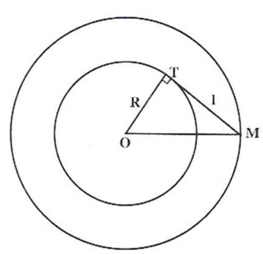
شکل۴۴ : دایره باقطرها

۱۸–مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که قدرمطلق تفاضل مربعهای فاصله‌اش ازدوخط متقاطع برابرمقدار ثابتی باشد هاپیربول متساوی القطرین است.



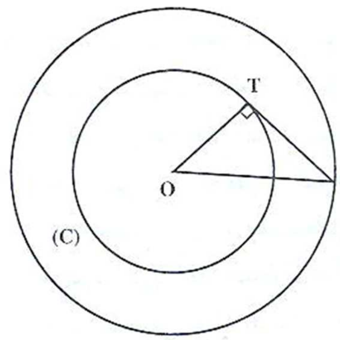
شکل ۴۵ :هاپیربول مستاوی القطرین

۱۹–مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که طول مماسهای رسم شده ازآن نقطه بردایره ثابت C(O, R)برابرمقدارثابت دایره است که مرکزش مرکزهمان دایره وشعاعش $R' = \sqrt{I^2 + R^2}$است.



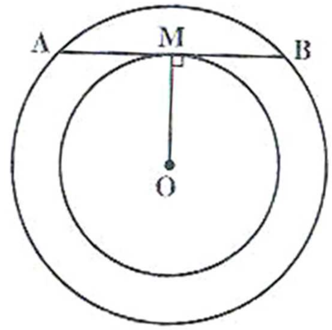
ش ۴۶ : دوایر متحد المرکز

۲۰–مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که طاقت آن نسبت به دایره ثابت C(O,R) واقع در آن سطح مقدار ثابت P باشد یک دایره به مرکز O و شعاع $R'=\sqrt{P + R^2}$ است .



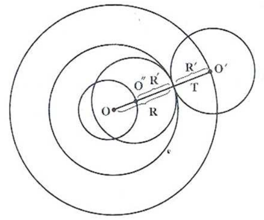
شکل ۴۷ : دوایر متحد المرکز

۲۱–مکان هندسی وسط وترهای به طول l از یک دایره ثابت C(O,R) دایره‌ای به مرکز (O) و به شعاع $\acute{R}=\sqrt{R^2 - \frac{I^2}{4}}$ است



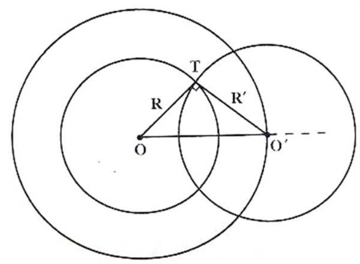
شکل ۴۸ : مکان هندسی وسط وتر دوایر

۲۲–مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع $\acute{R}$ که به دایره C(O,R) مماس اند، دایره‌ای به مرکز (O) و به شعاع $R+\acute{R}$ (مماس برونی) یا $\left|R - \acute{R}\right|$ (مماس درونی) است.



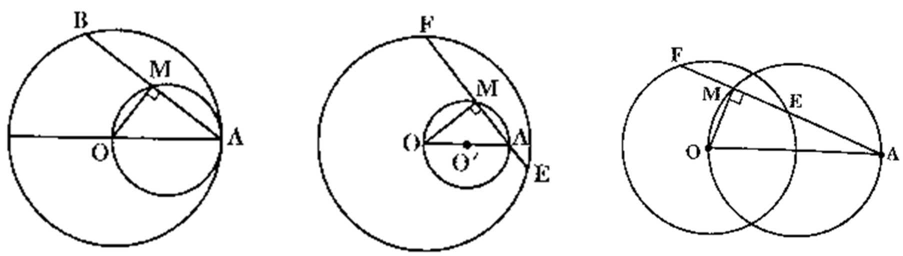
شکل ۴۹ : نمایش مماس درونی دوایر

۲۳-مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع $\acute{R}$ که بر دایره C(O,R) عمود اند، دایره‌ای به مرکز (O) و به شعاع $R'' = \sqrt{R^2 + \acute{R}^2}$ است



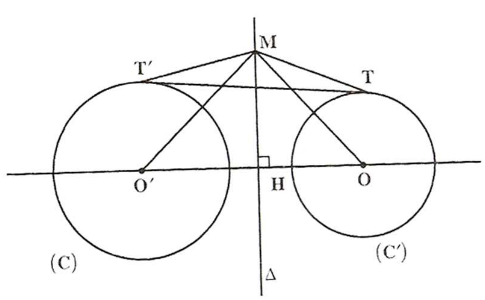
شکل ۵۰ : نمایش مکان هندسی دوایر

۲۴-مکان هندسی وسط وترهای که از نقطه مفروض A نسبت به دایره مفروض C(O,R) رسم می‌شوند دایره‌ای به قطر OA است



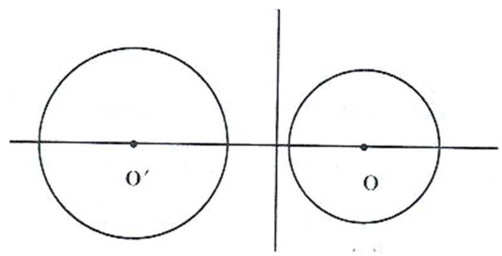
شکل ۵۱ : نمایش مکان‌های هندسی داخل دوایر

۲۵-مکان هندسی نقطهٔ که نسبت به دو دایره جداگانه C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ طاقت برابر داشته باشد خطی است عمود برخط المرکزین دو دایره در نقطهٔ مانندH به قسمی که اگر وسط قطعه خط (OO′) باشد، $\overline{IH} = \frac{R^2-\acute{R}^2}{2O\acute{O}}$ است. این دو خط را محور اصلی دو دایره می‌نامند.



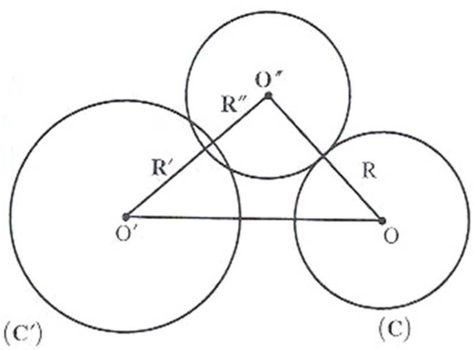
شکل ۵۲ : نمایش محور جذری دوایر

۲۶-مکان هندسی نقطهٔ که بین P و$\acute{P}$ طاقت‌های آن نسبت به دو دایره C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ رابطه KP+K$\acute{P}$=$\acute{\acute{K}}$ برقرار باشد (K,$\acute{K}$, $\acute{\acute{K}}$) عددهای معلوم هستند یک دایره با یک خط مستقیم است



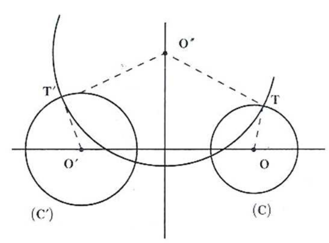
شکل ۵۳ : نمایشی دوایر به یک خط مستقیم

۲۷-مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع $\acute{\acute{R}}$که بر دو دایره C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ مماس اند یک پارابول است



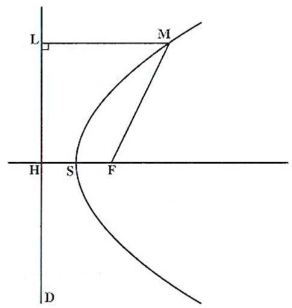
شکل ۵۴ : پارابول

۲۸-مکان هندسی مرکز دایره‌ها عمود بر دو دایره جداگانه C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$بخش از محور اصلی دو دایره است، که در خارج دو دایره قرار دارد.



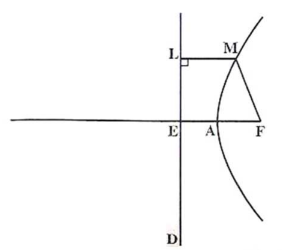
شکل ۵۵ : نمایش محوری اصلی دو دایره در خارج دوایر

۲۹-مکان هندسی نقطهٔ از یک سطح که فاصله‌اش از نقطه ثابت F و خط ثابت Δ واقع در آن سطح برابر باشد یک پارابول به کانون F و خط‌های Δ است

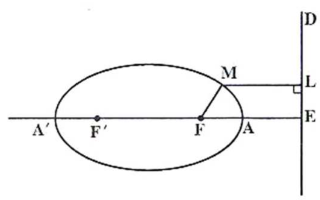


شکل ۵۶ : هایپربول

۳۰-مکان هندسی نقطه M از یک سطح که نسبت فاصله‌اش از نقطه ثابت F به فاصله‌اش از خط ثابت Δ واقع در آن سطح مقدار در ثابت $e \neq 1$ باشد یک الیپس با یک پارابول است طوری که به ترتیب $e<1$ یا $e>1$ باشد. [۱۷]



شکل ۵۷ : پارابول



شکل ۵۸: الیپس

7.1.استراتیژی حل مسایل ترسیم‌های هندسی

در حل مسئله‌های ترسیم‌های هندسی از استراتیژی ذیل استفاده می کنیم :

۱- مسئله ترسیم را حل‌شده فرض می‌کنیم
۲- مسئله ترسیم را تبدیل به یافتن یک نقطه مجهول می‌کنیم.
۳- شرط‌های مسئله را به دو جز تقسیم می‌کنیم،به‌طوری‌که هرکدام از شرط‌ها به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول تبدیل شود و هر یک از این دو مکان هندسی باید خط مستقیم با دایره باشد .
۴- نقطه مجهول فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

برای مشخص کردن مکان‌های هندسی برداشتن سه‌گام زیر نیز سودمند است.و این گام بر اساسی استدلال و استقرا است.

گام اول: به‌اندازه کافی نقطه‌های را که در خصوصیت داده‌شده صدق می‌کنند، بیابید.

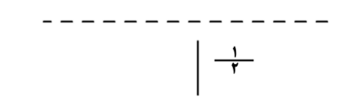
گام دوم: آن نقطه‌ها را به یکدیگر وصل کنید تا شکلی شهودی از مکان هندسی موردنظر پیدا کند.

گام سوم: مکان هندسی را تعریف کنید، سپس بررسی کنید، آیا در هر نقطه مجموعهٔ نقطه‌های که یافته‌اید در خصوصیت داده‌شده صدق می‌کند. و برعکس آیا هر نقطه که در این خصوصیت صدق کند در مجموعه آن که یافته‌اید قرار دارد؟

مثال۱. مکان هندسی نقطهٔ از سطح را پیدا کنید از یک خط داده‌شده(L) به فاصله$(\frac{1}{2})$ باشد.

حل:

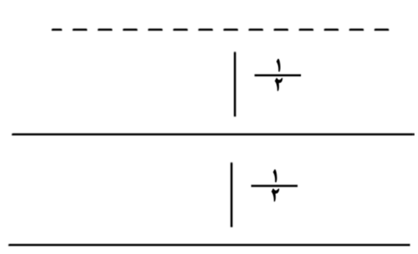
گام اول: ابتدا تعداد از نقطه‌های که در این خصوصیت صدق می‌کنند، پیدا می‌کنیم



شکل ۵۹ : نمایش فاصله یک خط از نقطه به‌اندازه معین

گام دوم: با وصل کردن هر مجموعه از نقطه‌های که دریک طرف خط قرار دارند دو خط مستقیم به دست می‌آوریم. پس به نظرمی رسد این مکان هندسی دو خط باشد .

گام سوم: مکان هندسی نقطهٔ که به فاصله $\frac{1}{2}$ از خط داده‌شده L قرار دارد. دو خط مستقیم موازی با Lاست.



شکل ۶۰: نمایش فاصله دو خط از نقطه معین

درنتیجه به اساس استدلال استقرای می‌توان گفت که: مکان هندسی نقطهٔ از سطح که از یک خط مستقیم داده‌شده در همان سطح به فاصله d قرار دارد. دو خط مستقیم موازی با آن خط و در دو طرف آن است.

قضیه : ناصف یک زاویه مکان هندسی نقطهٔ در سطح آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

دلیل: در این قضیه خصوصیت مشترک که مکان هندسی را مشخص می‌کند D یکسان بودن فاصله نقطه از دو ضلع زاویه است . بر اساس تعریف مکان هندسی اثبات دو مرحله دارد:

مرحله اول: ثابت می‌کنیم هر نقطه روی ناصف الزاویه از دو ضلع زاویه به یک‌فاصله است نقطه Mروی ناصف الزاویه XBY در نظر می‌گیریم از M خط‌های به ضلع‌های BX وBY عمود می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در H وK قطع کنند. BMH و BMK به حالت برابری دو زاویه و ضلع بینی آن‌ها مشابه هستند، پس $\mathrm{MH} = \mathrm{MK}$

مرحله دوم: اگر نقطه M از دو ضلع BX و BY به فاصله یکسان باشد چون دو مثلث قایم‌الزاویه BMHو BMK به حالت تساوی وتر و یک ضلع مشابه هستند، پس $B_1 = \widehat{B}_2$ یعنی، خطی که از B وM می گذرد ناصف الزاویه است، درنتیجه Mروی ناصف الزاویه B واقع واز این درستی حکم نتیجه می شود(۱۱، صص۲۲-۳۰).

خلاصه فصل اول

اساسات هندسه ترسیمی مسطح دستگاه اکسیوماتیک اقیلدس است . ترسیمات توسط خط کش ، پرکار، گونیا و سایر آلات هندسی صورت میگیرد واستدلال قیاسی اساس ترسیمات هندسه را تشکل میدهد. تنصیف قطعه خط با پرکارو خط کش امکان پذیراست ویک قعطه خط مستقیم تنها یک نقطه تنصیف دارد .ترسیم عمود بریک قطعه خط از نقطه واقع بر آن توسط پرکاروخط کش امکان دارد.ترسیم عمود بریک قطعه خط از یک نقطه خارج ان توسط خط کش و پرکارتنها یک عمود ترسیم شده میتواند . ترسیم ناصف الزاویه توسط خط کش وپرکار امکان پذیر است که وسعت آن مساوی به دوچند وسعت آن است وهرزاویه یک ناصف دارد. ترسیم مثلث با معلوم بودن یک زاویه ودو ضلع مجاور آن توسط خط کش و پرکار ممکن است .ترسیم مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن توسط خط کش و پرکار می‌توان انجام شود .ترسیم قطعه خط به نسبت معین باپرکارو خط کش صورت میگیرد .ترسیم دایره بامعلوم بودن شعاع ومرکز دایره توسط خط کش وپرکار ممکن است .ترسیم مماس از یک نقطه خارج بریک دایره در نقطه تماس با شعاع دایره عمود است . برای ترسیم یک نقطه دو شرط لازم است نقطه را می‌توان فصل مشترک دو مکان هندسی دانست .برای رسم یک قطعه خط تنها یک معلوم که اندازه آن میباشد لازم است .برای رسم یک مثلث سه شرط لازم است که این سه جزءمعلوم را نمیتوان سه زاویه در نظرگرفت. زیرا با معلوم بودن دو زوایه زوایه سومی نیز مشخص است برای رسم یک مثلث متساوی الساقین یا قایم ازوایه دوشرط و برای رسم مثلث مستاوی الا ضلاع یک شرط کافی است رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع و دو ضلع و یک زاویه دو زاویه و یک ضلع،حالت های کلاسیک رسم مثلث نامیده میشود . برای رسم یک دایره تنها یک معلوم که اندازه شعاع میباشد لازم است . برای ترسیم یک چهار ضلعی پنج شرط لازم است برای رسم یک مثلث دو شرط دیگر برای تعیین راس چهارم ، چهارضلعی یا چند ضلعی های منظم نسبت به چند ضلعی های نامنظم شرط کمتر لازم است .

برای ترسیم اشکال هندسی ابزار های مختلف مانند ، خط کش ، پرکار ، نقاله ، و مثلث وجود دارند. ترسیم مکانهای هندسی یکی از ابزارهای مهم وضروری برای ترسیم شکل های هندسی میباشد . خط کش اقیلدس و خط کش نامدرج از الحاظ ریاضی معادل اند . مکان‌های هندسی نقاط که از دونقطه معین مستاوی الفاصله باشند، عبارت از عمود وسطی قطعه خط بین همان دو نقطه است . مکان‌های هندسی نقاط که از یک قطعه خط مستقیم متساوی الفاصله باشد، عبارت از دونقطه موازی است در دو طرف خط مذکور موازی با آن‌ها در فواصل مساوی قرار دارد . مکان‌های هندسی نقاط که در دو خط موازی مستاوی الفاصله باشند، عبارت از خط است موازی با آن‌ها و در بین آن‌ها . مکان هندسی نقاط از دو نقطه متقاطع مستاوی الفاصله باشند عبارت از ناصف همان زاویه های متقابل به رأس آن میباشد . مکان هندسی نقاط از

دو دایره متحدالمرکز متساوی الفاصله باشند، عبارت از دایره است متحد المرکز واقع در میان آن . مکان هندسی نقاط که از یک نقطه معیین دارای مسافه ثابت باشد، عبارت از دایره است با مرکز در همان نقطه و شعاع مساوی به همان مسافه . مکان هندسی نقاط که از یک دایره متساوی الفاصله باشد، عبار از دو دایره است در دو طرف دایره اولی و متحد المرکز به آن . مکان هندسی نقاطی که از یک دایره متساوی الفاصله شعاع آن‌ها ازشعاع دایره داده‌شده بزرگتر باشد، عبارت از دایره است خارج دایره اولی و متحدالمرکزبه آن. مکان هندسی نقطه از یک سطح که مجموعه فاصله‌اش از دو نقطه خط متقاطع واقع در آن سطح برابرمقدار ثابت باشد ضلع های مستطیل است آن دو خط و تر ها آن هستند . مکان هندسی نقطه از یک سطح که مجموعه فاصله شان از دو نقطه ثابت برابر 2a است یک الیپس است . مکان هندسی نقطه از یک سطح که تفاضل فاصله شان از دو نقطه ثابت برابر 2a است یک هایپربول است .

ناصف یک زاویه مکان هندسی نقطه در مستون آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشند. ناصف الزاویه های مثلث هادر نقطه‌های متقاطع اند که از اضلاع آن متساوی الفاصله باشد. ناصف های عمودی اضلاع مثلث دو نقطه متقاطع اند که از رأس های ان متساوی الفاصله میباشد . ارتفاعات مثلث ها در یک نقطه متقاطع اند . میانه های مثلث در یک نقطه متقاطع اند طوری که طول قطعه خط از میانه بین رأس تقارب ، مساوی به ۲/۳ حصه میانه است .

برای حل مسایل ترسیم‌های هندسی از استرتیژهای ذیل استفاده می‌کنیم .(۱) مسئله ترسیم را حل‌شده فرض می‌کنیم .(۲) مسئله ترسیم را تبدیل به یافتن نقطه مجهول می‌کنیم.(۳) شرطهای مسئله را به دو جزء تقسم می‌کنیم ، طوری که هرکدام از شرط ها به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول تبدیل شود و این دو مکان هندسی با یک قطعه خط مستقیم با دایره باشد. (۴) نقطه مجهول فصل مشترک این دو مکان هندسی است باشناخت مکان‌های هندسی می‌توان هرگونه مسئله را حل نمود .

مسایل فصل اول

۱. هدف هندسه ترسیمی مسطح را مختصراً واضح سازید
۲. ابزارهای برای ترسیم اشکال هندسی را نام بگیرد؟
۳. آیا با پرکاریک قطعه خط را می‌توان به چهار قسمت مساوی تقسیم نمود ؟
۴. آیا با پرکاریک زوایه را می‌توان با چهار قسمت مساوی تقسیم کرد ؟
۵. مکان‌های هندسی را در ترسیم اشکال هندسی کدام رول را بازی می‌کند ؟
۶. پرکاراقیلدس و پرکار مدرن چی تفاوت دارد ؟
۷. آیایک زاویه با وسعت داده‌شده میتواند توسط خط کش وپرکاررسم شود؟
۸. شرط‌های ترسیم یک قطعه خط با اندازه معین را بیان کنید ؟

کتابنامه

۱. اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). **هندسه جدید.** ترجمه یاسی پور، غلام رضا. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲. ایوز، هاوارد. (۱۳۷۲). **آشنایی با تاریخ ریاضیات**. ترجمه وحیدی اصل، محمد قاسم ، قسمت اول. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۳. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه،** جلد ۱۲. تهران: مدرسه.

٤. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **رسم شکلهای هندسی در هندسه مسطح**،جلد ۱۱. نهران: مدرسه.

۵. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.

٦. گویا، زهرا. (۱۳۸۸). **هندسه ۲.** تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۷. نجذبی، حمید رضا. (۱۳۸۳). **هندسه و رسم فنی**. تهران: شهر آب.

فصل دوم

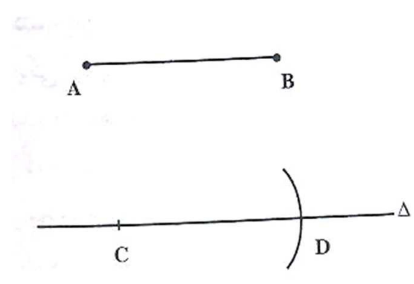
ترسیم های اساسی هندسه مسطح

ترسیم های اساسی هندسه مسطح ترسیم های سادهٔ ای هستند که، ازآنهابه عنوآن پایه های اساسی برای ترسیم شکل های مشکل تر استفاده میگردد این ترسیم ها ی که همه درسطح آنجام می شوند عیارت از ترسیم قطعه خط مساوی به یک قطعه خط داده شده،ترسیم ناصف عمودی یک قطعه خط، نصف کردن یک قطعه خط، ترسیم خط عمودی بریک خط از یک نقطه واقع برآن خط، ترسیم خط عمودی بریک خط از نقطه واقع در خارج آن خط، تریم ناصف الزاویه یک زاویه، ترسیم زاویه برابر به یک زاویه در یک طرف نیم خط مفروض، ترسیم یک قطعه خط موازی به یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن، ترسیم خط بر یک خط مفروض از نقطه روی آن ، ترسیم دو خط موازی، تقسیم قطعه خط به پنج حصه مساوی ، تقسیم یک قطعه خط به n حصه مساوی، تقسیم یک قطعه خط به نسبت معین kاعداد ترسیم پذیر دراسن فصل ذیلاً مطالعه مینمائیم.

۱.۲. ترسیم قطعه خط مساوی بایک قطعه خط داده شده

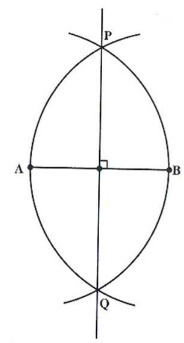
قطعه خط AB وخط Δ داده شده است می خواهم روی این خط قطعه خط مساوی با قطعه خط AB رسم کنیم.

نقطه اختیاری Cرا روی خط Δ اختیارکرده، به مرکز این نقطه وبه شعاع برابر AB قوسی رسم می کنم تا خط Δرا درنقطه D قطع کند قطعه خط CD جواب مسئله یعنی قطعه خط برابر باقطعه خط AB است. [۱۱]



شکل ۶۱ : ترسیم یک قطعه خط به آندازه داده شده

۲.۲.ترسیم ناصف عمودی یک قطعه خط قطعه خط AB داده شده است می خواهیم ناصف عمودی قطعه خط را رسم کنیم

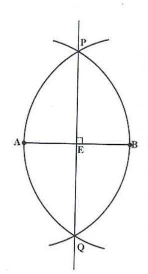


شکل ۶۲ : ناصف عمودی قطعه خط

a. دایره ای به مرکز A وبه شعاع $r = AB$ رسم می کنیم
b. دایره ای به مرکز B وبه شعاع $r = AB$ رسم میکنم ومی توآن به قضیه دو دایره استناد کرد. زیرا هریک ازعددهای r ، rوr ازمجموع دوعدد دیگر کوچکتراست بنابراین دودایره دردونقطه P و Q یکدیگررا قطع می کند. خط PQرارسم می کنیم .چون P از Aو B به یک فاصله است ، پس روی ناصف عمودی قطعه خط AB قراردارد، بنا براین خط PQ ناصف عمودی قطعه خط ABاست. لازم نیست که شعاع دایره را حتماً $r = AB$ اختیارکنیم بلکه کافی است $r > \frac{AB}{2}$ باشد تا دودایره یکدیگررا قطع کند.

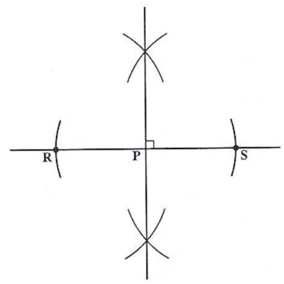
۳.۲. نصف کردن یک قطعه خط یاتعیین نقطه وسط یک قطعه خط :

قطعه خط AB داده شده است می خواهیم نقطه وسط این قطعه خط را بدست آوریم. ترسیم : به روش ۲ خط PQناصف عمودی قطعه خط AB را رسم می کنیم نقطعه تقاطع خط PQ با قطعه خط AB یعنی نقطه E جواب مسئله است وداریم. $AB = EB$



شکل ۶۳ : تنصیف قطعه خط

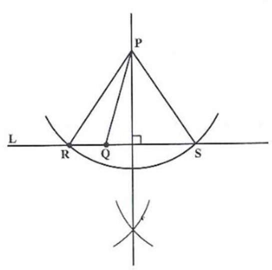
٤.٢. ترسیم خط عمودی بریک خط ازیک نقطه واقع برآن خط . خط L ونقطه P واقع برآن داده شده است . می خواهیم از نقطه P خطی عمودبرخط L رسم کنیم .



شکل ۶۴ : نمایش ترسیم خط عمودی بریک خط از یک نقطه واقع برآن خط

a. دایره دلخواهی به مرکزP رسم می کنیم تا خط L را دردونقطه RوS قطع کند.
b. ناصف عمودی قطعه خط RS را رسم می کنیم این ناصف عمودی ، خطی است که از نقطه P برخط L عمود رسم شده است.

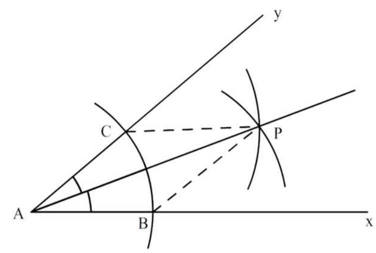
٥.٢. ترسیم خط عمود بریک خط ازنقطه ای واقع درخارج آن خط. خط L ونقطه P خارج آن داده شده است می خواهیم از نقطه P خطی عمودبر L رسم کنیم .



شکل ۶۵ : خط عمودبریک خط از نقطه واقع درخارج آن خط

a. نقطه Q را روی خط L اختیارکرده به مرکز P وبه شعاع r>PQ دایره ای رسم می کنیم چون نقطه Q درون این دایره قراردادردبنابراین خط L دایره را در دونقطه R و S قطع می کند.
b. ناصف عمودی قطعه خط RS رارسم می کنیم این خط ازنقطه P می گذردزیراP از دونقطه R و S به یک فاصله است . (۱۱، صص۳۶-۴۰).

۶.۲. ترسیم ناصف الزاویه یک زاویه :زاویه $x\hat{A}y$ داده شده است می خواهیم ناصف این زاویه را رسم کینم



شکل ۶۶ : ناصف الزاویه

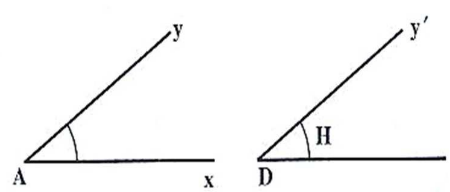
a. دایره دلخواهی مرکز A رسم می کنیم این دایره دوضلع زاویه A رادردونقطه B وC قطع می کند. بدیهی است که AB=AC

b. دایره ای به مرکز B وشعاع r=BC رسم می کنیم .

c. دایره ای به مرکز c وبه شعاع r= BC رسم می کنیم این دایره یکدیگررا قطع می کنند (زیراقضیه دودایره برای آنها برقراراست هریک ازعددهای r،r و r ازمجموع دوعدددیگر کوچکتراست) P رآنقطه تقاطع این دودایره می گیریم که بآنقطه A دریک طرف BC نباشد.

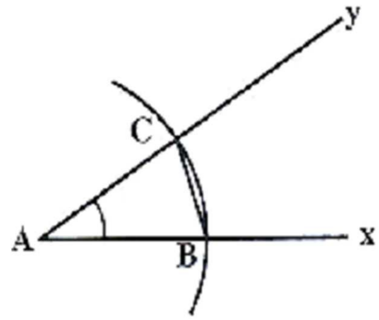
d. AP رارسم می کنیم این نیم خط ناصف الزاویه $x\hat{A}y$ است. یعنی داریم xAP=PAy ، زیرا دومثلث PAC و PAB به دلیل تساوی سه ضلع متناظرمشابه آند. (AP=AP,PC=PB=r)بنابرین xAP=PAy یعنی AP ناصف الزاویه $x\hat{A}y$ است. درمرحله ۲ و۳ می توآنیم شعاع دایره هاراهرعددبزرگتراز $\frac{BC}{2}$ اختیارکنیم.

۷.۲. ترسیم زاویه برابربایک زاویه داده شده : زاویه $x\hat{A}y$ ونیم خط $\overline{DX}$ ونیم سطح H که این نیم خط سرحدآن است داده شده است می خواهیم نیم خط $\overline{DY}$ راچنآن رسم کنیم که $\overline{DY}$ در H باشد زاویه $x\hat{D}y$ مشابه با زاویه $x\hat{A}y$ باشد.



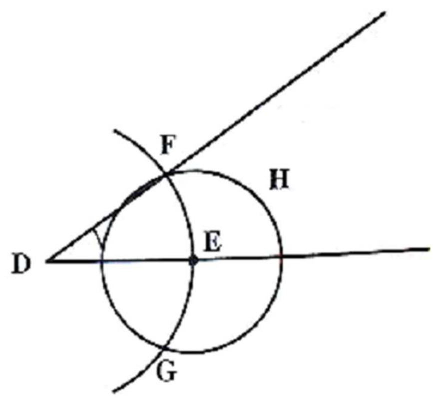
شکل ۶۷ : زاویه ها

۱- دایره ای به مرکزA وبه شعاع دلخواه r رسم میکنیم این دایره دوضلع زاویه XAY رادرB قطع می کند.



شکل ۶۸ : نمایش ترسیم زاویه برابر

۲- دایره ای به مرکز D وبه شعاع r=AB=AC رسم می کنیم ونقطه تقاطع این دایره با نیم خط $\overline{DX}$ راE می نامیم

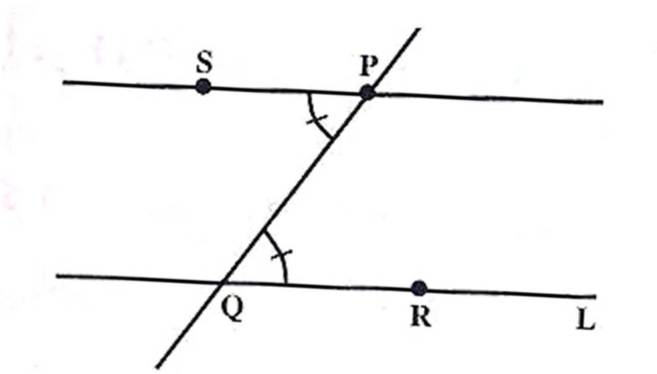


شکل ۶۹ : نمایش ترسیم زاویه برابر

۳- دایره ای به مرکزE وبه شعاع s=BC رسم می کنیم این دودایره یکدیگررادردونقطه FوG قطع می کنند که در دوطرف قطعه خط DE قراردارند F را نقطه ای می گیریم که درHواقع است

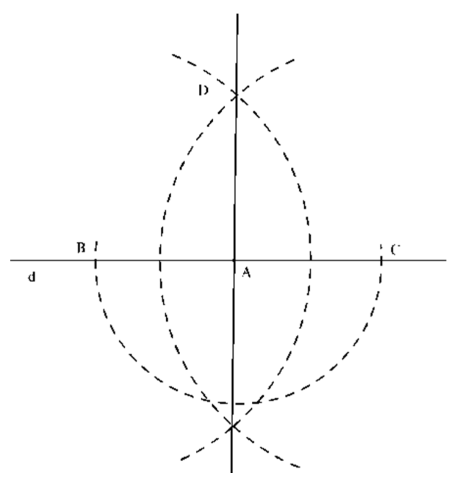
۴- نیم خط DF را رسم میکنیم. این نیم خط ، نیم خط خواسته شده است . طبق حالت تساوی سه ضلع دومثلث ABC وDEF یا زاویه xDy زاویه خواسته شده است .

۸.۲. ترسیم یک خط موازی بایک خط داده شده ازیک نقطه خارج آن : به خط L ونقطه P خارج آن داده شده آندمی خواهیم ازنقطه P خطی موازی با خط L رسم کنیم **۱:** Q وR را دونقطه دلخواه ازخط L درنظرمی گیریم ونیم خط PQ را رسم می کنیم. **۲:** با روش ترسیم r زاویه QPS رامساوی با زاویه PQR رسم می کنیم طوریکه S وR دردوطرف PQ باشند، زاویه های QPS وPQR زاویه های متبادله داخلی آند. بنابراین PS//QR است پس خط PS جواب مسئله است(۲۸، ص.۵) . قرار شکل



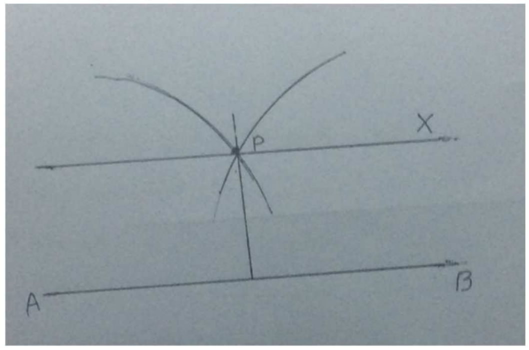
شکل ۷۰: خطوط موازی

۹.۲. ترسیم خط بریک خط مفروض ازنقطه ای روی آن خط : فرض خط d ونقطه A روی آن داده شده باشند برای رسم خط عمود بر d که ازA بگذرد ابتدا مآنندحالت قبل قوس به مرکزA وشعاع دلخواه رسم میکنیم تا خط d را در B و C قطع کند سپس به مرکز BوC وشعاع های یکسآن دوقوس دیگررسم می کنیم که یکدیگررا درنقطه D قطع می کنند خط واصل AوD برخط عمودخواهد بود



شکل ۷۱: نمایش خط بریک خط مفروض ازنقطه روی آن

۱۰.۲. ترسیم دوخط موازی ابتداء یک خط AB مفروض بروی سطح رسم میکنیم بعدا" ناصف عمودی آن رادریافت می کنیم طوریکه قبلا ذکرشد پیش ازنقطه تقاطع دوقوس یعنی از نقطه P یک خط موازی به خط AB رسم میکنیم طوریکه خط رسم شده باخط AB درتمام امتداد فاصله مساوی داشته باشد جواب مسئله است(۲۰، ص۹).

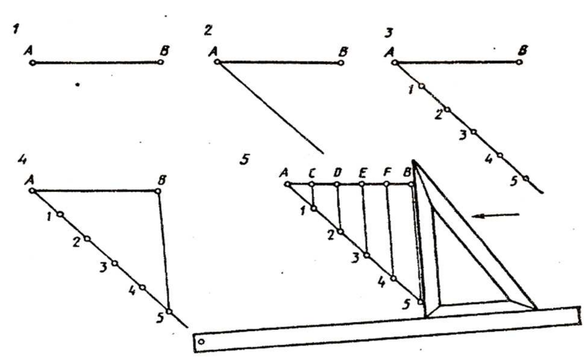


شکل ۷۲ : خطوط موازی

اگراین فاصله صفرشود دوخط درحالت منبطق یکی با لای دیگری می باشند.

۱۱.۲. تقسیم قطعه خط به ٥ حصه مساوی برای تقسیم قطعه خط به ۵ حصه مساوی نکات ذیل رادرنظرمی گیرم

۱- قطعه خط AB داده شده است
۲- ازنقطه A به زاویه کیفی شعاع رسم می نمایم
۳- ازنقطه A بالای شعاع مذکوربه آندازه کیفی مساویآنه ۵ قسمت را جدا می نمایم وبالای شعاع نقاط ۱،۲،۳،۴،۵ را نشآنی میکنیم
۴- نقطه ۵ رابه نقطه B وصل می نمایم
۵- ازنقطه ۱،۲،۳،۴ مستقیم های موازی به OB میکشیم (AC=CD=DE=EF=FB)

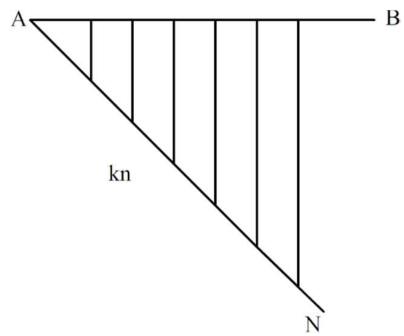


شکل ۷۳ : نمایش تقسیم قطعه خط به پنچ حصه مساوی

۱۲.۲. تقسیم یک قطعه خط به n حصه مساوی

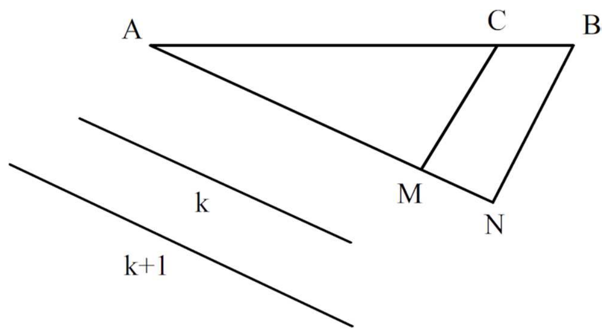
درین حالت ازقضیه تالس وخواص آن کمک می گیریم به این ترتیب که برای تقسیم قطعه خط AB به n حصه مساوی از یک سرقطعه خط AB مآنند A قطعه خط متقاطع باآن وبه طول kn رسم می کنیم سپس آن را به nحصه مساوی تقسیم می کنیم ازآخرین نقطه تقسیم n به سردیگرقطعه خط مفروض B وصل کرده ودراخیر ازهریک از نقاط تقسیم خطی موازی BN رسم می کینم تا AB را قطع کند. قطعات به دست آمده روی قعه خط AB همگی با هم برابربوده وطول هریک $\frac{1}{n}$طول AB می باشد .

تذکر: (قطعه خط AN نباید با قطعه خط AB زاویه °۱۸۰درجه بسازد)



شکل ۷۴: نمایش تقسیم قطعه خط به n حصه مساوی

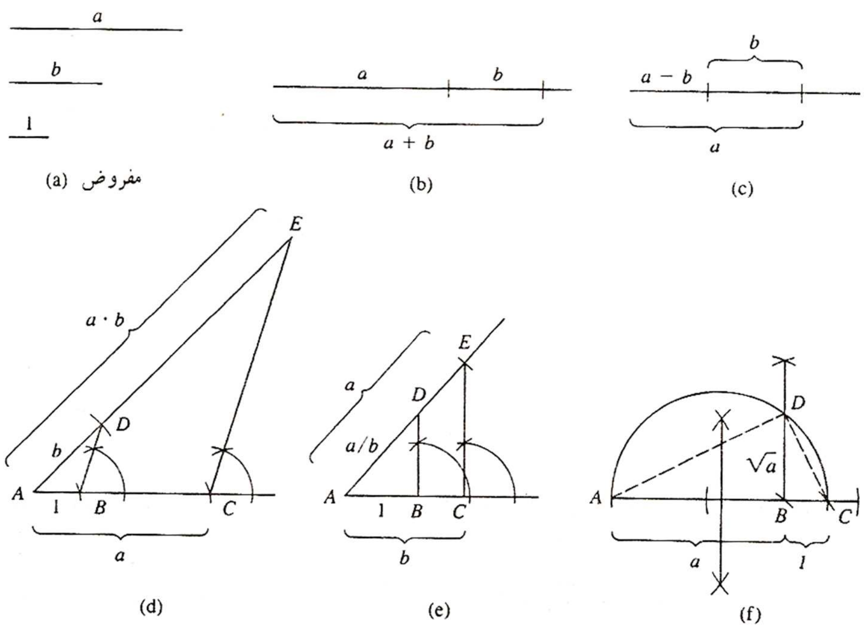
۱۳.۲. تقسیم یک قطعه خط به نسبت معین k : قطعه خط AB مفروض است ، منظورازتقسیم این قطعه خط به نسبت k این است که نقطه ای مآنند C روی آن درنظربگیریم که k= $\frac{AB}{BC}$ باشد برای این منظورمآنندحالت قبل از A خطی متقاطع با AB رسم می کینم پس نقاط Mو N راروی آن طوری درنظرمی گیریم که k=$\frac{AM}{MN}$ باشد (ساده ترین را ه برای بدست آوردن این نسبت این است که MN را برابر K و AN رابرابر k+1 درنظر بگیریم) حال Nرا به B وصل می کنیم واز M موازی NB رسم می کنیم که AB را در C قطع می کند که برطبق قضیه تالس خواهد بود.[۱۶]



شکل ۷۵: تقسیم قطعه خط به نسبت معین

(۲۹، ص ۲۲).

۱٤.۲. اعدادترسیم پذیر:یک قطعه خط واحدعددیک رآنمایش می دهد درین صورت چه اعداددیگری رامی توآن با آغازازین قطعه خط واحدوتنهااستفاده ازخط کش نامدرج وپرکاردرترسیم قطعه های دیگربا قطعه خط نمایش داد. پاسخ این سوال ست های را که به ست های اعداد ترسیم پذیرمعروف است تعریف می کند. شکل ۷۶ تعبیرهندسی چهارعمل گویای براعداددرست نیز رسم بعضی از اعدادگنگ با استفاده از جریان استخراج جذر دوم یک عددگویامثبت رآنشآن می دهد. اطلاعات داده شده دراین مورد عبارت از سه قطعه خط واقع در شکل 76است گراف های شکل فوق درمورد جمع وتفریق خودشارح آن.ودرموردضرب اثبات ترسیم شکل b ۶-۵ به تنا سب $\frac{a}{AE}$ = $\frac{1}{b}$ بستگی دارد وبنابراین AE=ab است.



شکل ۷۶: نمایش اعداد ترسیم پذیر

درمورد تقسیم نیز اثبات ترسیم شکل ۶-۵ یک تناسب داشته است $\frac{b}{a}$ = $\frac{1}{AD}$ یا $\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ اثبات این که BD درشکل ۶r-۵ تساوی $\sqrt{a}$ است نیز به تناسبی که به نوبه خوداز مثلث های قایم الزاویه مشابه واقع درشکل مذکور استخراج شده است وابسته است ΔADB ΔDCB $\frac{AB}{BD}$ =$\frac{BD}{BC}$

بنابراین AB=$(BD)^2$

چهارترسیم اولیه جمع ،تفریق،ضرب وتقسیم فوق ترسیم قطعه خط نمایش دهنده هر عدد درمیدآن (ساحه) اعداد گویا را بامعلوم بودن قطعه خط واحد ممکن می سازد. ازآنجایکه طولهای مثبت درنظرگرفته می شوند، می توآن قطعات جهت داررابا علامت منفی درپیشروی طول آنها برای نمایش اعداد منفی به کار برد(۲، صص ۲۲۷، ۲۲۸).

خلاصه فصل دوم

ترسیم های اساسی هندسه مسطح مبحث اصلی این فصل بود. دیدیم که ترسیم یک قطعه خط ، مساوی به یک قطع خط داده شده توسط خط کش نامدرج وپرکارممکن است. ترسیم ناصف عمودی قطعه خط توسط خط کش نامدرج وپرکارامکان دارد. ترسیم خط عمودی بر خط داده شده از نقطه خارج آن توسط خط کش نامدرج وپرکارصورت میگیرد. ترسیم یک خط موازی داده شده با خط داده شده از یک نقطه معین توسط خط کش نامدرج وپرکارممکن است. ترسیم دو خط موازی تنصیف یک قطعه خط توسط خط کش نامدرج وپرکارمکن است. ترسیم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه خارج آن توسط خط کش نامدرج وپرکارصورت میگیرد.

همچنان، تقسیم قطعه خط با ۵ حصه مساوی توسط خط کش نامدرج وپرکارمیتواند صورت گیرد . تقسم قطعه خط با n حصه مساوی توسط خط کش نامدرج وپرکارمیتواند صورت گیرد . تقسیم یک قطعه خط به نسبت معین توسط خط کش نامدرج وپرکارمیتواند صورت گیرد.

اعداد ترسیم پذیر را میتوان به وسیله خط کش نامدرج و پرکار ترسیم کرد . ترسیم ناصف الزاویه یک زاویه داده شده توسط خط کش نامدرج وپرکارممکن است. ترسیم یک زاویه مساوی به یک زاویه داده شد (ترسیم دو زاویه برابر) توسط خط کش نامدرج وپرکارمکن است.

مسایل فصل دوم

۱- نقطه A خارج از مستقیم (a) قراردارد. ازنقطه A خط مستقیم b را موازی به مستقیم a رسم نمائید.

۲- ازنقطه A به مستقیم b عمود ترسیم نماید.

۳- قطعه خط AB داده شده است آنرابه دوحصه مساوی توسط خط کش وپرکارتقسیم نماید

۴- زاویه kراکه مساوی به زاویه A باشد رسم کنید.

۵- ناصف الزاویه مطلوب را رسم کنید

۶- قطعه خط CD وخط Δ داده شده است روی خط Δ قطعه خط مساوی به خط CD ترسیم نماید.

۷- قطعه خط AB داده شده است نقطه وسط این قطعه خط را دریافت نماید .

۸- ترسیم خط عمودبریک خط مفروض را ازنقطه ای خارج آن توسط خط کش وپرکارآنجام دهید

۹- قطعه خط رابه ۵ حصه مساوی تقسیم کنید.

کتابنامه

۱. اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). **هندسه جدید.** ترجمه یاسی پور، غلام رضا**.** تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **رسم شکلهای هندسی در هندسه مسطح**،جلد ۱۱. نهران: مدرسه.

۳. گویا، زهرا. (۱۳۸۷). **هندسه ۱**. نهران: مرکز نشر دانشگاهی.

٤. نجذبی، حمید رضا. (۱۳۸۳). **هندسه و رسم فنی**. تهران: شهر آب.

۵. نظامی، م. (۱۳۶۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

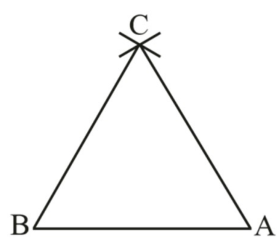
فصل سوم

ترسیم مضلع های منظم

مضلع های منظم در تخنیک وصنعت برای استحکام وزیبایی ساختمانها، ساخت پرزه جات کاشی ها وغیره مورد استفاده زیاد قرار میگیرد. مادر این فصل قواعد ترسیم مثلثها، ترسیم چهار ضلعی های منظم، ترسیم پنج ضلعی منظم، ترسیم شش ضلعی منظم ، ترسیم هفت ضلعی منظم، ترسیم هشت ضلعی منظم، ترسیم نه ضلعی منظم ، ترسیم ده ضلعی منظم، ترسیم یازده ضلعی منظم ، ترسیم دوازده ضلعی منظم، ترسیم سیزده ضلعی منظم، ترسیم پانزده ضلعی منظم ، ترسیم هفده ضلعی منظم به وسیله پرکار وخط کش مورد مطالعه قرار میدهیم.

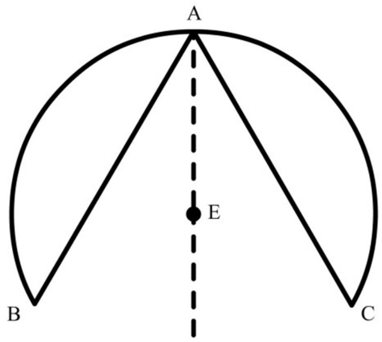
۱.۳. ترسیم مثلثها

ترسیم مثلث متساوی الاضلاع با معلوم بودن اندازه ضلع: اگر بخواهیم، برخط AB مثلث متساوی الاضلاعی را رسم کنیم ، اول نقطه A.ونقطه B را مرکز قرار می دهیم، وبه شعاع AB دو قوس را رسیم میکنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع نمایند، سپس از نقطه های A و B دو خط به نقطه C ترسیم می کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع ABC به دست آید .



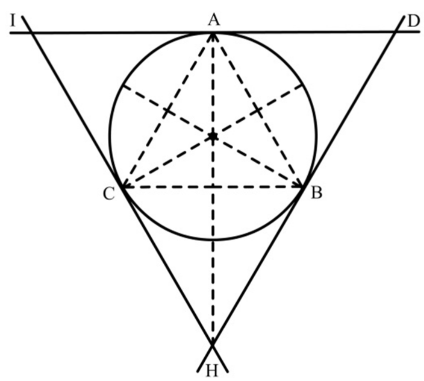
شکل ۷۷ : مثلث متساوی الاضلاع با معلوم بودن اندازه ضلع

ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره به شعاع R: اگر بخواهیم در دایره ABC به مرکز E مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنیم قطر AED را ترسیم میکنیم و نقطه D را مرکز قرار می دهیم، وبه طول ED دو نقطه B و C را تعیین می نمأیم .سپس خطهای AB، BC و AC بدست میاید ، که درنتیجه اتصال خطوط هذا مثلث مستاوی الاضلاع محاط، در دایره بدست میاید(۱۰، ص۳۶).



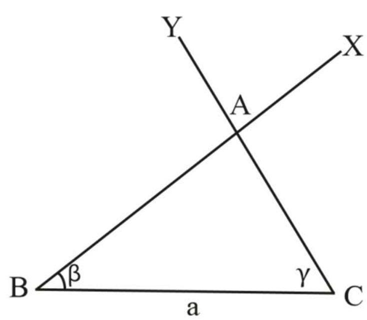
شکل ۷۸ : مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره به شعاع R

ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محیط بردایره به شعاع R: اگر بخواهیم بر دایره مثلث متساوی الاضلاع ABC را رسم نماییم ابتدا در آن دایره، مثلث متساوی الاضلاع ABC را رسم وسپس از نقطه های A،B وC خطهایی مماس بر دایره رسم می کنیم، تا یکدیگر را در نقطه های H،D و I قطع نمایند و مثلث متساوی الاضلاع IHD به دست آید.



شکل ۷۹ : مثلث متساوی الاضلاع محیط بردایره به شعاع R

ترسیم مثلث بامعلوم بودن دوزاویه وضلع بین آن دوزاویه: مثلث ABC زاویه های $\hat{B}=\beta$ و $\hat{C}=\gamma$ وضلع $BC = a$داده شده است، می خواهیم این مثلث را رسم کنیم.



شکل ۸۰ : نمایش ترسیم مثلث

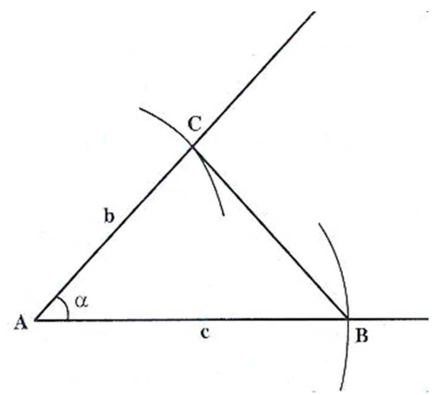
a) قطعه خط $\overline{BC}$ به طول a را رسم می کنیم

b) ازنقطه B نیم خط BX را چنان رسم می کنیم، که بانیم خط $\overline{BC}$ زاویه ای مساوی زاویه $\hat{B}$=β بسازد

c) ازنقطه c نیم خط cy راطوری رسم میکنیم که بانیم خط CB زاویه ای مساوی به زاویه $\hat{C}$ = γ بسازد

A نقطه تقاطع دو نیم خط BX و cy رأس سوم مثلث ABC است شرط امکان مسَلهآن است که $B^{\wedge} + C^{\wedge} = \beta + \gamma = 180°$ باشد .

ترسیم مثلث بامعلوم بودن دوضلع وزاویه بین آن دوضلع: دوضلع $AB = c$ و $AC = b$ وزاویه $A\hat{B}C = \alpha$ درمثلث داده شده است می خواهیم مثلث ABCرا رسم کنیم .



شکل ۸۱: نمایش ترسیم مثلث با معلوم بودن دو ضلع وزوایه بین آن دو ضلع

a) زاویه $XAY = \alpha$ رارسم می کنیم (بدین ترتیب که نخست نیم خط AX رارسم می کنیم ، سپس نیم خط Ay راطوری رسم میکنیم که با خط AX زاویه $XAY = \alpha$)

b) دایره ای به مرکزA وبه شعاع $AB = c$ رسم می کنیم، تانیم خط AX رادر نقطه B قطع کند.

c) دایره ای به مرکز A وبه شعاع b رسم می کنیم، تا نیم خط Ay رادرنقطه C قطعه کند.

d) ازB به C وصل می کنیم، مثلث ABC جواب مسَله است .

یاد داشت : می توانیم اول خط دلخوه Δ را رسم کنیم، وروی آن قطعه خط AB=c را مشخص سازیم آنگاه از A نیم خط Ay رامشخص ساخته C را به B وصل کنیم مثلث ABC بدست می آید شرط امکان مسَلهآن است که $XAY = \alpha = 180°$ باشد.

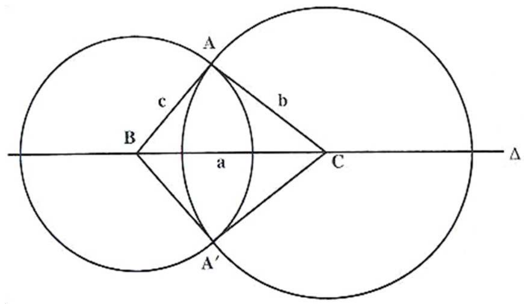
ترسیم مثلث بامعلوم بودن سه ضلع آن : a، b وc اندازه های سه ضلع مثلث ABC داده شده اند. می خواهیم، این مثلث را رسم کنیم

a) خط دلخواه Δ رارسم کرده روی آن قطعه $BC = a$ را جدا می کنیم

b) دایره ای به مرکز B وشعاع AB=cرسم می کنیم

c) دایره ای به مرکز C وبه شعاعAC =b رسم می کنیم

d) نقطه تقاطع، دودایره بالای رأس A ازمثلث ABC است

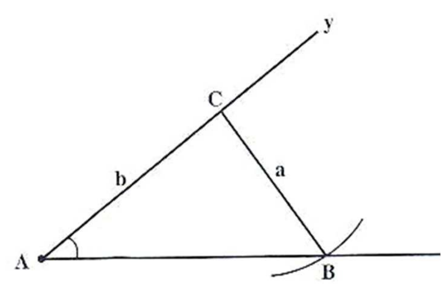


شکل ۸۲: نمایش ترسیم مثلث بامعلوم بودن سه ضلع توسط قطع دو دایره

ازنقطه A به B وC وصل می کنیم مثلث رسم می شود.شرط امکان مسًله آن است که $|b - c < a < b + c|$ باشد.

یاد داشت: دودایره رسم شده، دردونقطه A و $\acute{A}$ یکدیگرراقطع می کنند. مثلث $\acute{A}$BC نیزجواب مسًلهاست. اما این مثلث، برابرمثلث ABC می باشد (به دلیل تساوی خطهای متناظردومثلث) پس مسًله یک جواب دارد.

ترسیم مثلث بامعلوم بودن دوضلع وزاویه روبه روی یکی ازآن دوضلع: ازمثلث ABC ضلعهای BC=a وAC=b وزاویه $\hat{A} = \alpha$ داده شده است، می خواهیم این مثلث را رسم کنیم .



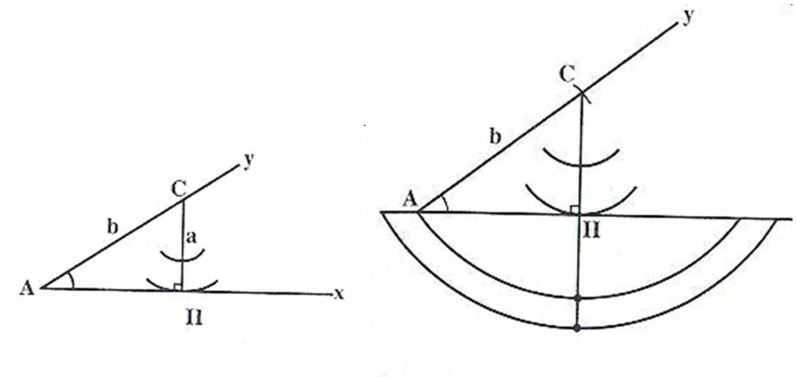
شکل ۸۳: نمایش ترسیم مثلث بامعلوم بودن دوضلع وزاویه روبه روی یکی از آن دوضلع

a) زاویه $x\hat{A}y = \propto$ رارسم می کنیم
b) روی AY قطعه خط AC=b را جدا می کنیم
c) دایره ای به مرکزC وشعاع $BC = a$ رسم می کنیم تانیم خط AX را درنقطه B قطع کند. از B به C وصل می کنیم مثلث ABC جواب مسًله است .

تذکر: شرط امکان وتعداد جوابهای مسًله بستگی به این دارد. که دایره به مرکز C وبه شعاع a نیم خط AX راقطع کند، باآن مماس باشد ویا آن را قطع کند.

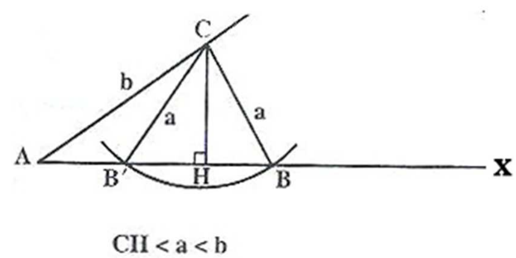
برحسب آن که، زاویه A حاده ، قایمه یامنفرجه باشد، سه حالت وجود دارد

حالت اول:فرض میکنیم که زاویه A حاده است عمود CH رابرAX رسم می کنیم ، برحسب آن که a<CH یا a>CH ویا a=CHباشد دایره به مرکزC وبه شعاع a به ترتیب نیم خط AX راقطع نمی کند. برآن مماس است، یادردونقطه قطع می کند. باتوجه به آن که نقطه B باید روی نیم خط AX باشد (نیم خط سمت راست نقطه A) زیرا اگردرسمت چپ نقطه A واقع شود. زاویه CAB برابر∝ نخواهد بود، بلکه مساوی مکمل این زاویه خواهد بود. دراینصورت $\mathrm{a} < CH$ مسٔلهجواب ندارد. شکل ۸۵
اگر $\mathrm{CH} = \mathrm{a}$ مسٔلهیک جواب دارد که مثلث ACH قایم الزاویه است.



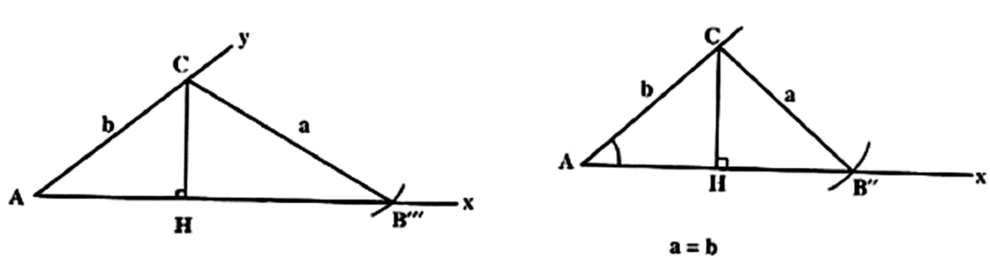
شکل 84 : نمایش ترسیم مثلث شکل ۸۵ : نمایش ترسیم مثلث

اگر CH<a<b باشد مسٔله دوجواب دارد (مثلث ABC و $\mathrm{A}\grave{B}\mathrm{C}$)اگر a=b باشدیک جواب دارد مثلث $\mathrm{AB''C}$ متساوی الساقین



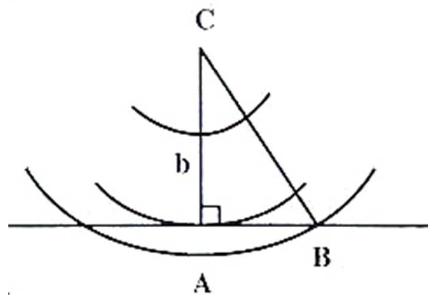
شکل 86 : نمایش ترسیم مثلث متساوی الساقین

اگر $b < \mathrm{a}$ باشد، یک جواب مثلث $\mathrm{AB'''C}$ است



شکل ۸۷ : نمایش ترسیم مثلث متساوی الساقین

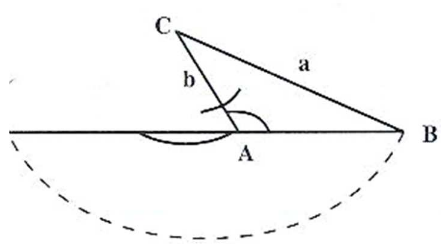
حالت دوم: زاویه $\hat{A}$ =90° است. درین حالت $a < b$ مسّله جواب ندارد. $a = b$ مسّله جواب ندارد a>b مسّله یک جواب دارد (مثلثABC)



شکل ۸۸ : نمایش مثلثa<b

بایدتوجه داشت که درحالت $a > b$ دایره به مرکزC وشعاع a خط AX را دردونقطه B و $\acute{B}$ (متناظرنسبت به نقطه A) قطع میکندولی چون دومثلث قایم الزاویه CAB و $CA\acute{B}$ برابراند، پس مسّله تنها یک جواب دارد.

حالت سوم: $\acute{A}$ >90° دراین حالت نیزباید رأس B روی نیم خط AX باشد ،اگر a <b مسله جواب ندارد a=b مسّله جواب ندارد a>b مسّله یک جواب دارد (مثلث ABC)



شکل۸۹ : نمایش ترسیم مثلثa>b

یاد داشت: ضمن بحث دراین مسّله دیدیم که ممکن است دردومثلث دوضلع هم مانند به یکدیگر متساوی باشند. وزاویه های روبه روبه یکی ازضلع ها ی آن دومثلث نیز متساوی باشند،ولی دومثلث برابرنباشند امادرصورت که a>b باشد مسّله همیشه یک جواب دارد.بنابراین نتیجه میگریم که : اگردومثلث دوضلع هم مانند بایکدیگرمتساوی وزاویه های روبه رو بزرگترین ضلع آن نیز دردومثلث متساوی باشند دومثلث مساوی اند.

ترسیم مثلث بامعلوم بودن دوزاویه ویک ازدوضلع که بین آن دو زاویه نیست: ازمثلثABC دوزایه ∝ = $\acute{A}$ ، β = $\acute{B}$ وضلع $AC=b$ داده شده است می خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم .

a) روی خط اختیاری XY قطعه خط $AC=b$ را جدامی کنیم

b) ازنقطه *C* نیم خطی رسم میکنم که با *Cy* راویه مسای $\acute{B}$ +$\acute{A}$ = β + ∝ بسازد.

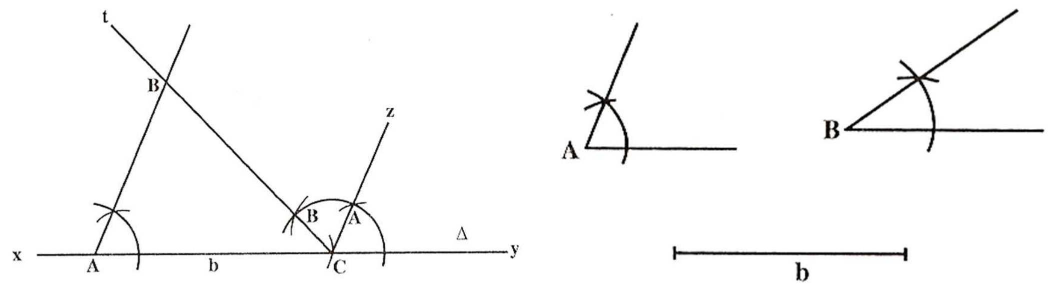
c) نقطه A نیم خطی رسم می کینم که با AC زاویه $\acute{A}$ = ∝ را بسازد.

d) نقطه تقاطع دونیم خط رسم شده از C و A نقطه B رأس سوم مثلث است .

e) برای رسم زاویه ای مساوی با β+ ∝= $\hat{A}$+$\hat{B}$ که یک ضلع آن نیم خط Cy باشد چنین عمل می کنیم :

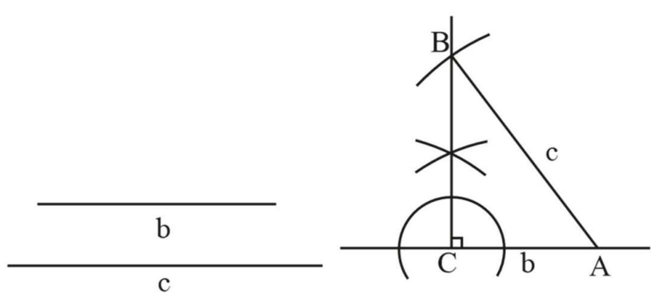
۱- نیم خط Cz راچنان رسم می کنیم که $zCy = \hat{A}$ باشد

۲- نیم خط Ct را خارج زاویه zcY چنان رسم می کنیم که $t\hat{c}z = \widehat{B}$ باشد، دراین صورت زاویه $tC\check{}y = A\hat{} + B\hat{}$ خواهدبود.



شکل ۹۰: ترسیم مثلث

ترسیم مثلث قایم الزاویه وبامعلوم بودن وتر ویک ضلع آن: وتر C وضلع b ازمثلث قایم الزاویه ABC داده شده است می خواهیم این مثلث رارسم کنیم



شکل ۹۱: نمایش ترسیم مثلث قایم الزاویه

a) روی خط Δ قطعه خط $CA = b$ را رسم می کنیم

b) ازنقطه C عمود CX را برخط AC ترسم می نمایم

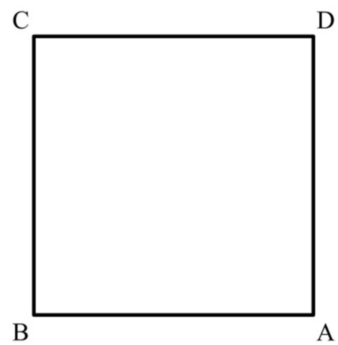
c) به مرکز A وبه شعاع $c = AB$ دایره ای رسم می کنیم تا عمود CX را درنقطه ای B قطع کنداز B به A وصل می کنیم مثلث قایم الزاویه CAB جواب مسَله است .

نکته : مسَله دوجواب مشابه دارد که یک جواب محسوب میشود(۱۷، صص ۲۷۱-۲۷۳)

۲.۳. ترسیم چهارضلعی ها

رسم مربع با معلوم بودن انداره ضلع:

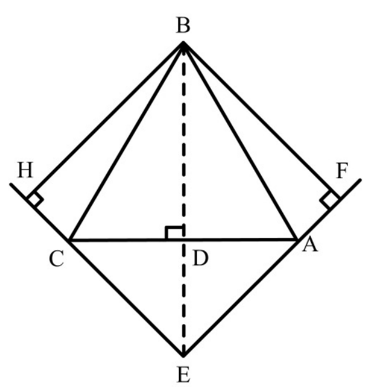
اگر بخواهیم بر خط AB از دو نقطه A و B دو عمود برخط AB ترسیم نمایم، وبه اندازه طول AB روی آنها دو نقطه C و D را نشانی می کنیم ، سپس خط CD را رسیم میکنیم وبعداً این نقاط را باهم وصل میکنیم، مربع ABCD بدست میاید .



شکل ۹۲ : مربع با معلوم بودن انداره ضلع

ترسیم مربع با معلوم بودن مثلث متساوی الاضلاع:

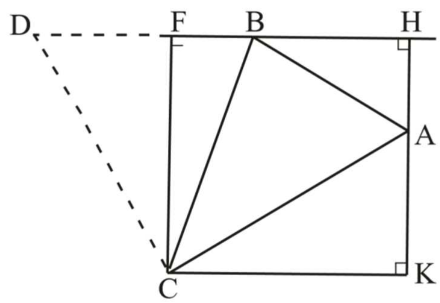
روش ترسیم مربع برمثلث : اگر بخواهیم برمثلثی متساوی الاضلاع مانند مثلث ABC مربعی محیط نمائیم، اول ضلع AC را در نقطه D نصف و خط ناصف عمود BD را رسم مکنیم و آن را معادل AD یعنی نصف ضلع AC تا نقطه E امتداد میدهیم دو خط AE و CE را میکشیم وآن دو را امتداد میدهیم حال از نقطه B دو خط عمودBF و BH را براین دو خط وارد مینمائیم و مربع HEFB را بدست میاوریم .



شکل ۹۳ : مربع با معلوم بودن مثلث

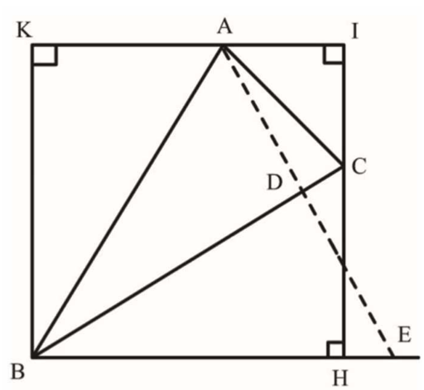
ترسیم مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی: برای بررسی این کارچند طریقه موجود است که هرکدام آنها را ذیلاً مطالعه می نمائیم

طریقه اول . روش ترسیم مربع بر مثلث مختلف الاضلاع : اگر بخواهیم که بر مثلث مختلف الاضلاع ABC مربع محیط نمائیم اول از نقطه C خط عمود CD را به خط AC معادل آ ن رسم میکنیم بعداً خط DB را میکشیم وآن را امتداد می دهیم سپس از نقطه C عمود بر CE را بر این خط فرود می آوریم وخط عمود CK را از خط CE اخراج می نماییم حال از نقطه A خط AH را به دو جهت موازی CE رسم کنیم تا در نقطه های H وK به دو خط EH وCK برسد مربع HKCE مربع خواسته شده میباشد .



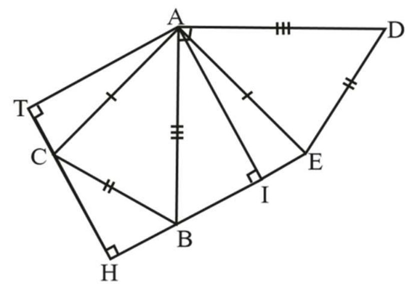
شکل ۹۴ : مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی

طریقه دوم : در مثلث مختلف الاضلاع ABC از نقطهA عمود AD را بر ضلع BC ترسیم مینمائیم و آن را تا نقطه E امتداد میدهیم بطور که AE مساوی BC شود ، سپس DE را رسم میکنیم و در نقطه C عمود CH را بر این خط ترسیم مینمائیم و بعد از نقطه A عمود AI را برخط CH و از نقطه B عمود BK را برخط AI رسم مینمائیم تا مربع KBHI بدست اید .



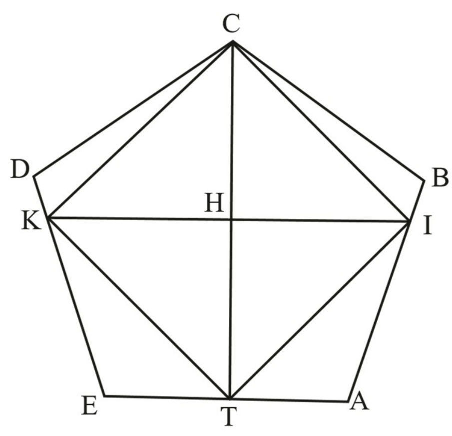
شکل ۹۵ : مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی

طریقه سوم : در مثلث مختلف الاضلاع ABC از نقطه A خط AD را عمود بر AB اخراج مینمایم و آن را مساوی AC امتداد میدهیم سپس مثلث ADE را معادل مثلث ABC رسم میکنیم، یعنی خط AE مساوی ضلع ABوAD مساوی ضلع BCبعداً خط BE را میکشیم و از نقطه C عمود HC را برآن و همچنین از نقطه A عمود AIرا برخط BE و عمود TA را برخط CH ترسیم مینمائیم تا مربع $HIAT$ بدست آید .



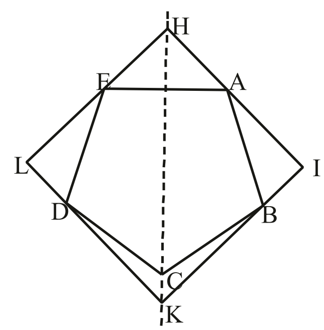
شکل ۹۶ : مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی

ترسیم مربع با معلوم بودن پنج ضلع منظم: اگر بخواهیم مربع در پنج ضعلی متساوی الاضلاعی مانند $EDCBA$ محاط نمائیم، اول عمود TC را رسم وآن را در نقطه H نصف می کنیم و بعداًاز نقطه H خط KHI را موازی ضلع EA و یا عمود برخط TC رسم مینمائیم تا دو ضلع BA و ED را در نقطه های K و I قطع نماید حال خط های KT, TI, IC و CK را رسیم میکنیم تا مربع $KTIC$ بدست آید .



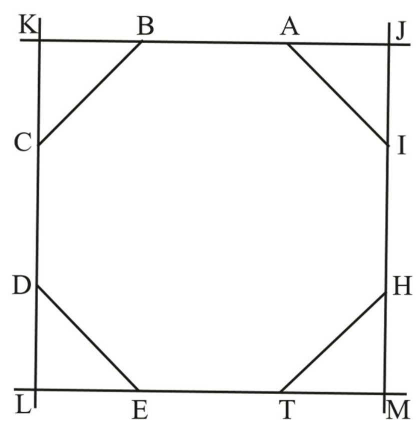
شکل ۹۷ : مربع با معلوم بودن پنج ضلعی منظم

اگر بخواهیم مربع بر پنج ضلعی مانند EDCBA که متساوی الاضلاع ومتساوی الزوایا میباشد محیط نمائیم اول ضلع EA را نصف و خط عمود منصف آن را مساوی نصف ان رسم میکنیم و بعد خط های AHو EH را میکشیم و از نقطه های B و D دو خط عمود IB و LD را بر امتداد آنها فرود میاوریم و آنها را ازطرف دیگر امتداد میدهیم تا یکدیگر را در نقطه K قطع نمائید چهارضلعی LKIH بدست میاید که متساوی الاضلاع و الزوایا میباشد.



شکل ۹۸ : مربع محیط با معلوم بودن پنج ضلعی منظم

ترسیم مربع با معلوم بودن هشت ضلعی منظم: اگر بخواهیم که مربعی را به ضلع های هشت ضلعی محیط نمائیم،هر دو ضلع مقابل را از دو طرف امتداد می دهیم تا امتداد دو ضلع مقابل دیگر را قطع کند و مربع

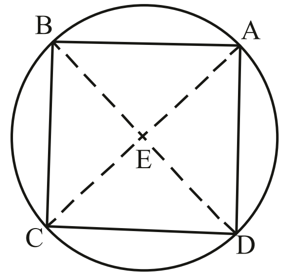


محیطی را به دست میآوریم مانند هشت ضلعی IHTEDCBA ومربع LMJk که بر آن محیط شده است.

شکل ۹۹ : مربع با معلوم بودن هشت ضلعی منظم

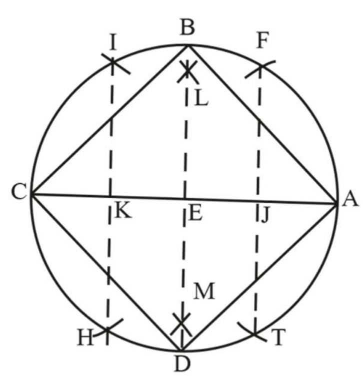
ترسیم مربع محاط در دایره به شعاعR: ترسیم مربع محاط در دایره به شعاع R به روش های ذیل صورت میگیرد.

روش اول اگر بخواهیم در دایره مربع ABCD را رسم کنیم . دو قطرAC و BD را عمود بر یکدگیرمی کشیم سپس و ترهای CD,BC,AB وAD را رسم می کنیم تا مربع متساوی الاضلاع و الزوایای ABCD بدست آید .



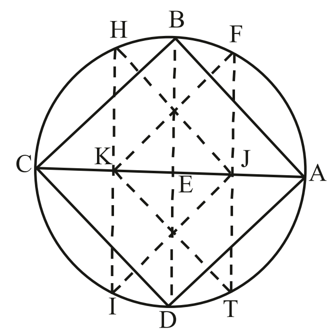
شکل 100: مربع محاط در دایره به شعاعR.

روش دوم : اگربخواهیم مربع را بایک اندازه پرکارکه معادل نصف قطردایره است رسم نماییم ،اول قطرAC را رسم و بعد به مرکز A با همان اندازه پرکارنقطه های F و T را نشان می کنیم و خط FT را می کشیم تا قطر AC را در نقطهJ قطع نماید سپس به مرکز نقطه C و با همان اندازه پرکارنقطه های H وI را نشان میکنیم وخط Hi را میشکیم تا قطر AC را درنقطهK قطع نمایند حال دو خط KT وHI را میکشیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع نماید.به مرکزدایره وصل می نماییم قطر های عمود بر قطر AC میباشد وآنرا از دوطرف امتداد میدهیم تا به دایره در نقطه B وD تلاقی کند وبا کشیدن وترهای AB,BC,CD و DA مربع ABCD را بدست میآوریم.



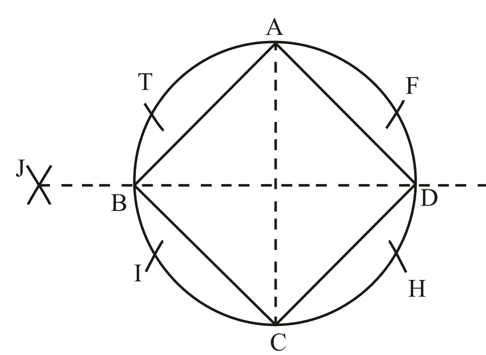
شکل ۱۰۱: مربع محاط در دایره به شعاعR

روش سوم : قطرAC را میکشیم وبه مرکز A نقطه های F وT وبه مرکز C نقطه های H وI را نشانی میکنیم وبا کشیدن خطهای FT و HI محل تلاقی آنها را با قطر AC یعنی نقطه های J وK تعین می نماییم سپس دو نقطه های J وK را مرکز قرار میدهیم وبا همان اندازه با پرکار قوس هایی می زنیم تا یکدیگر را در نقطه های L وM قطع کنند سپس خط LM را میکشیم این خط عمود منصف قطر AC است وامتداد آن ، دایره را در دو نقطه B وD قطع مینماید حال باکشیدن وترهای AB,BC,CD و DA مربع ABCD را تکمیل مکینیم.



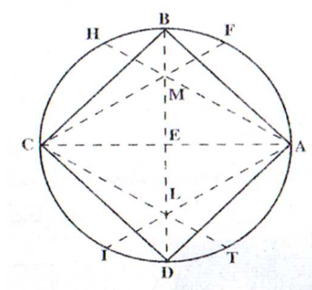
شکل ۱۰۲: مربع محاط در دایره به شعاعR

روش چهارم : قطر AC را میکشیم و به مرکز A نقطه های F وT وبه مرکز C نقطه های H و I را نشان میکنیم سپس نقطه های H,T,F و I را مرکز قرار میدهیم وبا همان اندازه پرکار قوسهایی می زنیم تا یکدیگر را در نقطه های K وJ قطع نمایند بعد خط KJ را میکشیم ، این خط دایره را دونقطه B وD قطع میکند وبر قطرAC عمود است حال باکشیدن خطهای CD,BC,AB و DA مربع متساوی الاضلاع والزوایا را بدست می آوریم.



شکل ۱۰۳: مربع محاط در دایره به شعاعR

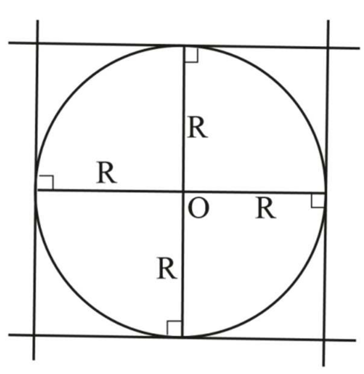
روش پنجم : پس از کشیدن قطر AC و نشان کردن نقطه های H,T,F و I خطهای IA وTC را رسم میکنیم تا یکدیگر را در نقطه L قطع نمایند. سپس از نقطه L خطی به مرکز دایره وصل میکنیم واز دوطرف امتداد میدهیم تا با دایره در نقطه های B وD متقاطع شوند. حال با رسم خطهای AB، BC , CD و DA مربع را تمام میکنیم.



شکل ۱۰۴ : مربع محاط در دایره به شعاعR

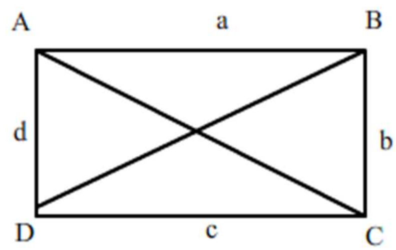
روش ششم : پس از کشیدن قطر AC ونشانی کردن نقطه های T و I وپیدا کردن نقطه L و همان ترتیب یعنی با همان اندازه پرکار از نقطه های A وC نقطه های F وH را نشانی و خطهای HA وFC را رسم میکنیم. تا در نقطه M یکدیگر را قطع نمایند. حال نقطه را به نقطه M وصل میکنیم واز دوطرف امتداد میدهیم تا بادایره در نقطه های B وD متقاطع شود. سپس با رسم خطهای AC , BC ,CD و DA مربع را تمام میکنیم.

ترسیم مربع محیط بردایره به شعاع R: محیط دایره را به چهار کمان مساوی تقسیم میکنیم و در نقطه های تقسیمی خطهای مماس بردایره رسم میکنیم به بیان دیگر دو قطر عمود برهم از دایره را رسم میکنیم و در انتهای این قطر ها خطهای عمود برآنها رسم میکنیم تا مربع مورد نظر بدست آید . بدیهی است که اندازه هرضلع این مربع مساوی 2R است(۱، صص ۲۲۷-۲۳۰).



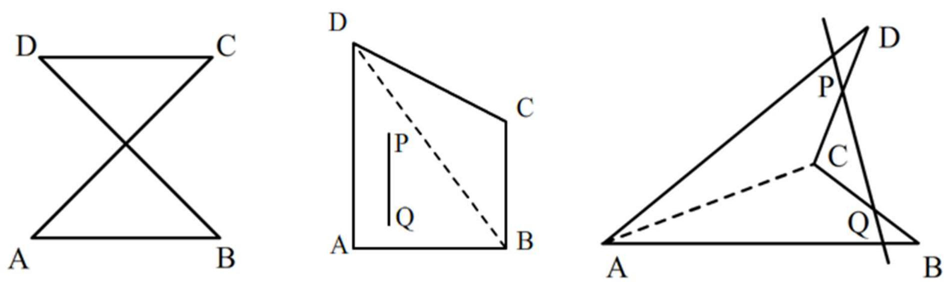
شکل 105 : مربع محیط بردایره به شعاع R

چهارضلعی های محدب و مقعر: درهندسه مسطح چهارزاویه ای که فقط دارای چهارضلع می باشد موسوم به چهارضلعی میباشد. اگرنقاط مورد بحث A،B ،C ،D باشند، درین صورت قطعه خطهای AB=a و (BC)=b و (CD)=c و (DA)=d اضلاع چهارضلعی می باشند ودوقطعه خط AC وBC بنام قطریاد می گردند.مثلا چهار ضلعیA ،B ،C ،D



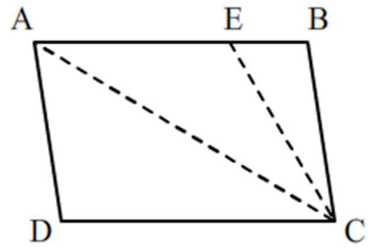
شکل ۱۰۶ : مستطلیل وقطر های آن

چهارضلعی هارامی توان به بخش های محدب ومقعر وپروانه ای تقسیم بندی نمود. قسمی که اگر دونقطه مجزا ودلخواه ازداخل چهارضلعی را به یکدیگر وصل نمائیم قطعه خط حاصله کاملا درون شکل واقع شود محدب واگر در خارج از شکل واقع شود مقعر یاد می شوند. وهمچنان اگر قطری از چهار ضلعی ترسیم وشکل را به دومثلث تقسیم نماید چهار ضلعی محدب ویا مقعر می باشد درغیر آن پروانه ای خواهد بود.



شکل ۱۰۷ : مقعر   شکل ۱۰۸ :محدب   شکل ۱۰۹: پروانه ئی

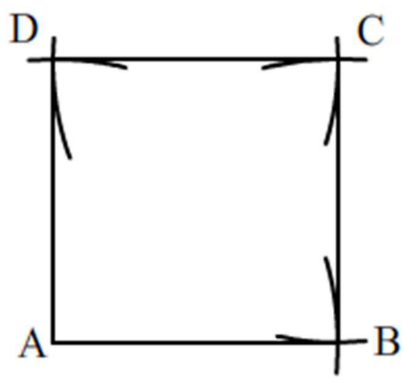
ترسیم یک چهارضلعی بامعلوم بودن طول اضلاع آن: اگردریک چهارضلعی اندازه طول هرچهارضلع معلوم باشدوناصف الزاویه یکی اززاویا برابربا قطر باشد،میتوان طول ضلع آنراترسیم نمود.درچهارضلعی ABCD وقطرAC که برابربا ناصف الزاویه رأس A میباشد درقدم اول یک مثلث بنامBECرابامعلوم بودن سه ضلع آن ترسیم می کنیم که درآن EB=AB-ADباشد وضلع BEازنقطه E تا نقطه A به اندازه AB (ضلع معلوم چهارضلعی) امتداد داده شده را به C وصل نموده ومثلث ABC را که دوضلع دیگرآن AD وDCاست ترسیم نمائیم با تعیین نقطه D شکل چهارضلعی تکمیل می گردد.



شکل ۱۱۰ : متوازی الاضلاح نمونه چهار ضلعی

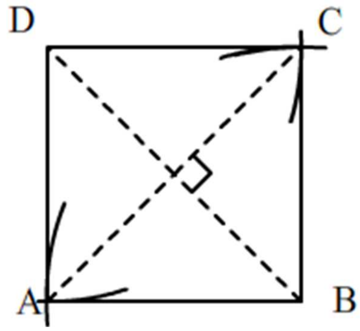
جهت بهترروشن شدن موضوع چهارضلع های منظم را ذیلاً ترسیم می نمائیم .

ترسیم چهارضلعی های منظم مخصوص: مربع ABCD رابا ضلع دلخواه رسم میکنیم به اساس تعریف که مربع یک چهارضلعی است که هرچهارضلعی وزاویه های آن قایم است میتوان مربع دلخواه را رسم کردطوریکه اول یک خط دلخواه AB را در سطح رسم می نمائیم بعداً توسط پرکاربه اندازه قطعه خط AB هرسه طرف آن قوس را رسم می نائیم (قوس ازنقطه Aوبعداازنقطه B)که این قوس هارادریک نقطه قطع می کندنقطه تقاطع دوقوس را به نقطه A وصل می کنیم .وبه هیمن ترتیب کارخودرا ادامه میدهیم تامربع مورد نظر رابدست آوریم میتوان که هرنقطه را مرکزگرفته وازآن قوس ترسیم شود به شرطیکه وسعت پرکارتغییرنکند.



شکل ۱۱۱ : مربع

ترسیم مربع با معلوم بودن یک قطرآن: برای ترسیم مربع ABCD که یک قطرآن مشخص شده باشد می توان ناصف عمودی آنرابه اندازه خودش دریافت کرد تارأس های مربع حاصل شود با وصل نمودن انجام های دوخط عمودبرهم (قطر) مربع حاصل می گردد .

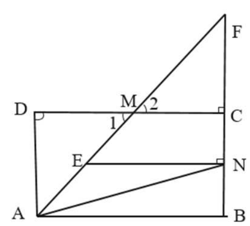


شکل ۱۱۲ : مربع با قطرها

ترسیم مستطیل بامعلوم بودن یک رأس ونقاط میانه دوضلع: ازاشکال اساسی منظم هندسی که دارای خواص مشخص می باشند مستطیل را نیزمیتوان محسوب داشت (اضلاع دوبه دوموازی ومساوی چهارزاویه قایم وقطرهای برابروناصف یکدیگراند). اگرازیک مستطیل ABCD فاصله یک رأس تامیانه دوضلع مقابل معلوم باشد می توان با معلوم بودن میانه ها شروع نمودقسمی که AM را امتداد داده تا امتداد BC را د F قطع نماید. دومثلث قایم الزاویه MFC و MDA حاصل می شود که با یکدیگر برابرمی باشند ($\widehat{M}_1$=$\widehat{M}_2$ ، $\widehat{D}$=$\hat{C}$ DM=MC) درنتیجه AM=FM حال از N (میانه BC) به موازات DC رسم می نمایم تا AM رادرمیانه آن نقطه E قطع کند. پس محل هندسی نقطه N بروی دایره ای به مرکزیت A وشعاع AN وازطرف دیگر بروی نیم دایره ای به قطر EF است .

به عباره دیگر می توان روش ذیل را نیز مورد مطالعه قرارداد: برای ترسیم مستطیل ABCD قطعه خط AM رابه اندازه خودش امتداد داده وسپس دودایره یک به مرکزیت A وشعاع AN . ودیگری نیم دایره ای به قطر EF ترسیم می نمایم که درنقطه ای مانند N تقاطع نمایند.

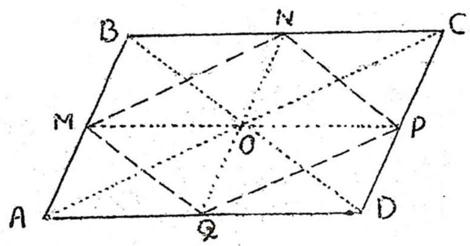
نقطه N و F را وصل نموده واز نقطه M برآن عمودی ترسیم میکنم تانقطه C حاصل گردد. باامتداد دادن CN نقطه B حاصل شده ومیتوان Bرا به A وصل کرد. حال خطی به موازات BC ازA رسم مینمائیم تانقطه D دریافت گردد.



شکل ۱۱۳ : نمونه ترسیم مستطیل

ترسیم متوازی الاضلاع با معلوم بودن نقاط میانه سه ضلع: متوازی الاضلاع چهارضلعی است که دارای الاضلاع دوبه دوموازی ومتساوی می باشد وبرای ترسیم متوازی الاضلاع چون ABCD که میانه اضلاع AB و BC وCD به ترتیب M،NوP می باشد می توان میانه چهارم یعنی DA را دریافت وQ نامیدوچهارضلعی حاصله ازمیانه ها MNPQ چهارضلعی است که دارای اضلاع موازی با قطرهای AC و

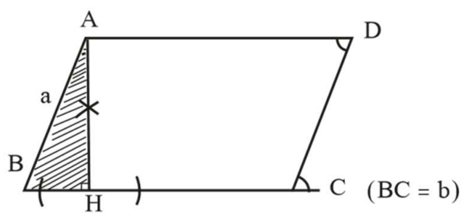
BD از ABCD می باشد. وبرابربا نصف آنها می باشد ولی دارای مرکزیکسان می باشد.با معلوم بودن سه رأس از چهارضلعی MNPQ آنراترسیم نموده واز مرکز (o) که محل تقاطع قطرهای باشد خطی موازی MN را رسم نموده ودردوطرف آن همچنان OA=OC=MN را جدا می سازیم آنگاه A وC را به M وN وP وQ وصل نموده تا رؤس BوD حاصل شوند



شکل ۱۱۴ : نمایش نقاط میانه متوازی الاضلاع

ترسیم متوازی الاضلاع با معلوم بودن دوضلع وارتفاع آن: برای ترسیم متوازی الاضلاع چون ABCDبا معلوم بودن طول دوضلع وارتفاع h درقدم اول قطعه خط با طول کوچکتررا ترسیم می نمائیم سپس به امتداد BH به طول ضلع دوم قطعه خطی را ترسیم وبه موازات آن با A با همان طول تانقطه CوD ادامه می دهیم تاچهار رأس متوازی الاضلاع دریافت شود.

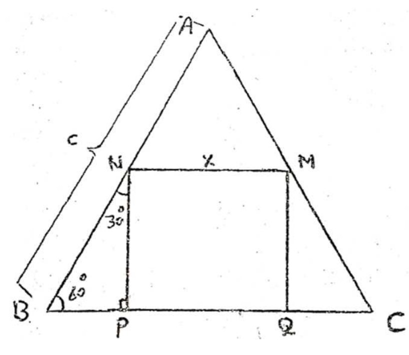
ترسیم مثلث قایم الزاویه وخطی به موازات خط داده شده درصفحات قبلی به بررسی گرفته شده بود.



شکل ۱۱۵ : نمایش ارتفاع متوازی الاضلاع

ترسیم مربع محاطی درمثلث متساوی الاضلاع: چهارضلعی حاصله محاط دریک مثلث متساوی الاضلاع با اضلاع معلوم یک مربع چون ABCD خواهد بود. درمثلث متساوی الاضلاع ABC چهار ضلعی ABCD مفروض است اگر ضلع چهارضلعی را Xفرض کنیم مثلث AMN متساوی الاضلاع وبه ضلع X می باشد(۱۸، صص ۳۳۰-۳۳۵). زیرا:

AM=AN=MN=X
NB=C-X , C=AB



شکل ۱۱۶ : مربع محاط در مثلث

درنتیجه

درمثلث قایم الزاویه BPN زاویه $\widehat{N}$=۳۰°

لذا
$\overline{N}\ B^2=\overline{BP^2}+\overline{NP^2}$, $\overline{BP}=\frac{C-X}{2}$

$(C-X)^2 = (\frac{C-X}{2})^2+X^2$

$C^2+X^2-2CX=\frac{C^2}{2}+\frac{X^2}{2}-CX+X^2$

$\frac{X^2}{2}+CX-\frac{C^2}{2}=0$

$X^2+2CX-C^2=0$

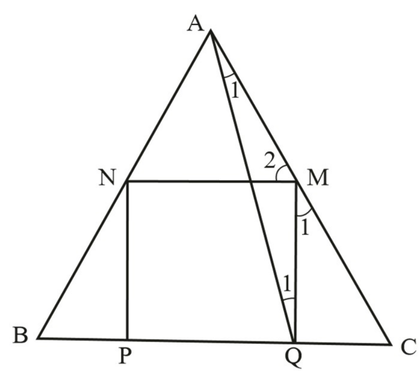
$X=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X=\frac{-2C\pm\sqrt{(2C)^2-4c}}{2}$

$X = C(-1+\sqrt{2})$

با معلوم بودن طول ضلع مربع ،مربع رسم می شود.

علاوه به روش فوق روش دیگری که مشابه به آن است نیز برای ترسیم استفاده می شود به قسمی که از نقطه Aبه Qوصل نموده در مثلث MQC داریم : $\hat{C}$=60 لذا $Q=90^0$ $M_1=30^0$ وهمچنان مثلث AMN متساوی الاضلاع می باشد زیرا $\hat{A}=\widehat{M}$=N=60 درنتیجه MN=MQ=AM ومثلث AMQ یک مثلث متساوی اساقین می باشد وزاویه M_1 زاویه خارجی می باشد .

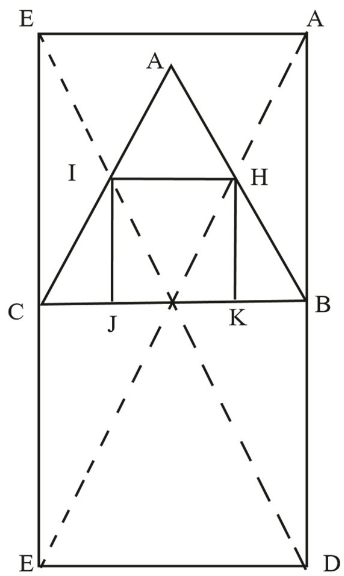
لذا $\hat{A}=\hat{Q}=15^0$ ازنقطه A خطی ترسیم می کنیم که با AC زاویه ۱۵ْ بسازد وضلع BC را درنقطه Q قطع نماید از نقطه Q خط عمودی بر BC دریافت می کنیم تا ضلع AC را در نقطه M قطعه نماید آنگاه از M خطی به موازات BC رسم میکنیم تا AB را درنقطه N قطع نموده واز ان عمودی بر BC ترسیم می نمایم تا P رأس چهارم مربع حاصل گردد .



شکل ۱۱۷ : مربع محاط در مثلث

علاوه بر دو روش فوق روش دیگر برای ترسیم مربع محاط در مثلث متساوی الاضلاع درونی محاسبه واندازه نموده وزاویه های را که دقیق منسوب به ابوالوفا بوزجانی نیز وجود دارد . قسمی که درقدم اول بر ضلع BC از مثلث ABC مربع BDEC را رسم می کنیم (دراین مربع می تواند درجهت رأس مثلث باشد یاعکس آن) سپس ضلع BC را درنقطه T نصف می نمایم وخطوط DT وET را رسم می کنیم تا اضلاع

AB را درنقطه H و AC رادرنقطه I قطع نماید. حال خط HI راوصل ودوعمود HK و IJ رابرضلع BC ترسیم تا مربع HIJK حاصل شود.

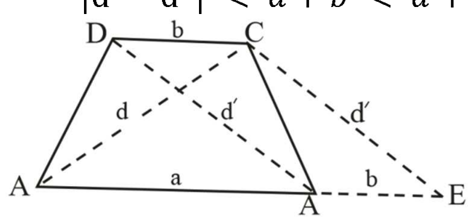


شکل ۱۱۸ : ترسیم مربع محاط در مثلث توسط ابوالوفاء بوزجانی

ترسیم ذوزنقه بامعلوم بودن قاعده هاوقطرها: برای ترسیم ذوزنقه ABCD که دوقاعده $AB = a$ و $CD = b$ وقطرهای $AC = d$ و $BD = d$ معلوم باشد قرار آتی عمل می نمایم:

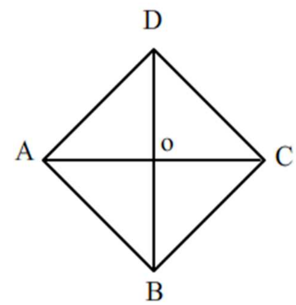
ازانجام قاعده CD یعنی C خطی به موازات قطر BD ترسیم و E می نمائیم متوازی الاضلاع AECD داریم که $BE = b$ و $EC = d$ لذا سه ضلع ازمثلث ABC را دریافت خواهیم داشت که $AC = d$ و $CE = d$ و $AE = a + b$ حال مثلث را ترسیم می نمایم پس از رسم مثلث ازرأس E طول $EB = b$ راجدا نموده تا B دریافت شود وآنگاه CD رامساوی وموازی BE رسم می کنیم تاD حاصل گردد. شرط امکان ترسیم آن است که بتوانیم مثلث ACE را ترسیم نمایم یعنی داشته باشیم

$$|d - d`| < a + b < d + d`$$



شکل ۱۱۹: ذوزنقه و قطر های آن

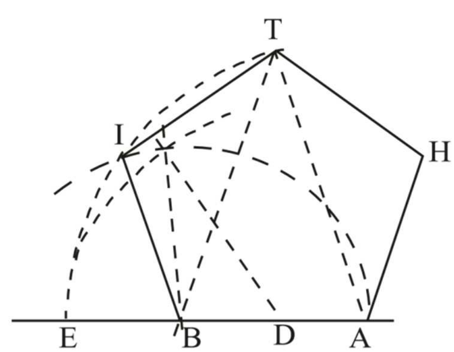
ترسیم لوزی: لوزی عبارت از چهار ضلعی است که چهار ضلع آن باهم برابر باشد وقطرهای لوزی بالای یکدیگرعمود است جهت ترسیم لوزی ABCD اولاً یک مثلث متساوی الاضلاع را توسط خط کش وپرکار ترسیم می نمایم بعداًقاعده آنرامشترک گرفته ومتناظرآنراترسیم می نمائیم بعداً قطرهای آنراترسیم می کنیم وقطرهای لوزی دریک نقطه مانند (۰)باهم عمود بوده وقطرهای لوزی یکدیگررا نصف وبالای یکدیگرعمود می باشد.



شکل ۱۲۰ : لوزی وقطرهای آن

۳.۳.ترسیم پنج ضلعی منظم

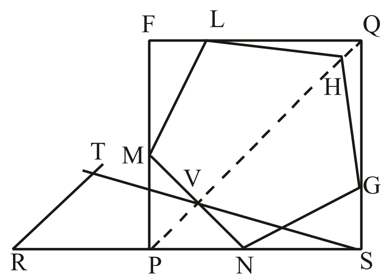
اگر بخواهیم بر خط BA پنج ضلعی متساوی الاضلاعی رسم نمائیم اول از نقطه B عمودBC را مساوی AB اخراج می کنیم . سپس نقطه D وسط خط AB را مرکز قرار می دهیم وبه طول CD قوس EC را می کشیم تا امتداد خط AB را در نقطه E قطع کند حال دو نقطه A و B را مرکز قرار می دهیم وبه فاصله EA دو قوس رسم می نمایم تا یکدیگر را درنقطه T قطع کنند . خط TA و TB را می کشیم تا مثلث BTA که آن را مثلث پنج ضلعی گویند به دست آید . واین مثلث در بسیار از ترسیمات مورد نیاز می باشد . بعد نقطه های B.Aو T را مرکز قرار می دهیم وبه طول BA قوسهائ رسم می کنیم تا در نقطه های I و H یکدیگر را قطع نمایند وباکشیدن خط های IT . TH . HA وBI مخمس متساوی الاضلاع والزوایای HTIBA به دست می آید .



شکل ۱۲۱: پنج ضلعی منظم با معلوم بودن ضلع

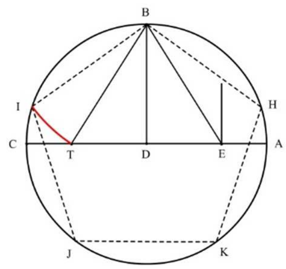
ترسیم پنج ضلعی منظم با معلوم بودن مربع: اگر بخواهیم در مربعی مانند مربع DCBA پنج ضلعی متساوی الاضلاعی مانند JIHTE محاط کنیم به طوری که یک رأس پنج ضلعی بر روی قطر مربع واقع شود . اول پنج ضلعی منتظم دیگری مانند پنج ضلعی GNMLK به هر نحوی که بخواهیم رسم و مربعی مانند مربع FQSP بر أن محیط می نماییم.

بعد روی ضلع PS مساوی AB جدا میکنیم تا نقطه R بدست آید سپس قطر PQ را میکشیم و از نقطه R خطی به موازات آن رسم می نمائیم بعد از نقطه S به وسط ضلع NM وصل میکنیم و آن را امتداد میدهیم تا آن را در نقطه T قطع نمائید حال به روی قطرCA از مربع ، قطع GC را معادل TR جدا و از نقطه G عمودی بر CA اخراج می نمائیم تا دوضلع مربع را درنقطه های I وA قطع کند بعداًخط IH را میکشیم و دو نقطه Hو‌I را مرکز قرار میدهیم و به طول HI دو قوس رسم مینمائیم تا ضلع های مربع را در نقطه های Jو‌T قطع کند و سپس به مرکز J یا T به همان اندازه پرکار قوسی دیگری میکشیم تا قطرCA را درنقطه E قطع نمائید وباکشیدن خطهای JI وEJ تمام میکنیم .



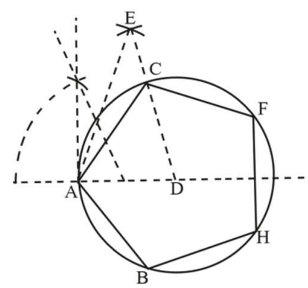
شکل ۱۲۲: پنج ضلعی منظم با معلوم بودن مربع

ترسیم پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R : الف. اگر بخواهیم در دایره پنج ضلعی منظمی محاط نماییم . اول قطر ADC را می کشیم و از نقطه D که مرکز است عمود BD را رسم می کنیم سپس شعاع AD را در نقطه E نصف وبه مرکز E و طول BE قوس ترسیم می کنیم تا قطر را در نقطه T قطع نماید بعدبه مرکز Bو به طول BT قوس IT را رسم میکنیم تا قوس IBرا از دایره جدا کند. این قوس مساوی یک پنجم حصه محیط دایره می باشد حال قوس های HK. KJ. JI وBH را مساوی IB جدا می کنیم وتر آنها را می کشیم تا پنج ضلعی HKJIB با ضلع ها و زاویه های مساوی به دست آید .



شکل ۱۲۳: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

ب. اگر بخواهیم پنج ضلعی منظم در داخل دایره به وسیله پر کار و خط کش ترسیم نمائیم برروی قطعه خط AD یعنی نصف قطر دایره مثلث پنج ضلعی را رسم می نمائیم . ضلع DT از این مثلث دایره را در نقطه C قطع می کند .

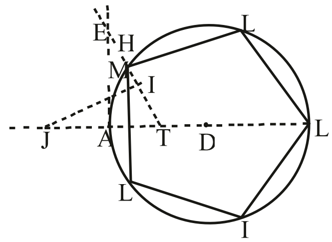


شکل ۱۲۴: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

حال قوس ABC را در چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم از وترهای این چهار قوس با وتر AC پنج ضلعی متساوی الاضلاع به دست میآید .

ج. قوس AC مساوی یکی پنجم محیط دایره وتر آن ضلع پنج ضلعی می باشد و چنانچه محیط دایره را بر طول این قوس تقسیم کنیم پنج ضلعی متساوی الاضلاع والزوایا به دست می آید .

د. خط AD را رسم واز نقطه A عمودی AE را معادل آن ترسیم می کنیم . سپس خط AD را در نقطه T نصف می نماییم وخط ET را ترسیم میکنیم. وبر روی این خط قطعه HT را مساوی AD جدا و آن را در نقطه I به دوقسمت مساوی تقسیم میکنیم وعموی JI را از آن خارج می نمایم تا امتداد AD را قطع کند حال به مرکز O به طول IJ قوسی رسم می نماییم تا دایره را در دونقطه M و L تلاقی کند قوس LM یک پنجم محیط دایره میباشد(۲، صص۲۲۷-۲۳۰).



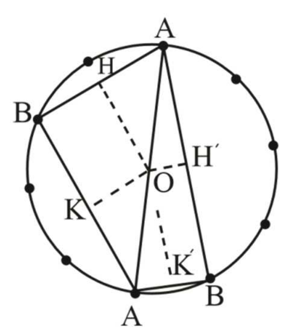
شکل ۱۲۵: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

روش دوم: می دانیم که اگر دایره به دوقسمت مساوی تقسیم شده باشد ونقطه های تقسیم را یک در میان با 4 به ۴ به هم وصل کنیم پنج ضلعی منتظم محدب و پنج ضلعی منتظم ستاره ای به دست آید پس برای ترسیم پتنج ضلعی های منتظم محاطی، ابتدا دایره را به ده کمان برابر تقسیم و سپس نقطه های تقسیم را یک درمیان یا ۴ به ۴ به هم وصل می کنیم اگر AB ضلع پنج ضلعی منتظم محدب محاط در دایره به شعاع R باشد $AB=C_5$ کمان کوچکتر از نیم دایره AB مساوی به $\frac{2}{10}$ دایره است (شکل) واگر قطر AA’ را رسم کنیم کمان کوچکتر از نیمدایره A’B مساوی به $\frac{3}{10}$ دایره میباشد وبنابر این A’B ضلع ده ضلعی منظم ستار ای محاط در دایره است . اگر مرکز دایره را به O و وسط A’B را K بنامیم ، داریم .

$$R_5 = OH = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}\ C'_{10}, C_5 = AB = 2OK = 2r'_{10}$$

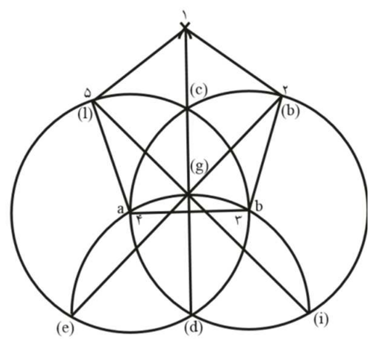
همچنین اگر ضلع پنج ضلعی منتظم ستاره ای را $AB'=C'_5$ ووسط AB’ را H’ ووسط A’B’ را K بنامیم AB ضلع ده ضلعی منتظم محدب است و داریم .

پس $r'_5 = OH' = \frac{1}{2}A'B' = \frac{1}{2}\ C_{10}, C'_5 = AB = 2OK' = 2r_{10}$



شکل ۱۲۶: شکل پنج ضلعی محدب

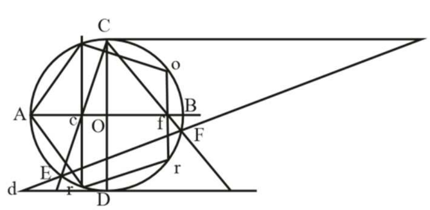
روش سوم .آلبر شت دیورر نه تنها در نوشته ها بلکه حتی در تابلوها وکتابهای خود هم ردپای از استعداد ریاضی خود را نشان داده است گواه ما مربع جادویی مشهور اوست که درتابلو (افسردگی) خود به جا گذشته است ویکی از قدیمی ترین مربعهای جادویی در اروپا است گواه دیگر ما یک اثر کوچک دیورراست که درآن این نقاش نابغه راه حل بسیار ساده و خوبی برای ساختن پنج ضلعی منتظم به کمک پرگار داده است وقتی که تنها طول ضلع آن معلوم باشد



شکل ۱۲۷: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

در شکل فوق حرفهای a و d و عدد های ۴.۳.۲.۱ و۵ به همان صورتی است که خود دیورر گذاشته است تنها حرفهای که داخل قوس گذاشته شده است بعد ها به آن اضافه شده است روش دیورر کاملاً دقیق نیست . ولی برای هدفهای عملی به اندازه کافی خوب است خود دیورر هم به این امر واقف بود در حقیقت خط فاصلی بین شکلهای منظم ریاضی وشکلهای منظمی که در عمل لازم است می کشد شکل هم به قدرت روشن است که نیاز به هیچ توضیح اضافی نیست .

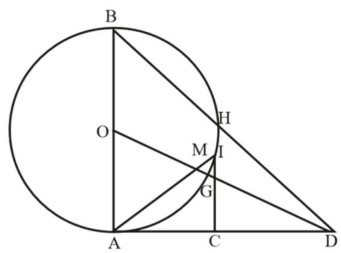
روش چهارم .واین هم روش محاط کردن پنج ضلعی منتظم در دایره که به وسیله ریاضیدان ومنجم آلمانی اوگان شریوتر (سده هفدهم) داده شده است . AB وCD را دو قطر عمود بر هم دایره فرض می کنیم



شکل ۱۲۸: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

قطعه خط Cc مساوی ب 4OA و موازی AB است . قطعه خط Dd مساوی BO و باز موازی AB است. خطی که دو نقطه c و d را را به هم وصل میکند ، دایره را در نقطه های E و F قطع میکند . این دو نقطه را به نقطه C وصل میکنیم و از نقطه های تلافی این دو خط با AB ، یعنی از نقطه های c و f عمود هایی بر AB اخرج میکنیم . نقطه های برخورد این دو عمود با دایره ، چهار رأس پنج ضلعی را میدهند. (نقطه های ۲،۳،۴ و ۵).

را ه حل دیگر این مسًله، که از همین مولف است ، خیلی جالب است . روی مماس بر دایره ، AC را مساوی شعاع و AD را مساوی قطر جدا میکنیم. D را به نقطه های O و B وصل میکنیم، خطهای DO و DB دایره را در نقطه های G و H قطع میکنند. سپس به مرکز D و شعاع مساوی DG قوسی رسم میکنیم تا خط CH را در نقطهء I قطع کند . ارا با خط مستقیم به A وصل میکنیم ، تا دایره را در نقطه M قطع کند . وتر AM ضلع مجهول پنج ضلعی منظم محاط در دایرهء به قطر AB است. اثبات صحت این شکل را ، که به سادگی بر اساس استفاده از تقسیم طلایی انجام میگیرد به عهده خواننده میگذاریم.



شکل ۱۲۹: پنج ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

نکته. روش ترسیم ضلع های پنج ضلعیهای منظم محدب و ستاره ای در دایره به مرکز O ، دوشعاع عمود بر OA و OE را رسم میکنیم و وسط شعاع OE را I مینامیم. دایره به مرکز I وبه شعاع IA خط OE را در نقطه های N و N' قطع میکند . ON و ON' بترتیب مساوی با C_{10} و C'_{10} هستند و بنابر این :

$$\mathrm{NN}' = \mathrm{C}_{10} + \mathrm{C}'_{10} = \mathrm{R}\sqrt{5}$$

در مثلث قائم الزاویه ANN' میتوان نوشت :

$$\mathrm{AN}^2 = \mathrm{NN}' \times ON = \mathrm{R}\sqrt{5} \times \frac{\mathrm{R}}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
$$= \frac{\mathrm{R}^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) = (\mathrm{C}_5)^2$$

و

$$\mathrm{A}N'^2 = \mathrm{NN}' \times \mathrm{ON}' = \mathrm{R}\sqrt{5} \times \frac{\mathrm{R}}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$= \frac{R^2}{4}\left(10 + 2\sqrt{5}\right) = (C'_5)^2$$

پس

$$C'_5 = AN', \;\; C_5 = AN$$

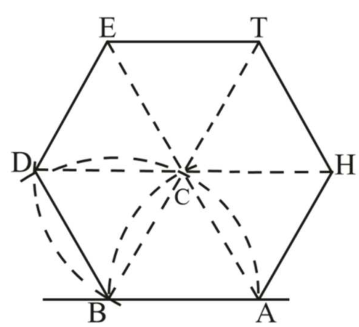
و برای تقسیم دایره به پنج کمان متساوی کافی است کمانهای متوالی که وتر روبه روی آنها AN باشد روی دایره جدا میکنیم .

تبصره : چون به وسیله خط کش و پرکار میتوانیم پنج ضلعی منتظم محدب محاط در یک دایره رسم کنیم ، پس میتوانیم متوالیاً دایره را به ۱۰، ۴۰، ۲۰،... و به طور کلی به 5×2^n قسمت متساوی تقسیم کنیم به این ترتیب ، چند ضلعیهای منتظم محدب و ستاره ای را که عده ضلعهای شان 5×2^n است ، میتوان به وسیله خط کش و پرکار رسم کرد.(n عددی است بزرگتر یا مساوی با صفر)

٤.٣. ترسیم شش ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع:

میخواهیم بر خط AB شش ضلعی متساوی الاضلاعی و الزوایا رسم نماییم . اول بر خط AB مثلثی متساوی الاضلاع مانند مثلث ABC میکشیم ، سپس دو ضلع AC و BC را امتداد می دهیم و روی هر کدام از نقطه C طولی معادل AB جدا میکنیم تا نقطه های E و T به دست آید.

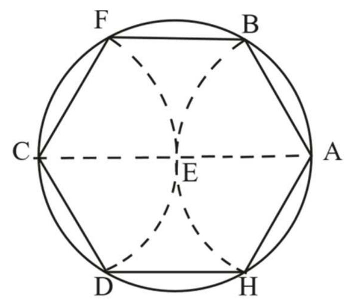
بعد به روی خط BC مثلث متساوی الاضلاع BCD را میکشیم و خط CD را امتداد میدهیم و از نقطه C نقطه H را به فاصله CD جدا میکنیم . حال خطهای DE، HT،ET و AH را میکشیم تا شش ضلعی متساوی الاضلاع و الزوایا $ABDETH$ به دست آید.



شکل ۱۳۰: شش ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

ترسیم شش ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع *R*:

روش اول. اگر بخواهیم در دایره *ABC* شش ضلعی متساوی الاضلاع رسم کنیم ، ابتدا قطر *AC* را میکشیم و به مرکز *A* و *C* و به طول شعاع دایره نقطه های *D*،*H*،*B* و *F* را نشان می نماییم . سپس با کشیدن وتر های *AB*،*BF*،*CF*،*DC*،*HD* و *AH* شش ضلعی متساوی الاضلاع را به دست می آوریم .



شکل ۱۳۱: شش ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع *R*

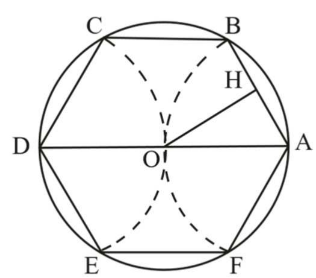
روش دوم. اگر شش ضلعی منتظم *ABCDEF* در دایره محاط شده باشد مثلث متساوی الساقین *OAB* مساوی با *60* درجه است ، متساوی الاضلاع می باشدپس *AB=OA=R* ، و از مثلث قائم الزاویه *AOH* (*H* اوسط *AB* است.)

نتیجه می شود:

$$OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

پس

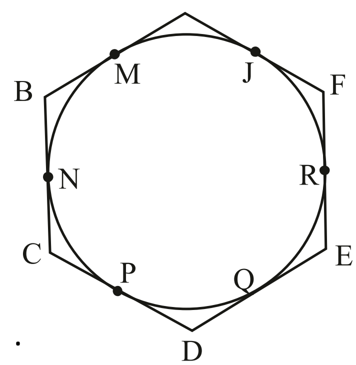
$$r_6 = \frac{R}{2}\sqrt{3} \qquad\qquad C_6 = R$$



شکل ۱۳۲: شش ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع *R*

پس برای ترسیم شش ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R کافی است قطر AD را رسم و به مرکز های A و D و به شعاع R دو دایره رسم کنیم تا دایره را در رأسهای E،C،B و F قطع کنند. $ABCDEF$ شش ضلعی منتظم محاط در دایره است .

ترسیم شش ضلعی منظم محیط بر دایره به شعاع R: دایره $C(O,R)$ را در نظر میگیریم . محیط دایره را به شش کمان مساوی بخش می کنیم تا شش ضلعی منتظم محاطی $MNPQRS$ به دست آید. در رأس های این شش ضلعی منتظم ، خط های مماس بر دایره رسم میکنیم ، تا یکدیگر را در E،D،C،B،A وF قطع میکنند . $ABCDEF$ شش ضلعی منتظم محیط بر دایره است .

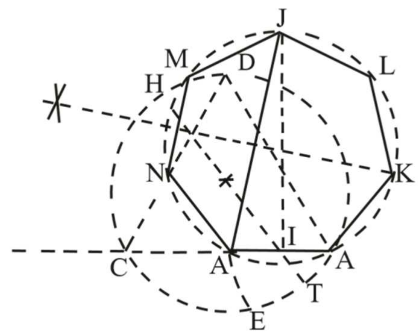


شکل 133: شش ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع R

.

۵.۳. ترسیم هفت ضلعی منظم:

می خواهیم بر خط AB هفت ضلعی متساوی الاضلاع رسم کنیم. ابتدا خط AB را به اندازه خودش تا نقطه C امتداد می دهیم و بر خط AC مثلث متساوی الاضلاع ACD را رسم می نماییم . سپس دایره محیطی این مثلث را رسم می کنیم (چنان که بعداً بیان خواهیم کرد). بعد از نقطه A وتر AE را معادل خط AB می کشیم و آن را در نقطه T نصف میکنیم و خط عمود منصف آن را میکشیم و امتداد می دهیم تا دایره محیطی را در نقطه H قطع نماید. حال خط AB را در نقطه I به دونیم تقسیم میکنیم و خط عمود منصف آن را به اندازه طول HT امتداد می دهیم و نقطه J را مشخص مینماییم ، حال بر سه نقطه J ،B وA دایره را رسم میکنیم (چنان که بعداً گفته می شود) و در این دایره قوس های AK،KL،J L،MJ،MN و BN را مساوی قوس AB جدا می نماییم و با رسم وتر این قوسها ، هفت ضلعی $BNMJLKA$ به دست می آید.



شکل ۱۳۴: هفت ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازه ضلع

ترسیم هفت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع *R*: این مسًله ارشمیدس، یعنی رسم یک هفت ضلعی منتظم ، در واقع چهارمین مسًله مشهور دنیای قدیم است . به جز این ، سه مسًله مشهور دیگر هم وجود دارد: تضعیف مکعب ، تثلیث زاویه و تربیع دایره. ارشمیدس ، توانست هفت ضلعی منتظم را ، به کمک خط کش و پرکار ، رسم کند. او از پیش قضیه استفاده کرد که ، در محدوده جذرها درجه ۲ قابل حل نیست و بنابر این ، نمیتوان ریشه های آن را ، به کمک خط کش و پرکار ، رسم کرد.

به این ترتیب ، ارشیمدس هم می دانست که مسًله رسم هفت ضلعی منتظم را ، نمی توان به طور کامل و دقیق ،تنها به کمک خط کش و پرکار و بدون استفاده از وسیله های دیگر ، حل کرد.

به این حکم ، که هفت ضلعی منظم را نمی توان به یاری خط کش و پرکار رسم کرد، می توان به کمک سنگ محک گوس ، قانع شد. طبق این معیار (یا سنگ محک) ، اگر *n* عددی اول باشد، برای این که بتوان *n* ضلعی منتظم را به یاری خط کش و پرکار رسم کرد، لازم و کافی است که عدد *n* به صورت $2^{2K}+1$ باشد.

عدد ۷ را نمیتوان به صورت $2^{2K}+1$ نوشت و ، بنابراین ، رسم هفت ضلعی منتظم ، تنها به یاری خط کش و پرکار ، ممکن نیست . در واقع ، هفت ضلعی منتظم را میتوان به تقریب و با هر اندازه دقت لازم ، رسم کرد (به کمک خط کش و پرکار) و اگر بخواهیم ، رسم هفت ضلعی منتظم به طور دقیق انجام شود ، باید به جز خط کش و پرکار ، از وسیله های دیگری هم (مثل گونیا دو قائمه) استفاده کرد. برای ترسیم تقریبی هفت ضلعی منتظم ، مثلاً می توان به این ترتیب عمل کرد:ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره ، به تقریب برابر است با نصف ضلع سه ضلعی منتظم محاط در همین دایره ، در واقع ، به ازای *r=1* داریم :

$$a_7 = 2\mathrm{SIN}\frac{360}{14} \approx 0.868$$

از طرف دیگر

$$\frac{a_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.868$$

و همان طور که دیده می شود ، خطای این تقریب از ۰.۳ ٪ تجاوز نمی کند.

مسًله رسم هفت ضلعی منظم ، منجر به حل این معادله می شود:

$$X^7 - 1 = 0$$

در صفحه بعد نشان می دهیم که این معادله ، به کمک جذرها درجه ۲ قابل حل نیست . ریشه های هفتم واحد (به جز۱) در معادله صفحه بعد صدق می کنند:

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = -1$ . . . (۱)

که در آن $x = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$.

چون $x^{7-k} = x^{-k}$ ، بنابر این ، معادله را می توان چنین نوشت:

$x + x^{-1} + x^2 + x^{-2} + x^3 + x^{-3} = -1$... (۲)

فرض میکنیم :

$x + x^{-1} = y$ ... (۳)

آن وقت

$x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$ ... (۴)

$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y$ ... (۵)

معادله (۲) به کمک رابطه های (۳)، (۴) و (۵) به این صورت در می آید:

$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ . . . (۶)

به این ترتیب رابطه (۶) منجربه حل معادله درجه سوم میشود که میدانیم به کمک جذرهای به درجه ۲ قابل حل نیست در نتیجه مسًله مربوط به حل هفت ضلعی منظم را نمی توان به یاری خط کش و پرکار حل کرد.

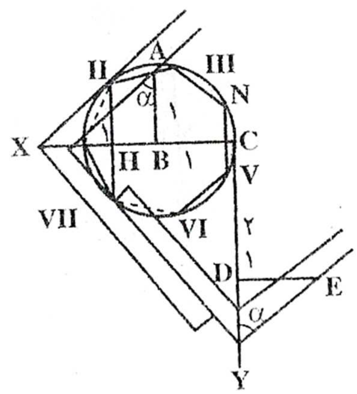
باوجود این معادله (۶) بنابراین مسًله ،رسم هفت ضلعی منظم به کمک گونیای دو قایمه قابل حل است یاد آوری میکنیم که

$$y = x + x^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\,\sin\,\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\,\sin\,\frac{2\pi}{7}\right) = 2\,\cos\frac{2\pi}{7}$$

بنابراین ، اگر دورأس هفت ضلعی را ، یک درمیان به هم وصل کنیم و تری بدست می آید که فاصله مرکزدایره از آن برابر $\cos\,\frac{2\pi}{7} = \frac{y}{2}$ می شود .

اکنون ، معادله (۶) را به کمک رسم حل میکنیم .

برای این منظور خط شکسته ABCDE را می کشیم (شکل) ، به نحوی که AB⊥BC، BC⊥CD و CD⊥DE وضمناً $DE = 1, CD = 2, BC = 1, AB = 1$ باشد (۱،۲،۱،۱،قدر مطلق ضریب ها در معادله (۶) هستند).



شکل ۱۳۵: هفت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

حالا ، گونیای دو قائمه را ، آن طور که درشکل می بینید ، قرار میدهیم و به اصطلاح ، خط شکسته مقعر AXYE را رسم می کنیم . با محاسبه معلوم می شود که XB=Y (جواب مورد نظر) این محاسبه را انجام می دهیم . زاویه XAB را ∝ می نامیم در این صورت داریم

XB= tg∝

CY=XCtg∝$= (\mathrm{XB} + 1)\mathrm{tg}\propto$

=(tg∝ +1)tg ∝= $tg^2 \propto$ +tg ∝

$$\mathrm{CY=2+DY=2+cotg} \propto = 2 + \frac{1}{tg\propto} = \frac{2tg\propto+1}{tg\propto}$$

از برابر قرار دادن دو مقدار که برای CY بدست آمد ، نتیجه می شود

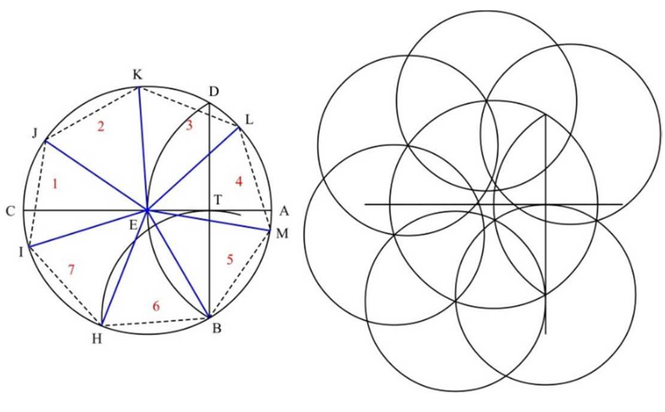
$$\frac{2tg \propto +1}{tg \propto} = tg^2 \propto +\mathrm{tg} \propto$$

$$tg^3 \propto +tg^2 \propto -2\text{tg} \propto -1 = 0$$

و دیده می شود که $\text{tg}\propto= \text{XB}$ در معادله (۶) صدق می کند.

بنابراین ، قطعه خط XB را می توان به جای y در نظر گرفت . می دانیم $\frac{y}{2} = \frac{XB}{2}$ عبارت است از فاصله مرکز B تا وتری که دو رأس هفت ضلعی منظم را ، یک در میان ، به هم وصل کرده باشد . نقطه H وسط XB را پیدا می کنیم و از آن جا ، عمودی بر XB اخراج می کنیم تا دایره را در نقطه های II و VII قطع کند . به این ترتیب ، دو رأس از راسهای هفت ضلعی منتظم بدست می آید و ، به کمک آنها بقیه رأس های هم به ساده گی، پیدا می شوند.

اگر بخواهیم در دایره ABC هفت ضلعی متساوی الاضلاعی رسم نماییم . ابتدا قطعه خط AC را رسم میکنیم و سپس نقطه A را مرکز قرار می دهیم و باهمان اندازه پرکاریعنی مساوی نصف قطردایره نقطه های Bو D رانشانی می کنیم و خط BD را رسم می کنیم تاقطر AC را در نقطه T قطع نماید . حال به مرکزB و طولTB نقطه H را نشانی می کنیم ، قوس BH مساوی یک هفتم محیط دایره (به تقریب نه بلکه به تحقیق)می باشد.پس چون دایره را بدین مقدار تقسیم و وترهای میان قسمتها را رسم نماییم هفت ضلعی MLKJIHB بدست میاید.

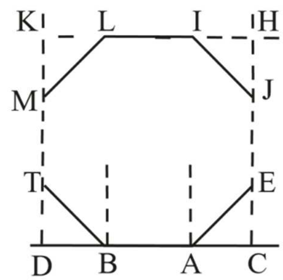


شکل ۱۳۶: هفت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

٦.٣. ترسیم هشت ضلعی منظم

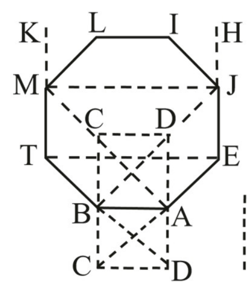
روش اول: می خواهیم بر خط AB هشت ضلعی متساوی الاضلاعی مساوی آن رسم نمائیم .
اول خط AB را از دو طرف ادامه می دهیم و برهریک از نقطه های AوB زاویه ای مانند زاویه های CAE و DBT معادل نصف قائمه با آنها می سازیم سپس خط AE و BT را مساوی AB جدا می کنیم و از نقطه های EوT دو عمود بر خط AB فرود می آوریم مانند CE و DT و بعد بر خط DC مربع HKDC را رسم

می کنیم و خط های LK,JH,IH و MK را معادل CE جدا می نمائیم تا نقطه های L,I,J وM بدست اید، حال خطاهای JI و LM را می کشیم تا هشت ضلعی ABTMLIJE حاصل شود.



شکل ۱۳۷: هشت ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

روش دوم. اگر بخواهیم که این هشت ضلعی را با یک اندازه پرکار رسم نماییم ، اول پرکار را معادل طول خط AB مربعABCD رسم می نماییم وبعد دو قطر ACوBD را سم می کنیم و آنها را معادل طول ABتانقطه های EوT امتداد می دهیم سپس خط TE را رسم می نماییم و دو خط عمود JE وMT معادل خط AB را بر آن رسم می کنیم وخط MJرا می کشیم . حال زاویه بین امتداد خطهای JE و MJ وهمچنین زاویه بین امتداد خط MT و JM رابا دو خط JI و LM به دو نیمه تقسیم مینمائیم و خط IJ و LM را مساوی خط AB جدا می کنیم وبالاخره با رسم خط LI هشت ضلعی مساوی الاضلاع و زوایای EJILMTBA را کامل می نمائیم .

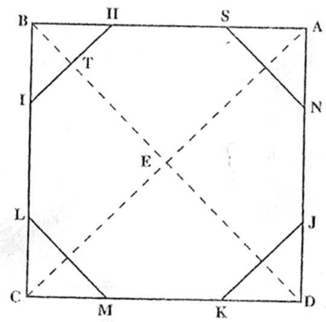


شکل ۱۳۸: هشت ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

روش سوم : در این طرز میتوان مربع ABCD را در طرف داخل رسم کرد که در این صورت اول نقطه های J وM بدست میاید و برای ترسیم بقیه ضلع ها به همان نوع که گفته شد عمل میکنیم .

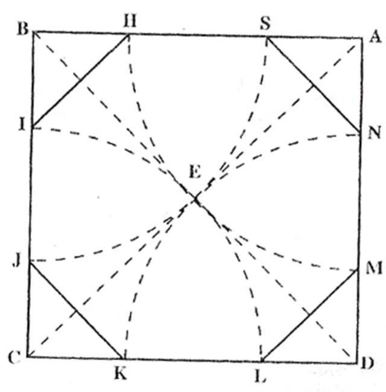
٦.٣. ترسیم هشت ضلعی منظم با معلوم بودن مربع

روش اول: اگر بخواهیم هشت ضلعی متساوی الاضلاعی در مربع مانند مربع ABCD محاط نمائیم ، اول هردوقطر آن رارسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطه E و شعاع نصف ضلع مربع نقطه T را روی قطر علامت می گذاریم ، بعد به مرکز T و طول BT نقطه های H و I را نشان می کنیم .حال از هر رأس مربع به طول HB یاIB قطعه LC،MC،KD،JD،NA،SAراتعیین می نمایم وخط های NS،HI ، KJ و LM را ترسیم مینائیم تا هشت ضلعی HILMKJNS به دست آید.



شکل ۱۳۹: هشت ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع

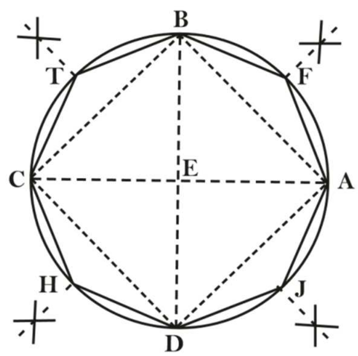
روش دوم: اگر بخواهیم با یک اندازه برکار به اندازه نصف قطر ، هشت ضلعی را رسم نمائیم ، هر یک از چهاررأس (گوشه های)مربع را مرگز قرار می دهیم وبه طول EA نقطه های H،M،N،K،L،I،S،J را روی ضلع های مربع تعیین و،خط های SN،HI،KJ،LM را رسم می کنیم تا هشت ضلعی متساوی الاضلاع.



شکل ۱۴۰: هشت ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع

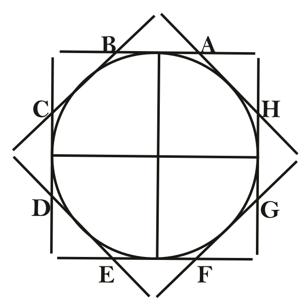
ترسیم هشت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R: اگر بخواهیم در دایره هشت ضلعی رسم کنیم اول مربعی رسم وسپس هر کدام از قوسهای چهارگانه را به دو نیمه تقسیم می کنیم و وتر ها را می کشیم تاهشت ضلعی متساوی الاضلاع به دست آید به عبارت دیگر اول دو قطر از دایره عمود بر یکدیگر رسم می کنیم تا دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم نماید. سپس منصف الزاویه های این چهار بخش را می

کشیم تا دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شود. حال با اتصال نقطه های تقسیم هشت ضلعی منظم را در دایره تکمیل می کنیم .



شکل ۱۴۱: هشت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

ترسیم هشت ضلعی منظم محیط بر دایره به شعاع R: محیط دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم کرده در نقطه های تقسیم مماس های بردایره رسم می کنیم تا هشت ضلعی منظم به دست آید.

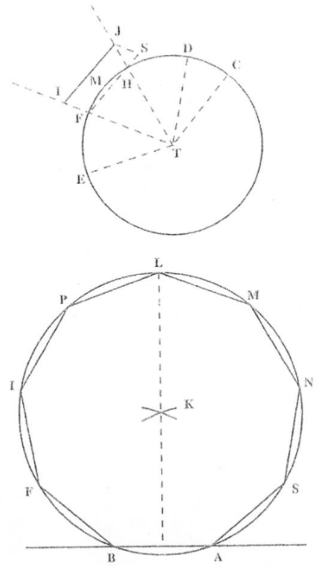


142: هشت ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

۷.۳. ترسیم نه ضلعی منظم

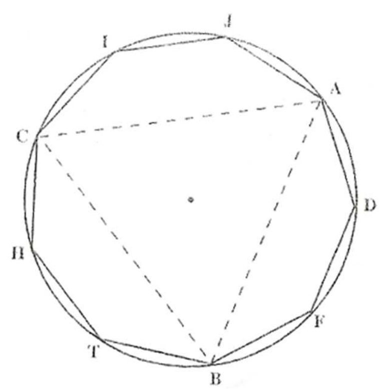
اگر بخواهیم بر خط AB نه ضلعی متساوی الاضلاع وزوایا رسم نمائیم ، اول دایره دلخواه EDC را به هر شعاع که بخواهیم رسم می کنیم ونقطه M را روی آن انتخاب وبه طول نصف قطر دو نقطه Dو E را روی دایره نشان می نماییم و سپس قوس DE را روی به سه قسمت تقسیم می نماییم مثلث آن را در نظر میگیرم ودو شعاع FTوHT را رسم میکنیم سپس خط JI را در مثلث HTE چنان رسم می نماییم که موازی FH و مساوی AB باشد حال به مرکز دو نقطه Aو B طول TI دو قوس می کشیم تا یکدیگر را درنقطه K قطع

کنند وسپس نقطه K مرکز قرار می دهیم ودایره LBA را می کشیم وقوس BLAرا به هشت قسمت مساوی تقسیم ووتر های آنها را رسم می کنیم تا با خط AB نه ضلعی متساوی اضلاع وزوایا به دست آید.



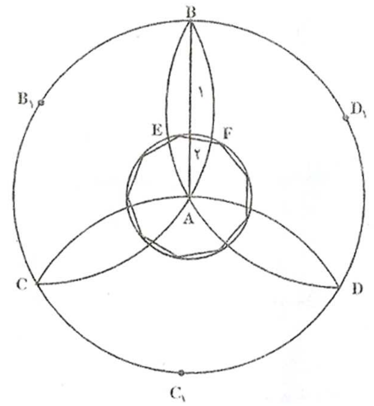
شکل ۱۴۳: نه ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

ترسیم نه ضلعی منظم محاط در دایره به شاع R: اگر بخواهیم در دایره ای نه ضلعی منتظم رسم نمائیم اول در دایره مثلث متساوی الاضلاع می کشیم وبعد هر کدام از قوسهای سه گانه را به سه قسمت مساوی تقسیم و وترهای نه گانه را رسم می کنیم تانه ضلعی متساوی الاضلاع به دست آید.



شکل ۱۴۴: نه ضلعی منظم محاط در دایزه به شاع R

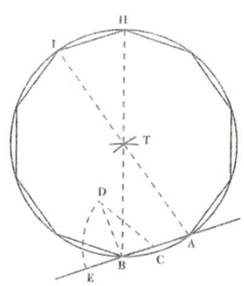
روش دیورر.به مرکز A دایره بزرگ رارسم می کنیم پس به همین شعاع وبه مرکز های C،B،وD (که دایره را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده اند) سه قوس می کشیم Aرا به B وصل وآن را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم . از قطعه AB ونزدیک به A عمودEF ضلع نه ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع AF = AE خواهد بود. باید یاد آوری کرد که این ترسیم هم تقریبی است.



شکل ۱۴۵: نه ضلعی منتظم محاط در دایزه به شاع R

۸.۳.ترسیم ده ضلعی منظم

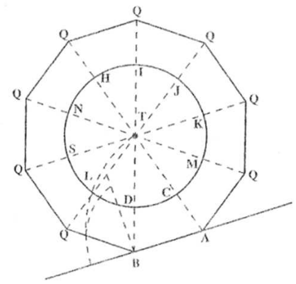
روش اول . اگر بخواهیم بر خط AB ده ضلعی بسازیم ، اول خط ABرا در نقطه C نصف می کنیم واز نقطه B عمود BD را معادل AB اخراج نموده وبه مرکز C وسط AB وشعاع DC نقطه E را روی امتداد ABنشان می کنیم ،سپس به مرکز نقطه های Aو B و طول EAدو قوس رسم می نماییم تا یکدیگر را در نقطه T قطع کنند . نقطه Tمرکز دایره ای است که ده ضلعیی با ضلع AB محاط در آن» می باشد . حال به مرکز T وشعاع BT دایره ای رسم می نماییم تا امتداد TA وTB را در دو نقطه H و اقطع نماید.سپس هر یکی از دو قوس HAو IB را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم ووتر های این قوسهای را می کشیم ده ضلعی متساوی الاضلاع وزوایا به دست می آید.



شکل ۱۴۶ : ده ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

روش دوم . اگر بخواهیم بر خط AB ده ضلعی متساوی الاضلاعی وزوایا رسم کنیم به طوری که فقط پرگار را به اندازه خط AB باز نمائیم، برای این کاراول مثلث پنج ضلعی روی خط ABرا رسم و بعد به مرکز نقطه T وشعاع AB دایره ای رسیم می کنیم تا خطهای TAو TB را در نقطه های Cو D امتداد آنها را در نقطه های I و Hقطع نماید.حال هر یک از دو قوس ICوHD را به چهار قسمت متساوی تقسیم واز

مرکز دایره به این نقطه ها وصل می کنیم وآنها را به اندازه فاصله CA امتداد می دهیم چنانچه این نقطه را به یکدیگر وصل نماییم ده ضلعی حاصل متساوی الاضلاع وزوایا می باشد.



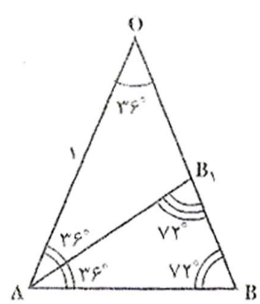
شکل ۱۴۷ : ده ضلعی منظم با معلوم بودن اندازه ضلع

جهت ترسیم ده ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R روش های ذیل را مطالعه میکنیم:

روش اول: صول ضلع ده ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایره محیطی آن ، محاسبه میی کنیم برای این منظور مثلث متساوی الستاقین AOB را در نظر می گیریم که در آن O مرکز ده ضلعی منتظم وAB یکی از ضلع های ان است در این صورت داریم:

$$AOB = 36°\ , OAB = 72°$$

AB_1 ناصف الزاویه OAB را رسم می کنیم چون مثلثهای OB_1A وB_1AB متساوی الساقین اند، بنابراین $AB=AB_1=OB_1$و AB=x و OA=1 می گیریم ازتشابه مثلثهای AOB و B_1AB بدست میاید $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$ جواب مثبت این معادله در جه دوم $x = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$ است قطعه خط مستقیم با این طول را می توانیم به کمک پرکارو خط کش رسم کنیم بنابراین برای رسم ده ضلعی منظم کافی است دایره ای به شعاع واحد رسم کنیم و با آغاز از نقطه ای واقع بر محیط آن به کمك پرکاری که به اندازه $\frac{\sqrt{5-1}}{2}$ بازشده است پشت سرهم راسهای ده ضلعی منظم را روی محیط دایره علامت بگذاریم .

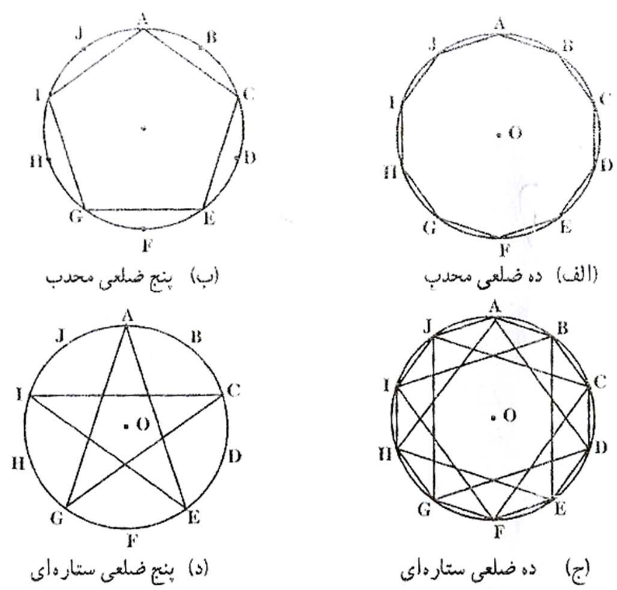


شکل ۱۴۸ : ده ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R

یاداشت . در بسیاری مسّله های باعدد $x = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$ برخورد می کنیم به عنوان

مثال $\frac{\sqrt{5-1}}{2} = \frac{x}{2} = sin18°$ر عدد $t = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$ را از زمانهای قدیم می شناخته اند و به (تقسیم طلائی) مربوط بوده است، اگر قطعه خط مستقیم را به نسبت t تقسیم کنیم آن وقت نسبت طول تمام قطعه خط به بخش بزرگترین آن برابر بانسبت بخش کوچکتر می شود همین عدد در رابطه با عدد های فیبونا جی هم به دست می آید .

روش دوم: اگر دایره را به در کمان متساوی تقسیم، و نقطه های تقسیم را به طور متوالی به هم وصل کنیم ده ضلعی منظم محدب بدست میاید و اگر نقطه های یک در میان با هم وصل کنیم ، پنج ضلعی منتظم محدب حاصل میشود و اگر نقطه های تقسم را 3 به 3 به هم وصل کنیم ده ضلعی منظم ستاری بدست میاید و بالاخره نقطه های تقسیم را ۴ به ۴ با هم وصل کنیم پنج ضلعی منظم ستاری نتیجه میشود .



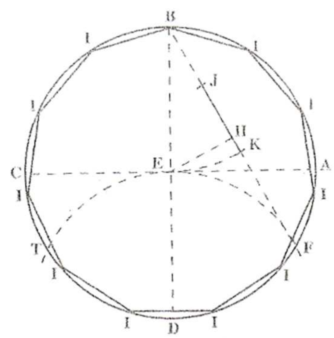
شکل ۱۴۹ : ده ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R

تبصره: چون عداد صحیحی که از نصف ده یعنی پنج کوچکتر و با ده اول استند فقد ۱ و ۳ میباشند پس یک ده ضلعی منظم محدب و یک ده ضلعی منظم ستاره ای وجود دارد .

روش سوم :اگر بخواهیم که در دایره ده ضلعی رسم نمایم ، همان طور که قبلاً در رسم پنج ضلعی متساوی الاضلاع گفته شده عمل میکنیم نقطه در این عمل قطعه خط TE ضلع ده ضلعی با وتر یک دهم محیط دایره میباشد و چون دایره را با آن اندازه تقسیم نمائیم به ده قسمت مساوی تقسیم شود که با رسم وتر آن قسمت های ده ضلعی بدست آید که هر ضلع آن مساوی TE میباشد .

۹.۳. ترسیم یازده ضلعی منظم

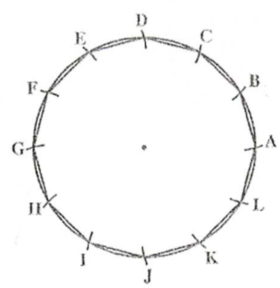
دو قطر AC و BD را عمود بر یک دیگر رسم مینائیم . سپس به مرکز D و اندازه پرکارمساوی شعاع دایره با نصف قطر ، دو نقطه Fو T را روی دایره نشانی میکنیم . بعد خط FB را میکشیم و از مرکز دایره خط برخط FB عمود مینمائیم و نقطه تلاقی آن یعنی نقطه H را تعیین میکنیم . حالا قطعه خط BH را در نقطه J نصف مینمایم و بعد به مرکز B و اندازه پرکار مساوی شعاع دایره قوسی رسم میکنیم تا خطBF را در نقطه K قطع نمایند قطعه خط KJ معادل طول یازده ضلعی محاط در دایره میباشد . وبا تقسیم دایره براین اندازه و کشیدن وترقوسهای تقسیم شده ، یازده ضلع متساوی الاضلاع بدست میاید .



شکل ۱۵۰ : یازده ضلعی منظم

۱۰.۳. ترسیم دوازده ضلعی منظم

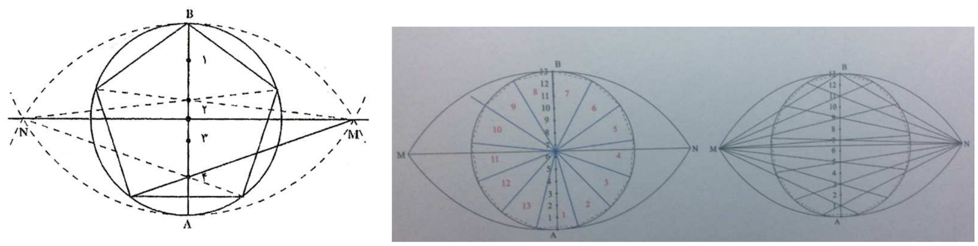
ترسیم دوازده ضلعی منظم با معلوم بودن شعاع دایره محیطی دایره محیطی دوازده ضلعی منظم را C(R,O) مینمایم ، محیط این دایره را به شش قسمت برابر تقسیم میکنیم سپس هریک از کمان های بدست آمده را به دو کمان مساوی تقسیم مینمائیم تا محیط دایره به دوازده قسمت برابر تقسیم شود نقطه های تقسیم را بطور متوالی با هم وصل میکنیم تا دوازده ضلعی منظم محاط در دایره وصل شود .



شکل ۱۵۱ : دوازده ضلعی منظم

۱۱.۳.ترسیم سیزده ضلعی منظم

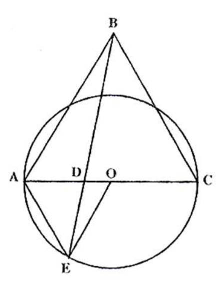
روش اول: روش کلی تقسیم یک دایره به چند قسمت مساوی . قطرAB را رسم مینمائیم و به مزکز نقطه های AوB و به شعاع AB دو کمان رسم میکنیم تا یک دیگر را در نقطه M و N قطع نماید . سپس قطر AB را به تعداد ضلع های چند ضلعی منظمی که میخواهیم رسم کنیم تقسیم می نمایم حال اگر از نقطه های MوN به نقطه های دوم و چهارم وششم ... (یعنی یک درمیان) وصل کرده امتداد دهیم تا دایره را قطع کنند ، طول وترهای حاصل بین آنها معادل ضلع چند ضلعی مورد نظر است و برای بدست آوردن چندضلعی کافی است وترهای مربوطه را به یک دیگر وصل کنیم برای رسم سیزده ضلعی منظم کافی است قطر AB را به سیزده قسمت مساوی تقسیم کنیم .



شکل ۱۵۲ : سیزده ضلعی منظم

روش دیگر تقسیم دایره به چند قسمت مساوی:

روی قطر دایره مثلث متساوی الاضلاع ABC را میسازیم سپس روی قطر AC نقطه D را چنان اختیار میکنم که نسبت AD به AC مساوی نسبت عدد ۲ به تعداد ضلع های چند ضلعی باشد به عبارت دیگر چنانچه قطر AC را به تعداد ضلع های چند ضلعی تقسیم کنیم نقطه D به فاصله دو قسمت از نقطهA باشد . حال اگرازB به D وصل کنیم و آن را امتداد دهیم تا دایره را درE قطع کند وتر AE مساوی ضلع چند ضلعی میباشد . در این روش اشتباهات مطابق جدول زیر میباشد



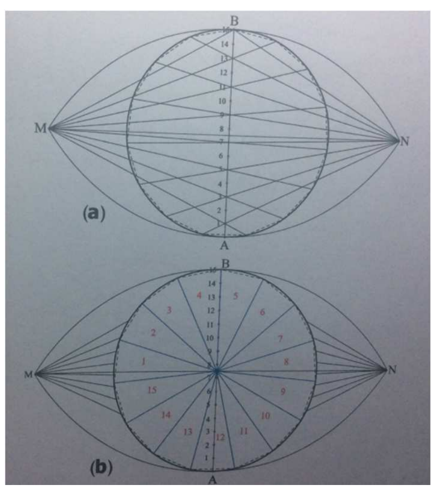
شکل a ۱۵۳ : سیزده ضلعی منظم

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰	۶۰
زاویه مرکزی	۱۲۰	۹۰	۷۲	۶۰	51,26	45	40	36	18	6
درصد خطا	0	0	0/07	0	0/17	0/14	-	0/97	3/5	7/2

یعنی در قسمتهای ۵،۷،۸،۱۰ خطا بین ۰/۰۷ تا یک درصد میباشد که برای کارهای عملی قابل توجه چندانی نسیت ولی در تقسیمات بیشترنیز در هرحال خطا از ده در صد تجاوز نمی کند .

۱۲.۳. ترسیم پانزده ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R

هر ضلع پانزده ضلعی منظم محدب محاطی روبه روی کمانی از دایره که مساوی $\frac{1}{15}$ دایره می باشد واقع است ، اما $\frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$ و اگر در یک طرف قطر AD از دایره و ترهای AB وAC را بترتیب مساوی با C_6 و C_{10} رسم کنیم وترBC ضلع پانزده ضلعی منظم محدب محاطی خواهد بوداگربدین وسیله دایره رابه 15 کمان متساوی تقسیم کنیم و نقطه های تقسیم را به طور متوالی ۲ به ۲ یا ۴ به ۴ یا ۷ به ۷ به هم وصل کنیم ، پانزده ضلعی منظم محدب پانزده ضلعیهای منظم ستاره ای بدست می آید .



شکلb ۱۵۳ : پانزده ضلعی منظم

محاسبه C_{15}قضیه بطلمیوس را در باره چهار ضلعی ACBD به کار می بریم رابطه زیر حاصل میشود .

$$AB \times CD = CB \times AD + AC \times BD$$

اما $AC = C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5-1})\ , \mathrm{AB} = \mathrm{R}, \mathrm{AD} = 2\mathrm{R},$

و $CD = C'_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ BD = C_3 = R\sqrt{3}$

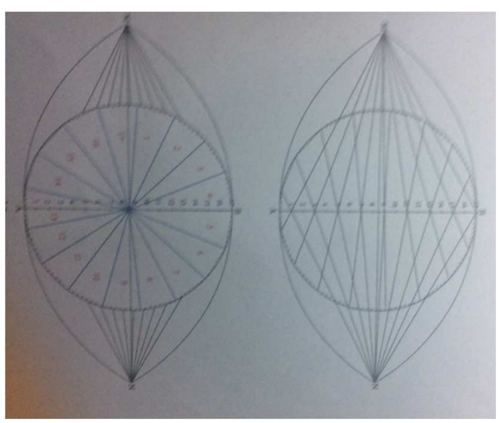
که چون در رابطه (۱) قرار دهیم حاصل می شود.

$$C_{15} = \frac{R}{2}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} - \sqrt{3}\right]$$

نکته: چون اعداد صحیحی که از نصف ۱۵ کوچکتروباآن اول هستند عبارتنداز ۱،۲،۴و۷ پس یک پانزده ضلعی منظم محدب و سه پانزده ضلعی منظم ستاره ای وجود دارد

۱۳.۳. ترسیم هفده ضعلی منظم محاط دردایره به شعاع R:

جهت ترسیم پانزده ضلعی منظم محاط دردایره به شعاع R اول قطر AB رارسم مینمایم وبه مرکز نقطه های A و B وشعاع AB دوقوس رسم میکنیم. تا یک دیگررا درنقاط M و N قطعه نماید سپس قطرAB را به تعداد هفده واحد تقسیم مینمایم. و نیزقطردومی MN همانند قطراولی به هفده حصهٔ مساوی تقسیم مینمیام حال اگر نقطه های **M**و **N** به نقطه های یکی درمیان قطردومی وصل کنیم وامتداددهیم تا محیط دایده را قطع نمایدنقاط یافت شده را متوالیاً باهم وصل نمایم طول وترهای حاصل بین آنها معادل ضلع هفده ضلعی منظم مورد نظراست . که برای بدست آوردن چند ضلعی منظم کافیست وترهای مساوی مربوط را به یک دیگروصل نمایم تاهفده ضلعی محدب ومتساوی الاضلاع بدست آید. ولی به هرصورت این شیوه به اشتباه اندک بوده ودرعمل آنقدرقابل ملاحظه نمیباشد(۲۹، صص ۳۰-۴۵).



شکلc ۱۵۳ : هفده ضلعی منظم

خلاصه فصل سوم

مبحث اصلی این فصل عبارت بود از ترسیم مضلعات منظم. فهمیدیم که ترسیم مثلث با معلوم بودن دوزاویه وضلع بین آن دوزاویه، با معلوم بودن ضلع وزاویه بین آنها، با معلوم بودن ۳ ضلع آن، یا با معلوم بودن دوزاویه روبروی یکی از آن دوضلع امکان دارد. از طرف دیگر، ترسیم مثلث قایم الزاویه با معلوم بودن وترویک ضلع قایم آن امکان دارد. همینطور می توان چهارضلعی های محدب ، مقعر وپروانه ای را می توان به وسیله پرکار و خط کش ترسیم نمود. و ترسیم مربع با معلوم بودن یک قطرآن امکان دارد. ترسیم مستطیل با معلوم بودن یک رأس نقطه معینه دوضلع صورت می گیرد. ترسیم یک چهار ضلعی با معلوم بودن طول واضلاع آن امکان پذیر است. ترسیم متوازی الاضلاع با معلوم بودن نقطه میانه سه ضلع صورت می گیرد. و می توان متوازی الاضلاع را با معلوم بودن دوضلع وارتفاع آن ترسیم نمود. ترسیم مربع محاط در مثلث متساوی الاضلاع امکان پذیر است. ترسیم ذوذنقه با معلوم بودن قاعده ها وقطرها صورت می گیرد.

مسایل فصل سوم

۱. چهارضلعی محدبی که طول هرچهارضلع و وسعت یک زاویه آن معلوم باشد رسم نمائید
۲. متوازالاضلاع را رسم نمائید که که دوضلع وزاویه مابین این دوضلع داده شده باشد
۳. هرگاه طول یک ضلع مربع داده شده باشد با استفاده از خط کش وپرکارآن را رسم نمائید
۴. مثلث رارسم کنید که قاعده، ارتفاع، ومیانه مربوط به قاعده داده شد باشد فرضاً AB قاعده و P و Q بلترتیب ارتفاع و میانه مثلث مطلوب باشد
۵. متوازالاضلاع را رسم کنید که مساحت آن معادل به مساحت یک مثلث ABC بوده ووسعت یک زاویه آن مساوی به یک زاویه داده شده باشد
۶. مثلثی را رسم کنید که از حیث مساحت معادله به یک چهارضلعی محدب داده شده ABCD باشد
۷. متوازی الضلاح را رسم کنید که یک زاویه آن معادل به یک زاویه داده شده بوده ومساحت آن نیز معادل به مساحت چهارضلعی محدب ABCD باشد ؟

کتابنامه

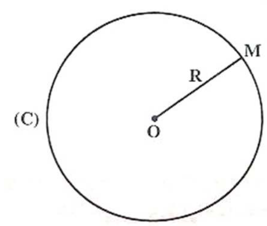
۱. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه**، جلد ۱۲. تهران: مدرسه.
۲. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.
۳. احمد شرف الدین. (۱۳۷۲). **هندسه تحلیلی چند محوری**. تهران: مدرسه.
٤. گروهی از اساتید ریاضی آلمان. (۱۳۷۸). **دایره المعارف ریاضیات**. ترجمه یاسی پور، غلام رضا، جلد سوم. تهران: مهاجر.
٥. اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). **هندسه جدید.** ترجمه یاسی پور، غلام رضا**.** تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
٦. نظامی، م. (۱۳۶۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

فصل چهارم

ترسیم دوایر

درطبیعت وضعیت اشکال وحرکات دایره وی کم نیستند، چرخهای دایره وی تمام امورتخنیک را احتوا نموده اند.اجرام سماوی باکره ودایره بی ربط نمیباشد بناًبراین این بحث درهندسه وباالخصوص دراساسات هندسه ترسیمی مسطح رول بسیار مهم دارد. درین فصل به معرفی دایره، ترسیمات دایره، ترسیم مماس های داخلی وخارجی یک دایره، تقسیم دایره به چهار وهشت حصه مساوی، تقسیم دایره به سه وپنج حصه مساوی تقسیم دایره به شش و دوازده حصه مساوی تقسیم دایره به هفت حصه مساوی ترسیم وسط هندسی بین دوقطعه خط آن مطرح می گردد. جهت بهتر روشن شدن موضوع بعضی تعریف ها را در این جا یادآور میشوم

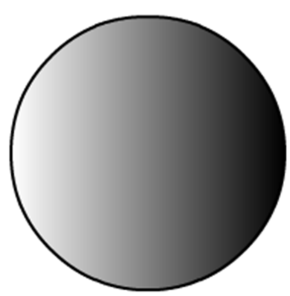
٤.١.معرفی دایره : عبارت ازست تمام نقاط دریک مستوی است که ازیک نقطه ثابت فواصل مساوی داشته باشند، نقطه متذکره را مرکز دایره گویند سمبول دایره (٠) است.



شکل ۱۵۴ : دایره

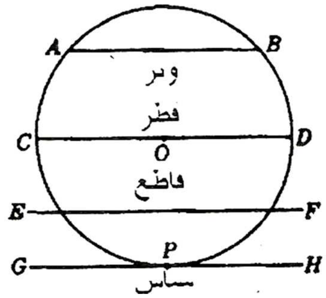
ویادایره عبارت ازخط منحنی سطح بسته میباشد، که فاصله ازمرکزآن تا هرنقطه محیط دایره ثابت باشد. ابن فاصله عبارت ازشعاع دایره است .

سطح دایره ئی : عبارت ازقسمت مستوی است که توسط دایره محدود شده باشد .



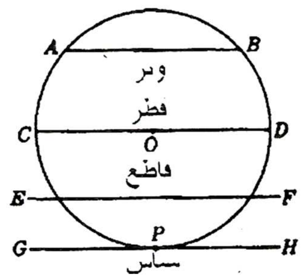
شکل ۱۵۵ : سطح دایره

قاطع : خط مستقیمی که دایره رادونقطه قطع کند بنام قاطع یاد میشود.



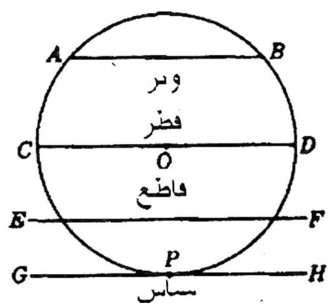
شکل ۱۵۶ : قاطع

وتردایره: قطعه خط قاطع که بین نقاط A وB قرار دارد بنام وتر دایره یاد می شود.ویا عبارت ازقطعه خطی است که دونقطه محیط را به هم وصل می کند.



شکل ۱۵۷ : وتر دایره

قطردایره : وتر که ازمرکز دایره می گذرد بنام قطردایره یاد می شود. وتر که شعاع ازمرکز آن می گذرد عمود به همین شعاع می باشد .



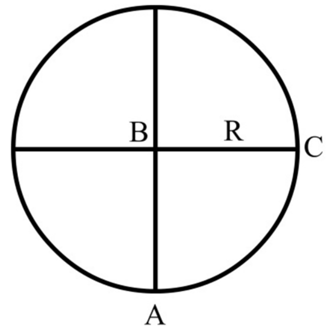
شکل ۱۵۸ : قطر دایره

قوس دایره : قسمتی ازمحیط دایره را بنام قوس یاد میکند . ازطریق سه نقطه که بروی یک خط مستقیم قرارنداشته باشند میتوان یک دایره را عبورداد.

قوس دایره دونوع است قوس بزرگ دایره ، قوس دایره است که طول آن ازنیم دایره بزرگ باشد .

قوس کوچک دایره : قوس ازدایره است که طول آن ازنیم دایره کوچک باشد .

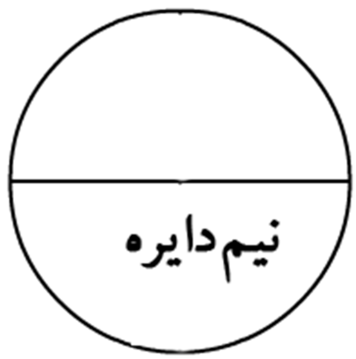
ربع دایره : دوقطرعمودبرهم هردایره ، آن دایره را به چهار حصه مساوی تقسیم می کند. که هریک را یک ربع دایره می نامند مانند AOB



شکل ۱۵۹ : ربع دایره

درربع دایره AOB اندازه زاویه $A\hat{O}B$ برابر °۹۰ درجه وانداره قوس AC مساوی °۹۰ است شعاع دایره همان شعاع دایره است بنابرین دردایره C(O,R) شعاع هرربع دایره برابرR است محیط ربع دایره به شعاع R برابر$\frac{1}{2}$ محیط دایره به شعاع R یعنی$\frac{1}{4}(2\pi R)$ یا (πR)۱/۲ مساحت ربع دایره به شعاع R مساوی ۱/۴ مساحت دایره به سعاع R یعنی(πR^2)۱/۴ است.

نیم دایره : هرقطریک دایره ، آن دایره را به دوحصه مساوی تقسیم می کنند که هریک رایک نیم دایره می نامند، مانند نیم دایره AOC



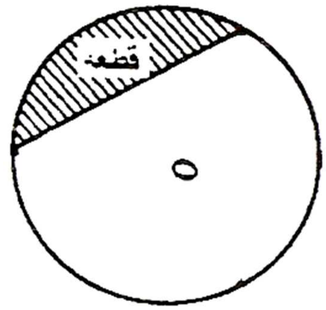
شکل ۱۶۰ : نیم دایره

اندازه زاویه $A\hat{O}C$ برابر°۱۸۰ واندازه قوس $\widehat{AC}$ مساوی °۱۸۰ است شعاع نیم دایره همان شعاع دایره است بنابرین دایره C(O,R) شعاع نیم دایره برابرR است.

محیط نیم دایره به شعاع مساوی ۱/۲ محیط دایره به شعاع R یعنی (πR^2)۱/۲ ویا مساویR π است.

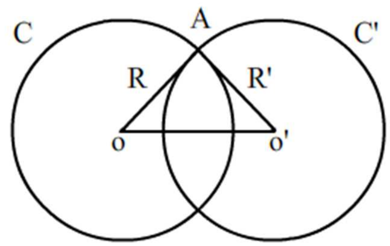
ومساحت نیم دایره به شعاع R برابر۱/۲ مساحت دایره به شعاع R یعنی (πR^2)۱/۲است.

قطعه دایره : قسمتی از سطح دایره ، محصوربین یک قوس ووترنظیری آن قوس راقطعه دایره می نامند. قطعه رابرحسب اندازه قوس آن مشخص می کنند مثلا اگرقوس AB مساوی $\frac{\pi}{6}$ رادیان باشد، قطعه را $\frac{\pi}{6}$ رادیان می نامند.



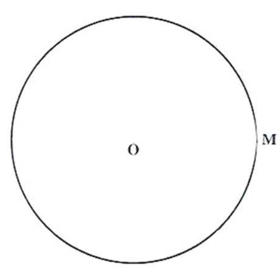
شکل ۱۶۱ : قطعه دایره

دو دایره متقاطع: شرط لازم وکافی برای آن که دودایره دردونقطه یکدیگررا قطع کنند آن است که طول خط المرکزین آنها ازمجموعه شعاعهای آن دودایره کمتر، وازقدرمطلق تفاضل شعاع های ان دودایره بیشتر باشد یعنی دردودایره C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ با فرض $O\acute{O}=d$ داشته باشیم $\left|R-\acute{R}\right|<d<R+\acute{R}$



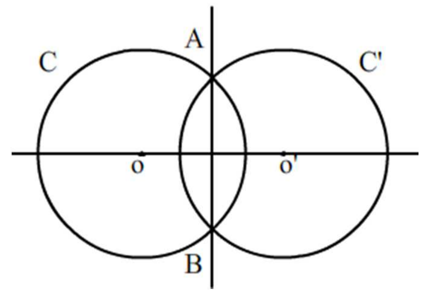
شکل ۱۶۲ : دو دایره متقاطع

محیط دایره : عبارت ازمسافه دودایره است که به ۳۶۰ حصه مساوی تقسیم می شود وهرقسمت آن یک درجه است یعنی محیط دایره ۳۶۰°درجه است(۱۷، صص۱۴۸-۱۵۱).



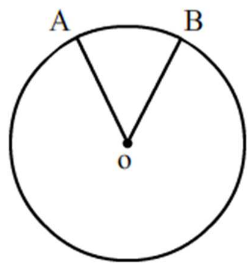
شکل ۱۶۳ : محیط دایره

یاد داشت : قطعه خطی که نقطه های مشترک دودایره متقاطع را به هم وصل می کندوتر مشترک دودایره نامیده می شود وبامماس ، خط عبورکننده بردونقطه تقاطع را نیزوتر مشترک دودایره متقاطع محوراصلی آنها است . زیرا اگردودایره نقطه های A وB متقاطع باشند طاقت هرنقطه AوB نسبت به هردودایره برابرخود است .



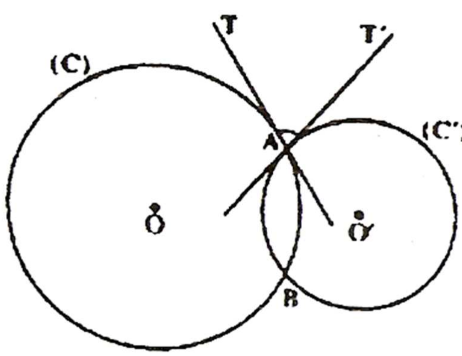
شکل ۱۶۴ : وتر مشترک دو دایره

زاویه مرکزی دایره : زاویه مرکزی دایره زاویه است بینی دوشعاع که رأس آن درمرکز دایره واقع باشد.مانند زاویه $A\hat{O}B$



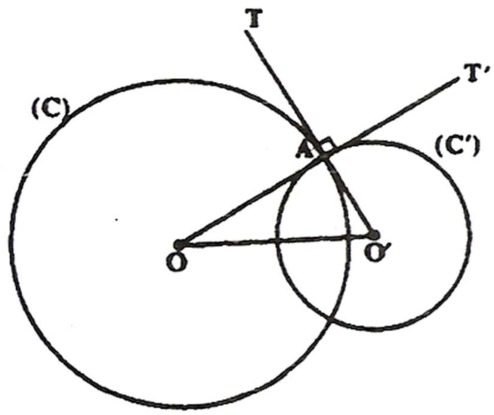
شکل ۱۶۵ : زاویه مرکزی دایره

زاویه بین دو دایره : زاویه حاده یا قایمه بین خطهای مماس بردودایره درهرنقطه تقاطع زاویه بین دودایره نامیده می شود. بنابراین اگردودایره C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ دردونقطه A وB متقاطع باشند ومماس های AT وA$\acute{T}$ را زاویه بین دودایره می نامند . درصورتی که این زاویه ۹۰˚ باشد دودایره را عمود برهم می نامند.



شکل ۱۶۶ : زاویه بین دو دایره

دو دایره عمودبرهم : دودایره را عمود برهم می نامیم درصورتیکه باهم زاویه 90° بسازد یعنی زاویه بین مماسهای رسم شده بردودایره درهریک ازنقطه های تقاطع شان برابر 90° باشد ($TA\acute{T}$)



شکل ۱۶۷ : دو دایره عمود برهم

در دو دایره عمودبرهم، نکات ذیل را درنظرداشه باشید :

۱- خط مماس بریک دایره درهرنقطه تقاطع ازمرکزدایره دیگرمیگذرد. وبلعکس اگردردودایره متقاطع خط مماس برهردایره درنقطه تقاطع ازمرکزدایره دیگربگذرد دودایره برهم عمود اند.

۲- هرشعاع ازیک دایره که ازنقطه تقاطع دودایره می گذرد بردایره دیگرمماس است وبلعکس، اگردردودایره متقاطع شعاع ازیک دایره که ازنقطه تقاطع دودایره می گذرد مماس بردایره دیگرباشد دودایره برهم عموداند.

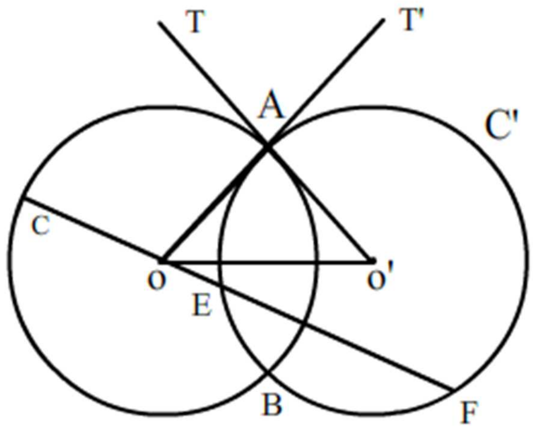
۳- شعاع های وصل شده به هرنقطه تقاطع دودایره برهم عمودند وبلعکس، اگردردودایره متقاطع شعاع های دودایره که به هرنقطه تقاطع وصل می شوند برهم عمود باشند آن دودایره برهم عمود اند.

۴- مربع اندازه خط المرکزین دودایره مساوی مجموع مربعهای شعاع های دودایره است وبلعکس، اگردردودایره متقاطع مربع طول المرکزین مساوی مجموع مربع های شعاع های آن دودایره باشد آن دودایره برهم عمود اند.

۵- طاقت نقطه مرکزهردایره نسبت به دایره دیگرمساوی مربع شعاع همان دایره است وبلعکس، اگردردودایره متقاطع طاقت نقطه نظربه مرکزهردایره نسبت به دایره دیگر مساوی مربع شعاع همان دایره باشد ان دودایره برهم عمود اند.

۶- هرقطریک دایره به وسیله دایره دیگربه نسبت توافقی تقسیم می شود، وبلعکس، اگردردودایره متقاطع ، هرقطرازیک دایره به وسیله دایره دیگربه نسبت توافقی تقسیم شود دودایره برهم عمود اند. قابل یاد آوری است که اگر دودایره C و $\acute{C}$ به معادله های

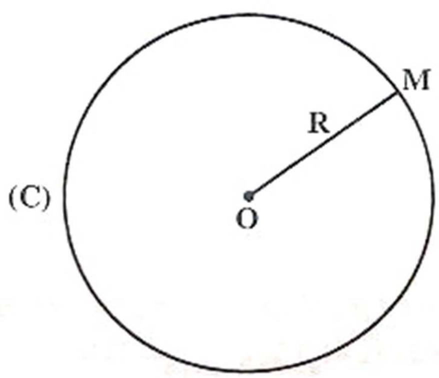
$C(X,Y)=x^2+y^2+qx+by+c$ و $c(x,y)=x^2+y^2+\acute{a}x+\acute{b}y+\acute{c}=0$ باشند شرط لازم وکافی برای عمود بودن آنها است که $aa'+bb'-2c-2c'=0$ باشد



شکل ۱۶۸ : دو دایره عمود برهم

2.4. ترسیم دایره

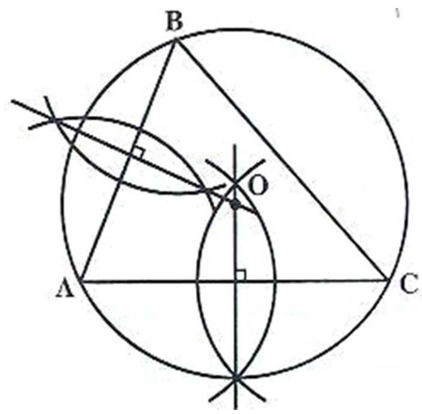
ترسیم عمومی یک دایره بامعلوم بودن مرکزوشعاع دایره به آسانی توسط پرکاروخطکش قابل انجام می باشد. دراین قسمت به بررسی بعضی ازحالت دایره با استفاده ازمعلومات عمومی ویا مسایل ترکیبی ازترسیم دایره به حیث اساسی و ترسیم های اساسی دایره راآغازمی نمایم.



شکل ۱۶۹ : دایره و شعاع آن

۳.4. تعیین مرکزدایره:

دایره (C) داده شده است .میخواهیم مرکزآنراتعیین کنیم درقدم اول سه نقطه دلخواه AوBوC رابروی محیط دایره انتخاب می نمائیم وباوصل نمودن آنها دووتردایره چون AB وAC حاصل می شوند. ناصف عمودی هریک ازدووترAB وAC دایره را رسم می کنیم . نقطه تقاطع این دوناصف عمودی است که آنرا (O) می نامیم(۲۳، ۱۰۴-۱۰۶).



شکل ۱۷۰ : تعین مرکز دایره

مرکزدایره داده شده است . بایدتوجه کرد که نقاط A،Bو C سه نقطه دلخواه ومتفاوت بالای یکدیگرمنطبق نباشد. بروی محیط دایره انتخاب شوند.

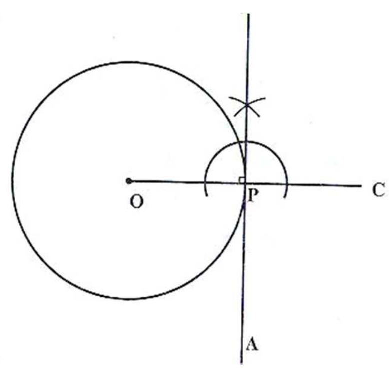
٤.٤. مماس ها

مماس به دایره : عبارت ازمستقیمی است که با محط دایره یک نقطه مسترک داشته باشد . این نقطه بنام نقطه مماس یاد می شود. مستقیم مماس همیشه عمود به شعاع میباشدکه ازنقطه تماس میگذرد ومماسها میتوانند داخل باشد ویا خارج باشد .

ترسیم خط مماس بریک دایره از نقطه واقع برآن دایره :فرضا یک دایره ونقطه p بروی محیط این دایر داده شده است می خواهیم خط مماس بردایره درنقطه p را رسم کنیم .

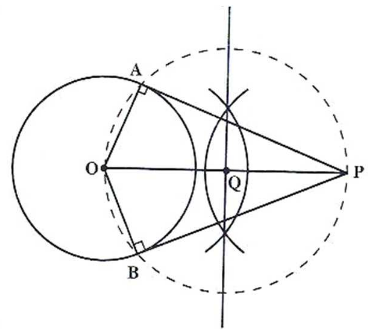
a) شعاع OP را رسم می کنیم .

b) درنقطه P خط AB را عمود بر OP رسم می کنیم خط AB مماس خواسته شده است .



شکل ۱۷۱ : مماس دایره

ترسیم خط مماس بریک دایره ازنقطهٔواقع درخارج آن دایره: دایره (O) ونقطه P خارج از آن دایره داده شده است.میخواهیم ازنقطه (O) خطی مماس بردایره رسم کنیم



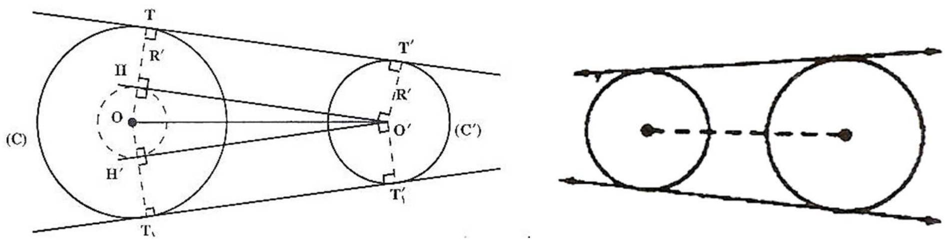
شکل ۱۷۲ : مماس خارجی دایره

۱- ازنقطه p به نقطه (O) مرکزدایره وصل می کنیم.ویادایره ئی به قطرقطعه خطی OP رسم میکنیم.
۲- نقطه تقاطع دایره (O) ودایره به قطر OP را A وB می نامیم واز p به AوB وصل می کنیم pA وPB خطهای مماس رسم شده از نقطه p بردایره (O) می باشند. زیرا زاویه های OAP وOBP که زاویه های محاط روبه روبه قطردردایره به قطر OP هستند قایم اند.

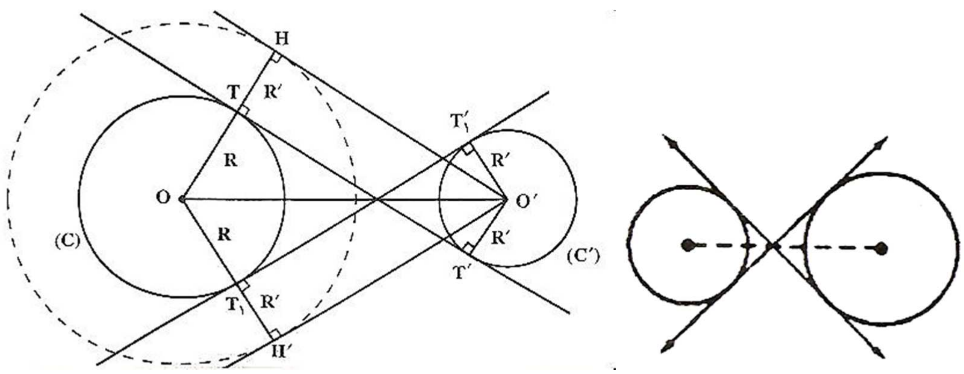
5.4. ترسیم مماس مشترک دودایره

دودایره جدا گانه C(O,R) و $\acute{C}(\acute{O},\acute{R})$ داده شده اند.می خواهیم مماس مشترک خارج این دودایره را رسم کنیم .

a) بافرض $R>\acute{R}$ دایره ای به مرکز(O) وبه شعاع $R-\acute{R}$ رسم می کنیم .
b) به کمک ترسیم خط مماس به یک دایره از نقطه خارج آن دایره . ازنقطه دوخط OH و $\acute{O}\acute{H}$ بادایره (o) را T و T_1 می نامیم.
c) ازنقطه T خطی موازی OH وازنقطه T_1 خطی موازی $\acute{O}\acute{H}$ رسم می کنیم این دوخط ازنقطه های $\acute{T}$ و $\acute{T}_1$ به دایره ($\acute{C}$) مماس اند. یعنی $T\acute{T}$ و $T_1\acute{T}_1$ دومماس مشترک خارجی دایره های (C) و (C) می باشد. $T\acute{T}$ درنقطه T برشعاع OT ازدایره (C)عمود است . پس همین نقطه براین دایره مماس است.چون فاصله مرکز دایره($\acute{C}$) ازخط $T\acute{T}$ مساوی شعاع آن است (زیراچهارضلعی $HT\acute{T}\acute{O}$ مستطیل است)پس خط $T\acute{T}$ درنقطه $\acute{T}$ بردایره ($\acute{C}$) مماس است. بنابراین $T\acute{T}$ یک مماسم مشترک دودایره است . به همین دلیل $T_1\acute{T}_1$ مماس مشترک دیگردودایره است.



شکل ۱۷۳ : مماس خارجی دایره



شکل ۱۷۴ : مماس داخلی دو دایره

۱- دایره ای به مرکز (O) وشعاع $R+\acute{R}$ رسم می کنیم.

۲- به روش ترسیم خط مماس بریک دایره ازنقطه واقع درخارج آن دایره از نقطه $(\acute{O})$ مرکزدایره $(\acute{C})$ دوخط $\acute{O}H$ و $\acute{O}\acute{H}$ رابردایره به مرکز(O) وبه شعاع $R+\acute{R}$ مماس $(\acute{C})$ رسم می کنیم .

۳- ازO به H و $\acute{H}$ وصل می کنیم ونقطه های تقاطع OH و $O\acute{H}$ ازT_1 خطی موازی $\acute{O}\acute{H}$ رسم می کنیم این دوخط بترتیب $\acute{T}$ وT_1 بردایره $(\acute{C})$ مماس اند. یعنی $T\acute{T}$ دومماس مشترک داخل دودایره (C) و $(\acute{C})$ می باشند ، زیرا $T\acute{T}$ درنقطه Tواقع بردایره (C) برشعاع OT ازاین دایره عمود است پس دراین نقطه مماس براین دایره است. همچنین $T\acute{T}$ بردایره $(\acute{C})$ درنقطه $\acute{T}$ مماس می باشند. زیرا فاصله نقطه $\acute{O}$ ازاین خط مساوی شعاع این دایره است. $\acute{O}\acute{T}=\acute{R}$ بنابراین خط $T_1\,\acute{T}_1$مماس مشترک داخل دیگراین دودایره می باشد(۲۴، صص ۹۰-۹۲).

تبصره : اگرشعاع های دودایر مساوی باشند دومماس مشترک خارج آنها موازی خط المرکزین شان خواهند بود. یعنی برای رسم مماس های مشترک خارج دودایر به ترتیب ذیل عمل می کنیم.

۱) خط المرکزین دودایره یعنی $(O\acute{O})$ رسم می کنیم.

۲) درنقطه های O و $\acute{O}$ دوخط عمودبر $O\acute{O}$ رسم می کنیم نقطه های تقاطع این خطها با دایره (C) را T وT_1 وبادایره $(\acute{C})$ $\acute{T}$ و $\acute{T}1$ می نامیم.

۳) خطهای $T\acute{T}$ و $T1\acute{T}1$ رارسم می کنیم . این دوخط ،مماس های مشترک خارجی دودایره اند. برای رسم مماس مشترک داخلی دودایره با شعاع های بربر، ازهمان روش کلی می توان استفاده کرد.

یاد آوری

۱- دودایره متخارج دومماس مشترک خارجی ودومماس مشترک داخلی دارند.

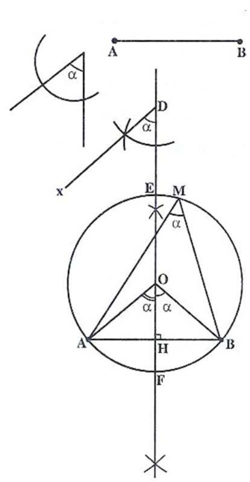
۲- دودایره مماس خارج ، دومماس مشترک خارجی ویک مماس مشترک داخلی دارند.

۳- دودایره متقاطع، دومماس مشترک خارجی دارند.

۴- دودایره مماس داخلی تنها یک مماس مشترک خارجی دارند.

ترسیم قوس مناسب یک زاویه روبه روبه یک خط مفروض :

قطعه خط ABوزاویه ∝ روبه روبه قطعه خط AB رسم کنیم داده شده است



شکل ۱۷۵ : قوس مناسب یک زاویه روبروی یک خط داده شده

۱- ناصف عمودی قطعه خط AB را رسم میکنیم .

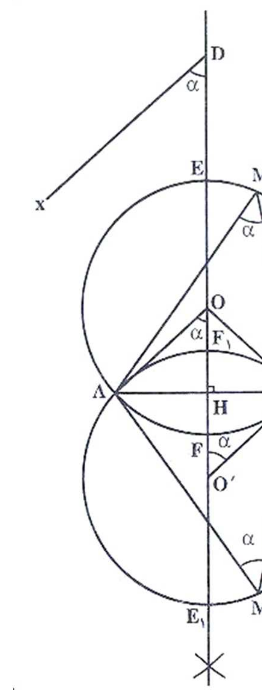
۲- ازنقطه اختیاری D واقع برناصف عمودی قطعه خط AB نیم خط DX را چنان رسم میکنیم که زاویه XDH مساوی ∝ باشد (Hوسط قطعه خط AB است)

۳- ازنقطه A خطی موازی نیم خط DX رسم می کنیم تا ناصف عمودی قطعه خط AB را درنقطه O قطع کند.

۴- دایره ای به مرکز(O) وبه شعاع OA رسم می کنیم قوس AEB ازاین دایره قوس مناسب زاویه ∞ روبه روبه قطعه خط AB است. زیرا AOF=∝ درنتیجه AF=FB=∝ پس AFB=2∝ است

بنابراین ازهرنقطه M واقع برقوس AEB که دونقطه A و B وصل می کنیم = AMB=$\frac{AB}{2}$

$\frac{2\propto}{2}=\propto$ است. پس قوس AEB قوس زاویه α روبه روبه قطعه خط AB است.



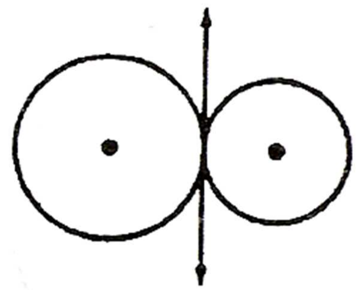
شکل ۱۷۶ : قوس مناسب یک زاویه روبروی یک خط داده شده

تبصره : اگرازنقطه B خطی موازی نیم خط DX رسم کنیم تاناصف عمودی قطعه خط AB را درنقطه $\acute{O}$ قطع کند وسپس دایره به مرکز $\acute{O}$ وبه شعاع $\acute{O}$A=$\acute{O}B$ رارسم کنیم بخش ازاین دایره (قوس AEB) نیزقوس مناسب زاویه روبه روبه قطعه خط AB است. این دایره با دایره (O,OA) مساوی است بنابراین می توان گفت : قوس مناسب زاویه ∝ روبه روبه قطعه خط AB بخشی ازدودایره مساوی است که بردونقطه AوB می گذرد وزاویه مرکزی مقابل به وتر AB دراین دودایره برابر ∝ 2 است.

6.4. ترسیم دوایر مماسی

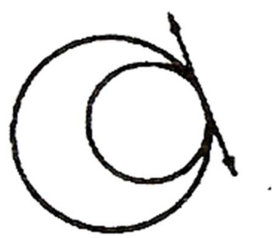
دوایر میتوانند که خارجا"بالای یکدیگرمماس شود ومیتوانند که درداخل بالای یکدیگرمماس شود.

الف : ترسم دودایره که خارجا" باهم مماس باشند: دودایره (O) و $\acute{O}$ درنقطه A مماس خارج هستند نقطه های تقاطع دایره به مرکز A وبه شعاع R دایره های (O) و $\acute{O}$ جواب این مسأله است .



شکل ۱۷۷ : مماس دو دایره

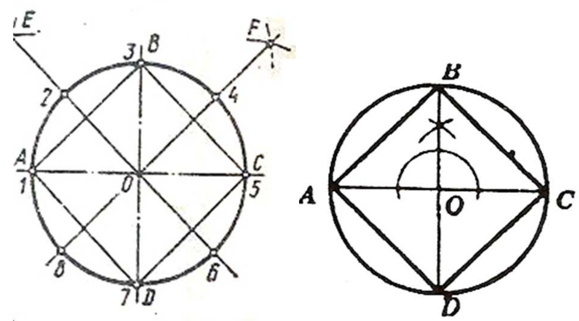
ب : ترسیم دودایره که داخلا" مماس باشند: دایره که قطرش شعاع دایره دیگری است به طورداخلی به آن دایره مماس اند، دودایره (O) و $\acute{O}$ درنقطه A باهم مماس داخلی اند. که دراینجاقطعه خط که $\acute{O}A$ قطردایره(O) وهمچنان $\acute{O}A$ شعاع دایره $\acute{O}$ است.



شکل ۱۷۸ : مماس داخلی

7.4. تقسیم دایره به ٤و٨ قسمت مساوی

قطرهای متقابلا" عمود AC وBD دایره را به ۴قسمت مساوی تقسیم میکند که توسط این چهارنقطه یک مربع ABCD راتشکیل میدهد.

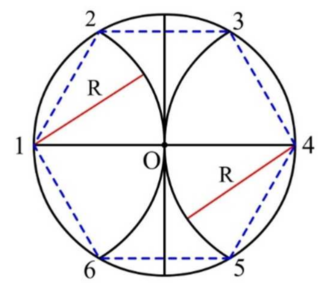


شکل ۱۷۹ : تقسیم دایره به ۴ و ۸ حصه مساوی

توسط پرکار ناصف الزاویه $A\acute{O}B$ و$B\acute{O}C$ راترسیم مینایم نقاط ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸ دایره رابه ۸ قسمت مساوی تقسیم می نماید.واین مسئله رامیتوان توسط مثلث ۴۵° نیزحل نمودوترمثلث ازنقطه (O) مرکز دایره میگذرد.

8.4.تقسیم دایره به شش قسمت مساوی

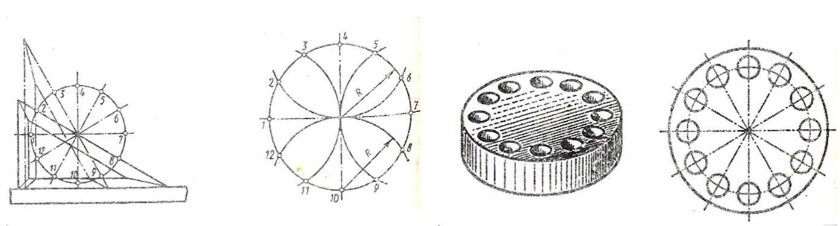
۱- توسط پرکاریک دایره راترسیم می نمایم .
۲- قطرهای دایره را ترسیم می نمایم .
۳- ازمرکزنقطه ۱ و۶ قوس به شعاع R ترسیم می نمایم نقاط ۱،۲،۳،...۶ دایره رابه ۴ قسمت مساوی تقسیم می نمایند. تقسیم دایره را به ۶قسمت مساوی توسط مثلث ۳۰° و۶۰° نیزمیتوان اجرأ نمود. وشش ضلعی رابه آسان درداخل دایره ترسیم نمود.



شکل ۱۸۰ : تقسیم دایره به شش قسمت مساوی

9.4.تقسیم دایره به ۱۲ قسمت مساوی

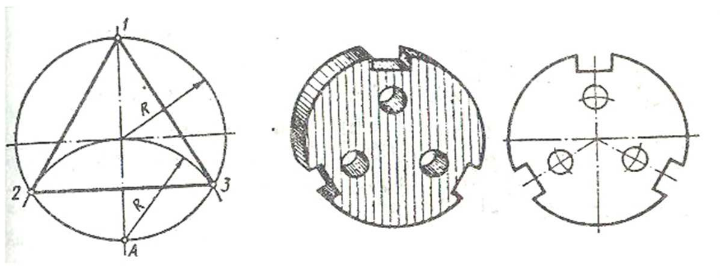
۱- توسط پرکار یک دایره به شعاع ومرکزدلخواه ترسیم می نمایم
۲- قطرهای دایره را ترسیم می نمایم
۳- سوزن دایره کش را درنقاط ۱ و۴ و۷ ۱۰ گذاشته وبه شعاع R قوس ترسیم می نمائیم نقاط ۱،۲،۳...۱۲ دایره را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم می نماید. تقسیم دایره به ۱۲ قسمت مساوی توسط مثلث که وترمثلث ازمرکزدایره میگذرد نیز میتوان صورت میگیرد



شکل ۱۸۱ : تقسیم دایره به ۱۲ حصه مساوی

10.4. تقسیم دایره به ۳ و ۵ قسمت مساوی

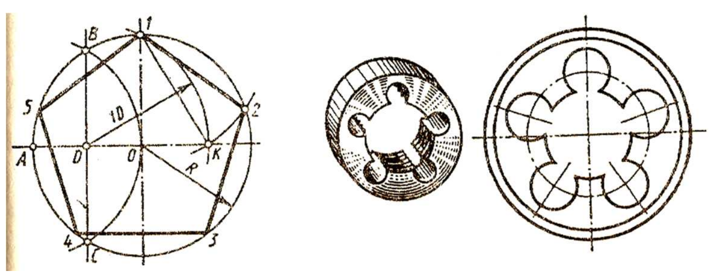
i. **تقسیم دایره به ۳ قسمت مساوی:** تقسیم دایره رابه ۳قسمت مساوی توسط پرکاراجراء می نمایم . سوزن پرکاررا درنقطه A گذاشته وقوس با شعاع R ترسیم می نمایم. قوس مذکوردایره رادرنقاط ۲و۳ قطع میکند. نقاط ۱،۲،۳ دایره رابه ۳ قسمت مساوی تقسیم میکند قرارشکل ذیل



شکل ۱۸۲ : تقسیم دایره به سه حصه مساوی

ii. **تقسیم دایره به ۵ قسمت مساوی**

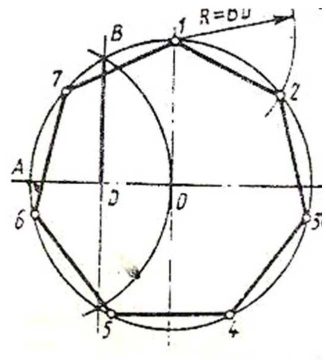
۱) قراریکه درشکل دیده می شود دایره را توسط دایره کش به ۵ قسمت مساوی تقسیم می نمایم . برای این منظور شعاع OA دایره را به دوقسمت مساوی تقسیم میکنیم . ازمرکزA قوس به شعاع R ترسیم می نمایم . قوس مذکور دایره را درنقاط BوC قطعه میکند. وقطعه خط BC شعاع OA را درنقطه D به دوقسمت مساوی تقسیم می ماید. ازمرکزD قوس Kرابه شعاع D ترسیم می نمایم. قطعه خط lk عبارت ازپنج ضلع منظم است ازنقطه ۱ بالای دایره داده شده وترها را مساوی به قطعه خط lk جدا می نمایم.



شکل۱۸۳ تقسیم دایره به ۵ قسمت مساوی

11.4.تقسیم دایره به ۷ قسمت مساوی

قرارشکل ذیل دایره رابه ۷ قسمت مساوی تقسیم می نمایم ازنقطه ۱ بروی دایره وترها راکه مساوی به قطعه خط AB میباشد جدا می نمایم .



شکل ۱۸۴ : تقسیم دایره به ۷ حصه مساوی

درشکل فوق تقسیم دایره به ۷ ویا هرچندقسمت مساوی(n) که خواسته باشم نشان داده شده است

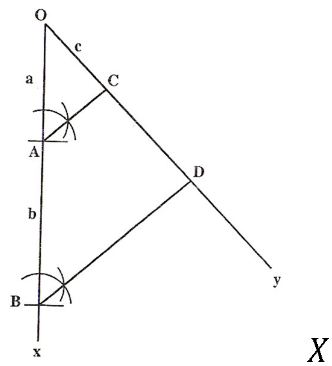
۱- دایره که مرکزآن (O) میباشد داده شده است
۲- ازمرکز A قوس رابه شعاع R=AB ترسیم می نمائیم. درنتیجه نقاط C و D رابالای خط محوری افقی دایره دریافت میداریم.
۳- قطرAB رابه ۷ قسمت تقسیم میکنیم ونقاط 3,2,1...,7 رادریافت می داریم.
۴- ازطریق نقاط ۵،۷،۱،۳ مستقیم های راکه ازنقطه C می گذرد ترسیم می نمایم نقاط ۱،۲،۳،۴ را بالای محیط دایره نشانی می نمایم
۵- ازطریق نقاط ۵،۷،۱،۳ مستقیم های را بالای دایره دریافت میداریم
۶- نقاط ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷ دایره رابه ۷ قسمت مساوی تقسیم میکند.

ترسیم چهارمین جزء یک تناسب که سه جزء آن داده شده اند.

c , b , a سه جزء ازتناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ داده شده اند می خواهیم قطعه خط به طول x را رسم کنیم.

۱- زاویه دلخواه xoy رارسم می کنیم
۲- روی ox طولهای OA=a و AB=b وروی OY طول OC=c را جدا می کنیم .
۳- ازA به C وصل می کنیم وازنقطه B خطی موازی AC رسم میکنیم تا OY را درنقطه O قطع کند قطعه خط CD به طول X جواب مسئاله است.
زیرا داریم :

$$\overline{AC} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \frac{OA}{AB}=\frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{CD} \Rightarrow CD=x$$



شکل ۱۸۵ : ترسیم چهارمین جز یک تناسب

12.4. ترسیم وسط هندسی بین دوقطعه خط

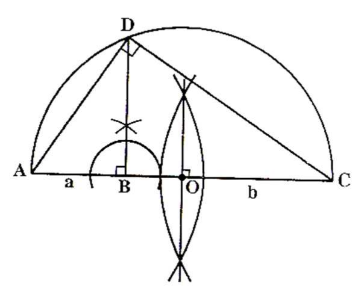
قطعه خط های به طولهای b،a داده شده اند میخواهیم قطعه خطی رسم کنیم که واسطه هندسی بین این دوقطعه خط باشد.

۱- روی خط Δ قطعه خط های AB=a و BC=b به ترتیب یکدیگرجدا میکنیم.

۲- به قطر AC یک نیم دایره رسم می کنیم

۳- ازنقطه B خطی عمودبرBC رسم میکنیم ونقطه تقاطع آن نیم دایره به قطر AC را D می نامیم قطعه خط DB جواب مسئاله است. یعنی واسطه هندسی بین دوقطعه خط AB وbc است.زیرا درمثلث قایم الزاویه ADC ($ADC=90^0$) داریم[۴۱]

۴- $BD^2=AB.BC \Rightarrow DB^2 = a.b \Rightarrow DB=\sqrt{a.b}$



شکل ۱۸۶ : وسط هندسی بین دو قطعه خط

(۲۹، صص ۳۰-۳۵).

خلاصه فصل چهارم

در این فصل، ما در مورد ترسیم دوایر بحث نمودیم. دیدیم که ترسیم وتعیین مرکز یک دایره توسط خط کش نامدرج وپرکار امکان پذیر است. از طرف دیگر، ترسیم خط مماس به یک دایره از نقطه واقع برآن دایره توسط خط کش نامندرج وپرکار صورت میگیرد. ترسیم خط مماس به یک دایره از نقطه واقع به خارج آن دایره توسط خط کش نامندرج وپرکار ممکن است. ترسیم مماس مشترک دودایره توسط خط کش نامندرج وپرکار ممکن است. ترسیم دایره مماسی توسط خط کش نامندرج وپرکار صورت میگیرد. دریافت مرکز مشابه دوایر توسط خط کش نامدرج وپرکار ممکن است . ترسیم مماس مشترک داخلی دودایره توسط خط کش نامدرج وپرکار ممکن است. ترسیم دایره ۴ به ۸ قسمت مساوی توسط پرکار وخط کش توسط خط کش نامدرج وپرکار ممکن است . تقسیم دایره به ۴ و ۱۲ حصه مساوی توسط پرکارو خط کش توسط خط کش نامدرج وپرکار ممکن است. و بالاخره، تقسیم دایره به ۳ ، ۵ و۷ حصه مساوی توسط پرکار وخط کش توسط خط کش نامدرج وپرکار ممکن است .

مسایل فصل چهارم

۱. دایره را ازطریق سه نقطه عبوردهید.

۲. مرکزقوس رادریافت کنید.

۳. آیاباپرکارو خطکش یک زاویه رامیتوان به چهارقسمت مساوی تقسیم نمود؟

۴. آیا باپرکاریک قطعه خط رامیتوان به چهارقسمت مساوی تقسیم نمود؟

۵. آیا باپرکارمیتوان یک قطعه خط رابه قسمت های مساوی تقسیم نمود

۶. ازهرنقطه A خارج ازمحیط دایره چندمماس میتوان برآن دایره رسم نمود؟

۷. دریک دایره (O) دووتر نابرابررسم گردیده است کدام وتربه مرکزدایره نزدیکتراست ؟

۸. ازنقطه تقاطع دو دایره وتر رسم کنید که کوچکترین وتر رسم شده در دو دایره باشد

۹. برمحل برخورد دو دایره خطی رسم کنید به طوریکه وتر های که در دو دایره به وجود می آیند برابر باشد.

۱۰. دو دایرهO و O′ و نقطه P داده شده اند اندازه P قاطع نسبت به دو دایره چنان رسم کنید که وتر های AB و A′B′ برابر باشد

کتابنامه

۱. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.

۲. مجید زاده، بابک. (۱۳۸۹). **هندسه ۱**. تهران: محراب قلم.

۳. مجید زاده، بابک. (۱۳۸۹). **هندسه ۲**. تهران: محراب قلم.

٤. نظامی، م. (۱۳۶۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

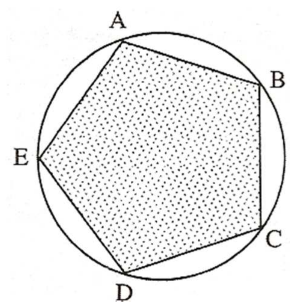
فصل پنجم

ترسیم مضلعات محاطی ومحیطی دردایره

بسیاری از ترسیم های هندسی به کمک مضلعات محاطی ومحیطی در دایره به خوبی صورت میگیرد ما در این فصل معرفی مضلع های محیطی و محاطی ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محاط در یک دایره ،ترسیم مربع محاط در یک دایره، ترسیم دایره محیطی بر یک مثلث ترسیم شش ضلعی منظم محاط دریک دایره، ترسیم دوازده ضلعی منظم محاط در یک دایره مطالعه مینمائیم.

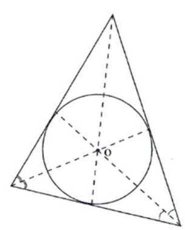
۱.۵.معرفی مضلعات محاطی و محیطی

مضلع محاطی: عبارت ازمضلع است ، که تمام اضلاع آن وترهای دایره اند.



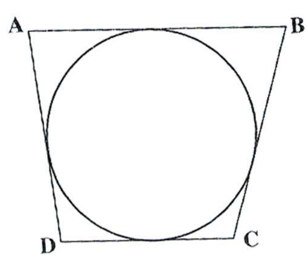
شکل ۱۸۷ : مضلع محاطی

مضلع محیطی : عبارت ازمضلع است، که تمام اضلاع آن مماس های دایره اند.



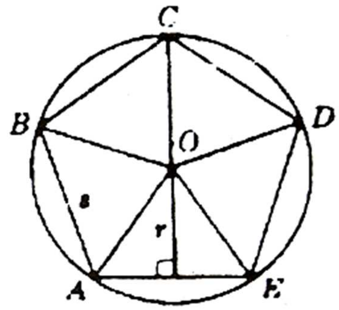
شکل ۱۸۸ مضلعی محیطی

دایره محاطی : عبارت ازدایره است، داخل مضلع ومماس برضلع آن (۱۷، ص۵۰).



شکل ۱۸۹ : دایره محاطی

دایره محیطی : عبارت ازدایره است، که ازتمام راس های مضلع بگذرد.



شکل ۱۹۰ : دایره محیطی

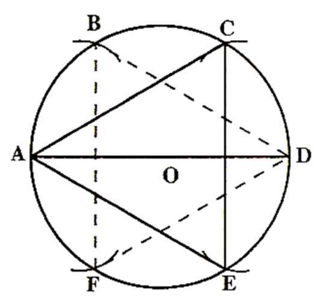
دراین بخش ازمضلعات منظم محاطی ومحیطی دریک دایره رامطالعه میکنیم.

۲.۵.ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محاط دریک دایره

دایره (O) داده شده است. می خواهیم مثلث متساوی الاضلاع دراین دایره محاط کنیم برای این کارنکات ذیل را درنظرمیگیریم.

a) مرحله های ۱ و۲ ترسیم ۲۶ را انجام می دهیم تا شش نقطه روی دایره بدست آید.یعنی دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم می کنیم .

b) نقطه های بدست آمده رایک درمیان به هم وصل می کنیم دومثلث متساوی الاضلاع محاط دردایره پدید می آید قرار شکل ذیل.

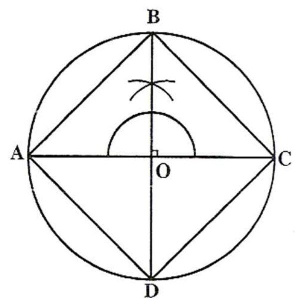


شکل ۱۹۱ : دایره محیطی

۳.۵.ترسیم مربع محاط دریک دایره

دایره (O) داده شده است می خواهیم مربعی دراین دایره محاط کنیم برای انجام این کارنکات ذیل رامدنظرمیگیریم.

a) یک قطر ازدایره رارسم می کنیم.
b) قطردیگری عمودبراین قطررسم میکنیم .
c) انتهای دوقطررسم شده را بترتیب به هم وصل می کنیم مربع مورد نظررسم می شود قرار شکل ذیل .

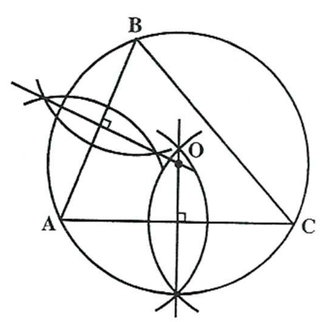


شکل ۱۹۲ : دایره محیطی

٤.٥. ترسیم دایره محیطی بریک مثلث

مثلث ABC داده شده است . می خواهیم دایره محیطی این مثلث را رسم کنیم برای این کارمراتب ذیل را انجام میدهیم .

a) ناصف عمودی دوضلع مثلث رارسم میکنیم نقطه تقاطع این دو ناصف عمودی مرکزدایره است این نقطه را (O) می نامیم.
b) از(O)به A،Bو C وصل میکنیم OA=OB=OC است دایره ای به مرکز(O) وبه شعاع OA=OB=OC وصل میکنیم این دایره که ازسه راس A ،B وC میگذرد دایره محیطی مثلثABC نامیده می شود قرارشکل ذیل.



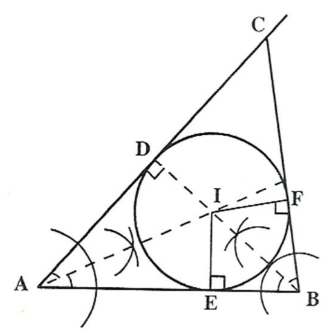
شکل ۱۹۳ : دایره محیطی بریک مثلث

(۱۴، ص۲۶–۲۸).

۵.۵. ترسیم دایره محاطی درمثلث

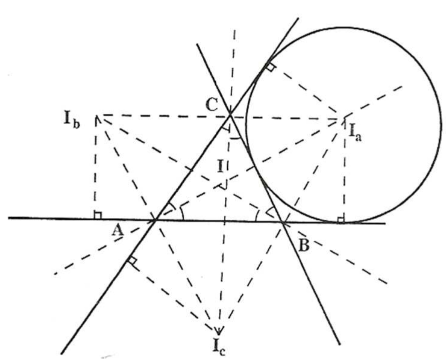
مثلثABC داده شده است می خواهیم دایره محاطی داخلی مثلث رارسم کنیم برای این مطلب مراحل ذیل راانجام می دهیم.

a) ناصف الزاویه داخلی A رارسم میکنیم .
b) ناصف الزاویه داخلی B رارسم می کنیم این ناصف الزاویه یکدیگررادرنقطه ای مانند I قطع می کنند.
c) از i عمودی IF، IE و ID رابترتیب برضلع های BC ، AB ، و AC رسم میکنیم ID=IE=IF است
d) دایره ای به مرکز i وبه شعاع r=ID=IE=IF رسم میکنیم این دایره که درنقطه های D ، EوF برضلعهای مثلث مماس است دایره محاطی داخلی مثلث می باشد قرار شکل ذیل



شکل ۱۹۴ : دایره محاطی در مثلث

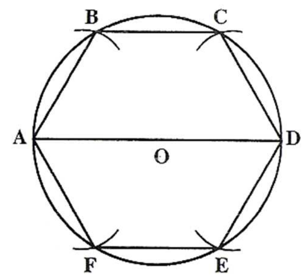
هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد که هرکدام ازآنها بریکی ازضلعهای مثلث وبرامتداد دوضلع دیگرمماسند مرکزاین دایره محل تقاطع یک ناصف الزاویه داخلی وناصف الزاویه های دوزاویه خارجی دیگرمثلث است.مرکزهای این دایره ها رامعمولا" به i_a،i_b و i_c نشان می دهند قرارشکل فوق.



شکل ۱۹۵ : دایره محاطی خارجی

٦.۵. ترسیم شش ضلعی منظم محاطی دریک دایره

دایره (O) داده شده است، می خواهیم شش ضلعی منظمی درآن محاط کنیم برای این کارمراحل ذیل رامدنظر میگیریم .



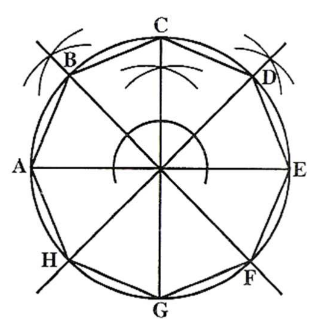
شکل ۱۹۶ : شش ضلعی منظم محاطی در دایره

a) قطر AD دایره رارسم می کنیم .
b) به مرکزهای A وD وبه شعاع مساوی شعاع دایره (O) قوسهای را رسم میکنیم تادایره رادرچهارنقطه قطع کنند .
c) شش نقطه بدست آمده روی دایره را به ترتیب به هم وصل می کنیم شش ضلعی منظمی محاط دردایره (O) پدید می آید (۲۹، ص۳۶).
d)

۷.۵. ترسیم هشت ضلعی منظم محاط دریک دایره

دایره (O) داده شده است، میخواهم هشت ضلعی منظم دراین دایره محاط کنیم دراین صورت باید کارهای ذیل راانجام دهیم.

a) دوقطرعمودبرهم ازدایره را رسم میکنیم.



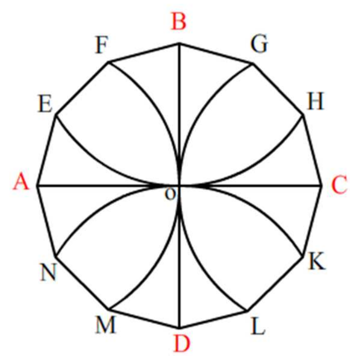
شکل ۱۹۷ : هشت ضلعی منظم محاط دردایره.

b) ناصف های زاویه های بینی این دوقطررارسم می کنیم .
c) هشت نقطه انتهای قطرهای رسم شده راسهای یک هشت ضلعی منظم می باشند که به طورمتوالی آنها رابه هم وصل می کنیم تاهشت ضلعی منظم محاط دردایره (O) بدست آید. قرارشکل

۸.۵. ترسیم دوازده ضلعی منظم محاط دردایره

دایره (O) داده شده است می خواهیم دوازده ضلعی منظمی دراین دایره محاط کنیم دراین صورت باید کارهای ذیل راانجام دهیم.

a) دوقطردایره متذکره AC وBD رارسم میکنم .



شکل ۱۹۸ : دوازده ضلعی نظم محاط دردایره

b) به اندازه R شعاع دایره ازنقاط A، B،C وD قوسها را رسم می نمایم یعنی نقاط متذکره هرکدام را مرکزگرفته به اندازه شعاع این دایره قوس راترسیم می کنیم.
c) این قوس دایره رادرنقاط E،F،G،H،K،L،Mو N قطع می کند نقاط یافته شده را باشمول نقاط A،B،C،وD باهم دیگروصل می کنیم بدین ترتیب دوازده ضلعی منظم محاط دردایره پدیدمی آید(۴۲، ص۸۲).

خلاصه فصل پنجم

بحث اصلی این فصل عبارت بود از ترسیم مضلعات محاطی ومحیطی دردایره. دیدیم که در ترسیم مثلث متساوی الاضلاع محاطی در دایره نخست دایره را به شش حصه مساوی تقسیم میکنیم. بعداً نقاط یافت شده را یکی در میان وصل میکنیم تا دومثلث محاط در دایره بدست آید. همچنان برای ترسیم مربع محاطی در دایره اول یک قطر دایره را ترسیم میکنیم، بعداً قطردیگر عمود برآن قطررسم میکنیم و بالاخره انتهای دوقطررسم شده را بترتیب باهم وصل میکنیم تا مربع مورد نظر بدست آید.همچنان یاد گرفتیم که در ترسیم یک دایره محیطی بریک مثلث نخست ناصف عمودی دوضلع مثلث را رسم میکنیم که در نتیجه نقطه تقاطع این دو ناصف عمودی مرکز دایره است . بعداً مرکزدایره ازo به a ،b وc وصل میکنیم که دایره محیطی مثلث بدست میاید . و برای ترسیم یک دایره محاطی بر یک مثلث اول ناصف الزاویه داخلی را از هرسه زاویه رسم میکنیم. بعداً دایره به مرکز وشعاع آن رسم میکنیم این دایره در سه نقطه به ضلع مثلث مماس میشود که دایره محاطی داخل مثلث میباشد . بالاخره قطر دایره را رسم نموده و به اندازه شعاع دایره قوس های مساوی را رسم میکنیم تا دایره را د رچهار نقطه قطع کند. و برای ترسیم شش ضلعی منظم محاط در دایره نخست شش نقطه روی دایره را به ترتیب دریافت نموده وبعداً آن را باهم متوالیاً وصل مینمائیم تا شش ضلعی منظم محاط در دایره پدید آید. همچنان دیدیم که در ترسیم هشت ضلعی منظم محاط دردایره، نخست دایره را به چهار حصه مساوی تقسیم میکنیم . بعداً ناصف عمودی هر زاویه را رسم میکنیم و نقاط یافت شده را باهم وصل میکنیم که در نتیجه هشت ضلعی منظم محاط در یک دایره به وجود میاید. و در نهایت دیدیم که در ترسیم یک ۱۲ ضلعی منظم محاط در دایره، نخست دوقطر دایره را عموداً بالای یکی دیگر رسم میکنیم بعداً ناصف عمودی هر زاویه را رسم میکنیم ونقاط یافت شده را باهم وصل میکنیم تا دوازده ضلعی منظم محاط در دایره بدست آید.

مسایل فصل پنجم

۱. دایره محیطی یک مثلث متساوی الاضلاع داده شده است این مثلث رارسم کند
۲. شعاع دایره محیطی یک مثلث متساوی الاضلاع داده شده است مثلث رارسم کنید
۳. دایره محاطی داخل یک مثلث مستاوی الاضلاع داده شده است این مثلث را رسم کنید
۴. دایره محاطی خارجی مثلثی متساوی الاضلاع داده شده است این مثلث را رسم کنید
۵. شعاع یک دایره محاطی خارجی مثلثی مستاوی الاضلاع داده شده است این مثلث را رسم کنید
۶. مثلث قایم الزاویه ای را رسم کنید که ارتفاع وتر وشعاع دایره محاطی آن معلوم است
۷. دریک دایره داده شده مثلث قایم الزاویه ای محاط کنید که شعاع دایره محاطی آن داده شده است به طوری که یک ضلع زاویه قایمه اش از نقطه داده شده بگذرد؟
۸. از مثلث قایم الزاویه ای اندازه شعاع دایره محاطی داخل و اندازه یک زاویه حاده داده شده است این مثلث را رسم کنید
۹. از مثلث قایم الزاویه اندازه یک ضلع زاویه قائمه و شعاع دایره محاطی داخلی مثلث داده شده است این مثلث را رسم کنید
۱۰. از مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین اندازه وتر ان داده شده است این مثلث را رسم کنید

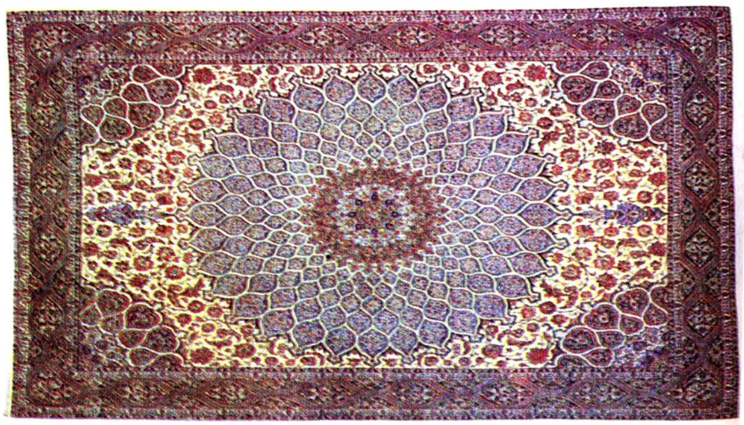
کتابنامه

۱. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.
۲. سید اشرف. (۱۳۶۸). **هندسه عمومی**.پشاور: آی. آر. سی.
۳. نظامی، م. (۱۳۶۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

فصل ششم

تبدیل های هندسی

بسیاری از ترسیم های هندسی به کمک تبدیل های هندسی صورت میگیرد. دراین فصل تبدیل های هندسی مانند: انتقال، دوران،انعکاس، تجانس، تماثیل، تناظر مرکزی، تناظرمحوری را مطالعه مینمائیم. ودرمطالعه شکل های هندسی متشابه، تناظرهای خاص بین اجزای آنها برقرار است که درشکل ذیل دیده میشود(۲۷، ص۲۵).



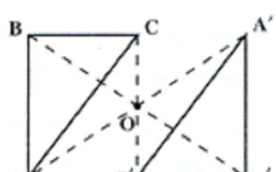
شکل ۱۹۹ : تناظر های متشابه

۱.٦. تعریف تبدیل

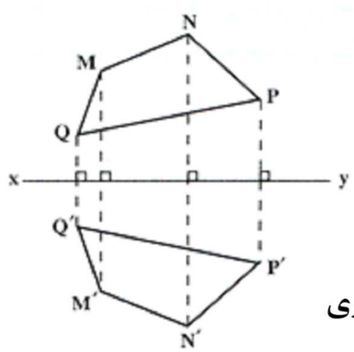
هرگاه از یک شکل هندسی مانند F یک شکل هندسی دیگرمانند’F برطبق قانون معین T نتیجه شود، می گوییم که شکل F را به ’F تبدیل کرده ایم. شکل’F راتبدیل یافته شکل F می نامیم.

ومی نویسیم: $T(F) = F'$

تبدیل در(تغییرمکان) عبارت از یک مپینگ یک به یک است از مستوی به مستوی .



شکل 200: تناظرمرکزی



شکل 201: تناظرمحوری

T (F) =F′ اگرتبدیل T نقطه ازشکل F را به نقطه M′ از شکل F′ تبدیل کند، به طورمثال درشکل مثلث A′B′C′ تبدیل یافته مثلث ABC طبق قانون تناظرمرکزی M′N′P′Q′ تبدیل یافته MNPQبه طبق قانون تناظر محوری است. هردوجزدر دوشکل Fو F′ که یکی تبدیل یافته دیگری درتبدیل T باشد مانند A و A′ ویا AB وA′B′ یا $MN\widehat{}P$ و $M'\widehat{N'}P'$ دو جزء تناظرمینامیم ومی نویسیم: T(AB)=A′B′ و T(A)=A′ وغیره.

تبدیل ها انواع مختلف دارند، دربرخی از آنها شکل تغیر نمی کند یعنی وضع جزءهای آن نسبت به یک دیگرهم چنان اندازه های جزء های شکل پس از تبدیل محفوظ می مانند، مانند تناظر مرکزی. دربعضی از تبدیل ها بخشی از جزء های متناظرممکن است کوچکترو بزرگترشوند. کاهی شکل به کلی تغیرمی کند، تجانس قطب ویا قطبی وانعکاسی ازین نوع تبدیل ها هستند.

تبدیل خودی تبدیلی است که تبدیل یافته هرنقطه خود آن نقطه است. اگر این تبدیل را با T نشان دهیم، برای هر نقطهA داریم که T(A)=A′

تبدیل تغییرمکان: مفهوم تغییرمکان معادل اصطلاحات تبدیل، تحویل، تابع یا مپینگ است این بحث درچوکات الجبرعمومی تر مطرح می شود تغییرمکان درهندسه وارتباط بین اشکال تعابیری جالب به خود دارد. ما درین جا بعضی حالت تغییر مکان ها ازجمله انعکاسی، انتقال، دوران، تماثل وتناظررا به اختصارتحت مطالعه قرار می دهیم.

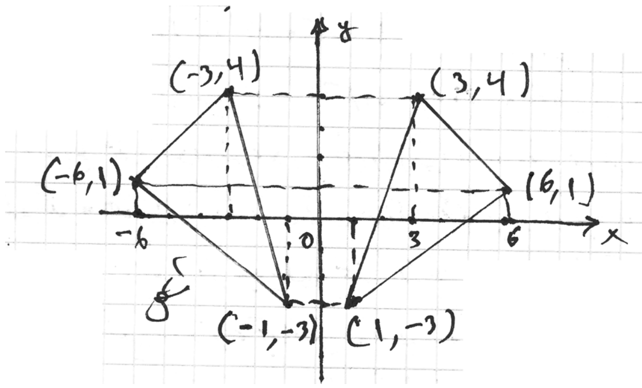
تعریف تغیرمکان: تغیرمکان تبدیلی است که در آن شکل تغیرنمی کند. تغیرمکان می تواند درسطح ویا در فضا صورت پذیرد. یا تغیرمکان عبارت ازتابع یک به یک از تمام مستوی درعین مستوی یک تبدیل وتغیرمکان گفته می شود، یعنی ترانسفارمیشنT در مستوی P عبارت از تابع است که به موجب آن، به هر نقطه x ازP فقط یک عنصرX′ از P مطابقت نماید ومی نویسیم. T(X)=X′ , $T{:}P \rightarrow P$

می گوییم که T تابعی است کهX رابه X′ تبدیل می نماید (۱۳، ص۱۹).

مثال: تبدیل T(x,y)=(-x,y) را درنظرمی گیریم تصویر سه نقطه را قرارذیل بدست می آوریم.

T(3,4)=(-3,4) , T(6,1)= (-6,1) , T(1,-3)=(-1,-3)

دیده میشود که مثلث با مثلث دارای رأس های (-6,1)و(-3,4)و(-1,-3) تبدیل می گردد.



شکل ۲۰۲ : تغییر مکان مثلث نظر به محور y

درینجا تبدیل های هندسی ذیل را مختصراً معرفی می نمائیم:

۱- انتقال ۲- دوران ۳- تناظر مرکزی ۴- تناظر محوری ۵- تجانس

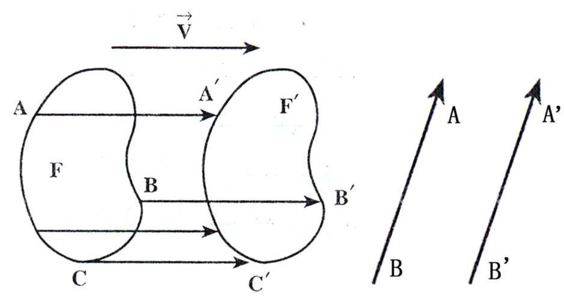
۲.٦. انتقال

درصنعت کشتی سازی پس از ساخت یک کشتی برای به آب اندختن آن معمولاً از یک سطح مایل استفاده میکند. به این ترتیب که کشتی را روی آن کش میکند و به آب می اندازند . این گونه حرکت ها که تغییر مکان در یک امتداد معین را نشان مدهد در زندگی روز مره بسیاربه چشم میخورند .

تعریف وقضیه: هرگاه وکتورهای مانند $\vec{v}$ داده شده باشد وا از هرنقطه شکلF مانند A وکتوری $\vec{A}A'$ همرای وکتوری $\vec{v}$رسم کنیم انتهای این وکتورها شکلی مانند F′ را به وجود می آورند. درین صورت می گوییم که F′ از انتقال F به اندازه $\vec{v}$ بدست آمده است. $\vec{v}$ راوکتورانتقال می نامند. انتقال با $\vec{v}$ را به علامه $T_{\vec{v}}$ می خوانند. وگاهی با اختصاربا علامه $\vec{T}$ نشان می دهند. وآنرا انتقال وکتور $\vec{v}$ یا انتقالT می خوانند بنا براین انتقال درفضا نیزبه همین ترتیب تعریف می شود. ویا میتوانیم بگوییم هرگاهA وB درنقطهA′وB′ به ترتیب تصاویرآنها توسط تبدیل T باشد، پس T یک انتقال گفته می شود

اگروتنها اگر ۱- AA′=BB′ ۲- $AA' \parallel BB'$ 3- AA⊥A′A′ (۲۰، ص ۸۴).

شرط اول نشان می دهد که تمام نقاط مستوی به یک مسافه معین متصل می شوند، شرط دو و سه دلالت به این می کند که نقاط درعین جهت متصل می گردند تحت این شرایط AA’B’B یک متوازی الاضلاع است و بنا براین AB=A’B’ پس یک انتقال حافظ طول می باشد . این انتقال که توسط وکتور های هم جهت صورت گرفته است، یک انتقال موازی هم جهت است، یعنی دراینجا هرنقطه به اندازه های معین انتقال شده است و شکل بدون تغییر باقی مانده است.



شکل ۲۰۳ : انتقال وکتورها

قضیه۱: هرگاه T یک تبدیل با T(x,y)=(x+a,y+b) باشد پس T یک انتقال است.

قضیه۲: انتقال شکل راتغییرنمی دهد، یعنی تغییرمکان است.

قضیه۳: هرگاه درتغییرمکان هردو قطعه خط متناظراز دوشکل متوازی متساوی دریک جهت باشند آن تغیرمکان یک انتقال است. مانند شکل ۲۰۳.

یادداشت: انتقال با وکتورغیرصفر، تبدیل دریک مستوی است که هر نقطه A را به یک نقطه دیگری A’ می برد.بدیهی است که با این تبدیل هیچ نقطه به جای خودش باقی نمی ماند .

به عباره دیگر، انتقال نقطه ثابت ندارد وهیچ نقطه را به خودش بدل نمی کند.ولی خطهای مستقیم وجود دارند که براثرانتقال برجای خود می مانند، به طور مثال کلیه خط های که به جهت وکتور انتقال موازی اند. یعنی خط ها روی خودشان می لغزند. بنا برین خط ها خطهای ثابت انتقال هستند.

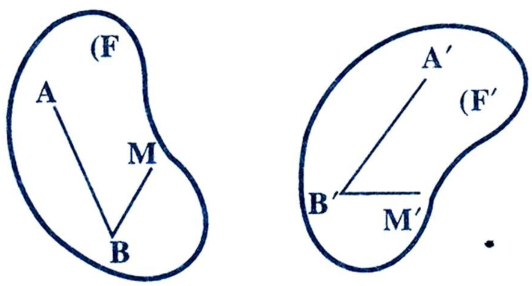
٤ – **ترکیب انتقال ها:** ممکن است شکل را از وضع اولی F دو یا چند بار پی درپی انتقال دهیم تا به وضع نهای $F^{(n)}$ برسد. چون انتقال تغیرمکان است شکل $F^{(n)}$ معادل شکل F است ومی توان با یک انتقال شکل F را به شکل $F^{(n)}$ تبدیل کرد. درین صورت می گوئیم این انتقال از ترکیب کردن آن چند انتقال نتیجه می شود.

نکته مهم: دربرخی ازکتابهای ریاضی، ترکیب تبدیلها را مجموع تبدیلها ودربرخی دیگرحاصل ضرب تبدیل ها تعریف کرده اند . به طور کلی اگرتبدیل هم ارز(معادل) با چند تبدیل باشد، یعنی با انجام یک تبدیل بتوانیم به نتیجه چند تبدیل برسیم، این تبدیل را مجموع یا حاصل ضرب ان تبدیل ها می نامند.

قضیه۵: تغییرمکان که از چند انتقال نتیجه شده باشد ، خود یک انتقال است. یا به عبارت دیگر:ازچند انتقال یک انتقال نتیجه می شود. درین جا چند نمونه انتقال را دراشکال هندسی مطالعه می نمائیم.

a) **انتقال درزاویه**

انتقال درزاویه درحقیقت اگر A’ و B’ وضع جدیدA و B درشکل F باشد شکل M’ وضع جدیدی هرنقطه مانند M مشخص است زیراکه : چون شکل تغییر ناپذیراست: $A'\hat{B}'M = A\hat{B}M$



شکل ۲۰۴: انتقال زاویه

یعنی مقداروجهت زاویه $A'\hat{B}'M$ معلوم است. و ازاین جا امتداد B’M’ معین می شود.

وچون B’M’=BM وضع M’ به طور کامل مشخص می شود.

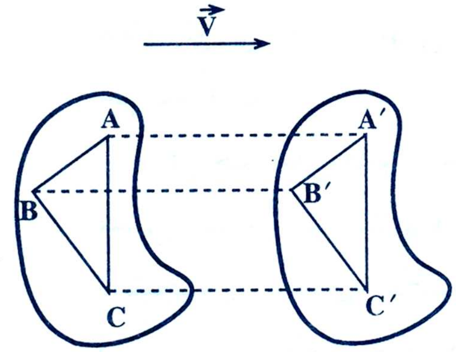
پس وضع هرنقطه از شکل F’ ، درنتیجه وضع خود آن شکل مشخص است. پس بدین ترتیب ما می توانیم که یک زاویه را به عین مقدار وجهت از یک جا به جای دیگرانتقال دهیم. و انتقال یافته هرزاویه ، زاویه است معادل وهم جهت به آن.

b) **انتقال درمثلث** اگرA , B و C سه نقطه غیرمشخص از شکل F و A’ , B’ و C’ وضع جدید آنها پس از انتقال به اندازه $\vec{v}$ باشند، دومثلث ABC وA’B’C’ متساوی اند به دلیل آنکه درمتوازی الاضلاع AA’B’B : $A'B' \parallel BC$

ونیز: $B'C' \parallel BC$

پس : A’B’C’ = ABC

دراینجا ارتسام موازی صورت گرفته وشکل تغییر نمی خورد.



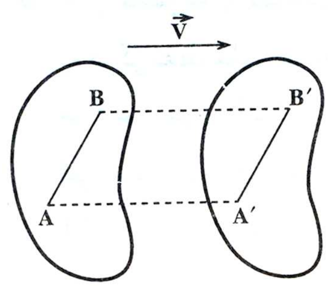
شکل ۲۰۵ : انتقال در مثلث

یعنی: $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$

بنابرین اگر A′B′ را بلغزانیم تا بر AB منطبق شود، C′ نیز به C منطبق خواهد شد. وبه همین ترتیب هریک از نقطه های شکل F′ برنقطه هم مانند ش از شکل F منطبق می شود، پس دوشکل F′و F معادل اند.

c) انتقال در چهارضلعی

اگر A′B′ وAB موازی ومساوی ودریک جهت باشدچهارضلعیAA′B′B متوازی الاضلاع است پس $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ است. یعنی تمام نقطه های به اندازه $\vec{V}$ که هم جهت با $\overrightarrow{AA'}$ رسم شده است تغییرمکان داده اند، یا به عباره دیگرانتقال یافته اند، ازین انتقال ها به نتائیج ذیل می رسیم.



شکل ۲۰۶ : انتقال در چهارضلعی

نتیجه۱: درانتقال هردو قطعه خط متناظرمانند $A'B'$وAB با هم موازی ومساوی ودر یک جهت اند زیرا که شکل AA′B′B متوازی الاضلاع است.

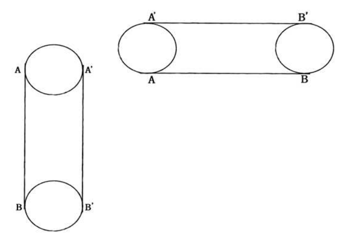
نتیجه ۲: انتقال یافته هرخط مستقیم، خط مستقیم است.

نتیجه ۳: انتقال یافته هر زاویه، زاویه است هم جهت با آن.

نتیجه۴: انتقال یافته هر چند ضلعی، چند ضلعی است معادل با آن.

d) انتقال در دایره:

دایره را می توان که توسط انتقال موازی دوخط مستقیم ازیک جا به جای دیگر بدون تغییر جهت وشکل انتقال دهیم، طوریکه درشکل ملاحظه می گردد. اگردایره(C (0,R را توسط خطوط موازی AB و A′B′ انتقال دهیم درین صورت شکل دایره تغییر نمی خورد. ودایره C′(O,R) بدست می آید.



شکل ۲۰۷ : انتقال موازی در دایره

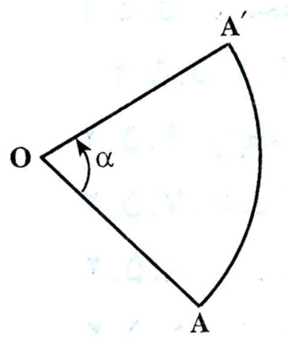
یادداشت:

۱- انتقال طول قطعه خط را حفظ می کند.
۲- انتقال میل خط را حفظ می کند.
۳- انتقال یک ایزومتری است(حافظ طول).
۴- وکتورهایکه هرنقطه را به نقطه تصویرش تحت یک انتقال هم مانند می سازند، دارای طول های مساوی وجهت های یکسان هستند.

۳.٦. دوران

یک نمونه از مرکز تفریحی که در برخی شهرهای افغانستان نیز وجود دارد و اغلب آنها به ایجاد حرکت های مختلف در بازدید کننده گان شور هیجان ایجاد میکند ازجمله رایجترین وسایل در مراکز چرخ و فلک است . حرکت چرخ و فلک رصورت چرخشی است که دوران نامیده میشود . حرکت های دورانی از جمله حرکت های هستند که در زندگی روزمره بسیار با انها سروکارداریم .

قضیه : تعریف، نقطه ثابت(O) و زاویه جهت دارα دریک سطح در نظر می گیریم.متناظربا هرنقطه A نقطه مانند A′ می توان تعیین کرد.چنانکه OA′=OA و$AOA'=\alpha$ باشند درین صورت نقط A′ را تبدیل یافته نقطه A در دوران به زاویهα حول نقطه O می گوییم

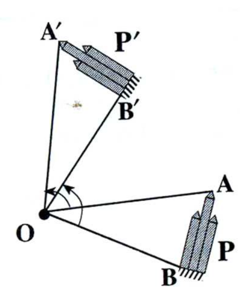


شکل ۲۰۸: دوران نقطه A نسبت به نقطه (O)

برای مشخص کردن نقطه A′ نقطه A را به نقطه O وصل کرده ودر نقطه O بر نیم خط OA زاویه مساوی α ودرجهت مناسب(برحسب آنکه زاویه α مثبت یا منفی یا صفر باشد) می سازیم. وبر ضلع دیگراین زاویه قطعه خط OA′ را مساوی OA جدا می کنیم. در دوران تبدیل یافته هر نقطه A از حرکت آن نقطه بر دایره مرکز(O) وبه شعاع OA وبه اندازه α مشخص می شود. یعنی ضمن این حرکت فاصله نقطهA از مرکزدوران ثابت می ماند ، ونقطه A بر دایره به این مرکز، قوسی می پیماید که زاویه مرکزی مقابل آن به اندازه α است هر دوران با مرکز آن واندازه جبری زاویه α (زاویه دوران)مشخص می شود. زاویه دوران ممکن مثبت ویا منفی ویا صفر باشد. اگراندازه زاویه دورانی صفر باشد، آنرا دوران صفر می نامند . دوران صفر تبدیل ها عینیت است. دوران به مرکز(O) وبا زاویه α به علامه R_O^α یا (O,R) نمایش می دهیم وآنرا(دوران به اندازه α حول نقطه O) می خوانیم.

بهترین مثال دوران ، حرکت چرخ فلک به صورت چرخشی است که دوران نامیده می شود .حرکت های دورانی از جمله حرکت هایی هستند که درزندگی روزمره با آنها سروکار داریم . تصویر مقابل مدلی از یک چرخ فلک است این تصویر

وضعیت مختلف از یک موشک چرخ فلک درحال حرکت رانشان می دهد ، وضعیت اول موشک را به P و وضعیت دوم را به P′ ومحورچرخ فلک را به (O) نشان داده ایم.



شکل ۲۰۹: دوران P به P′ به حول نقطه(O)

پس گفته می توانیم که یک دوران به مرکز(o) ثابت وزاویه α تبدیلی است که هرنقطه A درسطح را به نقطه مانند A′ از آن سطح هم مانند می کند به طوریکه

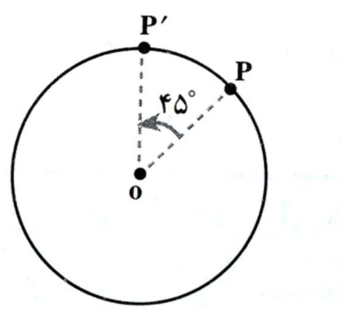
الف: مرکز دوران یعنی نقطه (O) ثابت است.

ب: اگرA نقطه غیراز(O) با شد آنگاه OA=OA′ و AOA′=α (زاویه دوران) دردایره به مرکز(O) نقطه مانند P را درنظر گرفته ودرخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت روی دایره از P به P′ حرکت کند به طوریکه POP′=α . چون OP=OP′ پس P′ تصویر نقطه p تحت دوران به مرکز(O) واندازه α است.

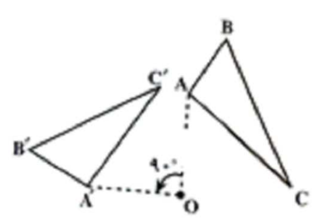
اگرα یعنی زاویه مثبت باشد، دوران جهت خلاف عقربه های ساعت است واگرα منفی باشد دوران درجهت حرکت عقربه های ساعت است.

درین جا چند مثال را مطالعه می نمائیم.

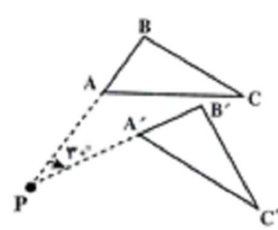
مثال۱:



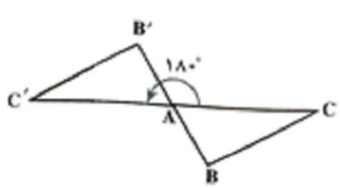
شکل۲۱۰ : مرکزدوران (O) زاویه دوران °۴۵



شکل 211: الف) مرکز دوران O
زاویهٔ دوران °۹۰



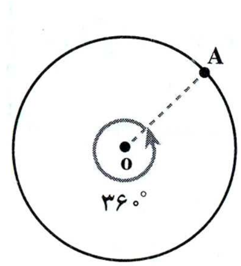
شکل 212: ب) مرکز دوران P
زاویهٔ دوران °۳۰−



شکل 213: ب) مرکز دوران A
زاویهٔ دوران °۱۸۰

(۱۷، صص۲۹۲-۲۹۵).

دوران کامل: دوران به زاویه 360° که هر نقطه مانند A رابه محل اولیه اش نقش می کند یک دوران کامل خوانده می شود.



شکل ۲۱۴ : مرکز دوران(O) به ۳۶۰°

مثال۲: A(2,0)، B(5,0) وC(5,2) راس های یک مثلث هستند. دریک مستوی مثلث ABC وتصویرهایش را تحت هریک از تبدیل های زیر رسم کرده سپس هرتبدیل را تعیین وتعریف میکنیم.

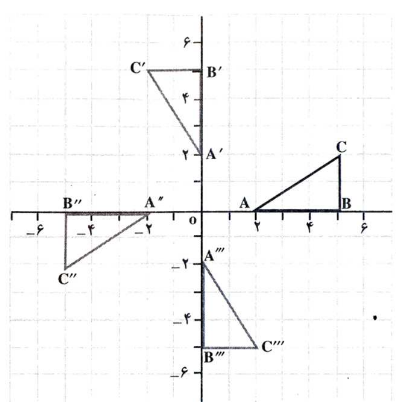
الف) R_1 (X,Y)=(-Y,X)

ب) R_2 (X,Y)=(-X,-Y)

ج) R_3 (X,Y) =(Y-X)

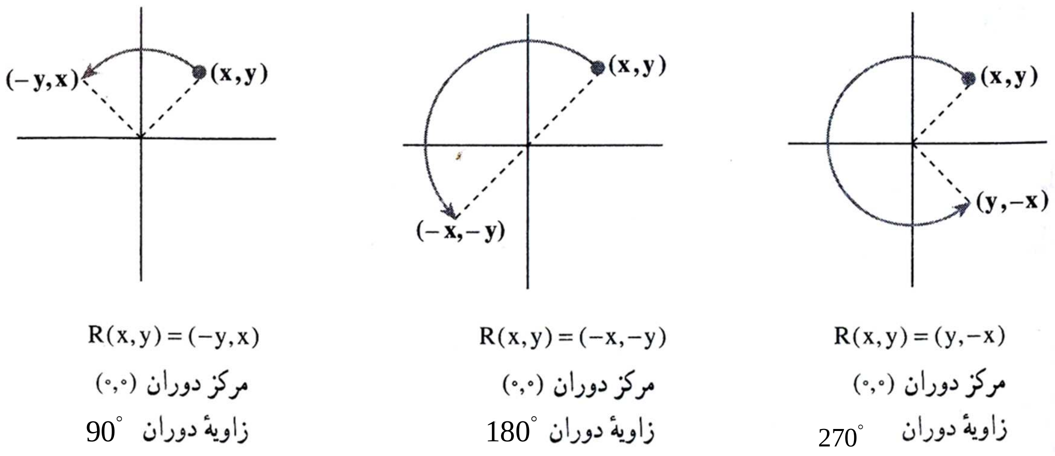
تصویرها			نقطه
(Y-X)	(-X,-Y)	(-Y,X)	(X,Y)
A’’’(0,-2)	A’’(-2,0)	A’(2,0)	A(2,0)
B’’’(0,-5)	B’’(0,-5)	B’(0,5)	B(5,0)
C’’’(2,-5)	C’’(-2,-5)	c’(-2,5)و	c(5,2)

حل: این تبدیل ها دورانهای مرکز مبداء مختصات وبه ترتیب به زاویه های 90°، 180°و 270° هستند.



شکل ۲۱۵ : دوران نظر به مبدا مختصات به زاویه های 90°، 180°و 270°

درشکل های زیر مرکز دوران وزاویه دوران 90°، 180°و 270° نشان داده شده است.



شکل ۲۱۶: مرکز و زاویه دوران 90°، 180°و 270°

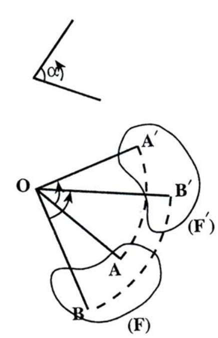
خصوصیت دوران

_ دوران مرکزی دوران را ثابت نگهمیدارد .

_ دوران الزاماً میل خط را حفظ نمی کند .

_ دوران یک ایزومتری است .(حافظ طول)

دوران یافته یک شکل: دوران یافته هرشکل مانند (F) نسبت به مرکز دوران (O)وزاویه دوران α به شکل است مانند (F′) به قسمی که هرنقطه اش دوران یافته یک نقطه از شکل (F) نسبت به مرکز دوران (O) وبه اندازه زاویه دوران α باشد اگرشکل (F) ازدوران شکل F نسبت به مرکز دوران(O) وبه زاویه دوران α بدست آمده باشد برعکس شکل F هم میتواند ازدوران شکل F′ نسبت به مرکز O وبا زاویه دوران $(-\alpha)$ یا $360^{\circ} - \alpha$ وبطورکلی $2k\pi - \alpha$, $(k \in \mathbb{Z})$ بدست آید.



شکل ۲۱۷ : دوران یافته یک شکل نسبت به مرکز (O)

قضیه ۱ : دوران شکل را تغییر نمیدهد یعنی تغیرمکان است

قضیه ۲ : دردوران تبدیل یافته هرخط مستقیم یک مستقیم است

قضیه ۳ : دردوران زاویه بین هردوقطعه خط متناظر به امتداد شان ، متساوی با زاویه دوران است

قضیه ۴ : هرتغییرمکانی که یک شکل تغییرناپذیردرسطح خود انجام داده باشد عبارت است ازیک انتقال یا یک دوران .

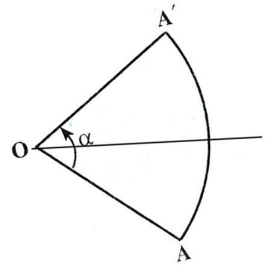
قضیه ۵ : اگرشکل F طوری حرکت کند که همه خصوصیت هایش با وضعیت اولیه آن متشابه باشند وسه نقطه A، B ، C ازشکل سه خط غیر مشابه را طی نماید آن گاه هرنقطه ازشکل یک خط مستقیم را طی میکند.

ترسیم تبدیل یافته یک خط در دوران : ازآنچه ذکرشده میتوان نتیجه گرفت که برای تعین تبدیل یافتهء یک خط مستقیم درهردوران به یکی ازراهای زیرمیتوان عمل کرد .

۱. تبدیل یافته دونقطه ازآن خط را تعین کرده وآنها را به یکدیگر میپیوندیم
۲. ازمرکز دوران خط عمود برخط عمود برقطعه خط مفروض رسم کرده وتبدیل یافته پاینی عمود را تعین میکنیم، آن گاه دراین نقطه عمود برقطعه خط واصل بین این نقطه ومرکز دوران رسم میکینم، این خط تبدیل یافته خط مورد نظراست .
۳. تبدیل یافته یک نقطه ازخط را تعین کرده وبرآن نقطه خطی میگذرانیم که با خط مفروض درجهت مناسب زاویه مساوی زاویه دوران شکل دهد چنانکه ملاحظه میشود درراه های ۲ و۳ ازخصوصیت دوران برای تعین تبدیل یافته خط استفاده می شود ، یعنی تبدیل یافته یک نقطه ازخط را تعین کرده وبا توجه به قضه های قبلی تبدیل یافته خط رسم می کنیم .

ترکیب (مجموع) دورانها:

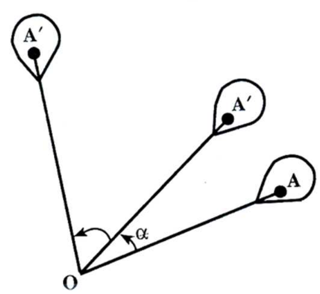
قضیه ۶ : مجموع دودوران هم جهت به مرکز دوران مشترک (O) وبه زاویه های دوران α و βدورانی است به مرکزدوران (O) وبه زاویه دوران $\alpha + \beta$ درستی این قضیه باتوجه به تعریف دوران مشخص است زیرا که اگرنقطه A دوران یافته نقطه دلخواه A ازشکل F نسبت به مرکز دوران (O) وزاویه دوران α و A′′ دوران یافته نقطه A′ نسبت به مرکز دوران O وزاویه دوران β ازرابطه های OA=OA′ و $A\hat{O}A'=\alpha$ و OA′=OA′′و $A'\hat{O}A''=\beta$ باشد نتیجه میشود که OA′′=OA , $A'\hat{O}A''=\alpha + \beta$است وان نشان میدهد که نقطه A′′ دوران یافته نقطه A نسبت به مرکز دوران O وزاویه دوران $\alpha + \beta$ است.



شکل ۲۱۸ : نمایش دوران یک نقطه نظربه (O)

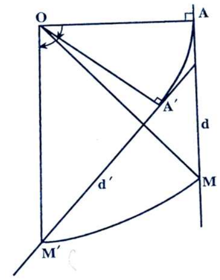
دوران درنقطه ، خط وزاویه

۱ : دوران درنقطه : دوران یک نقطه A مانند نقطه A′ میتوان تعیین کرد ودردوران شکل نقطه تغییرنمیخورد ثابت است. دراین صورت نقطه A′ تبدیل یافته نقطه A دوران به زاویه α حول نقطه O میگویم با آنکه نقطه A با این دودوران به A′ برده شده است.یعنی نقطه ثابت O وزاویه جهت دار α رادریک سطح درنظرمیگیریم.متناظربه هرنقطه A نقطه مانند A' رامیتوان تعیین کردطوریکه $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ باشند.



شکل ۲۱۹ : دوران در نقطه نسبت به حول (O)

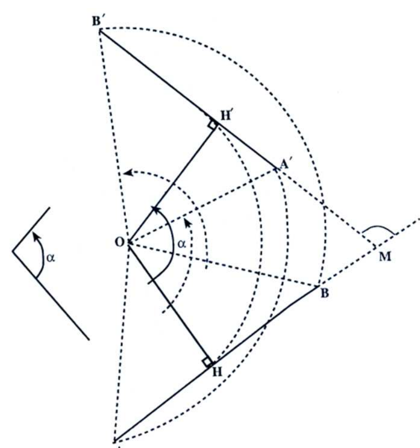
۲ –دوران درخط : دردوران یک خط مستقیم خط مستقیم است یعنی تبدیل یافته هرخط مستقیم دردوران خط مستقیم است وتغیر نمیخورد فرضا دوران R_o^a وخط d را درنظر بگیریم ازنقطه O مرکز دوران عمود بر d رسم میکنیم A′ دوران یافته A است نقطه دلخواه M را روی d اختیارو M′ دوران یافته M را تعیین میکنیم به ساده گی دیده میشود که OM = OM′ و OA = OA′ ، $A\hat{O}M = A'\hat{O}M'$ پس $\Delta OAM =$ $\Delta OA'M' \Rightarrow O\hat{A'}M' = O\hat{A}M$ پس A′M′ بر OA عمود است ودرنتیجه دوران یافته هرنقطه خط d برخطی مانند d' که در A′ بر OA′ عمود است قراردارد برعکس میتوان ثابت کرد که هرنقطه دلخواه N' از d′ با دوران حول O به زاویه α - برنقطه مانند N درخط d منطبق میگردد پس d′ دوران یافته خط d حول O به زاویه α میباشد.



شکل ۲۲۰ : دوران درخط

دوران در زاویه:هرگاه A’B’ و AB دوقطعه خط متناظر دردوران به مرکزO وبه زاویه αو $-180^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ باشد .وازمرکزدوران O عمود های OH وOH’را بترتیب بر AB و A’B’ترسیم نمایم آنگاهA’H’ = AH (به دلیل آن که دردوشکل معادل همه اجزا متناظر متساوی اند) پس H’ وضع جدید H است و α =HOH'.

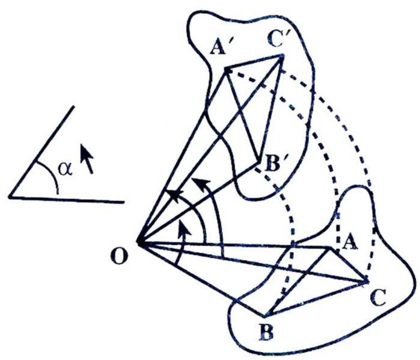
حال اگرM نقطه متقاطع A’B’ و AB باشد چهارضلعی OH’ MH که دوزاویه روبروی آن قایم است محاطی است ودرآن زاویه های M1 و $\hat{o} = \alpha$ مکمل یکدیگراند وزاویه بین دوامتداد $\overrightarrow{A'B'}$ و$\overrightarrow{AB}$ نیز مکمل M1 است پس با α متساوی است وازاینکه دوران یافته هرزاویه معادل وهمجهت با آن است (درصورتیکه زاویه درسطح جهت دارباشند)، پس به هرزاویه میتوانیم به حول مرکزدوران ، دوران د هیم بدون آنکه تغیر بخورد . ونیز گفته بتوانیم



شکل ۲۲۱ : دوران در زاویه

دوران درمثلثها

۱- میانه های مثلث ABB′ را ازمثلث ABC به اندازه $\frac{1}{3}$ طول آنها بترتیب تا نقطه A′′ . B′′ و C′′ امتداد میدهیم تا مثلث A′′B′′C′′ بدست آید مرکز وزاویه دورانی را که مثلث ABC را به مثلث A′′B′′C′′ تبدیل میکند تعین مینمایم برای این کارنقطه همه تقاطع میانه های مثلث ABCرا G می نامیم. چون GA′=GA′. GB′′=GB′ و GC′′=GC′ است پس مثلث A′′B′′C′′ دوران یافته مثلث ABC نسبت به مرکز دوران G وزاویه دوران AGA′′=180°



شکل ۲۲۲ : دوران در مثلث به حول (O)

۲- اگر A،B و C نقطه دلخواه ازشکل F و A′B′ و C′ وضلع های جدید آنها پس ازدوران درحول مرکز (O) به اندازه α باشند .

دومثلث A′B′C′ وABC به حالت متساوی سه ضلع معادل اند اما دلیل آن که ضلع های این دومثلث با هم برابرچنین است .

۱- $\Delta OA'B' \cong \Delta OAB$ چونکه OB′=OB وOA′=OA

و$\mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}'$ =A$\hat{O}$B=$\alpha - \mathrm{A}\hat{O}\mathrm{B}'$ پس A′B′=AB

۲- به دلیل مشابه $\Delta OA'C' \cong \Delta OAC$ پس $A'C'=AC$

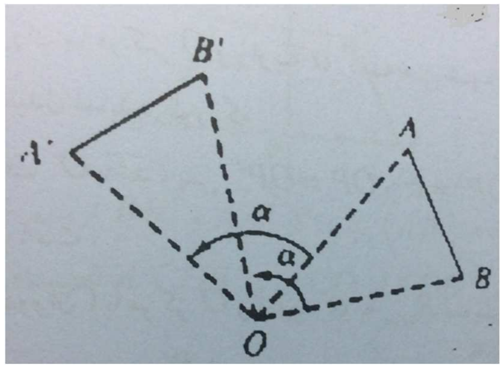
۳- به دلیل مشابه $\Delta OB'C' \cong \Delta OBC$ پس $B'C'=BC$

حال اگر A′B′ (ازمثلث A′B′C′) را به وسیله لغزاندن درسطح بر AB (ازمثلث ABC) تطبیق نسازیم C′ هم بر Cتطبق میشود .وبه همین ترتیب هریک ازنقطه های شکل F′ برنقطه هم مانند رأس ازشکل F تطبق خواهد شد یعنی دوشکل معادل اند وازطرف دیگردوران شکل را تغییر نمیدهد یعنی تغییر مکان است

مثال تصویر ABC تحت عملیه دوران $R_{P,\alpha}$طبق شکل ذیل عبارت از A’B’C’ $\Delta A'B'C'$ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

قضیه : تابع دوران –ایزومتریک (حافظ مسافه) است

مفروض: قطعه خط ABبا A’B’ = (AB) $R_{0,\alpha}$ داده شده مطلوب AB=A’B’



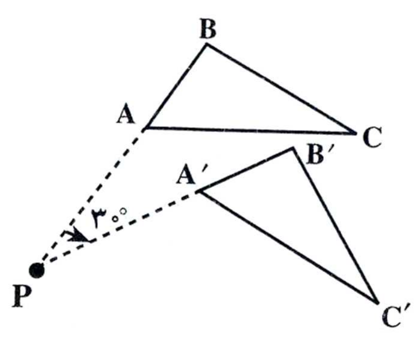
شکل a ۲۲۳ : دوران مثلث نظربه نقطه (P)

ثبوت مطابق تعریف دوران داریم که

$$OA = OA', OB = OB', \angle BOB' = \alpha = AOA'$$
$$\Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow AOB \cong A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$$

پس دوران حافظ مسافه ، زاویه ، نیم خط می باشد. تصویر یک شکل دراثر دوران عبارت از شکل انطباق پذیرآن است .

مثال. تصویر ABC تحت عملیه دوران $R_{p,\alpha}$ برای $\alpha = 30°$ طبق شکل ذیل عبارت از $A'B'C'$ است. طوریکه $ABC \cong A'B'C'$



شکل b ۲۲۳ : دوران مثلث نظربه نقطه (P)

(۲۱، صص ۵-۱۰).

دوران در دایره: یک دایره S با دوران حول نقطه O به دایره جدید S′ بدل میشود .

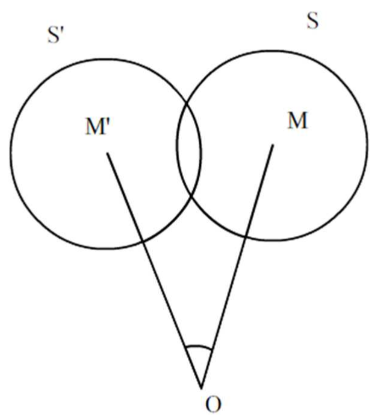
برای رسم S′ باید اول نقطه M مرکز دایره S را حول O دوران دهیم وسپس دایره ای به مرکز جدید M′ وباهمان شعاع دایره اولیه رسم واضح است که وقتی نقطه A داده شده باشد شرطهای ذیل

۱- OA′=OA ۲- $A\hat{O}A' = \alpha$

بدون هیچ شرط دیگردرباره جهت دوران دونقطه جدید A′ و A′′ را مشخص میکنند

برای انتخاب یک ازآنها میتوانیم مثلاً به این ترتیب عمل کنیم که جهت دوران این رابه عنوان جهت مثبت (که ممکن است توسط وکتور روی یک دایره مشخص شود) درنظر میگیریم وجهت مخالف را جهت منفی درنظرمیگیریم با علاوه مثبت ویا منفی بودن زاویه دوران $\alpha = A\hat{O}A'$ بستگی به جهت دورانی دارد که A را به A′ می برد، درین حالت دونقطه A′ و A′′ به دوزاویه متفاوت دوران (با اختلاف علامت)

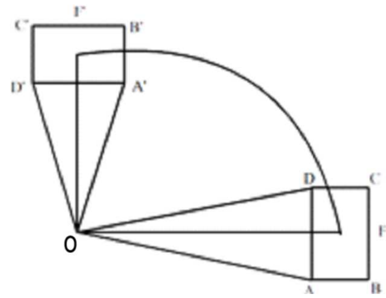
متناظر خواهند شد(۳۲، ص۳۱) . بنا براین به طورطبیعی به مفهوم زاویه های جهتدارکه میتوانند مثبت یا منفی باشند رهنمون میشویم



شکل ۲۲۴ : دوران در دایره نظر به نقطه(O)

دوران درچهارضلعی : درتصویر ذیل حالت دورانی یک چهار ضلعی از وضعیت اول P به وضعیت دوم P′ ومحور آنرا O نشان داده ایم .فرضا چهارضلعی ABCD چهارنقطه از وضعیت اول به وضعیت دوم تحت زاویه αومحور O دوران داده شده است که نقاط متناظر آن A′B′C′D′ میباشد قراریکه درشکل دیده میشودو چهارضلعی متذکره منطیق است وهرچهار زاویه آن قایم است برعلاوه اضلاع آن متقابلا

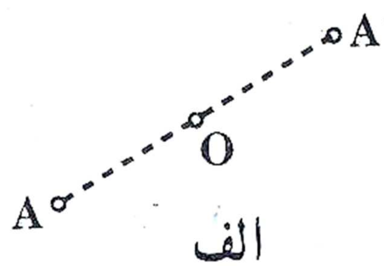
موازی اند که بعد ازدوران به محور O وبه زاویه αبه حالت اولی میباشد وشکل هیچ تغییر نخورده است پس به نتیجه میرسیم که هرشکل هندسی،را میتوان دوران داد بدون آنکه شکل تغییر بخور د



شکل ۲۲۵ : دروان چهارضلعی نظر به نقطه O

٤.٦. تناظر مرکزی

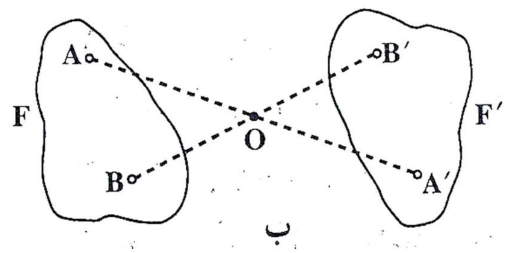
تعریف . میگویم نقطه A′ ازنقطه A با یک تناظر مرکزی با یک نیم دورحول نقطه O (که مرکز تناظر نامیده میشود) بدست میآید هرگاه نقطه O وسط قطعه خط AA′ باشد .



شکل ۲۲۶ : تناظر مرکزی

واضح است که اگر نقطه A′ ازیک نمیدورنقطه Aحول O بدست آمده باشد، آنگاه برعکس A نیز ازیک نمیدورنقطه A′ حول O بدست میآید باتوجه به این وضعیت میتوانیم ازیک جوره نقطه های وابسته به هم توسط یک نیم دورحول نقطه صحبت کنیم اگر A′ ازیک نمیدورنقطه A حول O بدست آید آنگاه چنین نیز میگویم : A′ ازانعکاس A نسبت به نقطه O بدست آمده است یا A' متاظر A است نسبت به نقطه O متناظربه مرکز O را به علامه S نشان میدهند ومی نویسند $A' = S_O(A)$

تناظر مرکزی یک شکل : مجموعه تمام نقطه های که ازتناظر مرکزی شکل مفروضF حول نقطه O بدست می آیند. شکل F' را تشکیل میدهند که ازیک نیم دورشکل F حولO بدست میآید .

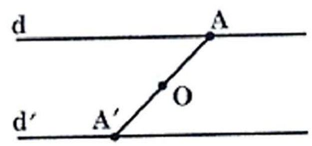


شکل ۲۲۷ : تناظر مرکزی

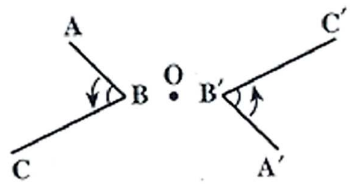
درعین حال شکل F ازیک نیمدورشکل F حول O بدست می آید .

چند نتیجه : چون تناظرمرکزی دوران به زاویه ۱۸۰ حول مرکزتناظراست. بنابراین تناظر مرکزی همه خصوصیت دوران را حفظ میکند، یعنی :

۱- تناظر مرکزی هرخط مستقیم خطی مستقیم وموازی آن خط است .
۲- تناظرمرکزی هرزاویه زاویه معادل وهمجهت با آن زاویه است .
۳- تناظر مرکزی هرشکل به آن شکل معادل است .
۴- درتناظر مرکزی تناظر مرکزتناظربرخودش منطبق است .

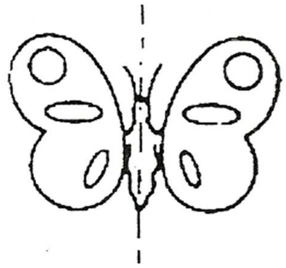


شکل 228 : تناظرخطوط مستقیم وموازی



شکل ۲۲۹ : تناظر مرکزی زاویه

تناظرخطی: یک شکل متناظرنظر به یک خط مستقیم است، اگر وتنها اگر، یک خط مستقیم L وجود داشته باشد ، طوریکه تصویر انعکاسی هر نقطه شکل نظر به L دربین نقطه از همان شکل باشد ، اشیای طبیعی که تناظر خطی داشته باشند بنام متناظر دوطرفه گفته می شود(۱۳، صص ۷۰-۷۱).



شکل ۲۳۰ : تناظر خطی

تناظردورانی: یک شکل دارای تناظر دورانی است، اگرد راثر دوران تحت یک زاویه کوچکتر از 360° بر خودش منطبق گردد گفته می شود که جسم مذکورتناظر دورانی دارد ، شکل ذیل دارای تناظر دورانی 90°، 180°و 270° و 360° می باشد شکل با تناظر 360° فقط متناظر گفته میشود:

شکل ۲۳۱ : تناظر دورانی

تناظر نقطوی: هرگاه شکل تناظر دورانی 180° داشته باشد گفته می شود که این شکل تناظر نقطوی دارد. دایره دارای تناظرنقطوی است .

الف

شکل 232 : متناظر خطی و نقطوی است

ب

شکل 233 : متناظرنیست

ج

شکل 234 : متناظرخطی است

د

شکل 235 : تناظر دورانی ۱۲۰

محورتناظرومرکز تناظر بیضوی: بیضوی دو محورتناظردارد یکی خط FF' که آنرا محورتناظر محراقی بیضوی می نامند و دیگر ناصف عمودی قطعه خط FF' که محورتناظرغیرمحراقی بیضوی نامیده می شود . نقطه O' محل تلاقی دو محورتناظر بیضوی مرکز تناظر بیضوی است که به طور خلاصه آنرا مرکز بیضوی می نامند. محور محراقی بیضوی را در A وA' ومحورغیرمحراقی آن بیضوی را دردونقطه

B'وB قطع می کند که چهارنقطهB',B,A',A را رأس های بیضوی می نامند .طول قطعه خط AA' برابر $2a$ عدد ثابت بیضوی است ، طول قطعه خط BB' را $2b$ نشان می دهد .

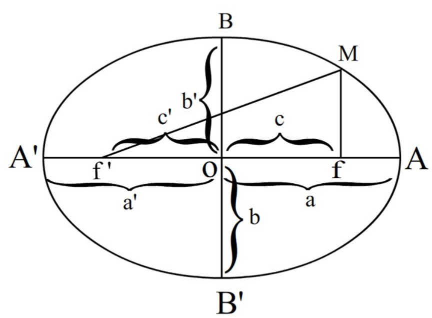
اگرO' مرکز تناظر بیضوی باشد داریم

$AA'=2a \Rightarrow O'A = O'A' = A$

$BB'=2b \Rightarrow O'B = O'B' = B$

$FF'=2c$ $\Rightarrow O'F = O'F' = C$

رابطه بین b،a و c قرارذیل برقرار اند. $a^2 = b^2 + a^2$



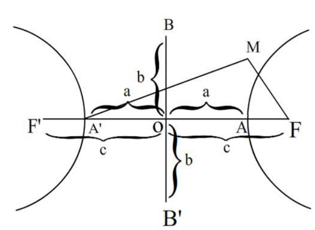
شکل ۲۳۶ : محور و مرکز تناظربیض

محورهای تناظرومرکزتناظرهایپربول: های پربول دومحورتناظردارد یکی $F\acute{F}$ که آنرامحورتناظر هایپربول می نامندودیگرناصف عمودی قطعه خط $F\acute{F}$ که محور تناظرغیرمحراقی نامیده می شود.نقطه ($\acute{O}$) محل تلاقی این دومحورتناظر،مرکز تناظر هایپربول است .محور محراقی های پربول رادردونقطه A و $\acute{A}$ قطع می کند که دورأس محراق هایپربول نامیده می شود $A\acute{A} = 2a$ طول قطر قاطع های پارابول نام دارد. محورغیرمحراقی های پارابول، های پارابول را قطع نمی کند اما از نظرشباهت با بیضوی دو نقطه B'وB را روی محور غیر محراقی چنان اختیار می کند که $O'B = O'B' = b = \sqrt{c^2 - a^2}$ است وBB' را قطرغیر محراقی های پارابول گویند. اگرO' مرکز های پارابول باشدداریم:

$AA'=2a \Rightarrow O'A = O'A' = a$

$BB'=2b \Rightarrow O'B = O'B' = b$

$FF'=2c \Rightarrow O'F=O'F'=c$



شکل ۲۳۷ : محور ومرکز تناظر هایپربول. (۱۷، ص۲۹۶).

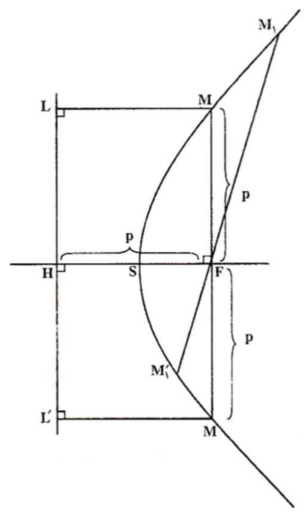
محورتناظرپارابول: خط FH محورتناظرپارابول است که به طور خلاصه آنرا محورپارابول می نامند ، نقطه S وسط قطعه خط FH راس پارابول نامیده می شود .

حصوصیات محراقی پارابول: اگرخطی از F محراق پارابول بگذرد وپارابول را در دو نقطه M و M′ قطع کند قطعه MM′ را یک وتر محراقی پارابول می نامند .

اگروترمحراقی پارابول بر محور پارابول عمود باشد طول آن برابر 2p است زیرا داریم .

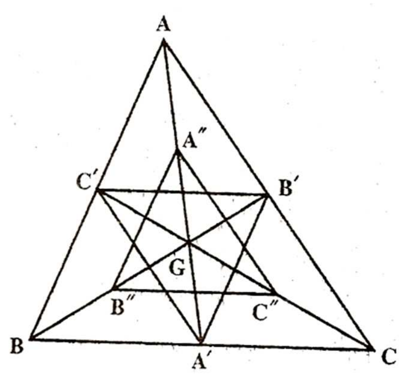
$ML=M'L'=FM=FM'=P \Rightarrow MM' = 2P$

که از این خصوصیت برای رسم پارابول استفاده می کنند .



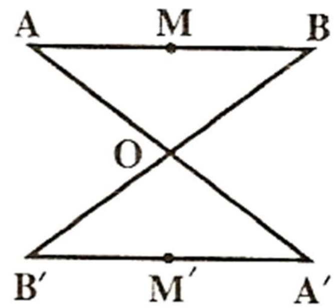
شکل ۲۳۸ : محورتناظر پارابول

تناظرمرکزی درمثلث: مرکزتناظر نقطه بر تلاقی میانه های AA′ ،BB′ وCC' از مثلث ABC راG و وسط های قطعه خط های GB،GA و GC را به ترتیب A′′،B′′و C′′ می نامیم، ثابت می کنیم که نقطه G مرکز تناظرشکل حاصل از دو مثلث A′B′C′و A′′B′′C′′ است. بنا به خصوصیت میانه ها GA′′=GA′ ، GB′′=GB′ و GC′′=GC′ است.بنا برین مثلث A′′B′′C′′ تناظرمرکزی مثلث A′B′C′ نسبت به مرکز G است که حکم مسٔله برقرار است قرارشکل ذیل:



شکل ۲۳۹ : تناظر مرکز درمثلث

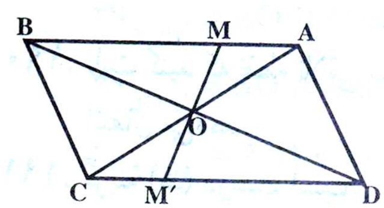
تناظرمرکزی درخط: فرضاً دو قطعه خط موازی AB و A’B’ موازی ومساوی و مختلف الجهت اند می خواهیم مرکز تناظر که این دو قطعه خط را با هم تبدیل می کند تعیین کنیم برای این کار نقطه O محل تلاقی قطعه خط های متناظر AA’ و BB' جواب مسّله است قرار که در شکل ملاحظه می نمائید.



شکل ۲۴۰ : تناظرمرکزی درخط

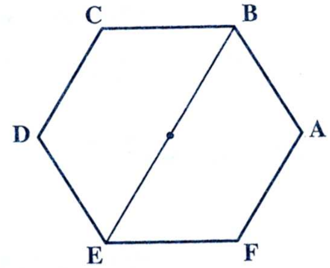
تناظرمرکزی درچند ضلعی ها: مرکزتناظر درین بخش می خواهیم از جمله چند ضلعی های، متوازی الاضلاع که یک چهار ضلعی منظم است راموردِ مطالعه قراردهیم. می دانیم که قطرهای متوازی الاضلاع یک دیگر را نصف می کند یعنی اگرO نقط تلاقی قطرها ی متوازی الاضلاع ABCD باشد OA=OC و OB=OD است، حال ثابت می کنیم که هر خط که از (O) بگذرد ضلع های روبروی متوازی الاضلاع را درنقطه M و M' قطع می کند که تناظر یکدیگر نسبت به نقطه (o) می باشد .

جهت ثبوت از معادل بودن مثلث ها یOMA وOM'A (یا OBM وOM'D) حاصل می شود. که محل تلاقی متوازی الاضلاع مرکزتناظر آن است.



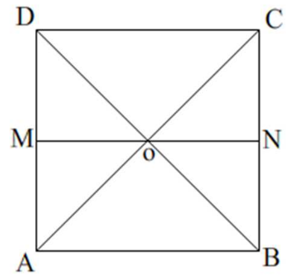
شکل ۲۴۱ : تناظر مرکزی در چندضلعی ها

تناظرمرکزی شش ضلعی منظم: شش ضلعی منظم ABCDEF را درنظرمی گیریم وقطرBE را رسم می کنیم، وسط قطر BE مرکزتناظر دو چهارضلعی ABEFو BCDE تناظر مرکز یک دیگر اند .



شکل ۲۴۲ : تناظرمرکزی شش ضلعی منظم

تناظرمرکزی مربع : مرکزتناظرمربع آن است که محل تلاقی هردو قطر خطهای که وسط های ضلع های مقابل را به هم وصل می کند محورهای تناظر درمربع است .قراشکل ذیل.



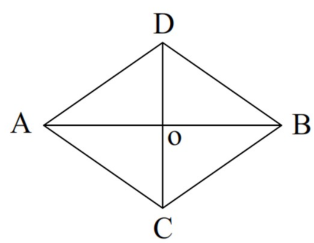
شکل ۲۴۳: تناظرمرکزی مربع

AB=CD=BD=AC

وقطرهای AD وAC درنقطه (O) با هم عمود ویک دیگر را قطعه نموده است از طرف دیگرقطرهای مربع ناصف عمودی بالای یکدیگر می باشد پس نقطه (O) مرکز تناظر مربع است.

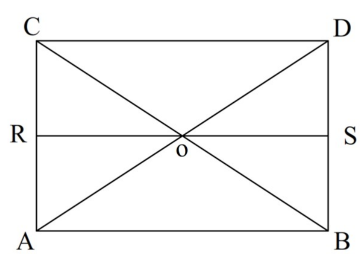
وخط MN که وسط های دو ضلع را با هم وصل نموده محور تناظر مربع است.

مرکز تناظر لوزی : در لوزی محل تلاقی دو قطر مرکز تناظر لوزی است .قطر محور تناظر لوزی میباشد ودر شکل ذیل نقطه (0) تقاطع دو قطعه خط AB و CD مرکز تناظر لوزی و هر قطرAB ویا CD محور تناظر لوزی می باشد .



شکل ۲۴۴ : مرکز تناظرلوزی

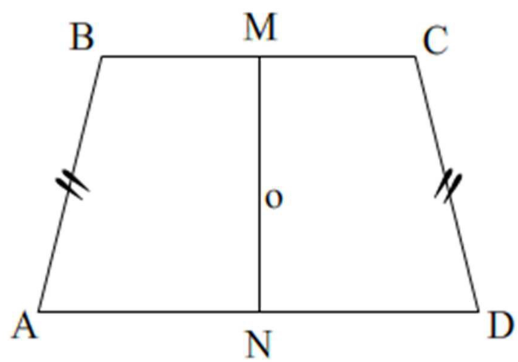
مرکز تناظرمستطیل: درمستطیل مرکز تناظر محل تلاقی دو قطر است وخط های که وسط های ضلع های :مقابل ر ابه هم وصل می کند محور های تناظر می باشند ،قرار شکل ذیل :



شکل ۲۴۵ : مرکز تناظرمستطیل

قطرهای مستطیل ABCDعبارت از AD و CD ونقطه تقاطع یا تلاقی آن (O) می باشد که مرکز تناظر مستطیل بوده وهر یکی محور های تناظر مستطیل می باشند.

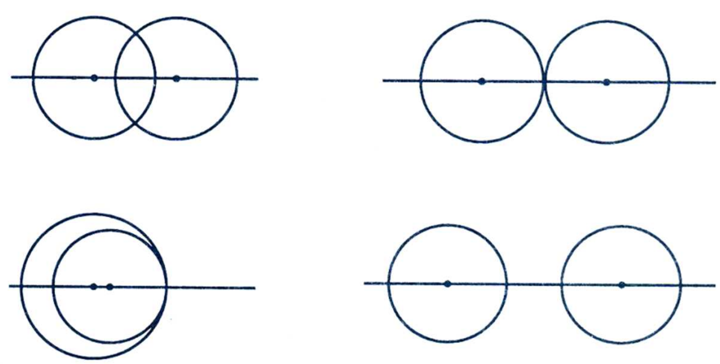
مرکز تناظرذوزنقه: درذوذنقه متساوی الساقین خط که وسط های دو قاعده را با هم وصل می کند محور تناظر است (ذوزنقه ایکه ساقهای آن با هم مساوی باشند بنام ذوذنقه متساوی الساقین یاد می شود) درین جا AD وBC قاعده ذوزنقه که BM=MC وMN خط است که وسط های قاعده را با هم وصل نموده است .



شکل ۲۴۶ : مرکزتناظرذوزنقه

تناظر مرکزی در دایره: مرکزتناظر دردودایره متساوی متقاطع وترمشترک و امتداد خط المرکزین محورهای تناظر ومحل تلاقی آنها مرکز تناظرمی باشند. در دو دایره متساوی ومماس خارج مشترک و امتداد خط المرکزین، محورهای تناظر است ونقطه تماس مرکز تناظر است .

در دو دایره مماس داخل امتداد خط المرکزین محور تناظر است ومرکز تناظر ندارد. در دو دایره متساوی ومتخارج ووسط خط المرکزین مرکز تناظر وعمود موسوم از این نقطه بر خط المرکزین وخود خط المرکزین محورهای تناظر شکل است(۳۲، صص۳-۵).



شکل ۲۴۷ : تناظر مرکزی دردایره

مرکز تناظر دو خط موازی : دو خط موازی دارای بی نهایت مرکز تناظر است.

فرض کنید شکل F دو مرکز تناظر o_1 وo_2 دارد.

(شکل) پس نقطه o_3 که از یک نیمدور o_1 حول o_2 شکل ۲۴۸ : مرکزتناظر دو خط موازی

بدست می آید نیز مرکز تناظر است زیرا اگر A نقط ای از شکل F باشد آنگاه نقط های A_1 وA_2 ، A' که در آن A_1 از یک نیمدورA حول o_2وA_2 از یک نیمدور A_1 حول o_1 وA' از یک نیم دور حول o_2 بدست میآیند. نیز نقطه از F خواهد بود (چون o_1 و o_2 مرکز های تناظر هستند) اما نقطه A' نیز از یک نیمدورA حول o_3 بدست آمده است چرا که قطعه خط های $A\ o_3$ و $A_1\ o_1$ و $A_2\ o_1$ و$A\ o_3$ مساوی، موازی ومختلف الجهت هستند. بنا برین A اگر نقطه از F باشد نقطه تناظرA' که از یک نیمدور A حول o_3 بدست آمده نیز نقطه از F است یعنی o_3 مرکز تناظر F است . به همین طریق می توان نشان داد که نقطه o_4 که از یک نیمدورo_2 حول o_3 بدست آمده ونقطه o_5 که از یک نیم دور o_3 حول o_4 بدست آمده و.... مر کز های تناظر هستند پس می بینیم که اگر یک شکل F دو مر کز تناظر مختلف داشته باشد بی نهایت مرکز تناظر خواهد داشت.

قضیه: اگرمجموع واقع در یک سطح بیش از یک مرکز تناظر داشته باشد آنوقت دارای بینهایت مرکز تناظر می باشد .

فرض می کنیم مجموعهM' دارای دو مرکز تناظر مختلف o_1 و o_2 باشد. درین صورت نقطه o_3 تناظر نقطه o_1 نسبت به o_2 هم به مرکز تناظر مجموعه M است.

درحقیقت اگر(O(A)) را تناظر نقطه A نسبت به نقطه O بگیریم آن وقت ازاین حقیقت که هم دو نقطه A وo_2A وهم دو نقطه o_3 و o_1 نسبت به نقطه o_2 تناظر یک دیگر اند نتیجه می شود که دو نقطه $Co_3(A)$ و $C\ O_1(C\ O_2(A))$ هم نسبت به همان نقطه o_2 متناظر همدیگراند.

بنا برین برای هر نقطه داریم:

$$Co_3(A) = Co_2(C\ o_1(C\ o_2(A)))$$

وازآنجا:

$$Co_3(M) = Co_2(C\ o_1(C\ o_2(M)))= = Co_2(C\ o_1(M))=M$$

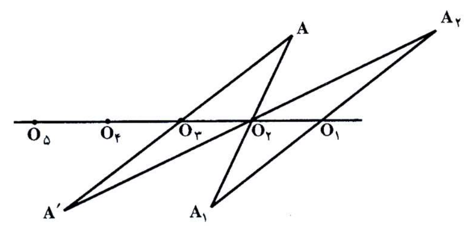
وبه همین ترتیب نقطه های

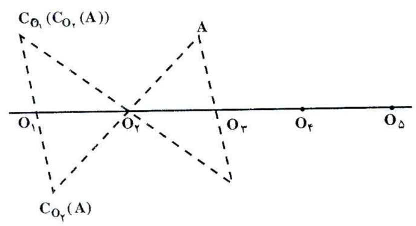
$O_4=CO_3(O_2)$; $O_5 = CO_4(O_3)$; 1

مرکزهای تناظر مجموعه M هستند از آن جا که

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_3O_4} \ldots 2$$

بنا براین همه این مرکز های تناظر جدا گانه اند یعنی تعداد آنها بی نهایت است .





شکل 248: مجموعه تناظر دوخط موازی شکل ۲۴۹: مجموعه مرکز تناظر

یادداشت:

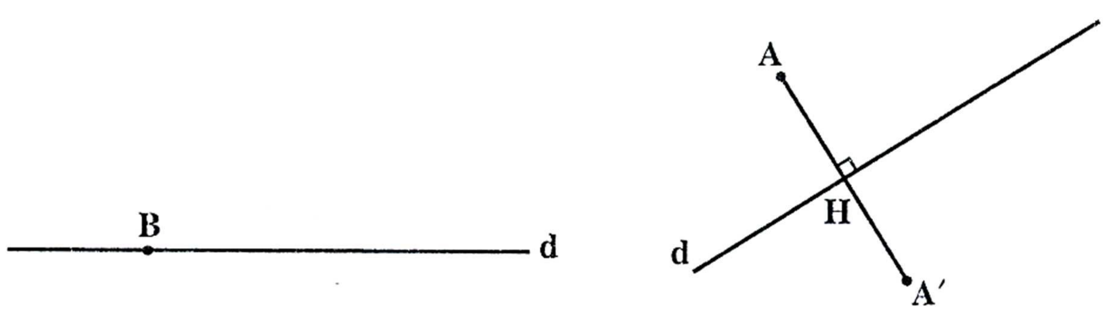
۱- مجموع دو تناظر مرکزی یک انتقال است.

۲- مجموع چهار تناظر مرکزی یک انتقال است.

۳- مجموع سه تناظر مرکزی نسبت به سه مرکز جداگانه یک تناظر مرکزی است.

۵.٦. تناظرمحوری

تعریف: خط d و نقطه A غیر واقع بر آن را در یک مستوی درنظرمی گیریم، نقطه A′ را متناظر نقطه A نسبت به خط d می گویندهرگاه قطعه خط های AA′ بر d عمود وتوسط d نصف شود وبه عبارت دیگر خط d ناصف عمودی قطعه خط AA′ باشد اگر A′ متناظر محوری نقطه A نسبت به خط d باشد، نقطه A نیز متناظر محوری نقطه A′ نسبت به خط d است ، خط d را محور تناظر می نامند. اگر نقطه روی محور تناظر قرار داشته باشد ، متناظرش بر خودش منطبق است. مثلاً خط B در شکل ذیل:



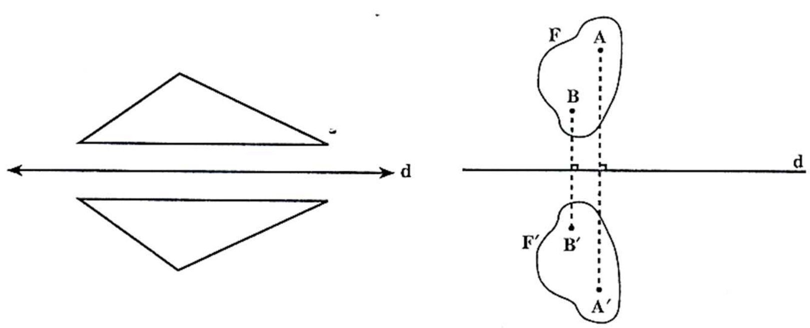
شکل ۲۵۰ : تناظرمحوری نظر به خط

تناظر نسبت به خط d را با علامه S_d نشان می دهند مانند $S_d(A)=A'$

نکته: تناظر محوری را بازتاب نسبت به یک خط(بازتاب محوری) نیز می نامند. ومحور تناظر را محور بازتاب می گویند. درین بخش از هردو واژه استفاده شده است .

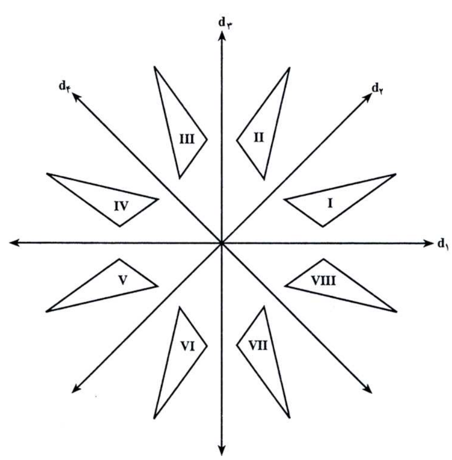
تناظر محوری یک شکل: مجموعه تما م تناظرهای نقطه های شکل F نسبت به خط d خط جدید F' را تشکیل می دهند که تناظر F بر اثر بازتاب (انعکاس) نسبت به خط d است ، بدیهی است که بر عکس F نیزتناظر F' نسبت به d است ، به عباره دیگر دوشکل نسبت به یک خط باز تاب محوری یک دیگراند در صورت که هر نقطه از هریک متناظرمحوری یک نقطه از دیگری نسبت به یک خط ثابت باشد .

درشکل ذیل مثلث ها به خط d متناظراند



شکل ۲۵۱ : تناظرنظربه خط

درشکل زیر تعداد زیادی از این نوع تناظرمی بینید.



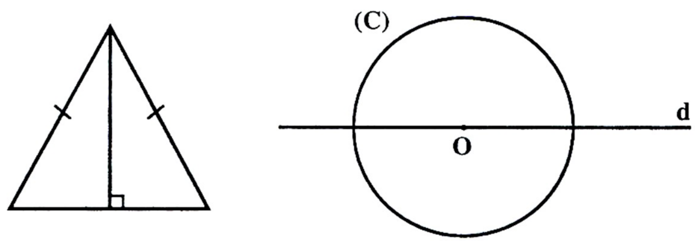
شکل ۲۵۲ : تناظرمحوری

(۳۳، ص۸۴).

بطورمثال ۱ و۲ نسبت به d_2 متناظراند. این بیان را به صورت ۲ ، d_2 ،۱ مختصرمی کنیم . به طور مشابه درین شکل چهار رابطه تناظر دیگرهم وجود دارد.

محورتناظر یک شکل : C را یک مجموعه از نقطه ها و d رایک خط هردورا در یک مستوی در نظر می گیریم . اگرتناظرهرنقطه C نسبت به d روی C باشد می گوئیم که Cنسبت به d متناظر است خط d رامحور متناظر C می نامییم ومی گوییم که C تناظر محوری است. این مفهوم درشکل های گوناگون مثل منحنی ها ، مثلث ها ، چند ضلعی ها، سطوح، حجم ها وشکل های دیگربه کار می رود.

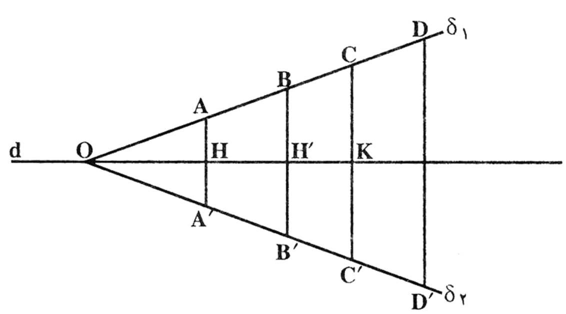
به طورمثال: دایره نسبت به هر خطی که از مرکزش بگذرد متناظراست درون دایره نیزهمین خصوصیت را دارد. کره نسبت به هر خطی که از مرکزش بگذرد متناظراست ارتفاع وارده بر قاعده درمثلث متساوالساقین محورتناظراست.



شکل ۲۵۳ : تناظرنظربه خط

قضیه۱: درتناظرمحوری، تبدیل یافته هرخط مستقیم، یک خط مستقیم است اگردوخط نا موازی d و δ_1 درمستوی ونقطه های A′وB′ تناظردو نقطه AوB ازδ_1 نسبت به خط d باشدخط های AB و A′B′ خط d را در نقطه ای مانند (O) قطع می کند زیرا که :

$$\frac{AH}{AH'} = \frac{BH'}{H'B'} = 1, AA' \parallel BB'$$



شکل ۲۵۴ : تناظرنظربه خط

(۴۱، ص ۸۲).

اکنون از نقطه دلخواه روی δ_1 عمود CK را بر خط d رسم می کنیم وامتداد می دهیم تا خط δ_1 یعنی امتداد A′B′ را در نقطه C′ قطع کند.

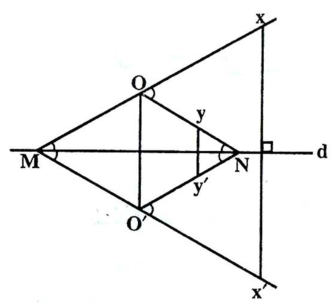
$$\left(\frac{CH}{\mathrm{KC'}} = \frac{\mathrm{AH'}}{\mathrm{AB'}} = 1\right) \Rightarrow \mathrm{KC'} = \mathrm{CK}$$

یعنی تناظر هر نقطه از خط δ_1 نسبت به محور d بر خط δ_2 واقع است. بر عکس می توان دید که هرنقطه D′ از δ_2 تناظر نقطه ای مانند D از δ_1 است پس $\delta_2 = S_{\mathrm{d}}(\delta_1)$

درحالتی که خط δ_1 موازی محور تناظر باشد. δ_2 نیزموازی آن محور است زیرا که:

۱. تناظر محوری هر قطعه خط با آن قطعه خط معادل است .
۲. هر خط وتناظر نسبت به بک محور، یا با آن محور هم رأس اند وبا محور تناظر زاویه ها ی مساوی تشکیل می دهند، ویا موازی محور هستندوبه فاصله برابر از آن قرار دارند .

قضیه۲: تناظر محوری هر زاویه با آن زاویه مساوی است . اگر در شکل $X'\hat{O}Y'$ تناظر $X\hat{O}Y$ نسبت به محورd باشد.



شکل ۲۵۵ : تناظر زاویه نظربه خط

$$\left[\left(O\hat{M}N = O'\hat{M}N\right), \left(O\hat{N}M = O'\hat{N}M\right)\right] \Rightarrow \left(X'\hat{O}'Y' = X\hat{O}Y\right)$$

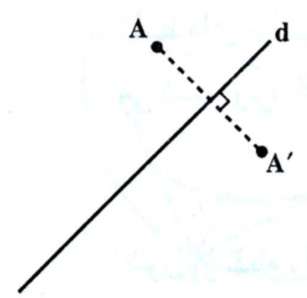
قضیه۳: تبدیل یافته هر شکل در تناظر محوری با آن شکل معادل است.

در تناظر محوری اندازه های قطعه خط ها حفظ می شوند پس دلیل هم مانند دلیل برابر ی هر شکل با انتقال یافته آن است . هر شکل F وتناظرمحوری آن به صورت معکوس مساوی اند . زیرا برای انطباق آنها باید تبدیل یافته ازشکل از مستوی خارج شود وحول محور تناظر بر خود شکل بر گردانیده شود (۴۲، ص۵۵).

قضیه ٤: مجموع دو تناظر نسبت به یک خط یک تبدیل عینیت است .

در واقع اگر تناظر نسبت به خط d ، نقطه A را به A′ ببرد آنگاه دومین تناظرنسبت به d نقطه A′ را به A بر می گرداند. یعنی بر اثردو تناظر وضع نقطه A تغییرنمی کند حکم قضیه را نیزمی تواند بدین صورت بیان کرد.

دو تناظرنسبت به یک خط همدیگر را خنثی می کند .



شکل ۲۵۶ : تناظرنقطه نظربه خط

قضیه ٥: مجموع دو تناظر نسبت به دو خط متقاطع، دورانی است به مرکزنقطه تلاقی این دو خط وبه این زاویه دو برابر زاویه بین آنها.

فرض می کنیم A نقطه دلخواه از مستوی باشد A_1 تناظر A نسبت به خط L_1 است، و A′ تناظر A_1 نسبت به خط L_2 باشد، که L_1 را در نقطه (O) قطع می کند

اگرPو Q به ترتیب نقطه های تلاقی AA_1 با L_1 و A_1A' با L_2 باشند.

آنگاه $\Delta A_1OQ \cong \Delta A'OQ\,, \Delta AOP = \Delta A_1OP$

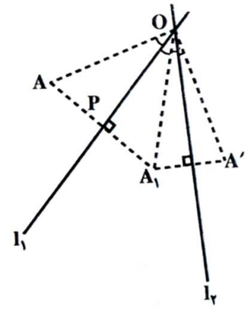
پس داریم: $OA = OA_1 \quad , OA_1 = OA'$

$$A\hat{O}P = P\hat{O}A_1 \quad , \quad A_1\,\hat{O}Q = Q\,\hat{O}A_1$$

طوریکه درشکل ظاهراست.

$$A\hat{O}A' = A\hat{O}P + P\hat{O}A_1 + A_1\hat{O}Q + Q\hat{O}A'$$
$$= 2P\hat{O}A_1 + 2A_1\hat{O}Q = 2P\hat{O}Q$$

بنابرین OA=OA′ و $A\hat{O}A' = 2P\hat{O}Q$ همان بود که می خواستیم.

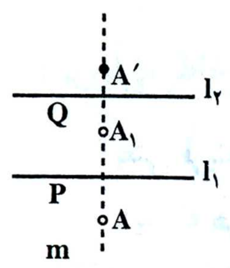


شکل ۲۵۷ : نمایش مجموعه دو تناظرنسبت به دو خط متقاطع

قضیه٦: مجموع دو تناظر نسبت به دو خط موازی ، انتقال است در امتدادعمود بر دو خط وطور مساوی دوبرابر فاصله بین دو خط .

فرض می کنیم A نقطه دلخواه در مستوی باشد ، A_1 تناظر A نسبت به

خط L_1 است سپس $AA_1 \perp L_1$ و $A_1A' \perp L_2$ در نتیجه نقطه های A، A_1 و A' بر خط m عمود بر L_1 و L_2 قرار دارند. اگر P وQ نقطه های تلاقی خط m با L_1 و L_2 باشند، آنگاه AP=PA_1 و $A_1Q = QA'$ طوریکه در شکل داریم .



شکل ۲۵۸ : انتقال موازی خط

$$AA' = AP + PA_1 + A_1Q + QA' = 2PA_1 + 2A_1Q = 2PQ$$

بنا برین $A_1A' \perp L_1$ و $AA' = 2PQ$ که همان حکم مطلوب است یعنی:

$$S_{L_2}OS_{L_1} = T_{\overrightarrow{2PQ}} \quad , \qquad S_{L_1}OS_{L_2} = T_{\overrightarrow{2QP}}$$

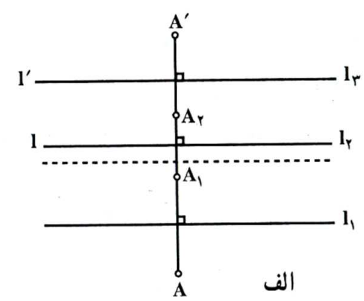
یعنی $S_{L_2}OS_{L_1}$ و $S_{L_1}OS_{L_2}$ بر عکس یکدیگرند بنا برین ترکیب دو انتقال خاصیت تغیر مکان ندارد که دراین جا PQ=0 است.

قضیه۷: مجموعه سه تناظر نسبت به سه خط موازی یا سه خط که دریک نقطه متقاطع اند تناظری است نسبت به یک خط .اول فرض می کنیم که سه خط L_1 ، L_2 و L_3 موازی باشند (شکل الف)بنا بر قضیه مجموع دو تناظر نسبت خط های L_1 و L_2 انتقال است در جهت عمود بر L_1 و L_2 به فاصله های مساوی دو برابر فاصله بین آنها ویا مجموع دو تناظر نسبت به دو خط دیگر L و L' موازی L_1 و L_2 که همان فاصله را دارا باشند مساوی است .

حال فرض می کنیم که L'و L_3 منطبق باشند، به عوض مجموع سه تناظر مجموع سه تناظر نسبت به خطهای L و L' و L_3 را می گذاریم دو تناظر آخری یکدیگر را خنثی می کند . وبنا برین تنها یک تناظر نسبت به L باقی می ماند .

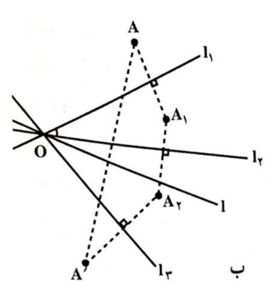
حال فرض می کنیم که خط های L_1 ، L_2 و L_3

یکدیگررا در نقطه (O) قطع کند (شکل ب) بنابر



شکل ۲۵۹ : مجموعه سه تناظر نسبت به سه خط

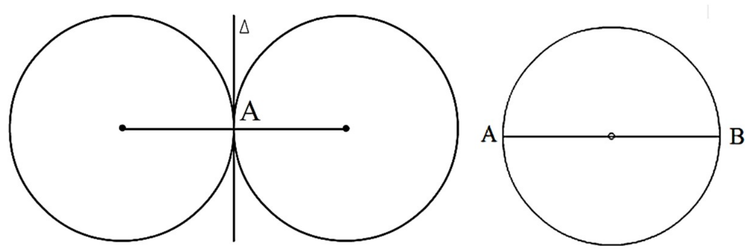
قضیه دو تناظر نسبت به L_1 و L_2 دورانی است حول O به زاویه $L_2 \mathrm{O} L_1$ وبا مجموع دو تناظر نسبت به خط های L و L_3 که از O می گذرد و $L\widehat{\mathrm{O}}L_3 = L_1\,\widehat{\mathrm{O}}L_2$ مساوی است پس مجموع سه تناظرنسبت به L_1 ، L_2 و L_3 مساوی مجموع سه تناظرنسبت به L ، L_3 و L_3 با یک تناظ تنها نسبت به L است، زیرا دو تناظر آخری نسبت به L_3 یک دیگر را خنثی می کند .



شکل ۲۶۰ : مجموعه تناظرنسبت به نقطه (O)

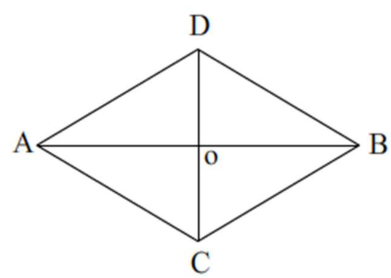
تناظرمحوری در دایره: محورتناظر دودایره در نقطه A قطع کرده ، از A خطی چنان رسم می کنیم که توسط دو دایره به دو بخش برابر تقسیم شود . پس محور تناظر خطی خواهد بود که از A واز وسط خط المرکزین دو دایره می گذرد که عبارت از خط Δ می باشد .

دایره نسبت به هر خطی که از مرکزش بگذرد متناظر است



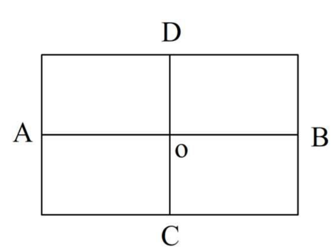
شکل ۲۶۱ : تناظرمحوری در دایره

تناظرمحوری در چندضلعی محورتناظردر لوزی: محورتناظرلوزی عبارت از قطرهای لوزی می باشد چون لوزی دارای دو قطر است، بناً داریم که AB وCD محور تناظر لوزی است .



شکل ۲۶۲ : تناظرمحوری در لوزی

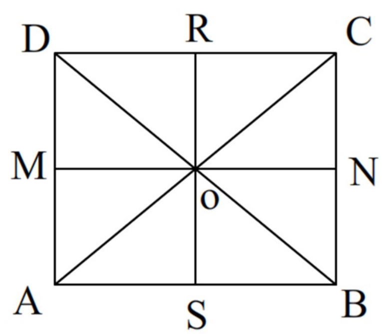
محورتناظر درمستطیل: خطهای که وسط های ضلع های مقابل را به هم وصل می کند، محورهای تناظرمستطیل می باشد AB و CD وسطهای ضلع مقابل است.



شکل ۲۶۳ : محورتناظردرمستطیل

یادداشت: حداکثرتعداد محورهای تناظرکه یک چهار ضلعی می تواند داشته باشدچهارمحورتناظراست.

محورتناظردرمربع: درمربع محورتناظرعبارت از قطرهای مربع می باشد زیراکه قطرهای هر مربع یک دیگر را نصف میکند و از طرف دیگر درهمان نقطه بالای یک دیگر عمود می باشد. قرار شکل ونیز وسطهای خط های مقابل محورهای تناظر مربع است که درین جا AC وBC قطرهای که درنقطه O با هم عمود اندوخط MN که ناصف عمودی وسط های خطوط AD و BC وخط RS که ناصف عمودی وسط های خطوط CD وAB می باشندمحورتناظر مربع است.



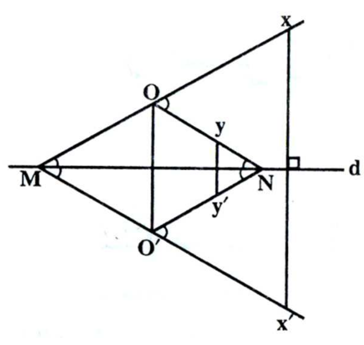
شکل ۲۶۴ : محورتناظردرمربع

تناظرمحوری درزاویه : تناظرمحوری درزاویه هر زاویه با آن زاویه مساوی است .

اگردرشکل $x'\,\hat{O}'y'$ تناظر $x\,\hat{O}y$ نسبت به محور d باشدپس:

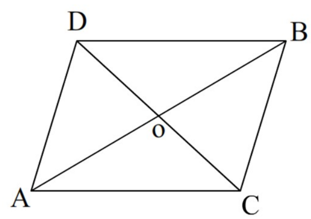
$$\left[0\,\widehat{M}N = 0'\widehat{M}N\,,(0\,\widehat{N}M = 0'\widehat{N}M)\right] \Rightarrow (x'\hat{O}'y' = x\,\hat{O}y)$$

قرارشکل ذیل



شکل ۲۶۵ : تناظرمحوری درزاویه

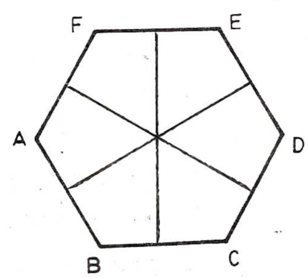
تناظرمحوری درمتوازی الاضلاع: درمتوازی الاضلاع تناظر محوری عبارت از قطرهای متوازی الاضلاع می باشد، قطرهای متوازی الاضلاع *AB* و*CD* که درنقطه *O* قطع نموده تناظرمحوری متوازی الاضلاع می باشد.



شکل ۲۶۶ : تناظرمحوری متوازی الاضلاح

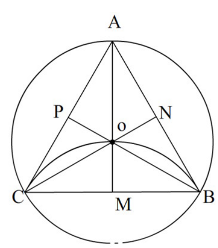
محورتناظردر*n* ضلعی: ناصف عمودی هر*n* ضلعی منظم محور تناظرآن است.

ازاینکه هر*n*ضلعی منظم قابل محاط شدن در یک دایره است وناصف عمودی هر ضلع از*n* ضلعی منظم از مرکز دایره می گذرد. یعنی قطردایره است که درین جا *n=6* به ساده گی ثابت می شود.



شکل ۲۶۷ : تناظرمحوری درn ضلعی

که هریک از ناصف عمودی محورتناظرهستند. اگر تعداد ضلع های *n* ضلعی جفت باشند، محورتناظرها بر وسط های *x* وضلع روبرو که موازی می گذرد است. واگر تعداد ضلع های *n* ضلعی منظم طاق باشدهر محور تناظر از یک راس ووسط ضلع روبرو به آن راس می گذرد قرار شکل که درین جا *n=3* است (۷، صص۰-۱۲).



شکل ۲۶۸ : تناظرمحوری دردایره

تناظرلغزنده ای : فرض میکنیم نقطه A_1 متناظر نقطه A نسبت به خط d باشد، ونقطه A' ازانتقال A_1 در امتداد همان خط وبه فاصله a به دست آمده باشد . (شکل الف) درین حالت می گوئیم نقطه A' از تناظر لغزنده ای نقطه A در امتدادمحور d

وبه فاصله a بدست آمده است. به عبارت دیگر

لغزنده (تناظرلغزنده ای) مجموع یک تناظر نسبت به

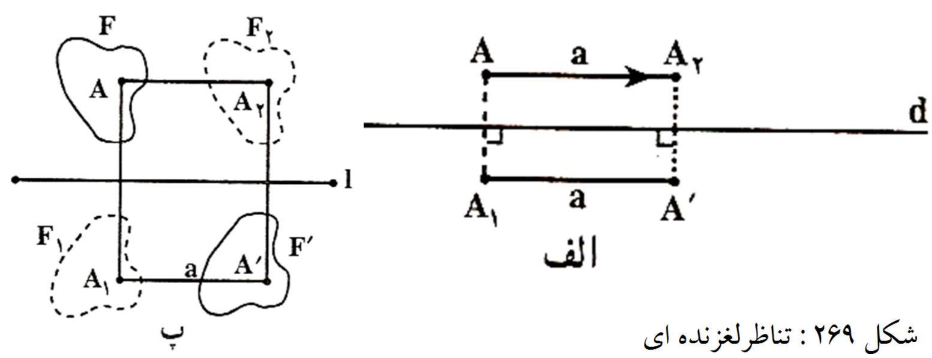
یک خط d ویک انتقال درامتداد همین خط است .

همان طوریکه در شکل الف دیده می شود نتیجه

ترکیب می تواند به ترتیب عکس حاصل شود درآن

جا A_2 از انتقال A به فاصله a در امتداد d بدست

آمده است وسپس A' از متناظر A_2 نسبت به d بدست آمده است



شکل ۲۶۹ : تناظرلغزنده ای

تناظر لغزنده ای ویا لغزه به عوض یک دیگر می تواند استفاده شود . مجموعه همه نقطه های که از لغزنده نقطه های شکل F بدست می آیند شکل F' را می سازند . که از لغزنده شکل F بدست می آید (شکل ب) برعکس واضح است که شکلF از لغزنده F' با همان محورd وبا جهت مخالف در انتقال بدست می آید با توجه به این مطلب می توان از شکل های وابسته به هم توسط لغزنده جهت نمود.

استفاده از تناظرمحوری بدون ضرورت به محاسبه پیچیده: اگرخط AB تصویرخط $A'B'$ نسبت به آینه HK باشد (شکل الف)

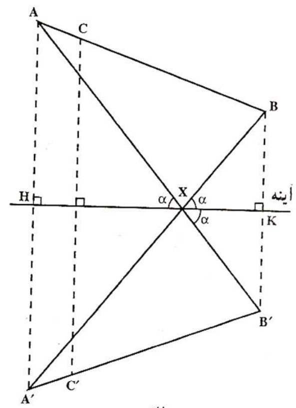
تصویر هر نقطه C از AB بر $A'B'$ واقع است که با C' نمایش

داده شده است . وهر نقطه C' تصویرمانند C از AB است.

چهارضلعی $ABB'A'$ ذوذنقه متساوالساقین است ودو قطرآن

AB' و $A'B$ که تصویر های یک دیگراند در نقطه X روی محور

ناظرتلاقی میکند. زاویه های AXH و $B'XK$ با هم برابر اند



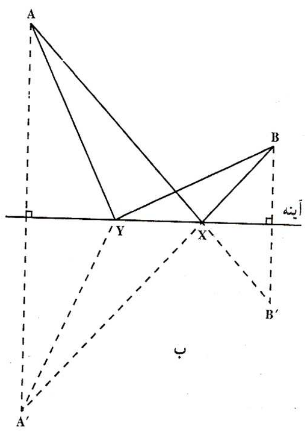
الف

مثلث BXB' متساوی الساقین است بنا بر این $A\hat{X}H = K\hat{X}B$

خط شکسته AXB مسیر نوری را نشان می دهد که پس از خروج از

A وبازتاب در سطح آینه از B می گذرد مطابق (شکل ب)

نقطه دیگر Y را بر سطح آینه درنظرمی گیریم ملاحظه می کنیم که



ب

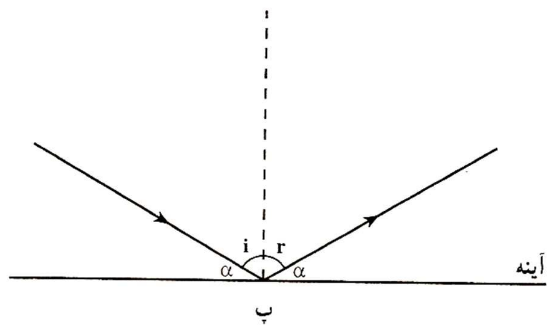
شکل ۲۷۰ : بازتاب اشعه
نوردرآینه(تناظر محوری)

$$AX+BX= A'X+XB=A'B$$

$$AY+YB=A'Y+YB>A'B$$

یعنی طول مسیر AXB کوتاه تراز طول AYB است چون نقطه Y به اختیاربرگزیده شده است .پس طول AXB کوتاه ترین مسیراست که از A شروع می شود وپس از تلاقی به سطح آینه به B می رسد، آنچه گفته شد یکی از مسأله های مشهورمربوط به ماکزیمم ومنیمم است.که با استفاده از تناظرمحوری بدون ضروت به محاسبه پیچیده به ساده گی حل می شود .این مسأله مشهورهندسی از نظرفزیکی چنین بیان می شود .

مسیرنوری که پس ازخروج از A وبازتاب (انعکاس) درسطح آینه به B می رسد چنان است که برای پیمودن آن کمترین زمان صرف می شود.



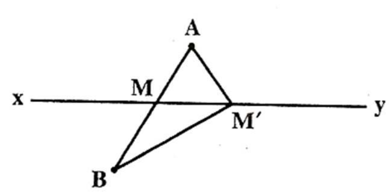
شکل ۲۷۱ : انعکاس درسطع آینه

به عبارت دیگرمسیر که نور دریک محیط هم مانند می پیماید با زمان که صرف پیمودن آن می شود متناسب است. هم چنین نتیجه میگیریم که شعاع نوری که از A خارج وپس از بازتاب در سطح آینه به B می رسد به هنگام رسیدن به سطح آینه زاویه با آن میسازد که برابر است با زاویه که پس از خروج با سطح آینه می سازد. هر گاه درنقطه تلاقی نور با سطح آینه عمود بر این سطح اخراج کنیم، مطابق به (شکل پ) ازبرابر ،دو زاویه $\propto$ نتیجه می شود که زاویهi و r نیز با هم برابر اند، زاویه i را زاویه تابش وزاویه r را زاویه انعکاس می نامند، پس شعاع نور پس از تلاقی با سطح آینه تخت چنان منعکس میشود که زاویه های تابش وانعکاس با هم برابر اند.

قضیه هرون: درمورد دو نقطه واقع در یک طرف یک خط کوتاهترین فاصله از نقطه اول به خط وسپس به نقطه دوم از طریق نقطه تلاقی خط وقطعه خط از نقطه اول به تناظر نقطه دوم نسبت به آن خط است.

نکته۱: قضیه هرون وتبدیل تناظردرعین حال کاربرد های دیگری هندسه درمسأله های اکسترمم را بیان میکند . درین مورد به مسأله های دیگر توجه کنید که بدون استفاده از حساب دیفرانسیل حل شده اند بدست می دهیم.

نکته۲: اگر دو نقطه A و B در دو طرف خط XY باشد

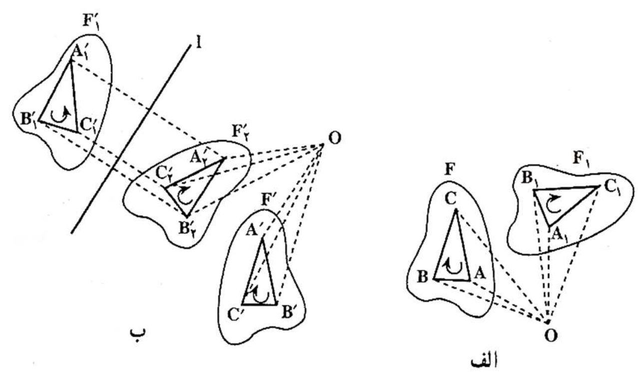


شکل ۲۷۲ : تبدیل نسبت به خط

M نقطه تلاقی قطعه خط AB با XY نقطه است که مجموع فاصله اش از دو نقطه A وB کمترین مقدارممکن است، زیرا اگرM' نقطه دیگر از XYباشد داریم: $M'A+M'B>AM+MB=AB$

قضیه: درمثلثی با سطح وضلع معلوم مجموع اندازه های دو ضلع دیگراگر وتنها اگرمثلث متساوی الساقین باشد می نامیم است(۲۶، صص۱۰۸-۱۱۰).

شکل های مستقیماً قابل انطباق با هم ومعکوساً قابل انطباق با هم: قابلیت انطباق یک جوره شکل درسطح با هم می تواند به دو قسم صورت گیرد.درداخل سطح ،خارج سطح ممکن است که دو شکل قابل انطباق با هم را با حرکت یکی، اما بدون خارج ساختن آن از سطح که اول درآن واقع شده است، بر دیگری منطبق نمود.مثلاً شکل های F و F_1 در شکل الف از این قسم انطباق هستند می تواند با یک دوران حول نقطه (O)بر هم منطبق شوند. اما هم چنین ممکن است که دو شکل واقع در سطح با هم قابل انطباق باشند، ولی برای منطبق کردن آنها لازم باشدکه یکی ازآنهاراازسطح بیرون آوردوپشت وروکردو(بطرف دیگرش)خوابانید، شکل های F' و F'_1 درشکل (ب)از این قسم انطباق غیرممکن است.



شکل ۲۷۳ : مستقیماً قابل انطباق و معکوساً

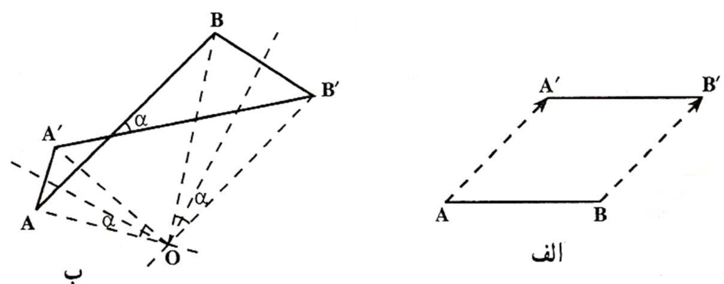
که بتواند شکل $F_1{}'$ را باحرکت دادن درسطح برشکل F' منطبق کرد برای اثبات این امر سه نقطه $C_1{}', B_1{}', A_1{}'$ ازشکل $F_1{}'$ ونقطه های متناظر آنها ازشکل F' یعنی، $C_1{}', B_1{}', A_1{}'$ را درنظر میگیریم مثلث های $A'B'C'$ که جهت های مخالف دارند درمثلث $A'_1B_1{}'C_1{}'$ جهت حرکت برمحیط ازراس B' به رأس C' وسپس به رأس درجهت عقربه های ساعت صورت میگیرد درحالی که درمثلث $A'_1B_1{}'C_1{}'$ درجهت مخالف حرکت عقربه های ساعت است وچون آشکارا دیده میشود که هرحرکت شکل $F_1{}'$ که بطورکامل دارد داخل مستوی باشد نمی تواند جهت مثلث $A'_1B_1{}'C_1{}'$ را تغیر دهد لذا نمیتوانیم مثلث $A'_1B_1{}'C_1{}'$ را برمثلث $A'B'C'$ منطبق کنیم اما اگر شکل $F_1{}'$ را برگردانیم وبه طرف دیگرش بخوابانیم که برای این کار کافی است $F_1{}'$ را با یک تناظر نسبت به خط L به $F_2{}'$ تبدیل کنیم آنگاه به آسانی میتوانیم با حرکت دادن $F_2{}'$ آن بر F' منطبق کنیم که درآنصورت یک دوران حول نقطه O مطابق شکل (ب) میباشد دراینجا ازشکل های که میتوانند پس ازحرکت درداخل مستوی برهم منطبق شوند مستقما قابل انطباق باهم گفته میشود شکلهای قابل انطباق باهم که نمیتوانند با حرکت درداخل مستوی برهم منطبق شوند معکوساً قابل انطباق باهم نامیده می شوند ازآنچه که قبل گفته شد نتیجه میشود

که به آسانی میتوان تعین کرد که شکل قابل انطباق F مستقیما یا معکوسا با هم قابل انطباق اند کافی است که سه نقطه A ،B وC ازشکل F ونقطه های متناظر آنها $A'B'C'$ ازشکل F' را انتخاب ومشخص کنیم که جهت های مثلثهای ABC و $A'B'C'$ یعنی ازA به B و به C وبترتیب از A' به B' و به C' یکی هستند یا مخالف با دوشکل را تنها وقتی قابل انطباق باهم گویم که بطورمستقیم یا معکوس قابل انطباق بودن آنها بایکدیگربرای مامطرح نباشد.

بنابراین دوشکل هندسی مستقماً قابل انطباق با هم گفته میشود، هرگاه یک ازآنها بتواند با حرکت فقط درداخل مستوی بردیگری منطبق شود، این کلمه تقریباً مشابه تعریف کلمه کیستلیوف برای قابلیت انطباق با هم است. اما این تعریف کاملابرای هندسه مسطح است .

قضیه: هردوشکل مستقماً قابل انطباق با هم درسطح می توانند با یک دوران یا یک انتقال برهم منطبق شوند.

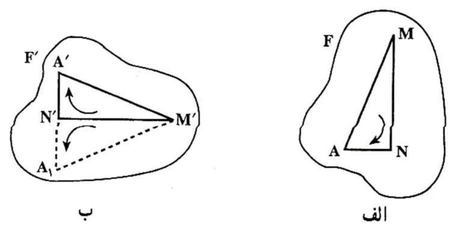
اول باید دقت کنیم که هردوقطعه خط ABو $A'B'$ قابل انطباق با هم درسطح میتواند بایک دوران بایک انتقال برهم منطبق شوند درحقیقت اگرقطعه خط های ABو $A'B'$ متساوی موازی ودریک جهت باشد (شکل الف) AB میتواند با یک انتقال بر$A'B'$ منطبق شود فاصله وجهت این انتقال با قطعه خط AA' مشخص شده است اگرقطعه خط های ABو $A'B'$ زاویه α با هم بسازند (شکل ب) وقتی که قطعه خط های ABو $A'B'$ نیز زاویهAB و $\alpha = 180^{\circ}$ بسازند یعنی وقتی که متساوی وموازی ومخالف الجهت باشند بازهم این حالت صادق است آنگاه AB میتواند بایک دوران به زاویه α بر$A'B'$ منطبق شود مرکزاین دورانO میتواند مثلانقطه تلاقی ناصف های عمودی قطعه خط های AA' و BB' باشد اگراین ناصف های عمودی برهم منطبق شوند O نقطه تلاقی خود قطعه خط هایAB و $A'B'$ است واگراین قطعه خط ها نیزبرهم منطبق شوند یعنی A برB' آنگاه نقطه Oوسط مشترک ABو $A'B'$ است .



شکل ۲۷۴ : انطباق پذیر

همچنین O میتواند نقطه تلاقی ناصف های عمودی AA'با قوس حاوی زاویه α و گذرانده برA وA' باشد.

حال دوشکل F و F' مستقماً قابل انطباق با هم رادرنظر میگیریم فرض کنید M و N دونقطه دلخواه ازشکل F وM' و N' متناظرهای آنها ازشکلF' باشند چون شکلها با هم قابل انطباق اند پس$M'N'$ =MN ودرنتیجه دوران یا (انتقال) وجود دارد که قطعه خط MN را به قطعه خط $M'N'$.بدل میکند اکنون میگوئیم که تمام شکلF عملاً روی شکل F' برده شده یعنی هرنقطه Aازشکلf به نقطه متناظرش A' ازشکلF' متصل میشود .



شکل ۲۷۵ : دوران مثلث

اگرA_1 وضع جدید نقطه Aبراثردورانی (یاانتقالی) باشد که MN رابه $M'N'$ بدل کند باید ثابت کنیم که A_1 بر A'منطبق است چون شکلهای F وF'با هم قابل انطباق اند پس$AN = A'N'$ و $AM = A'M'$از طرف دیگر واضح است که $AM = A_1M'$ و$AN = A_1N'$ ازاین جا نتیجه میشود که مثلثهای$A'M'N'$ و $A_1M'A'$ با هم قابل انطباق اند وچون این مثلث ها درضلع $M'N'$ مشترک اند یا باید برهم منطبق ویا متناظریکدیگر نسبت به خط$M'N'$ باشند ،پس کافی است ثابت کنیم که حالت دوم غیرممکن است مثلثهایAMN و $A'M'N'$ جهت های واحد دارند زیرا شکل های F وF' مستقماً با هم قابل انطباق اند مثلثهایAMN و ' و $A_1M'N'$ نیزیک جهت دارند زیرا بایک دوران یا یک انتقال با هم وابسته اند بنابراین مثلثهای $A'M'N'$ و ' و $A_1M'N'$ یک جهت دارند ودرنتیجه نمیتوانند به طورمعکوس باهم منطبق باشند این بدین معنی است که آنها بر هم منطبق میشوند ونقطهA عملا به کمک دوران (انتقال) به نقطه A برده شود واثبات قضیه ۱ کامل است اگرشکل های F وF' بتواند با یک دوران به مرکز(O)برهم قرارگیرند .

آنگاه نقطه (O) را مرکز دوران این دوشکل میگویند برای یافتن این مرکزدوران (O) دردوشکل به طورمستقیم قابل انطباق با هم کافی است که دونقطه A و B ازشکل اول ونقطه های متناظرآنها A' و B'ازشکل دوم را اختیارکنیم نقطه تقاطع ناصف های عمودی AA' و BB'نقطه (O)است.

٦.٦. تجانس (تشابه مرکزدار)

تنها اختلافی که سه شکل مشابه باهم دارند انست که الزاماً اندازه آنها باهم یکسان نیستند وقتیکه یک تصویرعکاسی را بزرگ میکنید تنها تغیرکه نسبت به تصویر اولیه پیدا میکند آنست که با یک مقیاس تمام ابعاد ان بزرگ ویا کوچک میشود در واقع تصویر جدید هم جنس اولی اما به یک مقیاس بزرگتر یا کوچکتر شده است که در زندگی روزمره از آن استفاده وسیع میشود.

تعریف وقضیه: هرگاه نقطه ثابت مانند S ویک عدد ثابت جبری مانند K داشته باشیم مجانس هرنقطه مانند A نسبت به مرکزتجانس S بانسبت تجانسK نقطه است مانند A' که با A و S بریک امتداد باشد ونسبت اندازه های جبری S ازAو A' برابرK باشد یعنی داشته باشم .

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = K \text{ ویا } \overline{SA'} = \overline{AS}$$

به بیان دیگر میتوان گفت نقطهA'مجانس نقطهA نسبت به مرکزتجانس S نسبت تجانسK است درصورتی که داشته باشیم$\overrightarrow{SA'} = K\overrightarrow{SA'}$ S رامرکزتجانس وK را نسبت متجانس می نامند.

تجانس به مرکزS ونسبت تجانس K را به صورت (S,K) یا H_S^K نمایش میدهیم ومی نویسیم $A' = H_S^K$

اگرK مثبت باشد نقطه داده شده ومجانس آن دریک طرف مرکزتجانس می باشند .

شکل ۲۷۶ : تجانس درنقطه

ودرصورتی که آن منفی باشد نقطه داده شده ومجانس آن دردوطرف مرکزتجانس واقع می شوند

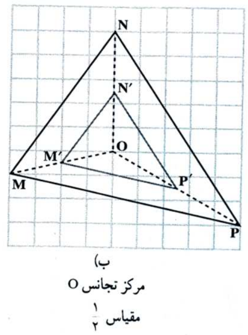
شکل ۲۷۷ : تجانس در نقطه

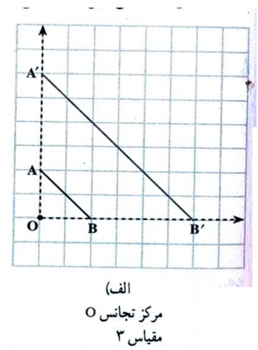
ویا بطورخلاصه تجانس چنین تعریف مینکیم .

تجانس به مرکز O ونسبت K تبدیلی است که هرنقطه A درسطح را به نقطه مانند A' ازآن سطح نظیرکند که :

الف) مرکزتجانس یعنی نقطه(S) ثابت باشد

ب) A' روی نیم خط SA قرارگیرد و $SA' = K.SA$





شکل ۲۷۸ : تجانس

یاداشت :

۱)وقتی که K>0 است تجانس رامستقیم یا مثبت وهنگامی که K<0 است متجانس را معکوس یا منفی می نامند.

۲)اگرK=1 باشد متجانس یک تبدیل عینیت است. $\overline{SA'} = SA \Rightarrow (A') = (A)$

۳)اگرK=-1 باشد متجانس هرنقطه نسبت به آن نقطه متناظرمرکزی آن نقطه نسبت به مرکزمتجانس خواهد بود زیرا $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -1 \Rightarrow \overline{SA'} = -SA$

بنابراین تجانس یا نسبت تجانس(۱-) تناظرمرکزی است.

۴)اگرK=0 اختیارشود مجانس هر شکل مرکز تجانس خواهد بود ودراین صورت تجانس تبدیلی اساس می باشد .

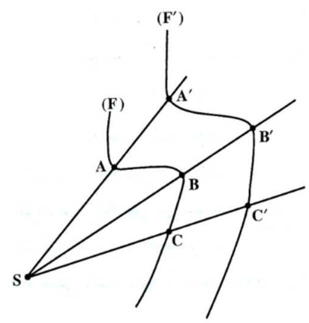
۵) اگرK>1 باشد تجانس را انبساط واگر0<K<1 باشد تجانس را انقباض می نامند.

۶) اگرنقطه A' مجانس نقطهA نسبت به مرکزتجانس S وبا نسبت تجانسK باشد نقطه A'مجانس نقطهA نسبت به همان مرکزتجانسS وبا نسبت تجانس $\frac{1}{K}$

$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = K \Rightarrow \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{1}{K}$ ویا $A' = H_S^K(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \mathrm{A} = H_S^{\frac{1}{K}} = (A')$

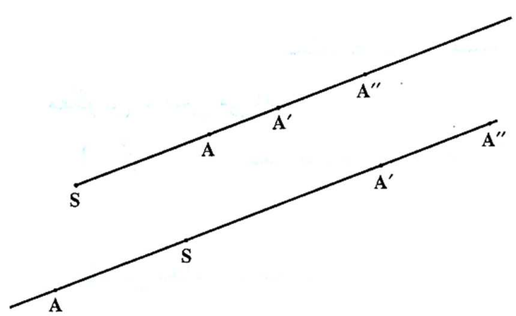
۷) تجانس درفضا قابل تعریف است .

مجانس یک شکل : مجانس یک شکل مانند F نسبت به مرکزتجانس S وبا نسبت تجانس K شکلی است مانند F' به قسمی که هرنقطه آن مجانس یک نقطه ازشکل F نسبت به مرکزتجانس S وبا نسبت تجانس Kباشد به عبارت دیگرمجانس هرشکل مکان مجانس های نقطه های آن شکل است این تعریف را بصورت زیرمی توان نوشت[۲۱] $F' = H_S^K(\mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F} = \left\{ \frac{A'}{A'} = H_S^K(\mathrm{A}), A\epsilon F \right\}$



شکل ۲۷۹ : تجانس در خطوط

تجانس های هم مرکز: تجانس های به مرکز S ونسبت های K ، K' ، K'' .... را مجموعه تجانس های هم مرکزمیگویم . هرتجانس ازیک مجموعه تجانس های هم مرکزبایک عدد الجبری مشخص میشود .



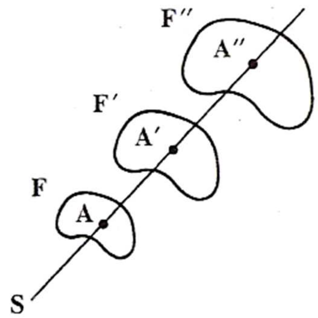
شکل ۲۸۰ : تجانس های هم مرکز

قضیه۱: مجانس های یک شکل در دو تجانس هم مرکز، خود در تجانس با همان مرکز، مجانس یک دیگراند. اگرنقطه های A' و A'' مجانس های نقطه A از شکل F در دو تجانس به مرکز S وبا نسبت های تجانس K' و K'' باشد. بنابر تعریف تجانس داریم:

$$\overrightarrow{SA'} = \text{K}.\,\text{SA}$$

$$\overrightarrow{SA''} \quad = \text{K}''.\,\text{SA}$$

$$\frac{\overrightarrow{SA''}}{\overrightarrow{SA'}} = \frac{\text{K}''}{\text{K}'} = \text{K}_1 \Rightarrow \overrightarrow{SA''} = \text{K}_1.\overrightarrow{SA'}$$

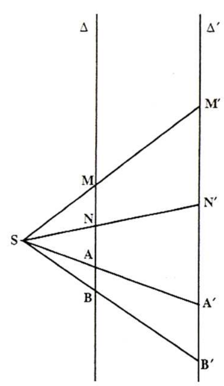


شکل ۲۸۱ : تجانس های هم مرکز

یعنی نقطه A'' ازشکل F'' مجانس نقطه A' ازشکل F' نسبت به مرکز تجانس S وبا نسبت تجانس $\frac{\text{K}''}{\text{K}'} = \text{K}_1$ بنا براین شکل F'' مجانس شکل F' درتجانس مرکز S ومرکز K_1 می باشد. درحالتی که K'=K'' یا K'=-K'' باشد.

تبصره: دربرخی کتابها نسبت تجانس را مثبت اختیار می کنند بدیهی است درین صورت تجانس مستقیم(مثبت) مورد نظر است .

قضیه۲: مجانس خط مستقیم: مجانس خط مستقیم، خط مستقیم است موازی با آن نقطه S مرکزو K نسبت تجانس وخط Δ مفروض اند



شکل ۲۸۲ : تجانس خط مستقیم

A′ و B′ مجانس های دو نقطه AوB را یافته به هم وصل می کنیم تا خط مستقیم Δ' بدست آید .

ثابت می کنیم که Δ' مجانس Δ است. یعنی مجانس هر نقطه مانند M از خط Δ روی Δ' واقع است از تساوی های $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = K$ و $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = K$

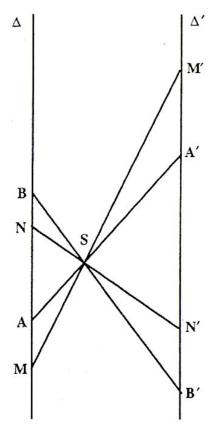
ازتساوی زیر نتیجه می گیریم: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA'}{SA}$

از این تساوی معلوم می شود که خط AB' یعنی Δ' موازی با خط AB یعنی Δ می باشد.

حال اگر M نقطه دیگری از خط Δ و M' مجانس آن باشد به همین ترتیب ثابت می کنیم.

که باید A′M′ موازی با AM یعنی موازی با Δ باشد وچون A′ بیش از یک خط به موازات Δ نمی تواند رسم کرد . A′M′ منطبق بر Δ' یعنی M′ ، مجانس M روی Δ' است.

می توان به سهولت ثابت کرد برعکس هر نقطه مانند N′ از خط Δ' مجانس یک نقطه N از Δ است.



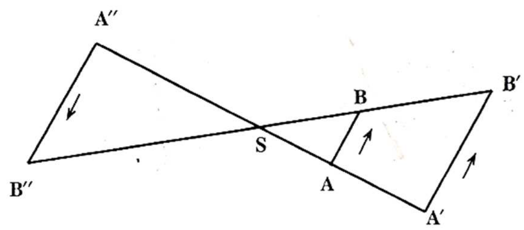
شکل ۲۸۳ : تجانس معکوس خط مستقیم

اگرنقطه S مرکز تجانس روی Δ واقع باشدΔ' برΔ منطبق است برعکس هردو خط مستقیم متوازی Δ و Δ' را همیشه می توان متجانس دانست درین صورت مرکزتجانس، تجانس نقطه دلخواه است مانند S که روی هیچ یک از آنهاواقع نباشد پس نسبت تجانس چیست؟

نتیجه۱: مجانس هرقطه خط، قطعه خط دیگری است که نسبت اندازه اش به اندازه آن قطعه خط ، مساوی قدرمطلق نسبت تجانس است (۱۳، صص۳۱۴-۳۱۷).

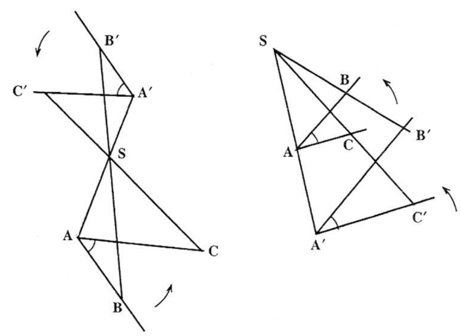
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = |K|$$

نتیجه۲: مجانس مستقیم هر وکتور، وکتوراست موازی وهم جهت با آن ومجانس معکوس هروکتور، وکتوری موازی ودر جهت مخالف آن است



شکل ۲۸۴ : تجانس وکتور

قضیه۳: مجانس هر زاویه: مجانس هرزاویه، زاویه است مساوی وهم جهت با آن چنانچه در تجانس زاویه A′ از زاویه A نتیجه شده باشد، ضلع های متناظراین دو زاویه با هم موازی اند پس دوزاویه برابراند، درتجانس مستقیم ضلع های موازی وهم جهت در تجانس معکوس موازی وغیر هم جهت اند ولی در هر حال جهت زاویه های A و A′ یکی است.



شکل ۲۸۵ : تجانس یک زاویه

قضیه۴: متجانس هر چند ضلعی، چند ضلعی است که ضلع هایش با ضلع های آن برنسبت $|k|$ وزاویه هایش با زاویه های آن مساوی اند .

اگر چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ مجانس چند ضلعی $ABCDE$ باشد میدانیم که

$$\frac{B'C'}{BC} = |k| \quad , \quad \frac{A'B'}{AB} = |k|$$

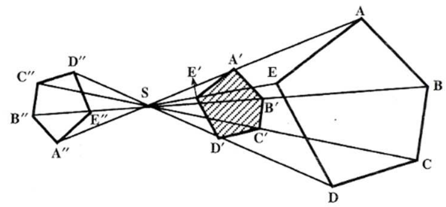
پس

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \cdots = |k|$$

ونیز می دانیم که

$$\hat{B}' = \hat{B} \quad , \hat{A}' = \hat{A}$$

نقطه S را مرکز تشابه یا مرکز تجانس دو چند ضلعی ونسبت K را نسبت تشابه یا نسبت تجانس دو چند ضلعی می نامند



شکل ۲۸۶ : تجانس پنج ضلعی(ارتسام مرکزی نظربه نقطه S)

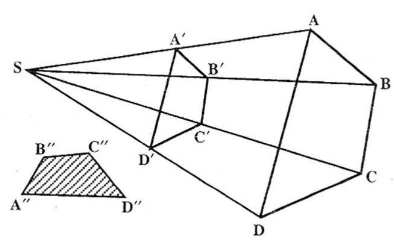
نتیجه: اگر $A'B'C'$ مجانس... ABC با نسبت K باشد ABC نیز مجانس...$A'B'C'$ است، اما با نسبت $\frac{1}{K}$

زیرا که : $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}} = \cdots = \left|\frac{1}{K}\right|$$

یاد آوری: میدانیم که هر گاه در دو شکل ضلع های متناظر متناسب وزاویه ها متناظر متساوی باشند دو شکل را متشابه می نامند پس قضیه را که گفتم می توان به این صور ت بیان کرد:

مجانس هر شکل ، شکلی است مشابه با آن که ضلع های متناظر شان متوازی باشند .

تعریف جدید برای چند ضلعی های متشابه: هرگاه $A'B'C'D'$ مجانس $ABCD$ باشد و$A''B''C''D''$ را مساوی $A'B'C'D'$ بسازیم $A''B''C''D''$ با $ABCD$ مشابه خواهد بودپس شکل مشابه هر چند ضلعی ، چند ضلعی است مساوی به یکی از مجانس ها آن، نسبت بین دو ضلع متناظر را نسبت تشابه می نامند به این ترتیب برای ساختن شکل مشابه با یک چند ضلعی که مجانس آن نباشد کافی است که مجانس چند ضلعی را نسبت به یک مرکز اختیاری رسم کرده ، پس انرا در مستوی جابجا کنیم.



شکل ۲۸۷ : تجانس یک چهارضلعی(ارتسام مرکزی نظربه نقطهS)

قضیه۵: هرگاه در دو شکل متشابه ضلع های متناظر متوازی باشند دو شکل متجانس یک دیگراند یعنی خط های که رأس های متناظر انها رابا هم وصل می کند همه به یک نقطه می گذرد فرض این است که در شکل روابط ذیل برقرارباشد.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots K$$

$A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC \ldots$

برای سهولت بیان ، فرض می کنیم ضلع های متناظر هم جهت باشند ، درین صورت ، اگر امتداد AA' وEE' همدیگر را در s قطع کنند A وA' در یک طرف S خواهند بود، همچنان S خارج قطعه خط EE' است وداریم :

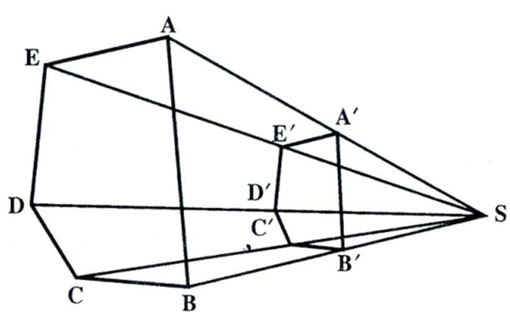
$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SE}{SE'}=\frac{AE}{A'E'}=K$$

حال اگر یکی دیگراز ضلع های واصل بین دو راس متناظرمثلاً DD' امتداد EE' را در S' قطع کند ، S' خارج قطع خط EE' خواهد بود داریم که:

$$\frac{S'E}{S'E'}=\frac{ED}{E'D'}=K$$

ازین جا لازم می آید که $\frac{S'E}{S'E'}=\frac{SE}{SE'}=K$ باشد وچون درخارج قطعه خط EE' بیش از یک نقطه وجود ندارد که آنرا به نسبت K تقسیم کند. لزوماً S' بر S منطبق است بدین ترتیب می بینیم که تماماً خط های AA'، BB'، CC' و ... بر یک نقطه می گذرند، از طرف دیگر$\frac{\overline{SA}}{SA'}$ مثبت وبرابر$\frac{SA}{SA'}$ یعنی برابر K است . پس A مجانس A' است در تجانس که مرکزش S و نسبت اش K باشد. به همین ترتیب، درباره نقطه های دیگر می توان استدلال کرد ونتیجه گرفت که ABCمجانس $A'B'C'$ است.[۴۰]

اگر ضلع های متناظر مختلف الجهت باشد نقطه S بین A وA' خواهد بود وشکل ABC مجانس معکوس شکل $A'B'C'$ است. درتجانس که مرکزش S ونسبتش($-K$) باشد. ویا $\frac{SA}{SA'}=\frac{SC}{SC'}=K$

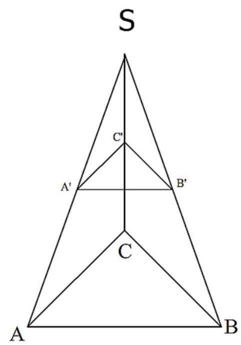


شکل ۲۸۸ : تجانس معکوس

تجانس درمثلث: اگر سه ضلعی مثلث *A’B’C’* مجانس مثلث *ABC*باشد، آنگاه ازین جا

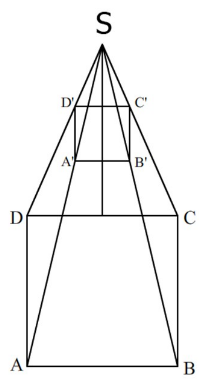
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |k|$$

$\frac{A'C'}{AC} = |k|$ و $\frac{A'B'}{AB} = K$



شکل ۲۸۹ : تجانس مثلث(ارتسام مرکزی نظربه نقطه S)

متجانس در مربع ونیز داریم که $\hat{A}' = \hat{A}$ و $\hat{B}' = \hat{B}$ است بناً چون ضلعهایش به نسبت (K) وزاویه های آن مساوی اند گفته می توانیم که مربع *A’B’D’C’* متجانس مربع *ABCD* است.



شکل ۲۹۰ : تجانس مربع(ارتسام مرکزی مربع نظربه نقطه S)

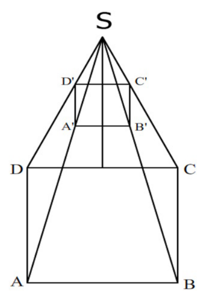
تجانس در مستطیل : اگر مستطیل *A’B’C’D’* متجانس مستطیل *ABCD* باشد پس در آن صورت داریم که :

$\frac{A'C'}{AC} = K$ و $\frac{A'B}{BD} = K$

پس $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'B}{BD} = K$

وزاویه هایش $\hat{A}' = A$ و $\hat{B}' = \hat{B}$

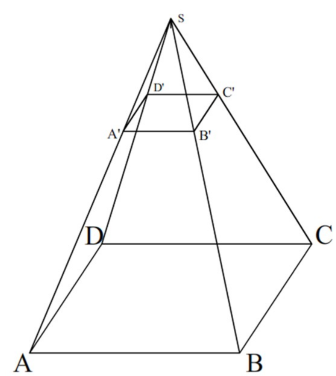
چون مستطیل متذکره شرایط مجانس بودن را تکمیل نموده است بناً گفته می توانیم که مستطیل *A′B′C′D′* مجانس مستطیل *ABCD* است .



شکل ۲۹۱ : تجانس مستطیل(ارتسام مرکزی مستطیل نظربه نقطه S)

مجانس متوازی الاضلاع: اگر متوازی الاضلاع *A′B′C′D′* مجانس متوازی الاضلاع *ABCD* باشد درآن صورت داریم که :

$\frac{B'D'}{BD} = |k|$ و $\frac{A'C'}{AC} = |k|$ پس درآن صورت $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'D'}{BD} = K$ واز طرف دیگر زاویه $\hat{A}' = \hat{B}$ و $\hat{B}' = B$ است . پس شرایط مجانس بودن را داراست.



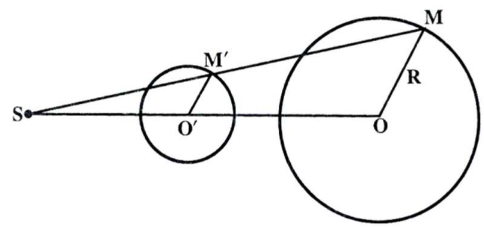
شکل ۲۹۲ : تجانس متوازی الاضلاح(ارتسام مرکزی متوازی الاضلاح نظربه نقطه S)

پس گفته می توانیم که متوازی الاضلاع *A′B′C′D′* مجانس *ABCD* است.

تجانس دایره ، دایره است: فرضاً نقطه *(O′)* (شکل) مجانس *(O)* مرکز دایره ونقطه *M′* مجانس یک نقطه *M* از دایره *O* است، را بدست می آوریم.

هرگاه *(K)* را مثبت فرض کنیم از $\frac{O'M'}{OM} = K$ بدست می آید.

$O'M'=K.R$ یعنی فاصله مجانس ها ی نقطه های دایره (O) از نقطه ثابت (O') مقدار ثابت KR است.

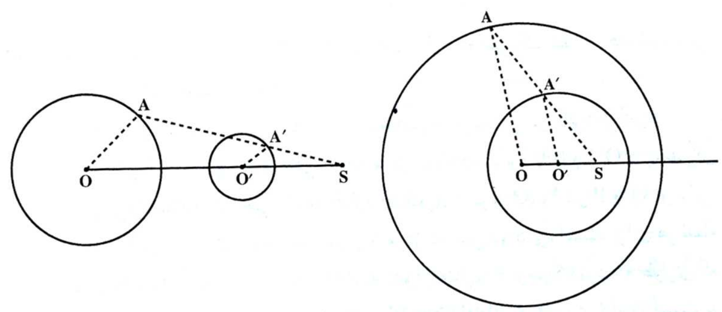


شکل ۲۹۳ : تجانس دایره نسبت به نقطه S

پس امکان M' دایره است به مرکز (O') وشعاع KR اگر K منفی باشد .

در استدلال های بالای به جای آن باید $|k|$ را قرار داد، مطابق شکل فوق

قضیه۶: دو دایره واقع بر یک مستوی همیشه هم مجانس مستقیم وهم مجانس معکوس یک دیگراند.



شکل ۲۹۴ : تجانس معکوس دایره

اولاً در دایره O و O' مفروض اند . اگر دو شعاع دلخواه متوازی وهم جهت OA و $O'A'$ را رسم کنیم و AA' و OO' را امتداد دهیم تا یک دیگر را در S قطع کند داریم:

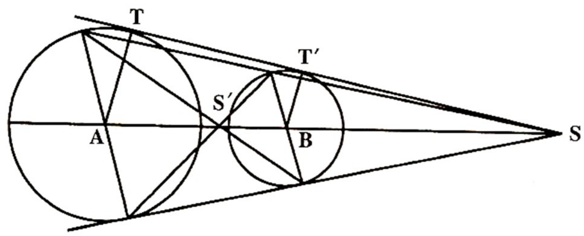
$$\frac{\mathrm{SA}}{SA'} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{S}O'} = \frac{\mathrm{OA}}{O'A'} = \frac{\mathrm{R}}{R'}$$

تعریف مرکز تشابه: اگردو نقطه S و S' مرکز های تجانس دو دایره A و B باشند، نقطه S مرکز تجانس مستقیم دو دایره را مرکز تشابه خارجی یا مستقیم و نقطه S' مرکز تجانس معکوس دو دایر را مرکز تشابه داخلی یا غیر مستقیم در دایره می نامند .

مرکز تشابه خارجی با دو انتهای هر دو شعاع موازی هم جهت در هردو دایره یعنی شعاع های از دو دایره که موازی و هردو دریک طرف خط المرکزین در دایره باشند هم خط است .

مرکزتشابه داخلی با دو انتهای هر دوشعاع موازی مختلف الجهت یعنی شعاع های در دو دایره که موازی ودر دوطرف خط المرکزین باشند ، هم خط است.

مرکز های دو دایره ودو مرکز تشابه این دایره دو جوره نقطه برابراند، زیرا مرکز های تشابه ، خط المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع های این دو دایره تقسیم می کند .



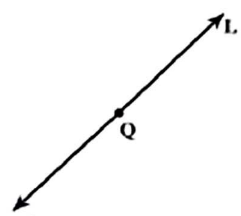
شکل ۲۹۶ : تجانس دایره (ارتسام مرکزی دایره نسبت به نقطه S)

تبصره۱: دو دایره برابر تنها یک مرکز تشابه دارند.، که نقطه وسط خط المرکزین آنهاست.

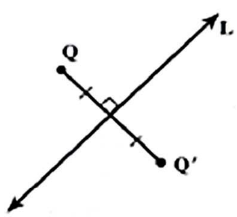
۲- دایره که هردومرکز به دو دایره دو سر یک قطر آن هستند، دایره تشابه دو دایره نامیده میشود.
۳- دایره تشابه دو دایره تقاطع از نقطه های مشترک این دو دایره می گذرد.

7.6. انعکاس

تعریف: به ازای هرخط L درمستوی انعکاس نسبت به خط L تبدیل است که تحت آن تصویرهر نقطه Q که روی خط L نباشد نقطه مانند Q' است به طوریکه خط L عمود منصف QQ' شود. وتصویرهرنقطه مانندQ که روی خطL باشد خودش شود. خط L محورتناظرانعکاس نامیده یعنی:



شکل 297 : نقطهٔ Q روی خط L است،
نقطهٔ Q بازتاب خودش است.



شکل 298 : نقطهٔ Q روی خط L نیست،
نقطهٔ Q′ بازتاب Q نسبت به خط L است.
خط L عمودمنصف QQ′ است.

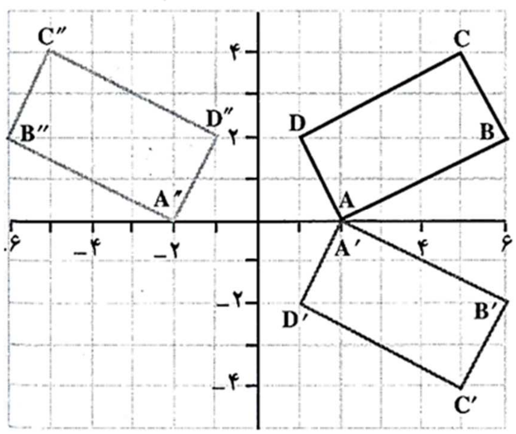
مثال۱: $A(2,0)$، $B(6,2)$، $C(5,4)$ و $D(1,2)$ رأس های یک مستطیل است.

مستطیل $ABCD$ وتصویرهایش را تحت هریک از تبدیل های زیر در یک مستوی مختصات رسم کنید، سپس خصوصیت هریک از آنها را توضیح دهید.

الف: $R_1(X,Y) = (X,-Y)$

ب : $R_2(X, Y) = (-X,Y)$

حل :



نقطه	تصویرها	
(x,y)	$(x,-y)$	$(-x,y)$
$A=(2,0)$	$A'=(2,0)$	$A''=(-2,0)$
$B=(6,2)$	$B'=(6,-2)$	$B''=(-6,2)$
$C=(5,4)$	$C'=(5,-4)$	$C''=(-5,4)$
$D=(1,2)$	$D'=(1,-2)$	$D''=(-1,2)$

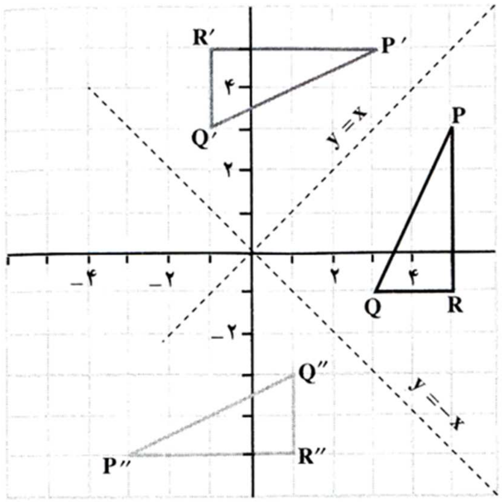
شکل ۲۹۹ : تبدیل

تبدیل الف: انعکاس نسبت به محور X ها ست

تبدیل ب: انعکاس نسبت به محور Y هاست

مثال۲: $P(5,3)$، $Q(3,-1)$ و $R(5,-1)$ رأس های یک مثلث هستند مثلث PQR وتصویرهایش را تحت هریک از تبدیل های زیر در یک مستوی مختصات رسم کرده سپس خصوصیت تبدیل را مشخص کنید.

الف: $R_1(X,Y)=(Y,X)$ ب: $R_2(X,Y)=(-Y,-X)$



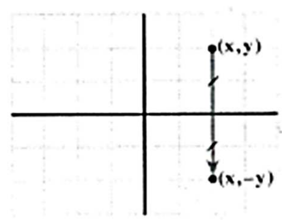
نقطه	تصویرها	
(x,y)	(y,x)	(−y,−x)
P = (5,3)	P′ = (3,5)	P″ = (−3,−5)
Q = (3,−1)	Q′ = (−1,3)	Q″ = (1,−3)
R = (5,−1)	R′ = (−1,5)	R″ = (1,−5)

شکل ۳۰۰: تبدیل نظر به محورها

تبدیل الف: انعکاس نسبت به خط *Y=X*

تبدیل ب: انعکاس نسبت به خط *Y=-X*

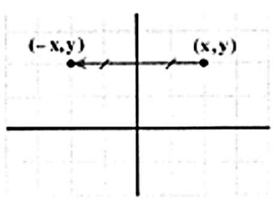
قاعده هر مپینگ انعکاس بستگی به خط دارد که محور تناظرآن است.



شکل 301 : (الف)

بازتاب نسبت به محور xها :

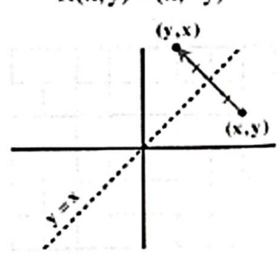
$R(x,y)=(x,-y)$



شکل 302 : (ب)

بازتاب نسبت به محور yها :

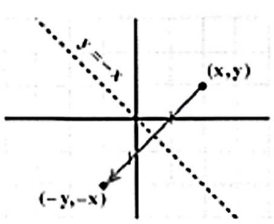
$R(x,y)=(-x,y)$



شکل 303 : (پ)

بازتاب نسبت به خط $y=x$:

$R(x,y)=(y,x)$



شکل 304 : (ت)

بازتاب نسبت به خط $y=-x$:

$R(x,y)=(-y,-x)$

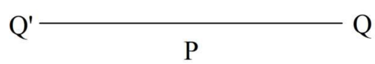
(۲۰، صص۱۱۲-۱۱۶).

قاعده انعکاسی نسبت به یک خط

- انعکاس (میل) خط را الزاماً حفظ نمی کند.
- انعکاس جهت شکل را حفظ نمی کند .
- انعکاس یک ایزومتری است .

مپینگ انعکاس نسبت به یک نقطه از اهمیت خاصی برخورد ار است وقرار ذیل است .

تعریف: به ازای هر نقطه P در مستوی انعکاس نسبت به نقطه P مپینگ است که تحت آن نقطه Q در مستوی روی نقطه ای مانند Q' طوری نگاشته می شود که Q ، P و Q' روی یک خط مستقیم باشدو $PQ=PQ'$ نقطه P مرکز تناظر این انعکاس است.



شکل ۳۰۵ : قاعد انعکاس نسبت به یک خط

بخش تحلیلی : جهت بهترروشن شدن موضوع بعضی ازمسایل تحلیلی درین بخش افزوده شده است.

تبدیل یافته خط ومعادله آن: درشکل ذیل گراف خط $2X-3Y+6=0$ با L نشان داده شده است .
هریک از نقطه های این خط تحت انتقال $T(X,Y)=(X+4,Y-2)$ تصویر شده یعنی 4 واحد به سمت راست ۲ واحد به سمت پائین منتقیل شده است، تبدیل یافته خط را با مشخص کردن تصویر هر دو نقطه آن مانند$A(-3,2)$،$B(O,2)$ می توانیم رسم کنیم تحت این انتقال

$$B(0,2) \rightarrow B'(4,0) \quad , \quad A(-3,0) \rightarrow A'(1,2)$$

خط تبدیل یافته از نقطه های $A'(1,2)$ و $B'(4,0)$می گذرد.

برای تعیین معادله خط تبدیل یافته باید معادله خط را که از A' و B' می گذرد پیدا کنیم.

اگر$P(X,Y)$ یک نقطه دلخواه روی خط تصویر باشد.

آنگاه: میل $A'P = \frac{Y+2}{X-1}$ ومیل $A'B' = \frac{0+2}{4-1} = \frac{2}{3}$ با توجه به هم خط بودن A'، B' و P میل $A'P$ و $A'B'$ با هم برابر هستند پس $\frac{2}{3} = \frac{Y+2}{X-1}$ از این جا ، $2X-3Y-8=0$ بنا براین معادله خط تصویر $2X-3Y-8=0$ است .

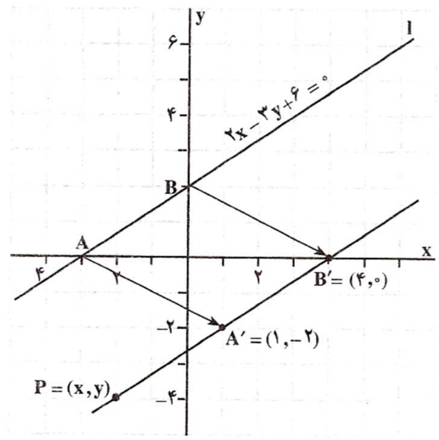
مثال فوق روش کلی بدست آوردن معادله تصویر یک خط تحت یک تبدیل معین را نشان می دهد.

روش کلی بدست آوردن معادله تصویر یک خط تحت یک انتقال، انعکاس، دوران، یا تجانس:

۱: مختصات دو نقطه دلخواه روی خط را پیدا کنید

۲: مختصات تصویر این دو نقطه را تحت تبدیل داده شده بدست آورید

۳: معادله خط عبورکننده از دو نقطه تصویررا بدست آورید.

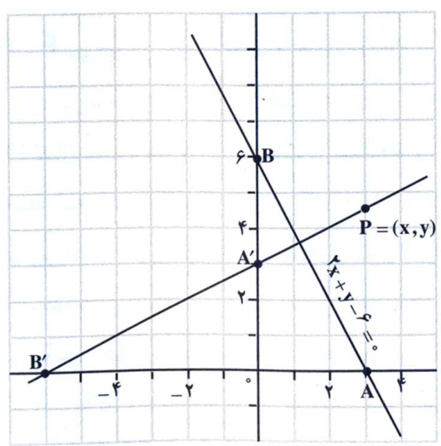


شکل ۳۰۶ : تبدیل یافته خط

مثال: الف: خط $2X+Y-6=0$ را رسم کنید.

ب: تصویر خط الف را تحت دوران $R(X,Y)=(-X,Y)$ رسم کنید.

ج: معادله خط تصویر را بدست آورید.



شکل ۳۰۷ : تبدیل یافته خط

حل: الف: $A(3,0)$ و $B(0,6)$ دو نقطه از خط هستند، با مشخص نمودن این دو نقطه خط AB را رسم می کنیم.

ب: تحت دوران داده شده $\mathrm{A}(3.0) \rightarrow \mathrm{A}'(0,3) \quad , \quad \mathrm{B}(0,6) \rightarrow \mathrm{B}'(-6,0)$

خط تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می کنیم.

ج: فرض کنید $P=(X,Y)$ نقطه دلخواه از خط تصویر باشد.

$$\mathrm{A'P} = \frac{\mathrm{Y}-3}{\mathrm{X}-0} \text{ ومیل } A'B' = \frac{0-2}{-6-0} = \frac{1}{2}$$

با توجه به ثابت بودن خط

$$\frac{Y-3}{X}=\frac{1}{2}\Rightarrow X=2y-6\Rightarrow X-2Y+6=0$$

معادله خط تصویر *X-2Y+6=0* است.

مثال۲: معادله تصویر خط $y=\frac{1}{2}x-4$ تحت تناظر نسبت به محور X ها را بدست آورید.

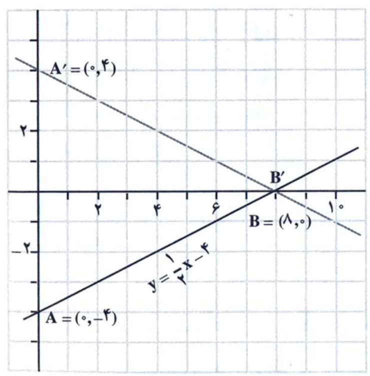
حل: با در نظر گرفتن میل خط $\frac{1}{2}$، وعرض از مبداآن *(-4)* خط را رسم می کنیم.

با توجه به گراف *A=(0,-4)* و *B(8,0)* دو نقطه از خط هستند تحت تناظرنسبت به محور X ها

$A(0,-4)\rightarrow A'(0,4)$ و $B(8,0)\rightarrow B'(8,0)$ خط تصویر یعنی *A'B'* را رسم می کنیم.

با توجه به گراف میل این خط $(-\frac{1}{2})$ و عرض از مبدا آن *(4)* است.

بنا براین معادله خط تصویر $y=-\frac{1}{2}x+4$ می باشد.



شکل ۳۰۸ : تبدیل خط نسبت به محور

اثبات با استفاده از خصوصیت های تبدیل:

با توجه به بخش های قبل برخی از خصوصیت های تبدیل ها را به صورت زیر جمع بندی می کنیم .

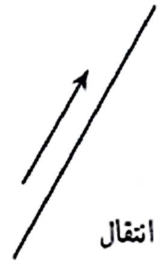
۱. درهریک از این تبدیل ها، تبدیل یافته خط مستقیم، خط مستقیم است.
۲. طول قطعه خط واندازه زاویه تحت انتقال ، دوران وانعکاس ثابت می باشد .
۳. اگردوخط موازی باشد ، هر یک از آنها می تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا انعکاس بر روی دیگر نقش شود.

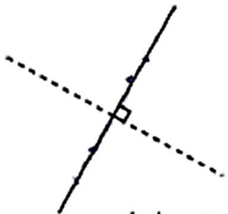
شکل 309 : انتقال

شکل 310 : دوران ۱۸۰°

شکل 311 : بازتاب

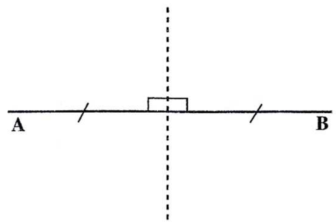
۴. یک خط می تواند تحت یک انتقال ، دوران 180° یا انعکاس برروی خودش نقش شود.





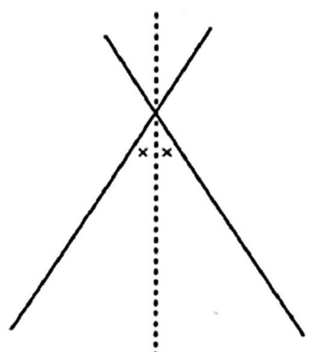
شکل 312 : انتقال　شکل 313 : دوران ۱۸۰°　شکل 314 : بازتاب

۵. ناصف عمودی هرقطعه خط AB، محور تناظر انعکاسی است که $B \to A \quad , \ A \to B$

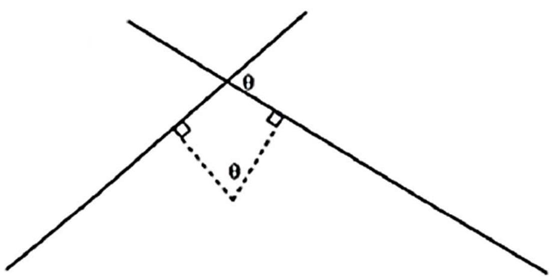


شکل ۳۱۵ : محورتناظرانعکاس

۶. اگردوخط متقاطع باشد ، هر یک از آنها میتواند تحت یک دوران یا انعکاس بر دیگری نقش شود.



شکل 316 : ناصف الزاویه تشکیل شده بین خط وتصویرش محورتناظراست



شکل 317 : زاویهٔ تشکیل شده بین خط و تصویرش، برابر است با زاویهٔ دوران

در شکل فوق زاویه تشکیل شده بین خط تصویرش برابر است با زاویه دوران

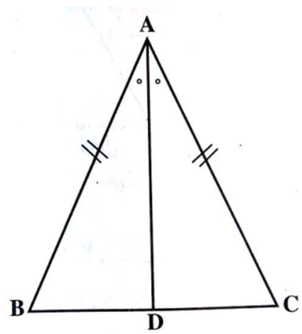
شکل فوق: ناصف الزاویه تشکیل شده یعنی خط وتصویرش محور تناظر است.

می توانیم از خصوصیت فوق به عنوان حقایق پذیرفته شده ، در اثبات قضیه ها وحل مسأله ها استفاده کنیم.

قضیه۱: زاویه های دو بدو به ضلع های مساوی در مثلث متساوی الساقین با یک دیگربرابر اند.

قضیه فوق را با استفاده از انعکاس ثبوت می نمائیم .

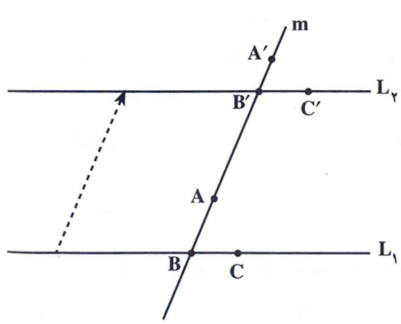
در مثلث ABC، $AB=AC$ وناصف الزاویه A ، ضلع BC را در D قطع می کند، تحت انعکاس نسبت به خط AD خط که شامل قطعه خط AB است، روی خط که شامل قطعه خط AC است تصویر می شود. چون $AB=AC$ است پس $B \to C$: بنا براین $\hat{B} = \hat{C}$ یعنی زاویه های مقابل به ضلع های مساوی در مثلث متساوی الساقین برابرند.



شکل ۳۱۸: تبدیل نسبت به خط

قضیه۲: اگر خط مایل دو خط موازی را قطع کند، زاویه های هم مانند برابر خواهند بود. جهت اثبات قضیه فوق از انتقال استفاده می کنیم.

با توجه به نمایش روی شکل ، تحت انتقال به موازات



خط مایل m که خط L_1را بروی L_2 نقش می شود خواهیم داشت.

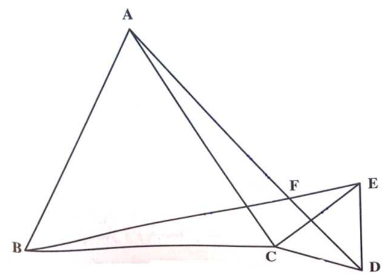
$$A \to A' \quad و \quad B \to B' \quad و \quad C \to C'$$

شکل ۳۱۹: انتقال

بنا براین $A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ ومثلث ECD متساوی الاضلاع هستند ثابت کنید که $AD=BE$ و $A\hat{F}B = 60^{\circ}$

حل: با استفاده از دوران

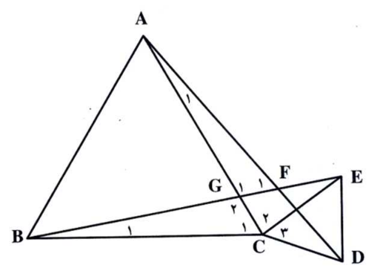
تحت یک دوران 60° حول نقطه C مثلث ACD روی مثلث BCE تصویر می شود، بنا براین
$AC \to BE$ و AD ضلع BE با زاویه 60° قطع می کند. چون طول تحت دوران حفظ میشود.
پس $AD= BE$ وهمچنین $A\hat{F}B = 60^\circ$.



شکل ۳۲۰: انتقال

توجه: این مسأله را با روش های دیگرنیز می توان اثبات کرد. که اغلب طولانی تر وپیچیده تراز این اثبات است به یکی ا ز این را ه های حل توجه کنید.

مثلث ABC متوازی الاضلاع است



شکل ۳۲۱: انتقال

بنا بر این $C_1 = 60^\circ$ و $BC= AC$ مثلث ECD متساوی الاضلاع است. بنا بر این $C_2 = 60^\circ$ و $EC=CD$ حال در دو مثلث BCE و ACD داریم:

$BC=AC$
$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_3 + \hat{C}_2$
$EC=CD$

بنا براین در مثلث BCE و ACD درحالت(ف، ق ،ف) معادله هستند بنا بر این اجزای هم مانند شان نیز مساوی هستند، یعنی $AD=BE$

هم چنین در دومثلث AGF وBGC داریم :

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ و } C_1 = G_1$$

بنا بر این

$\hat{F}_1 = 60^\circ$ یعنی $\hat{F}_1 = \hat{C}_1$

(۳۵، صص.۹۰-۱۰۳).

خلاصه فصل ششم

بحث اصلی این فصل عبارت بود از تبدیل های هندسی. تبدیل (تغییرمکان) عبارت از یک مپینگ یک به یک است از مستوی در مستوی. در تبدیل هیچ دو نقطه دارای یک تصویر نیستند وهرنقطه در مستوی به تصویر یک نقطه از مستوی است. ایزو متریک – یک تبدیل است که طول را حفظ میکند. ایزومتریک یک شکل را به شکل انطباق پذیر آن مربوط می نماید. تبدیل عینیت – تبدیل است که تبدیلی یافته هرنقطه خود آن نقطه است $T(A)=\widehat{A}$. انتقال عبارت از یک تبدیل است که یک امتداد معین را نشان میدهند. فهمیدیم که انتقال میل خط را حفظ میکند. انتقال یک ایزومتری است. انتقال یافته هرخط مستقیم ، خط مستقیم است. و انتقال یافته هرچند ضلعی ، چند ضلعی است معادل با آن.

دوران یک تبدیلی است که به زوایه های مختلف به حول یک نقطه ثابت صورت میگرد. دوران مرکز دوران را ثابت نگهمیدارد. دوران الزاماً میل خط را حفظ نمی کند. دوران یک ایزومتری است. دوران شکل را تغیرنمیدهد یعنی تبدیل است. در دوران تبدیل یافته هرخط مستقیم ، یک خط مستقیم است. دردوران زاویه بین هردو قطعه خط متناظر به امتداد شان متساوی با زاویه دوران است.

تناظر مرکزی دوران به زاویه ۱۸۰° درجه حول مرکز تناظر است بنابر این تناظر مرکزی هم خصوصیت دوران را حفظ میکند. تناظر مرکزی هرخط مستقیم ، خطی مستقیم وموازی آن خط است. تناظر مرکزی هرزاویه ، زاویه معادل وهم جهت با آن زاویه است. تناظرمرکزی هرشکل ، به آن شکل معادل است. درتناظر مرکزی ، تناظر مرکز تناظر برخودش تطبیق است. تناظر خطی یک شکل متناظر نظر به یک خط مستقیم است . دایره دارای تناظر نقطوی است. الپس دو محور تناظر دارد، یکی محور تناظر محراقی و دیگری غیرمحراقی. هایپربول دومحورتناظردارد، یکی محورتناظرمحراقی و دیگری محور تناظرغیرمحراقی. مرکزتناظر یک مثلث ، نقطه تلاقی سه میانه مثلث عبارت ازتناظر مرکزمثلث میباشد. تناظر مرکزی مربع: نقطعه ای تلاقی قطرهای مربع وهرخط که وسط های دوضلع مقابل را باهم وصل میکند. محور های تناظرمربع خطی که وسط های دوضلع مربع را با هم وصل میکند ، محور تناظرمربع است. مرکز تناظرمستطیل محل تلاقی دوقطر مستطیل است. محور تناظر مستطیل خط های که وسط های ضلع های مقابل را به هم وصل میکند. محور تناظر ذوذنقه- دردو ذوزنقه متساوی الساقین خط که وسط های دوقاعده را با هم وصل میکند محور تناظر است. مرکزتناظرذوذنقه متساوی الساقین نقطه تلاقی دوقطر ذوزنقه است.

در دودایره متساوی ، تقاطع وترمشترک وامتداد خط المرکزین محورهای تناظر ومحلا تلاقی آنها مرکزتناظر میباشند. در دو دایره متساوی ومماس خارج مشترک وامتداد خط المرکزی محورهای تناظر

است ونقطه مماس مرکز تناظر است. دو دایره مماس داخل امتداد خط المرکزین محور تناظر است ومرکز تناظر ندارد. دردو دایره متساوی ومخارج اوسط خط المرکزین مرکز تناظر وعمود مرسوم ازین نقطه برخط المرکزین ، وخود خط المرکزین محورهای تناظر دایره است.

دو خط موازی دارای بی نهایت مرکزتناظر است. مجموع دوتناظر مرکزی یک انتقال است. مجموع چهار تناظر مرکزی یک انتقال است. مجموع سه تناظر مرکزی نسبت به سه مرکز جداگانه یک تناظر مرکزی است.

مرکز محوری عبارت از یک تبدیل است نظر به یک محور. تناظر محوری هرقطعه خط با آن قطعه معادل است. تناظر محوری هرزاویه با آن زاویه مساوی است. تبدیل یافته هرشکل در تناظر محوری به آن شکل معادل است. مجموع دوتناظر نسبت به دوخط متقاطع ، دوران است به مرکز نقطه تلاقی این دوخط وبه این زاویه دوبرابر زاویه بین آنها. مجموع دو تناظر نسبت به دوخط موازی انتقال است درامتداد عمود بردوخط وطور مساوی دو برابر فاصله بین دوخط . مجموع سه تناظر نسبت به سر خط موازی با سه خط که دریک نقطه متقاطع اند، تناظری است، نسبت به یک خط . دایره نسبت به هرخطی که ازمرکزش بگذرد تناظر است.

لوزی به محور تناظر دو لوزی عبارت از قطرهای لوزی میباشد چون لوزی دوقطردارند بناً لوزی دومحور تناظر دارد. تعداد محور های تناظر که حداکثر یک چهارضلعی میتواند داشته باشد چهار محور تناظر است. محور تناظر مربع –هرمربع دومحور دومحور تناظر دارد که قطرهای مربع میباشد و وسط های خط های متقابل محور های تناظر مربع است.

متناظر محوری دو زاویه با آن زوایه مساوی است. تناظر محور در متوازی الاضلاع عبارت از قطرهای متوازی الاضلاع میباشد. ناصف عمودی هر n ضلعی منظم محور تناظرآن است.

مجانس های یک شکل در دو تجانس هم مرکز، خود در تجانس باهمان مرکز، مجانس یکدیگراند. مجانس خط مستقیم خط مستقمی است موازی با آن . مجانس هر زاویه ، زاویه ای است مساوی و همجهت باآن. مجانس هر چند ضلعی چند ضلعی است که ضلعهای آن برنسبت K وزاویه هایش با زاویه های آن متساوی اند مجانس دایره ،دایره است . دو دایره واقع دریک سطح همراه هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس یکدیگراند. دو دایره برابرتنها یک مرکز تشابه دارند ، که نقطه وسط خط المرکزین آنها است . اگردو دایره هم مرکز باشند ، مرکز مشترک شان تنها مرکز تشابه آنها است . دایره ای که دو مرکز تشابه دو دایره دو سه یک قطرآن هستند دایره تشابه دو دایره نامیده می شود. دایره تشابه در دایره مقاطع از نقطه های مشترک این دو دایره می گذرد.

خصوصیات تجانس عبارتند از: تجانس میل خط و را حفظ می کند. تحت تجانس مرکزتجانس ثابت می ماند . تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی کند . (امادرحالتی که $K=1$) باشد. تجانس طول را با ضریب K ومساحت را باضریب K^2 تغیر می دهد. خطهای که نقطه های هم مانند را به هم وصل می کند ،در مرکز تجانس مقاطع اند.

و بالاخره خصوصیت انعکاس (باز تاب) نسب به یک خط این است که: انعکاس میل خط را حفظ نمی کند .انعکاس جهت شکل در حفظ نمی کند . انعکاس یک ایزومتری است (حافظ طول).

مسایل فصل ششم

۱. ثابت نمائید که تبدیل یافته هر شکل در تناظر محوری به آن شکل مساوی است

۲. ثابت نمائید که متناظر محوری هر زاویه به آن زاویه مساوی است

۳. ثابت نمائید که مجموع دو تناظر نسبت به یک خط یک تبدیل عینیت است

۴. ثابت کنید متناظر های یک شکل نسبت به دو محورداده شده مشابه و دریک جهت هستند

۵. دو نقطه A,B دو طرف خط d واقع اند از این دو نقطه دو خط رسم کنید که نسبت به d متناظر یک دیگر باشند

۶. محوری xو y و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروض اند، به روی XوY نقطه M را چنان تعین کنید که زاویه AMX مساوی $2BMY$ باشد

۷. ثابت کنید که ارتفاع وارد بر قاعده هرمثلث متساوی الساقین محور تناظر مثلث است

۸. ثابت کنید که متناظر محل تقاط ارتفاهای هر مثلث نسبت به ضلع های آن روی دایره محیطی مثلث قرار دارند

۹. چهـــارضلـــعی $ABCD$ بر دایره به مرکز O محـــاط شده است ثابت، کنیـــد که زاویه $AOB+COD=180$ است

۱۰. ثابت کنید که ناصف عمودی هر ضلع n ضلعی منظم محور تناظر آن است

۱۱. آیا متناظر یک لوزی نسبت به خط مفروض در امتداد معین یک لوزی است (همین موضوع را در مورد یک مسطیل بررسی کند)

۱۲. ثابت کنید که دودایره مساوی و متقاطع نسبت به وتر مشترک شان متناظر یک دیگر اند

۱۳. ثابت نمائید که متجانس خط راست ، خط رأس است موازی با آن

۱۴. ثابت کنید که متجانس دایره ، دایره است

۱۵. ثابت کنید که متجانس هر چند ضلعی ، چند ضلعی است که ضلعی ها آن بر نسبت قیمت مطلقه $|K|$ و زاویه هایش به زاویه های آن مساوی اند

کتابنامه

۱. تابش، یحی. (۱۳۸۰). **آموزش هنر حل مسئله ریاضیات**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **رسم شکلهای هندسی در هندسه مسطح**،جلد ۱۱. تهران: مدرسه.

۳. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.

٤. گویا، زهرا. (۱۳۸۷). **هندسه ۱**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۵. گویا، زهرا. (۱۳۸۸). **هندسه ۲**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

٦. مگارت، جان. باو. (۱۳۸۵). **تاریخ جبر**. ترجمه وحیدی اصل ، محمد قاسم.تهران: علمی و فرهنگی.

۷. موحد، احمد خالد. (۱۳۹۲). **کاربرد ساختمان الجبری گروپ و تسهیل آموزش آن**. رساله علمی ترفیع به رتبه پوهنمل. بلخ: پوهنتون بلخ.

۸. یاگلم، ای. م. (۱۳۶۹). **تبدیل های هندسی ۱**. ترجمه اسدالله، جلد اول. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۹. یاگلم، ای. م. (۱۳۶۹). **تبدیل های هندسی ۲**. ترجمه شفیعیها، محمد هادی، جلد سوم. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۱۰. یاگلم، ای. م. (۱۳۶۹). **تبدیل های هندسی ۳**. ترجمه محمد باقر، جلد دوم. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

11. Agarwal, Prafull. (2008). **Mathematics. Delhi**: Target.
12. Sharefov. J. (2007). **Geometry Textbook for Class VIII**. Dushanbe: Nuk.
13. Sharfov, J. (2007). **Geometry Textbook for Class IX**. Dushanbe: Nuk.

فصل هفتم

روش های حل مسئله های هندسی به وسیله تر سیم های هندسی

استفاده از ترسیم های اساسی هندسی که قبلاً بر رسی شد زمینه خوبی برای حل مسئله های پیچیده تر میباشند. درین قسمت مهم ترین روش های حل مسئله های ترسیم های هندسی را درذیل مورد مطالعه قرارمی دهیم.

۱- روش های استفاده از قضایای معروف، روش سازنده (ایجادشونده)، روش تحلیلی، روش ترسیم های هندسی با استفاده از مکان های هندسی، روش ترسیم های هندسی به کمک تبدیل های هندسی، روش ترسیم های هندسی با استفاده از اشکال کمکی، روش ترسیم اشکال هندسی با استفاده ازروش تشابه، روش ترسیم اشکال هندسی با استفاده از قات کردن کاغذ، روش ترسیم های هندسی تنها با یک وسیله

۱.۷. روش استفاده از قضایای معروف

کاربردمستقیم قضیه های معروف و راه حل آنها تقریباً واضح است، یعنی بسیاری از مسئله های هندسی با استفاده از قضایای معروف هندسه قابل حل می باشند.بطور مثال ترسیم یک مثلث متساوی الاضلاع با معلوم بودن اندازه اضلاع آن، ویا ترسیم یک مربع با معلوم بودن قطرهای آن وغیره...

۲.۷. روش سازنده(ایجاد شونده)

اگرحل مسئله کمی پیچیده تر باشد، اما راه حل مشخص شده باشد می توان به قسم ذیل عمل نمود. ازعملی که می دانید چطور انجام دهید شروع نموده ودرجستجوی نکات باشید،که بتوان با استفاده از آنها عملیه ها را انجام داد تا به هدف اساسی رسید.

این شیوه روش سازنده حل مسئله نام دارد، وروشی است که در کتاب ها برای بیان حل مسئله ها به کار می رود.

۳.۷. روش تحلیلی

اگربا مسئله روبرو شوید، که حل آن واضح نباشد، نمی توانید از روش سازنده استفاده کنید. زیرا هیچ سرنخی وجودندارد که اولین گام ممکن است چه باشد؟

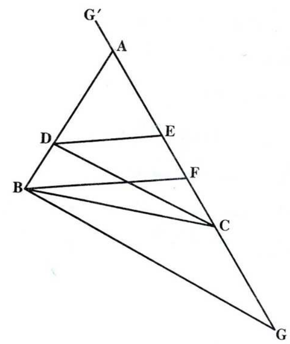
اما می دانیم مسئله چیست یعنی نتیجه ترسیم را می دانیم ،که درنهایت باید چه شکلی را بدست آوریم بنا بر آن شروع ازاین شکل نهای ،که فرض می کنیم قبلاً رسم شده است، مفید است با بر رسی نمودن دقیق وسنجیده این شکل، ممکن است راهی را کشف کنیم، که به حل خواسته شده منجر شود، این شیوه را روش تحلیلی حل مسئله می نامند. این روش به طور خلاصه شامل گام های زیراست.

a) تحلیل: مسئله را حل شده فرض می کنیم، وشکلی که تقریبی شرایط بیان شده را دارا باشد رسم می کنیم ، سپس رابطه بین معلوم ومجهول را در شکل دریافت می کنیم که احتمالاً بتوان برای ترسیم شکل مورد نظربه کاربرد.
b) ترسیم: شکل را با استفاده از منابع موجود ودریافت شده در تحلیل رسم می کنیم.
c) اثبات: نشان می دهیم که شکل رسم شده تمام شرایط را دارا می باشد.
d) مباحثه: درمورد شرایط امکان ترسیم، تعداد جواب ها وغیره بحث می کنیم باید به نکات ذیل توجه خاص داشت:
   ۱- برای هر ترسیم ضرورت به طی مراحل چهارگانه فوق نمی باشد.
   ۲- اگرتصویر تحلیلی شکل برای رسم کافی نباشد باید تغییرات مناسب ولازمی ایجاد شود.
   ۳- شکل را می توان بدون وسایل اما دقیق رسم نمود ولی عموماً استفاده ازخط کش وپرکارمناسب می باشدومسئله باید دقیق مطالعه شود تا نکته فراموش نگردد به مثال های ذیل که باروش تحلیلی حل شده اند، توجه کنید:

مثال۱: بر روی ضلع های AB و AC از مثلث ABC (یا امتداد آنها) دو نقطه D وE راچنان تعیین کنید ،که AD=DE=EC باشد.

تحلیل. فرض می کنیم که مسئله حل شده ودو نقطه D وE جواب مسئله باشد از نقطه B خط هائی به ترتیب موازی با DE و DC رسم می کنیم تاAC را درنقطه های F و G قطع کند. دومثلث ADE و ABF متشابه اند.

بنا برین داریم که : $$\frac{AD}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BF}}$$



شکل ۳۲۲: مثلثهای مشابه

چونکه AD=DE است، نتیجه می شود که BF=AB است.

پس نقطه F را به آسانی می توان تعیین کرد. همچنین دو مثلث DEC و BFG متشابه اند. وچون بنا برفرضDE=EC است داریم BF=FG ونقطه G هم معلوم است.

ترسیم . دایره به مرکزB وشعاع AB رسم می کنیم تا ضلع AC را درنقطه F قطع کند. سپس دایره به مرکزF وشعاع AB رسم می کنیم تا AC را درنقطه G قطع کند، خطی که ازC به موازات BG رسم می شود، خط AB را درنقطه D که اولین نقطه خواسته شده است قطع می کند وخطی که از D به موازات BF رسم می شودAC را در دومین نقطه خواسته شده یعنی E قطع می کند .

اثبات. چون $DE \parallel BF$ است داریم:$\frac{AD}{\mathrm{AB}} = \frac{D\mathrm{E}}{\mathrm{BF}}$ اما AB=BF می باشد،

پس AD=DE… (1)

همچنین دومثلث DECو BFG متشابه می باشند.و داریم: $\frac{DE}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BG}}$ و BF=BG

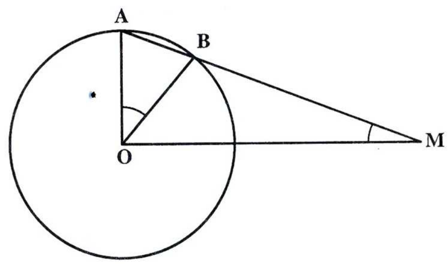
بنا براین DE=EC………..(2)

از رابطه ۱و۲ نتیجه می شود که AD=DE=EC است.

مباحثه.همیشه یک وتنها یک موضوع برای F وجود دارد، پس از ترسیم F، برای G دو موضوع می یابیم. پس دو جواب DE و D’E’ وجود دارد.

مثال۲: از نقطه فرضی واقع در خارج یک دایره ای داده شده ، قاطع چنان رسم کنید که زاویه حاده بین این قاطع وخطی که مرکزرا به نقطه داده شده وصل می کند با زاویه که وترایجاد شده در دایره توسط قاطع خواسته شده از مرکزدایره مساوی می باشد.

تحلیل. فرض میکنیم MBA قاطع مورد نظر باشد، که از نقطه داده شده M می گذرد و دایره مفروض به مرکز(O) را درنقطه A و B قطع می کند



شکل ۳۲۳: قطع دایره در دو نقطه A و B توسط خط MBA

زاویه A دردومثلث AOB و AOM مشترک است.

وبنا برفرض $A\hat{O}B = A\widehat{M}O$ است، پس زاویه های متناظر دو مثلث بالا مساوی اند، مثلث AOB متساوی الساقین است، پس مثلث AOM هم متساوالساقین است. و MA=MO است. اما طول MO معلوم است، پس MAیعنی فاصله نقطه A از M معلوم است و می توان نقطه A را تعیین وقاطع MA را رسم کرد.

ترسیم. دایره به مرکز M وبه شعاع MO را رسم می کنیم. اگرA یکی ازنقطه های تلاقی این دایره با دایره(O) باشد خط MA شرایط مسئله را برآورده می کند.

اثبات. فرض کنید خط MA دایره مفروض را در نقطه دیگری B قطع می کند. مثلث های AOM و AOB متساوی الساقین اند زیرا OA=OB و MA=MO است، زاویه A درهردومثلث یکی از زاویه های قاعده است ، پس زاویه های AOB و M که به ترتیب روبری قاعده AB وقاعده AO در دومثلث متساوالساقین هستند،نیز برابراند، پس MA خط خواسته شده است.

مباحثه. همیشه می توانیم دایره (M,MO) را که دایره مفروض را درنقطه Aو’A قطع می کندرسم کنیم. پس مسئله همیشه دو جواب دارد که نسبت به خط MO تناظر مرکزی یک دیگر اند . ایا می توانیم خط MBA را طوری رسم کنیم که زاویه AOB با زاویه منفرجه بین MBA و MO برابر باشد؟ اگر چنین کارممکن بود باید می دانستیم که :

$$A\hat{O}B + O\widehat{M}A = 180°$$

(۱۱، صص۵۵-۶۱).

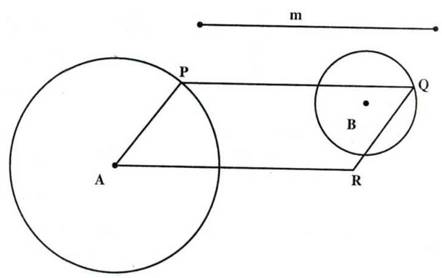
از آنجا $O\widehat{M}A = O\hat{A}B + OBA$

پس به تناقص می رسیم یعنی نمی توان خط رسم کرد که $\widehat{M} < O\widehat{B}A$ داریم ولی درمثلث OBM شرایط خواسته شده اخیر را برآورده کند.

مثال۳: بر روی دو دایره مفروض دو نقطه تعیین کنید که فاصله معین از هم داشته باشد وخطی که از آنها میگذردجهت مفروض داشته باشد.

تحلیل.فرض می کنیم P و Q نقطه های خواسته شده به روی دو دایره مفروض A و B باشند، ازمرکزدایره (A) یعنی نقطه A خط موازی PQ را رسم می کنیم ونقطه R را روی آن چنان اختیار می کنیم که $AR=PQ$ باشد. در متوازی الاضلاع $APQR$ داریم$RQ=AP$ ، AP شعاع دایره مفروض است، پس طول RQ مشخص است از طرف دیگرنقطه R معلوم است، زیرا هم جهت وهم طول AR مشخص است پس نقطه Q را می توان مشخص کرد. پس به آسانی می توان نقطه P را دریافت.

ترسیم. از نقطه A مرکزیکی از دو دایره مفروض ، خطی



شکل ۳۲۴: متوازی الاضلاع

درجهت داده شده رسم می کنیم و AR را به روی آن به اندازه طول معلوم M تعیین می کنیم، دایره (A') به مرکزR وشعاع برابر شعاع دایره (A) رسم می کنیم تا دایره مفروض دوم را در Q قطع کند. از نقطه Q خطی به موازات AR رسم و QP را برابر AR روی آن جدا می کنیم تا یک متوازی الاضلاع به ضلع AR درست شود نقطه های P و Q شرایط مسئله را بر آورده می کند.

اثبات. در ترسیم بالا، طول قطعه خط PQ همان طول مفروض و جهت آن همان جهت مفروض است. نقطه Q روی دایره(B) قرار دارد. برای این که ثابت کنیم نقطه P روی دایره A واقع است کافی است که توجه کنیم که درمتوازی الاضلاع $ARQP$ داریم:

$AP=RQ$و RQ طوری رسم شده است که با شعاع (A) برابر باشد.

مباحثه: همیشه می توان از نقطه A خطی را درجهت مفروض رسم کرد، نقطه R را می توان درهریک از دوطرف A مشخص کرد ، بنا براین برای R دوموضع R و R' می توان یافت دایره که مرکزش یکی از این دو نقطه وشعاعش برابر شعاع دایره (A) باشد، ممکن است دایره B را در دو نقطه قطع کند بر دایره (B) مماس باشدیا اصلاً دایره B را قطع نکند بنا برآن مسئله ممکن است چهار، سه ویا یک جواب داشته باشد.

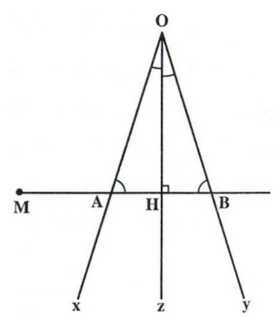
یا اصلاً جواب ندارد.

مثال۴: از نقطه مفروض خطی را رسم کنید که با دوضلع زاویه مفروض، زاویه های مساوی می سازد.

تحلیل: فرض می کنیم مسئلهحل شده وخط MAB با دوضلع زاویه زاویه های مساوی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ ، $(\hat{A} = \hat{B})$ را ساخته باشد درین صورت مثلث OAB متساوالساقین است . ناصف الزاویه AOB را رسم می کنیم .

این ناصف الزاویه که آنرا OH

می نامیمم ناصف عمودی AB است.



شکل ۳۲۵: تقسیم قطعه خط متناسب

ترسیم: ناصف الزاویه $x\hat{O}y$ را رسم می کنیم و آنرا (O) می نامیمم، ازنقطه مفروض Mخط عمود بر OZ رسم می کنیم تا دوضلع زاویه را درA و B وناصف OZ را درنقطه H قطع کند. این خط (MAB) جواب مسئله است.

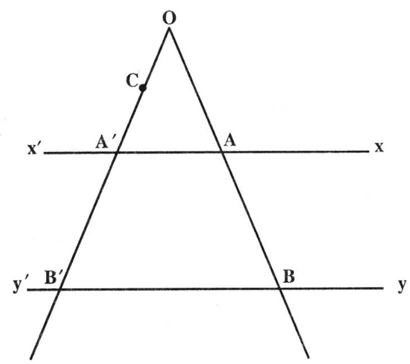
اثبات درمثلث OAB ، OH ناصف الزاویه راس وارتفاع وارد برقاعده AB است، پس این مثلث متساوالساقین است وداریم: $\hat{A} = \hat{B}$.

مباحثه: چون از هرنقطه معلوم همواره می توان یک خط عمود بر خط مفروض رسم نمود پس مسئله همیشه دارای یک جواب است.

مثال ۵: دو نقطه A و B روی دو خط موازی $x'x$ و $y'y$ ونقطه C غیر واقع به این دو خط داده شده است . از نقطه C خطی چنان رسم کنید که این دو خط موازی را در دو نقطه A'و B' قطع کند ، به قسمی که $K = \frac{AA'}{BB'}$ باشد .

تحلیل: فرض می کنیم مسئله حل شده وخط $CA'B'$ جواب مسئله باشد .

نقطه تلاقی دو خط ABو $A'B'$ را (O) می نامیم.



شکل ۳۲۶: تقسیم قطعه خط های متناسب

دومثلث OAA' و OBB' متشابه اند زیرا $AA' \parallel BB'$ است پس داریم: $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$

اما $K = \frac{AA'}{BB'}$ است، پس $\frac{OA}{OB} = K$ یعنی نقطه (O) قطعه خط AB را به نسبت معلوم K تقسیم می کند بنا براین می توانیم نقطه O را رسم وخط OC خط مطلوب است.

ترسیم: روی خط B نقطه O را چنان رسم می کنیم که $\frac{OA}{OB} = K$ باشد . از O به C وصل می کنیم ، این خط جواب مسئله است.

اثبات : نقطه های تلاقی OC با $x'x$ و $y'y$ نقطه های A' ؤ B' است ، در مثلث OBB' ، $AA' \parallel BB'$ است پس داریم: $\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = K$

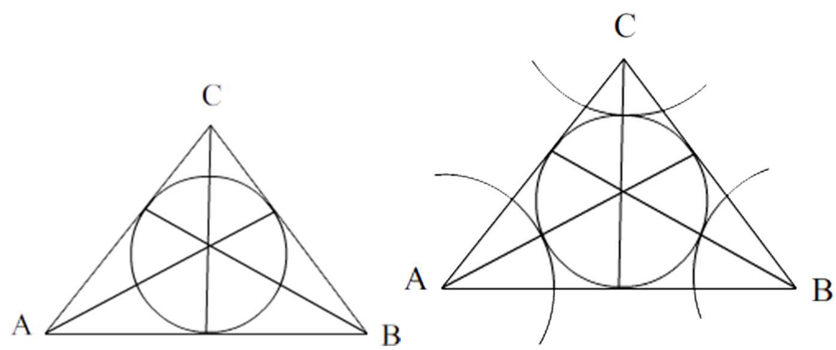
مباحثه: همیشه دو نقطه O و O' وجود دارد که قطعه خط AB را به نسبت $K \neq 1$ تقسیم می کند بنا براین اگر دو خط OC و $O'C$ با خطهای $x'x$و $y'y$ موازی نباشند، مسئله دو جواب دارد. اگر $K=1$ باشد نقطه O وسط قطعه خط AB است و نقطه O' نقطه بی نهایت دور امتداد AB است،پس مسئله یک جواب دارد.

٤.٧. ترسیم های هندسی با استفاده ازمکان های هندسی

روش دو مکان هندسی : دربسیاری موارد راه حل یک مسئله هندسی . برای یافتن نقطه که شرایط خاص داشته باشد ، بستگی دارد. به طور مثال برای رسم یک دایره ای که برسه ضلع یک مثلث مماس باشد، باید نقطه ای (مرکزدایره) رابیابیم که از سه ضلع مثلث به یک فاصله باشد.

مسئله رسم خط مماس از یک نقطه بریک دایره درصورت حل می شود، که نقطه تماس خط با دایره یعنی نقطه که از آن نقطه قطعه خط واصل بین مرکز دایره و نقطه داده شده به زاویه قائمه می گذرد را بیابیم. درتعیین این نقطه ها، بیشتر منظور بدست آوردن نقطه است که دارای دوشرط مفروض P و q باشد . درین صورت اگرشرط q را کناربگذاریم وتنها شرط P را درنظربگیریم نقطه مورد نظربه مکان هندسی نقطه های تعلق دارد که دارای شرط P هستند واگرشرط P را کنارگذاریم وتنها شرط q را درنظربگیریم نقطه مورد نظربه مکان هندسی تعلق دارد که شرط q می باشد. چون نقطه خواسته شده باید هردوشرط Pو q را دارا باشد ، بنا برین برمحل تلاقی این دومکان هندسی واقع است.

برای روشن شدن موضوع، مسئله رسم دایره مماس برسه ضلع مثلث را درنظرمی گیریم ، برای یافتن مرکز دایره که به سه ضلع AB ، AC وBC از مثلث ABC مماس است یک ضلع به عنوان مثال BC راکنارمی گذاریم وسعی می کنیم مرکز دایره را رسم کنیم که بر دو ضلع AB و BC مماس است.



شکل ۳۲۷ : محل تلاقی دو مکان هندسی(نقطه تقاطع ناصف های دوزاویه A و B مثلث ABC)

این مسئله جواب های بسیاری دارد . زیرا مکان هندسی مرکزدایره ای که بر دوضلع ABوAC مماس است ، ناصف الزاویه بین این دوضلع یعنی ناصف الزاویه داخلی A است. حال ضلع BC را اختیارمی کنیم وضلع AC را کنار می گذاریم، یعنی مرکز دایره ای را پیدا می کنیم که بر دو ضلع BC وAB مماس است این مسئله نیز بی شما ر جواب دارد زیرا مکان هندسی مرکزدایره های که بردوضلع BC و AC مما س اند. ناصف الزاویه بین این دو ضلع یعنی ناصف الزاویه داخلی B است بنا برین نقطه مطلوبه محل تلاقی این دو

مکان هندسی یعنی نقطه تقاطع ناصف های دو زاویه A و B از مثلث ABC است . بدیهی است که ناصف الزاویه داخلی C نیزازین نقطه می گذرد(این نقطه مرکز دایره محاطی درون مثلث ABC است)

ماهیت مکان های هندسی حاصل ، به شرط حذف شده بستگی دارد. در هندسه مقدماتی این شرطها باید چنان باشد که مکان های هندسی از خطها ودایره ها تشکیل شود ساده گی وسهولت راه حل مسئله، بستگی زیاد به انتخاب سنجیده مکان های هندسی دارد.

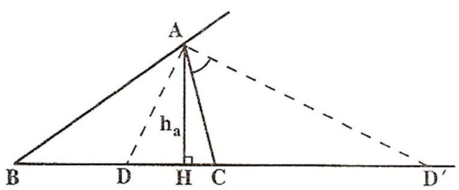
شناخت مکان های هندسی متعدد مارا قادرمی سازد که به راحتی تشخیص دهیم که نقطه مطلوب به کدام مکان هندسی تعلق دارد.

ذیلاً مثال های کاربرد مکان های هندسی برای حل مسئله های ترسیم های هندسی نشان داده شده است .

مثال۱: مثلث رسم کنید که از آن $b:c=K$ ، ha و a معلوم است .

تحلیل: فرض می کنیم مسئله حل شده است ومثلث ABC جواب

مسئله باشد ارتفاع AH را رسم می کنیم چون اندازه های ارتفاع



شکل ۳۲۸ : ناصف الازاویه مثلث

$AH=ha$ معلوم است. یک مکان هندسی نقطه A دو خط موازی

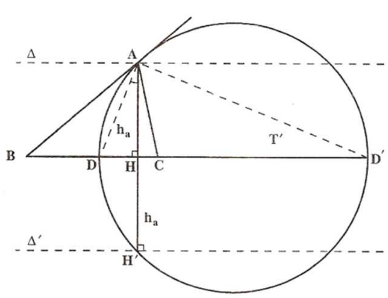
BC وبه فاصله h_a از آن است .ازطرف دیگر داریم: $\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}=K$ بنا برین مکان هندسی دیگررأس A دایره ای است که قطرش قطعه خط BC را به نسبت K تقسیم می کند(دایره اپولونیوس). بنا برین دو مکان هندسی برای نقطه A داریم ومی توانیم این نقطه را بیابیم .

ترسیم: قطعه خط BC به طول a را رسم می کنیم آنگاه

دوخط Δ و Δ' را موازی BC وبه فاصله ha از آن رسم می کنیم.

سپس دو نقطه D و D' را روی BC ودر امتداد آن چنان تعیین

می کنیم که قطعه خط BC را به نسبت $\frac{b}{c}=K$ تقسیم کند



شکل ۳۲۹ : مکان هندسی دوخط موازی و میانی دایره

دایره به قطرDD' را رسم می کنیم، نقطه های تلاقی این دو دایره با خط های Δ و Δ' راس A از مثلث ABC است از A به B و C وصل می کنیم.

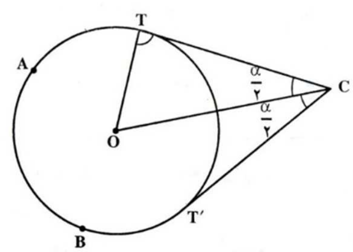
ثبوت: درمثلث ABC که از ترسیم بالا بدست آمده، شرط های داده شده را پوره می کند .

یعنی داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = K$ و $AH = ha$

مباحثه: اگرخط های Δ و Δ' دایره به قطر DD' را در چهارنقطه قطع کند، مسئله چهار جواب مشابه دارد، واگربرای این دایره مماس باشد، دوجواب مشابه وجود دارد، ودرصورت که دایره را قطع نکندمسئله جواب ندارد.

مثال۲: دایره را رسم کنید که از دونقطه داده شده بگذرد واز نقطه داده شده سومی با زاویه معلوم دیده شود.

تحلیل: فرض می کنیم دایره $C(O,R)$ که از دو نقطه A و B گذشته واز C تحت

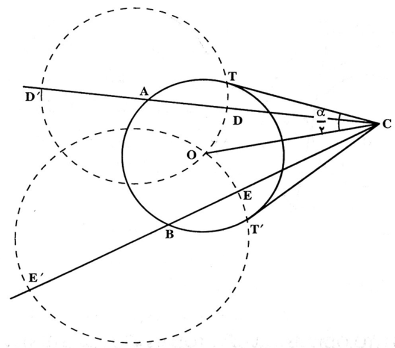


شکل ۳۳۰: مماس های خارجی بردایره از نقطه C

زاویه $\propto$ دیده می شود جواب مسئله باشد.

ازنقطه C مماس های CT و CT' را بر دایره رسم میکنیم. درمثلث قائم الزاویه OTC زاویه $O\hat{C}T = sin\frac{\propto}{2}$ معلوم است پس نسبت $\frac{OT}{OC} = sin\frac{\propto}{2}$ واز آنجا نسبت های $\frac{OA}{OC}$ و$\frac{OB}{OC}$ نیز معلوم اند پس دومکان هندسی برای نقطه (O) داریم وبا رسم این دو مکان هندسی جای نقطه (O) مشخص می شود.

ترسیم: از C به دو نقطه A و B وصل می کنیم رویAC ودر امتداد آن دو نقطه D و D' را چنان اختیار میکنیم که قطعه خط AC را به نسبت $K = sin\frac{\propto}{2}$ تقسیم کند (۱۵، صص۹۲۱-۹۲۵).



شکل ۳۳۱: مماس های خارجی دایره از نقطه C

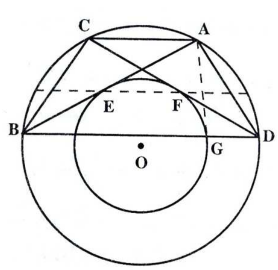
همچنان دونقطه E وE' را روی BC طوری اختیار می کنیم که قطعه خط را به نسبت K تقسیم کند ، دو دایره به قطرهای DD' و EE' رسم می کنیم نقطه تلاقی این دو دایره ، نقطه O مرکزدایره خواسته شده است. به مرکز O وبه شعاع OA دایره مطلوب را رسم می کنیم..

اثبات: از نقطه C مماس های CT و CT' را بر دایره O رسم می کنیم. درمثلث قائم الزاویه OCT ، $(\hat{T} = 90^\circ)$ داریم $\frac{OT}{OC} = K = sin\frac{\propto}{2}$ زیرا که $\frac{OT}{OC} = \frac{OA}{OC} = K$ است بنا براین $O\hat{C}T = \frac{\propto}{2}$. ودرنتیجه $T\hat{C}T' = \propto$ است ، دایره از دو نقطه A و B نیز گذشته است پس شرط های داده شده در مسئله برقرار است.

مباحثه:به تعداد نقطه های تلاقی دو دایره اپولونیوس به قطر های DD' و EE' مسئله جواب دارد.

مثال۳: از دو نقطه داده شده بر روی یک دایره ، دو وترمتوازی رسم کنیدطوری که مجموع طول هایشان مقدار معلومی باشد.

تحلیل: مسئله را حل شده می گیریم وفرض می کنیم که AوB دونقطه داده شده روی دایره به مرکز O و AC و BD وترهای متوازی خواسته شده باشن



شکل ۳۳۲: وتر های دایره

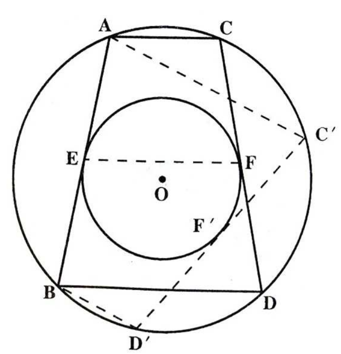
درذوزنقه متساوالساقین $ABCD$ طبق شکل $CD=AB$ وطول AB نیزمعلوم است، پس وتر CD درنقطه F یعنی نقطه وسط آن بر دایره ای به مرکز O وبه شعاع معلوم مماس است ، اگر E وسط AB باشد داریم $2EF=AC+BD$. پس نقطه E وطول $AC+BD$ معلوم است بنا براین یک مکان هندسی دیگر برای نقطه F داریم.[۲۲]

ترسیم: دایره ای (O,OE) را رسم می کنیم اگرطول داده شده ۲ باشد دایره (E,S) را رسم می کنیم تا (O,OE) را درنقطه F قطع کند. خط مماس بر (O,OE) درنقطه F دایره مفروض (O) را درنقطه C و D قطع میکند خط های AC و BD وترهای خواسته شده هستند.

اثبات: دو وتر AB و CD مساوی اند زیرا از (O) مرکزدایره مفروض (O) به یک فاصله اند پس $ABDC$ یک ذوزنقه متساوی الساقین است ودرنتیجه $AC+BD=2EF$ چون هنگام ترسیم EF رامساوی S گرفتیم $AC+BD$ دارای طول خواسته شده است .

مباحثه: دایره ای (E,S) درصورت که S از $2OE$ بزرگترباشد دایره (O,OE) را قطع نمی کند . اگر $S<2OE$ باشد، دونقطه تلاقی F و F' را خواهیم داشت.ومسئله دوجواب دارد. خط مماس بردایره (O,OE) نقطه F درنقطه C و D را روی دایره (o) تعیین می کند. این دو نقطه ونقطه های داده شده A و B چهارخط را مشخص می کنند، که دوضلع ودو قطر ذوزنقه متساوی الساقین هستند.

شکل نشان می دهد که ازین چها ر خط کدام دوخط، خطهای مطلوب هستند ، فرض کنید G نقطه تماس مماس دومی باشد که از A بردایره (O,OE) رسم می شود. اگر $S<EG$ مماس بر (O,OE) در F وتر AB را قطع می کند. وخط AB یک قطر از ذوزنقه حاصل خواهد بود قطعه خط EF با نصف تفاضل دو قاعده برابر است . حالت را درنظر بگیرید که تفاضل دو وترنقطه معلوم باشد.



شکل ۳۳۳: وترهای دایره

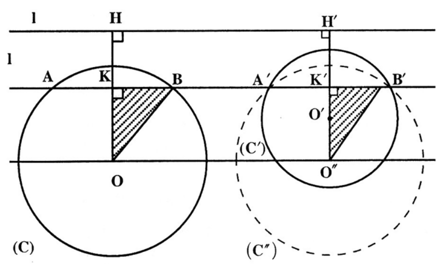
۵.۷. ترسیم های هندسی به کمک تبدیل های هندسی

درترسیم بسیاری ازشکلها ی هندسی ازتبدیل های هندسی مانند : انتقال، دوران، انعکاس مرکزی، انعکاس محوری، تجانس، انعکاس قطب وقطبی و.... استفاده می شود به مثال های زیر درزمینه توجه کنید.

مثال۱: دودایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ وخط L دریک سطح داده شده اند، خطی موازی L را رسم کنیدکه این دو دایره بر این دو وترمتساوی جدا کند.

حل: فرض می کنیم مسئله حل شده وخط L_1 موازی L جواب مسئله دایره های C و C' را به ترتیب دروترهای AB و $A'B'$ چنان قطع کند که $AB=A'B'$ باشد، از (O) و

(O') مرکزهای دو دایره عمود های بر خط L رسم می کنیم تا این خط را در H و H' وخط L_1 را در K و K' قطع کند.



شکل ۳۳۴ : مثلث های مشابه

چهارضلعی $HH'K'K$ مستطیل، وطول HH' مقدارثابتی است ازنقطه (O) خط L_2را موازی خط L واز نقطه B' خط موازی OB رسم می کنیم . تا در نقطه O'' یک دیگررا قطع کند، چهارضلعی $OBB'O''$ متوازی الاضلع است. که درآن $BB'=OO''=KK'=HH'$ است ، زیرا دو مثلث قائم الزاویه$O''K'B'$ و OKB مشابه

$$C\widehat{K} = \widehat{K}' = 90^{\circ} \quad , \quad OK = O''K', KB = \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} = K'B$$

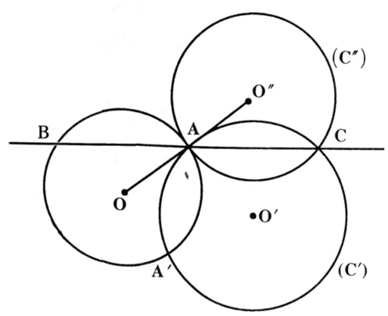
بنابرین $KB=K'B'$ واز آنجا $HH'=KK'=BB'=OO''$ است. پس ذوزنقه O'' و B' انتقال یافته های دو نقطه O و B به اندازه وکتور انتقال HH' بدست می آید ، پس برای حل مسئله چنین عمل می کنیم. از دو نقطه O و O' مرکزهای دو دایره ای عمود های OH و $O'H'$ را بر خط L ترسیم می کنیم تا وکتور ثابت $\overrightarrow{HH'}$ مشخص گردد. آنگاه دایره (C) را به اندازه وکتور HH' انتقال می دهیم تا دایره (C'') بدست آید،

این دایره ، دایره (C') را در وتر $A'B'$ را رسم کرده امتداد می دهیم تا دایره (C) را در A و Bقطع کند. $(ABA'B'$ یا $L1)$ جواب مسئله است.

مثال۲: دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ دردو نقطه A و A' متقاطع اند. از یک نقطه تقاطع خطی رسم کنیدکه دردو دایره دو وتربه طول های مساوی ایجاد کند.

حل: فرض می کنیم مسئله حل شده وخط ABC جواب مسئله باشد یعنی $AB=AC$ باشد. چون نقطه A ثابت است، پس نقطه C انعکاس مرکزی (تناظرمرکزی) نقطه B نسبت به مرکز A می باشند. بنا بر این برای حل مسئله انعکاس مرکزی (تناظرمرکزی) دایره (C) را نسبت به نقطه A بدست می آوریم و دایره (C'')می نامیم . نقطه تلاقی این دایره با دایره (C'') نقطه C است. از C به A وصل می کنیم وادامه می دهیم تا دایره (C) را در B قطع کند.

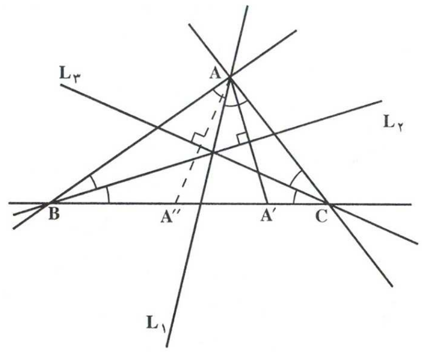
خط BAC جواب مسئله است شکل این مثال قرار ذیل است.



شکل ۳۳۵: دوایر متقاطع در نقطه A

مثال۳: سه خط همرسی L_1 ، L_2 و L_3 ونقطه A واقع بریکی از آنها داده شده است. مثلث به راس A رسم کنید که این سه خط ناصف های زاویه های داخلی آنها باشند.

حل: فرض می کنیم مثلث ABC رسم شده و L_2 ناصف الزاویه B و L_3 ناصف الزاویه C باشد.پس خط های AC و AC نسبت به خط L_3 متناظرمحوری (انعکاس محوری)یک دیگراند.



شکل ۳۳۶: تناظر محوری

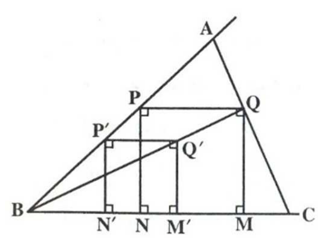
پس نقطه های A' و A'' متناظر نقطه A نسبت به خط های L_2 و L_3 برخط BC واقع اند، بنا براین راه حل مسئله به صورت ذیل بدست می آید. تناظرهای محوری نقطه A نسبت به دو خط L_2 و L_3 را بدست آورده A' و A'' می نامیم نقطه های تلاقی خط $A'A''$ با خط های L_2 و L_3 راس های B و C می باشند بدین ترتیب مثلث ABC رسم می شود.

مثال۴: درمثلث مفروض ABC مربع محاط کنیدکه دو راس آن برقاعده AB ودوراس دیگری به ضلع های AC و BC قرار گیرند.

حل: فرض می کنیم که مسئله حل شده و مربع $MNPQ$
جواب مسئله است از B به Q وصل می کنیم. ازنقطه اختیاری Q' روی AQ خطموازی PQ رسم می کنیم تا AB را درنقطه P' قطع کند از P' و Q' عمود های $Q'M'$ و $P'N'$ را بر BC رسم میکنیم.

$M'N'P'Q'$ مربعی است که مجانس مربع $MNPQ$ نسبت به مرکزتجانس B ونسبت تجانس $\frac{BQ'}{BQ}$ است، بنا براین برای حل مسئله چنین عمل می کنیم.

مربع دلخواه $M'N'P'Q'$ راچنان رسم می کنیم که $M'N'$ روی BC و P' روی AB باشد. AQ' را رسم میکنیم ونقطه تلاقی آن با AC را Q مینامیم، مجانس مربع $M'N'P'Q'$ نسبت به مرکز تجانس B ونسبت تجانس $\frac{BQ}{BQ'}$ یعنی مربع $MNPQ$ جواب مسئله است. قرارشکل ذیل:



شکل ۳۳۷: مربع های متجانس

۶.۷.ترسیم های هندسی با استفاده از شکل های کمکی

درمیان شرطهای که برای ترسیم یک شکل داده می شود، ممکن است شرط های وجود داشته باشد که به طورمستقیم درشکل مورد بحث قرار نداشته باشد، به طور مثال ممکن است مجموع طول های دو ضلع مثلث، با تفاضل دو زاویه از مثلث یا داده شده باشند، برای یافتن راه حل این گونه مسئله ها باید این اجزاء غیرمستقیم را درتحلیل مسئله وارد کنیم تا بتوانیم شکل. قابل رسم پیدا کنیم که به کمک آن بتوانیم شکل خواسته شده را رسم کنیم، این شکل ها را شکل های معین یا کمکی می نامند.

مثال۱: مثلث را رسم کنید که از آن محیط زاویه روبرو به یک ضلع وارتفاع واردهمان ضلع $2P\ ,\hat{A}\ ,ha$ داده شده است.

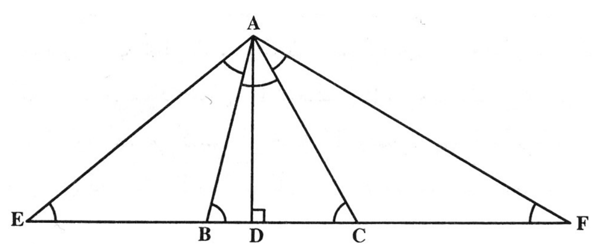
تحلیل: فرض می کنیم مسئله حل شده ومثلث *ABC* جواب مسئله باشد *BC* را از دوطرف امتداد می دهیم و *BE* را مساوی *BA* و *CF* را مساوی *CA* جدا می کنیم پس *EF=2P* مقدارمعلوم است.

مثلث های *EAB* و *CAF* متساوی الساقین اند بنابرین:

$$\hat{E} = E\hat{A}B = \frac{1}{2}A\hat{B}C \quad \text{و} \quad \hat{F} = F\hat{A}C = \frac{1}{2}ACB$$

در نتیجه داریم که مقدار معلوم $= E\hat{A}F = \frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + \frac{1}{2}\hat{A}$ $90^\circ + \frac{A}{2}$ بنا برین زاویه *EAF* معلوم است ارتفاع *AD* از مثلث *ABC* ارتفاع مثلث *AEF* نیز هست.

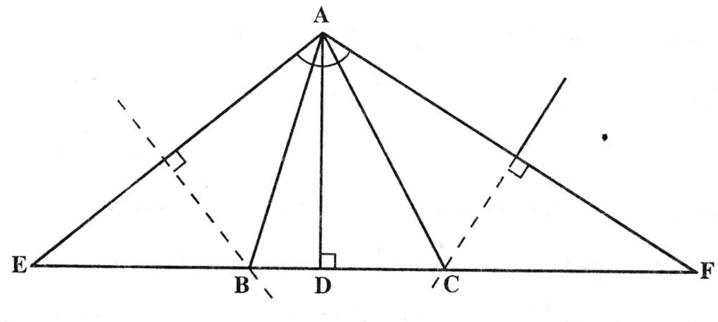
پس از مثلث *AEF* قاعده *EF=2P* زاویه روبری آن $E\hat{A}F = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ وارتفاع *AD=ha* معلوم است بنا برین مثلث را می توانیم رسم کنیم راس *A* ازین مثلث رأس مثلث مطلوب *ABC* نیزهست.



شکل ۳۳۸: مثلثهای متجانس

ترسیم: مثلث *AEF* را با معلوم بودن ضلع *EF* زاویه $E\hat{A}F$ وارتفاع *AD* رسم میکنیم ناصف های عمودی *AE* و*AF* را رسم می کنیم تا *EF* را در نقطه های *B* و *C* که دو راس یک دیگر مثلث *ABC* می باشد قطع کنند.

از A به B و C وصل می کنیم مثلث ABC جواب مسئلهاست.



شکل ۳۳۹ : مثلثهای متجانس

اثبات: $BE=BA$ و $CF=CA$ است بنابر این $EF=EB+BC+CF=AB+BC+AC=2P$ وازمتساوی الساقین بودن مثلث های ABE و ACF واندازه زاویه $EAF= 90^\circ + \frac{A^\wedge}{2}$ نتیجه می شود که زاویه BAC مساوی همان مقدار داده شده در مسئله است .ازطرف دیگر ارتفاع $AD=ha$، AD ارتفاع مثلث ABC نیزهست پس مثلث ABC شرطهای داده شده را دارا است.

مباحثه: درصورتیکه مثلث AEF قابل رسم باشد ، مثلث ABC نیز شرطهای داده شده رادارا است .

يادداشت مثلث معین .برای ترسیم مثلث مطلوب ABCبه عنوان یک گام میانی مثلث دیگر یعنی مثلثAEF رارسم کردیم .استفاده از یک مثلث کمکی که به مثلث (معین)موسوم است غالبا" می تواند بسیار مفید باشد.

مثال ۲: ازمثلث اندازه یک ضلع زاویه روبه رو به آن ضلع وتفاضل اندازه های دوضلع دیگر ($b-c,A,a$) معلوم است .مثلث را رسم کنید .

حل : فرض می کنیم مسئله حل شده مثلث ABC جواب مسئله باشد.

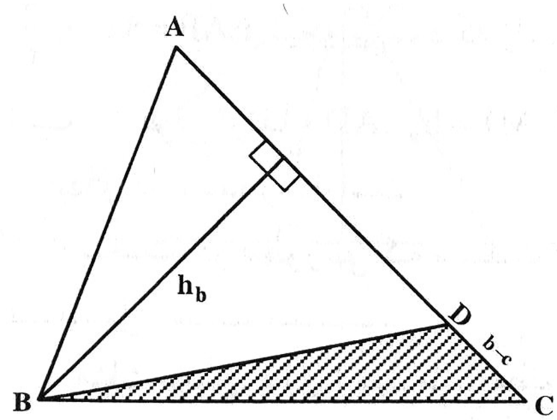
بافرض $b > c$ روی ضلع AC قطعه خط $AD=AB$ را جدا می کنیم واز D به B وصل می کنیم $DC=AC-AD=b-c$ طول معلوم دارد ازطرف دیگر داریم.

مقدار معلوم $= BDC = 180^0 - BDA = -\frac{1}{2}(180^0 - A) = 90^\circ + \frac{A}{2} =$

پس مثلث BCD که ازآن $BC=a$، $DC=b-c$ و$BDC = 90 + \frac{A}{2}$،معلوم است.

قابل رسم است .دورأس B و C از این مثلث، دورأس BوC از مثلث خواسته شده می باشد (۱۶، صص ۲۱۱-۲۱۹)

برای تعیین راس A ناصف عمودی ضلع BDرا رسم می کنیم تا امتداد CD را درنقطه A قطع کند



شکل ۳۴۰ : نمایش ناصف عمودی

از A بهB وصل می کنیم مثلث ABC مشخص می شود. شرط وجود جواب آنست

که $a<b-c$ باشد اگراین شرط برقرار باشد، رسم مثلث ناممکن است ، اگراین شرط برقرار

باشد زاویه مفروض مثلث BCD روبروی ضلع بزرگترقرار دارد دررسم چنین مثلث به یک

وتنها یک طریق ممکن است پس مسئله مورد نظر یک جواب دارد.

۷.۷. ترسیم های هندسی با استفاده از روش تشابه

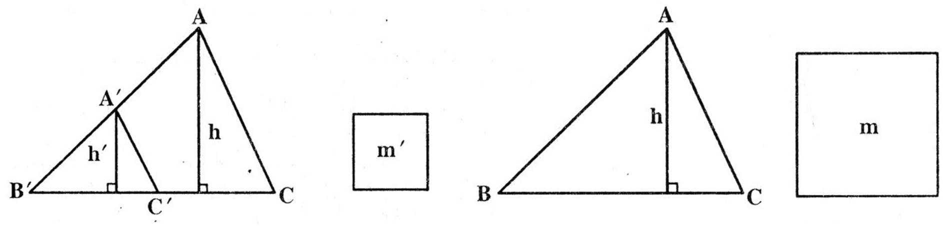
با درنظرنگرفتن یکی ازشرط های مسئله ، می توان شکل شبیه شکل مطلوب رسم کرد. معمولاً می توان با توجه به شکل رسم شده وشرط حذ ف شده جزیی را تعیین کرد که مارا قادر به حل مسئله کند . مثالهای زیراین روش را نشان میدهد.

مثال۱: مثلث را رسم کنیدکه با مثلث مفروض متشابه باشد وبا اندازه مساحت آن، مساحت یک مربع معلوم باشد.

حل:باچشم پوشی از مساحت، مثلث ABC را مشابه مثلث خواسته شده ABC رسم می کنیم اگر$a'=B'C'$ و h' ارتفاع وارد براین ضلع و m' ضلع مربع باشد که مساحتش برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است

داریم : $$m'^2 = a'.\frac{1}{2}h'$$

پس m' را می توان به عنوان جزء سوم یک تناسب رسم کرد.



شکل ۳۴۱: مربع ومثلث

اکنون می توان ضلع a=BC را با توجه به تناسب $\frac{a}{a'}=\frac{m}{m'}$ تعیین کرد. که درآن m ضلع مربع مفروض است ، ومثلث مطلوب به آسانی رسم می شود ..

روی ضلع $B'C'$ و$B'c$ را برابر a جدا می کنیم از C خطی به موازات $A'C'$ رسم می کنیم تا ضلع $A'B'$ را در راس سوم مثلث مطلوب $AB'C$ قطع کند .

مسئله یک وتنها یک جواب دارد.

مثال۲: دو ضلع جانبی ونسبت قاعده به ارتفاع وارد بر قاعده از یک مثلث $b, c, \frac{a}{ha}=\frac{q}{p}$ معلوم است مثلث را ر سم کنید.

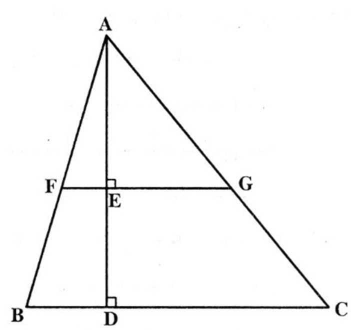
حل: فرض می کنیم ABC مثلث مطلوب باشد روی ارتفاع AD قطعه خط AE را برابر q جدا می کنیم واز نقطه E خط موازی BC رسم می کنیم تا دوضلع AB و AC را دردوقطه F و G قطع کند، دو مثلث AFG وABC متشابه اند وداریم: $\frac{AF}{AG}=\frac{AB}{AC}=\frac{C}{b}$

$$\frac{FG}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{P}{q}$$

پسFG=.است

بنا بر این از مثلث AFG که متشابه با مثلث ABC است اندازه ضلع $FG=P$ ارتفاع $AE=q$ ونسبت دو ضلع $\frac{AF}{AG}=\frac{C}{b}$ را می دانیم.

پس می توانیم این مثلث را رسم کنیم :



شکل ۳۴۲: ذوزنقه در داخل مثلث

ازرسم مثلث AFG روی AF قطعه خط $AB=C$

را جدا کرده ، از B خط موازی FG رسم می کنیم.

تا AG را درنقطه C قطع کند، ABC مثلث مطلوب است .

مسئله ممکن است دو یا چند جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد .

مثال۳: از ذوزنقه $ABCD$ ، طول دوساق BC و AD ، اندازه زاویه بین دو ساق ونسبت دوقاعده معلوم است ، ذوزنقه را رسم کنید.

حل: فرض کنید که $ABCD$ ذوزنقه خواسته شده و E نقطه تلاقی دو ساق AD و BC باشد.

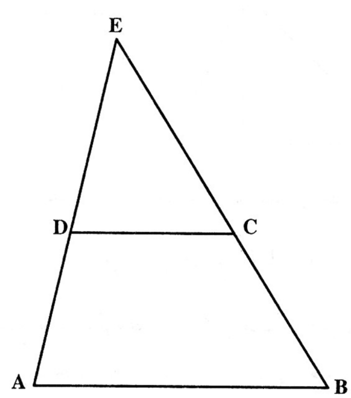
دومثلث ABE و DCE متشابه اند. پس داریم: $\frac{EC}{EB}=\frac{ED}{EA}=\frac{CD}{BA}=\frac{p}{q}$

(نسبت داده شده)

$$\Rightarrow \frac{EC}{EB-EC}=\frac{ED}{EA-ED}=\frac{p}{q-p}\Rightarrow \frac{EC}{CB}=\frac{ED}{DA}=\frac{p}{q-p}$$

بنا براین قطعه خط های EC و ED ، ودرنتیجه مثلث DEC را که دوضلع وزاویه بین آنها را داریم می توان رسم کرد.

پس از رسم این مثلث ED را امتداد می دهیم وطول مفروض DA را روی آن جدا می کنیم.

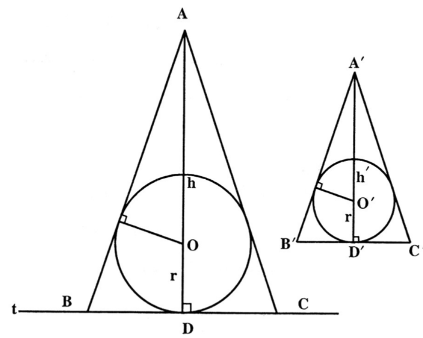


شکل ۳۴۳ : ذوزنقه در داخل مثلث

خطی که از A به موازات CD رسم می شود، روی امتداد EC رأس چهارم B از ذوزنقه مطلوب $ABCD$ ، را تعیین می کند.

مثال۴: بریک دایره مفروض، مثلث متساوی الساقین را محیط کنید که نسبت ساق به قاعده آن مقدارمعلوم باشد.

حل: همه مثلث های متساوی الساقین که نسبت ساق بر قاعده آنها مقدار ثابت است متشابه اند.



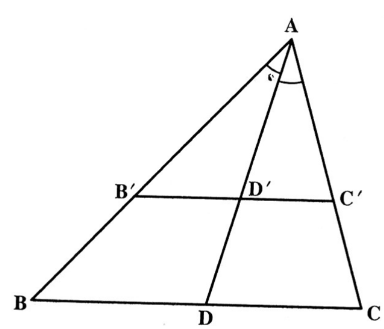
شکل ۳۴۴: مثلث های متساوی الساقین محاط

زیرا ارتفاع وارد برقاعده آنها را به مثلث های قائم الزاویه متشابهی تقسیم می کند .

روی قاعده $B'C'$ که طول دلخواهی دارد. مثلث متساوی الساقین $A'B'C'$ را چنان رسم می کنیم که$\frac{p}{q}=\frac{A'B'}{B'C'}$ (نسبت مفروض باشد)، r' و h' را شعاع دایره محاطی داخلی وارتفاع هم مانند قاعده از مثلث $A'B'C'$ و r و h را اجزای متناظر آنها از مثلث ABC فرض می کنیم داریم: $\frac{r}{h}=\frac{r'}{h'}$ ازین تناسب سه جزء h' ، r وr' معلوم اند پس می توانیم h را رسم کنیم.

ازنقطه دلخواه D برروی دایره مفروض، مماس T را رسم وروی خطی که از D به مرکز دایره رسم شود DA را برای hجدا می کنیم مماس ها ی که ازA بردایره رسم شوند ومماس T مثلث مطلوب ABC را تشکیل می دهد.

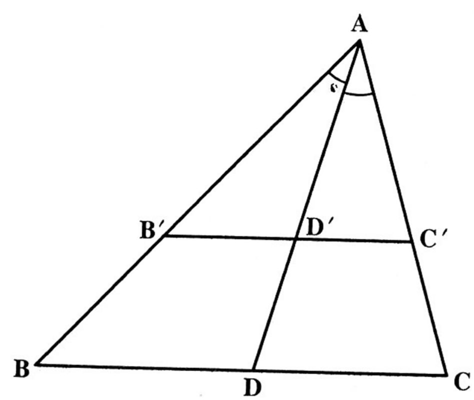
مثال ۵: از مثلث ABC اندازه دو زاویه وناصف الزاویه سوم داده شده است مثلث را رسم کنید



شکل ۳۴۵: مثلثهای مشابه

حل: مسئله را حل شده می گیریم، با معلوم بودن اندازه دو زاویه ، اندازه زاویه سوم مثلث نیز معلوم است (اندازه های سه زاویه مثلث داده شده تشکیل می دهند). درین صورت می توان با استفاده از این اطلاعات مثلث $AB'C'$ مشابه با مثلث مطلوب رسم کرد این مفهوم به این عنوان که مثلث مربوطه در نوع مشخص شده معروف است . درین صورت خوانواده از مثلث ها تعیین شده ومثلث مطلوب را می توان به عنوان عضو خاص ازاین خوانواده پیدا کرد. مثلث خواسته شده ومثلث مطلوب را با جدا کردن طول ناصف داده شده AD درامتداد AD' برای مشخص شدن نقطه D وسپس رسم خطی به موازات $C'B'$ می توان رسم کرد، تازمان که مجموع اندازه های دو زاویه مفروض کمتراز ۱۸۰ درجه است همیشه یک جواب دارد.

یادداشت: با شرط ها داده شده ، دو مثلث ADC و ADB را می توان رسم کرد، زیرا طول ضلع AD ازین مثلث ها و اندازه زاویه های این دو مثلث معلوم است، بنا برین مثلث ABC رسم می شود (۲۵، صص ۵۲۶-۵۳۰)

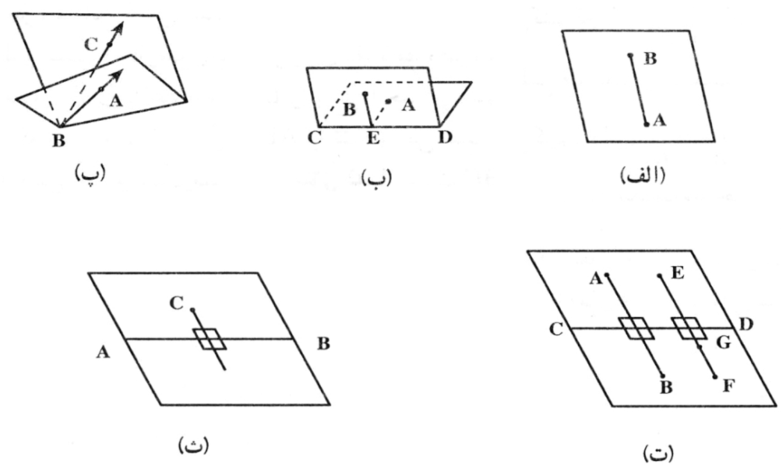


شکل ۳۴۶ :مثلثهای مشابه

۸.۷. ترسیم هندسی با قات کردن کاغذ

اززمان یونانیان باستان به بعد، علاوه بر استفاده از پرکارمعمولی وخط کش نامدرج روش های دیگری انجام ترسیمات توجه بسیاری از ریاضی دانها را جلب کرده است . به عنوان مثال ، ازوسایل گوناگون ومعادله های منحنی ها برای حل مسئله های که درغیر این صورت حل شان نا ممکن بود ، استفاده شده است ، دوروش دیگر انجام ترسیمات، بعضی از امکانات گوناگون این صحنه افسون آمیزریاضیات رانشان می دهند، یکی از روش های انجام ترسیمات که ممکن است مقدماتی به نظرآید وبا این همه توجه ریاضی دانها درسالهای اخیربه خود مشغول کرده تلاقی از طریق قات کردن کاغذ است .

درتمرین عملی معمولاً از کاغذ روغنی استفاده می شود که درین صورت قات ها ، مرئی باقی می مانند، درین بخش تعداد کمی ازترسیمات اساسی را شرح می دهیم .



شکل ۳۴۷ : چهارضلعی ها

قالب این کار را بگیریدوبه این ترتیب قادر به مقابله آن با سایر روش های ترسیم هندسی اقلیدیس باشید. یکی از ترسیم های که به کمک قات کردن کاغذ انجام می گیرد، قات کردن کاغذ به خط مستقیم که ناصف عمودی قطعه خط مفروض است می باشد.

فرض می کنیم قطعه خط AB درشکل (الف)داده شده باشد، کاغذ را چنان قات می کنیم که در شکل (ب) قات می کنیم . CD خط مطلوب است.

ترسیم دیگرقات کردن درامتداد ناصف الزاویه معلوم است(شکل ب) ، برای این کا ر کاغذ را قات کرده از راس زاویه با یک ضلع زاویه بر ضلع دیگرقات می کنیم. ترسیم سوم ، قات کردن خط گذرانده از نقطه مفروض به موازات خطی مفروض است. برای این کار ابتدا قات برای خط CD عمود برخط مفروض AB درنظرمی گیریم.

شکل (ث) سپس قات ازنقطه مفروض G برای بدست آوردن خط EF عمود برCD انجام می دهیم . این خط موازی AB وخط خواسته شده است.

ترسیم دیگرقات کردن عمودی از نقطه ای بر خط است . برای این کار عمود عبور کننده از نقطه برخط، با قرار دادن قسمتی از خط AB به خودش قات می کنیم. شکل(ث) . گرچه قات کردن کاغذ بسیار ساده به نظرمی رسد، ریاضی دانها قادر به اثبات قضیه ای نسبتاً شگفت انگیززیر درمورد ترسیم های کاغذ قات کردن شده اند.

قضیه: تمام ترسیمات هندسی اقیلدس که می توانند با خط کش نامدرج وپرکارانجام شوند، می توانند با قات کردن کاغذ نیز انجام گیرند.

این قضیه قابل توجه بر مبنای چندین فرض که درمرجع عالی مربوط به قات کردن کاغذزیرآمده بنا شده است.

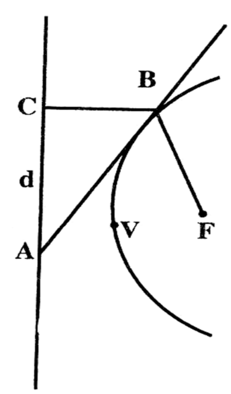
فرض های مذکور، به طور مثال. شامل این فرض است که کاغذ را می توان به چنان روشی قات کرد که یک خط بتواند بر خط دیگر واقع بر همان کاغذ قرار گیرد. وقات ساخته شده در واقع خط مستقیم باشد است.

نظریه قات کردن کاغذ درست به همان اندازه نظریات ترسیمات با خط کش نامدرج وپرکار، ریاضی ودقیق است، اما روش های این دو تفاوت های زیادی دارند.

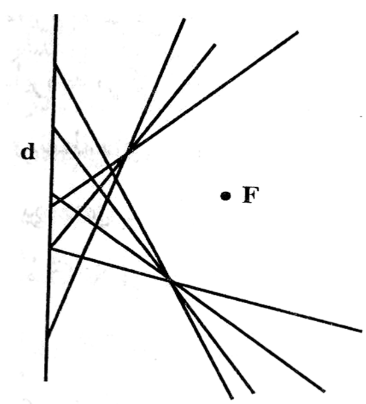
ازقات کردن کاغذ می توان درترسیم به گونه ای متفاوت که معمولاً درهندسه مقدماتی مکاتب بررسی نمی شوند، یعنی رسم مماس بر پارابولا استفاده کرد.

شکل(ج) توضیح می دهد که چگونه می توان یک رشته مماس بریک پارابول را با یک قات کردن محراق F به خط هادی d مشخص کرد. دلیل چگونگی عملکرد ترسیم مذکور را در شکل (ج) توضیح داده ایم . می توان ثابت کرد که مماس BA درنقطه واقع بر پارابول شکل ناصف الزاویه $F\hat{B}C$ ، F محراق و C مماس های عموداز B بر هادی است.

قراشکل های ذیل:



(ج)



(چ)

شکل ۳۴۸ : وجه هایپربول

(۲۶، صص ۷-۹).

۹.۷. ترسیم تنها با یک وسیله

ترسیمات باخط کش نامدرج وپرکار وترسیمات به کمک قات کر دن رادیدیم .اینکه به بررسی نظریه سهم دیگری ازتازیخ ترسیمات یعنی مساعی ازترسیمات بااستفاده ازتنها یکی ازدووسیله خط کش نا مدرج وپرکارمی پردازیم .

روش اول دراین مورد محدود کردن وسیله ترسیمها به پرکار تنهاست واضیح است که خط مستقیم باپرکارتنها غیرممکین است لذاباید دانست که یک خط درصورتی که دونقطه ازآن یافت شودبه طورکامل معین می شود.ترسیمات باپرکار تنهابه ترسیمهای مور- ماشرونی

(Mohr-mascheroniconsturtvlctions) موسوم است.

سی موراولین روایت شناخته شده ازاین ترسیمات را درسال(۱۶۷۲) به چاپ رساند. هرچند کتاب تاسال(۱۹۲۸) هنگام که ازنو کشف شد ،توسط ریاضیدانها شناخته شده نبود.ودر همان دوران ریاضیدانان ایتالیائی به نام ماشرونی (حدود ۱۷۹۷) به طورمستقل قضیه زیرراکشف کرد.

قضیه :جمیع ترسیمات ممکن بااستفاده ازخط کش نامدرج وپرکار می توانند بااستفاده ازپر کار تنها نیز انجام شوند.

مثال زیرترسیمی راکه به طورکامل باپرکار انجام شده توضیح می دهد.

مثال وسط قطه خط مفروض راتنهابا استفاده ازپرکاربه دست آورید

۱: قطعه خط AB رادرنظر می گیریم .دایره به مرکز B وشعاع BA را رسم می کنیم

۲:با AB به عنوان شعاع سه قوس AC، CD ،DA را مشخص کرد $\acute{A}$ چنان که $A\acute{A}$ قطر دایره مذکورباشد جدامی کنیم .

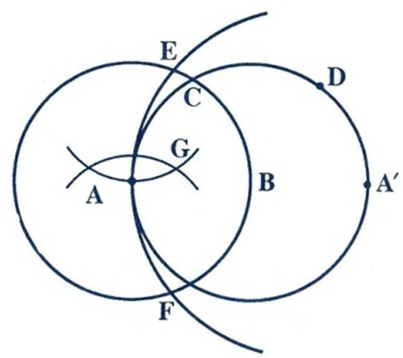
۳:دایره به مرکز A وشعاع AB را رسم می کنیم

۴: دایره به مرکز $\acute{A}$ وشعاع $A\acute{A}$ متقاطع بادایره مرحله ۳ درنقطه های E وF رارسم می کنیم .

۵: دایره های به مرکزهای E وFوشعاع EA رارسم می کنیم .

این دودایره درA ونقطه خواسته شده G تلاقی می کنند .اثبات این که تریسم نسبتا" استادانه فوق به نقطه صحیح منتج می شود براین واقعیت که $\acute{A}$ وG ونقطه های منعکس نسبت به دایره به مرکز A وشعاع AB

اند استواراست. اما اثبات به کاررفته دراین مرحله به دانش این مفهوم نیازندارد .مثلث های$\acute{A}\ EA$ و EGA متشابه اند بنابراین .



شکل ۳۴۹: نمایش نقطه های تلقی مستقیم و دایره

$$\frac{A\,A'}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AG}} \text{ یا } A\acute{A}.\mathrm{AG} = (\mathrm{AE})^2$$

به علت اینکه : $A\acute{A} = 2\mathrm{AB} = 2\mathrm{AE}$

پس داریم $2AE.AG = AE^2$

$$2AG = AE = AB$$

پس Gوسط قطعه خط ABاست.

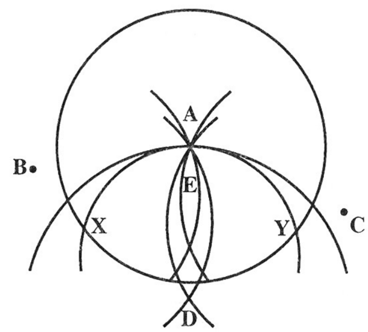
اثبات قضیه بالا شامل نشان دادن چگونگی یافتن نقطه های تلاقی خط مستقیم ودایره ونقطه های تلاقی دو خط مستقیم با پرکار تنها است، زیرا ترسیم دایره ویافتن نقطه های تلاقی دو دایره با پرکار تنها، به طور واضح وبا کفایت ساده است.

روش ترسیم نقطه های دایره وخط ناگذرنده از مرکزآن را درشکل (ب) نشان داد.

فرض می کنیم B و C نقطه های مفروض با مرکز دایره مفروض باشد.درین صورت:

۱- دایره ها ی به مرکزهای B و C نقطه های مفروض واقع برخط مورد بحث، گذارنده از A وبا ر دیگرمتقاطع درD را رسم می کنیم .

۲- با پیروی از ترسیم قبلی، نقطه E را چنانکه $AD.AE = \mathrm{r}^2$ به ازای r شعاع دایره اصلی باشد می یابیم(این ترسیم باید، درصورت که D داخل دایره اصلی باشد، تعدیل شود).



(ب)

شکل ۳۵۰: نمایش نقطه تلاقی مستقیم و دایره

۳- دایره به مرکز E وشعاع EA دایره اصلی ر ا درنقطه مطلوب X و Y قطع می کند. اثبات این که X و Y نقطه های تلاقی خط ودایره مفروض اند را به عهده خواننده گان واگذار کرده ایم.

جمیع ترسیمات اقلیدس را نمی توان با خط کش نا مدرج تنها انجام داد.درین مورد ابوالوفا ریاضی دان مسلمان، استفاده از خط کش نا مندرج وپرکار رنگین(Rustycompasses) را مطرح کرده است.

استفاده از پرکار با دهانه ثابت معادل دردست داشتن دایره ای با مرکز آن است نتیجه اساسی این وسیله درآنچه که به عنوان قضیه ترسیمی پونسله-اشتنیر (poncelet-steiner) شناخته شده ودرزیرآنرا بیان می کنیم .

قضیه: جمیع ترسیمات که می توانند با خط کش نا مندرج وپرکارانجام شوند می توانند با خط کش نا مندرج تنها ودایره ای مفروض ومرکزش انجام گیرد.

خط کش نامندرج تنها برای انجام ترسیمات هندسی تصویری کفایت می کند، درین هندسه نه دایره، نه قطعه خط بلکه خاصیت خط بودن لا تغییراست.

با ترسیمات با خط کش نا مدرج وپرکاردرهندسه انعکاسی مواجه خواهیم شد(۲۲، صص۲۵۳-۲۶۰).

خلاصه فصل هفتم

بحث اصلی این فصل عبارت بود از روش های حل مسئله های هندسی به وسیله تر سیم های هندسی. استفاده از ترسم های اساس هندسی زمینه خوب برای حل مسایل پیچده تر میباشد واین روش ها قرار ذیل اند. روش های استفاده از قضایای معروف، روش سازنده (ایجاد شونده)، روش ترسیم های هندسی باش استفاده از امکان های هندسی، روش ترسیم های هندسی با استفاده از تبدیلی های هندسی، روش ترسیم های هندسی با استفادهز از اشکال کمکی، روش ترسیم های هندسی با استفاده از روش تشابه، و روش ترسیم های هندسی با استفاده از قات کردن کاغذ.

مسایل فصل هفتم

۱- به مرکز نقطه مفروض، دایره را رسم کنید که دایره ای مفروضی را نصف کند یعنی وتر مشترک دو دایره ،قطر دایره مفروض باشد

۲- روی یک دایره داد ه شده ، نقطه را تعیین کنید که طوریکه خط های که این نقطه را به دو نقطه معلوم واقع بر همین دایره وصل می کند. خط مفروض را دردونقطه که نسبت فاصله هایشان از نقطه معلوم دیگری واقع بر همین خط مقدور معلوم باشد قطع کند

۳- نقطه A ، خط L ودایره ای (T) داده شده اند، مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنید که یک رأس نقطه A ودو راس دیگرش یکی روی خط L ودیگری روی دایره (T) قرار داشته باشد

۴- دایره ای را رسم کنید که بر دو نقطه داده شده A و B بگذرد وبرخط مفروض Δ مماس باشد.(A و B دریک طرف خط Δ قرار دارند)

۵- مثلث ABC داده شده است دایره (A) را به مرکز A چنان رسم کنید که B وC نسبت به آن مزدوج باشند

۶- ازمثلث یک ضلع زاویه روبروی آن ضلع، ومجموع دو ضلع دیگر (b+c , $\hat{A}$. a) معلوم است مثلث را رسم کنید

۷- آیامیتوان یک دایره را توسط پرکاروخط کش به هشت حصه مساوی تقسیم کرد؟

کتابنامه

1. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه** ،جلد ۱۴. تهران: مدرسه.
2. سیلورمن، ریچارد. ا. (۱۳۷۳). **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی.**ترجمه عالم زاده، علی اکبر.تهران: ققنوس.
3. شهریاری، پرویز. (۱۳۶۵). **هندسه در گذشته و حال**. تهران: امیر کبیر.
4. لاری بازرگانی، عبدالرضا. (۱۳۸۲). **جبر خطی و کاربرد های آن**. شیراز: دانشگاه شیراز.
5. محمدی، علی اکبر. (۱۳۸۳). **جبر**. اصفهان: دانشگاه اصفهان.
6. مگارت، جان. باو. (۱۳۸۵). **تاریخ جبر**. ترجمه وحیدی اصل ، محمد قاسم.تهران: علمی و فرهنگی.

فصل هشتم

کاربرد ترسیم های اشکال هندسی

در این فصل با استفاده از ترسیم های اشکال هندسی برای حل هندسی مسائل الجبری ، اثبات مطابقت های الجبری ، حل غیر مساوات الجبری استفاده از رسم و شکل های هندسی برای اثبات قضیه ها ، حل معادله های درجه سوم به روش خیام تبدیل مساحتهای هندسی را مورد مطالعه قرار میدهیم.

۱.۸. اثبات مطابقت های الجبری

پیش از پیدایش الجبر عملیه های الجبری به روش های هندسی انجام میشد.اقلیدس بسیاری ازاین روشها را درمقالات خویش گنجانیده است.

حال به بررسی چند قضیه از مقاله دوم اقلیدس می پردازیم.

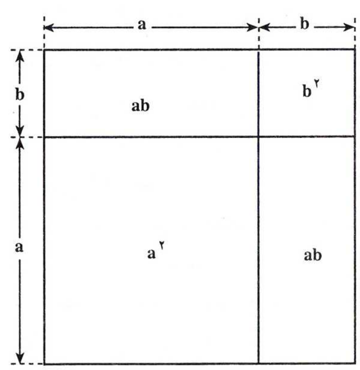
قضیه۱: مقاله دوم اصول اقلیدس: به روش هندسی صحت مطابقت ذیل را ثابت می کند.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

بیان اقلیدس ازین قضیه چنین است : اگرقطعه خط مستقیم به دو حصه دلخواه تقسیم شود، مربع ساخته شده روی تمام قطعه خط برابر است با مجموع مربع های ساخته شده روی دوقسمت، به علاوه دوبرابر مستطیل که ضلع های آن ازین دوقسمت تشکیل می شود.

حل: مربع به ضلع a+b رسم واز نقاط تقسیم دوضلع به دو قسمت a و b خط ها موازی ضلع های مربع رسم می کنیم .

یک مربع به ضلع a ، یک مربع به ضلع b ودومستطیل به ضلع های a و b تشکیل می شود(۷، ص۲۷۴).



شکل ۳۵۱: مربع تقسیم شده

وداریم :

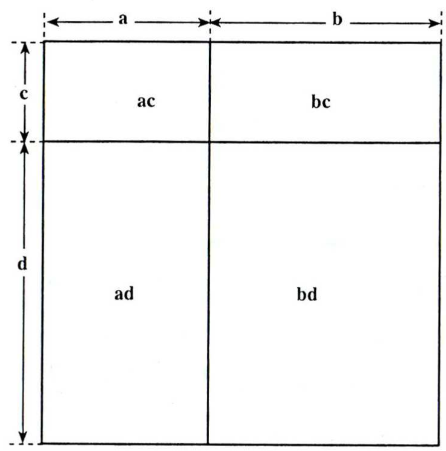
(مساحت مستطیل به ضلع های a و b)۲ + مساحت مربع به ضلع b +مساحت مربع به ضلع a = مساحت مربع به ضلع (a+b)

پس:
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

یا
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال ۱: صحت مطابقت های ذیل توسط اشکال هندسی نشان داده شده است.

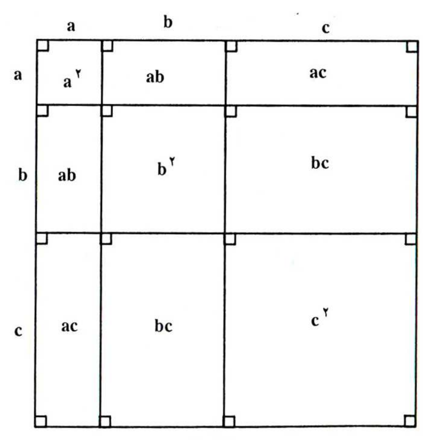
(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd



(ب)

شکل ۳۵۲مستطیل تقسیم شده

$$(a+c+b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$



(الف)

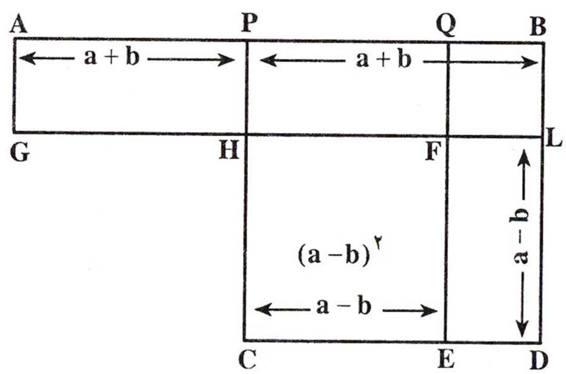
شکل ۳۵۳ : مربع تقسیم شده

قضیه ۲: مقاله دوم اصول اقلیدس: صحت مطابقت های ذیل راثابت می کنید.

1. 4ab+ $(a-b)^2 = (a+b)^2$
2. (a+b)(a-b)= $a^2 - b^2$

بیان اقلیدس این قضیه چنین است : اگرخط مستقیم به طور مساوی، ونیز به طور غیرمساوی تقسیم شود

مستطیل تشکیل شده از قسمت های غیر مساوی به علاوه مربع بروی خط واقع بین نقاط تقسیم کننده برابر است با مربع روی نیمه خط.



شکل ۳۵۴: مربع تقسیم شده

فرض کنید AB قطعه خط مستقیم مفروض باشد.وفرض کنیدکه این قطعه خط در P به طور مساوی در Q به طور نامساوی به دو قسمت تقسیم شود درین صورت قضیه بالا می گوید که :

$$(AQ)(BQ) = (PQ)^2 = (BP)^2$$

اگرقراردهیم: AQ=2a و BQ = 2b ، مطابقت الجبری:

4ab+ $(a-b)^2 = (a+b)^2$ اگر AB=2a و PQ = b باشد مطابقت (a+b)(a-b)= $a^2 - b^2$

بدست می آید.

حل: روی خط مستقیم قطعه خط AQ= 2a وبه تعقیب آن قطعه خط QB = 2b را جدا می کنیم و وسط قطعه خط AB را P می نامییم.

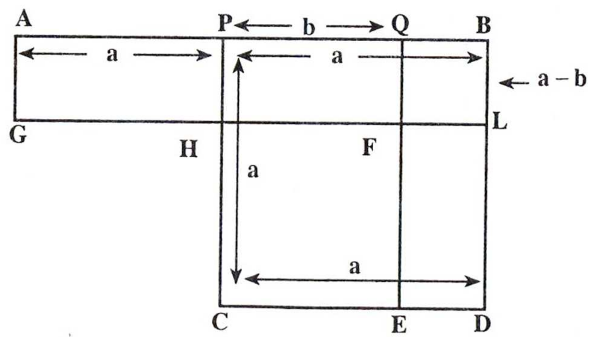
داریم: PB = a+b ، PQ = a-b ، PA=PB=a+b مربع های PCDB و QFLB را روی قطعه خط های PB و QB می سازیم ومستطیل AQFG رابنا می کنیم. داریم:

$AQ.QB + PQ^2 = S_{AGFQ} + S_{HCEF}$

$$S_{AGHP} + S_{PHFQ} + S_{HCEF} = S_{PHLB} + S_{PEDL} + S_{HCEF} = PB^2$$

$$\Rightarrow 2a \cdot 2b + (a+b)^2 = (a+b)^2 \Rightarrow 4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

برای اثبات صحت مطابقت $a^2 - b^2$ =(a+b)(a-b) روی خط Δ قطعه خط AB = 2a را اختیار میکنیم.وسط قطعه خط AB را P می نامیم، سپس قطعه خط **PQ = b**را روی PB جدا می کنیم وروی قطعه خط PB و QB مربع های PBDC و QBLF را می سازیم.



شکل ۳۵۵ : مستطیل تقسیم شده

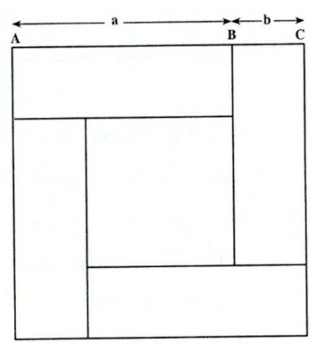
سپس مستطیل AQFG را بنا می کنیم داریم:

$$AQ \cdot QB + PQ^2 = S_{AQFG} + S_{FHCE} = S_{APHG} + S_{PQFH} = S_{PBLH} + S_{FLDE} + S_{HFEC} = S_{PBDC}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) + b^2 = a^2 \Rightarrow (\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = a^2 - b^2$$

روش دیگری برای اثبات صحت مطابقت: $(a-b)^2 = (a+b)^2$ +4ab، AB = a و BC= b را روی یک خط مستقیم رسم می کنیم.وطبق شکل دو مربع به ضلع های a+b و a – b وچهارمستطیل به مساحت های ab می سازیم. همچنان که شکل نشان میدهدداریم:

$$4\mathrm{ab} + (a-b)^2 = (a+b)^2$$



شکل ۳۵۶ : مستطیل تقسیم شده

(۳، صص ۴۴۸–۴۵۰).

۲.۸. حل هندسی معادله های الجبری.

یونانیان درالجبری هندسی خود، دوروش اصلی را برای حل برخی معادله های ساده الجبری به کار می بردند. روش تناسب ها، وروش اضافه کردن مساحت ها(موضوع این روش ،قراردادن متوازی الاضلاع کنار خطی است)، که ریاضی دانان دوره اسلامی از آن به «اضافه کردن» متوازی الاضلاع بر قطعه خط مفروض تعبیر کرده اند، ما نیز همین اصطلاح را به کار خواهیم برد. شواهدی دردست است که هردوی این روش ها از ابداعات فیثا غورثیان بوده است.

۳.۸.روش تناسب ها

روش تناسب ها ترسیم قطعه خط به طول x را با رابطه a:b=c:x ویا رابطه a:x = x:b داده می شود ودرآن a ، b و c قطعه خط های معلوم اند، امکان پذیرمی سازد.

یعنی روش تناسب ها، راه حل های هندسی برای معادله ها $x^2 = ab\ , x = a^2, ax = bc$

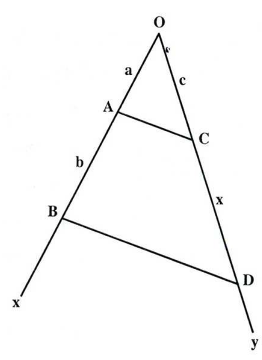
را فراهم سازد.

مثال 1 : قطعه خط ها به طول ها a ، b و c داده شده اند. قطعه خط به طول x را چنان رسم کنید که

ax = bc باشد.

حل : معادله ax = bc را به صورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ می توان نوشت.

زوایه دلخواه xOy را رسم می کنیم روی Ox قطعه خط های



شکل ۳۵۷ : قطعه خط های متناسب

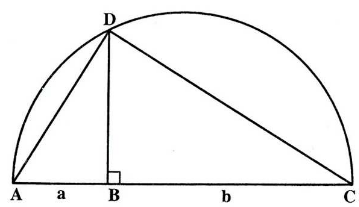
OA = a و AB = b و روی Oy قطعه خط OC = c را جدا می کنیم. ازA بهC وصل می کنیم وازB خط موازی BC رسم می کنیم تا OY رادرنقطه D قطع کند.قطعه خطCD مساوی xاست .

مثال ۲: دوقطعه خط به طولهای a و b داده شده اند.

قطعه خط به طول x رارسم کنید درصورتی $x^2 = ab$ یا$(\frac{a}{x} = \frac{x}{b})$ باشد.

حل :روی خط مستقیم Δ قطعه خط های $AB = a$و$BC = b$ به تعقیب هم رسم می کنیم آنگا نیم دایره ای به قطر AC رسم می کنیم واز نقطه Bعمودی بر AC رسم می کنیم تانیم دایره را

در نقطه D قطع کند.قطعه خط BD جواب مسئله است.



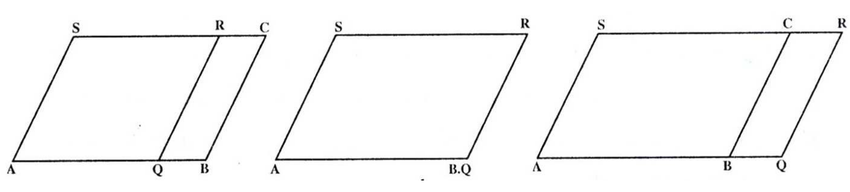
شکل ۳۵۸ : مثلثهای محاط در نیم دایره

زیرااگر از D بهA وCوصل کنیم درمثلث قایم الزاویه ADC داریم :

$$BD^2 = AB.BC \Rightarrow BD^2 = a \cdot b$$
$$x^2 = a \cdot b \Rightarrow BD = x$$

٤.٨. روش اضافه کردن مساحتها

برای روش اضافه کردن مساحت ها ، قطعه خط AB ومتوازی الاضلاع AQRS راکه ضلع AQ ازآن درامتداد خط AB است ،درنظر بگیرید مطابق (شکل) اگر Q درB نباشد ، C را چنان اختیار کنید که QCBR یک متوازی الاضلاع باشد .وقتی Q بین AوB است ، متوازی الاضلاع AQRS خوانده می شود .وقتی Q بر B منطبق شود متوازی الاضلاع AQRS اضافه شده بر قطعه خط ABخوانده می شود .وقتی Q برامتداد AB ازطرف B واقع شود ، متوازی الاضلاع AQRS اضافه شده بر قطعه خط AB ،بازیادتی به مقدارمتوازی الاضلاع QBCR خوانده می شود.



شکل ۳۵۹: چهارضلعی ها

قضیه۳: مقاله اول اصول اقلیدس، مسئله ترسیمی ذیل را حل می کند.

اضافه کردن متوازی الاضلاعی با مساحت مفروض وزاویه های مجاوربه قاعده مفروض برقطعه خط مفروض AB حالت خاص را درنظربگیرید که در آن زاویه های مجاوربا قاعده قائم هستند. به طوریکه متوازی الاضلاع مضاعف مستطیل باشد.

طول AB را با a ، ارتفاع مستطیل مضاعف را با x وابعاد مستطیل را که مساحت برابر با مساحت مستطیل مضاعف دارد، با b و c نشان دهید. درین صورت ax=bc یا $x=\frac{bc}{a}$ است.

قضیه۴ : مقاله ششم اصول اقلیدس، حل مسئله ترسیمی ذیراست.

اضافه کردن یک متوازی الاضلاع AQRS بر قطعه خط مفروض AB که مساحت آن برابر باشدبا شکل مستقیم الخط F ، با نقصانی به اندازه متوازی الاضلاع QBCR متشابه با متوازی الاضلاع مفروض، مساحت F نبایداز مساحت متوازی الاضلاع رسم شده روی نیم خط ABوتشابه با نقصان QBCR تجاوز نماید.

حالت خاص را درنظر بگیریدکه درآن متوازی الاضلاع مفروض یک مربع است، طول AB را با a قاعده متوازی الاضلاع اضافه شده AQ را (که اکنون مستطیل است)با x وضلع مربع F را که مساحت آن با مساحت مستطیل مضاعف برابر است با b نشان دهید.

درین صورت:

$$x(a-x) = \ b^2 = \text{یا}\ x^2 - ax + b^2 = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

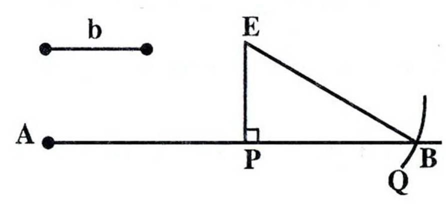
قضیه۵: مقاله ششم اصول اقلیدس ، مسئله ترسیمی ذیر را حل می کند.

اضافه نمودن متوازی الاضلاع مانند AQRS بر قطعه خط مفروض AB با مساحت مساوی مساحت شکل مستقیم الخط F وبا زیادتی با اندازه متوازی الاضلاع QBCR تشابه با متوازی الاضلاع مفروض. حالت خاص را درنظربگیرید. که درآن متوازی الاضلاع مفروض یک مربع باشد. طول AB را با a قاعده AQ از متوازی الاضلاع مضاعف را (که اکنون یک مستطیل است) با x وضلع مربع مانند F با مساحت مساوی مساحت مستطیل مضاعف را با b نشان دهید درین صورت:

$$x(a-x) = \ b^2 = \ \text{یا}\ x^2 - ax - b = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

به آسانی می توان روش های ترسیمی برای حالت های خاص قضیه های ۲۸ و ۲۹ مقاله ششم ابداع کرد که به طور قابل ملاحظه ساده تر از ترسیم های عمومی ترداده شده دراصول اقلیدس می باشد. به طور مثال حالت خاص قضیه ۲۸ مقاله ششم را درنظربگیرید .

درین جا می خواهیم بر قطعه مفروض ، مستطیل اضافه کنیم که به اندازه یک مربع نقصان داشته باشد. از معادله اول(۱) ملاحظه می کنیم که قضیه را به صورت زیر می توان بیان کرد.



شکل ۳۶۰: تقسیم قطعه خط

تقسیم قطعه خط مفروض بدان گونه که مستطیل تشکیل شده ازقطعه های آن برابر با مربع مفروض باشد درحالت که این مربع از مربع نباشد، روی نیم قطعه خط مفروض بزرگتر نباشد. برای روشن تر شدن مسئله ، فرض کنید که AB و b دو قطعه خط باشند که b از نصف AB بزرگترنیست. باید AB رابه وسیله نقطه مانند Q چنان تقسیم کنیم. که $AQ.BQ = b^2$. باشد، برای انجام این

امر PE=b را روی عمود ترسیم شده برAB درنقطه وسط آن، P جدا می کنیم وبه مرکز

E و شعاع PB قوس رسم می کنیم که AB را مثل شکل درنقطه مطلوب Q قطع کند . ثبوت صحت این روش در قضیه 5 مقاله دوم آمده است زیرا بنا بر آن قضیه:

$$AQ.QB = PB^2 - PQ^2 = EQ^2 - PQ^2 = EP^2 = b^2$$

با نشان دادن طول AB با a وطول AQ با x معادله درجه دوم $x^2 - ax + b^2 = 0$ را حل کرده ایم. جذرها با AQو QB نمایش داده می شوند.

(زیرا اگرr و s جذرهای معادله درجه دوم $x^2 - ax + b^2 = 0$ باشده می دانیم که r+s=a و $r.s=b^2$ است اما AQ وQB اند که مجموعه AB یا a وحاصل ضرب شان b^2 است)

جذرهای معادله درجه دوم $x^2 + ax + b^2 = 0$ توسط طول های AQ و QB با علامت منفی نشان داده می شوند(۱، صص ۱۳۴-۱۳۷).

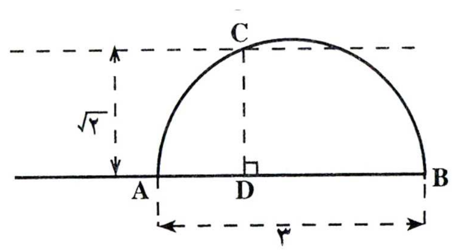
برای حالت خاص قضیه ۲۹ مقاله ششم ، می خواهیم بر قطعه خط مفروض ، مستطیل را اضافه کنیم که به اندازه یک مربع زیادتی دارد. ازمعادله اول(۲) می بینیم که مسئله را می توان به این صورت دوباره بیان کرد:

امتداد دادن قطعه خط مفروض بدان گونه که مستطیل شده تشکیل شده در قطعه خط امتداد داده شده وقسمت امتداد داده شده برابر با مربع مفروض باشد.

مثال۱: معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

راه حل اول. شکل روش حل را نشان می دهد.

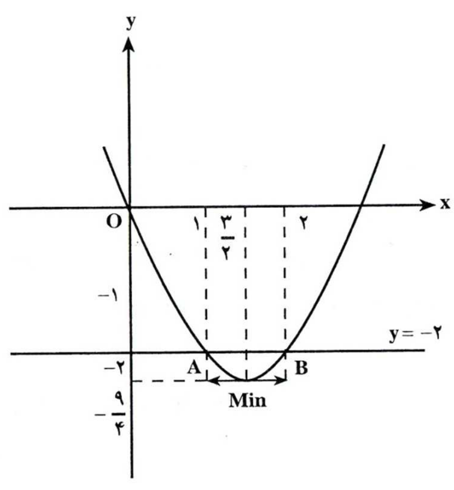
جذرهای معادله AD = 1 و DB = 2 می باشند.



شکل ۳۶۱: تقسیم قطعه خط توسط دایره

راه حل دوم. معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به صورت $x^2 - 3x = -2$ می نویسیم، این معادله معادله طول های نقطه های تلاقی منحنی به معادله $y = x^2 - 3x$ وخط y = -2 است.

بنا براین، این منحنی وخط را دریک سیستم کمیات وضعیه به دقت رسم می کنیم، وطول نقطه های تلاقی آنها را بدست می آوریم.



شکل ۳۶۲ : پارابول

$$y = x^2 - 3x \Longrightarrow y' = 2x - 3 \ , \qquad y' = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} \Longrightarrow y = -\frac{4}{9}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
Y’		-	+	-	
y	$+\infty$	0	$\frac{-9}{4}$	0	$+\infty$

x	Y
$y' = 0\left[\frac{3}{2}\right.$	$\frac{-9}{4}$
0 , 3	0
$\pm\infty$	$+\infty$

به طوریکه درشکل دیده می شود گراف تابع $y = x^2 - 3x$و خط $y = -2$ دردو نقطه A و B به طول های ۱ و ۲ متقاطع اند. پس جذرهای معادله عبارت اند از X=1 و X=2 .

یادداشت: برای تعیین جذرهای معادله F(x) = 0 به کمک رسم گراف دوضلعی به معادله های $y_1 = F_1(x)$ و $y_2 = F_2(x)$ راچنان در نظرمی گیریم که معادله های طول های نقطه های تلاقی آنها معادله $F(x) = 0$ باشد. آنگاه گراف های دو تابع $y_1 = F_1(x)$ و $y_2 = F_2(x)$ را دریک سیستم کمیات وضعیه با دقت رسم کنیم وطولهای نقطه های تلاقی آنها را که جذرهای معادله F(x)=0 می باشند بدست می آوریم.

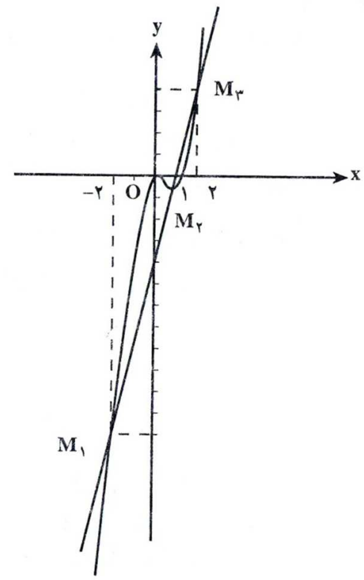
بدیهی است که به تعداد نقطه های تلاقی دو منحنی معادله داده شده دارای جواب است.

نکته: در صورت که جذرهای معادله عدد صحیح نباشد، مقدارتقریبی جذرها را به کمک رسم منحنی می توان بدست آورد.

مثال: معادله $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ را به کمک رسم گراف حل کنید.

حل: می توان نوشت $x^3 - x^2 = +4x - 4$ که این معادله ، معادله طول های نقطه های تلاقی گراف تابع $y = x^3 - x^2$ وخط معادله $y = 4x - 4$ است.

بنا برین گراف تابع وخط را در یک سیستم کمیات وضعیه با دقت رسم می کنیم و طولهای نقطه های تلاقی آنها را که جذرهای معادله داده شده است بدست میاوریم.



شکل ۳۶۳ : گراف معادله

جدول تغییرات تابع $y = x^3 - x^2$ به صورت زیر است.

X	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	١	$+\infty$
		+	−	+	
	$-\infty$	0	$\frac{-4}{27}$	0	$+\infty$

برای رسم خط $y = 2x + 2$ دو نقطه آن را مشخص می سازیم :

$$x = 1 \qquad x = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -4$$

به طوریکه دیده می شود طول های نقطه های تلاقی یعنی جذرهای معادله داده شده عبارت است از: x=1 ، x=2 و x=-2 می باشند.

۵.۸. روش خیام برای حل هندسی معادله های درجه سوم

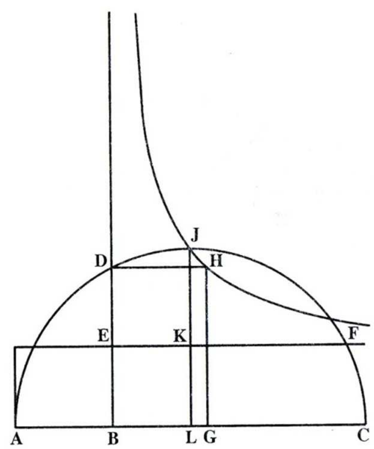
الف: با قطعه خط های مفروض به طولهای a ، b و n قطعه خط به طول $y = \frac{a^3}{bn}$ سازید.

ب: یک جذرمثبت معادله $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ را که درآن a ، b ، c و x طول قطعه خط ها درنظرگرفته می شوند.(a، b و c طول قطعه خطهای معلوم و x طول قطعه خط مجهول یا خواسته شده است تعیین کنید.

این معادله را خیام چنین بیان کرده است«یک مکعب، چند ضلع وچند عدد، برابر با چند مربع هستند»

الف: قطعه خطهای به طول a^3 و bn را رسم می کنیم واز آن جا قطعه خط به طول m را با استفاده از تناسب$\frac{1}{m} = \frac{bn}{a^3}$ رسم می نمائیم.

ب:قطعه خط $AB = \frac{a^3}{b^2}$ را با استفاده از قسمت (الف)



شکل ۳۶۴: هاپیربول

BC=C را رسم می کنیم، نیم دایره به قطر AC رسم می کنیم.

نقطه تلاقی عمود برAC درنقطه B با نیم دایره ای را D می نامیم. روی BD قطعه خط

BE = b را جدا می کنیم. و E و EF را موازی AC رسم می کنیم، نقطه G را بر BC چنان پیدا می کنیم که BG · ED = BE · AB ومستطیل DBGH را کامل می سازیم.

بر H یک هایپربول متساوی الساقین رسم می کنیم به قسم که EF و ED مجانب های آن باشندوفرض کنید که این هایپربول ، نیم دایره ای را در J قطع کند وفرض کنید که خط موازی با DE عبورکنندبر J ، EF را در K و BC را در L قطع کند متوالیاً داریم:

EK.KJ = BK.ED = BE.AB ……….(1)

BL.LJ = BE.AL……….(2)

$(LJ)^2$ = AL.LC ………..(3)

$$\frac{BE^2}{BL^2} = \frac{LJ^2}{AL^2} \dots \dots .(4)$$

$$BE^2 . AL = BL^2 . LC \dots \dots \dots . . (5)$$

$$B^2\left(BL + \frac{a^3}{b^2}\right) = BL^2(C - BL) \dots \dots .(6)$$

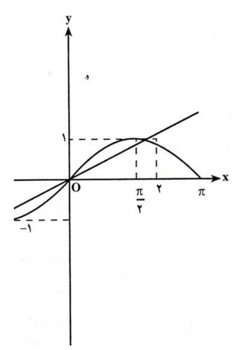
$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = C(BL)^2 \dots \dots \dots \dots (7)$$

رابطه(۷) نشان می دهد BL یک جذرمعادله درجه سوم داده شده است.

مثال: تعداد جواب های معادله $\frac{x}{2} - sinx = 0$ را درانتروال $[-\pi, \pi]$ به کمک رسم گراف تعیین کنید.

حل: می توان نوشت که $\frac{x}{2} - sinx = 0$ این معادله معادله تقاطع منحنی $y = sinx$ و $y = \frac{x}{2}$ است، پس این دوگراف را دریک سیستم محورهای کمیات وضعیه رسم می کنیم وتعداد جواب های آن را در فاصله $[-\pi, \pi]$ مشخص می سازیم. جدول تغییرات تابع $y = sinx$ به صورت زیر است.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Y’	–	۰	+	۰	–
y	0	–۱	0	۱	0



شکل ۳۶۵ : گراف تابع

طوریکه دیده می شود خط $y = \frac{x}{2}$ گراف تابع $y = sinx$ را درفاصله $[-\pi, \pi]$ در سه نقطه قطع می کند که طول یک نقطه x=0 طول یک نقطه منفی وطول نقطه دیگر مثبت است.

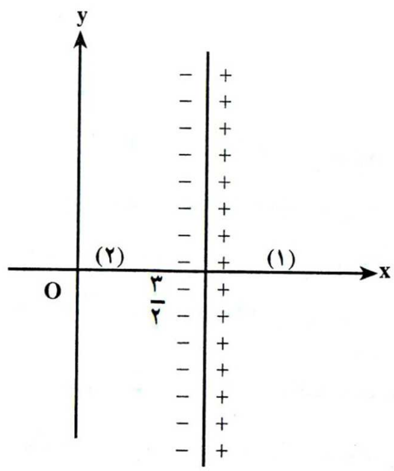
پس معادله $\frac{x}{2} = -sinx$ درفاصله $[-\pi, \pi]$ دارای سه جذراست، یک جذرمنفی، یک جذر(۰)، ویک جذر مثبت می باشد.[۱۱]

۶.۸. حل هندسی غیرمساوات الجبری

مثال۱: غیرمساوات $2x - 3 > 0$ را به کمک رسم گراف حل کنید.

حل: گراف معادله $2x - 3 = 0$ را رسم می کنیم، این گراف خط مستقیم موازی محورعرض هاست که مستوی مختصات را به دوبخش تقسیم می کند. علامت هربخش را مشخص می سازیم.

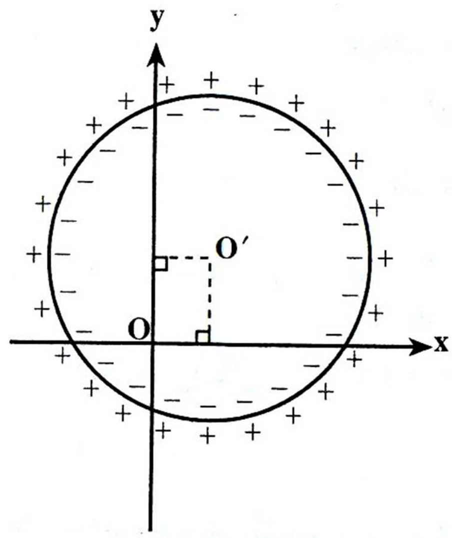
جواب ناحیه (۱) است.



شکل ۳۶۶ : گراف غیرمساوات

مثال۲: نامعادله $x^2 + y^2 - 2x - 4y < 0$ را به کمک رسم گراف حل کنید.

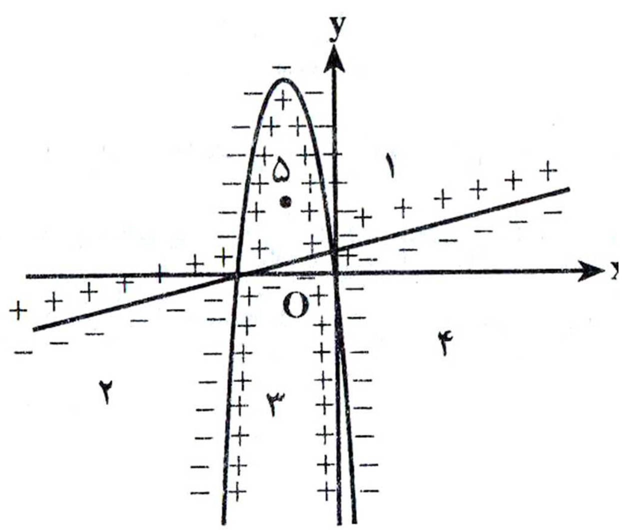
حل: گراف معادله $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ را که یک دایره به مرکز O'(1,2) وبه شعاع R=3 است رسم میکنیم. این دایره مستوی مختصات را به سه بخش بیرون درون وروی دایره افراز می کند. علامت هر ناحیه را مشخص می کنیم، آنگاه ناحیه جواب نامعادله را که (که درین مسئله درون دایره است) تعیین می کنیم.



شکل ۳۶۷ : گراف غیرمساوات

مثال۳: جواب سیستم نا معادله $\begin{cases} y - x^2 - 2x > 0 \\ 2y - x - 2 < 0 \end{cases}$ را به کمک رسم گراف تعیین کنید.

حل: گراف های دومعادله $y - x^2 - 2x = 0$ و $2y - x - 2 = 0$ را که اولی پارا بول ودومی خط مستقیم است. رسم می کنیم، پس از تعیین علامت ناحیه های بدست آمده جواب سیستم نامعادله است که ناحیه ۳ می باشد، مشخص می شود.



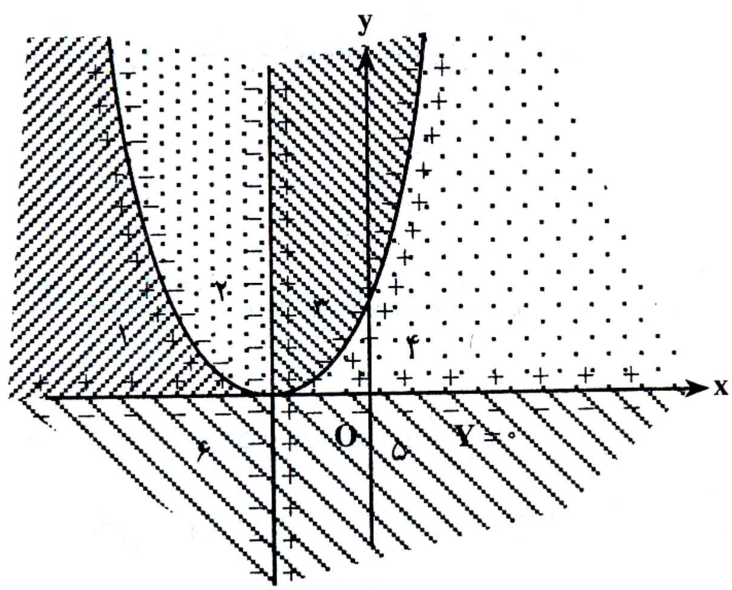
شکل ۳۶۸ : گراف پارابول

مثال۴: اگر(x,y) مختصات نقطه M درسیستم مختصات XOY باشد برحسب جای نقطه M دروجود وعلامت جذرهای معادله درجه دوم $z^2 - 2(x+1)z + y = 0$ بحث کنید.

حل: برای بحث دروجود وعلامت جذرهای یک معادله درجه دوم باید علامت مبین معادله Δ وعلامت حاصل ضرب جذرهای معادله p وعلامت مجموع جذرهای معادله S را تعیین می کنیم. بنا برین Δ ، P و S معادله را بدست آورده ، گراف آنها را رسم و آنها را بر حسب جای نقطه M(X,Y) تعیین علامت می کنیم داریم:

$$\Delta' = (x+1)^2 - y\ , \qquad \Delta' = 0 \Longrightarrow y = (x+1)^2\ ;\ \ p = \frac{c}{a} = y\ , \qquad s = -\frac{b}{a} = 2(x+1)$$

گراف های $y = (x+1)^2$ و $y = 0$ و $2(x+1) = 0$ یا $x = -1$ را دریک سیستم مختصات رسم می کنیم وناحیه های ایجاد شده به وسیله این گراف ها را مشخص می سازیم. وعلامت هریک را درهرکدام از این ناحیه ها ، درجدول زیر مشخص می سازیم وبا استفاده از آن دروجود وعلامت جذرهای معادله داده شده بحث می کنیم(۱۱، صص۹۱-۹۷)



شکل ۳۶۹: گراف معادله پارابول

ناحیه ها	1	2	3	4	5	6
$\Delta' = (x+1)^2 - y$	+	-	-	+	+	+
$p = y$	+	+	+	+	-	-
$s = 2(x+1)$	-	-	+	+	+	-
R	$z_1 < z_2 < 0$			$0 < z_1 < z_2$	$z_1 < 0 < z_2$	$z_1 < 0 < z_2$
		///	///		$\lvert z_1\rvert < \lvert z_2\rvert$	$\lvert z_1\rvert > \lvert z_2\rvert$

۷.۸. استفاده از رسم شکلهای هندسی برای اثبات قضیه ها

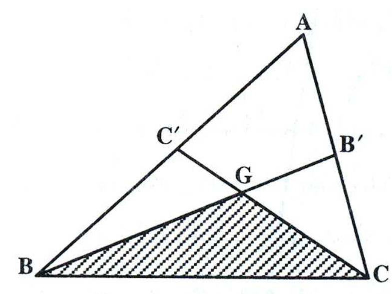
مثال: مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه ضلع $BC=a$ واندازه های دو میانه $BB'=mb$ و $CC'=mc$ رسم کنید.

حل: فرض می کنیم مسئله حل شده ومثلث ABC جواب مسئله باشد.

میانه های BB' و CC' را رسم می کنیم ونقطه تلاقی آنها را G می نامیم، بنا به خاصیت میانه ها داریم:

مقدارمعلوم = $GB = \frac{2}{3}mb$ و مقدار معلوم $GC = \frac{2}{3}mc$ پس مثلث GBC با معلوم بودن اندازه سه ضلع آن قابل رسم است.

پس برای حل مسئله به ترتیب زیر عمل می کنیم



شکل ۳۷۰ : میانه مثلث

مثلث GBC را با معلوم بودن $BC=a$ و $GB = \frac{2}{3}mb$و$GC = \frac{2}{3}mc$ رسم می کنیم آنگاه GB را از طرف G به اندازه نصف خود ادامه می دهیم. تا نقطه B' وسط نقطه AC بدست آید، از C به B' وصل می کنیم وبه اندازه خود امتداد می دهیم تا راس A از مثلث ABC مشخص شود. از A به Bوصل می کنیم، مثلث ABC جواب مسئله است. چون تنها یک مثلث با معلوم بود ن اندازه $BC=a$ و $GB = \frac{2}{3}mb$

و$GC = \frac{2}{3}mc$ می توان رسم کرد. پس مثلث ABC نیز منحصر به آن است بنا براین قضیه زیر را می توان بیان کرد:

قضیه: هرگاه یک ضلع ودو میانه از یک مثلث با یک ضلع ودو میانه ازمثلث دیگرهم مانند به هم مانندمساوی باشند، آن دو مثلث معادل اند.

نکته: اگریک ضلع ودو میانه که یکی از میانه ها هم مانند همان ضلع باشد، از یک مثلث با همین اجزا از مثلث دیگر هم مانند به هم مانند مساوی باشنددو مثلث معادل اند.

۸.۸. استفاده از رسم شکلهای هندسی برای پیدا کردن خاصیت های جدید

مثال۱: مثلث ABC داده شده است .ناصف الزایه های برونی این مثلث رارسم کنید. وثابت کنید که پای این ناصف ها سه نقطه واقع بر یک خط مستقیم است ؟

حل: پای ناصف های زاویه برونی مثلث ABC را$\acute{A}$ ، $\acute{B}$ و $\acute{C}$ می نامیم این سه نقطه روی یک خط مستقیم قرار دارند.زیرا بنا به خصوصیت ناصف های زاویه مثلث داریم.

$$\frac{\overline{\acute{A}B}}{\overline{\overline{\acute{A}C}}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \ldots (1)$$

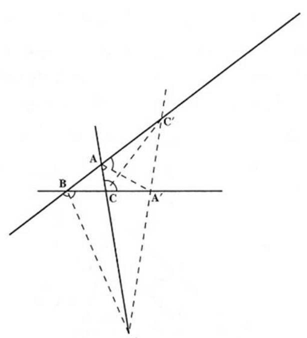
$$\frac{\overline{\acute{B}C}}{\overline{\overline{\acute{B}A}}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \ldots (2)$$

$$\frac{\overline{\acute{C}A}}{\overline{\overline{\acute{C}A}}} = \frac{\mathrm{A_1C}}{\mathrm{BC}} \ldots (3)$$

ازضرب کردن عناصر متناظررابطه های (۱) و(۲) و(۳) داریم .

$$\frac{\overline{\acute{A}B}}{\overline{\overline{\acute{A}C}}} . \frac{\overline{\acute{B}C}}{\mathrm{\acute{B}A}} . \frac{\overline{\acute{C}A}}{\mathrm{\acute{C}A}} = 1$$

بنابراین بنابرعکس قضیه منولاوس سه نقطه $\acute{A}$، $\acute{B}$ و $\acute{C}$ روی یک خط مستقیم قرار دارند .دوباره فرض کنید AB و b دوقطه

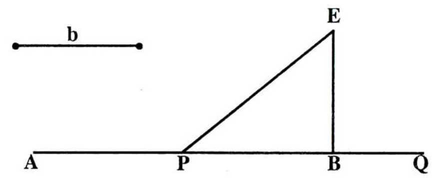


شکل ۳۷۱ : زاویه های بیرونی مثلث

خط باشند باید AB را تانقطه Q چنان امتداددهیم که $AQ.QB = b^2$ برای این منظور $BE=b$ راروی عمود رسم شده برAB درB جدامی کنیم .وبه مرکز P ،نقطه میانی AB ، وبه شعاع PE قوس رسم می کنیم که امتداد AB رادرنقطه مطلوب Q قطع کند مثل شکل این دفعه اثبات به وسیله قضیه (۶) مقاله دوم عرض شده زیرا بنا برآن قضیه:

$$AQ.QB = PQ^2 - PB^2 = PE^2 - PB^2 = BE^2 = b^2$$

مانند قبل ملاحظه می کنیم که AQ وBQکه اولی را مثبت ودومی رامنفی می گیریم جذرهای معاله درجه دوم $x^2 - ax - b^2 = 0$ هستند که درآن aطول قطعه خط AB است جذرهای معادله $x^2 + ax - b^2 = 0$ همان جذرهای معاله $x^2 - ax - b^2 = 0$ می باشد بجز اینکه علامت آن عوض شده است.

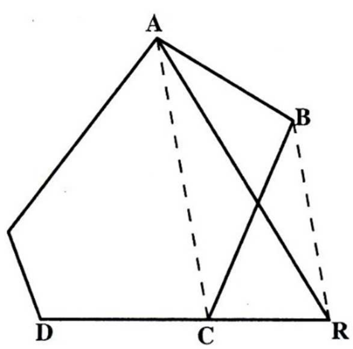


شکل ۳۷۲ : دریافت جذرمعادله به روی محور

(۳۰، ص ۲۳۷).

۹.۸. تبدیل مسا حتها

فیثاغورسیان به تبدیل مساحت یک شکل مستقیم الخط به شکل مستقیم الخط دیگر علا قه مند بودند .حل مسله اساسی ساختن مربعی هم مساحت با چند ضلعی مفروض توسط آنها را می توان درقضیه های ۴۲، ۴۴، ۴۵ ازمقاله اول وقضیه ۱۴ از مقاله دوم اصول اقلیدس پیدا کرد. راه حل ساده ای که احتمالا" بر فیثا غورسیان نیز معلوم بود به قرارزیر است.



چند ضلعی دلخوا ABCD رادرنظر بگیرید BR

راموازی AC رسم کنید تا DC رادرR قطع کند

شکل ۳۷۳ : ساختن مربع هم مساحت به چندضلعی

آنگاه چون مثلث های ABCو ARC رادارای قاعده مشترک AC وارتفاعات برابر وارد براین قاعده مشترک اند،آنهامعادل یکدیگر می باشند .نتیجه می شود که چند ضلعی های ABCD وARDمساحتهای مساوی دارند.اما چند ضلعی به دست امده یک ضلع کمتر ازچند ضلعی مفروض دارد باتکرار این عمل سرانجام به مثلثی دست می یابیم که دارای مساحت چند ضلعی مفروض است .حال اگر b ضلعی از این مثلث بوده وh ارتفاع وارد بر ضلع b باشد ،ضلع یک مربع معادل آن $\sqrt{\frac{bh}{2}}$ ،یعنی باواسطه هندسی بین b

و$\frac{h}{2}$ داده می شود. چون این واسطه هندسی با خط کش غیر مدرج وپر کار به آسانی قابل ساختن است تمام مسئله را می توان به کمک این وسایل حل کرد(۴۳، ص ۹۰).

خلاصه فصل هشتم

در این فصل ما موضوعات مانند اثبات مطابقت های الجبری، حل هندسی مسئله های الجبری، حل هندسی معادله های الجبری (روش تناسب، روش اضافه کردن مساحت)، روش خیام برای حل هندسی معادله های درجه سوم، حل هندسی غیر مساوات الجبری، استفاده از رسم شکل های هندسی برای اثبات قضیه ها، استفاده از رسم شکل های هندسی برای پیدا کردن خاصیت های جدید، و تبدیل های مساحتها را مطالعه نموده و در مورد آنها معلومات بدست آوردیم.

مسایل فصل هشتم

۱- قطعه خط به طول a داده شده است قطعه خط به طول $x = a^2$ را رسم کنید

۲- معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را به کمک رسم گراف حل کنید

۳- جواب سیستم دومعادله دومجهوله ذیل را به کمک رسم گراف بدست آورید

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

۴- اقطاریک پنج ضلعی منظم یک دیگر راچطوربه نسبت طلائی تقسیم می کند؟ودررسم نیز نشان دهید

۵- گراف معادله $r = \frac{2}{1-cos\theta}$ را ترسیم کنید.

کتابنامه

۱. احمد شرف الدین. (۱۳۷۲). **هندسه تحلیلی چند محوری**. تهران: مدرسه.

۲. ایمل، عبدالحق. (۱۳۸۸). **عمومی ریاضی او تحلیلی هندسه**. کابل: سعید

۳. تابش، یحی. (۱۳۸۰). **آموزش هنر حل مسئله ریاضیات**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۴. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه** ،جلد ۱۴. تهران: مدرسه.

۵. هانگرفورد، تی. دبلیو. (۱۳۸۴). **مقدمه ای بر جبر مجرد**. ترجمه رضا انشایی، سید اعظم. اصفهان: دانشگاه اصفهان.

6. Yefimov. N. (1969). **Analytic Geometry**. Moscow: Mir.

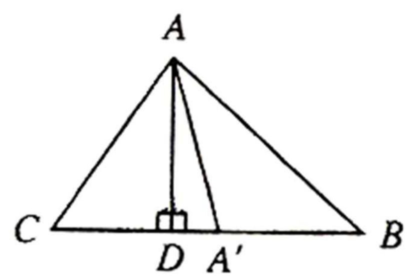
فصل نهم

ترسیم های هندسی پیشرفته اقلیدس

جهت بهتر روشن شدن این موضوع پیش از آن که ترسیمات و اثبات های بدون امکان، ترسیم تضعیف حجم مکعب، ترسیم تثلیث هر زاویه، ترسیم تربیع هر دایره را بیان نمائیم لازم میدانیم تا مطالب را پیشکش علاقه مندان نمائیم

۱.۹. استفاده از قسمت های تحلیلی یک مسئله

گرچه قبلاً مسایل گوناگون ترسیمی ومطالب را درفصل های پیش مطالعه نمودید. اما هدف ما ازاین کاریافتن مهارت بیشتراستفاده ازترسیمات نیست، بلکه به عوض استفاده ازقسمت های تحلیلی یک مسئله ترسیمی وکاربرد تاکید داریم. به خاطر داشته باشید که ترسیمات وسیله جالب درگسترش درک مفاهم هندسه اقلیدس پیشرفته است بطورمثال: مثلث را با معلوم بودن طول یک ضلع وطول های ارتفاع ومیانه ای نظیرآن ضلع را از آن رسم کنید. تصویر تحلیلی این مسئله را درشکل زیر(a) نشان داده ایم.

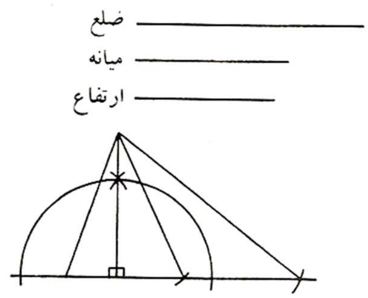


(a)

شکل ۳۷۴ : مثلث با معلوم بودن ضلع میانه و ارتفاع

از اطلاعات داده شده ، مثلث قائم AA′D را می توان از آنجا که دو ضلع آن معلوم است، بلافاصله رسمکرد سپس B و C را می توان بر $\overleftrightarrow{DA'}$ مکان داد.

چه هریک از آنها به فاصله نصف اندازه ضلع داده شده از نقطه مشخص شده ای A′ است. رسم واقعی را درشکل (b) نشان داده شده است .



(b)

شکل ۳۷۵ : مثلث با معلوم بودن ضلع میانه و ارتفاع

مثلث AA′D ودرنتیجه مثلث مطلوب را تازمانی که قطعه خط میانه حد اقل به درازی قطعه خط ارتفاع است، می توان همیشه رسم کرد. وتنها یک جواب ممکن موجود است. مثلث AA′D مثال از مثلث معین در ترسیم است، مثلث معمولاً قائم الزاویه، معین مثلث است که می تواند بلافاصله از اطلاعت داده شده رسم کرد.

مثال دوم: به توضیح مفهوم با اهمیت مشخص کردن یکی از رؤس مثلث مطلوب به عنوان اشتراک دومجموعه نقاط برقرار کننده شرایط داده شده می پردازد.

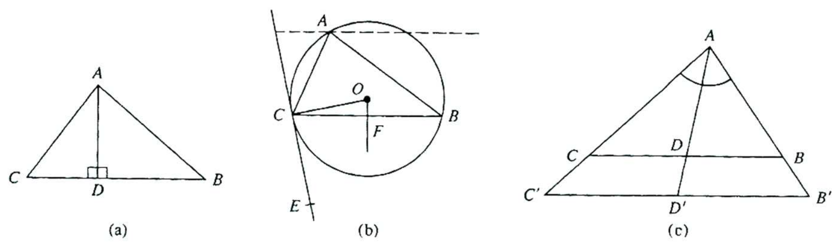
به بیان مروج، این نقطه به عنوان تقاطع دومکان هندسی تعریف می شود. درین مسئله مثلث را با معلوم بودن یک زاویه، طول ضلع مقابل آن زاویه، وطول ارتفاع نظیرآن ضلع رسم می کنیم تصویر تحلیلی را درشکل ذیل نشان داده ایم. فرض کنیدکه $B\hat{A}C$، AD و BC مفروض باشند.

از آن جا که B و C را می توان با اطلاعات داده شده مشخص کرد، تنها مطلب باقی مانده مشخص کردن مکان A منسوب با B وC است. سایر شرایط مسئله به طور جداگانه A را مشخص نمی کند، اما آنها را می توان با هم به کار برد. یکی از شرایط تشخیص مکان A این است که این نقطه باید برخط موازی BC وبه فاصله AD از ضلع مقابلش باشد. A باید بر دایره محیطی مثلث نیز واقع شود. واین دایره را می توان با داشتن زاویه وضلع مقابلش از مثلث یافت. (ترسیم مثلث معین). را درشکل ذیل b نشان داده ایم.

بدین ترتیب دو شرط تعیین کننده ای A ومثلث مطلوب را می توان رسم کرد. مسئله مثلث معین مثال فوق از لحاظ خودش نیز قابل توجه است. درشکل (b) زاویه FCE زاویه مفروض است. بنا برین مرکز دایره مورد بحث را می توان در تقاطع عمود نصف BC وعمود در CE در C مشخص کرد.

بحث مسئله که درشکل ذیل نمایش داده شده، عبارت از تعیین تعداد جواب ها است، می توان دوخط موازی BC رسم کرد، وهریک ازاین دوخط می تواند دایره را دوبار قطع کند.

اما هرباردریکی ازحالات زاویه حاصل مکمل زاویه مفروض می شود، وبنابراین حالت متذکره بایدحذف شود واین بسته به این که خط موازی متذکره دایره را چند بارقطع کند امکان دو، یک یا هیج جواب را باقی میگذارد

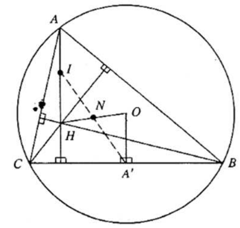


شکل ۳۷۶ : مثلثها و مماس خارجی دایره

سه عضوی ازاندازه یک زاویه مثلث ، طول ضلع مقابل آن وشعاع دایره محیطی آن مثال از یک فرضیه را تشکیل میدهد.

تعریف: فرضیه مجموعه از nعضواست که هر n-1عضوآن عضوباقی مانده را مشخص میکند.

شکل(b) تنها یک قسمت ازاثبات این مطلب را که سه عضو مورد بحث تشکیل یک فرضیه نشان میدهد زیرا باید نشان دهد که هردوعضو، عضوی سوم رامعین میکند اغلب ، میتوان ازمفهوم مثلثها، متشابه درترسیمات استفاده کرده این موضوع در مسئله ترسیم ، مثلثی با معلوم اندازه های دوزاویه واندازه ناصف الزاویه سوم آن ،به توضیح آمده است . شکل ذیل تصویر تحلیلی این مسئله است اندازه های سه زاویه مثلث یک فرضیه تشکیل می دهد.دراین صورت میتوان با استفاده ازاین اطلاعات ومثلث $AB'C'$ مشابه با مثلث مطلوب رسم کرد.

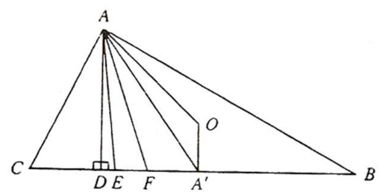


شکل ۳۷۷ : مثلث محاط در دایره

به این معنی که مثلث مربوط درنوع مشخص شده معروف است دراین صورت خانواده ای ازمثلث های تعین شده ومثلث مطلوب را میتوان به عنوان عضوخاصی ازاین خانواده پیداکرد مثلث مطلوب طول ناصف مفروض درامتدادAD برای مشخص کردن D وبعد رسم به موازات CD ازD به دست میآید تا زمانی که

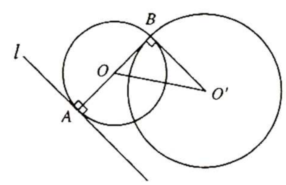
مجموعه اندازه های دوزاویه مفروض کمتراز π است همواره یک صورت موجود است . ممکن است ترسیم ، شامل مفاهیم ازهندسه اقلیدیسی باشد. با معلوم بودن مرکزدایره محیطی ، مرکز دایره نه نقطه وسط یک ضلع است

مثال دوم: ازترسیم که مفهوم پیشرفته تری را به کاربرمی برد رسم مثلث با معلوم بودن طولهای ارتفاع میانه وهم میانه سوم ازیک رأس است تصویر تحلیلی این مسئله را در شکل ذیل نشان داده ایم در این شکل $\overline{AD}$ ارتفاع $\overline{AE}$ هم میانه ،و $\overline{AA'}$ میانه است.



شکل ۳۷۸ : مثلث با ارتفاع ناصف الزاویه و میانه

آخرین مثال رسم دایره با شعاع معلومی که برخط معلومی مماس وبر دایره معلومی عمود است می باشد.



شکل ۳۷۹ : دایره های متقاطع

دو دایره متعامد، یا عمود بر هم اند، اگر به زوایای قائمه تلاقی کند تصویر تحلیلی مسئله را درشکل فوق رسم نموده ایم درین شکل دایره مطلوب دایره به مرکز(O) مماس مفروض L ودایره مفروض دایره مفروض با مرکز(O’) است. درین صورت تنها شش مورد تعین موقعیت مرکز دایره مطلوب است. یکی از شرایط مسئله این شرط است که مرکز مورد بحث به خطی موازی L به فاصله قائم مفروض OA از L است. شرط دوم این است که مرکز متذکره به فاصله معلوم $OO' = \sqrt{(OB)^2 + (BO')^2}$.

از(O’) قراردارد بنا براین موقعیت اش را می توان تثبیت کرد به علت این که تشخیص مکان (O) وابسته به تقاطع دایره با دو خط موازی است ، برای بحث کامل مسئله باید به بررسی چهارصفر ممکن بپردازیم (۲، صص ۲۴۲-۲۴۵).

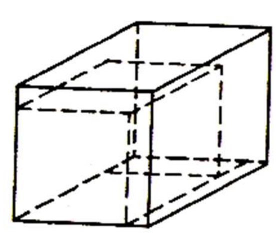
۲.۹. ترسیمات واثبات های بدون امکان

یونانیان نمی توانستندبعضی از مسایل رابا استفاده از از وسائل که افلاطون مشخص کرده بود، حل شوند. اما آنان به جای وسایل جدیدی که آن ترسیمات را ممکن می ساخت اختراع کردند. گرچه سرانجام هرچند نه پیش ازقرن نزده هم، پیشرفت های جبری سیستم اعداد حقیقی، تشخیص ترسیمات را، که با خط کش نا مدرج وپرکار نا ممکن اند ، میسر ساختند.

درتاریخ ریاضیات سه مسئله ترسیمات چنان مشهور شدندکه «سه مسئله معروف یونانی» نام گرفت. این سه مسئله ، مسئله ای تضعیف مکعب(دوبرابر کردن) تثلیث زاویه (سه قسمت مساوی کردن) وتربیع دایره اند. درین مورد جبراعداد ترسیم نا پذیراطلاعات لازم را برای اثبات این که هریک ازاین ترسیمات نا ممکن است بدست داده است. درمورد پیدایش مسئله تضعیف مکعب داستان های افسانه آمیزگوناگون نقل می شود. یکی از آنها براین است که پادشاه می خواست اندازه مقبره مکعب شکل فرزندش رادو برابر کند. دیگری چنین می گوید که به دلیان(Delians) توسط نجیب گوشانـ (منجم) فرمان داده شده بود که برای رهاندن شهرازطاعون، اندازه محراب را که برای آپولو نصب شده بود دوبرابر کند درین مسائیل حجم مکعب اصلی(۱) واحد مکعب وحجم مضاعف(۲) واحد است، واین بدان معنی است که x باید جواب حقیقی معادله $x^3 = 2$ باشد. اما یک عدد ترسیم پذیرباید عضو از میدان ترسیمی ای از مجموعه اعداد گویا باشند، واین فرض که جواب $x^3 = 2$ بریکی از این میادین توسیعی قرار دارد به تناقص می انجامد. چه می توان ثابت کردهرچند تفصیلات جبری را در این مورد انداخته ایم ، که هرگاه عدد به صورت $b + c\sqrt{a}$ جواب معادله مکعبی باشد درین صورت $b - c\sqrt{a}$ نیز هست.

قبلاً نشان داده شده کا اعضای میادین توسیعی را می توان همواره به صورت $b + c\sqrt{a}$ نوشت. اما فرض دو جزء حقیقی $x^3 = 2$ این واقعیت شناخته شده را که دو جذرسوم 2 ناحقیقی اند ، نقض می کند، بنا براین، x عدد ترسیم پذیرنیست.

این موضع اثبات غیر ممکن بودن حل اولین مسئله از مسائل یونانی فوق الذکر را تکمیل می کند. شکل مکعب قرار ذیل است.

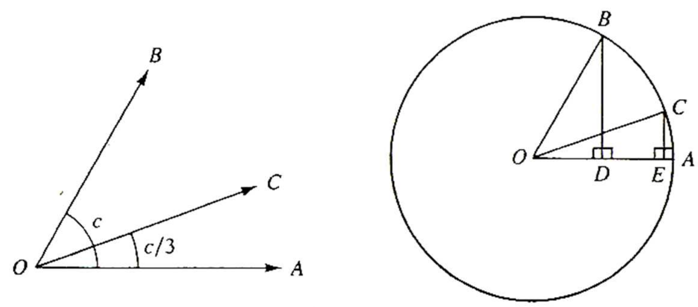


شکل ۳۸۰ : مکعب

۳.۹. ترسیم تضعیف حجم مکعب نمی تواند با خط کش نا مدرج وپرکار تنها انجام شود.

کار مسئله دوم، یعنی مسئله به سه قسمت مساوی تقسیم کردن یک زاویه درحالت کلی، را می توان به طریقی مشابه با اولی به اتمام رساند . مسئله را به شکل ذیل به تصویر کشیده ایم، اگر زاویه AOB اندازه ای بابر C درجه داشته باشد، درین صورت مسئله مان ترسیم زاویه AOC با اندازه برابر$\frac{C}{3}$ درجه است به طور معمولی ، با این مسئله یا نشان دادن این که مثال جداگانه چون تثلیث زاویه 60° درجه نا ممکن است.

ودرنتیجه حالت کلی نا ممکن است . تلاقی میکند.درشکل ذیل (b) فرض میکنیم که BOA> و COA> باشد اگردایره مان دایره واحد باشد دراین صورت OD $=\cos < BOA$ و OE $= \cos < COA$است دراین صورت مشابه ترسیم زاویه کوچکترمعادل مسئله یافتن OE با معلوم بودن OD است مطابقت مثلثاتی رابطه کوسااین های یک زاویه وزاویه دوم با یک سوم اندازه زوایه اول عبارت است



شکل ۳۸۱: دایره و زاویه

$$\cos\theta = 4\cos^3(\frac{\theta}{3}) - 3\cos.(\frac{\theta}{3})$$

اگر $x = \cos(\frac{\theta}{3})$ و $\Theta = \cos\theta$ برابر $\frac{1}{2}$ (زیرا$60^0 = \theta$) باشد درین صورت:

$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$

$8x^3 - 6x - 1 = 0$

این معادله جواب گویا ندارد زیره اگر$\frac{a}{b}$ جواب گویائی باشد ◌ٖدراین صورت a عامل مثبت یا منفی اوb عامل مثبت یا منفی ۸ است ومیتوان جمیع امکانات را برای خلاصه این که هیچ یک جواب نیست مورد برسی قراردارد

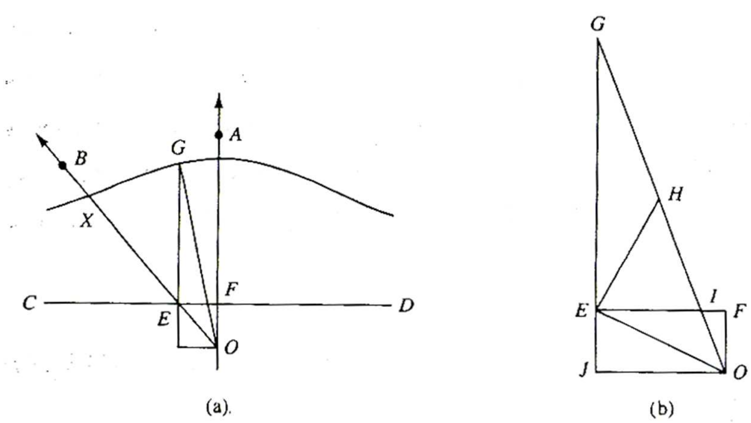
اگرمعادله دارای جوابی به صورت a+b$\sqrt{c}$ باشد a-b$\sqrt{c}$ را به عنوان جواب دیگر دارد. فرض میکنیم که این دومیدان توسعی جامع کمترینی را که جواب مان عضوی ازآن است را نمایش دهند .مجموع سه جذر معادله موردبحث باید برابر ضریب جمله x^2 باشد بنابراین اگرr جذرسوم باشد (مفروض ازرابطه بین جذرها وضرایب معادله برابر شده ودرنظریه معادلات

$$(a+b\sqrt{c}) +(a-b\sqrt{c})+v = 0$$

2a+v=0

V = -2a.

این تساوی فرض قبل را که a+b $\sqrt{c}$ عددی را درمیدان توسیع فیلد کمترین جوابها نمایش می دهد . نقض می کند دراین صورت نتیجه این است که جوابهای $8x^3$-6x-1=0 اعدادترسیم پذیر نیست وبنا براین قضیه زیربنا میشود.



شکل ۳۸۲ : تثلیث زاویه

٤.۹. ترسیم تثلیث هرزاویه را نمیتوان با استفاده ازخط کش نا مدریج وپرکار تنها انجام داد.

سومین وپیچیده ترین مسئله مشهوریونان تربیع دایره است این مسئله به معنی یافتن طول ضلع مربع است که اندازه مساحت دایره ای با شعاع معلوم را دارا است ازالحاظ الجبراگرطول مطلوب ضلع مورد بحث x وطول شعاع معلوم (I) واحد باشد دراین صورت $x.^2$=π واندازه ابعاد مطلوب $\sqrt{\pi}$ است مسئله را درشکل

فوق که درآن دوشکل مورد بحث مساحت یکسان دارند توضیح داده ایم اثبات این که عدد را نمی توان رسم کرد بستگی به دونکته ذیل که هردودرست است اما دراین جا اثبات نمیشوند (۱۱، صص۳۹۸-۴۰۰).

تعریف:عدد الجبری عبارت از جواب معادله الجبری به صورت

$$a_n x^n + a_{n-1}\, x^{4-1} + \ldots + a_0 = 0$$

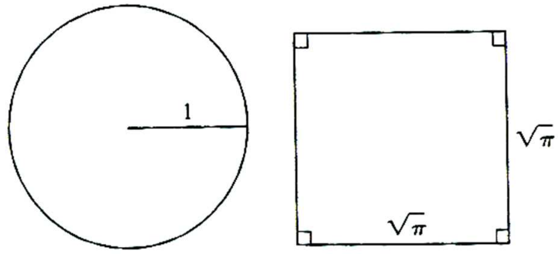
باضریب تام. و n≥1 و $a_{n\neq 0}$ است.

۱. تمام اعداد ترسیم پذیر الجبری اند.

۲. عدد π عدد الجبری نیست بنا براین $\sqrt{\pi}$ نیز الجبری نیست (j . Lindeman) (جی . لیندمان ۱۸۸۲)

۵.۹. ترسیم تربیع دردایره تنها با استفاده ازخط کش وپرکار غیرممکن است .

همان گونه که قبلا ذکرگردید یونانیان قدیم نتوانستند سه ترسیم فوق را با استفاده از خط کش نامدرج وپرکارانجام دهند اما این عدد موفقیت آنهارا ازیافتن جوابها توسط وسایل دیگربازاند است . بسیاری ازپشرفتهای ریا ضیات ازجمله نظری مقاطع مخروطات امکانات به عنوان نتیجه مساعی دراثبات جواب های مسایل ترسیمی ناشی شدند دراین مورد دومثال که نشان میدهد که چگونه درواقع این ترسیمات را میتوان انجام داد ازتاریخ ریاضیات درنظرگرفته ایم یکی ازاین دواستفاده ازوسیله یا نخی ای موسوم به کانکوید ینکومدس (conchold ofniicomede5)به نام ینکومدس ریاضیدان که درحدود (۲۴۰ ق .م . زیست است . روش عملی تثلیث زاویه با استفاده ازکانکوئید را درشکل (۱) شرح داده ایم دین شکل منحنی گزرنده از G کانکوئید موصوف است به ازای خط ثابت $\overleftrightarrow{CD}$ ونقطه ثابت (O) غیر واقع بر$\overleftrightarrow{CD}$ کانکوئید (که درواقع شامل دوشاخه . هریک دریک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ است)مجموعه ازنقاط تعریف شده زیراست : مجموعه تمام خطوط گذارنده از (O) ومتقاطع با $\overleftrightarrow{CD}$ را درنظر میگیریم برای خطوط وازآن طرف نقاط تقاطع کذکورشان فاصله ثابتی اختیارمیکنیم همین قسم فرض میکیم $\overleftrightarrow{OB}$ یکی ازاین خطوط با فاصله ثابت EXباشد دراین صورت به ازای نقطه .خط. وفاصله مفروض . مجموعه تمام نقاط X به فاصله ثابت از$\overleftrightarrow{CD}$ درامتداد اشعه از(O) شاخه ازکانکوئید استظ(۱۵، ص ۹۲۱).



شکل ۳۸۳ : مربع و دایره

اگراین منحنی (یا بهتربگویم ابزارمیکانیکی)چنان درشکل فوق با $\overleftrightarrow{CD}$عمودبر$\overleftrightarrow{OA}$ وEO متساوی نقض فاصله EX قرارگرفته باشد دراین صورت زاویه مفروض AOB را میتوان به سادگی با قراردادن نقطه Eبرخط واقع بر $\overrightarrow{OB}$ موازی رسم کرد $\overline{EG}$ با $\overrightarrow{CD}$وصل کردن O با G نقطه واقع به کانکوئید به سه قسمت متساوی تقسم کرد دلیل این که چرا $\overrightarrow{OG}$زاویه مورد بحث را تثلیث میکند به نظریه ای که دررابطه با شکل (B) با فرض GL = 2EOتوضیح داده شده وابسته است اگرHوسط GLباشد دراین صورت GJ. HL. EO و EH همه معادل اند بنا به مثلثهای متساوی الساقین موجود .

<EOH= <EHO= <HE+ <HEG=2<H6CEاما به خطوط موازی <FOL=<H6CE بنا براین

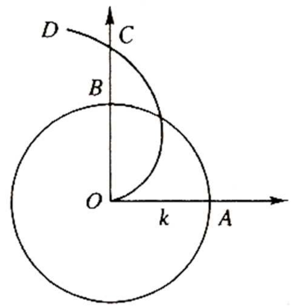
<G6CE=<FOL است .درنتیجه اندازه <EOG دوبرابر FOL وبنا براین $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ تثلیث سازم است .

مثال دوم : ازمنحنی های هندسه که دررسم جواب یکی از مسائل مشهورفوق بکاررفته استفاده ازمارپیچ ارشیمدس درحل مسئله تربیع دایره است . ارشیمدس (212 – 287 ق . م)را بزرگترین ریاضیدان عهد باستان دانسته اند این ریاضی دان علاوه برکتاب درمورد مارپیچ ها که شامل ۲۸ قضیه راجع به منحنی که آنرا مارپیچ ارشیمدس می نامیم است راجع به موضوعات ریاضی بسیاری دیگری ازجمله موضوعات هندس چون محاسبه π یافتن مساحت مسطح به طریقه که حساب انتیگرال را پیش بینی می کند

وسطوح سه بعدی نیز مطابق نوشته است مارپیچ ارشمیدس منحنی OCD نشان داده شده درشکل ذیل با معادله قطبی $r = K\theta$ به ازای ثابت مفروض K است اگردایره ای چنان که نشان داده شده ، دارای شعاع K باشددرین صورت قوس زاویه AOB آن دارای طول $K\theta$ که طول $r = OC$ نیز هست می باشد مساحت این دایره πk^2 است که می تواند به صورت $(2k)(\frac{\pi k}{2})$ نوشته شده باشد اما $AB(\frac{\pi k}{2})$ بنا برین:

$$\pi k^2 = (2k)(\frac{\pi k}{2})$$

اگرOA و OB متعامد باشند، درین صورت $(2k)\left(\frac{\pi k}{2}\right) = 2K(OC)$ اگربخواهیم مربعی به ضلع X هم اندازه این دایره باشددرین صورت $x^2 = 2k(oc)$ وx می تواند رسم شود.

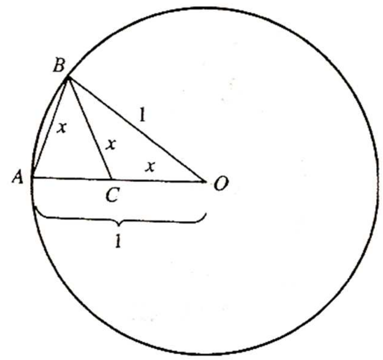


شکل ۳۸۴: تربع دایره

علاوه برسه مسئله مشهورفوق هم مانندجالب رسم چند ضلعی منظم محاط دردایره معلوم نیز علاقه ریاضی دانها را از زمان یونانیان باستان به بعد به خود جلب کرده است . درین حالت نیز اثبات مسئله عمومی الجبری است وتوسط ریاضی دان بزرگ کارل گوس(CARL GUUSS) بدست داده شده است، گوس درسن ۱۸ سالگی، مسئله قبلاً حل نشده محاط کردن یک ۱۷ ضلعی منظم دریک دایره را تنها با استفاده از خط کش نا مندرج وپرکار حل کرد، وهمچان قضیه ای را که بیان می کند که کدام چند ضلعی منظم می تواند محاط شود وکدام نمی تواند ، اثبات کرد، قضیه مذکور را درین جا بدون اثبات بیان می کنیم .

قضیه: یک چندضلعی محدب به کمک تنها یک خط کش نا مندرج وپرکارمی تواند دریک دایره محاط شود ، اگر وتنها اگn تعداد اضلاع آن بتواند به صورت $2^x, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \dots \mathrm{P}_\mathrm{K}$ به ازای عدد صحیح نا منفی X وهر P_1 اول جداگانه به صورت $2^{2y} + 1$ به ازای $0 \geq \mathrm{y}$ بیان شود.

بعضی از چند ضلعی های منظم که طبق قضیه گوس ، ترسیم پذیراند چند ضلعی های با اضلاع 24,20,17,16,15,12, 8,6,5,4,3 اند.صورت قضیه فوق هیجگونه سررشته ای درمورد چگونگی اثبات امکان یا عدم امکان در هرحالت خاص بدون رجوع به قضیه کلی مورد بحث بدست نمی دهد درین جا حالت خاص و n=7 را به صورت مختصر مورد بحث قرار می دهیم.



شکل ۳۸۵ : مثلث محاط در دایره

شکل فوق تحلیل مثلث مذکور را نشان می دهد اندازه زاویه مرکزی AOB برابر 30° است وزوایای OAB و ABO هر یک اندازه 72° دارد اگر BC ناصف ABO> باشد، هردو مثلث ABC و BCO متساوالساقین است وبنا برین

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CO}$ نیز $\Delta ABO \sim \Delta ACB$

و $\frac{1}{X} = \frac{X}{1-X}$

یا

$x^2 + x - 1$ جواب مثبت این معادله $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ که عدد ترسیم پذیر است می باشد. چنان که قضیه فوق واضیح می سازدکه ضلع منظم می تواند دریک دایره رسم شود، درحالیکه هفت ضلعی منظم نمی تواند اثبات غیر ممکن بودن ترسیم هفت ضلعی منظم دریک دایره مشابه به اثبات مربوط به تثلیث زاویه کلی است .

مسئله مورد بحث معادل ترسیم طول $x = 2cos\frac{2\pi}{7}$ است اگر $\theta = \frac{2\pi}{7}$ باشد. درین صورت

$3\theta + 4\theta = 360^\circ = cos3\theta + cos4\theta$ برای بیان کوسینوس های فوق برحسب X می توان از مطابقت های مثلثاتی استفاده کرد.

$$2cos3\theta = 2(4cos^3\theta - 3cos\theta) = x^3 - 3x$$
$$2cos4\theta = 2(cos^2 2\theta - 1) = 4(2cos^2\theta - 1)^2 - 2 = (x^2 - 2)^2$$

مساوی هم قرار دادن دو عبارت فوق معادله ای درجه چهارم برحسب X بدست می دهد. $x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ که می تواند به صورت

$(x - 2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0$ تجزیه شود ، اثبات این را که چرا عوامل فوق برای X مقادیر که بتواند با خط کش نا مدرج وپرکار رسم شوند نمی دهند (۳۰، ص۲۱۵).

خلاصه فصل نهم

هدف ما از ترسیم نمودن تنها یافتن مهارت بیشتر استفاده از ترسیمات نسیت ، بلکه به عوض ، استفاده از قسمت تحلیلی یک مسئله ترسیمی به عنوان کاربرد مفاهیم این فصل را تاکید می نمائیم. ترسیمات و اثبات های بدون امکان قرار ذیل است. درتاریخ ریاضیات سه مسئله ترسیمات چنان مشهورشدند که(که سه مسئله معروف یونانی) نام گرفتند این سه مسئله تضعیف مکعب (دو برابر کردن هم مکعب) تثلیث زاویه (سه قسمت مساوی کردن زاویه) تربیع دایره (مربع دایره). ترسیم تضعیف حجم مکعب نمی تواند باخط کش نامندرج وپرکار تنها انجام شود. ترسیم تثلیث هر زاویه را نمی توان با استفاده از خط کش نامندرج وپرکار تنها انجام شود. ترسیم تربیع دایره تنها با استفاده از خط کش نامندرج وپرکارغیرممکن است.

مسایل فصل نهم

۱- زاویه های $135°$، $45°$ و $90°$ را بدون استفاده از نقاله رسم کنید

۲- نشان دهندکه تثلیث زاویه با خط کش نامدرج و پرکارامکان پذیرنیست

۳- ثابت کنیدکه تربیع دایره باخط کش نامدرج وپرکارممکن نیست

۴- ثابت کنیدکه تضعیف مکعب توسط خط کش نامدرج و پرکارممکن نیست

۵- به وسیله پرکار و خط کش زاویه $30°$ و $15°$ را رسم کنید.

۶- نشان دهید که تثلیث زاویه با تبرزین ممکن است

کتابنامه

۱. اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). **هندسه جدید.** ترجمه یاسی پور، غلام رضا. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه** ،جلد ۱۴. تهران: مدرسه.

۳. سیلورمن، ریچارد. ا. (۱۳۷۳). **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی.**ترجمه عالم زاده، علی اکبر.تهران: ققنوس.

۴. هانگرفورد، تی. دبلیو. (۱۳۸۴). **مقدمه ای بر جبر مجرد**. ترجمه رضا انشایی، سید اعظم. اصفهان: دانشگاه اصفهان.

فصل دهم

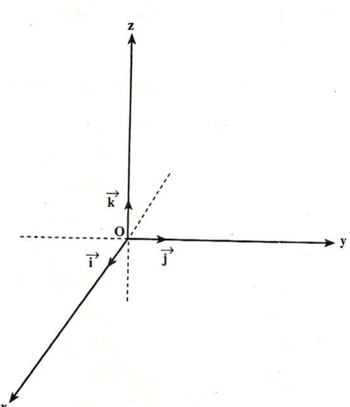
ترسیم نقاط وخطوط در فضای سه بعدی

در این فصل دریافت نقطه در فضای سه بعدی، دریافت طول قطعه خط در فضای سه بعدی، مستوی های افقی مقابل، جانبی، ارتسام موازی ومرکزی را مورد مطالعه قرار میدهیم

جهت بهتر روشن شدن موضوع لازم دانسته میشود تا فضای سه بعدی را معرفی نمائیم

۱.۱۰. فضای سه بعدی

فضای که درآن زنده گی می کنیم نمونه فضایی سه بعدی است که این فضا را بنام فضای اقلیدیس که یکی از مفاهیم تعریف ناشده می باشد یاد می شود. و این فضا از بی نهایت نقاط ،خطوط ومستوی تشکیل گردیده است.جهت دریافت وتعیین نقاط وخطوط درفضایی سه بعدی R^3 ضرورت به یک سیستم کمیات وضعیه سه بعدی می باشد که این سیستم کمیات وضعیه سه بعدی دکارت در فضا از سه محور دو بدو عمود برهم $XO\bar{X}$ و $YO\bar{Y}$ و $ZO\bar{Z}$ تشکیل شده است. این سیستم کمیات وضعیه را به صورت O-XYZ یا OXYZ نشان می دهند قرار شکل ذیل

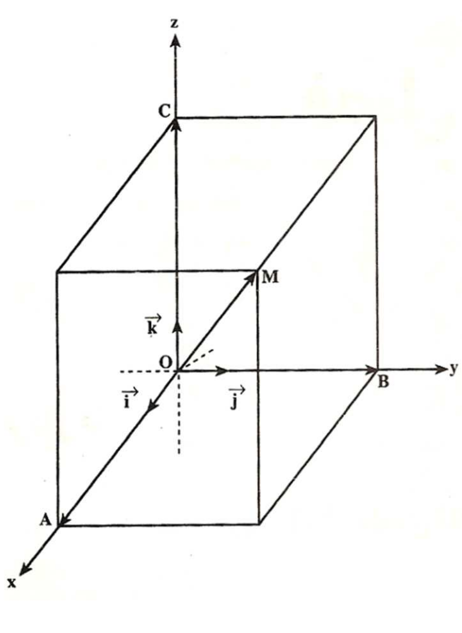


شکل ۳۸۶: سیستم کمیت وضعیه دیکارت درفضا

۲.۱۰. تعیین نقاط در فضایی سه بعدی

نقطه M را در سیستم کمیات وضعیه دکارت OXYZ در نظرمی گیریم وکتور $\overrightarrow{OM}$ را روی سه محور سیستم کمیات وضعیه رسم می کنیم . برای این کار از نقطه M سه مستوی را عمود بالای محور های $XO\bar{X}$ و $YO\bar{Y}$ و $ZO\bar{Z}$ رسم می میکنیم. تا این محورات را در نقاط A، B و C قطع کنند. اندازه های جبری $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$، عرض و ارتفاع نقطه M نامیده میشود. وبا x ، y وz نشان داده می یشود. OB=Y، OC=Z. OA=X و X ، Y و Z را سیستم کمیات وضعیه نقطه M می نامند و چنین می نویسند M(Z,Y,Z) به این ترتیب هر نقطه به یک سه جوره مرتب متناظر است.وبر عکس هر سه جوره مرتب (X,Y,Z) نیز نقطه یکتایی رابطهٔ سیستم کمیات وضعیه در فضا است . یعنی، سه عدد درمقابل یک نقطه ویک نقطه درمقابل سه عدد تقابل دارد.

$R^3R.R.R = \{(X,Y.Z)/X,Y,Z\epsilon R\}$ نمایش هندسی می نماید. یعنی، هر عنصر R^3 مانند (X,Y,Z) با یک نقطه درسیستم کمیات وضعیه دکارت در فضا نمایش داده میشود.



شکل ۳۸۷: مستویها در سیستم کمیت وضعیه دیکارت درفضا

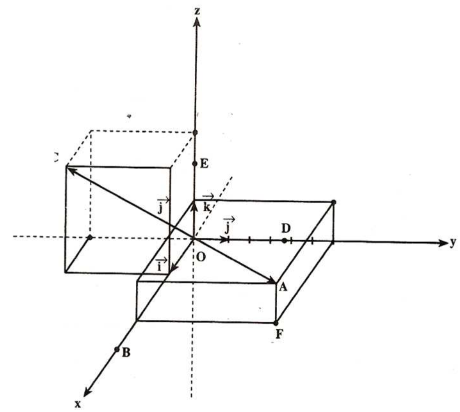
درفضای سه بعدی سه مستوی سیستم کمیات وضعیه X,O,Y و XY ، (Y,O,Z) یا YZ ، (X,O,Z)یا XZ موجود است که این سه مستوی سیستم کمیات وضعیه فضا را به هشت ناحیه تقسیم می کند. که نقطه میتواند دریکی از این حجرات واقع گردد.

درحالت های خاص:

۱- هرنقطه واقع برمستوی (X,Y,O) ارتفاعش برابر صفر است.
۲- هرنقطه واقع برمستوی (0,Y,Z) طولش برابر صفراست.
۳- هرنقطه واقع بر مستوی (X,O,Z) عرضش برابر صفر است.
۴- هرنقطه روی محورXها عرض وارتفاعش صفراست.
۵- هرنقطه روی محور Y ها طول وارتفاعش برابر صفر است.
۶- هرنقطه روی محور Z ها طول وعرضش برابر صفر است.
۷- مبداً سیستم یعنی نقطه O طول، عرض وارتفاعش برابر صفراست یعنی O(0,0,0) برای سیستم کمیات وضعیه متناظرنقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به مستوی های سیستم کمیات وضعیه محورهای سیستم کمیات ومبدا سیستم کمیات وضعیه داریم.
۱- متناظر نقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به مستوی (X,O,Y) نقطه $(X_1, Y_1, -Z_1)$ است.
۲- متناظر نقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به مستوی (Y,O,Z) نقطه $(-X_1, Y_1, Z_1)$ است.
۳- متناظر نقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به مستوی (Z,O,X) نقطه $(X_1, -Y_1, Z_1)$ است.
۴- متناظر نقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به محور X ها نقطه $(X_1, -Y_1, -Z_1)$ است.
۵- متناظر نقطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به محور Yها نقطه $(-X_1, Y_1, -Z_1)$ است.
۶- متناظر نفطه (X_1, Y_1, Z_1) نسبت به محورZ ها نقطه $(-X_1, -Y_1, Z_1)$ است .

مثال : نقاط ذیل را درسیستم کمیات وضعیه دکارت در فضا مشخص میکنیم.

A(2,3,1) B(3,0,0) C(1,-2,3) D(0,2,0) E(0,0,2) F(2,3,0)



شکل ۳۸۸: تعیین نقاط در سیستم کمیات وضعیه دکارت درفضا

فاصله نقطه از مبدا سیستم کمیات وضعیه: فاصله نقطه P(X,Y,Z) از نقطه O(0,0,0) مبدا سیستم کمیات وضعیه یعنی طول قطعه خط OP برابر است با $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

مثال فاصله نقطه $P(6,-2,3)$ ازمبدا کمیات وضعیه رادریافت نماید ؟

حل برای حل مثال فوق از رابطه فوق استفاده میکنیم :

$$OP = \sqrt{{X_1}^2 + {Y_1}^2 + {Z_1}^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{49} \Rightarrow 7$$

فاصله بین دونقطه:اگر $A(x_{1,}y_{1,}z_{1,})$ و $B(x_{2,}y_{2,}z_{2,})$ باشد طول قطعه خط AB برابراست با

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال: اگر $A(-1,2,-3)$ و $B(3,-6,5)$ باشد طول قطعه خط AB رادریافت کنید؟

حل داریم :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (-6-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{144} \Rightarrow 12$$

سیستم کیمیات وضعیه وسط یک قطعه خط:اگر $A(x_{1,}y_{1,}z_{1,})$ و $B(x_{2,}y_{2,}z_{2,})$ باشد، کیمیات وضعیه نقطه M وسط قطعه خط AB رادریافت کنید(۳۶، ص۵۵-۵۷).

حل داریم :

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_1+z_2}{2}$$

مثال: اگر $A(3,2,-5)$ و $B(1,-4,-3)$ باشد وسط قطعه خط AB کمیات وضعیه نقطه M را بدست آورید.

حل داریم که :

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$Y_M = \frac{-4+2}{2} = -1$$

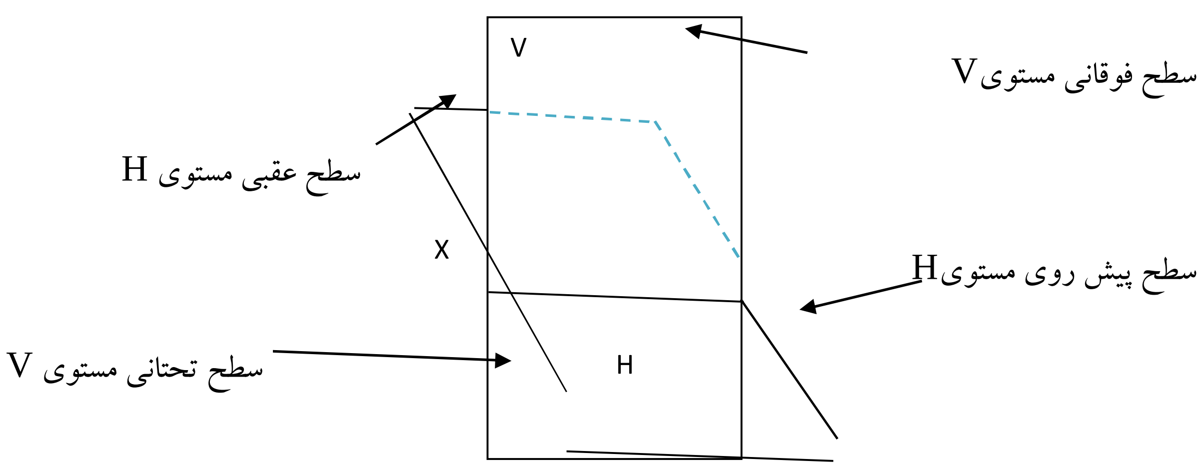
$$Z_M = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$M(2,-1,-4)$$

۳.۱۰. ترسیم نقطه درمستوی های ارتسام (V,H)

قبل ازمطا لعه نقطه وترسیم آن درسیستم مستوی های ارتسام H و V به توضیح مختصر به ارتسام قایم الزاویه می پردازیم.

طریقه ارتسام قایم الزاویه عبارت ازطریقه است که(نقط، مستقم ، مستوی وغیره) برروی دو مستوی ارتسام متقابلاً عمود با عبوردادن اشعه عمودی بالای مستوی های متذکره ارتسام می یابد .یکی ازاین مستوی های ارتسام H(افقی) ومستوی ارتسام دومی V(مقابل) موقعیت می گیرد شکل ذیل .



شکل ۳۸۹: سیستم مستوی های ارتسام H و V

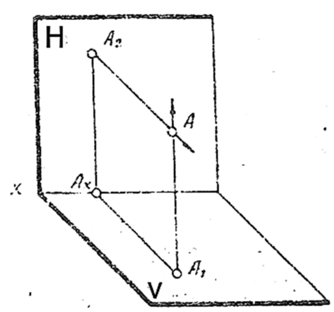
مستوی H مستوی ارتسام افقی ومستوی V مستوی ارتسام مقابل نامیده می شود .مستوی های H و V نا محدود وشفاف پنداشته می شود . خط تقاطع مستوی های ارتسام H و V محور کمیات وضعیه نامیده می شود وبه حرف x نشان داده می شود .مستوی های ارتسام فضارابه چهار حصه (چارحجره) تقسیم می نماید. ترسیم اشکال هندسی بویسله طریقه ارتسام قایم الزاویه نسبت به سایر طرق بکاربرده شده درمضون هندسه ترسیمی چون :طریقه ارتسام مرکزی (دورنما) ارتسام موازی (آکسنومتری) وطریقه مرتسیمات با علایم عددی ازنقطه نظرسا ختمان گرافیکی خیلی ساده بوده وبه سهولت بدست می آید.

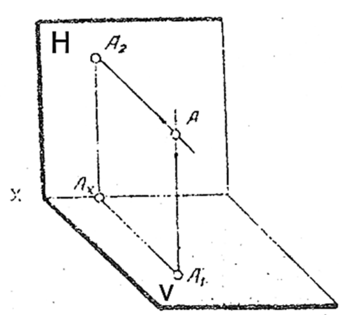
فلهذا از این طریقه های ارتسام درطراحی انجنیری مهندسی به گونه گسترده مورد استفاده قرار داده میشود.

درشکل(۳۹۰) ترسیم مرتسمات A_1 و A_2 نقطه فضائی A' درسیستم دو مستوی های ارتسام HوV نشانداده شده است .

ازنقطه A بالای مستوی های HوV عمودهای عبورداده مرتسیم های افقی A_1 و مقابل A_2 نقطه A حاصل میشود.

مستقیم های ترسیم کننده AA_1و AA_2 عمود بالای H و V مستوی را ایجاد می کند که نسبت به مستوی های ارتسام ومحور ارتسام مستوی مذکور عمود می باشد.





شکل ۳۹۰: ترسیم نقطه A به وسیله مرتسیم های A_1A_2 ترسیم نقطه A درسیستم مستوی ارتسام HوV

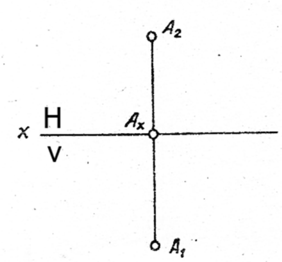
درشکل (۳۹۰) نقطه فضایی A با استفاده از مرتسیم های داده شده A_1و A_2 پیدا گردیده است ازطریق نقاط A_1و A_2 بالای مستوی های ارتسام HوV عمودها عبور داده و در تقاطع عمودهای مذکورنقطه A حاصل می گردد.

ازاین جا گفته می توانیم که دو مرتسیم یک نقطه می تواند موقعیت فضایی همان نقطه را نسبت به سیستم مستوی ها ی ارتسام به صورت مشخص ارائه بدارد.

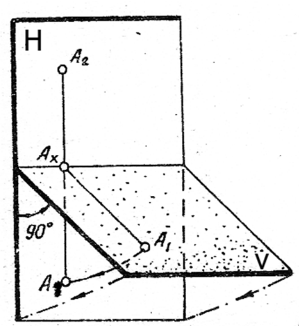
مستوی Hرا به مدارتحت زاویه 90° (طوریکه در شکل نشان داده شده است) دوران داده درنتیجه مستوی نقشه بدست می آید.

مرتسیم های A_1و A_2 دریک خط ارتباط بالای محور ارتسام عمودواقع میشوند.

دراثر انطباق مستوی های HوV بر روی یک مستوی ایپورمونژ(نقشه) در سیستم دو مستوی ارتسام قایم حاصل میشود.



شکل ۳۹۱: مرتسیم های A_1و A_2در نقشه

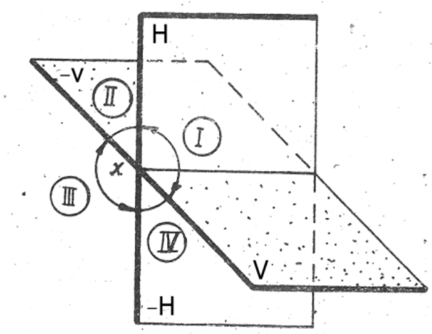


شکل ۳۹۲: مرتسم A_1 به وسیله دوران .مستویV تحت زاویه $90°$ به دورمحورارتسام

مستوی های HوV یک دیگر را قطع نموده درتقاطع خویش چهار زاویه دووجهی را که ربع فضای(حجره فضایی) گفته می شود به وجود می آید. تصویر معمولی این حجره ها در شکل (۳۹۳) نشان داده شده است.

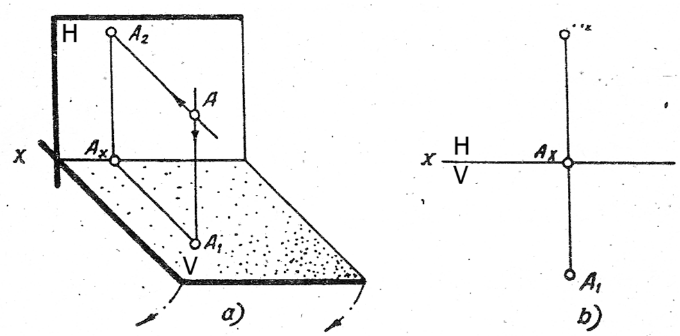
محورهریک از مستوی های H وV را به دو نیم مستوی های که به H+ و H– و V+وv- علامت گذاری گردیده تقسیم می نماید(۹، صص۷-۱۰).

به طور مثال درصورت که نقطه در ربع دوم قرار داشته باشد ، مرتسیم افقی آن بر روی مستوی H– ومرتسیم مقابل نقطه متذکره بر روی مستوی ارتسام V واقع می گردد.

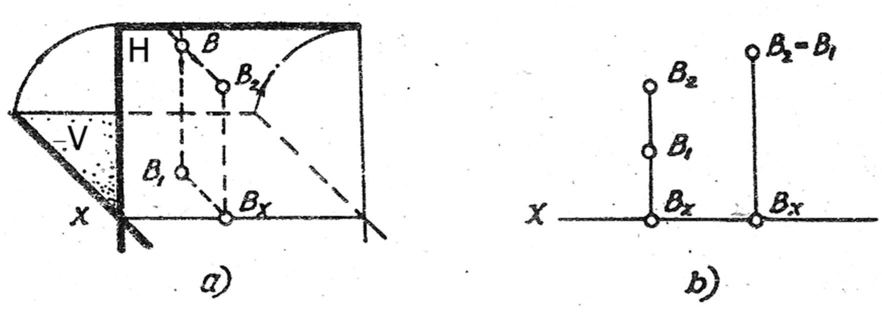


شکل ۳۹۳: تصویر فضای حجرات چهارگانه درسیستم مستوی های Hو V

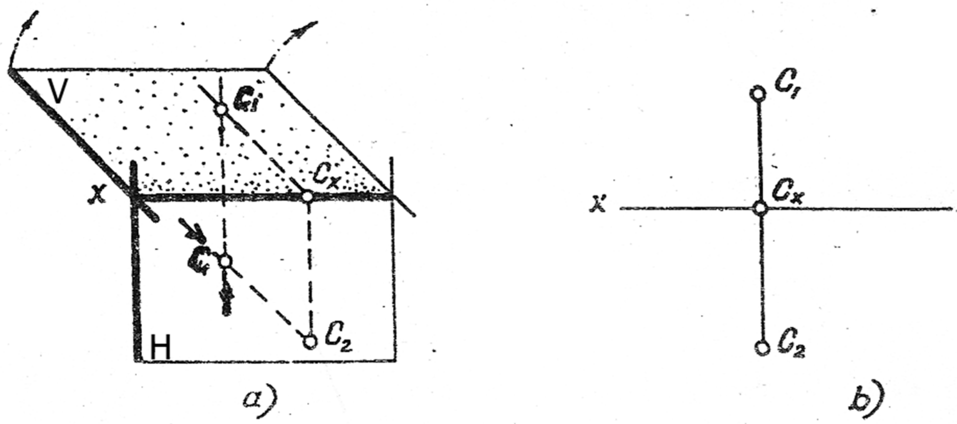
دراشکال ذیل تصاویرفضایی و اپیور نقاط A،B،C، و D در هرچهار حجره فضایی نشان داده شده است.



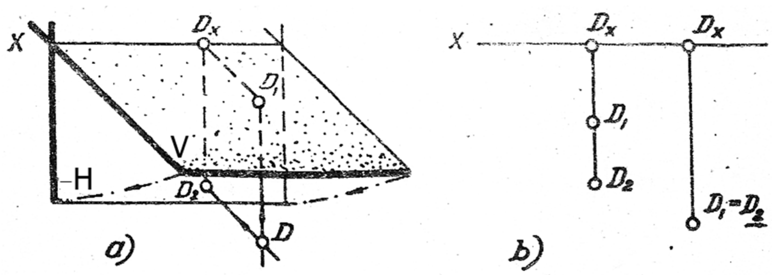
شکل ۳۹۴: تصویرفضائی a ونقشه مرسیم های نقطه A(b) درحجره 1



شکل ۳۹۵: تصویرفضائی (a) ونقشه مرتسیم های نقطه B (b) در حجره ۲



شکل ۳۹۶ تصویرفضائی (a) ونقشه مرتسیم های نقطهC(b) در حجره ۳



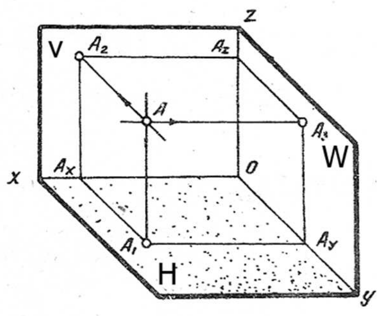
شکل ۳۹۷: تصویرفضائی (a) ونقشه مرتسیم های نقطه D(b) در حجره 4

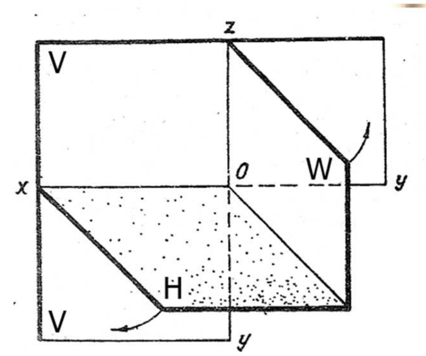
٤.١٠. ترسیم نقطه درسیستم مستوی های ارتسام V, H و W

قبلا تذکرداده شد که دو مرتسیم یک نقطه می تواند موقعیت همان نقطه را درفضا معین کند. اما در برخی موارد (تصاویر عناصر ساختمانی ، ماشینی تصاویر ساختمان های انجنیری و غیره). برای کسب معلومات بیشتر در باره شی رسم شده تصویر دو مرتسیم آن غیر کافی بوده به ترسیم مرتسیم اضافی شی ضرورت احساس می گردد که برای ترسیم این مرتسیم اضافی از سه مستوی ارتسام متقابلا عمود بدست می آید .

بدین ترتیب سیستم سه مستوی ارتسام متقابلاً عمود عرض اندام می نماید . درشکل(۳۹۹) سیستم سه مستوی ارتسام متقابلا عمود رسم گردیده ، مستوی W که بالای مستوی های H و V عمود است. مستوی ارتسام جانبی نامیده میشود. بر علاوه محور ارتسام x محورهای yو z عمود بالای محور x نیز بوجود می آید. نقطه تقاطع هر سه محورارتسام مبدا کمیات وضعیه گفته شده وبه حرف Oعلامت گذاری می گردد. ترسیم مرتسیم جانبی نقطه A در سیستم مستوی های HوVوW به گونه سیسم دو مستوی ارتسام قائم الزاویه اجرا می گردد.

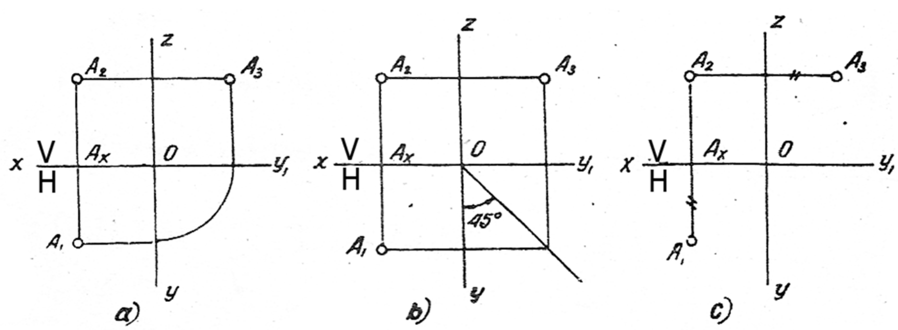
درشکل (۳۹۸) شیمای مستوی های ارتسام HوVوW منطبق در یک مستوی نشان داده شده است. طوریکه ملاحظه می گرددمحور y در شکل متذکره دو موقعیت را اتخاذ می نماید.





شکل ۳۹۸: شیمای مستوی های H،V و W توام در یک مستویشکل ۳۹۹:تصورفضای ومرتسیم های نقطه A به روی مستوی های H،Vو W

درشکل (۴۰۰) شیوه های مختلط ترسیم مرتسیم جانبی نقطه به کمک مرتسیم ها افقی ومقابل آن ارائه گردیده است.



شکل ۴۰۰ : شیوه های مختلف دریافت مرتسیم نقطه A

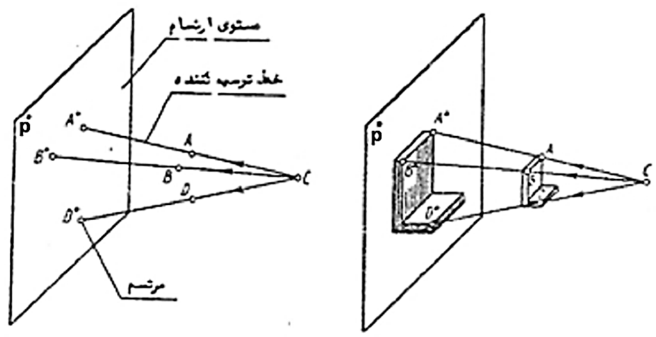
(۴۰، صص۲۸-۲۹).

۵.۱۰. معلومات مختصری درباره طریقه های اساسی ارتسام

بسیاری از اشیایی که درزنده گی ما با آنها سروکارداریم مانند تعمیرات، انجن ها، دستگاه ها،پرزه جات انجن ها وفابریکات همه ساخته دست انسان می باشند.

برای اعمار نمودن تعمیر، ساختن انجن ها وپرزه های آن لازم است که ابتدا نقشه های آنها آماده گردد.

نقشه: عبارت از تصویرجسم است که توسط آن می توان جسم مذکور را ساخت نقشه را نظر به قوانین وقواعدمعین اجرامی دارند،رسم وعکس عبارت از تصویر جسم می باشد.



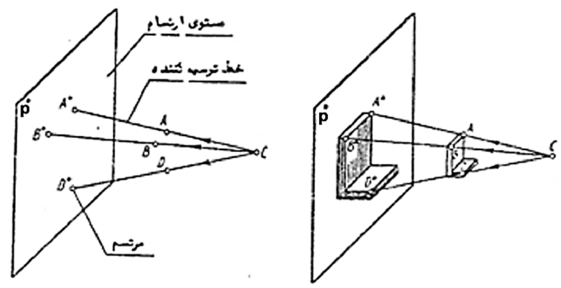
شکل ۴۰۱: ارتسام مرکز

ولی نظربه آن کارگر نمی تواند که اندازه وشکل آنرا بفهمد، برای این منظور باید نقشه آنرا داشته باشیم درشکل فوق رسم ونقشه پرزه را باهم مقایسه نمائید. همه اجسامیکه اطراف مارا احاطه نموده اند دارای سه اندازه طول، عرض وارتفاع می باشند، یک انجنیر بایداجسام را به روی مستوی (ورق کاغذ) که تنها دارای اندازه های دو بعدی طول وعرض می باشد ترسیم نموده بتواند.

ابتدا ترسیم نقطه را مطالعه می کنیم، شکل فوق نقاط A،Bو D ومستوی P° درفضا داده شده است. تصاویر نقاط A،Bو D را بالای مستوی P° ترسیم می نمائیم برای این منظورنقطه کیفی C را انتخاب می کنیم، از نقطه C مستقیم های CA و CB وCD را الی تقاطع با مستوی P° ترسیم می نمائیم. نقاط A°, B°وD° عبارت از تصاویر نقاط A ، Bو D بروی مستوی P° است .ترسیم تصویر نقطه (جسم) بر روی مستوی بنام ارتسام یاد میشود. نقطه C بنام مرکز ارتسام ونقاط A°, B°وD° ترسیم نقاط A ، Bو D می باشد. مستقیم های CA و CB وCD عبارت از مستقیم های ترسیم کننده می باشد. مستوی P° عبارت از مستوی ارتسام است. وذیلا شرح میشود.

۱- مرتسیم نقطه: عبارت از تقاطع مستقیم ترسیم کننده که از نقطه داده شده می گذرد با مستوی ارتسام می باشد.

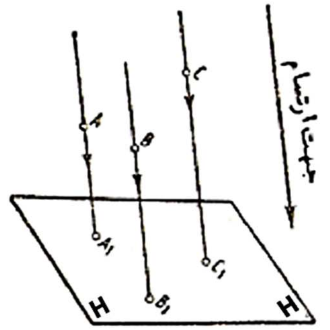
درتخنیک از دو طریقه ارتسام : طریقه ارتسام مرکزی وطریقه ارتسام موازی استفاده میشود. درشکل ذیل مستقیم های ترسیم کننده درنقطه Cمرکز ارتسام تقاطع می کند. این عملیه بنام ارتسام مرکزی یا د می شود. ارتسام های که در آنها مستقیم های ترسیم کننده با هم موازی باشند بنام ارتسام های موازی یاد میشود.



شکل ۴۰۲ : ارتسام موازی

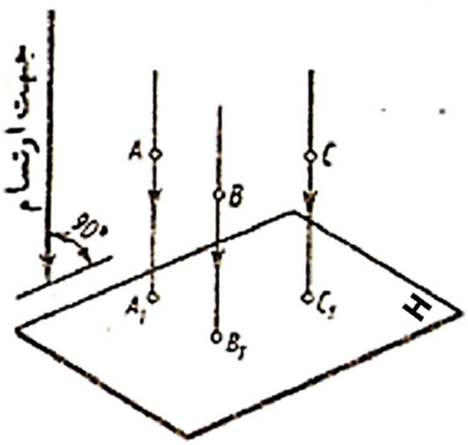
ترسیم به طریقه ارتسام موازی درشکل نشان داده شده است ، درفضا نقاط A،B ، C ومستوی H داده شده است مرتسیمات نقاط مذکوررا بالای مستوی H تعیین می نمائیم. برای این منظور عوض مرکز ارتسام نقطه C در شکل ذیل جهت ارتسام را که در رسم توسط تیرها نشان داده شده است تعیین می نمائیم، از نقاط A،B وC خطوط ترسیم کننده را موازی به جهت ارتسام رسم میکنیم تقاطع مستقیم های ترسیم کننده با مستوی H در نقاط A_1 ، B_1و C_1 مرتسیم نقاط A،B وC است.

ارتسامات موازی می تواند مایل ویا قائم باشد اگرمستقییم های ترسیم کننده بالای مستوی ارتسام عمود نباشد چنین ارتسام موازی را بنام مایل یاد می کنند.



شکل ۴۰۳: ارتسام مایل

اگرمستقیم های ترسیم کننده بالای مستوی ارتسام عمود باشد چنین ارتسام موازی را بنام ارتسام قائم یاد می کنند. قرار شکل:



شکل ۴۰۴: ارتسام قایم

درتخنیک از دو طریقه ارتسام استفاده می گردد.

۱ – طریقه ارتسام مرکزی   ۲- طریقه ارتسام موازی

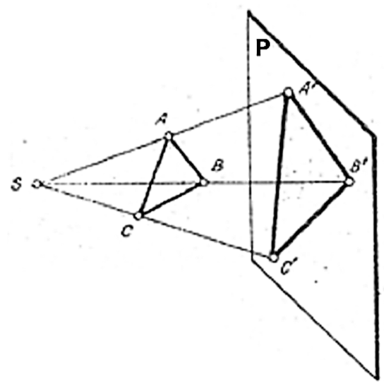
۱ – طریقه ارتسام مرکزی: فرض می کنیم در فضا مثلث ABC (مطابق شکل) که تصویر آن باید بر روی مستوی P رسم گردد ونقطه S (مرکزارتسام) داده شده است از طریق نقطه S اشعه SA ، SB و SC را الی تقاطع آنها با مستوی $\acute{H}$عبور داده تقاطع $\acute{A}$، $\acute{B}$و $\acute{C}$ که مرتسیم مثلث ABC بر روی مستوی P است بدست می آید.

مستوی P دراین جا مستوی ارتسام (مستوی تصویر) مستقیم های SA ، SB و SC مستقیم های ترسیم کننده و مرتسیم $\acute{A}$، $\acute{B}$و $\acute{C}$ ترسیم مرکزی مثلث ABC بر روی مستوی P نامیده می شود.

برای معلوم بودن مرتسیم ABC لازم نیست مرتسیم های تمام نقاط آن پیدا شود به خاطریکه ترسیم مرتسیم ها صرف سه نقطه مثلث جهت به دست آوردن تصویر مکمل آن کفایت می کند.

بدین ترتیب برای رسم نمودن شکل چند وجهی دریافت مرتسیم های صرف راس های آنها کافی می باشد

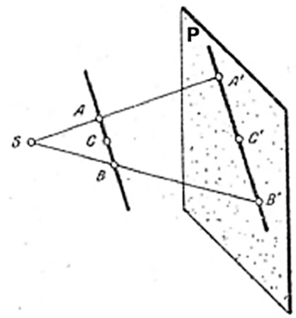
پروسه بدست آوردن تصاویرمرتسیم های اشکال هندسی فوق الذکر مفهوم اصلی طریقه ارتسام مرکزی را ارائه می نماید. باید تذکرداد که ارتسام مرکزی پایه واساس ارتسام دورکه پائی را نیز تشکیل می دهد . ارتسام مرکزی حاوی سلسله ویژه گی های است که عمده از آنها بگونه زیر مورد مطالعه قرار داده میشود:



شکل ۴۰۵: ارتسام مرکزی

۱. در تحت شرایط ترسیمی داده شده که هدف از آن مستوی P و مرکز ارتسام S میباشد هر نقطه فصائی (به استثنای نقطه S) یک مرتسم دارد زیرا از طریقه هر نقطه فضائی صرف یک مستقیم ترسم کنند ممکن است عبور داده شود

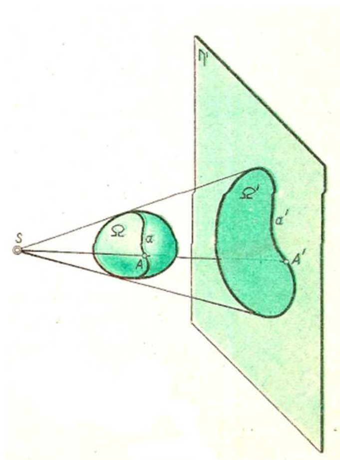
۲. مرتسم خط مستقیم قرار شکل بصورت عموم یک خط مستقیم است . معمولاً مستوی که بوسیله نقطه S و مستقیمAB به وجود میاید مستوی ارتسام p ار در مستقیم AB قطع میکند . درحالت خاص به ویژه هنگامکه مستقیم از طریق مرکز ارتسام (نقطه S) عبور نمائید مستقیم مذکور چون کی مستقیم ترسیم کنند است ، بنام شکل نقطه ارتسام میابد.



شکل ۴۰۶: ارتسام مرکزی مستقیم

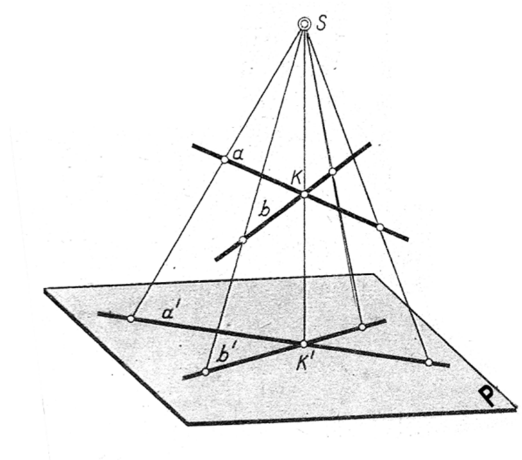
۳. هر نقطه شامل به یک خط مستقیم و یا خط منحنی که مرتسیم خویش متعلق به مرتسم همان خط مطابق دارد مثلاً اگر $C \in AB$ باشد ، پس $C' \in A'B'$ است.

۴. خط منحنی به صورت عموم به شکل خط منحنی ارتسام میابد



شکل ۴۰۷: ارتسام مرکزی منحنی.

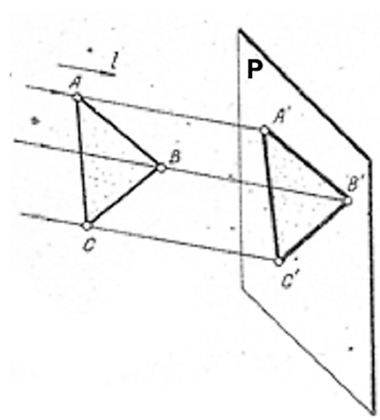
۵. نقطه تقاطع خطوط مستقیم در تقاطع مرتسیم های همان خطوط واقع میباشد(۱۶، صص ۹-۱۳).



شکل ۴۰۸: ارتسام متقاطع مرکزی

۲- طریقه ارتسام موازی در صورتیکه مرکز ارتسام در لایتناهی واقع گردد حالت خاص طریقه ارتسام مرکزی محسوب میگردد . در این طریقه کلیه شعاع های ترسیمی با هم موازی اند . همچنان در طریقه ارتسام موازی مانند طریقه ارتسام مرکزی هرخط مستقیم مشروط به این که با خط ارتسام هم جهت نباشد به روی مستوی ارتسام بشکل خط مستقیم ارتسام می باشد .

بناً نقاط تقاطع شعاع های ترسیم کنند عبور داده شده از راسهای مثلث ABC با مستوی P یعنی نقاط A’B’C’ را پیدا نموده بعد از اتصال آنها به هم دیگر ارتسام موازی اضلاح مثلث و در نتیجه مرتسیم خود مثلث بروی مستوی ارتسام P حاصل میشود قرار شکل ذیل : در ارتسام موازی جهت اشعه ارتسام که در حالت خاص بالای مستوی ارتسام میتواند عمود قرار گیرد، داده میشود .



شکل ۴۰۹: تصویرمثلث ABC به روی مستوی Pبه طریقه ارتسام موازی

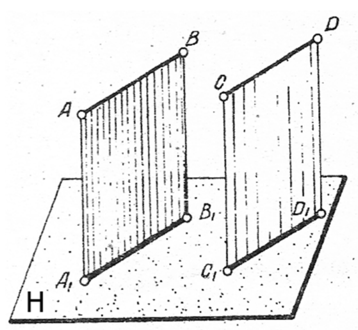
هرگاه اشعه ترسیم کننده $B\acute{B}$، $A\acute{A}$ و $C\acute{C}$ بالای مستوی ارتسام P عمود باشد درین صورت مرتسیم ABC مرتسیم قائم مثلث ABC برروی مستوی P است درغیرآن مرتسیم مایل گفته می شود.

ارتسام موازی به ارتسام قائم الزاویه وارتسام مایل تقسیم میشود درارتسام قائم الزاویه مستوی ارتسام با جهت ارتسام زاویه قائمه و درارتسام مایل زاویه غیرقائمه را می سازد.

قابل یادآوری است که ارتسام اکسنومتری و ارتسام قایم الزاویه و همچنان طریقه مرتسیمات به علایم عددی که دراین کتاب گنجانیده نشده بر مبنای طریقه ارتسام موازی استوار میباشد.

ارتسام موازی علاوه بر مشخصاتیکه قرار فوق برای ارتسام مرکزی فورمول بندی گردید، ویژه گی های ذیل را نیز دارا میباشد.

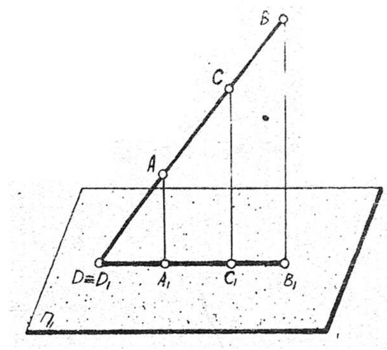
۱. مرتسم های مستقیم های موازی به یکی دیگر موازی اند . بناً مستوی های A_1B_2 ،AB و C_1D_1 CDقرار شکل ذیل که از طریقه مستقیم های موازی در فضا عبور داده شده اند بین خود موازی میباشد. این گونه مستوی ها توسط مستوی سومی H قطع گردیده خطوط تقاطع آنها نیز با یک دیگر موازی اند.



شکل ۴۱۰: دومستقیم موازی ومرتسیم های آنهابه روی مستوی H

۲. قطعه خط های یک مستقیم و مرتم های آنها قرار شکل ذیل با هم متناسب اند .

یعنی : $\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$

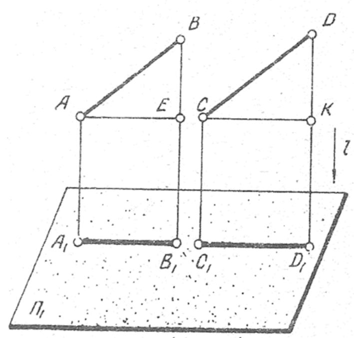


شکل ۴۱۱: نسبت میان قطعه خط های یک مستقیم و مرتسیم های آنها

هرگاه در رابطه فوق جای طرفین با یکدیگر تبدیل گردد در آن صورت $\frac{C_1B_1}{CB} = \frac{A_1C_1}{AC} = K$ میشود . به معنی اینکه نسبت میان مرتسیم های قطعه خط با اصل آن یک کمیت ثابت و معیین را تشکل میدهد. کمیت مذکور ضریب انحراف نامیده میشود

۳. نسبت بین دو قطعه خط موازی و مرتسیم های آنها این موضوع میواند به سولت قرار اتی به اثبات رسانیده شود:

فرض میکنیم که مستقیم$AB//CD$ و مرتسیم های آنها یعنی $A_1B_1//C_1D_1$ قرار شکل ذیل داده شده است. مستقیم های AE و CK را موازی A_1B_1 و C_1D_1 رسم میکنیم . در این صورت مثلثات ABE و CDK نظر به شرط سوال $AB//CD$ بوده و از نقطه نظر ترسیم $BE//DK$ و $AE//CK$ میباشد . بنابراین مثلث $ABC \sim CDK$ است .



شکل ۴۱۲: نسبت میان دو قطعه خط موازی و مرتسیم های آنها

پس : $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CK}$

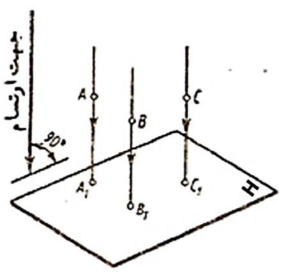
چون $CK=AE=A_1B_1$ است در نتیجه $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ بعد از تعویض موقعیت های طرفین در رابطه فوق

داریم : $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1B_1}{AB} = K$

این بدان معنی است که : قطعه خط های واقع در مستقیم های موازی در ترسیم موازی آنها به روی همان مستوی مشترک داری ضریب های انحرافی مساوی اند.

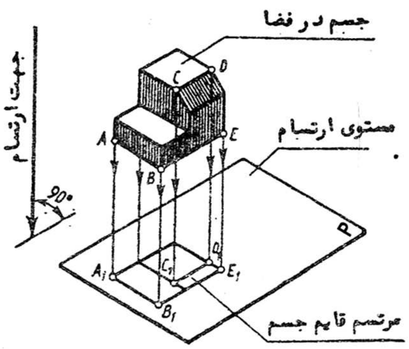
٦.١٠. مرتسمات قائم نقطه

درفضا نقطه B،Aو C قرار شکل ذیل ومستوی H داده شده است مرتسیم نقاط مذکور را بر روی مستوی H دریافت می داریم جهت ارتسام را عمود به مستوی H تعیین می نمائیم. از طریق نقاط B،A و C مستقیم های ترسیم کننده را موازی به جهت ارتسام رسم می کنیم. در نتیجه تقاطع مستقیم های ترسیم کننده با مستوی H نقاط A_1 و B_1وC_1 یعنی مرتسیم قائم نقاط B،A و C دریافت می گردد.



شکل ۴۱۳: طریقه ارتسام قایم

۱. برای دریافت مرتسیم قائم نقطه باید از نقطه مذکور بالای مستوی ارتسام عمود رسم نموده. وتقاطع آنرا با مستوی ارتسام دریافت کرد. قرار شکل ذیل مرتسیم قائم جسم بالای مستوی ارتسام نشان داده شده است .

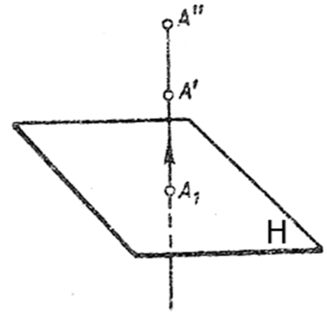


شکل ۴۱۴: ارتسام شی به طریقه قایم

از نقطه A جسم مستقیم ترسیم کنند تحت زاویه $90°$ با مستوی H ترسیم شده است .A_1 عبارت از مرتسیم قایم نقطه A است همچنان B_1، E_1، C_1، ... وغیره مرتسیم قایم نقاط C،،E B ...، وغیره میباشد نقاط مذکور را توسط خطوط مستقیم وصل می نمائیم و مرتسیم قایم جسم دریافت میگردد بنابراین اگرما ارتسام قایم نقطه را

درست طبق قواعد بدانیم میتوانیم مرتسم قایم هرجسم را ترسیم نمائیم طریقه ارتسام قایم در تخنیک مورد استعمال بیشتر دارد.

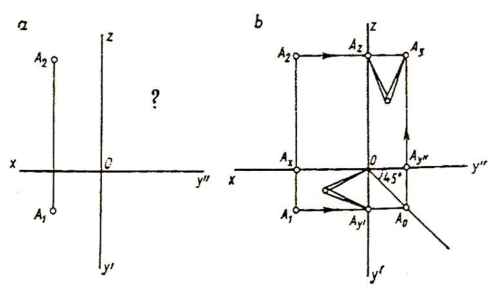
۲. یک مرتسیم به تنهای موقعیت نقطه را در فضا مشخص ساخته نمیتواند بطورمثال A_1مرتسیم نقطه A در مستوی H داده شده است قرار شکل ذیل آیا میتوان موقعیت نقطه A را در فضا(نسبت به مستوی H) مشخص نمود؟ در رسم دیده میشود که A_1 عبارت از مرتسیم نقاط متعددی (A’,A’’ و غیره) میباشد ههه این نقاط بالای مستقیم ترسیم کنند قرار دارند و نمیتوانیم که موقعیت نقطه A را مشخص بسازیم .



شکل ۴۱۵: مرتسیم یک نقطه

نظر به دو مرتسم دو نقطه می توان مرتسم سومی آنرا ترسیم کرد :ترسیم مرتسم سومی نقطه را در مثال های آتی مطالعه می کنیم.

مثال۱: نقطه ($A(A_1, A_2$ داده شده است مرتسیم جانبی نقطه A مطالبه می گردد. شکل ($۴۱۱a$)



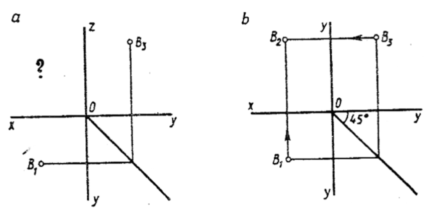
شکل۴۱۶: مرتسیم سومی

از طریق نقطه A_2 خط ارتباط $A_2\ A_z$ واز طریق A_1 خط ارتباط $A_1A\acute{y}$ را عبورمی دهیم. شکل ($۴۱۱b$) از طریق نقطه O خط مستقیم تحت زاویه 45° نظر به محورات $y''\ \acute{y}$ عبورمی دهیم خط $A_1A\acute{y}$ را تا تقاطع با

این مستقیم در نقطه خط درنقطه A_0 امتداد می دهیم .از نقطه A_0 خط ارتباطی A_0Ay'' را تا تقاطع به امتداد خط A_2Az عبور داده و تقاطع خطوط مذکور را به A_3 نشان می دهیم نقطه حاصل A_3 عبارت از مرتسیم جانبی نقطه A می باشد. نقطه A_3 بدون استفاده از مستقیم OA_0 نیز دریافت شده می تواند برای این منظور طول قطعه خط $OA\acute{y}$ را از شکل اندازه کرده و آنرا توسط دوسوزنه بالای امتداد خط ارتباط A_2A_z وضع می نمایم نقطه A_3 دریافت می گردد.

مثال ۲: نقطه $B(B_1, B_2)$ داده شده است مرتسیم مقابل B_2 ,نقطه B را تعیین کنید؟

شکل (۴۱۲a) طریقه ترسیم نقطه B_2 , در شکل (۴۱۲b) توسط تیرها نشان داده شده است.



شکل ۴۱۷: نقشه مرتسم جانبی

(۲۹، صص ۵۸-۶۲).

خلاصه فصل دهم

بحث اصلی این فصل عبارت بود از ترسیم نقاط وخطوط در فضای سه بعدی. موقعیت نقطه در فضا توسط کمیت وضعیه قایم تعیین میگردد لازم است که فاصله نقطه را الی مستوی های ارتسام بدانیم . این کمیت وضعیه عبارت از X، Y و Z میباشد. نقشه عبارت از تصویر جسم است که توسط آن میتوان جسم مذکور را ساخت . نقشه را نظر به قوانین وقواعد معین اجرا میدارند رسم وعکس نیزعبارت از تصویرجسم میباشد . ولی نمیتواند که اندازه وشکل آن را فهمید. مرتسم نقطه (جسم) به روی مستوی بنام ارتسام یاد میشود . مرتسم نقطه عبارت از تقاطع مستقیم ترسیم کننده که از نقطه داده شده میگذرد با مستوی ارتسام میباشد.

در تخنیک از دو طریقه ارتسام ، طریقه ارتسام مرکزی وطریقه ارتسام موازی استفاده میگردد. ارتسام مرکزی هرنقطه فضا به استثنای نقطه مرکزارتسام یک مرتسم دارد زیرا از طریق هرنقطه فضای صرف یک مستقیم ترسیم کننده ممکن است عبور داده شود . و درطریقه ارتسام موازی مرکز ارتسام در لایتناهی واقع میگردد . و در این طریقه کلی، کلیه اشعه های ترسیمی با هم موازی اند . ایپورنقطه عبارت از نقشه ایست که درآن دومرتسم قائم نقطه که در ارتباط ارتسامی قرارگرفته اند ترسیم گردیده باشد. سه نوع مستوی ارتسام وجود دارد .افقی ، مستوی مقابل و مستوی جانبی.

مسایل فصل دهم

۱- از نقطه اختیار A فضا سه مستوی موازی را با مستوی های مختصات رسم کنید طوریکه نقطه تقاطع این سه مستوی موازی را با محوری های مختصات بترتیب با وسیله نقاط Q ، R و S نشان داده شده و همچنین نقاط مزکور به ترتیب از مبدا به فواصلی Z_0, Y_0, X_0 واحد قرار دارند؟

۲- نقطه های مساوی $A=(2,3,1)$ ، $B=(3.0.0)$ ، $C=(1,-2,3)$ ، $D=(0,2,0)$ ، $E=(0,0,2)$ و $F=(2,3,0)$ را در سیستم مختصات دیکارتی در فضا مشخص کنید ؟

۳- واضع سازید که آیا مستقیم های $a(a_1:a_2)$ و $b(b_1:b_2)$ شامل مستوی $(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ است یا خیر ؟

۴- مستوی ABC $(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ و مرتسم افقی (M_1) نشان داده شده است . نقطه M شامل مستوی مذکور است . مرتسم مقابل M_2 نقطه M را رسم کنید ؟

کتابنامه

۱. شهریاری، پرویز. (۱۳۶۵). **هندسه در گذشته و حال**. تهران: امیر کبیر.

۲. نظامی، م. (۱۳۶۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

۳. هانگرفورد، تی. دبلیو. (۱۳۸۴). **مقدمه ای بر جبر مجرد**. ترجمه رضا انشایی، سید اعظم. اصفهان: دانشگاه اصفهان.

4. Aliev, B. (2006). **Geometry Textbook for Class IX**. Dushanbe: Nuk.
5. Koznesov, N.C. (1981). **Geometry**. Moscow: Mir.

رهنمایی وحل مسائل فصل اول

۱. توصیف مسئله هندسی مورد حل .

- توصیف جریان حل مسئله.
- توصیف رسم تکمیل شده که از حل مسئله نتیجه میشود.
- بلند بردن مهارت های مسلکی و هندسی درآموزش ریاضی .

۲. افزار ها عبارت انداز: خط کش . پرکار، دوسوزنه، پنسل ، نقاله وغیره.

۳. یک قطعه خط را میتوان توسط خط کش نامدرج وپرکار به چهار حصۀ مساوی تقسیم نمود.

۴. توسط پرکار و خط کش نامدرج میتوان یک زاویه را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرد.

۵. مکان های هندسی در ترسیم اشکال هندسی منحیث یک افزار هندسی رول مهم را بازی میکنند.

۶. هردو پرکار معادل اند.

۷. بلی !

۸. برای رسم یک قطعه خط تنها یک معلوم که اندازه آن میباشد ضروری است .

رهنمایی و حل مسائل فصل دوم

۱. نقطه A خارج از مستقیم a قرار دارد، میخواهیم از نقطه A خط مستقیم b را موازی با مستقیم a ترسیم نمائیم این خط موازی توسط دایره کش و خط کش در شکل ذیلاً نشان داده شده است قرار ذیل عمل می نمائیم .

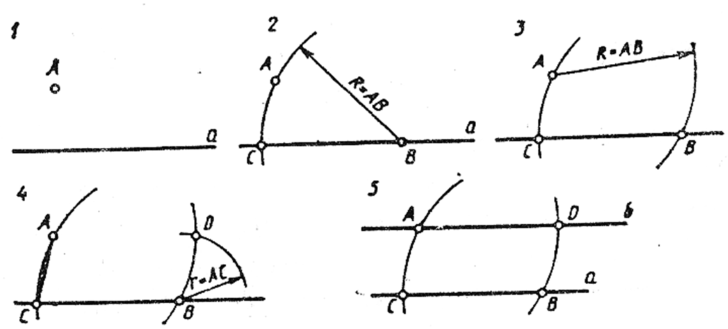
۱) مستقیم a و نقطه A داده شده اند

۲) نقطه کیفی B را روی مستقیم a اختیار میکنیم . از مرکز B قوس را بشعاع R=AB رسم میکنیم . نقطه C حاصل میشود .

۳) از مرکز A قوس را به شعاع r=AB رسم میکنیم.

۴) از مرکز B قوس را به شعاع r=AC رسم نموده ، نقطه D حاصل میگردد.

۵) از نقاط AوD مستقیم b را موازی به a عبور میدهیم.



شکل ۴۱۸: ترسیم خط موازی

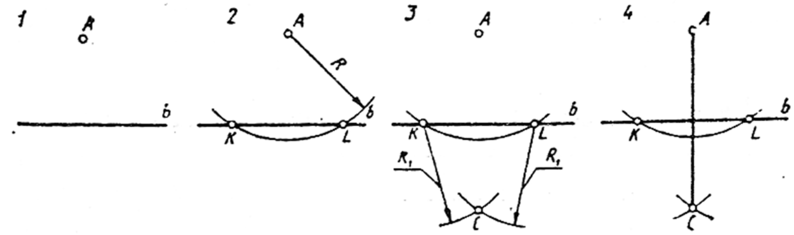
۲. از نقطه A به مستقیم b عمود ترسیم می نمائیم .(شکل)

۱) نقطه A ومستقیم b داده شده اند

۲) ازنقطه A قوسی را به شعاع کیفی R که مستقیم b را نقاط K و L قطع کند رسم می نمائیم.

۳) از مراکز K و L قوس های دیگری را به شعاع کیفی $R_1>KL/2$ ترسیم نموده نقطه C را دریافت میداریم .

۴) نقاط AوC را مستقیماً وصل میکنیم ، که مستقیم A عمود است به b .

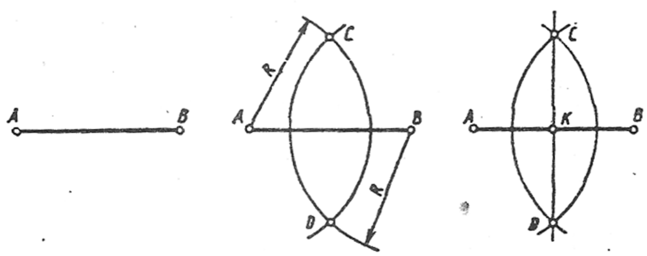


شکل ۴۱۹: ترسیم عمود

۳. قطعه خط AB داده شده است میخواهیم آن را به دو حصه مساوی توسط خط کش و پرکار تقسیم نمائیم . قرار شکل ذیل .

۱) از مرکز A قوس بشعاع کیفی R>AB/2 ترسیم می نمائیم. از مرکز B نیز با همان شعاع R قوسی ترسیم می نمائیم . نقاط C و D را دریافت میداریم .

۲) CDعمودبرAB است و نقطه K قطعه خط AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می نماید.(AK=KB).



شکل ۴۲۰: ترسیم عمود

۴. زوایه K را که مساوی به زاویه A باشد . قرار شکل ذیل ترسیم میگردد .

۱) زاویه A ونقطه K داده شده است

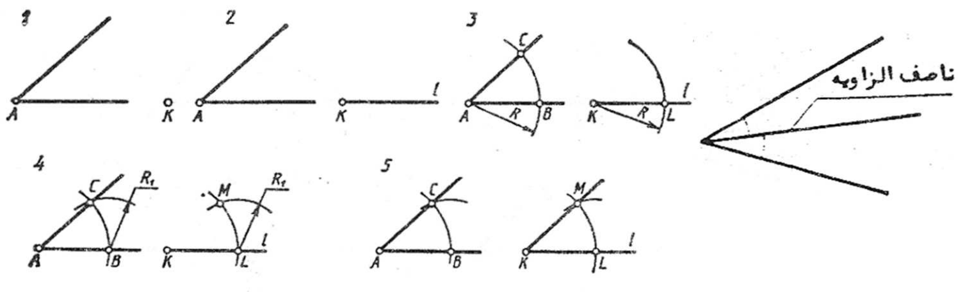
۲) از نقطه K شعاع L را می کشیم که عبارت از یک ضلع زاویه مطلوب است .

۳) از مراکزA و K قوسی های را بشعاع R رسم می نمائیم و بالای از اضلاع زاویه داده شده نقاطBوC وبالای شعاع L نقطه L را دریافت میداریم .

۴) از مرکز L قوس با شعاع R_1=BC را رسم میکنیم و نقطه M را دریافت میداریم .

۵) از طریق نقاط K و M ضلع دیگر زاویه مطلوبه را دریافت میداریم . MKL=CAB مستقیم که از راس زاویه میگذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم میکند بنام ناصف الزاویه یاد میشود

.



شکل ۴۲۱: ناصف الزاویه

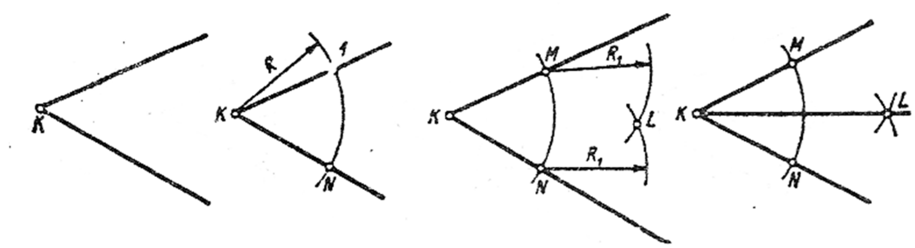
۵. ناصف الزاویه مطلوبه را قرار شکل ذیل ترسیم می نمائیم . شکل

۱) زاویه K داده شده است

۲) از مرکز K قوس را به شعاع کیفی R رسم می نمائیم . قوس مذکوراضلاع زاویه را در نقاط MوN قطع میکند

۳) از مراکز Mو N قوس های داری شعاع R_1 را می کشیم که همدیگر را در نقطهL قطع میکنند .

۴) مستقیم KL عبارت از ناصف الزاویه K میباشد .



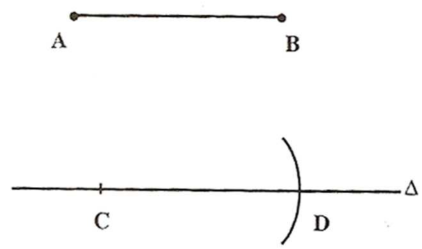
شکل ۴۲۲: ناصف الزاویه

۶. ترسیم قطعه خط مساوی به یک خط داده شده ذیلاً صورت میگیرد.

۱) قطعه خط AB و خط Δ داده شده است میخواهیم روی خط Δ قطعه خط معادل به قطعه خط AB رسم کنیم .

۲) نقطه اختیاری C را روی خط Δ اختیار کرده به مرکز این نقطه وبه شعاع برابر AB قوسی رسم میکنیم تا خط Δ را در نقطه D قطع کند

۳) قطعه خط CD جواب مسئله است یعنی قطعه خط معادل با قطعه خط AB است .



شکل ۴۲۳: ترسیم یک قطعه خط بالا قطعه خط داده شده

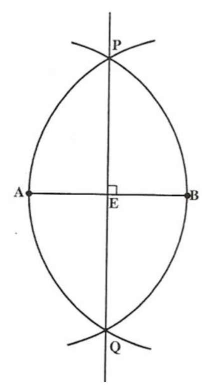
۷. جهت دریافت نقطه وسط یک قطعه خط AB قرارذیل عمل میکنیم

۱) قطعه خط AB داده شده است

۲) میخواهیم نقطه وسطی این قطعه خط را بدست آوریم

۳) خط PQ ناصف عمودی قطعه AB را رسم میکنیم .

۴) نقطه تلقی خط PQ با قطعه خط AB یعنی نقطه E جواب مسئله است . داریم AE=AB .



شکل ۴۲۴:دریافت نقطه وسط قطعه خط

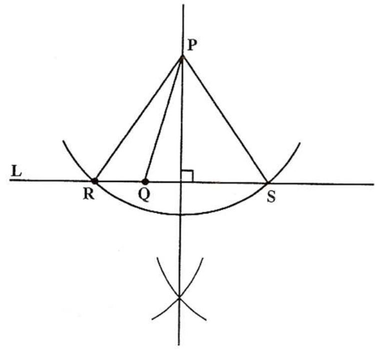
۸. برای ترسیم خط عمود بر یک خط مفروض، را از نقطه واقع در خارج آن خط قرار شکل ذیل ترسیم میگردد.

۱) خط L ونقطه P خارج آن داده شده است

۲) میخواهیم از نقطه P خط عمود برخط L رسم کنیم .

۳) نقطه Q را روی خط L اختیار کرده ، به مرکز P وبه شعاع r>PQ دایره رسم میکنیم چون نقطه Q داخل این دایره قرار دارد، بنابراین خط L دایره را در نقطه R و S قطع میکند .

۴) ناصف عمودی قطعه خط RS را رسم میکنیم این خط از نقطه P میگذرد زیرا P از دونقطه RS به یک فاصله است .



شکل ۴۲۵: وسط قطعه خط

۹. جهت تقسیم قطعه خط با پنج حصه مساوی قرار شکل ذیلاً تقسیم می نمائیم .

۱) قطعه خط AB داده شده است .

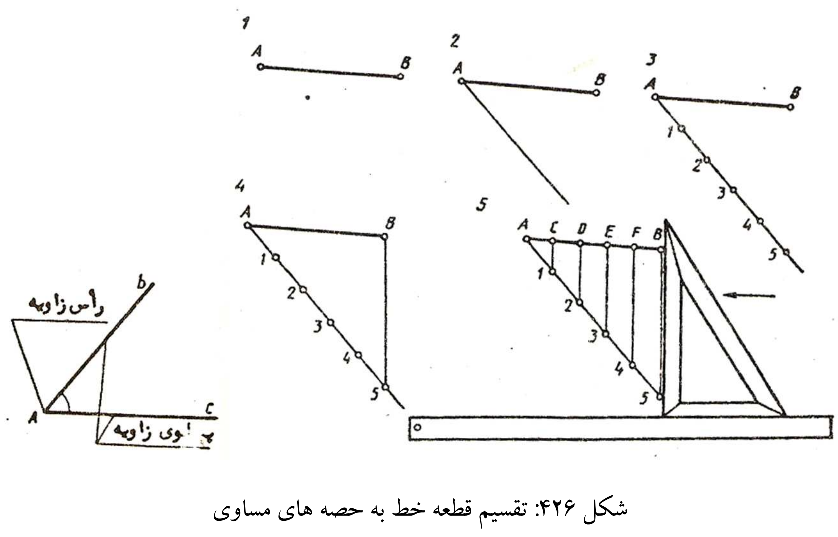
۲) ازنقطه A به زاویه کیفی شعاع رسم می نمائیم .

۳) ازنقطه A بالای شعاع مذکور به اندازه کیفی مساویانه پنج قسمت جدا میسازیم. بالای شعاع نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، را نشانی میکنیم

۴) نقطه پنج را با نقطه B وصل می نمائیم .

۵) از نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ مستقیم های را موازی به 5B میکشیم .(AC=CD=DE=EF=EB)

یاداشت . به همین ترتیب قطعه خط را به n قسمت مساوی نیز میتوان تقسیم نمود.



شکل ۴۲۶: تقسیم قطعه خط به حصه های مساوی

رهنمایی و حل مسائل فصل سوم

۱- جهت ترسیم چهارضلعی محدب که طول هرچهارضلع ووسعت یک زاویه آن معلوم باشد ذیلاً عمل می نمائیم

۱) چهارضلعی که طول اضلاع آن a,b,c,d ووسعت زاویه A آن داده شده است.

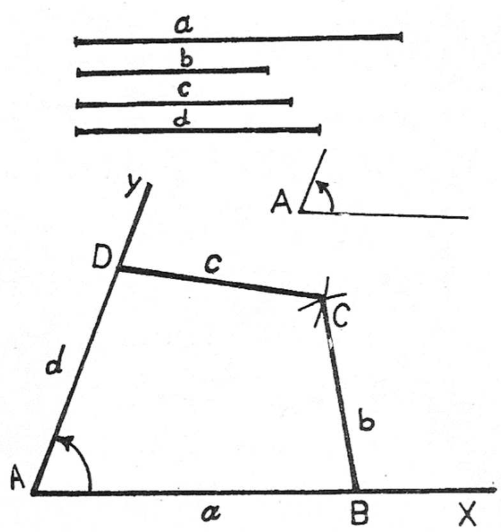
۲) یک خط مستقیم AX را انتخاب کرده درنقطه A آن زاویه A را که وسعت آن داده شده است طبق شکل رسم میکنیم .

۳) سپس از اضلاع AX و AY آن AB وAD به ترتیب به اندازه طول های a وd جدا میکنیم.

۴) بعداً دهن پرکار را به اندازه C باز نموده نقطه D را مرکز قرار داده قوسی رسم میکنم

۵) به همین قسم دهن پرکار را به انداز b باز نموده نقطه b را مرکز قرار داده قوسی رسم میکنیم که قوسی اولی را درنقطه C قطع کند

۶) نقطه C را باB و D وصل کنیم چهارضلعی A,B,C,D که پیدا میشود عبارت از چهارضلعی مطلوب است .



شکل ۴۲۷: چهارضلعی محدب

۲- برای ترسیم متوازی الاضلاع که دوضلع وزاویه مابین این دوضلع داده شده باشد قرارشکل ذیل

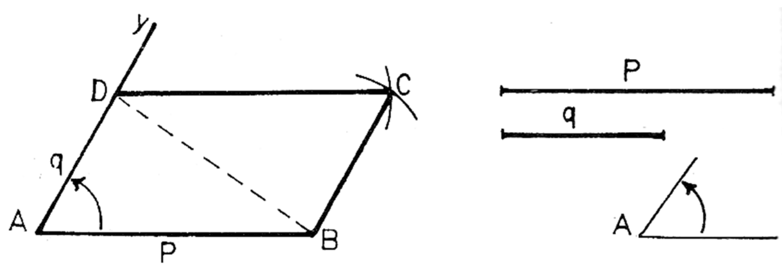
۱) Pو q اندازه دوضلع و A زاویه مابین آن دوضلع میباشد .

۲) خط AB را به اندازه P رسم کرده ودر نقطهA آن زاویه A را طوری انتقال میدهیم که زاویه BAY مساوی به زاویه A باشد .

۳) بعداً از AD,AY را به اندازه q جدا کرده و دهن پرکار را مساوی به AB=p باز نموده وD را مرکز قرار داده قوسی را رسم می نمائیم .

۴) و همچنان دهن پرکار را به اندازه AD=q باز کرده و نقطه B را مرکز قرار داده قوسی دیگر را رسم میکنیم .

۵) قوسی اولی را نقطه مانند C قطع کند بعدازاتصال C به B و D متوازی الاضلاع مطلوب ABCD بدست میاید.



شکل ۴۲۸: متوازی الاضلاع

۳- برای ترسیم یک مربع که طول یک ضلع آن داده شده باشد قرار شکل ذیلاً ترسیم می نمائیم .

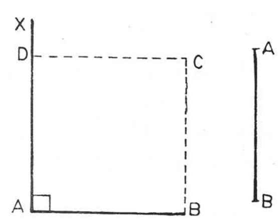
۱) AB طول یک ضلع مربع است .

۲) درنقطه A قطعه خط AX , AB را عمود بالای AB رسم میکنیم .

۳) بعداً از AD,AX را به انداز AB جدا نموده و دهن پرکار را به اندازه AB باز کرده اولاً نقطه D را مرکز قرار داده قوس رسم میکنیم .

۴) بعداً دهن پرکارو تغیر نداده نقطه B را مرکز قرار داده قوس دیگری رسم می نمائیم.

۵) که قوس اولی را در نقطه C قطع کند که ABCD عبارت از مربع مطلوب است .



شکل ۴۲۹: مربع

۴- برای رسم کردن مثلث که قاعده ، ارتفاع، و میانه مربوط به قاعده داده شده باشد قرار شکل ذیلاًاست .

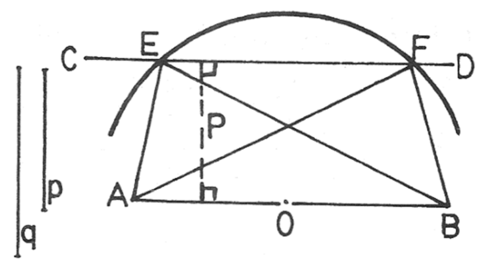
۱) قطعه خط AB قاعده وpو q به ترتیب ارتفاع و میانه مثلث مذکور باشد.

۲) قرار شکل قطعه خط CD را طوری موازی به قاعده AB رسم می نمائیم که فاصله آن با اندازه ارتفاع داده شده p باشد .

۳) از نقطه تنصیف AB یعنی O قوسی را رسم میکنیم که شعاع آن به اندازه میانه داده شده یعنی Q باشد .

۴) طبیعی ست که قوس مذکور CD را در E و F قطع میکند

۵) مثلث های EAB و FAB عبارت از مثلث های مطلوب اند یعنی مسئله دو حل دارد.



شکل ۴۳۰: ترسیم مثلث

۵- برای ترسیم متوازی الاضلاع که مساحت آن معادل به مساحت مثلث ABC بوده و وسعت یک زاویه آن مساوی به یک زاویه داده شده باشد قرار شکل ذیل .

۱) مثلث ABC ویک زاویه α داده شده است

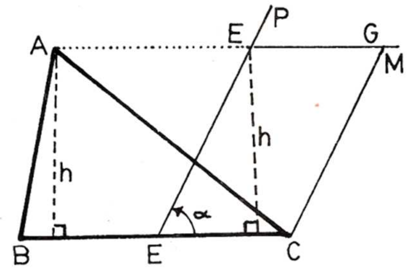
۲) میخواهیم متوازی الاضلاع را رسم کنیم که وسعت یک زاویه ان مساوی به α بوده واز حیث مساحت معادل به مثلث ABC باشد.

۳) قرار شکل میانه AE مثلث را رسم می نمائیم و در نقطه E زاویه α را طوری انتقال میدهیم که یک ضلع آن EC باشد . طبیعست که ضلع دیگر آن EF خواهد بود.

۴) از A یک خط موازی AM را به BC رسم میکنیم . که EP را در F قطع کندو هم از نقطه C یک خط موازی به EP رسم میکنیم که AM را G قطع نماید

۵) شکل ECGF عبارت از متوازی الاضلاع مطلوب است .

۶) اگر به شکل دقت شود واضح است که مساحت مثلث ABC دو چند مساحت مثلث AEC است همچنان مساحت متوازی الاضلاع ECGF نیز دوچند مساحت مثلث AEC است زیرا دارای قاعده و ارتفاع مشترک اند. و علاوه برآن یک زاویه متوازی الاضلاع مذکور معادل به زاویه داده شده α است پس در نتیجه ECGF متوازی الاضلاع مطلوب است



شکل ۴۳۱: متوازی الاضلاع

۶- جهت ترسیم مثلث که از حیث مساحت معادل به یک چهار ضلعی محدب داده شده ABCD باشد قرار شکل ذیلاً عمل می نمائیم .

۱) چهار ضلعی محدب ABCD داده شده است

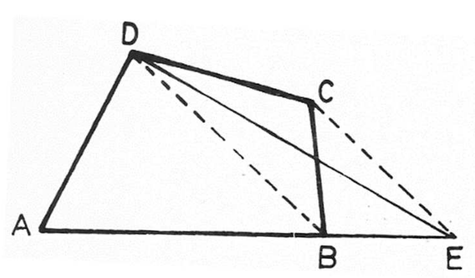
۲) میخوهیم مثلث را رسم کنیم که از حیث مساحت معادل به چهار ضلعی موصوف باشد .

۳) D را به B وصل نموده و از C یک موازی به DB رسم میکنیم . که امتداد یافته AB را در E قطع کند بعداً D را به E وصل میکنیم DAE عبارت از مثلث مطلوب است .

یاداشت: چون مثلث های فوق الذکر یعنی EDB و CDB دارای قاعده مشترک DB است و P مابین دو خط موازی DB وCE واقع اند لذا آنها از حیث مساحت معادل یک دیگر اند یعنی مساحت مثلث CDB برابر مساحت مثلث EDB است اگر به هردو طرف معادله نظر اندازی شود مساحت مثلث DAB علاوه شد چنین بدست میاید مثلث DAB+CDB=DAB+EDB ویا ABCD=DAE میباشد.

بادرنظرداشت عین روش ما میتوان هرنوع مضلع محدب راکه دارای(n) ضلعی باشد با یک مضلع (n-1) ضلعی تبدیل کنیم که مضلع n ضلعی داری عین مساحت باشد.

n عدد تام بوده n>3 میباشد.



شکل ۴۳۲: چهارضلعی محدب

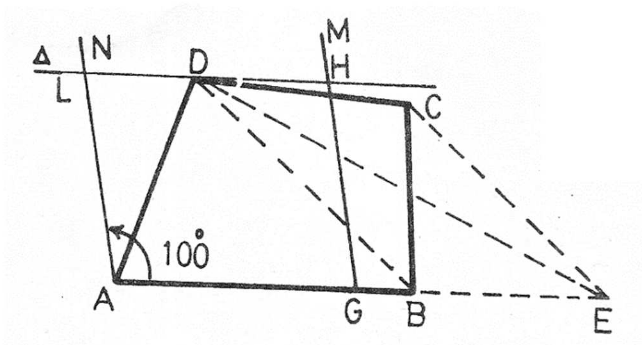
۷- برای ترسیم متوازی الاضلاع که یک زاویه آن معادل به یک زاویه داده شده بوده و مساحت آن نیز معادل با مساحت چهار ضلعی محدب ABCD باشد قرار ذیل

۱) ABCD یک چهار ضلعی محدب داده شده و زاویه داده شده متوازی الضلاع مطلوب صد درجه است

۲) میخواهم متوازی الاضلاع را رسم کنیم که یک زاویه آن صد درجه بوده واز حیث مساحت معادل به چهارضلعی ABCD باشد .

۳) قرار شکل D را به B وصل کرده از نقطه C ، CE را موازی DB رسم می نمائیم که متداد یافته AB را درE قطع میکند حال D را به E وصل میکنیم .

۴) مساحت مثلث ADE حاصله معادل به مساحت چهارضلعی ABCD میباشد .



شکل ۴۳۳:متوازی الاضلاع

رهنمایی و حل مسائل فصل چهارم

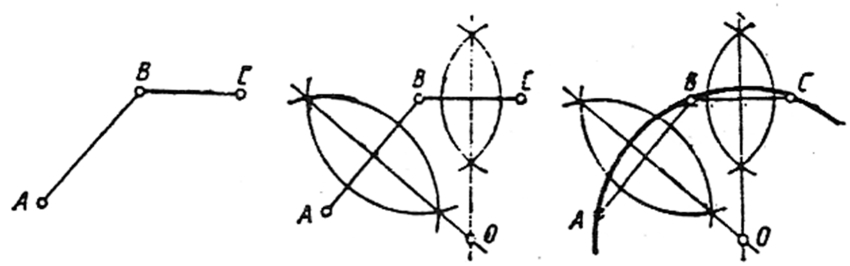
۱) دایره را ازطریق سه نقطه قرار ذیل عبور میدهم.

۱- نقاط A,B,C داده شده است .

۲- نقطه A را به نقطه B و نقطه C را به نقطه B وصل مینمائیم .

۳- قطعه خطهای AB و BC را به دو حصۀ مساوی تقسیم میکنیم .

۴- نقطه O عبارت از مرکز دایره میباشد که از نقاط A,B,C میگذرد .



شکل ۴۳۴: دریافت مرکز دایره

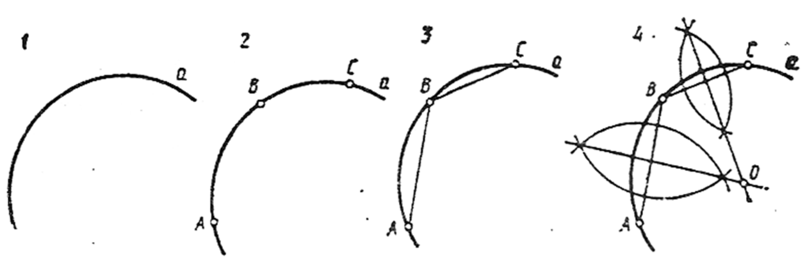
۲) برای دریافت مرکز قوس قرار ذیلاً عمل مینمائیم . شکل()

۱- قوس a داده شده است .

۲- به روی قوس a سه نقطه کیفی C,B,A را تعین می نمائیم .

۳- وترAB و ترBC را ترسیم مینمائیم .

۴- وترهای AB و BC را به دوحصه مساوی تقسم می نمائیم نقطه O عبارت از مرکز قوس A میباشد .



شکل ۴۳۵: دریافت مرکز دایره

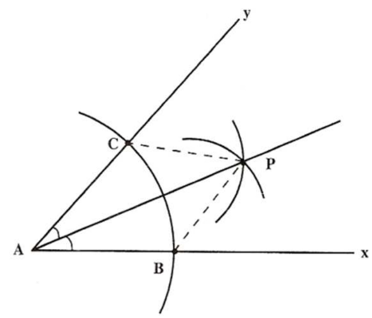
۳) جهت تقسیم یک زاویه به چهار حصه مساوی ذیلاً عمل می نمائیم . قرار شکل()

۱- زاویه XAY داده شده است .

۲- اول زاویه XAY را به دو حصه مساوی که قبلاً ذکر گردیده تقسم می نمائیم .

۳- بعداً هر زاویه یعنی YAP و PAX هرکدامی آن را به دو حصه مساوی تقسم می نمائیم.

۴- در نتیجه زاویه را به چهار حصه مساوی توسط خطکش و پرکار تقسم میگردد .



شکل ۴۳۶: ناصف الزاویه

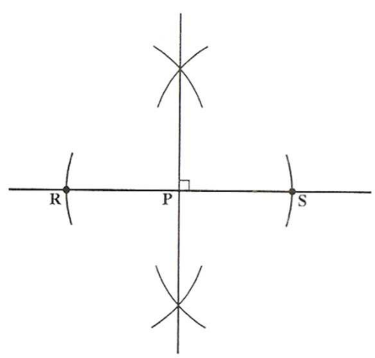
۴) جهت تقسیم یک قطعه خط توسط پرکار وخط کش ذیل عمل می نمائیم .

۱- خط AB داده شده است

۲- خط متذکره اول به دوحصۀ مساوی توسط پرکار وخط کش تقسیم می نمائیم .

۳- بعداً هرحصۀ جدا گانه به دو حصۀ تقسیم می نمائیم.

۴- در نتیجه خط متذکربه چهار حصۀ مساوی تقسیم میگردد .



شکل ۴۳۷: ناصف عمودی

۱- توسط خطکش و پرکار میتوان یک قطعه خط داده شده را به قسمت های مساوی تقسیم نمود قطعه خط AB داده شده است .

۲- در این حالت از قضیه تالس و خواص ان کمک میگیریم .

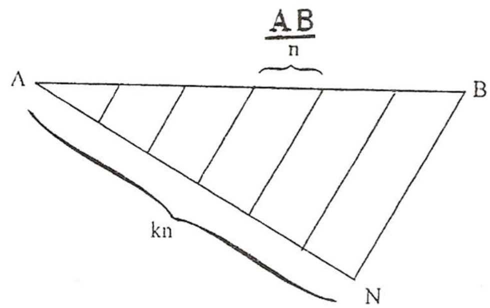
۳- به این ترتیب که برای تقسیم قطعه خط AB به قسمت های مساوی از یک سر قطعه خط AB مانند A قطعه خط متقاطع به آن به طول KN رسم میکنیم .

۴- سپس ان را به حصه های مساوی (n) قسمت های مساوی تقسیم میکنیم .

۵- از آخرین نقطه تقسیم(N) به سر دیگر قطعه خط مفروض B وصل کرده و در آخر از هر یک از نقاط تقسیم خط موازی BN رسم میکنیم تا AB را قطع کند .

۶- قطعات بدست آمده روی قطعه خط AB همگی با هم برابر بوده و طول هریک $\frac{1}{n}$طول AB میباشد .

تذکر:قطعه خط AN نباید با قطعه خط AB زاویه ۱۸۰ درجه بسازد.



شکل ۴۳۸: تقسیم قطعه خط به حصه های مساوی

۵) جهت ترسیم مماس نقطه خارج به دایره نقاط ذیل را یادآوری می نمائیم .

۱- مماس به دایره عبارت از مستقیم است که به محیط دایره یک نقطه مشترک داشته باشد.

۲- این نقطه بنام نقطه تماس یاد میشود

۳- مستقیم مماس همیشه عمود با شعاع میباشد که از نقطه تماس میگذرد .

۴- دو نوع مماس میتوان بالای محیط دایره رسم گردد .داخلی و خارجی

A. مماس داخلی

B. مماس خارجی

- اگر هردو دایره به یک طرف مستقیم مماس قرار داشته باشد . بنام مماس خارج یاد میگردد طبق
- اگردایره ها به هردو طرف مستقیم مماس قرار داشته باشند بنام مماس داخلی یاد میشود .

۵- از نقطه A که خارج از محیط دایره قرار دارد مماس به دایره رسم می نمائیم

a) دایره و نقطه A داده شده است

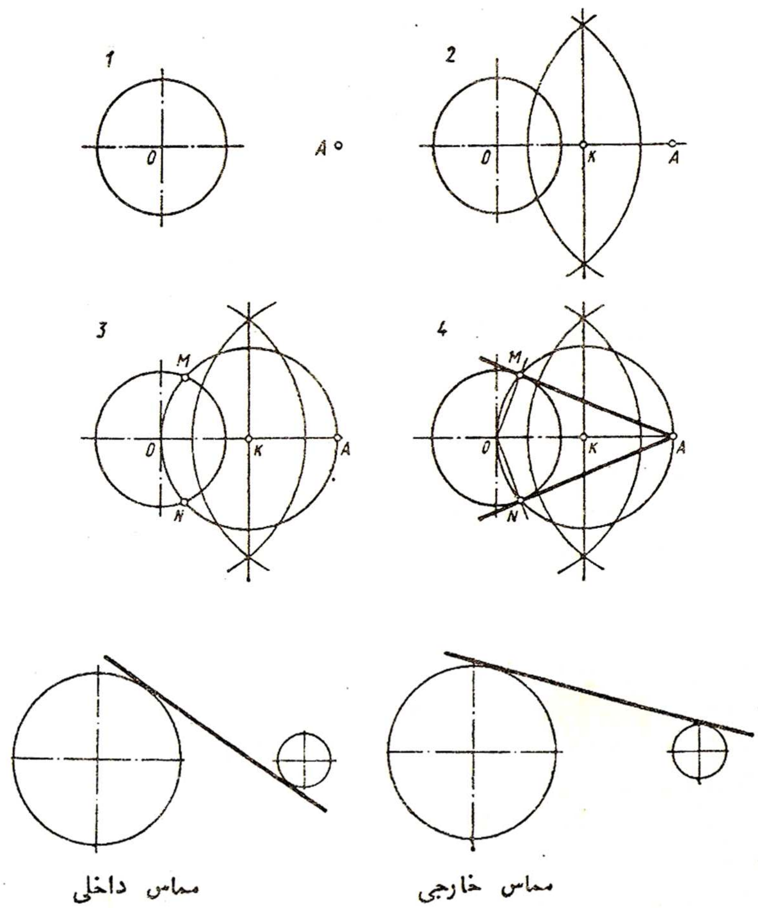
b) مرکز دایره O را به نقطه A وصل می نمائیم.

c) قطعه خط OA را به دو قسمت مساوی قسمت میکنیم

d) در نتیجه نقطه K را دریافت میداریم

e) از مرکز K دایره بشعاع R=KA ترسیم می نمائیم و نقاط MوN را دریافت میداریم.

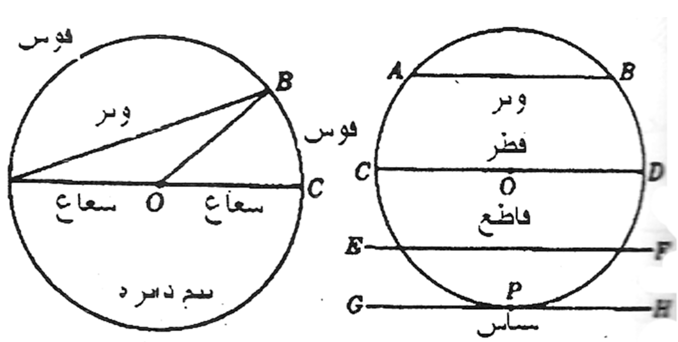
f) AM و AN مماس به دایره میباشد .



شکل ۴۳۹: مماسها

۶) دو وتر نابرابر دریک دایره به مرکز(O)،AB و CD داده شده است .

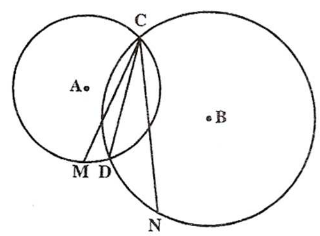
۱- دربین وتر های AB و CD هرکدام آنها که دراز تر باشد به مرکز دایره نزدیکتر میباشد.



شکل ۴۴۰:وتر دایره

۷) دو دایره به مرکز A و B داده شده است طوریکه در نقطه C و D یک دیگر را قطعه نموده است

- این وتریعنی CD وتر مشترک دو دایره است یعنی قطعه خط CD جواب مسئله است .
- زیرا هروتر دیگر مانند CM و CN از دو دایره به مرکز دایره نزدیکتر است پس طول شان بیشتراست .
- تغییرات طول وتر CD اگر نقطه D روی دایره A حرکت کند تا وضع CM درآید ، طول وتر مشترک دو دایره افزایش پیدا میکند تا هنگامیکه این وتر موازی خط المرکزین دو دایره شود ، که دراین حالت حد اکثر مقدار خود را دارا است.
- در ادامه حرکت از C به سمت D طول وتر مشترک به تدریج کم میشود تا هنگامکه بر نقطه تقاطع D منطبق شود که دراین حالت کمترین طول را دارد .



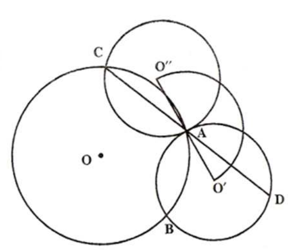
شکل ۴۴۱: وتر دوایر

۸) اگرCAD وتر خواسته شده باشد که درآن CA=AD است چنانچه نقطه D را حول نقطه A دوران برابر $\propto = 180°$ داده شود D برC منطبق مشود وچون نقطه D معلوم نیست پس باید دایره O′ حول نقطه A دوران داده شود و از آنجا حل مسئله چنین است .

۱- دایره O′ حول نقطه A به اندازه $\propto = 180°$ دوران میداهیم تا به صورت دایره O″ درآید

۲- نقطه برخورد O″ به دایره O نقطهC و خط که C را به A وصل میکند دایره O′ را درD قطع می نمائید

۳- در نتیجه CAD وتر خواسته شده است .



شکل ۴۴۲: وتردوایر

۹) دو دایره O و O’ و نقطه P داده شده است .

۱- از نقطه P قاطع نسبت به دو دایره رسم می نمائیم .

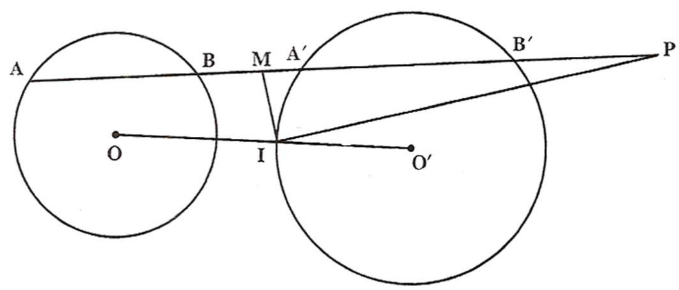
۲- فرض کنیم B=B’A’ و I ووسعت OO’ باشد

۳- تصویر I روی PA نقطه M است

۴- پس M وسعت A’B وهمچنین وسعت AB’ است در نتیجه MB’ . MA=MA’ . MB

۵- پس M روی محوری اصلی دودایره O و O’ وهمچنین روی محیط دایره به قطر IP است

۶- درنتیجه محل تقاطع آنها است به عین نقطه M قاطع مطلوب رسم میشود مسئله دو یا یک یا صفر جواب دارد.



شکل ۴۴۳: وتر دوایر

رهنمایی و حل مسائل فصل پنجم

۱. شعاع داده شده را R میگیریم .

۱- میدانیم که ضلع مثلث متساوالاضلاع محاط در دایره به شعاع R مساوی $R = \sqrt{3}$است

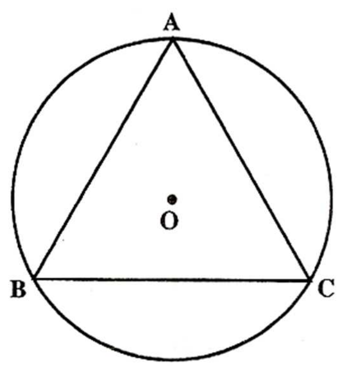
۲- بنابراین قطعه خط به طول $R = \sqrt{3}$رسم میکنیم (روش رسم درشکل مشخص است)

۳- آنگاه نقطه دلخوا A را روی دایره در نظر گرفته به مرکز A و به شعاع $R = \sqrt{3}$دایره رسم میکنیم

۴- تا دایره O را در Bو C قطع کند .

۵- B را به C وصل میکنیم مثلث ABC جواب مسئله است .

تبصره:- میتوان دایره را به شش قوس مساوی تقسیم کنیم و نقطه های تقسیم را یکی در میان با هم وصل کنیم .



شکل ۴۴۴: مثلث محاط در دایره

۲. شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع را R فرض میکنیم .

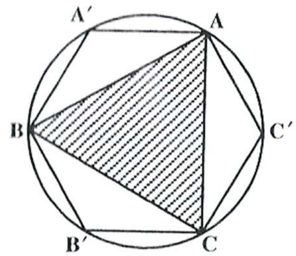
۱- این دایره را رسم میکنیم .

۲- سپس دایره رسم شده را به شش قسمت مساوی تقسیم میکنیم .

۳- به این ترتیب که وتر های به طول R بطوری متوالی روی دایره پیدا میکنیم .

۴- سپس شش نقطه دست امده را یک درمیان با هم وصل میکنیم.

۵- مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره به شعاع R بدست میاید.



شکل ۴۴۵: مثلث محاط در دایره

۳. دایره I را دایره محاطی درونی مثلث متساوی الاضلاع ABC میگیریم .

۱- میدانیم که مرکز ثقل مرکز ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع برهم منطبق میباشند.

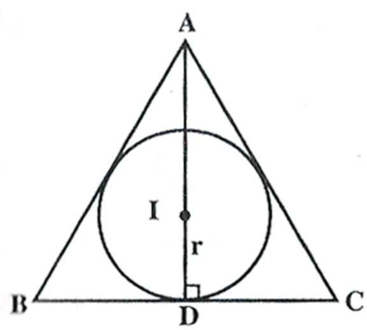
۲- پس I مرکز ثقل مثلث متساوی الاضلاع ABCنیز است .

۳- شعاع دلخوا DO از دایره I را رسم کرده آن از طرف I به اندازه دو برابر خود امتداد میدهیم تا نقطه Aبدست آید .

۴- DA ارتفای مثلث متساوی الاضلاع مورد نظر است .

۵- در D مماس بر دایره I رسم میکنیم و از A دو خط مماس بر این دایره رسم می نمائیم تا مماس رسم شده در D بر دایره را در Bو C قطع کنند.

۶- مثلث متساوی الاضلاع ABC جواب مسئله است .



شکل ۴۴۶: دایره محاط در مثلث

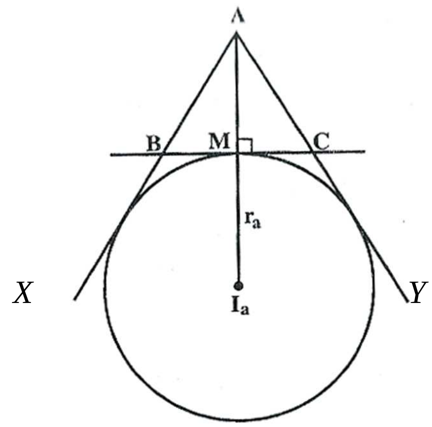
۴. مسئله را حل شده و دایره I_a را دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع BC از مثلث متساوی الاضلاع ABC فرض میکنیم .

۱. میدانیم که این دایره در نقطه M وسعت ضلع BC بر این ضلع مماس است و شعاع $R_a = h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است .

۲. بنابراین رسم مثلث ABC از I_a به M وصل می کنیم و M I_a ازطرف M به اندازه $MA=r_a$ یعنی ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a رسم می کنیم .

۳. سپس از A دو مماس بر دایره (I_a) رسم می نماییم تا مماس رسم شده در M براین دایره را در B و C قطع کنند

۴. مثلث متساوی الاضلاع ABC جواب مسئله است .



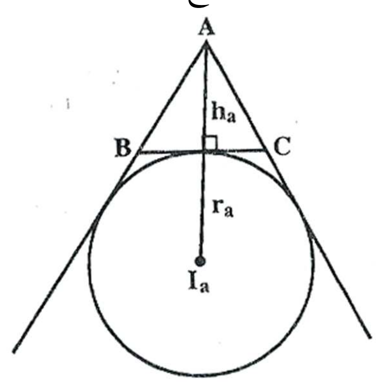
شکل ۴۴۷: مماس های خارجی دایره

۵. به مرکز نقطه اختیاری مانند I_a دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع را رسم میکنیم .

۱- آنگاه مثلث متساوی الاضلاع مورد نظر را همان طوریکه قبلاً دیدیم رسم میکنیم .

۲- ترتیب رأس A بدست میاید.

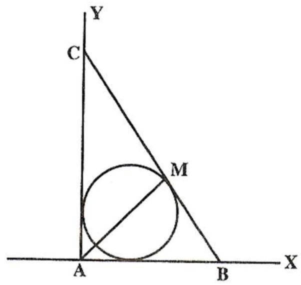
۳- به مرکز A وشعاع AH برابر h ارتفاع مثلث دایره رسم میکنیم مماس مشترک این دو دایره و دایره محاطی داخلی AX را در B و AY را در C قطع میکند مثلث ABC جواب مسئله است .



شکل ۴۴۸: مماس های خارجی در دایره

۶. دایره محاطی داخلی مثلث را رسم میکنیم .

دو مماس عمود بر هم AX و AY را بر آن ترسیم می نمائیم

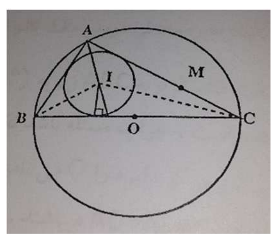


شکل ۴۴۹: دایره محاط در مثلث قایم الزاویه

۷. مسئله را حل شده و مثلث قائم الزاویه ABC ‏(A=90) را که در دایره (O,R) محاط است جواب مسئله میگیریم قرار

وتر این مثالث قائم الزاویه ، مساوی قطر دایره داده شده یعنی BC=2R مقدار معلومی است ونقطه داده شده روی ضلع AC را نیز M می نامیم .

ازطرفی شعاع دایره محاطی مثلث نیز داده شده است ، پس مجموع دو ضلع زاویه قائمه یعنی AB+AC=2R+2r نیز معلوم است . از آن جا



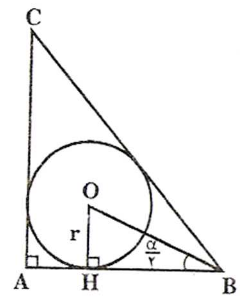
شکل ۴۵۰: مثلث قایم الزاویه محاط در دایره

۸. مسئله را حل شده می گیریم و اگر $B=\propto$ و OH=r شعاع دایره محاطی درونی مثلث قائم الزاویه ABC ‏(A=90) باشد مثلث قائم الزاویه OBH بامعلوم بودن H=90 ،OH=r و $OBH=\frac{\propto}{2}$ قابل رسم است بنابراین برای رسم مثلث قائم الزاویه ABC ‏(A=90) چنین عمل می کنیم

مثلث قائم الزاویه OBH را با معلوم های H=90 ،OH=r و $OBH=\frac{\propto}{2}$ رسم می کنیم

به مرکز O و به شعاع r یک دایره رسم می کنیم سپس از B مماسی براین دایره رسم می کنیم و BH را به اندازه HA=r امتداد می دهیم تا راس A بدست آید از A مماس دیگری بردایره رسم می کنیم تا

امتداد مماس رسم شده از B را در نقطه C قطع کند مثلث قائم الزاویه ABC (A=90) جواب مسئله است . در صورتی که $B=\propto < 90°$ و $r > 0$ باشد مسئله همواره جواب دارد

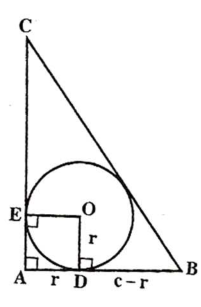


شکل ۴۵۱: شعاع دایره محاطی درونی مثلث قائم الزاویه

۹. فرض میکنیم مسئله حل شده و مثلث قائم الزاویه ABC زاویه $(A = 90°)$ که از آن ضلع AB=c وشعاع دایره محاطی داخلی r معلوم است ، جواب مسئله باشد نقط های تماس ضلع های AB و AC به دایره محاطی داخلی مثلث را D و E و مرکز دایره را O می نامیم .

چهارضلعی ADOE مربع است بنابراین AD=AE=r میباشند .

پس به توجه به این که ضلع AB=c است دو قطع خط AD و DB از آن معلوم است . در نتیجه مثلث AOB با معلوم بودن AD=r ، DB=c-r و ارتفا OD=r قابل رسم است پس روش رسم مثلث قائم الزاویه ABC چنین است . قطع خط BD=c را رسم میکنیم و روی آن قطع خط AD=r را جدا میکنیم از D عمود به اندازه DO=r ترسیم می نمائیم ، به مرکز O وبه شعاع r دایره را رسم میکنیم و از دو نقطه B و A مماس های بر این دار رسم میکنیم تا یک دیگر را در نقطه C رأس سوم مثلث قائم الزاویه ABC $(A = 90°)$ قطع کند . بدین ترتیب مثلث مودر نظر بدست میاید.



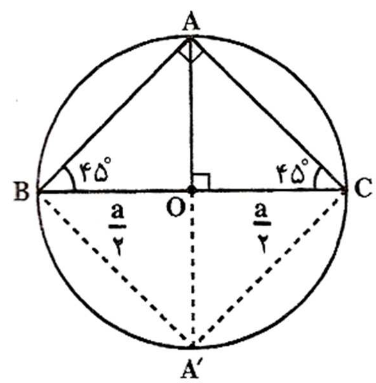
شکل ۴۵۲: روش ترسیم مثلث قایم الزاویه

۱۰. مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC $(A = 90°)$ و AB=AC را در نظر میگیریم . قرار شکل

فرض میکنیم BC=a وتر این مثلث معلوم باشد دایره به قطر BC از رأس A میگذرد و AO ناصف عمودی BC است (O وسعت BC است) . بنابراین برای رسم این مثلث قطع خط BC=a را رسم میکنیم . سپس به قطر BC دایره را رسم میکنیم و مرکز آن را O می نامیم .

قطر عمودبرBC را رسم میکنیم تادایره را در A قطع کند . از A به B و C وصل میکنیم . مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC جواب مسئله است .

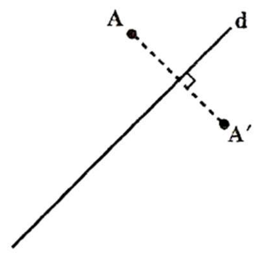
یاداشت : قطر که از O عمود بر BC رسم میشود دایره را در نقطه دیگر A′ نیز قطع میکند و مثلث A'BC هم مانند با مثلث ABC جواب دیگر مسئله است .



شکل ۴۵۳: روش ترسیم مثلث قایم الزاویه

رهنمایی و حل مسائل فصل ششم

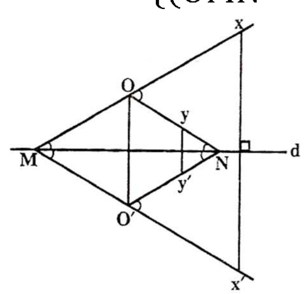
۱. در تناظر محوری اندازه های قطعه خط ها حفظ میشوند . پس دلیل هم مانند بر دلیل برابری هر شکل به انتقال یافته آن است . هرشکل F و تناظر محوری آن به صورت معکوس متساوی اند ، زیرا برای انطباق آنها باید تبدیل یافته شکل از مستوی خارج شود و حول محور تناظر بر خود شکل برگردانیده شود .



شکل ۴۵۴: تناظر محوری

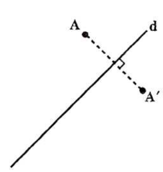
۲. اگر در شکل X'O'Y' زاویه متناظر زاویه XOY نسبت به محور D باشد

$$\{(\mathrm{OMN} = \mathrm{O'MN}), (\mathrm{ONM} = \mathrm{O'NM})\}$$



شکل ۴۵۵: تناظر

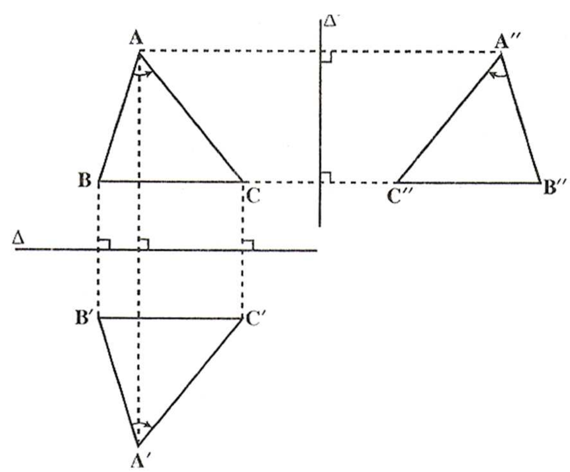
۳. در واقع ، اگر تناظر نسبت به خط D نقطه A را به نقطه A' ببرد آنگاه دومین تناظر نسبت به D نقطه A' را به A بر میگردانند ، یعنی براثر دو تناظر وضع نقطه A تغیر نمی کند حکم قضیه میتواند بدین صورت نیز بیان شود : دو تناظر نسبت به یک خط یک دیگر راخنثا میکند



شکل ۴۵۶ : تناظر محوری

۴. به طور مثل مثلث های $A'B'C'$ و $A''B''C''$ را تناظر های محوری مثلث ABC نسبت به دو خط Δ و Δ' بدست میاوریم .

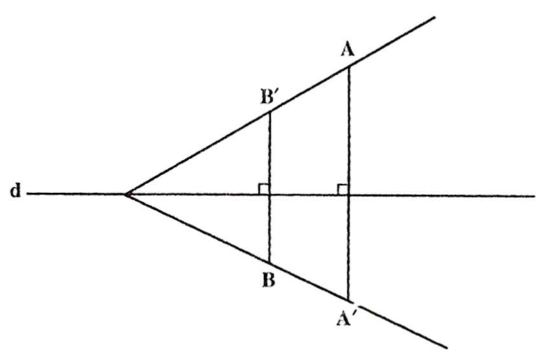
بنابر خواص تناظر محوری دومثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ معادل اند اما زاویه A' جهتش مخالف زاویه A است ، زاویه A'' جهت اش مخالف جهت زاویه A است ، بابراین دوزاویه A' و A'' هم جهت استند . همین طور برای زاویه های دیگر قابل اثبات است . پس دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ هم جهت اند .



شکل ۴۵۷: تناظر محوری

۵. متناظر های دو نقطه A و B نسبت به خط d را بترتیب $A'B'$ می نامیم .

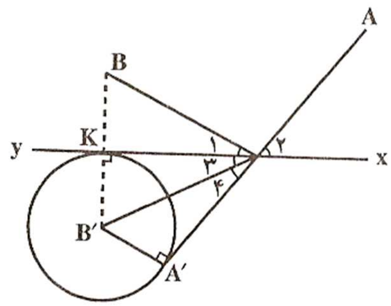
خط AB' و BA' جواب مسئله اند . طبیعست که نقطه تلاقی این دو خط روی محوری تناظر d واقع است .



شکل ۴۵۸: متناظر نظر به خط d

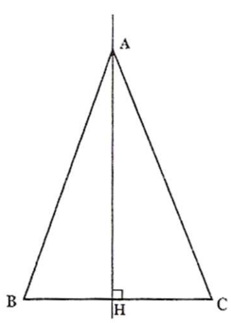
۶. تناظر نقطه B را نسبت به محورXوY بدست میاوریم و B' می نامیم .

به مرکز ′B بشعاع BK (k نقطه تلقی ′BB به XY است) دایره رسم میکنیم . از نقطه A خط بر این دایره مماس رسم میکنیم. M نقطه تلقی این خط به XY جواب مسئله است، زیرا اگر از M به ′B وصل کنیم داریم زاویه M1=M3=M4=M2 است پس زاویه AMX مساوی به زاویه 2BMY است.



شکل ۴۵۹: متناظر نظر به محور xy

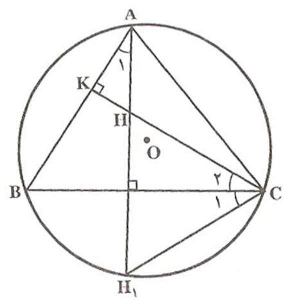
۷. ارتفاع AH از مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) را رسم میکنیم . چون AH ناصف عمودی قطعه خط BC است (HC=HB وAHعمود بر BC است) . پس دو نقطه B و C متناظر یکی دیگر نسبت به ارتفاع AH میباشند . بنابراین خط AH محور تناظر مثلث ABC است .



شکل ۴۶۰: متناظر نسبت به ارتفاع

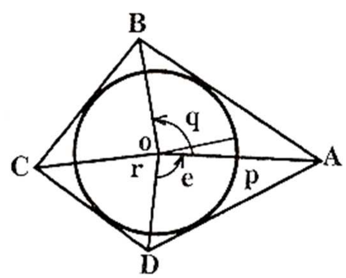
۸. ارتفاع AH از مثلث ABC را ادامه میدهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه H_1 قطع کند . از H_1 به C وصل میکنیم . با توجه به شکل

$A_1=C_1=\frac{BH}{2}$ و $A_1=C_2$ (ضلع هایشان برهم عمود اند) . بنابراین زاویه $C_1=C_2$ و چون CB عمود بر HH_1 است پس CB ناصف عمودی HH_1 است در نتیجه H_1 متناظر نقطه H نسبت به ضلع BC است. برای تناظر نقطه H نسبت به ضلع های دیگر نیز مطلب به همین روش ثابت میشود.



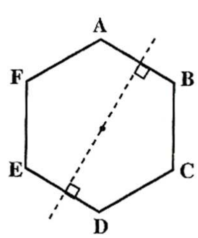
شکل ۴۶۱: متناظر H_1 متناظر نقطه H نسبت به ضلع BC

۹. ترکیب $\delta = S_I o S_r o S_p o S_q$ را مورد ملاحظه قرار دهید که در آن r, q, p و ۱ خطهای محتوی ناصف الزاویه های چهارضلعی است به دلیل $\delta(AD) = AD$ و $\delta(O) = O$ یک انتقال همانند محسوب می شود . $S_q o S_p = S_r o S_1$ بوده و از این رو زاویه $(q, p) = (1, r)$ را داریم . در نتیجه $COD + AOB = 180$ (شکل) خواهد بود .



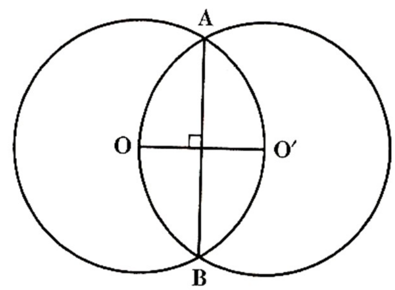
شکل ۴۶۲: ناصف الزاویه های چهارضلعی

۱۰.هر n ضلعی منظم قابل محاط شدن در یک دایره است و ناصف عمودی هر ضلع از n ضلعی منظم از مرکز دایره میگذرد . یعنی قطر دایره است به سادگی ثابت میشود که هریک از ناصف های عمودی محور تناظر استند . اگر تعداد ضلعهای n جفت باشد ، محور تناظرهابروسعت های دوضلع روبرو که موازی میگذرند و اگر تعدا ضلع های n ضلعی منظم تاق باشد هرمحور تناظر از راس و سعت ضلع روبرو ان رأس میگذرد .



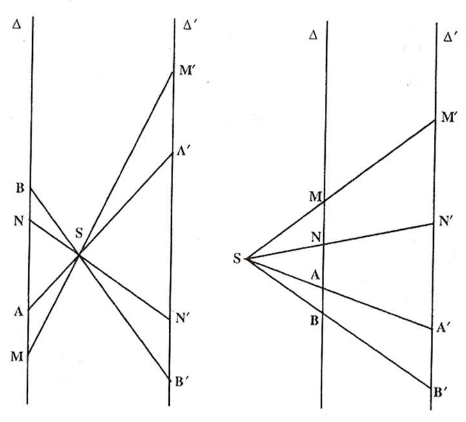
شکل ۴۶۳:محوری تناظر شش ضلعی منظم

۱۱. بلی زیرا تناظر محوری هرشکل بخود آن شکل مشابه است تناظر محوری مستطیل نیز مستطیل است .
۱۲. وتر مشترک دو دایره مساوی ناصف عمودخط المرکزین آن دو دایره است و مرکز هردایره روی دایره دیگر قرار دارد .



شکل ۴۶۴: خط المرکزین دوایر

۱۳. نقطه S مرکز و K نسبت تجانس و خط Δ مفروض اند (شکل) A′B′ مجانس های دو نقطه Aو B را یافته به هم وصل میکنیم تا راس Δ' بدست آید
ثابت میکنیم که Δ' مجانس Δ است ، یعنی مجانس هر نقطه مانند M از خط Δ روی Δ' واقع است از تساویهای $\frac{SA'}{SA} = k$ و $\frac{SB'}{SB} = k$ تساوی زیررا نتیجه می گیریم : $\frac{SA'}{SA}$=$\frac{SB'}{SB}$ از این تساوی معلوم می شود که خط A′B′ یعنی Δ' موازی با خط AB یا Δ می باشد . حال اگر M نقطه ای دیگر از خط Δ و M′ مجانس آن باشد . به همین ترتیب ثابت می کنیم که باید A′M′ یعنی AM یعنی موازی با Δ باشد و چون از A′ بیش ازیک خط به موازات Δ نمی توان رسم کرد ، A′M′منطبق بر Δ' یعنی M′ مجانس M ، روی Δ' است



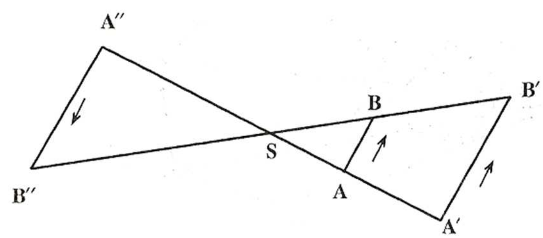
شکل ۴۶۵: نسبت تجانس خطوط

می توان به سهولت ثابت کرد بعکش ،هرنقطه مانند N' از خط Δ' مجانس یک نقطه N' از خط Δ است (N نقطه تلاقی خط Δ با خط SN' است).

اگر نقطه S (مرکز تجانس) روی Δ و Δ' را همواره می توان متجانس دانست ، در این صورت ، مرکز تجانس نقطه دلخواهی است مانند S که روی هیچ یک آز آنها واقع نباشد(نسبت تجانس چیست ؟)

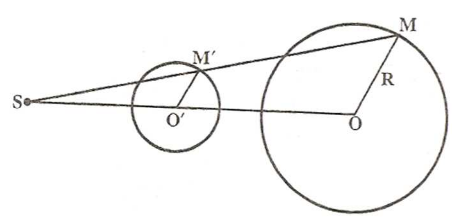
نتیجه ۱:- مجانس هر پاره خط ، پاره خط دیگری است که نسبت اندازه اش به اندازه آن پاره خط مساوی قدر مطلق نسبت تجانس است $|k|=\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}$

نتیجه ۲:- مجانس مستقیم هر وکتور ، وکتوری است موازی و همجهت با آن و مجانس معکوس هروکتور، وکتوری موازی و در جهت مخالف آن است (شکل)



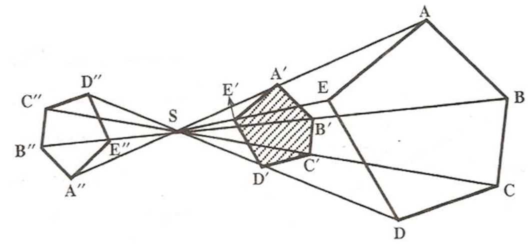
شکل ۴۶۶: مجانس مستقیم وکتور

۱۴. نقطه O' قرار شکل مجانس O مرکز دایره و نقطه M' مجانس یک نقطه M از دایره O را بدست میاوریم . هرگاه K را مثبت فرض کنیم $k=\frac{O'M'}{OM}$ بدست میاید : $OM'=KR$ یعنی فاصله مجانس های نقطه های دایره O از نقطه ثابت O' مقدار ثابت KR است . پس مکان M' دایره است به مرکز O' و شعاع KR اگر K منفی باشد در استدلال بالا بجای آن باید $|K|$ قرار داد .



شکل ۴۶۷: نقطه O' مجانس O مرکز دایره

۱۵. اگر چند ضلعی ...$A'B'C'D'E'$ مجانس چند ضلعی $ABCDE$ باشد میدانیم که شکل $\frac{A'B'}{AB}=k$ و $\frac{B'C'}{BC}=|k|$ و . . . پس $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots=|k|$ ونیز میدانیم که : زوایه $A'=A$ و $B'=B$و . . .



شکل ۵۶۸: مجانس پنج ضلعی نظر به نقطه S

نقطه S را مرکز تشابه به مرکز تجانس دو چند ضلعی و نسبت K را نسبت تشاب یا نسبت تجانس دو چند ضلعی می نامند .

نتیجه : اگر A'B'C' مجانس ABC به نسبت K باشد ABC نیز مجانس A'B'C' است اما نسبت $\frac{1}{K}$. زیرا که : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = \left|\frac{1}{K}\right|$

یادآوری : میدانیم که هرگاه در دوشکل ضلعهای متناظر متناسب و زاویه های متناظر متساوی باشند دوشکل را متشابه می نامند : پس قضیه ای را که گفتیم می توان به این صورت بیان کرد : مجانس هر ، شکل ، شکلی است مشابه با آن که ضلعهای متناظر شان موازی باشند .

رهنمایی و حل مسائل فصل هفتم

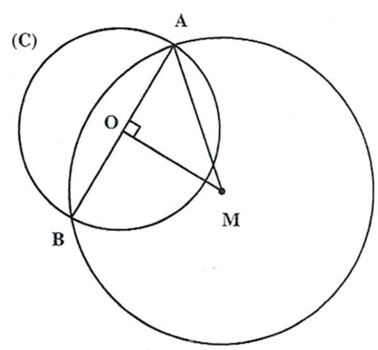
۱. به مرکز نقطه مفروض دایره رسم میکنم که دایره مفروضی را نصف کند یعنی وترمشترک دو دایره ، قطر دایره مفروض باشد.

تحلیل: فرض میکنم مسئله حل شده و دایره به مرکز M دایره مفروضی C(O,R) را در وتر مشترک AB که قطر دایره (O) است، قطع کرده است از M به A وصل میکنیم خط المرکزین دو دایره را نیز رسم مینمایم

میدانم که خط المرکزین دو دایره ، ناصف عمودی وتر مشترک آنها است .

پس MO ناصف عمودی AB است. در مثلث قایم الزاویه MOA داریم $\mathrm{MA}^2 = \mathrm{MO}^2 + \mathrm{OA}^2$ از آن جا نتیجه میشود $\mathrm{MA}=\sqrt{\mathrm{OM}^2 + \mathrm{R}^2}$ که این مقدار شعاع دایره M است

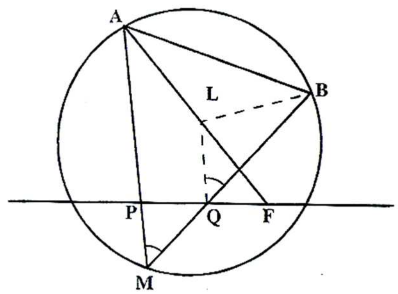
ترسیم از M به O وصل میکنم طول قطعه خط OM مقدار معلومی است. از نقطه M عمود بر OM رسم میکنم تا دایره مفروض C را در دو نقطه A وB قطع کند دایره به مرکز M و به شعاع MA=MB رسم میکنم این دایره جواب مسئله است .



شکل ۴۶۹: وترمشترک دو دایره

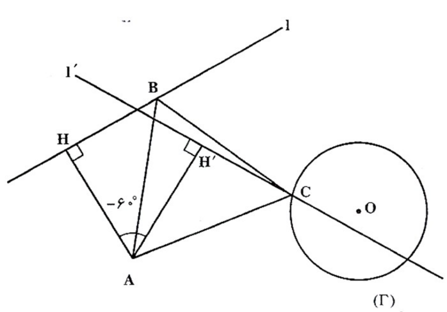
۲. روی یک دایره داده شده ، نقطه تعیین میکنم طوریکه خط های این نقطه را به دو نقطه معلوم واقع بر همین دایره وصل میکند ، خط مفروضی را در دو نقطه که نسبت فاصله هایشان از نقطه معلوم دیگری واقع بر همین خط مقدار معلوم باشد ، قطع کند .
تحلیل : فرض میکنم مسئله حل شده و خط های AM وBM که نقطه های مفروضی A وB واقع بر دایره را به نقطه مطلوب M وصل میکنند ، خط مفروض FPQ را در دونقطه PوQ قطع کنند

مطابق شکل ذیل . اگر F نقطه ثابت مفروض باشد و خط QL که از نقطه Q موازی AM رسم مشود ، خط FA را در L قطع کند ، خواهیم داشت .زاویه LQB=AMB ، و چون وترAB داده شده است زاویه AMB معلوم است از طرف دیگر داریم FL:FA=FQ:FP چون نسبت FQ:FP معلوم است ، پس نقطه L معلوم است . پس قطع خط معلوم LBاز نقطه Q با زاویه مفروض دیده میشود . به این ترتیب یک مکان هندسی برای Q بدست میاید نقطه Q در محل برخورد این مکان هندسی و خط FPQ قرار دارد . خط BQ دایره را در نقطه مطلوب M قطع میکند .



شکل ۴۷۰: دایره

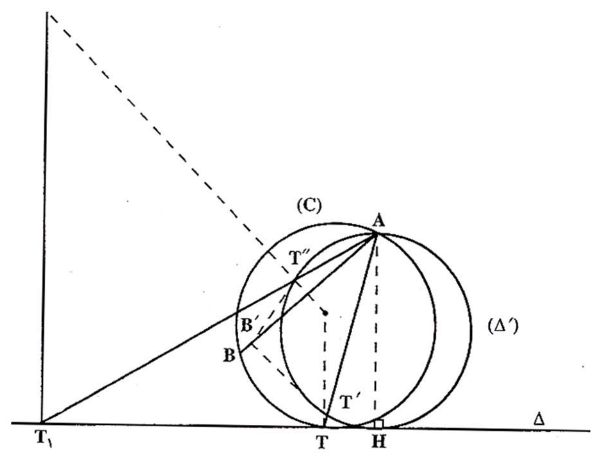
۳. نقطه A خط L و دایره (T) داده شده اند نقطه مثلث متساوی الاضلاع رسم میکنم که یک راس اش نقطه A و دو راس دیگرش یکی روی خط L و دیگری روی دایره T قرار داشته باشد .
حل : فرض میکنم مسئله حل شده و مثلث متساوی الضلاع ABC جواب مسئله باشد. چون AB=AC و زاویه $BAC=60°$ است ، پس نقطه C دوران یافته نقطه B نسبت به مرکز دوران A و به زاویه دوران $60°$ است. بنابراین برای حل مسئله خط L را نصب به مرکز دوران A به زاویه دوران$60°$ دوران میدهیم تا خط L' بدست آید. نقطه تلقی L' با دایره T نقطه C یک راس مثلث خواسته شده است . از Aبه B وصل میکنم و به مرکز A و به شعاع ACدایره رسم میکنم تا خط L را در نقطه B قطع کند. مثلث متساوی الاضلاع ABCجواب مسئله است .



شکل ۴۷۱: نقطه C دوران یافته نقطه B نسبت به مرکز دوران A

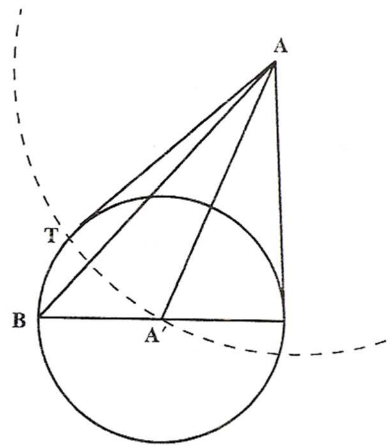
۴. اگر مسئله حل شده باشد و C دایره خواسته شده در نقطه T برخط Δ مماس باشد ، در صورت که شکل را به وصل انعکاس تبدیل کنیم ، منعکس C بر منعکس Δ در T' منعکس T مماس خواهد بود اما اگر قطب انعکاس را یک از نقطه های دایره C بگیریم ، منعکس C خط مستقیم و منعکس Δ دایره خواهد بود مماس برآن خط مستقیم . پس مسئله را به این طریق حل میکنم :

A را قطب انعکاس ومقدار دلخواه مانند AH^2 را طاقت انعکاس فرض میکنم. یعنیAH عمود است که از A بر خط Δ رسم کردایم . منعکس خط Δ دایره Δ' است که قطر AH رسم میشود حال B' منعکس B را بدست میاوریم و از B' به دایره Δ' مماس $T'B'$ را رسم میکنم . از Aبه T' وصل کرده نقطه تلقی AT'به Δ را T مینامیم . دایره که بر A ، B و T میگذرد دایره جواب مسئله است در حالت کلی مسئله دو جواب دارد



شکل ۴۷۲: C دایره خواسته شده در نقطه T برخط Δ مماس

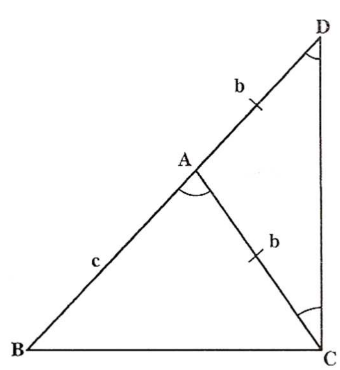
۵. دو نقطه را نسبت به یک دایره مزدوج مینامند ، هرگاه خط قطبی یکی نسبت به دایره از دیگری بگذرد. دایره به مرکز که دو نقطه BوC نسبت به آن مزدوج یکی دیگر باشند بر دایره به قطر BC عمود است . بنابراین دایره به قطر BC را ر سم میکنم . برای تعین شعاع دایره A از نقطه A مماس AT را بردایره به قطر BC رسم میکنم آنگاه به مرکز A بشعاع AT دایره جواب مسئله را رسم میکنم . بساده گی ثابت میشود این دایره چنان است که قطب نقطه B نسبت به آن از نقطه C میگذرد و قطبی نقطه C نسبت به آن از نقطه B میگذرد .



شکل ۴۷۳: نمایش دو نقطه مزوج

۶. مسئله در حل شده گرفته، فرض می کنیم مثلث ABC جواب مسئله باشد . ضلع BA را از طرف A به اندازه BD=AC ادامه می دهیم و ازِD به C وصل می کنم . داریم BD=BA+AD=b+c ازطرفی در مثلث متساوی الساقین ACD داریم : مقدار معلوم $\mathrm{ADC} = \mathrm{ACD} = \frac{1}{1} = \mathrm{A}$ بنابراین مثلث BDC با معلوم بودن ضلع BC=a ضلع، BD=b+c و $\mathrm{BDC} = \frac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{A}$ قابل رسم است این مثلث را رسم میکنم آنگاه عمود منصف ضلع DC را رسم می کنیم تا DB را در نقطه A که رأس سوم مثلث ABC است قطع کند .

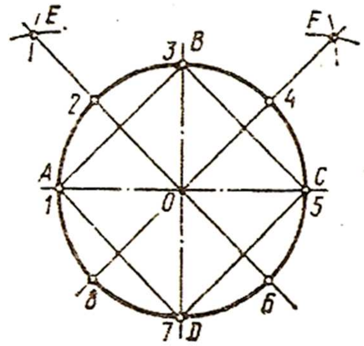
یادداشت:حل این مسئله ممکن نیست ، مگر این که داشته باشیم a<b+c . با فرض برقرار بودن این شرط ، در مثلث BCD زاویه روبرو به ضلع کوچکتر را داریم . بنابراین ممکن است بتوانیم دو مثلث باشرایط مفروض برای BCD رسم کنیم یا ممکن است چنین مثلث قابل رسم نباشد . از هر مثلث کمکی یک و تنهایک مثلث مطلوب میتوان بدست آورد . پس ممکن است مسئله دو جواب ، یک جواب داشته باشد . یااصلاً جواب نداشته باشد



شکل ۴۷۴: مثلث متساوی الساقین

۷. درشکل نشان داده شده است که قطرهای متقابلاً عمود AC و BD دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم میکند ABCD عبارت از مربع است

ناصف الزاویه های AOBوBOC را ترسیم می نمایم نقطه نقاط ۳،۲،۱..۸ دایره را به هشت حصه مساوی تقسیم میکند .

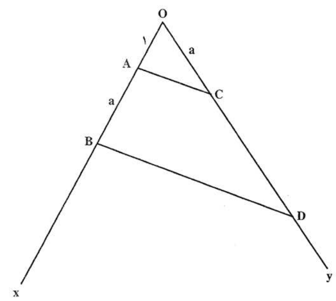


شکل ۴۷۵: تقسیم محیط دایره به هشت حصه مساوی

رهنمایی و حل مسائل فصل هشتم

۱. قطعه خط به طول a داده شده است نقطه قطعه خط به طول $x=a^2$ را رسم میکنم

حل : می توان نوشت $1 \cdot x = a \cdot a$ ویا $\frac{1}{a} = \frac{a}{x}$. حل با استفاده از زاویه دلخواه xOy روی ضلع OX ، OA=1 ، AB=a و روی ضلع OY ، OC=a جدا میکنیم از A به C وصل کرده از نقطه B خط موازی AC وصل میکنیم تا OY را در D قطع کند قطعه خط CD=x است

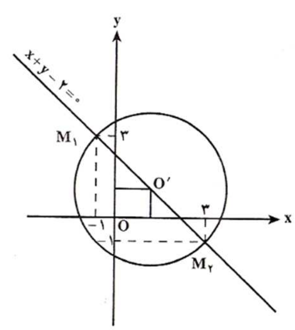


شکل ۴۷۶: قطعه خط به طول $X = a^2$

۲. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را به کمک رسم گراف حل میکنم

حل – این معادله را به صورت معادله تقاطع دو منحنی یا یک خط و یک منحنی میتوان نوشت . به طور مثال میتوان نوشت $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. که این معادله ، معادله طولهای نقطه های تقاطع منحنی به معادله $y = ax^3 + bx^2$ با خط با معادله $y = -cx - d$ است ، و برای تعیین جواب های معادله منحنی و خط اخیر را در یک سیستم محورهای مختصات رسم میکنم و طولهای نقطه های تقاطع آنها را بدقت بدست میاوریم .

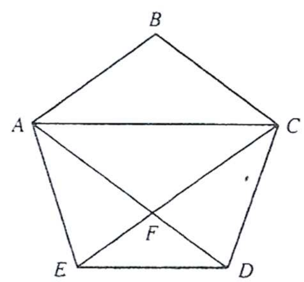
۳. حل گراف $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$ را که دایره به مرکز (۱.۱)و شعاع $\sqrt[2]{2}$ است وخط معادله x+y-2=0 را دریک سیستم مختصات رسم میکنیم و نقطه های تقاطع آنها جواب سیستم است $\left|\begin{matrix} x = -1 \\ y = 3 \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 \end{matrix}\right.$



شکل ۴۷۷: گراف معادله دایره

۴. اقطار یک پنج ضلعی منظم یکدیگررا به نسبت طلائی قرار ذیل تقسیم میکنند.

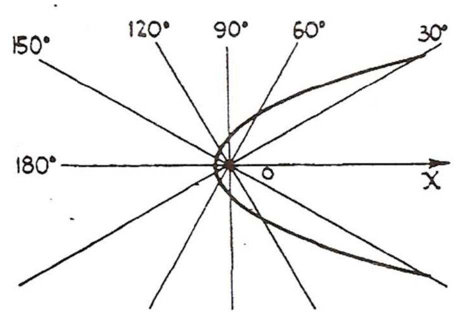
حل . از علایم شکل در توضیح با نشان دادن اینکه AF/FD نسبت طلائی است استفاده میکنم در ذوزنقه متساوی الساقین ACDE مثلث $ACF \sim DEF$ بنابراین AF/FD=AF/AD اماED=BCو BC= AF است، زیرا ABCF لوزی است بنابراین $\frac{AF}{FD} = \frac{AD}{AF}$ یا $\frac{AF}{FD} = \frac{AC}{AF}$لذا AF/FD نسبت طلائی است ، اگر اضلاع پنج ضلعی منظم یک واحد باشد در این صورت طول اقطار آن مقدار عددی نسبت طلائی است .



شکل ۵۷۸: اقطار یک پنج ضلعی منظم

۵. چون $\cos(-\theta) = cos\theta$ است ، لذا منحنی نظربه محورقطب متناظراست (شکل ذیل) برای $\theta = 0$شعاع $r = \infty$ و برای $\theta = 180°$ قیمت شعاع $r = 1$ میشود ، پس منحنی مربوطه بسته نیست (پارابولا است) . فقط چند قیمت در جدول ذیل مرتب میگردد .

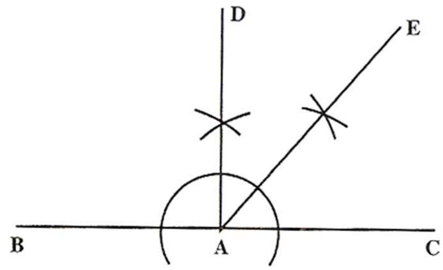
θ:	0°	60°	120°	180°	240°	300°	360°
r:	∞	4	1,3	1	1,3	4	∞



شکل ۴۷۹: منحنی نظربه محورقطب متناظر

رهنمایی و حل مسائل فصل نهم

۱. خط راست BC را در نظر میگیریم از نقطه A واقع براین خط عمود AD را برآن ترسیم میکنیم هریکه از زاویه های BAD و CAD مساوی °۹۰ است . ناصف الزاویه این دو زاویه بطورمثال ناصف الزاویه CAD را رسم میکنیم وآن را AE می نامیم زاویه $CAE=45°$ و $BAE=135°$ است . قرار شکل ذیل



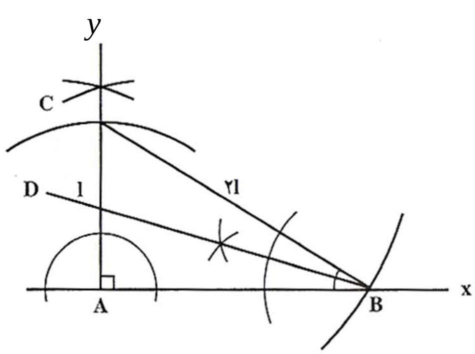
شکل ۴۸۰: ترسیم زاویه $135°$

۲. تثلیث زاویه توسط خط کش و پرکار ناممکن است .

۳. تربیع دایره با خط کش و پرکار نامدرج ناممکن است .

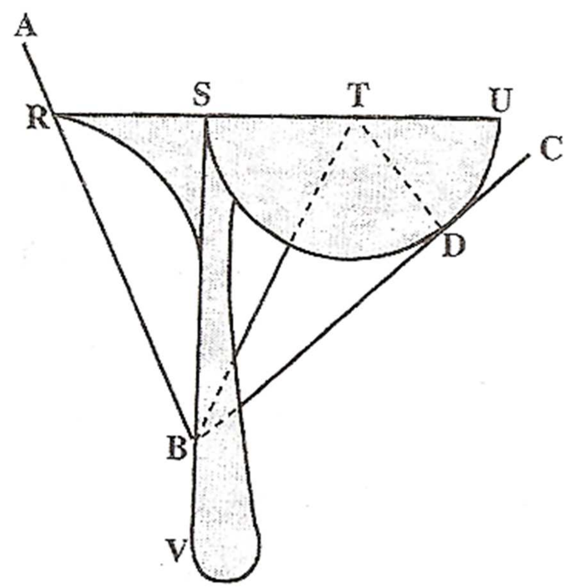
۴. تضعیف مکعب المستطلیل خط کش نامدرج و پرکار ناممکن است .

۵. برای رسم زاویه $30°$ ، مثلث قایم الزاویه ABC که زاویه $A=90°$ را چنان رسم میکنم که وتر BC دوبرابر ضلع AC باشد برای این کاراول زاویه $xAy=90°$ را رسم میکنم . قطع خط AC را باطول دلخوا مثلاً I روی AY جدا میکنیم . به مرکز C و بشعاع دو برابر یعنی AC (2i) قوس رسم میکنیم که A x را در نقطه B قطع کند. از B به C وصل میکنم زاویه $ABC=30°$ است . چون در مثلث قایم الزاویه ABC ضلع مقابل به آن نسب وتر است ، برای رسم زاویه °۱۵ ناصف الزاویه ABC را رسم میکنیم .هریکی از زاویه های DBA وDBC برابر $15°$ میباشد. قرار شکل ذیل



شکل ۴۸۱: ترسیم زاویه $15°$

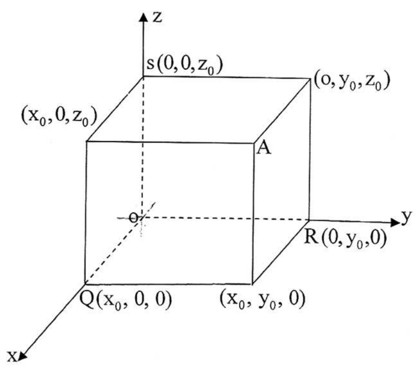
۶. تثلیث زاویه با تبرزین طی سالها وسایل میخانیکی سیستم های مفصل و پرکار های مرکب متعددی برای حل مسئله تثلیث ابداع شده اند . یک وسیله جالب و ابتدائی از این قبل به اصطلاح تبرزین است مخترع تبرزین معلوم نیست اما این وسیله در کتاب مطعلق به سال ۱۸۳۵ توصیف شده است. برای ساختن یک تبرزین از قطعه خط مانند RU که در S وT تثلیث شده به (شکل نگاه کنید) شروع کنید . نیم دایره به قطر SU رسم کنید و SV را بر RU عمود رسم نمائید همچنان در شکل مزبور نشان داده شده کامل کنید . برای تثلیث زاویه مانند ABC به وسیله تبرزین افزار را روی زاویه طوری قرار دهد که R روی BA قرار گیرد SV از نقطه B بگذرد و نیم دایره بر BC مثلاً در D مماس باشد . آنگاه چون میتوان نشان داد که مثلث های RSB,TSB و TDB همه مساوی اند. BS وBT زاویه مفروض را تثلیث میکنند . تبرزین را میتوان بر کاغذگراف با خطکش و پرکار ساخته و سپس به روی زاویه مفروض تنظیم کرد. به تغییر میتوانیم یک زاویه را با خط کش و پرکار تثلیث کینم (با دوتبر زین میتوان یک زاویه را به پنج قسمت مساوی تقسم کرد) قرار شکل



شکل ۴۸۲:تبرزین(فانه)

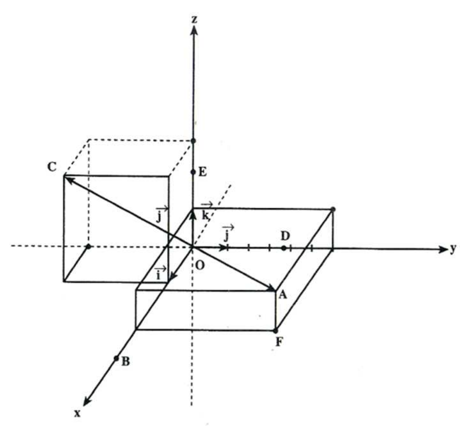
رهنمایی و حل مسائل فصل دهم

۱. به آسانی دیده میشود که نقاط R Q و S یکتا اند. بنابراین به سه اعداد مرتب (X_0, Y_0, Z_0) تنها و تنها یک نقطه اختیار فضا و به یک نقطه اختاری A فضا تنها و تنها سه اعداد مرتب تقابل میکند و قرار تعریف نقطه A داری مختصات قایم (X_0, Y_0, Z_0) میباشد قرار شکل



شکل ۴۸۳:مکعب

۲. حل سیستم کمیته مختصات O-xyz را در نظر میگیریم و باتوجه به عدد های داده شده نقطه های مورد نظر را مشخص می کنیم . قرار شکل

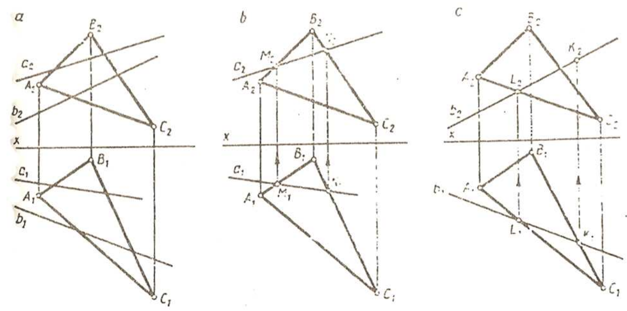


شکل ۴۸۴: مکعب مستطیل

۳. فرض کنم که مستقیم a شامل این مستوی است در این صورت مستقیم باید حد اقل دونقطه مشترک با مستوی مذکور داشته باشد نقطه در اپیور (شکل B) نقاط تقاطع مستقیم a_1 را با قطه خط های A_1B_1 و B_1C_1 به M_1 و N_1 نشان میدهیم از نقاط مذکور خطوط ارتباط را تا تقاطع با مستقیم a_2

رسم نموده ، نقاط M_2 و N_2 را نشانی میکنیم . از نقشه واضح است که نقاط M_2 و N_2بالای مستقیم های A_2B_2و B_2C_2 قرار دارند. پس مستقیم a شامل مستوی ABC میباشد .

مستقیم $b(b_1:b_2)$ شامل مستوی ABC نیست زیرا که با مستوی مذکور یک نقطه مشترک دارد قرار شکل(C)این نقطه عبارت از $L(L_1:L_2)$ است.

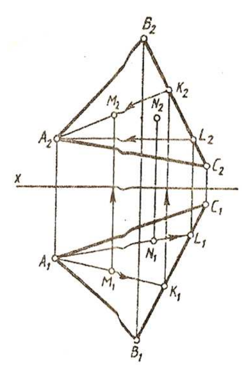


شکل ۴۸۵: مستوی

۴. از طریق نقطه M1 و مرتسم افقی یک نقطه کیفی مثلث بطور مثل نقطه A_1 خط مستقم عبور میدهیم . نقطه تقا طع مستقیم مذکور را با قطعه خط C_1B_1 به K_1 نشان میدهیم از نقطه K_1 خط ارتباط را تا تقاطع با قطعه خط C_2B_2 رسم نموده نقطه K_2 را نشانی میکنیم نقطه K_2را با نقطه A_2 وصل مینمایم . بدین ترتیب در مستوی مثلث ABC مستقیم $AK(A_1K_1:A_2K_2)$ حاصل میشود.

مرتسم مقابلM_2 نقطه M در تقاطع خط ارتباط که از نقطه M_1 الی مستقیم A_2K_2 رسم شده دریافت میگردد .

نقطه ($M(M_1:M_2$ شامل مستوی ABC است زیرا که بالای مستقیم AK شامل این مستوی قرار دارد



شکل ۴۸۶: ترسیم مثلث نظر به محور X

ضمیمه ۱ :-

شرح مختصر بر اشکال هندسی

بمنظور استفاده محصیلان ، استادان و دیگر علاقه مندان که سروکار به هندسه دارند تهیه وترتیب شده است. که دربرگرندی رسم ها واشکال بوده قرار ذیل است

شکل 487 : نقطه

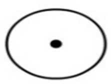
شکل 488 : خط

شکل 489 : خط مستقیم

شکل 490 : خط منحنی

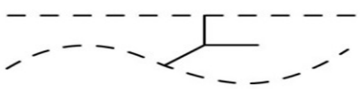
شکل 491 : خط منکسر

شکل 492 : خط منحنی بسته

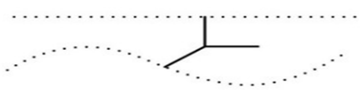


شکل 493 : خط موجی

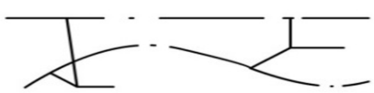
شکل 494 : خط فاصله دار مستقیم



شکل 495 : خط نقطه دار



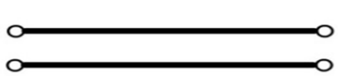
شکل 496 : محوری



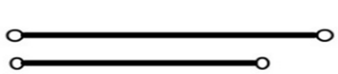
شکل 497 : شعاع مستقیم نا مکمل

شکل 498 : قطعه خط مستقیم (AB)

شکل 499 : قطعه خط های مساوی (AB=AB)



شکل **500** : قطعه خط های غیر مساوی $(AB \neq AB)$

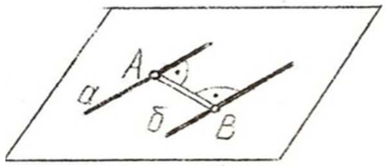


شکل 501

مستقیم های موازی a//b

ABفاصله بین مستقیم های

a و b



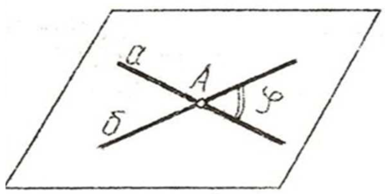
شکل 502:

axb) (مستقیم های متقاطع

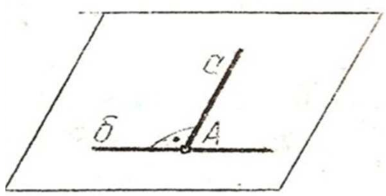
A

مستقیم های نقطه تقاطع A

a و b

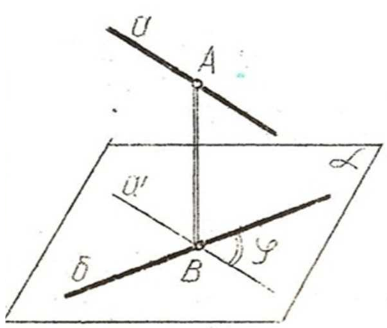


شکل 503: عمود های متقابل

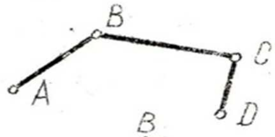


شکل 504:

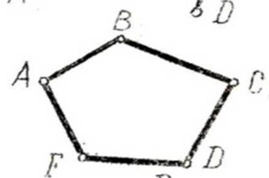
مستقیم های صلیبی



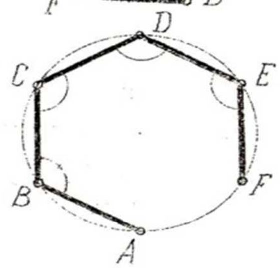
شکل 505: **خط منکسر**



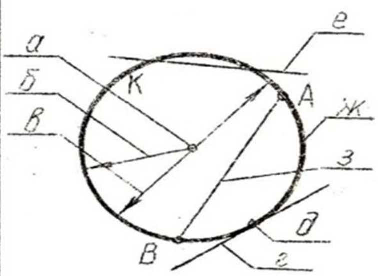
شکل 506: **خط منکسر محدب**



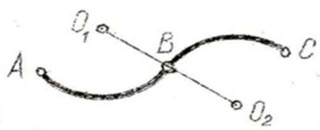
شکل 507: **خط منکسر بسته**



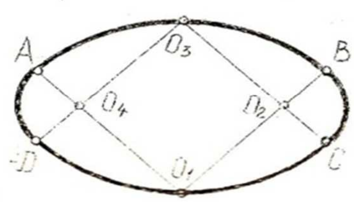
شکل 508: **خط منکسر منظم**



شکل 509: **خط منحنی**

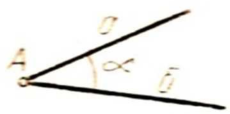


شکل 510: **فصل مشترک قوس ها**

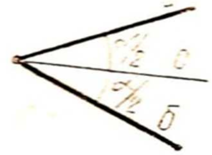


شکل 511: **بیضوی ناقص**

شکل 512: زاویه سطحی



شکل 513 ناصف الزاویه

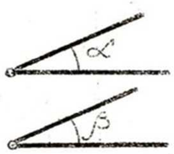


شکل 514 زاویه حاده

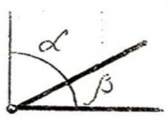
شکل 515 زاویه منفرجه

شکل 516: زاویه قایمه

شکل 517: زاویه مساوی

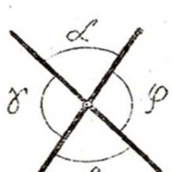


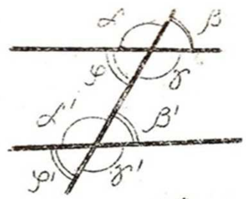
شکل 518: زاویه مکلمه



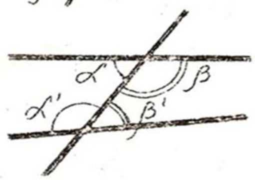
شکل 519: زاویه متممه

شکل 520: زاویه متقابل براس

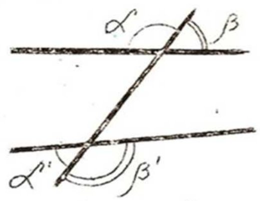




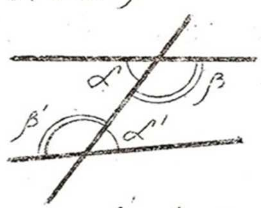
شکل 521: زوایای متوافقه



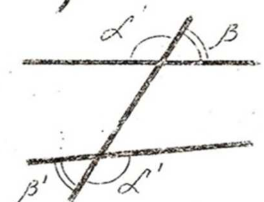
شکل 522: زوایای جانبی داخلی



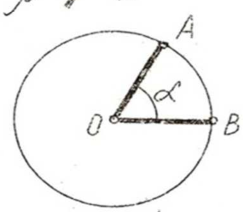
شکل 523: زوایای جانبی خارجی



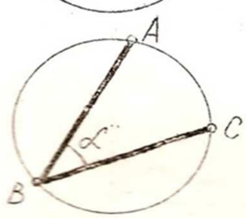
شکل 524: زوایای متبادله داخلی



شکل 525: زوایای متبادله خارجی

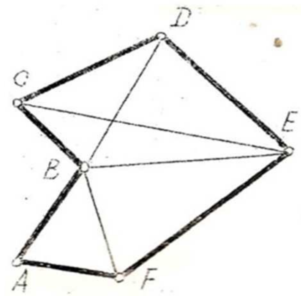


شکل 526: زاویه مرکزی



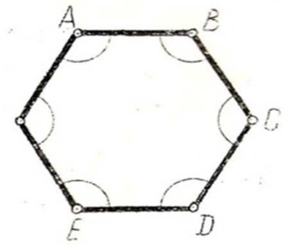
شکل 527: زاویه محیطی

شکل 528:



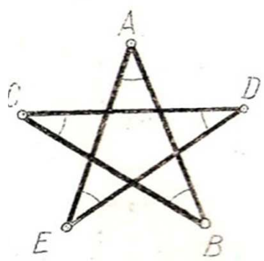
کثیرالزوایا

شکل 529:



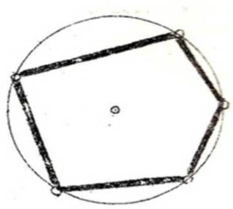
کثیرالاضلاح منطم

شکل 530



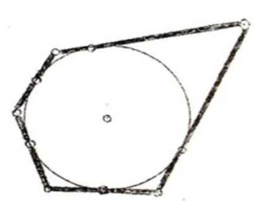
کثیر الزوایای منظم ستاره مانند

شکل 531:



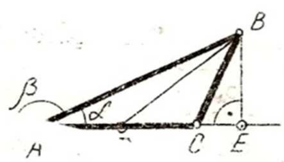
کثیرالاضلاع محاطی

شکل 532:

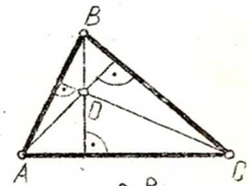


کثیرا لاضلاع محیطی

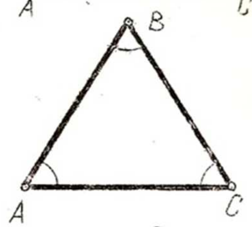
مثلث ها



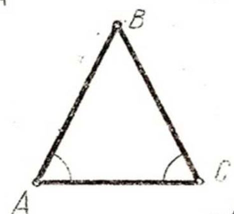
شکل 533: مثلث



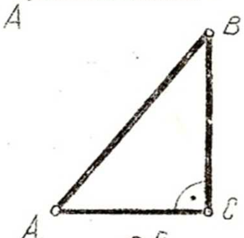
شکل 534: نقطه تقاطع ارتفاعات (O)



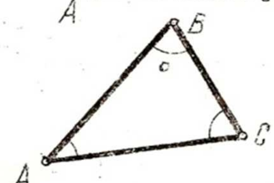
شکل 535: مثلث متساوی الاضلاع



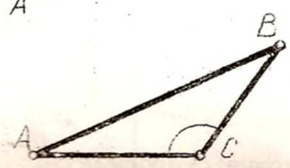
شکل 536: مثلث متساوی الساقین



شکل 537: مثلث قایم الزاویه



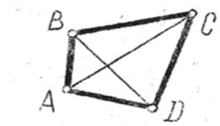
شکل 538: مثلث حاده الزاویه



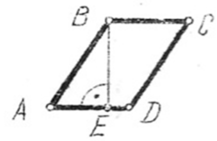
شکل 539: مثلث منفرجه الزاویه

چهار ضلعی ها

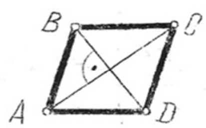
شکل 540: چهار ضلعی



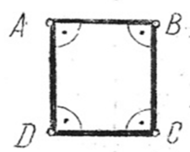
شکل 541: متوازی الاضلاع



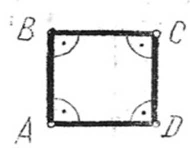
شکل 542: معین یا لوزی



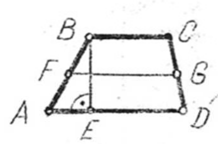
شکل 543: مستطیل



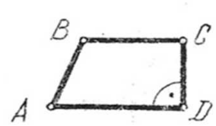
شکل 544: مربع



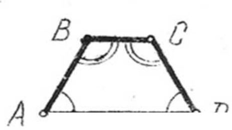
شکل 545 ذوزنقه قایم



شکل 546: ذوزنقه قایم

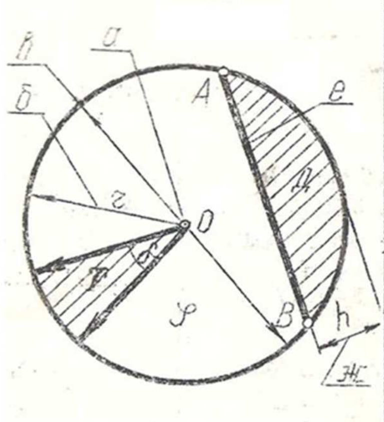


شکل 547 ذوزنقه متساوی الساقین



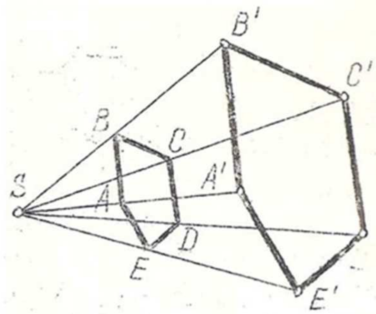
شكل 548:

سطوح مدور



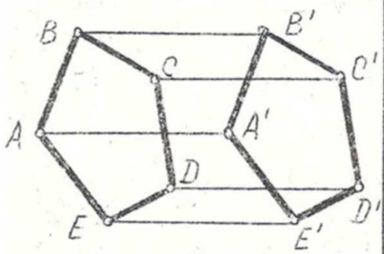
شكل 549:

هرم مخمس القاعده



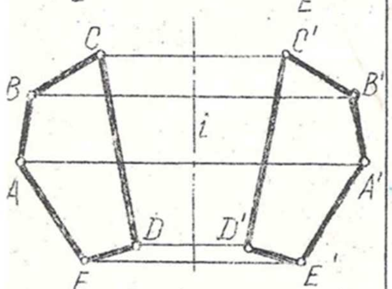
شكل 550:

منشور مخمس القاعده



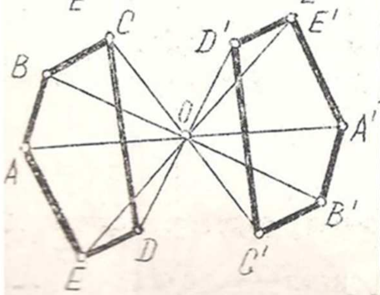
شكل 551:

شكل متنـاظر محورى

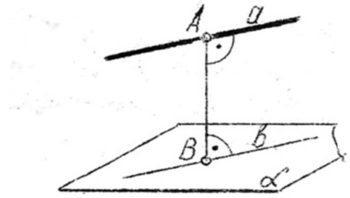


شكل 552:

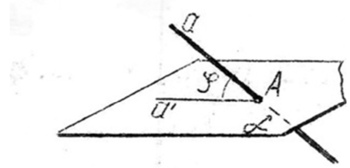
شكل متنـاظر مركزى



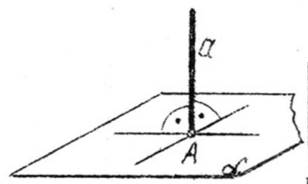
شکل 553: مستوی و خط مستقیم



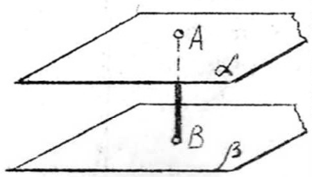
شکل 554: مستقیم متقاطع مستوی



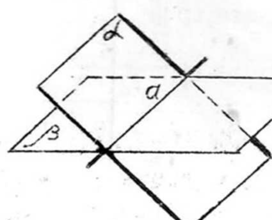
شکل 555 مستقیم عمود بالای مستوی



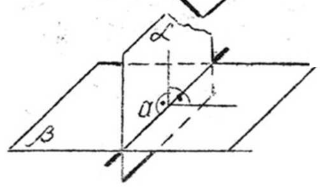
شکل 556: مستوی های موازی

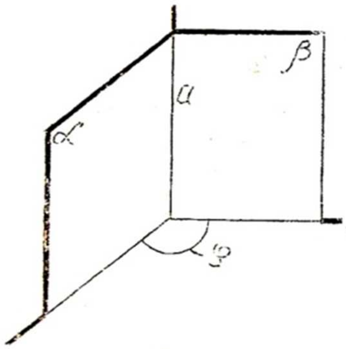


شکل 557 مستوی های متقاطع

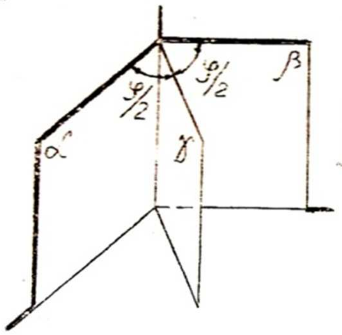


شکل 558: مستوی های عمود متقابل

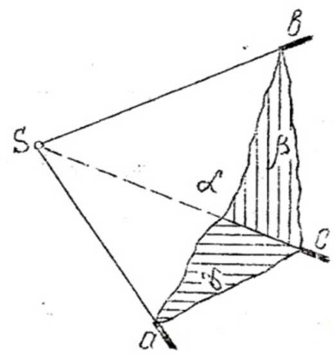




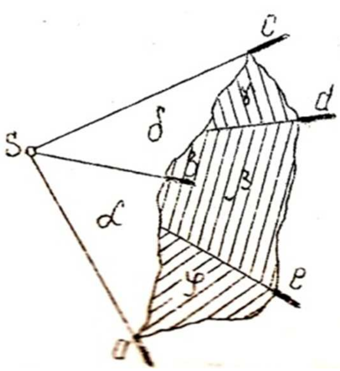
شکل 559: زاویه دو وجهی
وجوه (اضلاع) - α, β
کنار زاویه دو وجهی - a
زاویه خطی زاویه دو وجهی - φ



شکل 560: سطح ناصف‌الزاویوی دو وجهی (γ)
бисс
дву
(γ

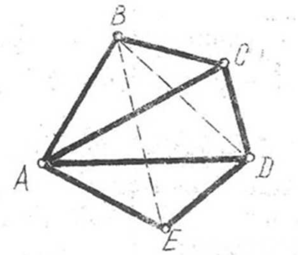


شکل 561: زاویه سه وجهی
اضلاع - α, β, γ
کنار - a, b, c
راءس - S

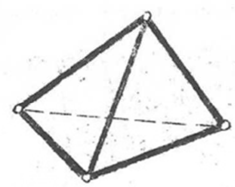


شکل 562: زاویه کثیرالوجهی
اضلاع - $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \delta ...$
کنار - $a, b, c, d, ...$
راءس - S

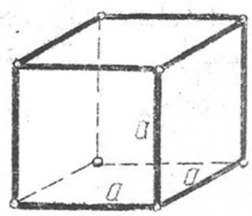
شکل 563: کثیرالسطوح



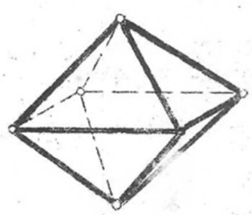
شکل 564: جهار وجهی منظم (هرم)



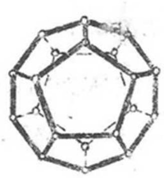
شکل 565: شش وجهی منظم (مکعب)



شکل 566: هشت وجهی منظم مکعب



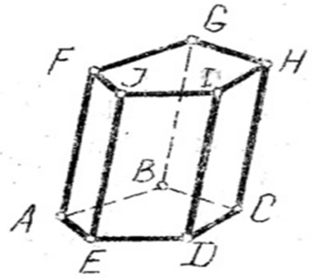
شکل 567: دوازده وجهی منظم



شکل 568: بیست وجهی منظم

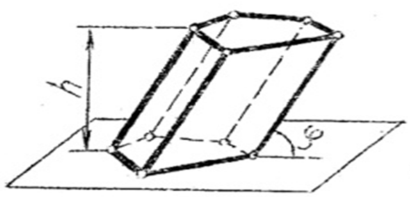
شکل 569

منشور غیر منظم



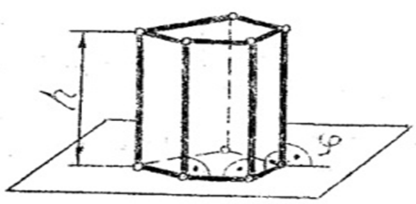
شکل 570

منشور مایل



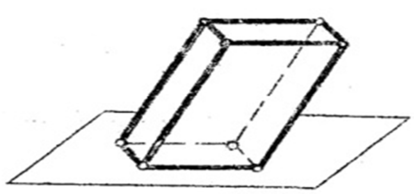
شکل 571

منشور عمودی



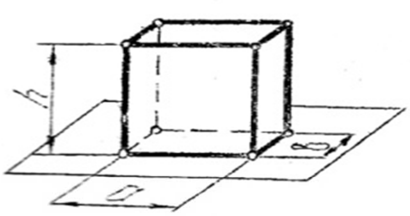
شکل 572

منشور چهار ضلعی مایل



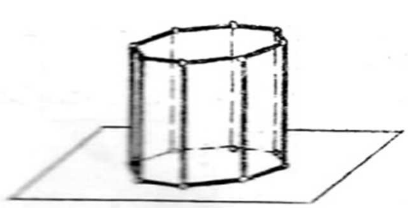
شکل 573

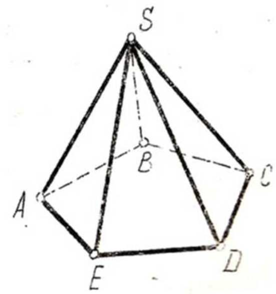
منشور قایم



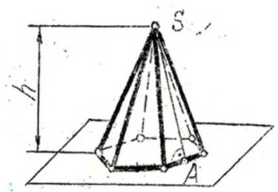
شکل 574

منشور منظم

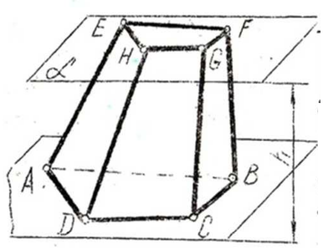




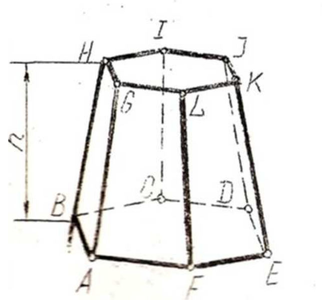
شکل 575: هرم غیر منظم



شکل 576: هرم منظم



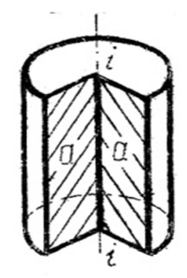
شکل 577: هرم قطع شده غیر منظم



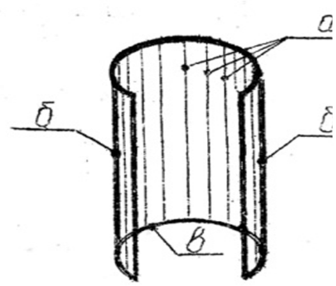
شکل 578 هرم قطع شده منظم

سطو ح خارجی انحنا

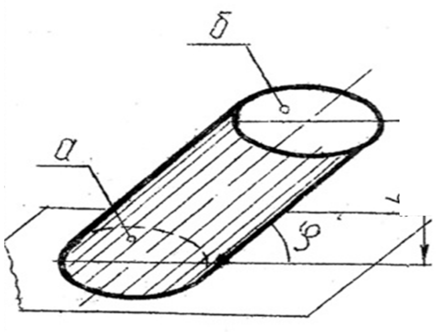
شکل 579: استوانه



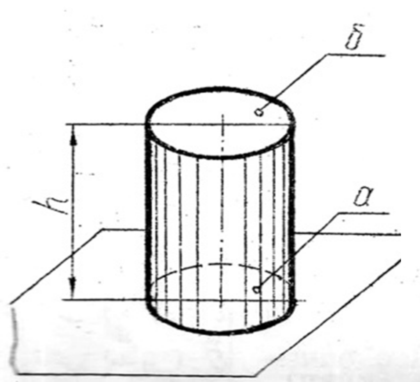
شکل 580: سطح استوانه ای

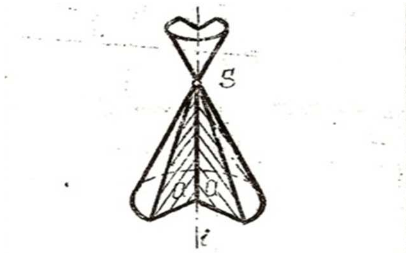


شکل 581: استوانه مایل

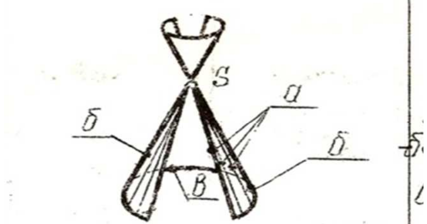


شکل 582: استوانه قایم

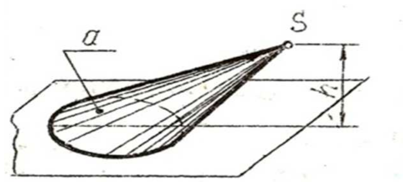




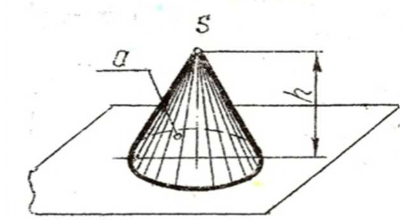
شکل 583: مخروط



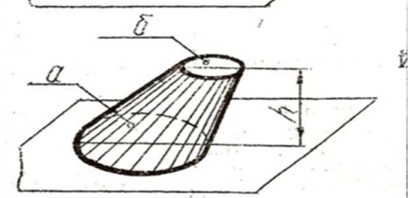
شکل 584: سطح مخروطی



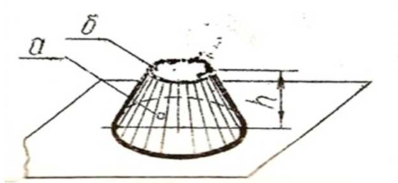
شکل 585 مخروط مایل



شکل 586: مخروط مدور قایم



شکل 587 مخروط قطع شده مایل

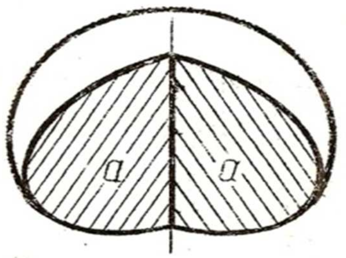


شکل 588: مخروط قطع شده قایم مدور

کره

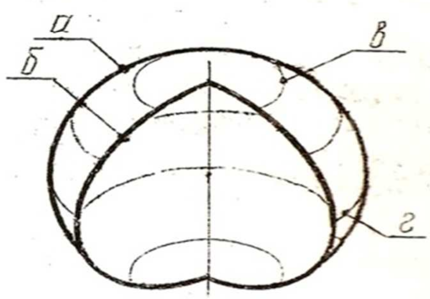
شکل 589:

قاطع طولی



شکل 590:

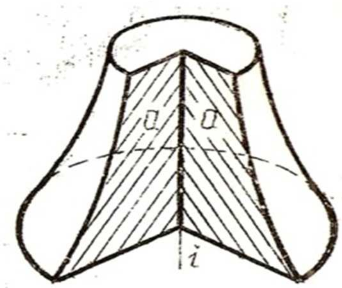
سطح خارجی کره وی



ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ

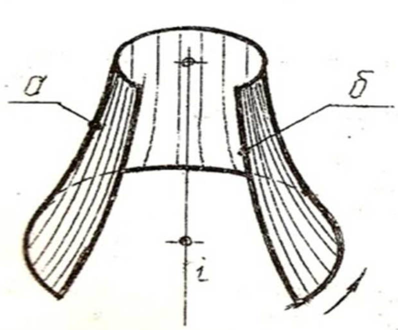
شکل 591:

جسم دایروی



شکل 592:

سطح خارجی دورانی



ترسیم مخروطات سه گانه

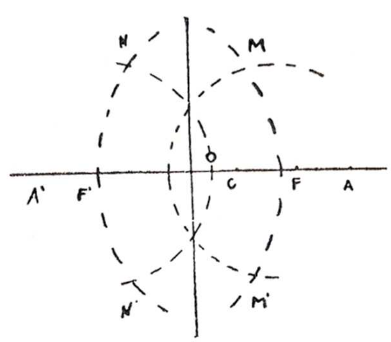
۱. ترسیم الیپس ذریعه نقاط . از FF' به دوطرف O نقطه تنصیف C_1 قطعه خط های $OA = OA' = a$ جدا می نمائیم . C یک نقطه کیفی روی قطعه خط AA' است مطابق شکل (593) مجموعه قطعه خط های $A'C$ و AC مساوی است به $2a$ دایره های رسم مینمائیم که مرکز آنها $F'F$ و شعاع هایشان AC' و AC میباشند یک نقطه M مشترک به این دو دایره یک نقطه الیپس است تقاطع این دو دایره مشروط است بر $AC - A'C < FF' < AC + A'C$.

شرط دوم خود بخودمورد تطبیق است از شرط اول استنباط میگردد که

$$\{OA + OC\} - \{OA - OC\} < FF' = 2OC < FF'Q$$

بالاخره $OC < FF'$ هرموقعیت F و O بین C به اثر تغییر ترتیب شعاع ها چهارنقطه الیپس را میدهد به همین اساس تمام نقاط الیپس را بدست آورده میتوانیم . وقتیکه نقطه C در F باشد کلانترین شعاع وکتور مساوی است به $a + c$ وکوچکترین آن مساوی است به $a - c$ دایره های مربوط باهم مماس بوده و نقاط A' و A را تثبیت میکنند .

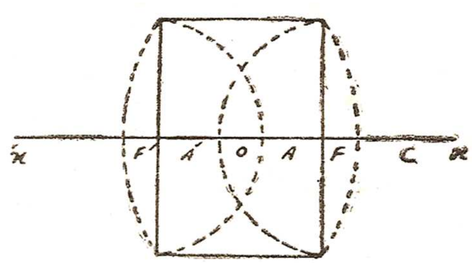
قرار شکل ذیل



شکل ۵۹۳: الیپس

۲. ترسیم هایپربول ذریعه نقاط . دومسافه مساوی بدو طرف نقطه O میگریم $OA = OA' = a$ روی نیم خط AX و به امتداد $A'A$ یک نقطه C میگیریم تفاضل قطعه خط های $A'C$ و AC مساوی است به $2a$ دایره های را که مرکزشان F' و F اند به شعاع های AC' و AC رسم می نمایم یک نقطه Mمشترک به این دو دایره یک نقطه هایپربول است برای اینکه این دایره ها هم دیگر را قطع کند حتمی و کافی است که $A'C - AC < FF' < AC + A'$. شرط اول همیشه در محل تطبیق است از دوم استنباط میگردد $FF' < (OC - OA) + (OC + OA')$ یا $FF' < 2OC$یا بالاخره $OC > OF$.

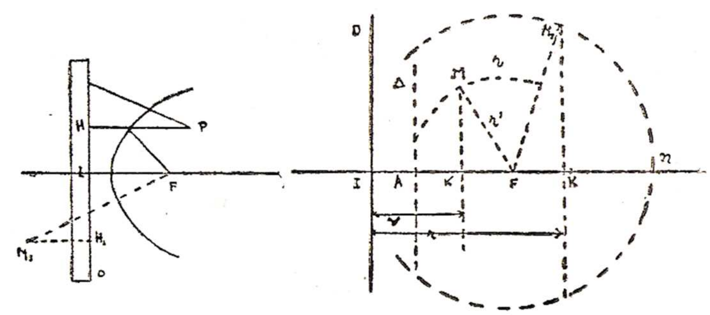
هریک از موقعیت های نقطه C روی نیم خط Fx با تغییرروی شعاع ها چهار نقطه هایپربول را میدهد . واضح است که به همین ترتیب تمام نقاط هایپربول حال نموده میتوانیم . از مناقشه فوق واضح میگردد که یک نقطه هاپیربول میتواند به اندازه لایتناهی دور رود . زیرا شعاع وکتور به هر اندازه که خواسته باشیم کلان شده میتواند . وقتکه نقطه C با F منطبق میگردد کوچکترین شعاع وکتور هایپربول را که مساوی به $c - a$ است به دست میاوریم ، دایره مربوطه نقاط A'وA را میدهد.
قرار شکل (594)



شکل ۵۹۴: هایپربول

۳. ترسیم پارابول ذریعه نقاط . پیش از همه ملاحظه می نمائیم که هیچ یک از نقاط پارابول (M_1) به طرف چپ مواجه (که محراق در آن شامل نیست) بوده نمیتوانند . زیرا مسافه M_1F بزرگتر است از مسافه MH_1 پس از این تبصره به سمت که F شامل آن یک موازی با موأجه D میاوریم $IK = r$ مسافه است این دو موازی را از هم جدا میسازد دایره را که مرکزش F و شعاع آن R است رسم

میکنیم اگر M یک نقطه مشترک دایره و مستقیم است ، آن نقطه پارابول است برای اینکه دایره را قطع کند حتمی وکافی است که مسافه آن به مرکز F کوچکتر باشد از شعاع r . این شرط در وقت عملی میگردد که K بین Fو I واقع نشود یعنی $r > P$ اگر K بین Fو I واقع شود شرط تقاطع عبارت است از ; $FK' < IK$ یعنی K بین Aو F اگر K' در A باشد دایره و مستقیم در نقطه A با هم مماس اند اگر . از رأس A یک موازی Δ به D بیاوریم موازی مذکور تمام نقاط پارابول را به طرف که محراق شامل آن است میگذارد . از مناقشه فوق معلوم میگردد که کوچکترین قیمت شعاع و کتور مساوی است به $\frac{p}{2}$ و این قیمت متعلق است به رأس . برخلاف شعاع وکتور به هر اندازه خواسته باشیم بزرگ شده میتواند یک نقطه پارابول میتواند به لایتناهی دور شود .قرار شکل ذیل



شکل ۵۹۵: پارابول

علایم شرطیه ریاضی

$A, B, C, \ldots$	ـ نقاط
$a, b, c, \ldots$	ـ خطوط
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	ـ سطوح وزوایا
$\theta, \Phi, \Psi, \ldots$	ـ سطوح خارجی
Δ	مثلث
$\angle$	ـ زاویه
⦜	ـ زاویه قائمه
$\smile$	ـ قوس
$\parallel$	ـ موازي
$\nparallel$	ـ غیر موازي
$\perp$	ـ عمود
$\backsim$	ـ مشابه
$=$	ـ مساوي
$\neq$	ـ غیر مساوي
$\approx$	ـ تقریباء مساوي
$<$	ـ کوچک
$>$	ـ بزرگ
$\leqslant$	ـ کوچک یامساوي
$\geqslant$	ـ بزرگتر یامساوي
$\equiv$	ـ مطابق وساوي
$\subset$	ـ مربوط (گذاشته‌شده بالاي چیزي)
$\supset$	ـ گذشته از طریق
$\times$	ـ قطع
$\sum$	ـ حاصل جمع (مجموع)
$H.B.$	کمیت حقیقی
$^{\circ}\ '\ ''$	ـ درجه , دقیقه , ثانیه
$+\ -\ \cdot\ :$	ـ جمع , منفی , ضرب , تقسیم

مآخذ

۱. احمد شرف الدین. (۱۳۷۲). **هندسه تحلیلی چند محوری**. تهران: مدرسه.

۲. اسمارت، جیمز. ار. (۱۳۷۶). **هندسه جدید.** ترجمه یاسی پور، غلام رضا. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۳. ایمل، عبدالحق. (۱۳۸۸). **عمومی ریاضی او تحلیلی هندسه**. کابل: سعید

٤. ایوز، هاوارد. (۱۳۷۲). **آشنایی با تاریخ ریاضیات**. ترجمه وحیدی اصل، محمد قاسم ، قسمت اول. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

٥. ایوز، هاوارد. (۱۳۷۳). **آشنایی با تاریخ ریاضیات**. ترجمه وحیدی اصل، محمد قاسم ، قسمت دوم. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

٦. بلکریشان، و. ک. (۱۳۷۷). **ریاضیات گسسته**. ترجمه فاروق، محمد حسن. یزد: دانشگاه یزد.

۷. تابش، یحی. (۱۳۸۰). **آموزش هنر حل مسئله ریاضیات**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۸. حاجی محمد. (۱۳۶۸). **اساسات هندسه اقلیدس و غیر اقلیدسی**. کابل: پوهنتون کابل.

۹. دانشیار، نصر الله. (۱۳۶۸). **هندسه ترسیمی**. کابل: انستیتوت پولی تخنیک کابل.

۱۰. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **تبدیل های هندسی درهندسه مسطح** ،جلد ۸ تهران: مدرسه.

۱۱. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه** ،جلد ۱۴. تهران: مدرسه.

۱۲. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **دایره المعارف هندسه**، جلد ۱۲. تهران: مدرسه.

۱۳. رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). **رسم شکلهای هندسی در هندسه مسطح**،جلد ۱۱. نهران: مدرسه.

١٤. سید اشرف. (۱۳۶۸). **هندسه عمومی**.پشاور: آی. آر. سی.

١٥. سیلورمن، ریچارد. ا. (۱۳۷۳). **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی.**ترجمه عالم زاده، علی اکبر.تهران: ققنوس.

١٦. شهریاری، پرویز. (۱۳۶۵). **هندسه در گذشته و حال**. تهران: امیر کبیر.

۱۷. غوری، محمد انور . (۱۳۸۹). **هندسه** . کابل: سعید.

۱۸. گروهی از اساتید ریاضی آلمان. (۱۳۷۸). **دایره المعارف ریاضیات**. ترجمه یاسی پور، غلام رضا، جلد سوم. تهران: مهاجر.

۱۹. گروهی از اساتید ریاضی آلمان. (۱۳۸۰). **دایره المعارف ریاضیات**. ترجمه یاسی پور، غلام رضا، جلد دوم. تهران: مهاجر.

۲۰. گویا، زهرا. (۱۳۸۷). **هندسه ۱**. نهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲۱. گویا، زهرا. (۱۳۸۸). **هندسه ۲**. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۲۲. لاری بازرگانی، عبدالرضا. (۱۳۸۲). **جبر خطی و کاربرد های آن**. شیراز: دانشگاه شیراز.

۲۳. مجید زاده، بابک. (۱۳۸۹). **هندسه ۱**. تهران: محراب قلم.

۲٤. مجید زاده، بابک. (۱۳۸۹). **هندسه ۲**. تهران: محراب قلم.

۲۵. محمدی، علی اکبر. (۱۳۸۳). **جبر**. اصفهان: دانشگاه اصفهان.

۲٦. مگارت، جان. باو. (۱۳۸۵). **تاریخ جبر**. ترجمه وحیدی اصل ، محمد قاسم.تهران: علمی و فرهنگی.

۲۷. موحد، احمد خالد. (۱۳۹۲). **کاربرد ساختمان الجبری گروپ و تسهیل آموزش آن**. رساله علمی ترفیع به رتبه پوهنمل. بلخ: پوهنتون بلخ.

۲۸. نجذبی، حمید رضا. (۱۳۸۳). **هندسه و رسم فنی**. تهران: شهر آب.

۲۹. نظامی، م. (۱۳٦۷). **رسم تخنیک**. کابل: فیضی.

۳۰. هانگرفورد، تی. دبلیو. (۱۳۸۴). **مقدمه ای بر جبر مجرد**. ترجمه رضا انشایی، سید اعظم. اصفهان: دانشگاه اصفهان.

۳۱. یاگلم، ای. م. (۱۳٦۹). **تبدیل های هندسی ۱**. ترجمه اسدالله، جلد اول. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۳۲. یاگلم، ای. م. (۱۳٦۹). **تبدیل های هندسی ۲**. ترجمه شفیعیها، محمد هادی، جلد سوم. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

۳۳. یاگلم، ای. م. (۱۳٦۹). **تبدیل های هندسی ۳**. ترجمه محمد باقر، جلد دوم. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

34. ______(2006). **Mathematics Textbook for Class XI**. ____: NCERT.

35. Agarwal, Prafull. (2008). **Mathematics. Delhi**: Target.

36. Aliev, B. (2006). **Geometry Textbook for Class IX**. Dushanbe: Nuk.

37. Ashraf, M. (2003). **Calculus and Analytic Geometry**. Lahore: Ilmi.

38. Ckapuy, z. A. (1990). **Geometry Minatory**. Dushanbe: Nuk.

39. Doro, F. G., and Potavov, M. R. N. (1976). **Elementary Mathematics**. Moscow: Mir.

40. Koznesov, N.C. (1981). **Geometry**. Moscow: Mir.

41. Sharefov. J. (2007). **Geometry Textbook for Class VIII**. Dushanbe: Nuk.

42. Sharfov, J. (2007). **Geometry Textbook for Class IX**. Dushanbe: Nuk.

43. Yefimov. N. (1969). **Analytic Geometry**. Moscow: Mir.

بیوگرافی مختصر

پوهنوال سید یوسف مانووال فرزند جمعه گل در سال 1336در ولایت زیبا وهمیشه بهار ننگرهار ولسوالی چپرهار قریه مانو در یک خانواده متدین متولد گردیده ام. تعلیمات متوسطه را در متوسطه چپرهار تکمیل نموده و از آن متوسطه بدرجه اعلی فارغ و در سال 1350 از طرف دولت به تخنیکم نفت گاز مزارشریف جهت تحصیل معرفی و در سال 1354 بدرجه اعلی از تخنیکم متذکره فارغ و دو باره به حیث استاد در کادر آن تخنیکم مقرر گردیده ام. چون تحصیلات بنده ناقص بوده بدینوسیله جهت اخذ لیسانس از طرف دولت در سال 1372 به پوهنځی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ به دیپارتمنت ریاضیات معرفی ودر سال 1375 از آن پوهنځی از دیپارتمنت ریاضیات به درجه اعلی به سویه لسانس فارغ التحصیل گردیده ام. در سال 1379 به حیث استاد در پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ دیپارتمنت ریاضیات جذب گردیده ام و درسال 1387 در کشور تاجکستان در شهر دوشنبه از پوهنتون صدرالدین عینی از پوهنځی ریاضیات به سویه ماستر بدرجه اعلی فارغ گردیده ام و فعلا نیز در پوهنځی تعلیم وتربیه پوهنتون بلخ در دیپارتمنت ریاضیات به حیث استاد وظیفه دارم.

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 223 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Education and Agriculture (96 medical books funded by German Academic Exchange Service, 100 medical with 20 non-medical books funded by German Aid for Afghan Children and 4 non-medical books funded by German-Afghan University Society) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Kapisa, Kabul and Kabul Medical universities. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical and non-medical colleges of the country for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:
"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **Consulate General of the Federal Republic of Germany**/Mazar-e Sharif which has provided fund for this book.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister Prof M Osman Babury, Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, Chancellor of Balkh University Prof Mukamel Alokozay, Adviser at Balkh University Dr M Saber Momand, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazel Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul, Afghanistan, May, 2016
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Message from the Ministry of Higher Education

In history, books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science, and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of higher education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers and authors, and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty, and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to Consulate General of the Federal Republic of Germany/Mazar-e Sharif and our colleague Dr. Yahya Wardak that have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof. Dr. Farida Momand
Minister of Higher Education
Kabul, 2016

Book Name	Fundamentals of Drawing Geometry in Surface
Author	Prof Said Yosuf Mannowal
Publisher	Balkh University, Education Faculty
Website	www.ba.edu.af
Copies	1000
Published	2016, First Edition
Download	www.ecampus-afghanistan.org
Printed at	Afghanistan Times Printing Press, Kabul

This publication was financed by **Consulate General of the Federal Republic of Germany,** Mazar-e Sharif.

Administrative and technical support by **Afghanic**.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:

Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office 0756014640

Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2016

ISBN 978 – 2 – 910000 – 01 – 1