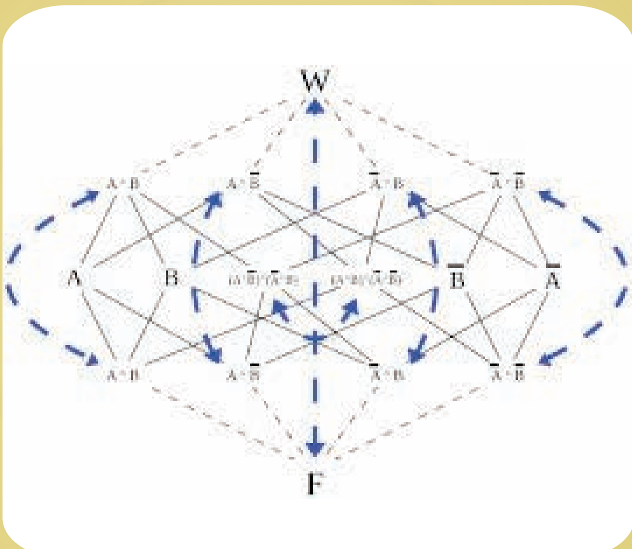
ننګرهــارساینس پــوهنځی

الجبر او د عددونو تیوری

لومړی برخه



سي ډي سره

سلطان احمد نیازمن

۱۳۹۴

خرخول منع دی

الجبر او د عددونو تیوری
لومړی برخه
Algebra and theory of Numbers
Part one
سلطان احمد نیازمن
۱۳۹۴

Nangarhar Science Faculty

Afghanic

Sultan Ahmad Niazman

Algebra and theory of Numbers

Part one

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & & \\ & & + & & \\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} \\ & & \shortparallel & & \\ & & \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} & & \end{array}$$

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

with CD

ISBN 978-9936-620-05-6
9 789936 620056

Not For Sale

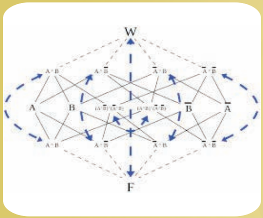
2015

الجبر او د عددونو تیوری

لومړی برخه

سلطان احمد نیازمن

Afghanic



Pashto PDF
2015

Nangarhar Science Faculty
ننګرهار ساینس پوهنځی

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Algebra and theory of Numbers

Part one

Sultan Ahmad Niazman

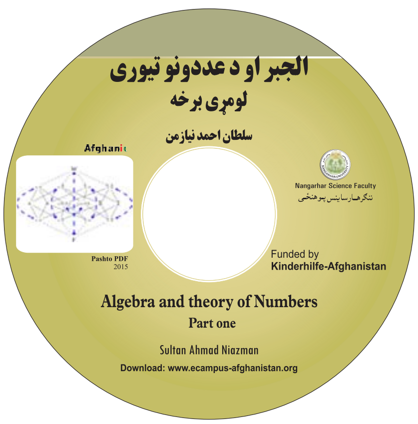
بسم الله الرحمن الرحیم

الجبر او د عددونو تیوری
لومړی برخه

لومړی چاپ

سلطان احمد نیازمن

دغه کتاب په پی دی اف فورمت کی په مله سی دی کی هم لوستلی شی:



د کتاب نوم	الجبراو د عددونو تیوری لومړی برخه
لیکوال	سلطان احمد نیازمن
خپرندوی	ننگرهار ساینس پوهنځی
ویب پاڼه	www.nu.edu.af
چاپ شمېر	۱۰۰۰
د چاپ کال	۱۳۹۴، لومړی چاپ
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org www.niazman.de
د چاپ ځای	سهر مطبعه، کابل، افغانستان

د اکتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټی په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداری او تخنیکی چارې یې پــه آلمان کې د افغانیک موسسی لخوا ترسره شوی دي.

د کتاب د محتوا او لیکنې مسؤلیت د کتاب په لیکوال او اړونده پــوهنځی پورې اړه لری مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک دلوړو زده کړو وزارت کابل
تیلیفون 0756014640
ایمیل textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان: ISBN: 978 9936 6200 56

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کې ډیر مهم رول لوبولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې دوامداره زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانگو کې درسی کتابونه تألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کړی دی او د پوهې موتور یې په حرکت راوستی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مواد برابر او چاپ کړی، چې له چاپ وروسته د گرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کړو د کیفیت په لوړولو او د علمي پروسې په پرمختگ کې یې نېک گام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د گرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسی مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کی د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې له رئیس ډاکتر ایروس او زموږ همکار ډاکتر یحیی وردگ څخه مننه کوم چې د کتابونو د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چی نوموړې گټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څو په نیږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو وزیره

کابل، ۱۳۹۴

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمیر استادان او محصلین نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

تراوسه پورې مونږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپیسا د طب پوهنځیو او کابل طبي پوهنتون لپاره ۱۷۶عنوانه مختلف طبي تدریسي کتابونه چاپ کړي دي، چې د هغوی له جملې څخه ۹۵ د DAAD او ۸۰ نور د kinderhilfe-Afghanistan په مالي مرسته چاپ شوي دي. د ننګرهار پوهنتون لپاره د ۲۰ نورو غیرطبي کتابونو د چاپ چارې روانې دي. د یادونې وړ ده چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هیواد ټولو طب پوهنځیو ته په وړیا توګه ویشل شوي دي.

هر څوک کولای شي ټول چاپ شوی طبي او غیر طبي کتابونه

د www.afghanistan-ecampus.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کړي.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ ـ ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي د تعلیمي نصاب د ریفورم *لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان نشي کولای عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پیدا کړي".*

د لوړو زده کړو وزارت، پوهنتونونو، استادانو او محصلینو د غوښتنې په اساس موږ دا پروګرام غیر طبي برخو ته لکه ساینس، انجنیري، کرهنې او نورو پوهنځیو ته هم وغځاوه، تر څو د مختلفو پوهنتونونو او پوهنځیو د اړتیا وړ کتابونه چاپ شي.

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هیواد له پوهنتونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړینه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او

چېټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوندې پوهنځۍ استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنگه د یادو شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په گډه پدې برخه کې اغیزمن گامونه پورته کړو.

د یادونې وړ ده چې د مولفینو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مولف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لگښت یې ورکړی دی. دوی په تیرو کلونو کې هم د ننگرهار د طب پوهنځي د ۸۰ عنوانه طبي کتابونو د چاپ لگښت پر غاړه درلود.

په ځانگړي توگه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او (CIM) Center for International Migration & Development چې زما لپاره یې په تېرو پنځو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړی دي، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو وزیره پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنوال محمد عثمان بابري، مالي او اداري معین پوهنوال ډاکتر گل حسن ولیزي، د ننگرهار پوهنتون سرپرست رییس پوهنوال ډاکتر محمد طاهر عنایت، د ننگرهار پوهنتون پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مولف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو کلونو زیار یې په وړیا توگه گرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنگه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبي او فضل الرحیم څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردگ، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، جون ۲۰۱۵

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵٦۰۱۴٦۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.org

فهرست

سریزه

دالجبر او عددونو تیوری د کتاب لمړی برخه د ننګرهار د پوهنتون د طبیعی علومو د پوهنځی د محصلینو دپاره پیشنهاد سویده ، چی محتوی یی دتدریس د لمړی کال ضرورت پوره کوی .

دا کتاب څلور فصله لری . په لمړی فصل کی د سیټ د تیوری او د ریا ضی د منطق بنستیزی تشریح سوی دی ، دغه برخه په حقیقت کی و ریاضیاتو ته په عموممی توګه یوه مقدمه ده ځکه چی ددی برخی مفهومونه او میتودونه نه یوازی په الجبر بلکه د ریاضیاتو په نورو برخو کی هم په پراخه توګه په کاریږی .

نوموړی فصل د سیټونو او د بیان الجبر او د هغو د عملیو خاصیتونه په بر کی نیسی. د قضیی مفهوم او د قضیی مختلف شکلونه څیړل سو ی ، د غیر مستقیم ثبوت تیوریکی بنستیزه طرح سوی ده او دا ډول مفهو مو ته لکه غبرګونی اړیکی او د هغی مهمی ټولګی لکه د معادل والی اړیکی ، د ترتیب اړیکی او میپینګ ته په کافی اندازه ځای ورکول سوی دی . د میپنګ د مفهوم څخه په استفاده سره n متحوله پریدیکاتونه تعریف او د منطق عملیی پر یوه متحوله پریدیکاتوباندی ، تر مطالعی لاندی نیول سوی دی. همدا ډول د پریدیکات د مفهوم څخه په استفاده سره دمجهول لرونکو مساواتو او غیر مساواتو دهغوی سیسټم او مجموعه مو تعریف کړیده.

د الجبری ساختمانو په عمومی مفهوم سره دوهم فصل شروع سویدی . د طبیعی عددو سیټ د پئانو د اکسیومو سره د یوه الجبری ساختمان په څیرتشریح سوی دی . د طبیعی عددو په هکله د قضیو د ثبوت دپاره د ریاضی د اسقراء میتود تحلیل او عملی سوی دی . وروسته له هغه دا ډول مفهومونه لکه ګروپ، رینګ او فیلډ په لنډه توګه داسی معرفی سویدی ، څوزموږ د تیوری د پراخوالی ضرورت رفع کړی. د نوموړو الجبری ساختمانو و ژوری مطالعی ته ددی کتاب په دوهمه برخه کی راګرځو.

د حقیقی عددو اکسیوماتیکی تعریف او د ګروپونو، رینګو(کړیو) اوفیلډو (ډګرونو) آیزومورفیزم (یو څیره والی) په لنډ ډول تشریح سوی دی .

مختلطو عددو او په خاص ډول پر مختلطو عددو باندی عملیی او د هغوی مثلثاتی څرګندونی ته په دوهم فصل کی په پوره اندازه ځای ورکړه سوی دی.

د n بعدی وکټوری فضاء د مفهوم پر بنسټ په دریم فصل کی د خطی معادلو عمومی تیوری مطالعه کیږی. د وکټورو د سیټ خطی وابستګی ،دوکټورو د سیټ رنک (صف یا قطار) او د هغوی محاسبه او د ماترکسو رنک څیړل سوی دی . دریم فصل د خطی معادلو د سیستمنو د سازګاروالی په معیار باندی ختمیږی.

څلورم فصل د ماترکسو او دیترمنانتوو تیوری ته وقف سوی دی . پدی فصل کی د دیترمنانتو او د هغوی د محاسبی د طریقی نه وروسته د خطی معادلو د سیستمنو د حل بله طریقه چی عبارت ده له کرامر د طریقی څخه ، مطالعه کیږی.

د ریاضی د تیوری زده کړه بیله تمرین څخه پر وچه مځکه لامبو وهل دی.ځکه نو
ددوارو کتابو په څنگ کی د سوالو او تمرینونو یوه مجموعه هم د چاپ د پاره په نظر کی
ده .

هڅه می کړیده چی د تیروتنو مخه ونیسم ، خو بیا هم چی گران لوستونکی کوم ټکی ته
ځیر سی ، هیله ده چی خپل وړاندیز زما ددغی موخی دپاره د الکترونیکی لیک پر پته
math@niazman.de راولیږی. د غلطیو نیولیک به زما په ویبپاڼه
www.niazman.de کی خپریږی.

د کتاب د چاپولو په برخه کی دبناغلی ډاکټر صاحب یحیی وردگ هلی ځلی د ستاینی وړ
او ور څخه ډیره مننه کوم . زما د زړه له کومی او خاصه مننه او درناوی ډاکټر صاحب
ایروز Dr. Erös او دهغه خیریه ټولنی ته ، نه یوازی پدی خاطر چی ددی کتاب د
چاپولو لگښت یی پر غاړه اخیستی دی ، بلکه هغه خدمتونه چی دوی د جنگ په کلو او تر
هغه وروسته د افغانستان د ځوان نسل دپا ره کړیدی ، وړاندی کوم .

سلطان احمد نیازمن

ډیسمبر ۲۰۱۴

لمړی فصل

د سیټ د تیوری او د ریاضی د منطق بنسټیزه مفهومونه

I §.د سټو نو الجبره .

په ورځنی ژوند کی دشیانو د مجموعی او ګروپونه سره مخامخ کیږو . د بیلګې په ډول د اوبو د ګلاسو سیټ ، د کاچوغو او پنجو سیټ او داسی نور. پدی بیلګو کی هر سیټ ځانته ځانګړی مشخصات لری.

همداډول په ریاضی کی هم د ځینو شیانو د مجمو عی(سیټ) سره چی ځانته ځانګړی مشخصات لری ، مخامخ کیږو. د بیلګې په ډول زده کونکی په ښونځی کی د طبیعی عددونود مجموعی(سیټ) سره ، وروسته د حقیقی عددونود مجموعی(سیټ) سره او یا په سطحه کی د ټولو مثلثو د مجموعی (سیټ) سره آشنایي مومی.

په پورتنیو جملو کی یو ډیر پراخ مفهوم په مختلفو بڼو په کار ولویدی – دامفهوم عبارت د سیټ Set د مفهوم څخه دی .د سیټ مفهوم د نن ورځی د ریا ضیاتو بنسټ تشکیلوی.

په ریاضی کی د سیټ د مفهوم منځته راتګ د لایتناهی د مفهوم د پوهیدو او درک سره نژدی تړلی دی. د لرغونی یونان ریاضی سره ددی چی د پرمختګ له مخی په خپله لوړه سطحه کی قرار درلودی خو لا یتناهی يي د ننی ورځی په مفهوم نه درک کاوه. د هغه وخت د ریاضی پوهان په عین وخت کی د لایتناهی شیانو و موجودیت ته قایل نه وه. دوی به ویل : که څه هم حقیقی اعداد ډیر دی (پدی معنی چی د هر عدد په تعقیب بل عدد پیدا کولای سو) خو نسی کیدای چی لایتناهی زیاد دی وی. دا وا قعیت د میلاد نه مخکی په پنځمه سلیزه کی د زنون Zenon مشهوره پارادکس Paradox(ضد او نقیضه مسٔله) ښه تشریح کوی .

زنون ثابتوی چی دغه ډول حرکت چی اوس به یی په لاندی ډول تشریح کړو، وجود نلری .

که وغواړو چی د **A** د ښار څخه د **B** و ښارته داسی سفر وکړو چی اول ددی دوو ښارو تر منځ نیمه فاصله ووهو ، بیا د پاتی نیمایی ، نیمه فاصله طی کړو یعنی څلرمه او بیا د نیمایی ، د نیمایی نیمایی طی کړو .... او په همدی ترتیب ادامه ورکړو ، په هیڅ صورت به د **B** ښار ته ونه رسیږو.

زنون د لاندنی سلسلی د مجودیت څخه انکار کوی :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

ش 1

وروسته د اوولسمی پیړی په سر کی گالیله گالیلیو پدی پوهیږی چی د دوو قطعه خطوپه منځ کی یو په یو مپینگ Mapping وجود لری ، همداډول یو په یو مپینگ د ټولو طبیعی عددونواو د هغوی د مربعاتو تر منځ هم وجود لری . ددی څیړنو په نتیجه کی خپل نظر داسی څرگندوی – چی گواکی دا حالتونه په دوه مختلفو لایتناهی باندی ختمیږی او داسی کیدای نسی .

د آلمان تکړه ریاضیدان کارل فریدریخ گاوس په 1831کال کی داسی لیکی :

« د لایتناهی شیانو تصور د یو ی واقعی مجموعی په صفت ردوم – په ریاضی کی ددی ډول تصور اجازه نلرو. لایتناهی یوازی د بیان یو خاص ترتیب دی. »

دلته د لرغونی یونان د ریاضیاتود اصولو څخه د یوه اصل Axiom یاداوری پر ځای ده

دا اصل د اکلیدس Euclid په ذریعه فورمولبندی سویدی . اکلیدس وایی :

« کُل تر خپل هر جُز لوی دی»

د گالیله او گاوس پیژندنه (معرفت) د پورتنی «ساده» اصل سره مغایرت درلودی – منتهی د یوه زړه ور شخص په انتظار کی وه چی په ریاضی کی دهغو شیانو په موجودیت ، چی دهغه په باره کی پورتنی اصل صدق نه کوی، د اعتراف ویره ونلری.

په 1848 کال کی چکی ریاضیدان او فیلوسوف برنارد بلزانو B. Bolzano په خپل کتاب چی د لایتناهی د پارادکسو په نامه یادیږی ، د لایتناهی مجموعی په موجودیت اعتراف کوی – په نوموړی کتاب کی د معادل والی (تعادل) مفهوم معرفی کوی او لاندنی واقعیت توصیه کوی .

جُزء (د جفتوعددونومجموعه) د کُل (د ټولو طبیعی عددونود مجموعی) سره معادل دی .

د بلزانو اثر اصلاً تر ډیره حده فلسفی ؤ ، ده پخپله ویل چی لایتناهی عددونه د Calculus دپاره ضرور ندی . وروسته له هغه د موضوع په هکله نه ده پخپله او نه هم نورو څیړونوته دوام ورکی .

د نولسمی پیړی په پای کی فرانسوی ریاضیدان دی دیکیند De Dekindد انالایز په اړه او جرمنی ریاضیدان جورج کانتور G. Cantor په مشخص ډول د سیټ د تیوری بنسټ کښیښود او هغه ته یی پراختیا ورکړه.

په هغه ډول چی په معاصره هندسه کی د نقطی او خط مفاهیم نه تعریفوو ، په عین ترتیب سیټ هم نه تعریفوو. ددی مفهوم په مستقیم درک باندی اکتفاء کوو . سیټ د عنصرونو درلوونکی دی پداسی حال کی چی دا عنصرونه د ځینو خواصو درلودونکی دی . د سیټ د اصطلاح پرځای بعضی اوقات د مجموعی، ټولگی ، سیستم، رمه ، ډله، درزن ، گروپ ، ټولی ....او نورو څخه هم کار اخلو.د بیلگی په ډول : ددوهمی درجی د معادلاتو مجموعه ، د لمړنی ښونځی د زده کونکو ټولگی ، د n مجهوله خطی معادلاتو سیستم ، د پسو رمه ، ددی انستیتوت د ریاضی او فزیک د گروپ محصلین او داسی نور .

سیټ به په لاتینی غټو تورو سره یعنی A,B, C .. ,X,Y..نښانی کوو . هغه شیان چی په سیټ کی داخل دی ، د عنصرونو Elementsپه نامه به یی یادوو او وایو به چی عنصرونه په سیټ

کی داخل دی او یا عنصرونه په سیټ پوری اړه لری. د سیټ عنصرونه به د لاتین په کوچنیو حروفو یعنی ... $a,b,c,\ldots,x,y,z\ldots$سره نښانی کوو. دا واقعیت چی a د M د سیټ عنصر دی ، د ریاضی په ژبه داډول افاده کوو: $a\in M$

د $\in$ علامه ایټالوی ریاضیدان پئانو Peano د یونانی کلیمی $\varepsilon\sigma\tau\iota$ څخه اخیستی ده چی د «هستی یا وجود» په معنی ده . ځکه نو د ریاضی جمله $a\in M$ په پښتو کی دا ډول افاده کوو، a د M په سیټ اړه لری او یا a د M د سیټ عنصر یا غړی دی. که a د M په سیټ اړه ونلری ، بیانو داسی لیکو : $a\notin M$

څرنگه چی هر سیټ د خپلو عنصرونو پذریعه تعینیږی ، نو ځکه د هغه د تشخیص دپاره د لاندنیو دوو طریقو څخه کار اخلو:

۱- د سیټ د هر عنصر نوم اخلو. پدی صورت کی یی داسی ښیو:

$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{\triangle,\blacksquare,\bigcirc\}$

پدی ځای کی د A د سیټ عنصرونه د یو ، دوه ، دری او څلور عددونه دی او د B د سیټ عنصرونه مثلث، مربع او دایره ده .

ددی طریقی څخه هغه وخت کار اخلو چی د سیټ د عنصرونو تعداد متناهی finite وی .

۲- دراکړه سوی سیټ عنصرونه د ځینو مشترکو خاصیتودرلودونکی دی ، ددی خاصیتو د فورمولبندی څخه دسیټ په تشخیص کی کار اخلو، پدی معنی چی دوهمه طریقه د سیټ د عنصرونو داختصاصی صفتونو په فورمولبندی کی نغښتی ده او داډول لیکل کیږی :

$A=\{x / \ldots..\}$

پورتنی افاده داسی ویل کیږی:

« A د ټولو هغو x سیټ دی چی د .....خاصیتو درلودونکی وی.»

لاندنیو بیلگو ته ځیر سی:

$A=\{x/$ په کندهار کی ژوند کوی $x\}$

$B=\{y/\ y>2\}$

په لمړی بیلگه کی د A سیټ د کندهار د ښار د ټولو اوسیدونکو سیټ دی او په دوهمه بیلگه کی د B سیټ د ټولو هغو عددو سیټ دی چی تر 2 لوی وی .

په لاندنی بیلگه کی ټوله جفت عددونه د هغوی د خاصو صفتو له مخی داسی څرگندوو:

$C=\{x/x=2n$, تام عدد دی $n\}$

که یو سیټ یوازی څو عنصره ولری ، نووایو چی سیټ متناهی finite دی د بیلگی په ډول د $x^2-1=0$ د معادلی جذرونه ، د اوبود چینلو د گلاسو سیټ ، د پسو رمه او داسی نور. په هغه صورت کی چی سیټ متناهی نه وی ، نو هغه سیټ د لایتناهی Infinite سیټ په نامه یادیږی .

ساده ترینه بیلګه یی د طبیعی عددونوسیټ ، پر قطعه خط باندی د ټولو نقاطو سیټ او د بدن د ټولو حجراتو سیټ دی.

هغه سیټ چی هیڅ عنصر ونلری ، د خالی سیټ په نامه یادیږی او په $\emptyset$ سره یی ښکاره کوو. د خالی سیټ بیلګی عبارت دی له :

د $x2 +1=0$ د معادلی حقیقی جذرونه ، د ټولو هغو انسانانو سیټ چی دوه سره ولری ، په افغانستان کی د کښتی جوړولو د فابریکی سیټ او داسی نور. واضح ده چی خالی سیټ یو متناهی سیټ دی.

په ریاضی کی معمولاً د لاندنیو سیټونو سره سرو کار لرو:

$\mathbb{N}$ - د طبیعی Naturalعددونوسیټ

$\mathbb{Z}$ - د تام Integerعددونوسیټ

$\mathbb{Q}$ – د ناطق Rationalعددونوسیټ

$\mathbb{I}$ - د غیرنا طقو Irrationalعددونوسیټ

$\mathbb{R}$ – د حقیقی Realعددونوسیټ

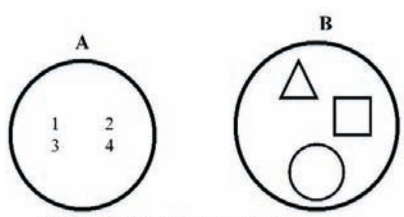
$\mathbb{C}$ – د مختلطو Complexعددونوسیټ

که څه هم پورتنی بیلګی او د سیټونو د ښکاره کولو طرز په کافی اندازه د سیټ مفهوم واضح کوی، خو بیا هم د ښه درک دپاره په خاص ډول پر سیټونو باندی د عملیی د اجرا ء کولو دپاره د شیما او یا رسم څخه استفاده کوو. دغه شیما او یا رسم چی په مستوی کی د تړلی شکل څخه عبارت دی د وین دیاګرام Ven Diagram په نامه یادیږی.

د بیلګی په ډول لاندنی سیټونه

A= {1,2,3,4} , B={△,■, ○}

د وین په ډیاګرام کی داسی ښیو:



ش ۲ . د A او B د سیټونو د وین دیاګرام

کله کله دداسی حالت سره مخامخ کیږو چی دیوه سیټ عنصرونه په عین وقت کی په بل سیټ کی شامل وی . د بیلګی په توګه د طبیعی عددونود سیټ عنصرونه په عین حال کی د تام عددونوپه سیټ کی او یا د طبیعی او اوتام عددونود سیټ عنصرونه په عین حال کی د حقیقی عددونوپه سیټ کی شامل دی .

تعریف 1 - فرضاً د A او B سیټونه راکړه سویدی. د A سیټ د B د سیټ د سب سیټ

Sub set یا لاندی سیټ په نامه یادیږی ، کله چی د A د سیټ هر عنصر د B په سیټ کی شامل وی .

دا حقیقت چی A د B سب سیټ دی ، داسی ښکاره کوو: $A \subset B$

بیلګه ۳ –

$A=\{m/$ په کندهار کی ژوند کوی $m\}$

$B=\{n/$ په افغانستان کی ژوند کوی $n\}$

لیدل کیږی چی $A \subset B$ دی .

خالی سیټ د هر سیټ سب سیټ دی . همدا ډول :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

د سیټونو تر منځ د سب سیټ رابطه انعکاسی Reflexive او انتقالی Transitive ده. پدی معنی چی:

۱-د هر A سیټ په هکله صدق کوی چی : $A \subset A$

۲- د هرو درو سیټو B, A او C په هکله صدق کوی:

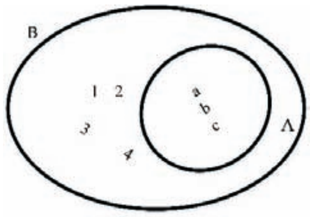
که $A \subset B$ او $B \subset C$ وی ، نو $A \subset C$ دی .

که د A سیټ د B د سیټ سب سیټ نه وی ، نو پدی ډول یی ښیوو: $A \not\subset B$.

پوهیږو چی $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Z}$.

فرضاً د A او B سیټونه داسی ولرو چی $A \subset B$ وی، نو د هغوی د وین ډیاګرام به په لاندی ډول وی:

$B=\{1,2,3,4,a,b,c\}$, $A=\{a,b.c\}$



ش ۳ د $B \subset A$ وین ډیاګرام

تعریف ۲ – د A او B سیټونه په خپل منځ کی مساوی دی ، که دواړه سیټونه د عین عنصرونو درلودونکی وی. په ریاضی معمولاً ددوو سیټو مساوات د $A=B$ سره افاده کیږی.

بیلګه ۴ – د $A=\{-3,3\}$ او د $B=\{x \in \mathbb{R} / x^2-9=0\}$ سیټونه سره مساوی دی.

د سیټونو د مساوات د تعریف څخه استنباط کیږی (نتیجه اخیستل کیږی) ، چی هر سیټ په بی ساری شکل (یوازنی شکل Unique) د خپلو عنصرونو په ذریعه تعین (ټاکل) کیږی او د هغی د څرګندولو په طرز پوری اړه نلری. قرارداد به وکړو چی د سیټ د څرګندولو په وخت کی به د سیټ هر عنصر یوازی او یوازی یو ځل لیکو او د عنصرونو ترتیب به یی په نظر کی ننیسو، پدی معنی چی :

$\{1,2,3\}=\{2,1,3\}$ او $\{1,2,3\}=\{1,1,2,3\}$

که د A او B سیټونه په خپل منځ کی مساوی نه وی نو داسی به یی لیکو: $A \neq B$. هغه سیټ چی یوازی یود a عنصر ولری ، د $\{a\}$ په ذریعه یی ښیيو، پدی معنی چی یوازی a د $\{a\}$ د سیټ عنصر دی.

تیره جمله د فورمول په شکل داسی لیکلای سو : $a \in \{a\}$

د سیټونو ترمنځ د مساوات رابطه انعکاسی ، تناظری او انتقالی خاصیت لری ، پدی معنی چی :

۱- د هر A سیټ دپاره ؛ $A=A$ (انعکاسی خاصیت)

۲- که A او B دوه اختیاری سیټونه وی ؛ که $A=B$ سره وی ، نو $B=A$ سره دی. (تناظری خاصیت)

۳- که B, A او C دری اختیار سیټونه وی ؛ که $A=B$ او $B=C$ سره وی ، نو $A=C$ سره دی . (انتقالی خاصیت)

د ریاضی هره معتبره تیوری د قضییود ثبوت دپاره خپل ځانته خاصه طریقه لری چی البته د سیټ تیوری هم د نوموړی واقیعت څخه مستثنی نده. اکثراً د سیټو د مساوات د ثبوت د پاره د لاندنی واقیعت څخه ګټه اخیستل کیږی:

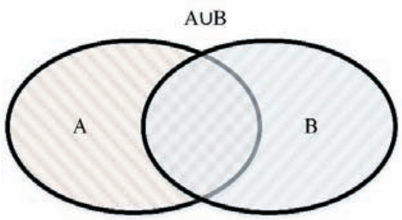
د A او B سیټونه یوازی او یوازی هغه وخت په خپل منځ کی مسا وی دی چی A د B سب سیټ وی او بر عکس B د A سب سیټ وی.

پورتنی حقیقت د لمړنی او دوهم تعریف په نتیجه کی لاسته راځی.

پورته مو د سیټونو ترمنځ د مساوات رابطه وڅیړل، موږ کولای سو ؛ په هغه ډول چی دعددونود جمعی ، ضرب او تفریق سره عادت یو ؛ پر سیټونو هم په مشابه ډول عملییی تعریف کړو ، چی په نتیجه کی یی یو نوی سیټ لاس ته راځی .

تعریف ۳ – فرضاً د A او B دوه اختیاری سیټونه راکړه سوی وی – هغه سیټ چی عنصرونه یی لا اقل د A او یا د B په سیټ پوری تړلی وی ، د A او B د سیټونو د اتحاد(یووالی) Unionپه نامه یادیږی.

د سیټونو د اتحاد(یووالی) عملیه په $\bigcup$ او د A او B د سیټونو اتحاد (یووالی) په $A \bigcup B$ سره ښکاره کوو. د A او B د سیټونو د یووالی د وین ډیاګرام په لانی ډول دی :



ش ۴، دسیټونو د یووالی ډیاګرام

بیلګه ۵ – فرضاً د A او B سیټونه په لاندی ډول راکړه سوی وی:

$A=\{1,3,2,5,7\}$ او $B=\{2,4,7\}$

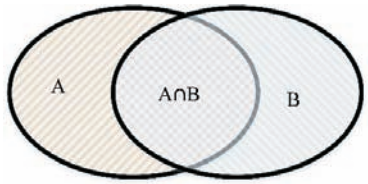
د A او B د سیټونو اتحاد عبارت دی د یو نوی سیټ څخه ،چی په C سره یی ښییو ، چی هم د Aد سیټ عنصرونه او هم د Bد سیټ عنصرونه په ځان کی لریږ یعنی:

$C= A\bigcup B=\{1,3,2,5,7,2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

بیلګه ۶- که Aد پوهنځی په یوه ګروپ کی د ټولو نارینه محصلینو سیټ وی او B په همدی ګروپ کی د ښځینه وو محصلاتو سیټ وی ، نو ددوی د یووالی سیټ به د ګروپ د ټولو محصلینو سیټ جوړ کی.

تعریف ۴ – هغه سیټ چی عنصرونه په عین وخت کی د A او B په سیټو پوری اړه ولری ، د A او B د سیټونو د مشترکی برخی (تقاطع) Intersection په نامه یادیږی.

پر سیټونو د مشترکی برخی عملیه په $\cap$ سره ښکاره کوو، د A او B دسیټونو مشترکه برخه په $A\cap B$ سره ښیوو. د A او B د سیټونو د مشترکی برخی د وین ډیاګرام په لاندی ډول سره دی:



ش ۵ . دسیټو د مشترکی برخی د وین ډیاګرام

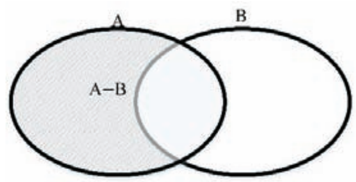
په پنځمه بیلګه کی د A او B د سیټونو مشترکه برخه د Fیو عنصره سیټ دی یعنی :

$A \cap B=F=\{2\}$

په شپږمه بیلګه کی د A او B د سیټونو مشترکه برخه یو خالی سیټ تشکیلوی ، ځکه چی داسی محصل چی هم نر وی او هم ښځه وجود نلری .

تعریف ۵- هغه سیټ چی عنصرونه د A په سیټ اړه ولری ولی د B په سیټ اړه ونلری ، د A او B سیټونو د تفاضل Difference په نامه یادیږی .

پر سیټونو باندی د تفاضل عملیه په (-) سره ښکاره کوو او د A او B د سیټونو تفاضل په A-B سره ښیو. دسیټونو د تفاضل د وین ډیاګرام په لاندی ډول سره دی:



ش ۶ . دسیټونو د تفاضل د وین ډیاګرام

په پنځمه بیلګه کی د A او B د سیټونوتفاضل د D سیټ دی :

$A-B=D=\{1,3,5,7\}$

په شپږمه بیلګه کی که دتفاضل عملیه د ټولو محصلینو پر سیټ او د نارینهٔ محصلینو پر سیټ عملی کړو نو په نتیجه کی به یی د نوموړی ګروپ د محصلاتو سیټ لاسته راسی .

تراو سه بیله دی چی د سیټونو د عنصرونه د خاصو صفتو په هکله معلومات ولرو، پر هغوی مو مختلفی عملیی سرته ورسولی . پر سیټونو باندی د عملیی د اجراء کولو په وخت کی موږ ته دا مهمه نه وه چی زموږ سیټونه څه ډول عنصرونه لری . داچی زموږ سیټونه د پسو رمه ، که د افغانستان ټول دریابونه او یا که ټول اعداد په بر کی نیسی ، موږته مهمه نه وه. داچی په مستوی کی تړلی شکل (هدف مو د وین ډیاګرام دی) څه شی احتواء کوی موږته کاملاً بی تفاوته وه. پدی معنی چی پر سیټونو پورتنی عملیی د هغو سیټو د عنصرونو د اختصاصی صفتو تابع ندی.

کله چی د ریاضی په یوه مشخصه موضوع کی مسئلی څیړل کیږی ، ضرورت پیداکیږی چی یو عمومی سیټ چی د نوموړی مسئلو ټول خصوصیات په بر کی ونیسی ، وڅیړو. په بل عبارت د مسئلو حل د راکړه سوی موضوع په چوکاټ کی د هغه د عمومی بحث سب سیټ دی . هغه سیټونه چی پورتنی خصوصیات ولری د عمومی سیټ Universal Set په نامه یادیږی او معمولاً یی په U سره ښیو.

بیلګه ۷ –

الف – که مسایل د حقیقی عددونوپه چوکاټ کی تر نظر لاندی وی ، نو عمومی سیټ مو $U=\mathbb{R}$ دی.

ب- که زموږ د بحث موضوع د افغانستان خلک وی ، نو عمومی سیټ مو د افغانستان ټول اتباع دی.

ج- که زموږ د بحث موضوع انسان وی ، نو عمومی سیټ مو عبارت دی د نړی د ټولو خلکو څخه.

پاملرنه وکی، چی هرد A سیټ ، چی خالی نه وی $A \neq \emptyset$ لږ تر لږه ددوو سب سیټو درلوونکی دی او هغه عبارت دی له خالی سیټ او پخپله د A د سیټ څخه (د سب سیټ د رابطی خواص وګوری) . داچی راکړه سوی سیټ نور څونه سب سیټونه لری ، دهغه سیټ د عنصرونو په تعداد پوری اړه لری.

که د A سیټ یوازی یو عنصر ولری ، یعنی $A=\{a\}$ وی، نو سب سیټونه عبارت دی له خالی سیټ څخه او یو عنصر لرونکی $\{a\}$ د سیټ څخه . :که د B سیټ دوه عنصره ولری یعنی $B=\{a,b\}$ وی ، نو سب سیټونه عبارت دی له $\{a,b\},\{b\},\{a\}$ او خالی سیټ څخه. پدی معنی چی یو دوه عنصره سیټ څلور $4=2^2$سب سیټه لری. بلاخره که د C سیټ n عنصره ولری ،نو د ټولو سب سیټو نو تعداد به یی 2^n وی . د تمرین په شکل د $D=\{a,b,c,d\}$ د سیټ ټول سب سیټونه ولیکی .

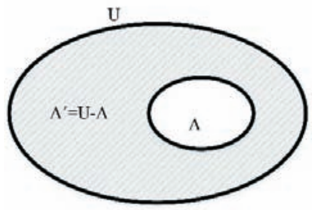
فرضاً د U سیټ راکړه سوی وی ، ددی سیټ د ټولو سب سیټونو سیټ په $P(U)$ (Power set of U) سره ښیو .

تعریف ۶ – د U د سیټ د ټولو سب سیټونو سیټ یعنی $P(U)$ په دی ډول لیکلای سو: $A \in P(U)$ یوازی او یوازی هغه وخت چی $A \subset U$ وی .

تعریف ۷ – که د U سیټ عمومی سیټ او $A \subset U$ وی ، نو د A د سیټ متممه Complement سیټ عبارت دی د A او U د سیټونو د تفاضل څخه.

د A د سیټ متممه سیټ $A`$په دی ډول سره یی ښیو : $A`=U-A$

د متممه سیټ د وین ډیاګرام په لاندی ډول سره دی :



ش۷ . دمتممه سیټ د وین ډیاګرام

بیلګه ۸ –

الف- که $\mathbb{Z}$ =U سره وی او $A=\{0,-1,-2, \ldots\}$ ، پس :

$$A` = \mathbb{Z} - A = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$$

دی .

ب- که U په افغانستان کی د ټولو خلکو سیټ وی او A د افغانستان د ټولو اتباعو سیټ وی ،نو A`=U-A په افغانستان کی د ټولو خارجی اتباعو سیټ دی.

تر دی ځایه د سیټ د مفهوم سره آشنا سوو ، د سب سیټ او د سیټونو د مساوات رابطی مو وڅیړلی او همدا ډول پر سیټونو مو عملیی تعریف کړی .

څرنګه چی د سیټ تیوری د ریاضیاتو په خاصه توګه د معاصرو ریاضیاتو د ارا ئه کولو دپاره یوه مناسبه ژبه ده ،نو ځکه توقع کیری چی باید دا ژبه په کافی اندازه وسیع وی ، څو وکولای سو ټول هغه مسا ئل چی موږ آشنائی ورسره لرو پدی ژبه افاده کړای سو . ددی کار دپاره د تعریف سوی عملیو په څنګ کی ددی عملیو د لاندنی خاصتیو سره هم بلدیت ولرو.

د سیټون د عملیو ځنی مهم او اساسی خاصیتونه په لاندی ډول دی:

۱ . تبدیلی خاصیت Commutative

$A \bigcup B=B \bigcup A$

$A \bigcap B=B \bigcap A$

۲. اتحادی خاصیت Associative

$A \bigcup (B \bigcup C)=(A \bigcup B) \bigcup C$

$A \bigcap (B \bigcap C)=(A \bigcap B) \bigcap C$

۳. توزیعی خاصیت Distributive

$A\bigcup (B\bigcap C)=(A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C)$

$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$

۴. د ځان ځانی قانون Idempotent Law

$A \cup A=A$

$A \cap A=A$

۵. د عمومی او خالی سیټ خصوصیات:

$A \cup \emptyset = A , A \cup U=U$

$A \cap \emptyset = \emptyset , A \cap U=A$

۶. د متممی خصوصیات:

$(A`)`=A , \emptyset`=U , U`= \emptyset , U`= \emptyset$

۷. د ډی مورګان De-Morgan قوانین :

$(A \cap B)`= A` \cup B`$

$(A \cup B)`= A` \cap B`$

۸.

$(A-B)-(C-B)=(A-C)-B$

لمړی او دوهم خاصیتونه وایی چی د اتحاد او د مشترکی برخی عملیی ،تبدیلی او اتحادی خاصیت لری. همدا ډول د سیټونو د اتحاد عملیه نظر د سیټو د مشترکی برخی عملیی ته او برعکس دسیټو د مشترکی برخی عملیه نظر د سیټو د اتحاد و عملیی ته توزیعی خاصیت لری چی ددریم خاصیت په ذریعه ښکاره سویدی. د ډی مورګان قوانین (۷. خاصیت) د سیټو د متمیمی د عملیی پذ ریعه ، د سیټو د اتحا د او د سیټو د مشترکی برخی عملیی یی سره تړلی دی . پورتنی خاصیتونه د دعوی په شکل فورمولبندی سویدی چی د ثبوت دپاره یی له دوو تګلارو څخه استفاده کولای سو.

لمړی طریقه د سیټو د مساوات پر تعریف او د هغو پر خاصیتونو بنا ء ده او دوهمه طریقه دوین د ډیاګرام پر بنسټ ولاړه ده .

دلته موږ یوازی د ۳ او ۷ خاصیتو د اجزاو په ثبوت اکتفا ء کوو . محصلین کولای سی په همدی ډول هغه نور خصوصیتونه هم په اثبات ورسوی.

$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C) \quad .... (I)$

څرنګه چی د پورتنی مساوات دواړی خواوی سیټونه دی ، نو د سیټو د مساوات د تعریف له مخی باید لاندنی رابطی په ثبوت ورسوو:

$A\bigcup (B\bigcap C) \subset (A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C) \ldots (a)$

$(A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C) \subset A\bigcup (B\bigcap C) \ldots (b)$

د (a) د رابطې د ثبوت دپاره فرضوو چې د x يو اختياری عنصرپه $A\bigcup(B\bigcap C)$ شامل دی .يعنی $(x \in A\bigcup (B\bigcap C))$

د سيټو د اتحاد دتعريف پر بنسټ ويلا ی سو چې د x عنصر يا د A په سيټ پوری او يا د B $\bigcap$ C په سيټ پوری اړه لری . يعنی $x \in A$ او يا $x \in B\bigcap C$

که x په A کی شامل وی نو د A سره که د B او C سيټونه متحد کو ، بيا به هم x دهغوی عنصر وی يعنی : $x \in A\bigcup B$ او $x \in A\bigcup C$ پدی معنی چې

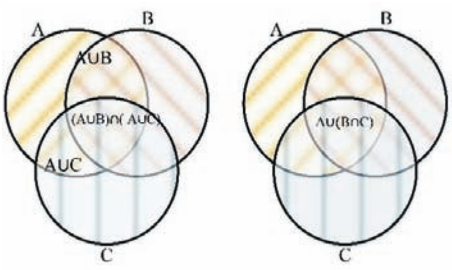
$x\in (A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C)$ ، اوکه $x \in B\bigcap C$ نو د سيټو د مشترکی برخې د تعريف پر بنسټ x په عين وخت کی په B اوC په سيټ په نتيجه کی که A ورسره متحد کړو بيا به هم

$x\in (A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C)$

پدی ډول د (a) رابطه په ثبوت ورسيده.

اوس فرضوو چې يو اختياری عنصر x د $(A\bigcup B) \bigcap (A\bigcup C)$ په سيټ کی شامل دی . نظر د سيټونو د مشترکی برخې وتعريف ته x په عين حال کی په $A\bigcup B$ او په $A\bigcup C$ پوری اړه لری ، ددی ځايه استنباطيږ ی چې x يا د A په سيټ اړه لری او يا د $B\bigcap C$ په سيټ اړه لری $(x \in A)$ يا $(x \in B \bigcap C)$.

په نتيجه کی $x \in A\bigcup (B\bigcap C)$. پدی ډول سره د (b) رابطه په ثبوت ورسيده او په مجموع کی (I)په ثبوت ورسيد. د لاند نيو ډياګرامو پرتله د (I) د رابطې ثبوت تائيدوی او د ثبوت د پروسې په پرمختګ کی ښه مرستندوی دی .



ش۸

بياهم د

$(A\bigcup B)` = A` \bigcap B` \quad \ldots (II)$

د ثبوت دپاره بايد لاندنی رابطې په اثبات ورسوو:

$(A \cup B)' \subset A' \cap B' \quad \ldots (c)$

$A' \cap B' \subset (A \cup B)' \quad \ldots (d)$

فرضوو چی $x \in (A \cup B)'$ دی. د متممی د تعریف له مخی $x \in U$ او

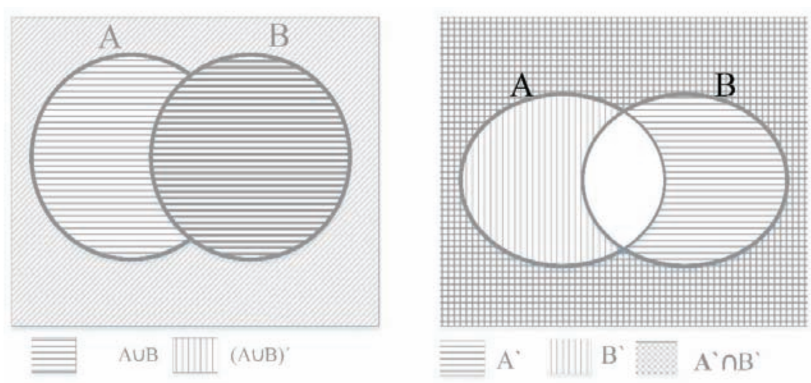
$x \not\subset A \cup B$ ، دسیټونو د اتحاد د تعریف له مخی x نه د A په سیټ او نه د B په سیټ کی شامل دی ($x \not\subset A \quad x \not\subset B$) . پس نو $x \in U - A$ او $x \in U - B$ یعنی

$x \in A' \cap B'$. پدی ډول د (c) رابطه په ثبوت ورسیده . برعکس فرضوو چی

$x \in A' \cap B'$ ، د سیټو د مشترکی برخی د تعریف له مخی صدق کوی چی

$x \in A'$ او $x \in B'$ ، پدی معنی چی د xاختیاری عنصر د A د سیټ او د B د سیټ په متممه اړه لری، یعنی $x \in U - A$ او $x \in U - B$ ، ددی ځایه

$x \in U-(A \cup B)$ یعنی $x \in (A \cup B)'$. پدی ډول د (d) رابطه او په مجموع کی د ۷ خاصیت دوهم جز یعنی (II) په اثبات ورسیده. د ښه درک دپاره لاندنی ډیاګرام په ځیر سره وګوری:



ش۹.

لکه څنګه چی ومو لیدل ، دسیټ د خواصو د ثبوت په وخت کی د وین ډیاګرام ښه مرستندوی دی. څکه نو توصیه کیږی چی د سیټ د تیوری د څیړنی په وخت کی باید د وین دډیاګرام څخه کار واخیستل سی.

د سیټ تیوری په خپل ذات کی یوه ډیره پراخه ، په زړه پوری او د ریاضی په مختلفو برخو کی د ښکلو نتیجو درلودونکی ده . موږ دلته یوازی په ډیر ساده شکل طرح کړه څو وکولای سو د الجبر نور ضروری مفاهیم د هغه پر بنسټ تعریف کړای سو .

II§. بیان او د منطق عملیې پر بیان باندی .
دشلم قرن په اوایلو کی دیری هڅی روانی وی چی د ریاضیاتو مختلفی تیوری په یوه قالب کی راولی . پدی پروسه کی د سیټ تیوری او د ریاضی منطق ډیر مهم رول ولوبوی، ویلای سو په هغه اندازه چی په لومړنیو قرنو کی د سمبولونو داخلول په الجبر کی د ځینو پرابلمو په حل کی آسانتیاوی منځ ته راوړی ،لږ تر لږه په هم هغه اندازه دریاضی منطق په معاصرو ریاضیاتو کی آسانتیاوی منځته راوړی دی. نن ورځ د هغه داستعمال ساحه یوازی په ریاضیاتو پوری محدوده نه بلکه په کمپیوټر، د اتوماتونو په تیوری او برق د انجنیری په برخه کی اعظمی استفاده ځنی کیږی .

د ریاضی د منطقو بنسټ ایښودونکی انگلیسی ریاضی پوه جورج بول G. Boole دی . بول په (1848-1852) کلو کی علمی رسالی نشر کړی چی په هغوی کی د ریاضی د سمبولونو (نخښو) څخه په کلاسیک منطق کی د ځیرونودپاره کار اخیستل سوی دی . دریاضی منطق د ریاضی د مفاهیمو په استفاده سره د فکر هغه قوانین چی په قالب کی راوړل سویدی ، تر ځیرنی لاندی نیسی.

په نوموړی تیوری کی د قضیو محتوای د بحث وړ نه ، بلکه د ترکیبی قضیو رشتیا والی او درواغ والی د ساده قضایاو په اړه د بحث وړ ده. پدی پاراگراف کی موږ یوازی په ابتدائی بڼه دریاضی د منطقو په مفاهیمو اکتفاء کوو. هغه ابتدائی مفاهیم چی د ریاضی منطق یی نه تعریفوی، عبارت دی له بیان Statement رشتیا (حقیقت) True او درواغ False دی .

هغه څرگندونه چی زموږ په مغز کی د عینی نړی د انعکاس سره تطابق وکی ، نو وایو چی دا څرگندونه رشتیا ده او یا حقیقت لری. بر عکس ئی درواغ دی.

دلته به د پوهاند رشتین د پښتو د گرامر څو جملی را نقل کړم:

«خبریه جمله هغه ده چی دیو کار د کیدو او نه کیدو خبرورکوی او په یو وخت کی د دروغو او رښتیاوو احتمال پکښی موجودوی. لکه بریالی پرون تللی ؤ، توریالی نن راغلی ؤ. » (پښتو گرامر، ۴۳۸ مخ)

هره خبریه جمله چی پر هغی باندی د رشتیا او یا دروغو حکم کولای سو ، د بیان مفهوم افاده کوی.

هر اختیاری بیان یا رشتیاوی او یا درواغ(څرگنده ده داسی بیان چی په عین وخت کی هم رشتیا وی او هم درواغ وجود نلری). ځکه نو هر بیان ته یو قیمت ایښودلای سو. پدی معنی چی هر هغه بیان چی رشتیا وی ، هغه ته یو ایږدو او هر هغه بیان چی درواغ وی هغه ته صفر ایږدو. کله کله د یوه او صفر پرځای د T او F د حروفو څخه هم کار اخلو.

بیلگه ۱ –

الف – 8=4+2 یو دروغ بیان دی، یعنی قیمت یی صفر دی . [0]

ب- 22<31 یو رشتیا بیان دی ، یعنی قیمت یی یو دی . [1]

ج- د کابل رود د هند په سمندر کی توئیږی. [0]

د- د غزنی ښار د افغانستان تر ټولوښارو لوی دی. [0]

ه – کابل د افغانستان د اسلامی جمهوریت مرکز (پلازمینه) دی. [1]

بیلگه ۲ – لاندنی څرگندونی بیان ندی:

الف – 300 گرامه توری چای

ب- هغه کتابچه چی شین پوښ لری

ج- پرون چیری وی ؟

د- څو بجی دی؟

یوه شیبه بیرته د بیان و رشتیا والی او دروغ ته راگرځو . د ریاضی د دعواؤ رشتیا والی د عینی ژوندانه د واقعیتونو په شان نسبی دی. نو ځکه د یوی څرگندونی په هکله د رشتیا او دروغ حکم د هغو څرگندونو پر بنسټ کیږی کوم چی ریشتیاوالی او دروغ ئی موږ ته مخکی له مخکی معلوم وی. د بیلگی په ډول :

۱- د مثلث د دا خلی زاویو مجموعه 180 درجی ده .

پورتنی بیان د اقلیدس د اکسیومو په سیستم کی رښتیا دی ، خو د گاوس Gauss بویایی J. Bolyaiاو لوباچوفسکی Lobachovsky په اکسیوماتیکی سیستم کی حقیقت نلری. ځکه چی په هغه سیستم کی د مثلث دداخلی زاویو مجموعه تر 180درجی لږ ده.

۲- د ځمکی او سپوږمی تر منځ فا صله 385000کیلومتره ده.

پورتنی بیان په هغه صورت کی حقیقت لری چی سپوږ می د ځمکی پر شاو خوا د حرکت په وخت کی و هغی معینی نقطی ته ورسیږی . غیر له هغه څخه د سپوږمی د حرکت مدار بیضوی شکل لری یعنی مدار یی هگی ته ورته دی ، نو فاصله یی د 356000کیلومتره او د 406000کیلومتره په منځ کی ده.

که د یوه بیان د تجزیه کیدو امکان وجود ونلری نو هغه ته ساده بیان وایو .

پدی معنی که یو ساده بیان تجزیه هم کړو ، نو هغه څرگندونی چی د تجزیی په نتیجه کی لاسته راځی ، بیان ندی.

هغه بیان چی ساده نه وی د ترکیبی بیان په نامه یادیږی.

بیلگه ۳ -لاندنی څرگندونی ساده بیانونه دی:

الف - کابل د افغانستان پلازمینه ده.

ب - $4*2=6$

ج - نن هوا صافه ده.

بیلگه ۴ -لاندنی څرگندونه ترکیبی بیان دی :

عينو مينه ، د کابل دروازه، شهر نو د کندهار د ښار بیلی بیلی برخی دی.

پورتنی څرګندونه په لاندنیو ساده بیانو تجزیه کولای سو:

الف -عینو مینه دکندهار د ښار یوه برخه ده .

ب - د کابل دروازه د کندهار د ښار یوه برخه ده .

ج - شهر نو د کندهار د ښار یوه برخه ده .

ساده بیانونه د لا تین په کوچنیو حروفو یعنی ..p,q,r,s,t سره ښیو. د ضرورت په وخت کی د لا تین د یوه حرف د شمیر (اند کس Index) سره ، یعنی $p_1 , p_2,p_3,\ldots$ څخه هم کار اخلو.

که ټوله بیانونه د یوه سیټ (مجموعی) په شکل تر څیړنی لاندی ونیسو ، نو کولای سو چی پر بیانو باندی مختلفی عملیې تعریف کړو ، چی د عملیې د عملی کیدو په نتیجه کی یو نوی بیان منځ ته راځی . دا څرګنده ده چی د لاس ته راغلی بیان رشتیا والی او درواغ والی موږ ته اهمیت لری. د نوی بیان رښتیاوالی یا درواغ والی د هغه بیان د اجزأو (یا ابتدایی بیانو) په رښتیاوالی او یا درواغوالی او د اجزاّو تر منځ په عملیی پوری اړه لری .

اوس به نو راسو چی د ټولو بیانو د مجموعی (سیټ) څخه دوه اختیاری بیانونه p او q راواخلو او اوس به نو پر هغوی مختلفی عملیی تعریف کړو .

تعریف ۱ - د pد بیان نفی عبارت د هغه بیان څخه دی چی یوازی او یوازی هغه وخت رشتیا دی چی د pبیان درواغ وی.

د pد بیان نفی په p~ سره ښیو. څرنګه چی دسیټ په تیوری کی عادت ؤ چی د هری عملیی نتیجه مود وین په ډیاګرام کی ښووله نو دلته هم دعملیو نتیجه په یو ه جدول کی ښودلای سو چی د رشتیاوالی د جدول Truth tableپه نوم یادیږی. د رشتیا والی په جدول کی د بیان رشتیاوالی په 1او د بیان درواغوالی په 0 سره ښیو .

دنفی د عملیی د رښتیاوالی جدول په لاندی ډول سره دی :

جدول ۱

p	~p
1	0
0	1

په راتلونکی کی به د نفی عملیه او هغه بیان چی د نفی د عملیی په نتیجه لاسته راځی ، د (نه) په حرف سره افاده کوو.

بیلګه ۵ - که د p بیان عبارت له ''تخته توره ده'' وی.

د p~ بیان عبارت دی له : تخته توره نه ده .

که ووایو چی د p~ بیان عبارت دی له : تخته سپینه ده ، نو د نفی عملیه به مو غلطه عملی کړی وی (ولی ؟).

تعریف ۲ - د p او q دوو بیانو منطقی ضرب Conjunction یوازی او یوازی هغه وخت رشتیا دی چی په عین حال کی دواړه بیانونه رشتیا وی.

ددوو بیانو د منطقی ضرب عملیه په ریاضی کی په ($\wedge$) او په ورځنی ژوند کی د (او) په کلمی سره افاده کوو. یعنی $p \wedge q$ (p او q) ویل کیږی. د تعریف له مخی د p او q د بیانو د منطقی ضرب جدول په لاندی ډول سره دی :

جدول ۲

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

بیلګه ۶ - د ریاضی او فزیک د پوهنځی په لمړنی ټولګی کی ۳۰ محصلین درس لولی او آس یو څلور پښی لرونکی حیوان دی. دلته د p او q بیانونه عبارت دی له:

p- د ریاضی او فزیک د پوهنځی په لمړنی ټولګی کی ۳۰ محصلین درس لولی.

q- آس یو څلور پښی لرونکی حیوان دی.

امکان لری چی دلته ادعا وسی چی دریاضی او فزیک د لمړنی ټولګی د ۳۰ محصلینو درس لوستل د آس د څلورو پښو د درلودلو سره څه اړه لری ؟

بیاهم تکراره و چی موږته د جملی محتوا ارزښت نلری ، بلکه موږ یي د عملیی د اجراء کولو په نتیجه کی یوازی رشتیا والی او درواغ والی مهم دی. که په رشتیا د ریاضی او فزیک د پوهنځی په لمړی ټولګی کی ۳۰ محصیلین درس ولولی او موږ پوهیږو چی آس څلور پښی لرونکی حیوان دی ، پدی لحاظ د منطقی ضرب د عملیی په نتیجه کی یو رشتیا بیان لاسته راځی . سره له دی چی دلاسته راغلی بیان ارتباط په ورځنی ژوند کی په سالم عقل د منلو وړ ندی.

تعریف ۳ - د p او q دوو بیانو منطقی جمع یا Disjunction یوازی او یوازی هغه وخت درواغ دی چی د p او q دواړه بیانونه درواغ وی.

ددوو بیانو د منطقی جمعی عملیه په ریاضی کی په ($\vee$) او په ورځنی ژوند کی په (یا) سره افاده کوو. یعنی $p \vee q$ (p یا q) ویل کیږی.

د دوو بیانو د منطقی جمعی د رشتیاوالی جدول په لاندی ډول سره دی :

جدول ۳

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

بیلگه ۷ ـ د 5 عد د تر 3 کوچنی دی یا پراګ د چک د جمهوریت پلازمینه ده.

پدی بیلګه کی :

p- د 5 عد د تر 3 کوچنی دی.

q- پراګ د چک د جمهوریت پلازمینه ده.

یعنی $p \vee q$ چی د (یا) په کلمه سره یو ځای سوی دی.

تعریف ۴ - د pاو q دوو بیانو استنباط Implication یوازی او یوازی هغه وخت درواغ دی چی اولی بیان یعنی p رشتیا او دوهم بیان یعنی q درواغ وی.

د دوو بیانو د استنباط عملیه په ریاضی کی په «$\rightarrow$» او په ورځنی ژوند کی

(که ... ، نو ...) باندی افاده کوو.یعنی $p \rightarrow q$ (که p، نو q) ویل کیږی.

$p \rightarrow q$ پرځای دا هم ویلای سو چی: د pد بیان څخه د q بیان استنباطیږی. پدی عملیه کی لمړی بیان یعنی p د مقدمی Antecedentاو دوهم بیان یعنی q د نتیجی Consequent په نامه سره یادیږی. د دوو بیانو داستنباط د عملیی د رشتیا والی جدول په لاندی ډول سره دی :

جدول ۴

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

بیلګه ۸ – که یو مثلث قایم الزاویه وی ، نو د وتر مربع یی د قایمو اضلاعو د مربعاتو د حاصل جمع سره مساوی کیږی . یعنی p□□ q . پدی بیلګه کی د pبیان یا مقدمه عبارت دی له : یو مثلث قایم الزاویه دی .

او د q بیان یا نتیجه عبارت دی له : د وتر مربع یی د قایمو اضلاعو د مربعاتو د حاصل جمع سره مساوی کیږی.

تعریف ۵ – د pاو q دوو بیانو معادل والی (تعادل) Equivalence یوا زی او یوازی هغه وخت رشتیادی چی د pاو q دواړه بیانه په عین وخت کی یا رشتیا وی او یا درواغ .

ددوو بیانو معادل والی په ریاضی کی په «$\leftrightarrow$» او په ورځنی ژوند کی په (... یوازی او یوازی هغه وخت چی ...) باندی افاده کوو. یعنی $p \leftrightarrow q$ (p یوازی او یوازی هغه وخت چی q) ویل کیږی.

د pاو q دوو بیانود معادل والی (تعادل) د رشتیا والی جدول په لاندی ډول سره دی:

جدول ۵

p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

بیلګه ۹ ـ و د کاندار ته یواز اویوازی هغه وخت پیسی ورکوی چی په مقابل کی یی رانیول سوی شی تا سوته په لاس درکی.

بیلګه ۱۰ـ یوڅلور ضلعی (څلور اړخیزه ؟) مستطیل دی یوازی او یوازی هغه وخت چی دواړه قطره یی یوله بله سره مساوی او د قطرو د تقاطع نقطه ، قطرونه پر دوو مساوی برخو وویشی. $p \leftrightarrow q$

په پورتنی بیلګه کی د p بیان عبارت دی له : یوڅلور ضلعی (څلور اړخیزه ؟) مستطیل دی.

او د q بیان عبارت دی له : دواړه قطره یی یوله بله سره مساوی او د قطرو د تقاطع نقطه ، قطرونه پر دوو مساوی برخو ویشی.

لیدل کیږی چی په بورتنی بیلګه کی دوهم بیان یعنی q یو ترکیبی بیان دی ، یعنی کولای سو چی د q بیان د r او s په بیانو داسی تجزیه کړو:

r –د مستطیل قطرونه یو له بله سره مساوی دی.

s – د مستطیل قطرونه د تقاطع په نقطه کی پر دوو مساوی برخو ویشل کیږی.

څرنګه چی د q په بیان کی د (او) کلمه په کار لویدلی ده نو د q بیان عبارت دی له : $r \wedge s$ څخه . بلاخره پورتنی بیلګه داسی افاده کوو : $p \leftrightarrow r \wedge s$

د تعادل عملیه کیدای سی چی د تلی سره مقایسه کړو ، پدی معنی چی که تله خالی وی ، نو دواړی خواوی یی سره مساوی دی او که یوی خواته یی یو شی (د بیلګی په توګه اوړه) او بلی خواته د هغه په اندازه وزن پروت وی ، نو هم ددواړو خواو موازنه برابره ده.

تر اوسه موږ یوازی د ساده بیانو سره بوخت ؤ، او د ټوله عملییو تعریف مو په عمومی توګه سره پر ساده بیانو عملی کړی. د هغو بیانو چی د تعریف سویو عملیو په نتیجه کی لاسته راتلل ، رشتیاوالی او دروغ والی مو د رشتیاوالی د جدول څخه لوستلای سوای.

اوس به نو راسو د دوو بیانو پرځای به ډیر بیانونه $p,q,r,s,\ldots$ په نظر کی ونیسو.د پورتنیو تعریفو په مرسته (تعریف ۱ تر ۵ پوری) کولای سو چی بیانونه یو له بله سره ګډ (ترکیب)

کړو.د راکړه سوو بیانو د ترکیب په نتیجه کی یو نوی بیان لاسته راځی. ددی دپاره چی د عملیو نظم او ترتیب مراعت سی، نو د قوسو څخه کاراخلو. د بیلګی په توګه:

$\sim (p \wedge q) \vee r \rightarrow p \vee (\sim r)$

د پورتنی ترکیبی بیان رشتیاوالی یا درواغ والی دp ، q او r ساده بیانو درشتیا والی په قیمتو پوری اړه لری. یعنی هر ساده بیان ته باید د صفر او یو قیمت ورکړو او بیا د ترکیب د سلسلی په نظر کی نیولو سره ، دعملیو د اجراء کولو په نتیجه کی د ترکیبی بیان د رشتیا والی قیمت لا سته راځی. ددی طریقی څخه تل کار نسو اخیستلای ،ځکه چی د درو بیانو له پاره و یو جدول ته چی 2^3 یعنی 8 کرښه ایزه وی او د څلورو بیانو لپاره و یوجدول ته چی 2^4 یعنی 16سطره (کرښی) ولری ، ضرورت لرو.

تعریف ۶ – هغه بیان چی د رشتیاوالی قیمت یی موږ ته نه وی معلوم ، د ریاضی د منطق د متحول logical variableپه نامه یادیږی.

هغه بیان چی د رشتیا والی قیمت یی معلوم وی ، دریاضی د منطق د ثابت logical constant په نامه یادیږی .

معمولًا د منطق د ثابت په بدل کی نظر و رشتیا والی یا درواغ والی ته د یو او صفر څخه کار اخلو.

تعریف ۷ – یو ترکیبی بیان چی د منطق د عملیو په مرسته د منطق د متحولو او د منطق د ثابتو څخه ترکیب سوی وی ، د منطق د الجبر د فارمول په نامه یادیږی.

بیلګه ۱۰ – لاندنی افادی د منطق د الجبر د فارمولو نماینده ګی کوی .

الف - $((p \wedge q) \vee (\sim r)) \leftrightarrow (1 \vee q)$

ب - $\sim((\sim(\sim(\sim p))) \vee q) \leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$

په پورتنیو بیلګو کی په آسانی سره لیدل کیږی ځنی قوسونه بی ځایه دی . موږ کولای سو چی اضافی قوسونه د لاندنیو شرایطو په نظر کی نیولو سره حذف کړو:

اول – د نفی علامه چی د قوس څخه بهر لیکل سوی وی، د قوس په دننه کی پر ټولو بیانو باندی چی بلا فاصله وروسته تر~ قرار لری ، اجرا ء کیږی .

دوهم – په هغه صورت کی چی قوسونه وجود ونلری ، د منطق عملیی په نوبت یا د لمړیتوب د حق پر بنسټ په لاندی ډول اجرا ء کیږی :

$\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\overrightarrow{\leftrightarrow}$. د استنباط $\rightarrow$ او تعادل $\leftrightarrow$ عملیی د مساوی حقوقو درلودونکی دی. یعنی لمړی د نفی عملیه ، دوهم منطقی ضرب ، دریم منطقی جمع او بیا د استنباط او یا تعادل عملیه اجراء کیږی.

دریم - په مجموع کی ټوله فارمولونه بیله قوسو څخه لیکو.

نظر و پورتنی شرایطو ته د لسمی بیلگی فارمولونه داسی لیکو :

الف - $p \wedge q \vee \sim r \leftrightarrow 1 \vee q$

ب - $\sim(\sim p \vee q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$

د پورتنیو شرایطو سره سره ، ددی دپاره چی د غلط پوهیدو مخنیوی سوی وی نو ښه به داوی چی د قوسو څخه کار واخیستل سی.

د منطق د الجبر د فارمولو د رشتیا والی قیمت د هغو ساده بیانو د قیمتو څخه لاسته راځی کوم چی په راکړه سوی فارمول کی ځای پر ځای سوی دی.

بیلگه ۱۱ -

الف - د $p \wedge \sim p$ د فارمول د رشتیا والی جدول جوړ کی!

حل - څرنگه چی راکړه سوی فارمول یو ساده د p بیان لری ، نو جدول بی یوازی دوه سطره لری . ځکه چی د p بیان یوازی او یوازی دوه قیمته چی عبارت دی له صفر او یو څخه ، اخیستلای سی . څرنگه چی په فارمول کی دوی عملیی اجراء سویدی نو جدول باید دوه ستونه ولری (د بیان په شمول دری ستونه کیږی). وروسته له هغه عملیی د مخکنی قرارداد له مخی عملی کوو .

جدول ۶

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

ب - د لاندنی فارمول د رشتیا والی جدول جوړ کی!

$\sim p(\ \sim p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$

حل - په راکړه سوی فارمول کی دوه ساده بیانونه د pاو q وجودلری . نو د فارمول جدول باید 2^2 یعنی څلور کرښی ولری. ځکه چی یوازی او یوازی لاندنی څلور امکانات وجود لری:

الف - د p او qدواړه بیانونه رشتیا دی ، یعنی د هغو دواړو قیمتونه یو یو [1-1] دی.

ب - د p بیان رشتیا او د q بیان درواغ دی ، یعنی د هغوی قیمتونه یو او صفر دی [0-1] .

ج - د p بیان درواغ او د q بیان رشتیا دی ، یعنی د هغوی قیمتونه صفر او یو دی [1-0] .

د - د p او qدواړه بیانونه درواغ دی ، یعنی د هغوی قیمتونه صفر صفر دی . [0-0]

اوس به نو پورتنی وا قعیتونه په جدول کی ولیکو :

p	q	~p	~q	~ p∧q	~ (~ p∧q)	p∧~q	~p(~p ∧ q) ↔ p ∧ ~q
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0

جدول ۷

د پورتنی جدول څخه معلومیږی، کله چی ټوله ممکنه قیمتونه مود ساده بیانو دپاره تعیین کړه ، بیا مو نو د قرارداد د دوهمی نقطی له مخی اجرا ءات وکړه . پدی معنی چی لمړی مو پر ساده بیانو د نفی عملیه ، بیا د منطقی ضرب عملیه او په آخر کی مو د معادل والی (تعادل) عملیه اجراء کړه. پدی ترتیب د راکړه سوی فارمول جدول غیر له اولو دوو ستونو څخه شپږ نور ستونونه لری ، دا ځکه چی په فارمول کی شپږ عملیی عملی سویدی.

دمخه تر دی چی بله بیلګه و څیړو یوه واقعیت ته ستاسو پاملرنه راګرځوم ، هغه داچی د منطق د الجبر هر فارمول چی د nپه تعداد د ساده بیانو درلوونکی وی او د m په تعداد عملیی پکښی اجراء سوی وی ، نو د رشتیا والی جدول یی 2^n سطرونه او m+n ستونونه لری.

ج ـ د لاندنی فارمول د رشتیا والی جدول جوړ کی!

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

حل ـ د راکړه سوی فارمول د رشتیا والی جدول به 8 سطره او 8 ستونونه ولری (ولی ؟)

p	q	r	p → θ	q → r	(p → q) ∧ (q→r)	(p → r)	(p → q) ∧ (q→r) →(p → r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

جدول ۸

په یولسمه بیلګه کی مو دری ډوله فارمولونه و څیړله . که د هغوی آخری ستون ته ښه ځیر سو ، نو و یوه طبیعی نظم ته به متوجه سو .

دیولسمی بیلګی د الف د جز د جدول په وروستنی ستون کی (جدول ۶ وګوری) یوازی صفر وجود لری ، پدی معنی چی که موږ د p و بیان ته هر قیمت ورکړو نو په راکړه سوی فارمول کی د عملیو تر اجراء کولو وروسته به د فارمول قیمت صفر وی . په بله اصطلاح ویلای سو چی دا فارمول به تل درواغ وی . بر عکس د ج جز د جدول په وروستی ستون کی)جدول ۸ وګوری(یوازی او یوازی د یوه قیمت وجود لری . پدی معنی چی د p ,q او r ساده بیانو ته

چی هر قیمت وضع کړو ، په فارمول کی د عملیو د اجراء کیدو په نتیجه کی به د فارمول نهایی قیمت تل یو وی . په بله اصطلا ح دا فارمول د p ,q او r د هر قیمت دپاره رشتیا دی .

تعریف ۷ ـ د منطق د الجبر فارمول چی د رشتیا والی د جدول په وروستی ستون کی یی یوازی او یوازی یو وجود ولری ، د منطق د قانون یا Tautology په نامه یادیږی .

بیلګه ۱۲ ـ لاندنی فارمولونه د منطق قوانین یا Tautology دی :

۱ ـ د دوو نفی قانون (د نفی نفی قانون) $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

۲ ـ ددریم د طرد قانون low of excluded middle $p\vee\sim p$

۳ ـ د ضد بیان)د بیان د تناقض(قانون low of contradiction $\sim(p \wedge\sim p)$

۴ ـ د مودوس پونینس قانون Modus ponens $(p \to q) \wedge p \to q$

۵ ـ د قیاس قانون Syllogism $(p \to q) \wedge (q\to r) \to(p \to r)$

۶ـ د مخالف حالت قانون Contraposition

$$(p \to q) \leftrightarrow(\sim q \to\sim p)$$

په مجموع کی د منطق قوانین لایتناهی دی .

د پورتنیو قوانینو جدولونه د تمرین په شکل کار کړی!

تعریف ۸ ـ د منطق د الجبر فارمول چی د رشتیا والی د جدول په وروستی ستون کی یی یوازی او یوازی صفر وجود ولری، د ضد بیان (یا د بیان د نقض) contradiction په نامه یادیږی.

بیلګه ۱۳ ـ لاندنی فارمولونه ضد بیان یا د بیان نقض دی :

۱- $p \wedge\sim p$

۲- $\sim p \leftrightarrow p$

د هر منطقی قانون (تاوتولوجی) نفی د بیان تنقیض دی .

د نقض بیان شمیر به څونه وی ؟

تعریف ۹ ـ د منطق د الجبر فارمول چی د رشتیا والی د جدول په وروستی ستون کی یی صفر او یو دواړه وجود ولری، د عملی Feasible فارمول په نامه یادیږی .

بیلګه ۱۴ ـ د $p \to \sim p$ یو عملی فارمول دی .

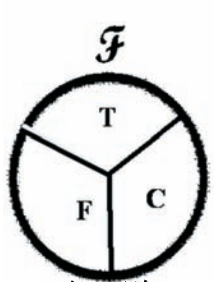
پدی ډول د منطق د الجبر ټول فارمولونه پر درو ټولګیو ویشو چی په لاندنی ډیاګرام کی ښودل کیږی:

$\mathcal{F}$ ـ د منطق د الجبر د ټولو فارمولو سیټ

T ـ د ټولو تاوتولوجی د فارمولو سیټ.

C ـ د ټولو ضد بیان د فارمولو سیټ.

F ـ د ټولو عملی فارمولو سیټ.



§ III . د منطق د عملیو خاصیتونه .

الجبری مطابقت $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=x-y$ ته ځیر کیږو . معمولاً ددی مطابقت د ثبوت د پاره د دوومختلفو طریقو څخه کار اخلو . لمړی داچی د x او y د مجهولو په بدل کی قیمتونه ایږدو ، چی د هغه په نتیجه کی که دمطابقت د راستی خوا قیمت د چپی خوا د قیمت سره مساوی وی نو وایو چی مطابقت صدق کوی.

دوهم داچی هڅه کوو چی د هغو مطابقتو څخه کار واخلو، کوم چی مخ کی له مخ کی ثابت سویدی ، زموږ په بیلګه کی باید اول ثابته کړو چی:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

په منطق کی هم و الجبر ته ورته عمل کوو . د ...,x,y,z د متحولو په بدل کی ...,p,q,r او د الجبری جمع او ضرب په بدل کی د منطق جمع او ضرب لرو . همدا ډول تر اوسه مو د فارمولو د قیمتو د معلومو لو د پاره د جدول (یعنی د الجبر د لمړی طریقی) څخه کار اخیستی . که یو فارمول چی د دوو یا درو بیانو څخه تشکیل او د عملیو تعداد یی په اووه یا اته باندی محدود وی ، نو جدول یی بیله کومی ستونزی جوړیدای سی . مګر که د ساده بیانو او پر هغو باندی د عملیو تعداد ډیر وی ، نو بیا د جدول په جوړولو کی د ستونزو سره مخامخ کیږو (په یوه فارمول کی چی ۵ ساده بیانه ولری او ۱۰ عملیی عملی سوی وی ، جدول یی تصور کی). ځکه نو ښه به داوی چی ددوهمی طریقی څخه کار واخلو.یعنی لمړی د ساده مطابقتو صحیح والی په اثبات ورسوو . لمړی باید د مطابقت مفهوم د منطقو په الجبر کی تعریف کړو .

تعریف ۱ ـ د منطقو په الجبر کی دوه فارموله هغه وخت مطابق بولو چی که ددواړو فارمولو دټولو متحولو په بدل کی عین قیمتونه وضع کړو نو فارمولونه هم عینی قیمتونه ولری .

د دوو فارمولو د مطابقت دپاره د ≡ کار اخلو .د منطق د الجبر فارمولونه د ساده بیانو په ځیر په ... ,p,q,r سره ښیو. دلته باید پاملرنه وکو چی ... ,p,q,r پخپله د نورو ساده بیانو او د منطق د عملیو ترکیب دی.

قضیه ۱ ـ د منطق د الجبر د p او q دوه فارمولونه یوازی او یوازی هغه وخت مطابق دی چی د p↔q افاده تاوتولوجی وی.

د قضیی ثبوت د تعادل د عملیی او د مطابقت د تعریف څخه استنباط کیږی.

په منطق کې د مطابقت د مفهوم پر بنسټ د منطق د عملیو خاصیتونه په لاندې ډول تر کتنې لاندې نیسو:

۱ـ د تبدیلی قانون	Commutative	$p\vee q\equiv q\vee p$ $p\wedge q\equiv q\wedge p$
۲ ـ اتحادی قانون	Associative	$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$
۳ ـ توزیعی (د ویش) قانون	Distributive	$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
۴ ـ د ځان ځانی قانون	Idempotent laws	$p\vee p\equiv p$ $p\wedge p\equiv p$
۵ ـ د عینیت(کټ مټ والی) قانون	Identity Laws	$p\vee 1\equiv 1\ ,\quad p\wedge 1\equiv p$ $p\vee 0\equiv p\ ,\quad p\wedge 0\equiv 0$
۶ ـ د نفی نفی قانون		$\sim(\sim p)\equiv p$
۷ ـ		$p\vee\sim p\equiv 1\ ,\ p\wedge\sim p\equiv 0$
۸ ـ د جذب قانون	Absorption	$p\vee(p\wedge q)\equiv p$ $p\vee(\sim p\wedge q)\equiv p\vee q$
۹ ـ د دی مارګن قوانین	De-Morgan	$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$
۱۰ ـ		$p\to q\equiv\sim p\vee q$ $p\to q\equiv\sim q\to\sim p$
۱۱ ـ		$p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$
۱۲ـ		$p\wedge q\equiv\sim(\sim p\vee\sim q)$
۱۳ـ		$p\vee q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)$

که پورتنیو مطابقتو ته دقیق ځیر سو نو پورتنی قوانین چې د منطق د الجبر د فارمولو پر سیټ عملی کیږی او پر سیټونو باندی د عملیو خاصیتونه ($\S$ I وګوری) یو خاص ورته والی لری.

دلته ۱، ۲ او ۳ مطابقتونه دمنطق د ضرب او جمعی د تبدیلی ، اتحادی او توزیعی خاصیتو نماینده ګی کوی . څرنګه چې لیدل کیږی ۹ قوانین د دی ـ مارګن قوانین دی .

و یلای سو چې عین عملیی مو پر یوبل سیټ چې عبارت دی د منطق د فارمولو له سیټ څخه ، تعریف کړی.

سوال کیږی چې پورتنی مطابقتونه به څنګه په اثبات ورسیږی؟

څرنګه چې موږ له شروع څخه د ریاضی د منطقو تیوری په ابتدایی او ساده شکل راشروع کړه او د منطق د عملیو تعبیر مو د رشتیاوالی د جدول پذریعه ښکاره کړ، نو ځکه پورتنی مطابقتونه هم د لمړی قضیی د په نظر کی نیولو سره د رشتیاوالی د جدول پذ ریعه په ثبوت رسوو .

بیلګه ۱ ـ د منطق د جمعی د عملیی تبدیلی خاصیت ثابتوو، یعنی : $p\vee q\equiv q\vee p$

		I	II	III
p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	$p\vee q\leftrightarrow q\vee p$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

جدول ۹

کی د عین قیمت د وضع کولو په نتیجه کی د مطابقت راسته او کینه خوا ته باید عین قیمت لاسته راسی . د جدول I او II ستون دا واقعیت تا ئیدوی .همداراز د لمړی قضیی پر بنسټ $p\vee q\leftrightarrow q\vee p$ تاوتولوجی ده . III ستون وگوری.

که د منطق د الجبر د عملیو خاصیتو نه مو ښه په ځیر سره مطالعه کړی وی ، نو خا مخا به ۱۱ ،۱۲ او ۱۳ خاصیت ته متوجه سوی یاست. ذکر سوی خاصیتونه یو ډیر مهم او په زړه پوری مفهوم افاده کوی. ددی خاصیتو پر بنسټ کولای سو چی یوازی د جمع او نفی عملیو یعنی (∨، ~) او یا ضرب او نفی عملیو یعنی (∧،~) باندی اکتفا ء وکړو. د بیلگی په ډول ۱۱ خاصیت د استنباط عملیه د جمع او نفی د عملیی پذریعه ارائه کوی.

البته په هغه صورت کی چی په دوو عملیو اکتفاء وکړو ،د ستونزو سره مخامخ کیږو . خصوصاً چی یو اوږد فارمول راکړه سو ی وی . د ۱ څخه تر ۱۳ خاصیتو په مرسته کولای سو چی اوږده فارمولونه لنډ کړو .

بیلگه ۲ ـ لاندنی فارمول د p ، q او r د کومو قیمتو په درلودلو سره رشتیا او د کومو قیمتو په درلودلو سره درواغ دی . $p\vee(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\rightarrow r \vee \sim r)$

حل ـ لمړی د مخکنیو مطابقتو په مرسته هڅه کوو چی راکړه سوی فارمول یو څه لنډ کړو .

$$p\vee(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\rightarrow r \vee \sim r)\equiv [p \vee \sim p \equiv 1] \equiv p\vee(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\rightarrow 1) \equiv$$
$$[p\wedge q\equiv q\wedge p] \equiv p\vee(\sim p \wedge q\ )\vee(\sim q\rightarrow 1)\equiv [p\vee(\sim p \wedge q\ ) \equiv p\vee q\ ] \equiv($$
$$p\vee q) \vee(\sim q\rightarrow 1)\equiv$$

$$[\ p\rightarrow q \equiv \sim p \vee q] \equiv (\ p\vee q) \vee(q \vee 1) \equiv [\ p \vee 1 \equiv 1] \equiv (\ p\vee q) \vee 1 \equiv$$
$$]\equiv\ p\vee(q \vee 1) \equiv [p \vee 1 \equiv 1] \equiv p \vee 1 \equiv 1\ [p\vee q) \vee r\equiv p\vee(q\vee r)$$

هغه مطابقتونه چی د راکړه سوی فارمول په ساده کولو کی کار ځنی اخیستل سوی دی ، په کنج لرونکی) مربعی (قوسو کی راوړه سویدی .

اوس نو استدلال کولای سو چی راکړه سوی فارمول تاو تو لوجی دی ، یعنی د ددی فارمول د ساده بیانو په عوض کی چی هر قیمت وضع کړو ، راکړه سوی فارمول رشتیا دی .

بیلگه ۳ ـ لاندنی فارمول د p ، q او r د کومو قیمتو په درلودلو سره رشتیا او د کومو قیمتو په درلودلو سره درواغ دی . $p \vee ((q \vee r) \wedge (\ r \rightarrow q))$

حل ـ د تیری بیلگی بر خلاف دا ځل د مطابقت د علامی « ≡ » پر سر باندی یوازی د هغه مطابقت شماره لیکو کوم چی استفاده څنی سوی ده .

$$\equiv \text{ د ۱۱ مطابقت پر بنسټ فارمول مطابق دی } \overset{11}{\equiv} p \vee ((q \vee r) \wedge (r \rightarrow q))$$

$$p\vee((q \vee r)\wedge(\sim r\vee q)) \overset{3}{\equiv} p \vee (q\vee(r \wedge \sim r)) \overset{7}{\equiv} p \vee (q \vee 0) \overset{5}{\equiv}$$

$$\overset{5}{\equiv} p \vee q$$

بلاخره د راکړه سوی فارمول رشتیاوالی او درواغ والی یوازی او یوازی د $p \vee q$ د افادی په رشتیا والی او یا درواغ والی پوری تړلی دی . پدی معنی چی د راکړه سوی فارمول جدول به د دریم جدول سره مطابق وی . البته څه ډول چی لیدل کیږی د r بیان د راکړه سوی فارمول په رشتیا والی او یا درواغ والی کوم رول نه لوبوی .

§ IV . قضیه ـ کافی او لازمی شرط ـ په غیر مستقیم ډول ثبوت .

د ریاضی هره تیوری په معاصر مفهوم سره دری بنسټیزی برخی لری . لمړی برخه یی اکسیومی Axioms ، دوهمه برخه یی تعریفونه Definitions او دریمه برخه (په اصطلاح د ملا تیر یا ستون فقرات) یی قضیی Theorems تشکیلوی . قضیی معمولاً د اکسیومو ، تعریفو او هغو قضییو په مرسته چی مخکی په ثبوت رسیدلی دی په منطقی استدلال (په قیاسی یا استنتاجی طریقه Deductive) ثابتوو.

معمولاً قضیه د $p\rightarrow q$ په شکل لیکو . دلته د p بیان ته فرضیه او د q بیان ته نتیجه وایو . که د یوی قضیی فرضیه او نتیجه ساده بیانونه وی نو قضیی ته ساده قضیه وایو او که فرضیه او نتیجه ترکیبی بیانونه وی نو قضیی ته مرکبه قضیه وایو .

بیلگه ۱ ـ

الف ـ که مثلث قایم الزاویه وی ، نو د وتر مربع یی د قایمه اضلاعو د مربعاتو د حاصل جمعی (مجموعی) سره مساوی کیږی .

پورتنی قضیه یوه ساده قضیه ده ځکه چی :

p ـ « مثلث قایم الزاویه دی» . یو ساده بیان دی .

q ـ « د وتر مربع یی د قایمه اضلاعو د مربعاتو د حاصل جمعی (مجموعی) سره مساوی کیږی » . دا هم یو ساده بیان دی .

ب ـ که د a او b عددونه د c پر عدد د ویش وړ وی (د تقسیم قابلیت ولری) ، نو د هغوی د جمعی حاصل (مجموعه a+b) هم پر c باندی د ویش وړ دی .

پورتنی قضیه یوه ترکیبی قضیه ده ، ځکه چی فرضیه یی ددوو بیانو څخه ترکیب سویده . یعنی :

p ـ « د a عدد د c پر عدد د ویش وړ دی .»

q - « د b عدد د c پر عدد د ویش وړ دی .»

r - « د a+b عدد د c پر عدد د ویش وړ دی .»

ځکه نو قضیه اصلاً د $p \wedge q \rightarrow r$ بڼه لری.

د $p \rightarrow q$ د قضیی څخه لاندنی دری قضیی جوړولای سو :

$q \rightarrow p$ - د راکړه سوی قضیی معکوسه قضیه ده .

$\sim p \rightarrow \sim q$ - د راکړه سوی قضیی مخالف الجهته قضیه.

$\sim q \rightarrow \sim p$ - د معکوسی قضیی مخالف الجهته قضیه.

پورتنی قضیی د را کړه سوی قضیی د متناظرو قضیو په نامه هم یادیږی .

بیلګه ۲ -

قضیه - که یو متوازی الا ضلاع معین Rohmb وی ، نو قطرونه یی یو پر بل باندی عمود دی .

معکوسه قضیه - که د یوی متوا زی الاضلاع قطرونه یو پر بل عمود وی ، نو هغه متوازی الاضلاع معین دی .

مخالف الجهته قضیه - که یو متوازی الا ضلاع معین Rohmb نه وی ، نو قطرونه یی یو پر بل باندی عمود ندی.

مخالف الجهته قضیه و معکوسی قضیی ته - که د یوی متوا زی الاضلاع قطرونه یو پر بل عمود نه وی ، نو هغه متوازی الاضلاع معین ندی .

په راکړه سوی بیلګه کی ټولی متناظری قضیی حقیقت لری ، خوتل داسی نه وی . کله کله داسی پیښیږی چی د راکړه سوی قضیی متناظری قضیی حتی یو نا معقوله څیره نیسی .

د بیلګی په ډول لاندنی قضیه تر نظر لاندی نیسو .

بیلګه ۳ -

قضیه - که دوه عدده پر دریم عدد د ویش وړ وی ، نو دهغو دوو عددو د جمعی حاصل هم پر ذ کر سوی عدد د ویش وړ دی .

فرضاً د pاو q دوه بیانه راکړه سوی وی . په هغه صورت کی چی $p \rightarrow q$ حقیقت ولری (رشتیا وی) ، نو وایو چی د p شرط د q د شرط دپاره کافی دی .

که $q \rightarrow p$ قضیه هم حقیقت ولری ، نو وایو چی د p شرط د q د شرط دپاره لازمی دی . په هغه صورت کی چی دواړی قضیی ، یعنی $p \rightarrow q$ او $q \rightarrow p$ حقیقت ولری ، نو وایو چی د p شرط د q د شرط دپاره کافی او لازم دی .

بیلګه ۴ -

فرضوو چی د p او q بیانونه په لاندی ډول سره راکړه سوی دی .

p - « د a او b د عددو د ضرب حاصل د c پر عدد د ویش وړ دی.»

q - « یو د عددو څخه یعنی a یا b پر c د ویش وړ دی.»

د p→q د څیړلو په نتیجه کی لیدل کیږی چی p→q قضیه نده ، ځکه چی :

که b=4, a=3 او c=6 وی ، نو a.b=3.4=12 پر c=6 د ویش وړدی ، مګر د a=3 او b=4 هیڅ یو هم پر c=6 دویش وړ ندی . یعنی د p شرط دلته د q دپاره کافی ندی او هم دا ډول دq شرط د p دپاره لازمی ندی .

په عین حال کی د q→p استنباط د قضیې په صفت حقیقت لری. پدی معنی چی د q شرط د p دپاره کافی او p د q دپاره لازمی دی .

که د یوی قضیی فرضیه د هغی د نتیجی دپاره لازم او کافی وی ، نو د دوو قضیو(یعنی مستقیمه قضیه او دهغه معکوس) په عوض کی د (لازم او کافی) د جملی په استعمال سره . یوه قضیه لیکو .

د قضیو او د هغوی د متناظرو قضیو په هکله لاندنی مطابقتونه حقیقت لری :

قضیه ۱ -

$$p\to q\equiv\sim q\to\sim p$$

$$q\to p\equiv\sim p\to\sim q$$

معمولاً د قضیو د ثبوت په وخت کی د ستونځو سره مخامخ کیږو. پدی لحاظ د پورتنی قضیی څخه په استفاده سره کولای سو چی د راکړه سوی قضیی پر ځای مخالف الجهته قضیه یی په اثبات ورسوو. همداډول پورتنی قضیه دا افاده کوی چی د څلورو قضیو د ثبوت پرځای د دوو قضیو ثبوت کافی دی . د قضیی د ثبوت د متود د ټاکنی په هکله باید ووایم چی اکثراً د قضیی ثبوت په غیر مستقیم ډول مؤثرتره دی . د نوموړی متود تیوریکی بنسټیزه لاندنی مطابقتونه دی :

$$p\to q\equiv(p\wedge\sim q\to 0)\qquad\ldots\text{ I}$$

$$p\to q\equiv(p\wedge\sim q\to p\wedge\sim p)\qquad\ldots\text{ II}$$

$$p\to q\equiv(p\wedge\sim q\to r\wedge\sim r)\qquad\ldots\text{ III}$$

د پورتنیو مطابقطتونو څخه په لاندی ډول کار اخلو :

فرضوو چی د p→q قضیه راکړه سویده .

په لمړی حالت کی فر ضوو چی د p→q قضیه حقیقت نلری ، یعنی $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$ ددعوا(لانجی)واقعی حالت دی. د منطقی استنتاج په نتیجه کی په اصطلاح«نامعقول» حالت ته رسیږو.

بیلگه ۵ ـ د لاندنی قضیی په ثبوت کی د غیر مستقیم متود څخه کار اخلو .

قضیه ـ ناطق عدد وجود نلری چی مربع ئی مساوی په 2 سره وی .

ثبوت ـ پورتنی قضیه په لاندنی شکل هم ښودلای سو .

که $\frac{k}{l}$ ، $l \neq 0$ ناطق عدد وی ، نو ددی عدد مربع د 2 سره نسی مساوی کیدای ، یعنی $(\frac{k}{l})^2 \neq 2$.

فرضوو چی د $\frac{k}{l}$ کسر د لنډولو (اختصار) وړ ندی . او $(\frac{k}{l})^2 = 2$. ددی ځایه $\frac{k^2}{l^2} = 2$ او $k^2 = 2l^2$ یعنی k^2 یو جفت عدد دی . کله چی k^2 یو جفت عدد وی . نو k پخبله هم جفت عدد دی، یعنی $k=2m$ ، مګر $(2m)^2=2\,l^2$ او $4m^2=2\,l^2$ او بلاخره $2m^2 = l^2$ کیږی .
وروستنی مساوات دا ښیی چی l^2 او بلاخره د l عدد جفت یعنی $l=2n$ دی . ددی استدلال په نتیجه کی لیدل کیږی چی د k او l عددونه د یوه ګډ (مشترک) مقسوم علیه درلودونکی دی ، چی هغه عبارت له 2 څخه دی . پدی معنی چی د $\frac{k}{l}$ کسر د لنډولو (اختصار) وړ دی . پدی ترتیب د $(\frac{k}{l})^2 = 2$ فرضیه حقیقت نلری . فلهذا قضیه ثابته سوه.

اوس به نو راسو چی دوهم مطاقت وګورو. دلته هم فرضوو چی د p→q قضیه حقیقت نلری . د منطقی استنتاج په نتیجه کی و یو داسی شرط ته رسیږو چی اصلی فرضیه نفی کوی .

بیلګه ۶ ـ

قضیه ـ که m تام عدد وی او m^2 جفت عدد وی ، نو د m عدد هم جفت دی.

p ـ « m تام عدد دی».

r ـ « m^2 جفت عدد دی» .

q ـ « د m عدد جفت دی».

پدی لحاظ قضیه د p∧r→q بڼه (شکل) لری.

د II مطابقت څخه په استفاده سره فرضوو چی $(p \wedge r) \wedge \sim q$ حقیقت لری . پدی لحاظ وایو چی :

د m عدد تام دی ، د m^2 عدد جفت دی او m یو طاق عدد دی .

څرنګه چی طاق عددونه د $m=2k+1$ په څیر لیکلای سو ، نو :

$$m^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1 =2(2k^2+2k)+1$$

پورتنی مساوات وایی چی m^2 طاق عدد دی ، یعنی $r \wedge \sim r$ ، پدی لحاظ نو زموږ اصلی قضیه رشتیا ده .

په دریم حالت کی زموږ د استنتاج نتیجه د یوی اکسیومی او یا هغو قضیو سره چی مخکی په ثبوت رسیدلی دی ، مغایرت ښکاره کوی .

بیلګه ۷ ـ

قضیه ـ که د l مستقیم خط په هغه مستوی کی چی د دوو موازی خطو k او h څخه تشکیله سوی وی ، قرار ولری او د l مستقیم خط یو له مستقیمو خطو k یا h قطع کړی نو د l مستقیم خط د مستوی دوهم مستقیم خط هم قطع کوی .

ثبوت ـ فرضوو چی د l مستقیم خط د k مستقیم خط قطع کوی او د h مستقیم خط نه قطع کوی (یعنی د h سره موازی دی). په هغه نقط کی چی د l مستقیم خط د k مستقیم خط قطع کوی په P سره ښیو ، یعنی : $P=k\cap l$

د P د نقطی څخه د k او l مستقیم خطونه پداسی ډول تیریږی چی د h د مستقیم خط سره موازی دی . لاکن دا حالت د اقلیدس د موازاتو د اکسیومی (یعنی د اقلیدس د پنځم اصل) سره مغایرت لری .

د اقلیدس پنځم اصل وایی :

« په راکړه سوی مستوی کی د مستوی د یوی نقطی څخه و یوه مستقیم خط ته چی په همدغه مستوی کی مو قعیت ولری ، حد اکثر یو مستقیم خط رسمیدای سی چی و راکړه سوی مستقیم خط ته موازی وی .»

فلهذا قضیه په ثبوت ورسیده .

§V. غبرګونی اړیکی (دوګانه رابطی) او د هغوی ساده ترین خاصیتونه .

دمخه تر دی چی د غبرګونی اړیکو (Binary Relation) د مفهوم په توضیح پیل وکړو ، لمړی باید هغه مفاهیم لکه د سیټونو مُرّتبی جوړی او د کارتیزین ضرب واضح کړو.

فرض کو چی a او b دوه کاملاً کیفی (مساوی یا مختلف) شیان دی. ددی شیانومرتبه جوړه (دوه ئیز)ordered pair عبارت ده له (a,b) څخه ، داسی چی a یی لمړی جزاو bیی دوهم جز دی. د مرتبی جوړی بنسټیز اختصاصی صفت د لاند نی رابطی پذریعه ارائه کولای سو :

$$(a,b)=(c,d)\equiv a=c \wedge b=d \quad \dots (1)$$

یعنی که د (a,b) او (c,d) دوی مرتبی جوړی راکړه سوی وی ، نو هغوی په خپل منځ کی یوازی او یوازی هغه وخت مساوی دی ، چی د هغوی لمړی جز د لمړی جز سره او دوهم جز د دوهم جز سره مساوی وی . باید پاملرنه وکوو چی د غیر مرتبه جوړه یعنی هغه سټ چی دوه عنصره ولری (یا هغه سیټ چی یو عنصر ولری ، په داسی حال کی چی a=b سره وی) د (1) خاصیت نلری . ځکه چی نظر و هغه قرارداد ته چی په (I§) کی مو کړی و

$\{a,b\}=\{b,a\}$ او $\{a,a\}=\{a\}$ دی. مګر $(a,b)\neq(b,a)$ او (a,a)یوه مرتبه جوړه ده . د مرتبی جوړی (دوه ئیز)پر بنسټ مرتبه درییز په لاندی ډول تعریفوو:

د a_1,a_2,a_3 د عناصرو مرتب درییز عبارت له هغه مرتبی جوړی (دوه ئیز) څخه دی چی لمړی جز ئی د (a_1,a_2) مرتبه دوه ئیز ه او دوهم جز ئی د a_3 عنصر تشکیلوی . یعنی

مرتبه درییز $$(a_1,a_2,a_3) \overset{df}{=} ((a_1,a_2),a_3)$$

(د $\overset{df}{=}$ سمبول دی د تعریف پر اسا س by definition ولوستل سی).

په همدا ډول مرتب څلوریز، پنځه ئیز ، ... ، n - ئیز تعریفولای سو . یعنی

مُرّتبه څلوریز $$(a_1,a_2,a_3,a_4) \overset{df}{=} ((a_1,a_2,a_3),a_4) \qquad \ldots$$

$$\vdots$$

مُرَتبه n - ئیز $$(a_1,a_2, \ldots,a_{n-1},a_n) \overset{df}{=} ((a_1,a_2, \ldots,a_{n-1}),a_n)$$

تعریف ۱ - د A او B د سیټونو کارتیزین ضرب Cartesian Product عبارت دی له ټولو هغو (a,b) مرتبو جوړو څخه چی لمړی جز ئی د A په سیټ او دوهم جز ئی د B په سیټ کی شامل وی . د A او B د سیټو کارتیزین ضرب په $P=A\times B$ سره ښکاره کوو.

پورتنی تعریف د ریاضی په ژبه داسی بیانولای سو :

$$P=A\times B \overset{df}{=} \{(a,b) \,/\, a\in A \wedge b \in B\}$$

بیلګه ۱- فرضاً د A او B سیټونه په لاندی ډول سره راکړه سوی وی :

$A=\{1,2,3\}\ ;\ B=\{\Upsilon ,\blacklozenge\}$

نو د هغوی کارتیزین ضرب عبارت دی له :

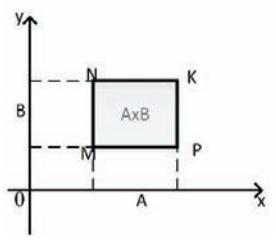
$P_1= A\times B=\{(1,\Upsilon);(2,\Upsilon);(3,\Upsilon);(1,\blacklozenge);(2,\blacklozenge);(3,\blacklozenge) \}$

په عین حال کی :

$P_2=B\times A=\{(\Upsilon,1);(\Upsilon ,2);(\Upsilon ,3); (\blacklozenge ,1);(\blacklozenge ,2);(\blacklozenge ,3)\}$

لیدل کیږی چی د P_1 او P_2 سیټونه په خپل منځ کی مساوی ندی ، یعنی $P_1\neq P_2$ یا په بل عبارت $A\times B\neq B\times A$. به ریاضی کی معمولاً ویل کیږی چی د دووسیټو د کارتیزین ضرب تبدیلی خاصیت نلری .

بیلګه ۲ ـ فرض کو چی د A او B سیټونه د حقیقی عددو د سیټ کیفی سب سیټونه وی . د $A\times B$ هندسی شکل عبارت دی د $MNKP$ د مستطیل د ټولو نقطو د سیټ څخه.



ش ۱۱

اوس نو که د $A_1,A_2,\ldots,A_n$ څو سیټونه راکړه سوی وی ، نو د هغوی کارتیزین ضرب یعنی $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ عبارت دی د هغو مرتبو n ئیزو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د سیټ څخه چی $a_1\in A_1, a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n$ وی .یعنی :

$$P= A_1\times A_2\times\ldots\times A_n \overset{df}{=} \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1\in A_1,a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n\}$$

بیلګه ۳ ـ که $A_1=\{1\}$, $A_2=\{a,b\}$ او $A_3=\{0\}$ وی ، نو :

$$P= A_1\times A_2\times A_3=\{(1,a,0);(2,b,0)\}$$

سربیره پردی $A\times A$ د کارتیزین په مربع او $A\times A\times A$ د کارتیزین په مکعب سره نوموو او په A^2او A^3سره ئی هم ښیو . په همدا ډول :

$$\underbrace{A\times\ldots\times A}_{n\text{- ځله}}=A^n$$

(A n ـ ځله په خپل ځان کی ضربیږی).

فرضوو چی د A او B د سیټونو کارتیزین ضرب یعنی $A\times B$ راکړه سوی دی .

تعریف ۲ ـ د Aاو B د سیټونو د عناصرو تر منځ غبرګونی اړیکی Binary Relation عبارت دی د Aاو B د کارتیزین ضرب $A\times B$ د هر سب سیټ څخه . غبرګونی اړیکی معمولاً د یونانی الفبی په کوچنی حروفو ρ،τ،σ،μ، ... او نورو سره ښیو .

دا واقعیت چی $a\in A$ او $b\in B$ د ρ په اړیکه کی شامل دی ، داسی لیکو $(a,b)\in\rho$ یا $a\rho b$.
البته $\rho\subset A\times B$ ، ρ د $A\times B$ سب سیټ دی .

ددی پرځای چی ووایو ، چی د a او b عنصرونه د ρ په اړیکه کی دی ، خلص لیکو : $a\rho b$.

که ρ د Aاو B د سیټونو تر منځ غبرګونی اړیکه وی « په لنډ ډول $\rho \subset A\times B$ » او $A=B$ سره وی، نو په هغه صورت کی وایو چی د ρ غبرګونی اړیکه د A پر سیټ باندی ده .

بیلګه ۴ ـ فرضاً $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وی ، نو :

$$A\times B=\{(1,a);(1,b);(2,a);(2,b);(3,a);(3,b)\}$$

یوه عمومی غبرګونی اړیکه د Aاو Bد سیټونو په منځ کی ده . (ولی ؟)

$\xi=\{(1,a);(1,b)\}$ یوه بله غبرګونی اړیکه د Aاو B د سیټونو ترمنځ ده .

بیلګه ۵ ـ فرضوو چی A په مستوی کی د ټولو مستقیمو خطو(کرښو) سیټ دی او (//) د خطو تر منځ د موازی والی اړیکه ده ، پداسی ډول چی ($a//b$) «مستقیم خط a د مستقیم خط b سره موازی دی » افاده کوی .

بیلګه ۶ ـ فرضوو چی $\mathbb{R}$ د ټولو حقیقی عددو سیټ دی . د « $>$ » د نښی څخه د عددو د « لوی تر» د اړیکی د پاره کارځنی اخلو ، یعنی «$3>1$ » د (د 3عدد د 1 تر عدد لوی دی) افاده کوی .

بیلګه ۷ـ فرضوو چی $A\neq\emptyset$ او $\delta_A=\{(a,a) / a\in A\}$ د A پر سیټ غبرګونی اړیکه وی . نوموړی اړیکه د A د سیټ د قطر Diagonal په نامه هم یادیږی .

بیلګه ۸ ـ خالی سیټ $\emptyset$ د Aاو B دوو کیفی سیټو تر منځ یو ه غبرګونی اړیکه ده . (ولی ؟)

نوموړی غبرګونی اړیکه هیڅ عنصر نلری .

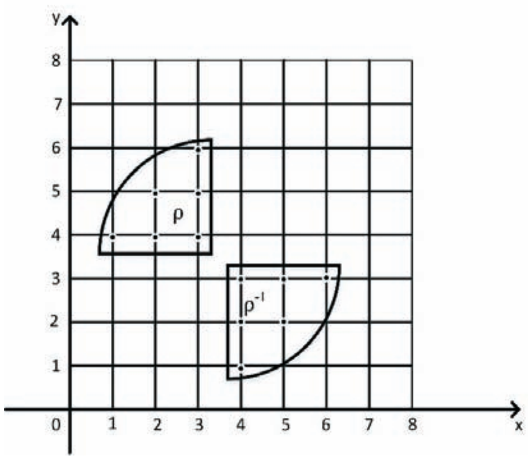
فرضوو چی $\rho\subset A\times B$ د A او B د سیټونو تر منځ یوه غبرګونی اړیکه وی .

تعریف ۳ ـ غبرګونی اړیکه$\rho^{-1}\subset B\times A$ په هغه صورت کی د غبرګونی اړیکی $\rho\subset A\times B$ د معکوسی اړیکی په نامه یادیږی چی : $(x,y)\in\rho^{-1}\leftrightarrow(y,x)\in\rho$

بیلګه ۹ ـ د $A=\{1,2,3,4,5,6\}$او $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ سیټونه او پر هغوی باندی غبرګونی اړیکه $\rho=\{(1,4);(2,4);(2,5);(3,4);(3,5);(3,6)\}$ راکړه سوی وی . نظر و پورتنی تعریف ته و ρ ته معکوسه اړیکه یعنی ρ^{-1} به لاندنی عنصرونه ولری :

$$\rho^{-1}=\{(4,1);(4,2);(5,2);(4,3);(5,3);(6,3)\}$$

یعنی د ρ په اړیکه کی فقط د مرتبو جوړو د اجزاؤ و ځای ته تغیر ورکوو . اوس به دواړی اړیکی یعنی ρ او ρ^{-1} په لاندنی ډیاګرام کی وګورو:



ش ۱۲

بیلګه ۱۰ ـ په حقیقی عددو کی د « $>$» (یو عدد لوی تر بل عدد) و اړیکی ته معکوسه اړیکه د «$<$» (یو عدد کوچنی دی تر بل عدد) اړیکه ده .

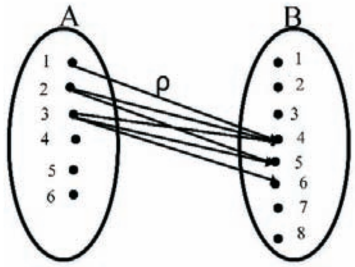
بیلګه ۱۱ ـ په مستوی کی د ټولو مستقیمو خطو په منځ کی د «$\perp$» (د عمود والی اړیکه) اړیکی معکوسه اړیکه بیا هم د « $\perp$ » اړیکه ده .

څرنګه چی غبرګونی اړیکه یو سیټ دی ، نو پرغبرګونی اړیکو باندی لکه پر هرودوو نورو سیټو باندی د $\cap$ ، $\cup$ او د ` عملیی عملی کولای سو . غیر له ذکر سوو عملیو څخه کولای سو چی د ρ او σ پر غبرګونو اړیکو باندی د ترکیب Composition عملیه هم عملی کړو.

تعریف ۴ ـ د غبرګونواړیکو $\rho \subset A\times B$ او $\sigma \subset B\times C$ ترکیب composition عبارت دی د $(a,c)\in A\times C$ ټولو هغو مرتبو جوړو څخه چی د هغه دپاره د $b\in B$ عنصر داسی وجود ولری چی $(a,b)\in\rho$ او $(b,c)\in\sigma$ کی شامل وی.

د ρ او σ دوو غبرګونو اړیکو ترکیب په $\rho\circ\sigma$ سره ښکاره کوو. ددی دپاره چی د دوو غبرګونی اړیکود ترکیب په عملیه ښه پوه سی نو د ډیاګرام څخه کار اخلو.

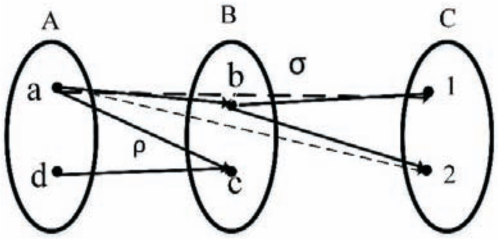
د A او B راکړه سوی سیټونه د وین په ډیاګرام (I§ وګوری) سره ارائه کوو . هغه عنصرونه چی په غبرګونی اړیکه کی شامل دی د یوه تیر په وسیله داسی سره نښلوو چی د مرتبی جوړی لمړی جز د تیر شروع (مبداء) او د مرتبی جوړی دوهم جز د تیر آخره جوړه کړی. د بیلګی په ډول د نهمی بیلګی غبرګونی اړیکه په لاندی ډول سره ښودلای سو:



ش ۱۳

بیلگه ۱۲ـ فرضاً د $\rho=\{(a,c);(a,b);(d,c)\}$ او $\sigma=\{(b,1);(b,2)\}$ دوی غبرگونی اړیکی راکړه سوی وی ، د $\rho\circ\sigma$ غوښتل سوی دی .

نظر و مخکنی توضیح ته د $\rho \subset A\times B$ او $\sigma \subset B\times C$ غبرگونی اړیکی د لاند نی ډیاگرام پذریعه ښکاره کولا ی سو:



ش ۱۴

طبعاً سوال پیداکیږی چی آیا د B,A او C سیټونه نور عنصرونه هم لری ؟

امکان لری چی هغوی نور عنصرونه هم ولری ، مگر هغوی د ρ او σ په اړیکو کی شامل ندی . ځکه نو مجبوره نه یوچی هغو ته پاملرنه وکو.

اوس به نو (ش۱۴) په ځیر سره وڅیړو:

د غبرگونی اړیکو د ترکیب د تعریف له مخی $\rho\circ\sigma\subset A\times C$ او گورو چی دA او C د سیټونو کوم عنصرونه سره وصل دی. ښکاره ده چی $a\in A$ د $1\in C$او $2\in C$ سره ،چی د $(a,1)$ او $(a,2)$ د مرتبو جوړو څخه عبارت دی . په شکل کی په دوه کرښېزه تیر باندی وصل سوی دی، یعنی :

$\rho\circ\sigma=\{(a,1);(a,2)\}$

همدابول $\rho\circ\sigma=\emptyset$ (ولی؟) .

فرضوو چې د ρ اړیکه د A پر سیټ راکړه سوې وي ، یعنې $\rho \subset A\times A$.

تعریف ۵ ـ د $\rho \subset A\times A$ اړیکه د A پر سیټ د انعکاسي Reflexive اړیکې په نامه یادیږي ، که د $a\in A$ د هر عنصر دپاره صدق وکې چې $(a,a)\in\rho$ وي.

تعریف ۶ ـ د $\rho \subset A\times A$ اړیکه د A پر سیټ دضد انعکاسي Antireflexive اړیکې په نامه یادیږي ، که د $a\in A$ هیڅ عنصر دپاره $(a,a)\in\rho$) .

تعریف ۷ ـ د $\rho \subset A\times A$ اړیکه د تناظري Symmetric اړیکې په نامه یا دوو که $\rho=\rho^{-1}$ وي ، یعنې د $x,y \in A$ د ټولو عنصرو د پاره لاندنی بیان صدق وکې: که $(x,y)\in\rho$ وي ، نو $(y,x)\in\rho$ دی.

تعریف ۸ـ د ρ اړیکه د ضد تناظري Antisymmetric په نامه یادوو که لاندنی شرط پر ځای کې :

د ټولو $x,y\in A$ د ټولو عنصرو دپاره که $(x,y)\in\rho$ او $(y,x)\in\rho$. نو $x=y$ سره وي .

تعریف ۹ ـ د $\rho \subset A\times A$ اړیکه د انتقالي Transitive اړیکې په نامه یادیږي ، که د $x,y,z\in A$ د ټولو عنصرو دپاره لاندنی بیان صدق وکې : که $(x,y)\in\rho$ او $(y,z)\in\rho$ ، نو $(x,z)\in\rho$ دی .

لاندنی جدول د یو لړ انعکاسي،تناظري، ضدتناظري او انتقالي اړیکو بیلګې راته په نښه کوي .
د مثبت علامه د شرط د پر ځای کیدو او د منفي علامه د شرط د نه پر ځای کیدو په مفهوم ده.
همدا ډول د « ρ انعکاسي ، ضد انعکاسي،... اړیکه ده » په بدل کې ویلای سو چې د ρ اړیکه د انعکاسي ، ضد انعکاسي، ... خاصیت درلودونکې ده .

خاصیت					
انتقالي	ضد تناظري	تناظري	انعکاسي	اړیکه	سیټ
+	+	−	+	د لوی یا مساوی «$\geq$» اړیکه	$\mathbb{R}$ ـ د ټولو حقیقي عددو سیټ
−	−	+	−	دعمودیت «$\perp$» اړیکه	A- په مستوي کې د ټولو مستقیمو خطو سیټ
+	−	+	+	د موازات « // » اړیکه	A- په مستوي کې د ټولو مستقیمو خطو سیټ
+	−	+	+	د تشابه « $\approx$ » اړیکه	M- په مستوي کې د ټولو مثلثو سیټ
+	+	−	+	د ویش د وړتوب « $\vdots$ » اړیکه	$\mathbb{N}$ ـ د ټولو طبیعي عددو سیټ
+	−	+	−	د وروري اړیکه	B ـ د ټولو انسانانو سیټ

جدول ۱۰

§VI . د معادل والی (تعادل) اړیکه .

فرضوو چی د Aراکړه سوی سیټ خالی ندی او ε پر راکړه سوی سیټ یوه غبرګونی اړیکه ده .

تعریف ۱ ـ د ε اړیکه د تعادل د اړیکی Equivalence relation په نامه یادیږی که ε انعکاسی، تناظری او انتقالی خاصیت ولری.

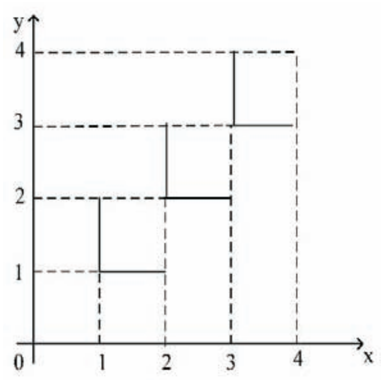
بیلګه ۱ـ په مستوی کی د ټولو مستقیمو خطو پر سیټ باندی د موازی والی اړیکه د تعادل یوه اړیکه ده. (جدول ۱۰ وګوری)

بیلګه ۲ ـ « د دوو بیانو معادل والی» د ټولو بیانو پر سیټ باندی د تعادل اړیکه ده .

بیلګه ۳ـ په مستوی کی د ټولو هندسی شکلو پر سیټ باندی د تشابه اړیکه ، د تعادل اړیکه ده .

بیلګه ۴ ـ « ژوند کول د افغانستان په یوه برخه کی» د افغانستان د ټولو ساکنینو پر سیټ د تعادل اړیکه ده .

بیلګه ۵ ـ د $<1,4>$ پر قطعه خط باندی د « x او y د عین تام برخی درلودونکی دی» د معادلیت اړیکه ده ، چی لاندنی هندسی شکل لری .



ش ۱۵

تعریف ۲ـ د معادل والی صنف ε چی $a\in A$ یې نماینده وی ، عبارت دی د ټولو هغو عناصرو $b\in A$ د سیټ څخه چی $(a,b)\in\varepsilon$. نوموړی صنف په $[a]_\varepsilon$ سره ښیوو . یعنی :

$$[a]_\varepsilon \overset{\text{df}}{=} \{b/b\in A \ \wedge (a,b)\in\varepsilon\}$$

بیلګه ۶ ـ $[a]_{//}$ عبارت دی په مستوی کی د ټولو مستقیمو خطو د سیټ څخه چی د a د خط سره موازی دی .

بیلګه ۷ ـ په مستوی کی د ټولو هغو مثلثو سیټ چی د ABC د مثلث سره مشابهت (ورته والی) لری ، عبارت دی له: $[\Delta ABC]_{\approx}$.

تعریف ۳ ـ که د Aسیټ او پرهغه باندی د ε د معادل والی اړیکه راکړه سوی وی ، نو د ټولو معادلو صنفو سیټ چی پر راکړه سوی سیټ د ε د معادل والی پر بنسټ لاسته راځی د ε د اړیکی پر بنسټ A د سیټ د تجزیی Factor set په نامه یادیږی.

د ε د اړیکی پر بنسټ د A د سیټ د تجزیو سیټونه په A/ε سره ښکاره کوو .

بیلګه ۸ ـ که A په افغانستان کی د ټولو اوسیدونکو سیټ وی او ε په یوه ولایت کی د ژوند کولو اړیکه وی ، نو A/ε عبارت دی د افغانستان د ټولو ولایتو د سیټ څخه .

بیلګه ۹ ـ که $A=<1,4>$ او ε د « x او y د عین تام برخی درلودونکی دی» اړیکه وی ، نو

$A/\varepsilon = \{<1,2);<2,3);<3,4);\{4\}\}$

تعریف ۴ ـ د M د سیټ تجزیه Partition عبارت دی د M د هغو غیر خالی سب سیټو د سیستم څخه ، یعنی $\{X_1,X_2,\ldots\}$ ، چی :

۱ـ د سب سیټو د هری جوړی مشترکه برخه یو خالی سیټ دی . په بل عبارت وایو چی هغوی یو له بله جوړه ئیز جدا Pairwise disjoint دی .

۲ـ د ټولو سب سیټونو اتحاد (یووالی) عبارت دی د M د سیټ څخه.

بیلګه ۱۰ ـ د طبیعی عددو سیټ کولای سو چی د جوفتو او طاقو عددونو پر سیټونو تجزیه کړو.

بیلګه ۱۱ـ د ټولو بیانو سیټ مو پر درو برخو تجزیه کی (۲۴ مخ وګوری) .

قضیه ۱ ـ که ε د A پرسیټ د معادل والی اړیکه وی ، نو د A د سیټ د تجزیو سیټ یعنی A/ε د A د سیټ تجزیه ده .

ثبوت ـ فرضوو چی ε د A پرسیټ د معادل والی اړیکه ده ، نظر و ۴ تعریف ته باید په اثبات ورسوو چی د معادلو صنفو سیټ (یعنی د تجزیو سیټ) A/ε د ۴ تعریف د خصوصیاتو درلودونکی دی .

څرنګه چی د ε اړیکه انعکاسی خاصیت لری (ولی؟) نو د هر $a\in A$ ، $(a,a)\in\varepsilon$ دی .

$$[a]_\varepsilon \overset{\mathbf{df}}{=} \{b/b\in A \wedge (a,b)\in\varepsilon\}$$

یعنی $a\in[a]_\varepsilon\subset A$ ، پدی لحاظ د هر $a\in A$ ، $[a]_\varepsilon\neq\emptyset$. د څلورم تعریف د لمړی خاصیت د ثبوت له پاره د معادلو صنفو د سیټو څخه دوه کیفی سیټونه د $[a]_\varepsilon$او$[b]_\varepsilon$ ټاکو . اوس نو دوه امکانه وجود لری ، یا د $[a]_\varepsilon$او$[b]_\varepsilon$ صنفونه دوه په دوه یو له بله سره جدا دی یعنی

$[b]_\varepsilon\cap[a]_\varepsilon = \emptyset$ او یا که د یوه مشترک عنصر درلودونکی وی ، نو هغوی به یو له بل سره مساوی وی .

فرضوو چی د c یو عنصر په عین حال کی په دواړو صنفو اړه لری ،یعنی $c\in[a]_\varepsilon$ او $c\in[b]_\varepsilon$ ، د تعریف له مخی $(a,c)\in\varepsilon$ او $(b,c)\in\varepsilon$ دی نظر وتناظری خاصیت ته $(c,b)\in\varepsilon$ او نظر و انتقالی خاصیت ته

$$(a,b)\in\varepsilon \qquad \ldots \qquad (1)$$

اوس نو که $x\in[a]_\varepsilon$ ، نو $(x,a)\in\varepsilon$ نظر و پورتنی اړیکی او د ε انتقالی خاصیت ته لرو چی $(x,b)\in\varepsilon$ دی ، یعنی $x\in[b]_\varepsilon$ دی. فلهذا $[a]_\varepsilon\subset[b]_\varepsilon$.

برعکس که $x\in[b]_\varepsilon$ وی ، نو $(x,b)\in\varepsilon$ ده . نظر د ε و تناظری او او انتقالی خاصیت ته او پورتنی اړیکی (1) ته لرو چی $(x,a)\in\varepsilon$ ، یعنی $x\in[a]_\varepsilon$. بلاخره دی نتیجی ته رسیږو چی :

که د $[a]_\varepsilon$او$[b]_\varepsilon$ صنفونه کوم مشترک عنصر ولری ، نو د $[a]_\varepsilon$ هر عنصر په $[b]_\varepsilon$ او بر عکس د $[b]_\varepsilon$ هر عنصر په $[a]_\varepsilon$ اړه لری . یعنی هغوی په خپل منځ کی مساوی دی .
$[a]_\varepsilon=[b]_\varepsilon$

که $[a]_\varepsilon$او$[b]_\varepsilon$ د مشترک عنصر درلودونکی نه وی ، نو د څلورم تعریف لمړی خاصیت حقیقت لری .

څرنګه چی $\{a\}\subset[a]_\varepsilon\subset A$ نو $A=\cup[a]_\varepsilon$ د $a\in A$.

یعنی د څلورم تعریف دوهم خاصیت حقیقت لری .

قضیه ۲ ـ که $M=\{X_1,X_2,\ldots\}$ د Aد سیټ د تجزیو څخه یوه تجزیه وی ، نو د A پر سیټ یوازنی د معادل والی اړیکه ε داسی وجود لری چی : $A/\varepsilon=M$.

ثبوت ـ فرضوو چی $A=\bigcup_{i\in I} X_{ji}$ دی. پر A باندی د ε اړیکه په لاندی ډول تعریفوو :

$$\varepsilon \overset{df}{=} \{(x,y)/ \text{ داسی وجود لری } i\ ,\ i\in I\ ,\ x\in X_i \wedge y\in X_i\ \}$$

یعنی مرتبه جوړه (x,y) یوازی او یوازی هغه وخت د ε په اړیکه کی دی ، کله چی د x او y عنصرونه په یوه د X_i په صنف کی وی . ، یعنی د $i\in I$ داسی انډکس موجود وی چی په عین حال کی هم $x\in X_i$ او هم $y\in X_i$ وی.

اوس نو باید ثابت کو چی ε د معادل والی اړیکه ده .

د ε اړیکه انعکاسی ده . ځکه چی د هر $x\in A$ داسی یو $i\in I$ کی وجود لری چی $x\in X_i$. د ε د تناظر خاصیت واضح دی .

د ε اړیکه انتقالی ده.:

که $x,y\in X_i$ او $y,z\in X_j$ وی ، نظر د تجزیی و تعریف ته $X_i\cap X_j=\emptyset$، ددغه اسیته باید $i=j$ سره وی ، پدی ترتیب باید $x,z\in X_i$ وی . فلهذا د ε اړیکه د معادل والی اړیکه ده .

په آسانی سره لیدلای سو چی $\{X_i\ ,\ i\in I\}=A/\varepsilon$ او ε یوازنی د معادل والی اړیکه ده .

پاسنی لمړی او دوهمه قضیه موږ ته ښیی چی د A پر سیټ د معادل والی د اړیکی ε د پیداکولو وظیفه د هغه سیټ د تجزئی د وظیفی سره معادل دی . پدی معنی چی که وغواړو چی د A یو سیټ تجزیه کو نو پر هغه باندی باید د معادل والی اړیکه ε پیداکو او برعکس که وغواړو چی د معادل والی اړیکه ε د A پر سیټ پیداکړو ، نو نوموړی سیټ باید تجزیه کو.

د پورتنی واقعیت پر بنسټ کولای سو چی په عین موضوع کی بیلا بیلی کړنلاری وټاکو . یعنی د بیلګی په ډول ددی پر ځای چی د ټولو ممکنو موازی کرښو صنفونه وڅیړو ، د هغه په بدل کی د موازی والی د اړیکی د خصوصیاتو څیړل به ساده وی . په عین حال کی ددی پر ځای چی په یوه ګروپ کی د درس ویلو اړیکه د پوهنتون د ټولو زده کونکو پر سیټ و څیړو ، ښه به داوی چی د زده کونکو د ویش خصوصیات پرګروپونو وڅیړو.

§VII - د ترتیب اړیکه .

د غبرګونی اړیکو د مهمو ډولو څخه یو هم د ترتیب اړیکه ده. نوموړی اړیکه نه یوازی په ریاضی بلکه په ورځنی ژوند کی هم ډیر مهم رول لوبوی. د بیلګی په ډول وایوچی:

۱- شیان کیڼ یا ښی لاس ته ، لیری او یا نژدی پراته دی.

۲- یو جسم نظر و بل جسم ته درووند دی .

۳- یو عدد کوچنی یا لوی تر بل عدد دی .

۴- یو سیټ د بل سب سیټ دی .

د ترتیب د اړیکی تعریف باید داسی جوړ کو ، چی د پورتنیو بیلګو ټول خصوصیات په ځان کی ولری.

تعریف ۱- د A پر سیټ باندی غبرګونی اړیکه $\omega\subset A\times A$ د دقیق ترتیب strict order په نامه یادیږی ، که ω انتقالی، ضد انعکاسی او ضد تناظری وی .

تعریف ۲- د A پر سیټ باندی غبرګونی اړیکه $\omega\subset A\times A$ د جزئی ترتیب partial order په نامه یادیږی ، که ω انتقالی، انعکاسی او ضد تناظری وی .

پورتنی تعریفونه د تیرو ذکر سوو مثالو ټول حالتونه په بر کی نیسی.

د لوی والی یا کوچنیوالی اړیکه د ټولو تام عددو پر سیټ باندی د دقیق ترتیب یو د ډیرو مهمو بیلګو څخه ده . د جزئی ترتیب بیلګه بیاهم د تامو عددو پر سیټ د «لوی یا مساوی» او یا «کوچنی یا مساوی» اړیکه ده . د ذکرسوی واقعیتو په اړه ، دقیق ترتیب او جزئی ترتیب په «$<$»،«$\leq$»،«$>$»او «$\geq$» سره ښیو.

بیلګه ۱-

د ټولو طبیعی عددو $\mathbb{N}$ پر سیټ د ویش د وړتیا اړیکه $x\vdots y$ د جزئی ترتیب بیلګه ده .

بیلګه ۲-

دټو لو انسانانوپر سیټ باندی د نیکه والی اړیکه « x د y نیکه دی » د دقیق ترتیب اړیکه ده.

تعریف ۳ـ هغه سیټ چی پر هغه باندی د دقیق (جزئی) ترتیب اړیکه تعریف سوی وی ، د دقیق(جزئی) ترتیب د سیټ په نامه یادیږی.

په ځینو ترتیب سوی سیټو کی کولای سو د هغوی ټول عنصرونه «په یوه کرښه» کی قطارکو . پدی ډول کولای سو چی د ټولو حقیقی عددو سیټ ترتیب کړو ، چی په نتیجه کی ئی «عددی خط» د «>» ترتیب دپاره لاسته راځی. په همدی ډول د هری ژبی په قاموس کی لیدلای سو چی لغاتونه ئی د هغی ژبی د الفباء پر اساس ترتیب سویدی . داډول د ترتیب اړیکه دقاموسی ترتیب Lexicographic په نامه یادیږی. دا ځکه چی د الفباء د ترتیب سره مستقیمه اړیکه لری.

تعریف ۴ـ د A پر سیټ باندی د دقیق «جزئی» ترتیب اړیکه ω د خطی ترتیب linear order په نامه یادیږی که د A د سیټ د هرو دوو عنصرو $y,x\in A$ دپاره لاندنی شرط صدق وکی:

$$(x,y)\in\omega \ \vee y=x \ \vee (y,x)\in\omega$$

د ټولو حقیقی عددو پر سیټ $\mathbb{R}$ د «>» او «$\leq$» اړیکی د خطی ترتیب اړیکی دی . په عین حال کی د ویش د وړتوب اړیکه او د « نیکه والی» اړیکه د غیر خطی اړیکو بیلگی دی.

VIII§ . میپنگ Mapping او دهغه ډولونه.

فرضوو چی ρ د A او B د سیټونو د عنصرو ترمینځ یوه غبرگونی اړیکه ده ، یعنی

$$\rho \subset A\times B \ .$$

تعریف ۱ـ د ρ د اړیکی مقطع cut د $a\in A$ د عنصر په واسطه عبارت دی د $b\in B$ دټولو هغو عنصرو د سیټ ځخه چی $(a,b)\in\rho$.

د ρ د اړیکی مقطع د $a\in A$ د عنصر په ذریعه په $\rho<a>$ سره ښیو . پورتنی تعریف د ریاضی په سمبولیک ژبه کی داسی ارائه کوو:

$$\rho<a> \overset{df}{=} \{b\in B/(a,b)\in\rho\}$$

بیلگه ۱ـ

که ρ د طبیعی عددو پر سیټ د ویش د وړتیا "؛,, اړیکه وی ، نو :

$$\rho<10>=\{1,2,5,10\}$$

$$\rho<13>=\{1,13\}$$

$$\rho<1>=\{1\}$$

بیلگه ۲ـ

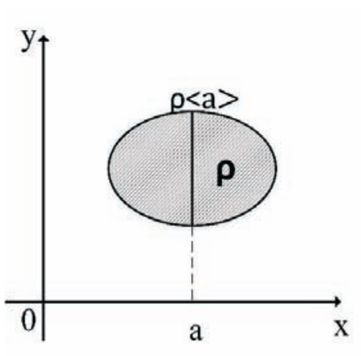
که ρ د ټولو انسانانو پر سیټ د « y د x مور ده » اړیکه وی ، نو $\rho<x>$ یوازی او یوازی د یوه عنصر درلوونکی به وی ، ځکه چی هر انسان یوازی او یوازی یوه مور لری.

بیلگه ۳ ـ

که ρ د ټولو انسانانو پر سیټ د « x د y پلار دی » اړیکه وی. نو د x هری ښځی دپاره به د ρ مقطع یعنی $\rho<x>$ یو خالی سیټ ($\rho<x>=\emptyset$) وی .

بیلگه ۴ ـ

فرضوو چی په مستوی کی د ρ اړیکه په لاندنی شکل سره راکړه سویده . دراکړه سوی اړیکی ρ مقطع د a د عنصر پذیریعه را ښکاره کوی چی راکړه سوی شکل د y د محور په استقامت د a په نقطه کی پری سوی دی .



شکل ۱۶

یعنی $<\rho>$ عبارت دی په مستوی کی د ټولو هغو نقاطو د سیټ څخه چی د ρ په اړیکه کی وی او د x پر محور ئی قیمت د a په اندازه وی .

په پورتنیو بیلگو کی مو مختلفی اړیکی نظر د هغوی و مقطع ته ولیدل. د ځینو اړیکو مقطع په راکړه سوی نقطه کی یوازی اویوازی د یوه عنصر درلودونکی وه (بیلگه ۲ وگوری) او د ځینو اړیکو مقطع د مختلفو عنصرونه در لودونکی وه (بیلگه ۱ وگوری) .

زموږ دپاره هغه اړیکی ډیری مهمی دی چی د هغوی مقطع په هر کیفی عنصر کی یوازی او یوازی د یوه عنصر درلودونکی وی .

تعریف ۲ ـ د A اوB د سیټو د عناصرو تر منځ غبرگونی اړیکه ρ ($\rho \subset A\times B$) د A د سیټ مپینگ Mapping د Bپه سیټ کی یادیږی ، که د A د سیټ د هر عنصر دپاره $a\in A$ د هغه مقطع $\rho<a>$ یوازی او یوازی د یوه عنصر درلودونکی وی. .

د Aسیټ د مپینگ د تعریف د ساحی Domainپه نامه او د B سیټ د مپینگ د تصویرود سیټ په نامه یادیږی.

پاته دی نه وی چی د مپینگ مفهوم د ریاضیاتو یو د مهمو مفهومونو څخه شمیرل کیږی. دی مفهوم د خپل تکامل په تاریخ کی یوه ډیره پیچلی او اوږده لار وهلی ده . په ابتداء کی د تابع په نامه چی په متحول پوری تړلی وی او اوس د مپینگ په نامه یادیږی.

د پخوانیو عادتو له مخې تابع (په خپل کلاسیک مفهوم سره) او مپینګ (په اوسنی مفهوم سره) د لاتینی الفباء په کوچنیو حروفو لکه $f,g,h,\ldots$ سره ښیو . ددی پر ځای چی « f د A د سیټ مپینګ د B په سیټ کی دی » ووایو ،لیکو : $f: A\rightarrow B$

د مقطع یوازنی عنصر $f<a>$ په $f(a)$ سره ښیو او د f په مپینګ کی د aد عنصر د تصویر په نامه ئی یادوو. په بل عبارت $f(a)$ د $x=a$ په نقطه کی د f د تابع قیمت دی . په عین ډول د a عنصر د $f(a)$ د اصل (Prototype of f(a))په نامه یادیږی.

که $b\in B$ وی، نو دb دپاره د $f: A\rightarrow B$ په مپینګ کی د ټولو اصلو سیټ د کامل اصل په نامه یادیږی چی په $f^{-1}(b)$ سره ئی ښیو.

څرنګه چی په واقعیت کی مپینګ د A او B د سیټو د عناصرو ترمنځ یوه غبرګونی اړیکه ده ، نو د هغوی د ارائی طرز موږ د V§ څخه پیژنو.

بیلګه ۵ ـ

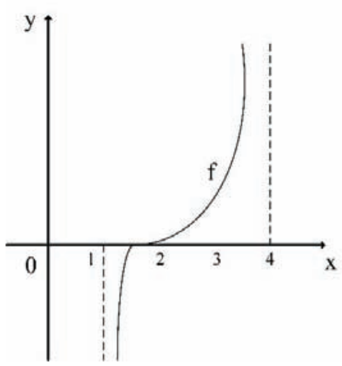
د $f=\{(1,2);(2,2);(3,3);(4,2)\}$ اړیکه د $A=\{1,2,3,4\}$ د سیټ مپینګ د $B=\{1,2,3,\}$ په سیټ کی دی . دلته:

$f(1)=f(2)=f(4)=2$

$f(3)=3$

$f^{-1}(2)=\{1,2,3\}$

$f^{-1}(1)=\emptyset$



شکل ۱۷

بیلګه ۶ـ

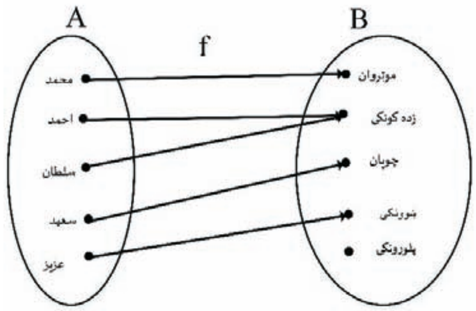
په لاندنی شکل کی f عبارت دی له

[1,4] د مپینګ څخه د ټولو حقیقی عددونو

یعنی $\mathbb{R}$ په سیټ کی.

بیلګه ۷ـ د $f=\{(x,y)/y=x^2\}$ اړیکه هم مپینګ دی $f(2)=4$ او $f^{-1}(9)=\{-3,3\}$.

بیلګه ۸ ـ که د {عزیز، سعید،سلطان،احمد، محمد}=A او { موټروان، زده کونکی ، چوپان ، پلورونکی ، ښوونکی }=B سیټونه راکړه سوی وی ، نو د A او B د سیټونو تر منځ غبرګونی اړیکه f چی د لاندنی شیما پذریعه راکړه سوی ده ، هم مپینګ دی .



شکل ۱۸

دلته باید یوه واقعیت ته پاملرنه وکو چی مپینګ په اصل کی یو سیټ دی ، پدی حساب د هغه ارائه کول په هغو دوو طریقو چی په I§ ذکر سوه ، هم صورت نیولای سی . (۵ او ۷ بیلګه وګوری .)

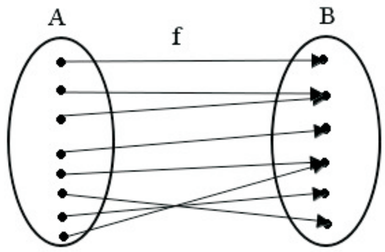
فرضوو چی د A او B سیټونه راکړه سویدی او f د A د سیټ مپینګ د B په سبټ کی دی . د مپینګ د تعریف له مخی د f مقطع د A د سیټ په هر عنصر کی یوازی او یوازی د یوه عنصر درلوونکی ده. ددی ځایه داسی استدلال کولای سو چی د A د سیټ هر عنصر د B په سیټ کی د یوه تصویر درلوونکی دی . د معکوس حالت په هکله معلومات نلرو . پدی معنی چی موږ نه پوهیږو چی آیا د B د سیټ د هر عنصر دپاره یو یا څو اصله وجود لری ؟ آیا حتمی ده چی د B د سیټ د هر عنصر دپاره باید یو اصل وجود ولری یا نه ؟ یو بل واقعیت په لاندی ډول مشاهده کولای سو ، البته پداسی حال کی چی د A او B سیټونه متناهی وی یعنی د متناهی عناصرو درلوونکی وی . که د A او B د سیټو د عناصرو شمیر سره مساوی وی ، نو په هغه صورت کی کولای سو چی د A د سیټ د هر عنصر په مقابل کی د B د سیټ یو عنصر کښیږدو ، چی په نتیجه کی یی یوه یو په یوه اړیکه منځ ته راځی او یا امکان لری چی د A د سیټ د ځینو عنصروپه مقابل کی عین تصویر کښیږدو. پدی صورت کی د B د سیټ ځینی عنصرونه بی اصله پاتیږی ، ۱۸ شکل وګوری. که د A د سیټ د عنصرو شمیر د B د سیټ د عنصرو تر شمیر ډیر وی ، نو د B د سیټ د ځینو عناصرو په مخامخ کی به تر یوه زیاد د A د سیټ عنصرونه پراته وی . که د B د سیټ د عنصرو شمیر د A د سیټ د عنصرو تر شمیر زیات وی نو د B د سیټ ځینی عنصرونه به بی اصله پاته سی.

تعریف ۳ ـ د $f: A \to B$ مپینګ د سرجکشن Surjection په نامه یادیږی ، که د B د سیټ هر عنصر <u>لږ تر لږه</u> (حد اقل) د یوه اصل درلوونکی وی .

کله کله وایو چی د f مپینګ سرجکتیف Surjective دی .

بیلګه ۹ ـ

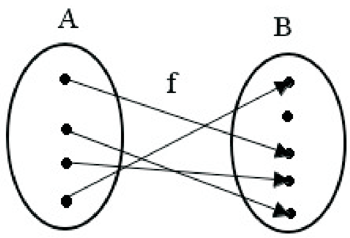
لاندنی ډیاګرام د یوه سرجکتیف مپینګ نماینده ګی کوی.



شکل ۱۹

تعریف ۴ ـ د $f: A \rightarrow B$ مپینګ د انجکشن Injection په نامه یادیږی (مپینګ انجکتیف Injective دی) که د B د سیټ هر عنصر حد اکثرد یوه اصل درلوونکی وی .

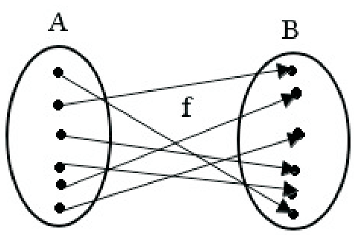
بیلګه ۱۰ ـ لاندنی ډیاګرام د انجکتیف مپینګ نماینده ګی کوی.



شکل ۲۰

تعریف ۵ ـ د $f: A \rightarrow B$ مپینګ د بایجکشن Bijection په نامه یادیږی (مپینګ بایجکتیف Bijective دی) که د B د سیټ هر عنصر یوازی او یوازی د یوه اصل درلوونکی وی .

بیلګه ۱۱ ـ لاندنی ډیاګرام د بایجکتیف مپینګ نماینده ګی کوی .

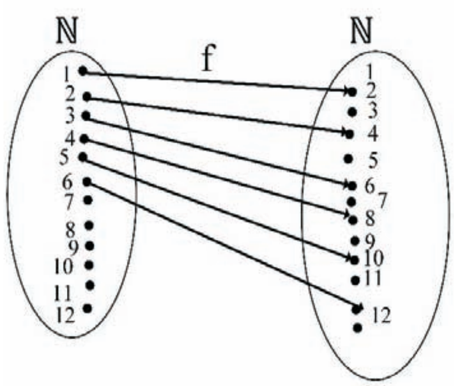


شکل ۲۱

ښکاره ده چی د f مپینګ یوازی او یوازی هغه وخت بایجکتیف دی چی د f مپینګ په عین وخت کی انجکتیف او سر جکتیف وی .

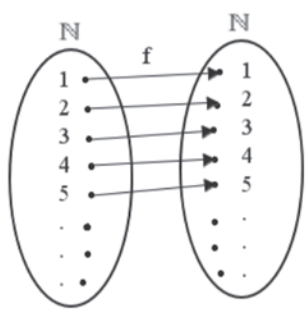
بیلگه ۱۲ ـ

الف ـ فرضوو چی د $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ مپینګ د $f(n)=2n$ د فارمول پذریعه راکړه سویدی . نوموړی مپینګ انجکتیف دی، ځکه چی ، لکه په شکل کی چی لیدل کیږی ، د $1,3,5,\ldots$ عنصرونه هیڅ اصل نلری . پدی معنی چی د $\mathbb{N}$ ، د تصویرو د سیټ په صفت ، هر عنصر حد اکثر د یوه اصل درلوونکی دی .



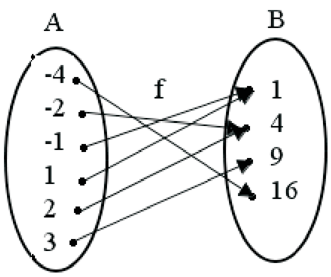
شکل ۲۲

ب ـ فرضوو چی د $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ مپینګ د $f(n)=n$ د فارمول پذریعه راکړه سویدی . ذکر سوی مپینګ بایجکشن دی، ځکه چی د $\mathbb{N}$ ،د تصویرو د سیټ په صفت ، هر عنصر یوازی او یوازی د یوه اصل درلوونکی دی . لاندنی شکل وګوری.



شکل ۲۳

پ - فرضوو چی د B ‎$f: A \rightarrow B$ مپینگ د $f(k)=k^2$ د فارمول پذریعه په داسی ډول راکړه سویدی چی $A=\{-1,-2,-4,1,2,3\}$ او $B=\{1,4,9,16\}$ وی. د f مپینگ سرجکشن دی، ځکه چی د Bد سیټ هر عنصر لږ تر لږه د یوه اصل درلوونکی دی. د B د سیټ د 1 او 4 عنصرونه د A په سیټ کی دوو اصلو یعنی 1- او 1 ، 2- او2 درلودونکی دی .(۲۴ شکل وګوری)



شکل ۲۴

ت - د$\{0\}\cup$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ مپینګ چی د $y=x^2$ د فارمول پذریعه راکړه سویدی ، یو سرجکتیف مپینګ دی . مګر انجکتیف ندی . ولی ؟

ټ - د $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مپینګ چی د $y=x$ د فارمول پذریعه راکړه سویدی یو بایجکتیف مپینګ دی . ولی؟

ج - د $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مپینګ چی د $y=2^x$ د فارمول پذریعه راکړه سویدی ، انجکتیف مپینګ دی خو سرجکتیف ندی . ولی ؟

اکثرآ ددی پر ځای چی ووایو مپینګ سرجکتیف،انجکتیف او یا بایجکتیف دی وایو چی د $f: A \rightarrow B$ مپینګ د A د سیټ څخه د B پر سیټ ، د A د سیټ څخه د B په سیټ کی او یا د A د سیټ څخه د B پر سیټ باندی یو په یوه اړیکه ده .

قضیه ۱ - که $f: A \rightarrow B$ د A د سیټ مپینګ د B پر سیټ وی ، نو غبرګونی اړیکه $f^{-1} \subset B\times A$ د B د سیټ مپینګ د A پر سیټ دی ($f^{-1}: B\rightarrow A$)یوازی او یوازی هغه وخت چی f بایجکتیف وی .

ثبوت - فرضوو چی د $f: A \rightarrow B$ مپینګ بایجکتیف دی .

$f^{-1}=\{(b,a) / (a,b)\in f\}$ څیرو. موږ باید ثبوت کړو چی $f^{-1}:B \rightarrow A$ یو مپینګ دی . یعنی باید و ښیو چی د $b\in B$هر عنصر مقطع $f^{-1}\langle b\rangle$ د یوازنی عنصر درلودونکی ده . ددی موخی دپاره یو اختیاری عنصر $b\in B$ رااخلو او فرضوو چی $f^{-1}\langle b\rangle=\{a_1,a_2\}$ دی. یعنی $(b,a_1)\in f^{-1}$ او $(b,a_2)\in f^{-1}$ دی. که د f^{-1} تعریف ته وګورو، نو $(a_1,b)\in f$ او $(a_2,b)\in f$ کیږی. څرنګه چی f یو بایجکتیف مپینګ دی ، نو د هر تصویر د پاره یعنی د $b\in B$ دپاره هم یوازی او یوازی یو اصل وجود لری. فلهذا $a_1=a_2$ او د $b\in B$ په اختیاری عنصر کی د f^{-1} مقطع د یوازنی عنصر درلودونکی ده.

برعکس فرضوو چی f^{-1}د Bد سیټ څخه د A پر سیټ یو مپینګ دی . باید ثابته کو چی د f مپینګ بایجکتیف دی. یعنی د f مپینګ په عین حال کی انجکتیف او سرجکتیف دی . فرضاً د $b\in B$ کوم عنصر دپاره دوه اصله د a_1 او a_2 وجود ولری . یعنی $(a_1,b)\in f$ او $(a_2,b)\in f$. ددی ځایه نظر د f^{-1} و تعریف ته $(b,a_1)\in f^{-1}$ او$(b,a_2)\in f^{-1}$ دی. څرنګه چی f^{-1} مپینګ دی ،

نو $a_1=a_2$ سره کیږی. پدی معنی چی د f مپینګ انجکتیف دی. همداډول نظر و دی ته چی f^{-1} یو مپینګ دی ، نو د $b\in B$ د هر عنصر دپاره د f په مپینګ کی لږ تر لږه یو اصل وجود لری ، یعنی د f مپینګ سرجکتیف دی . د دی استدلا ل په نتیجه کی د f مپینګ بایجکتیف دی.

§IX. پریدیکات او پر هغوی باندی عملیی .

په الجبر کی د سمبولونو او علا مو څخه کار اخیستل د بابلیون د زمانی د لویو بریالیتوبو څخه شمیرل کیږی . د هغوی پذریعه یی وکولای سوای چی ډیر د الجبر اوږدی مسئلی په ساده او لنډ دول سره بیان کی . د شلمی پیړی په سر کی د ریاضی پوهانو هڅه داوه چی ریاضیات په یوه قالب کی راولی. ددی قالب د جوړیدو دپاره و یوی ژبی ته ضرورت وو ، کوم چی یوازی و ریاضی ته مختص وی . ددی ضرورت د پوره کولو دپاره د سیټ د تیوری، د ریاضی د منطق او د هغوی د سمبولونو څخه په اعظمی توګه استفاده وسوه.

په §II کی تاسو د بیان او پر هغوی باندی د عملیو سره پیژندګلوی تر لاسه کره . هڅه مو وکړه چی د ریاضی اکثره جملی د هغو سمبولونو په ذریعه چی مخکی مو تعریف کړی وه ، بیان کړو. ولی داډول جملی لکه : « د A د سیټ د هر عنصر x دپاره »،« $2x>3$ » ، « $x<4$ » ، « $x+y<3$ » ، « x یو جفت عدد دی» ... او نور د بیان د منطق د سمبولونو پذریعه نسو بیانولای . همدا ډول د ورځنی ژوند جملی لکه :« زده کونکی x ښه درس وایی .» ، « xد احمد ورور دی .» ... او نور ، هم د هغو سمبولونو پذریعه چی تاسو تر اوسه ورسره آشنا یاست ، نسو بیانولای.

ممکن تاسو هر یو پردی قانع سی ، که ووایم چی پورتنی جملی هغه وخت په بیان اوړی چی د x پر ځای یو مشخص قیمت ځای پر ځای کړو. د بیلګی په توګه که په وروستی جمله کی د x پر ځای د عزیز نوم ځای پر ځای کړو ، یعنی « عزیز د احمد ورور دی » ، نو جمله به په بیان باندی واوړی ، چی دهغی د رشتیاوالی او درواغ والی په هکله قضاوت کولای سو. همدا ډول که په « $2x>3$ » ، « $x<4$ » ، « $x+y<3$ » په جملو کی د x او y د متحولو پر ځای مشخص د عددی سیټونو عنصرونه وضع کړو ، نوموړی جملی به په بیان باندی واوړی. ځکه نو د ریاضی ژبی ته باید داسی وده ورکړو، څو پورتنی جملی هم د هغوی د سمبولونو په مرسته بیان کړای سو.

تعریف ۱- n متحوله $x_n,\dots,x_2,x_1$ پریدیکات Predicate عبارت د هغی جملی څخه دی چی د ذکر سوی متحولو درلودونکی وی او په بیان هغه وخت اوړی چی د متحولو پرځای د $A_n,\dots,A_2,A_1$ د سیټونو عنصرونه ځای پر ځای کړو.هر یو د $A_n,\dots,A_2,A_1$ د سیټونو څخه د متحولونو د تعریف د ساحی په نامه او د $A=A_1\times\cdots\times A_n$ سیټ د پریدیکات د تعریف د ساحی په نامه یادیږی.

د پریدیکاټ د ښکاره کولو دپاره د تابع ګانو د سمبولونو څخه استفاده کوو. یعنی:

$f(x,y)$ د xاو y دوه متحوله پریدیکات دی او $g(x,y,z)$ د y,x او z دری متحوله پریدیکات دی .

$h(x)$ د x یو متحوله پریدیکات دی.

کله کله بیان د صفر متحوله پریدیکات په نامه هم یادوو .

د $f(x_1,x_2,..,x_n)$ دپریدیکات د رشتیاوالی ساحه د ذکر سوی پریدیکات د تعریف د ساحی د سب سیټ څخه عبارت ده چی د هغه د عنصرو د وضع کیدو به نتیجه کی پریدیکات په یوه رشتیا بیان سره اوړی. په بل عبارت ویلای سو چی د پریدیکات د رشتیاوالی ساحه عبارت ده له ټولو هغو مرتبو n ـ ګونو څخه چی په پریدیکات کی د هغوی د ځای پر ځای کیدو په نتیجه کی ، نوموړی پریدیکات په رشتیا بیان سره اوړی.

بیلګه ۱ـ فرضاً یو متحوله پریدیکات $f(x)$: $x=1$ راکړه سوی وی . د x په بدل کی کولای سو هر حقیقی عدد چی زړه مو غواړی وضع کړو. البته حتمی نده چی راکړه سوی پریدیکات په رشتیا بیان سره تبدیل سی . د بیلګی په توګه که د x پر ځای د $\sqrt{3}$, 1, $\frac{1}{2}$ حقیقی عددونه وضع کړو، نو لاندنی بیانونه به لاسته راسی:

$$f(\sqrt{3}) : \sqrt{3}=1$$

$$f(1) : 1=1$$

$$f(\frac{1}{2}) : \frac{1}{2}=1$$

نظر و پورتنی استدلال ته د راکړه سوی پریدیکات د تعریف ساحه د ټولو حقیقی عددو سیټ دی،لاکن د هر حقیقی عدد د وضع کولو په نتیجه کی (غیر له یوه څخه) راکړه سوی پریدیکات په درواغ بیان سره اوړی ، خو یوازی د یوه د وضع کیدو په نتیجه کی په رشتیا بیان سره اوړی یعنی د رشتیاوالی ساحه یی یو عنصره سیټ $A=\{1\}$ او $A\subset\mathbb{R}$ دی.

بیلګه ۲ـ فرضاً یو متحوله پریدیکات $g(x)$: $x^2+7x+12=0$ راکړه سویدی . بیاهم د $g(x)$ د پریدیکات د تعریف ساحه د ټولو حقیقی عددو سیټ دی ، ځکه چی په راکړه سوی معادله هر حقیقی عدد وضع کولای سو ، خو یوازی د $B=\{-3,-4\}$ د سیټ د عناصرو د وضع کیدو په نتیجه کی راکړه سوی معادله د صفر سره مساوی کیږی. یا په بله ژبه د $g(x)$ پریدیکات په رشتیا بیان سره اوړی. ځکه نو $B\subset\mathbb{R}$ د $g(x)$ د پریدیکات د رشتیا والی ساحه ده.

په پورتنیو دوو بیلګو کی مو ولیدل چی د راکړه سوو پریدیکاتو د تعریف ساحه به د ټولو حقیقی عددو سیټ ؤ. مګر تل داسی نه وی ، لکه څنګه چی لاندنی بیلګه موږ ته ښیی .

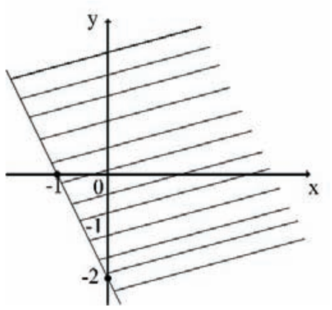
بیلګه ۳ ـ فرضاً یو متحوله پریدیکات $h(x) : \frac{x-2}{x^2+7x+12}=0$ راکړه سویدی . څرنګه چی $\frac{x-2}{x^2+7x+12}=0$ یو ناطق کسر دی ، نو باید مخرج یی د صفرڅخه خلاف وی او دا هغه وخت کیدای سی چی $x\neq-3$ او $x\neq-4$ وی . پدی معنی چی د راکړه سوی پریدیکات $h(x)$ د تعریف ساحه د ټولو هغو حقیقی عددو سیټ دی چی د -3 او -4 څخه خلاف وی . یعنی:

$$C=\mathbb{R}/\{-4,-3\} \text{ یا } C=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq-3 \wedge x\neq-4\}$$

ښکاره ده چی د $h(x)$ د پریدیکات د رشتیا والی ساحه د $D=\{2\}$ سیټ دی .

بیلگه ۴ـ د دوه متحوله پریدیکات $\rho(x,y) : 2x+y\geq -2$ د تعریف ساحه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ده ، یعنی د مستوی د ټولو نقطو سیټ دی . د رشتیاوالی ساحه یې عبارت ده دمستوی له ټولو هغو نقطو څخه چې د

$y=-2x-2$ د مستقیمې کرښې په پورتنې برخه کې قرار ولری.



شکل ۲۵

د هر پریدیکات چې د رشتیاوالی او د تعریف ساحه یې سره منطبقه وی ، د مطابقت په نامه یادیږی.

بیلگه ۵ـ د $g(x): x^2\geq 0$ پریدیکات یو مطابقت دی . ځکه چې د $g(x)$ د تعریف ساحه د ټولو حقیقی عددو سیټ دی او په عین حال کی د هر حقیقی عدد دپاره د $x^2\geq 0$ غیر مساوات حقیقت لری. نو ځکه د رشتیاوتلی ساحه یې هم د ټولو حقیقی عددو سیټ دی .

بیلگه ۶ ـ د $h(x,y): x^2+y^2\geq 0$ پریدیکات هم یو مطابقت دی .

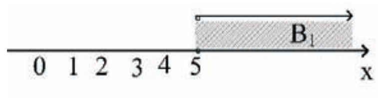
پر پریدیکاتو باندی کولای سو چی د منطق د عملیو یعنی $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow$ او $\leftrightarrow$ عمومی شکل عملی کړو. دلته یوازی د یو متحو له پریدیکاتو د تعریف په یادولو سره اکتفاء کوو.

فرضوو چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ یو متحوله پریدیکاتونه دی چی د تعریف ساحه یی د M سیټ دی (د دواړو پریدیکاتود تعریف ساحه په عین حرف سره ښیو.) او د رشتیاوالی ساحه یی په ترتیب سره B_1 او B_2 سیټونه دی.

تعریف ۲ ـ د $f_1(x)$ د پریدیکات نفی عبارت ده له $\sim f_1(x)$ څخه چی د تعریف ساحه یی د M سیټ او د رشتیا والی ساحه یی د $M-B_1$ سیټ وی .

بیلگه ۷ ـ

فرضوو چی د $f_1(x): x>5$ پریدیکات راکړه سویدی. ددی پریدیکات د تعریف ساحه د حقیقی عددو سیټ یعنی $\mathbb{R}$ دی او د رشتیاوالی ساحه یی د ټولو هغو حقیقی عددو سیټ دی چی تر 5 لوی وی . دا حقیقت د ریاضی په ژبه داسی لیکو :



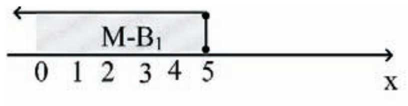
شکل ۲۶

$f_1(x) : x>5$

$M=\mathbb{R}$

$B_1=\{x\in\mathbb{R}/x >5\}$

د $f_1(x) \sim$ پریدیکات عبارت دی له $\sim f_1(x): x\leq 5$ څخه چې د تعریف ساحه یې بیاهم د ټولو حقیقي عددو سیټ دی مګر د رشتیا والی ساحه یې ټول هغه حقیقي عددونه دي چې تر 5کوچنی اویا د 5 سره مساوي وي .



شکل ۲۷

$\sim f_1(x) : x\leq 5$

$M=\mathbb{R}$

$B=M-B_1=\{x\in\mathbb{R}/ x\leq 5\}$

تعریف ۳ ـ د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ د پریدیکاتو کانجکشن عبارت دی له $f_1(x) \wedge f_2(x)$ پریدیکات څخه چې د تعریف ساحه یې د M سیټ او د رشتیا والی ساحه یې د $B_1\cap B_2$ سیټ دی .

بیلګه ۸ـ

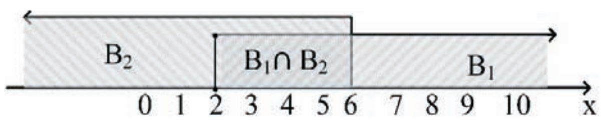
د $f_1(x): x\geq 2$ او د $f_2(x)\leq 6$ پریدیکا تونه راکړه سویدی. پدی پوهیږو چې د دواړو پریدیکاتو د تعریف ساحه د حقیقي عددو سیټ $\mathbb{R}$ دی . د هغوی د رشتیاوالی ساحی په ترتیب سره عبارت دی له :

$B_2=\{x\in\mathbb{R} / x \leq 6\}$ او $B_1=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 2\}$

د $f_1(x) \wedge f_2(x)$ پریدیکات عبارت دی له $x\geq 2 \wedge x \leq 6$ څخه ، پدی معنی چې ټوله هغه عددونه چې تر 2 لوی یا مساوي او تر 6 کوچنی یا مساوي وي په بر کې نیسي . ددی پریدیکات د تعریف ساحه بیاهم د ټولو حقیقي عددو سیټ $\mathbb{R}$ او د رشتیاوالی ساحه یې د دواړو پریدیکاتو د رشتیاوالی د ساحو مشترکه برخه ده. یعنی د

$B=B_1\cap B_2=\{ x\in\mathbb{R} / 2\leq x\leq 6 \}$

سیټ دی.



شکل ۲۸

تعریف ۴ ـ د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ د پریدیکاتو دیسجکشن عبارت دی له $f_1(x) \vee f_2(x)$ پریدیکات څخه چی د تعریف ساحه یی د M سیټ او د رشتیا والی ساحه یی د $B_1 \cup B_2$ سیټ دی .

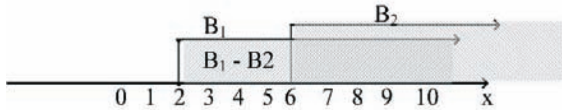
بیلګه ۹ ـ

د $f_1(x)$ پریدیکات وایی: « د x طبیعی عدد پر 2 د ویش وړ دی .» او د $f_2(x)$ پریدیکات وایی : « د x طبیعی عدد پر 3 د ویش وړ دی .» د $f_1(x) \vee f_2(x)$ پریدیکات وا یی : « د x طبیعی عدد پر 2 یا پر 3 د ویش وړ دی .» . د $f_1(x)$, $f_2(x)$ او $f_1(x) \vee f_2(x)$ د پریدیکاتو د تعریف ساحه د ټولو طبیعی عددو سیټ دی . د $f_1(x)$ رشتیا والی ساحه عبارت له هغو عددو د سیټ څخه ده ، چی پر 2 د ویش وړ وی . د $f_2(x)$ رشتیا والی ساحه عبارت له هغو عددو د سیټ څخه ده ، چی پر 3 د ویش وړ وی . د $f_1(x) \vee f_2(x)$ د پریدیکات د رشتیا والی ساحه عبارت ده ددوی دواړو د رشتیاوالی د ساحی د یو والی څخه. پدی معنی چی د $f_1(x) \vee f_2(x)$ د رشتیاوالی ساحه عبارت د ټولو هغو طبیعی عددو د سیټ څخه ده چی یا پر 2 او یا پر 3 د ویش وړ وی .

تعریف ۵ ـ د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ د پریدیکاتو امپلیکیشن عبارت دی له $f_1(x) \to f_2(x)$ پریدیکات څخه چی د تعریف ساحه یی د M سیټ او په درواغ بیان یوازی او یوازی هغه وخت اوړی چی $f_1(x)$ په رشتیا بیان او $f_2(x)$ په درواغ بیان باندی واوړی.

بیلګه ۱۰ ـ

د $f_1(x)$ پریدیکات وایی: « د x حقیقی عدد تر 2 لوی دی .» او د $f_2(x)$ پریدیکات وایی : « د x حقیقی عدد تر 6 لوی دی .» د $f_1(x) \to f_2(x)$ پریدیکات هغه وخت درواغ دی چی د x حقیقی عدد تر 2 لوی او تر 6 کوچنی وی .لاندنی شکل ورسره مقایسه کړی.

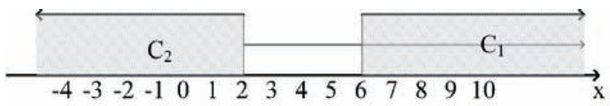


شکل ۲۹

پاس که د x پر ځای 4 وضع کړو ، نو $f_1(4)$ به رښتیا او $f_2(4)$ به درواغ وی .په نتیجه کی $f_1(4) \rightarrow f_2(4)$ به درواغ وی.

تعریف ۶ ـ د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ د پریدیکاتو معادل والی عبارت دی له $f_1(x) \leftrightarrow f_2(x)$ پریدیکات ځخه چی د تعریف ساحه یی د M سیټ او په رښتیا بیان یوازی او یوازی هغه وخت اوړی چی د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ بیانونه ، یا دواړه په رښتیا بیان او یا دواړه په درواغ بیان باندی واوړی.

د پورتنی تعریف د وضاحت د پاره د تیری بیلګی ځخه کار اخلو او د $f_1(x) \leftrightarrow f_2(x)$ د پریدیکات د رشتیاوالی ساحه په لاندنی شکل کی ښیوو.



شکل ۳۰

د C_1 په سیټ کی د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ دواړه بیانونه رشتیا او د C_2 په سیټ کی دواړه بیانونه په درواغو اوړی چی په نتیجه کی یی د $f_1(x) \leftrightarrow f_2(x)$ پریدیکات په دواړه حالاتو کی په رشتیا بیان اوړی . فلهذا په راکړه سوی حالت کی د $f_1(x) \leftrightarrow f_2(x)$ د پریدیکات د رشتیاوالی ساحه عبارت ده د $B=C_1 \cup C_2$ د سیټ ځخه. څه وخت د $f_1(x) \leftrightarrow f_2(x)$ پریدیکات په درواغو اوړی ؟

په عین ترتیب کولای سو چی پورتنی عملیی پر هغو پریدیکاتو چی n متحوله ولری ، تعریف کړو.

پر پریدیکاتو باندی غیر له پورتنی عملیو ځخه چی د لمړنی تعریف ځخه تر شپږم تعریف پوری وښودل سوی ، کولای سو چی دوی نوری عملیی هم تعریف کړو . ښکاره ده چی دا عملیی پر بیانو باندی نسی تعریفیدلای. هغه عملیی چی موږ یی په نظر کی لرو عبارت دی له کوانتیفیکا تور Quantificator ځخه .

تعریف ۷ ـ «د ټولو x دپاره ....» څرګندونه د عمومی کوانتیفیکاتور په نامه یادیږی چی په "… $\forall x$„ سره یی ښیو. د $\forall$ سمبول د انګریزی کلیمی All ، چی د ټولو په معنی ده ، اخیستل سویده.

د « x وجود لری چی ...» څرګندونه د موجودی کوانتیفیکاتور په نامه یادیږی چی په "$\exists x$…„ سره یی ښیو . د $\exists$ سمبول د انګریزی کلیمی Exist ، چی د موجود په معنی ده، اخیستل سویده .

دا چی د کوانتیفیکاتور کلیمه ډیره اوږده ده ، نو قرارداد به وکړو چی له دی نه وروسته به د کوانتیفیکاتور د کلیمی پر ځای به د کوانتور د کلیمی ځخه کار واخلو.

په اسانی سره لیدل کیږی چی ، که $f(x)$ یو یو متحوله پریدیکات وی ، نو د $(\forall x)f(x)$ او $(\exists x)f(x)$ جملی ، بیانونه دی.

څرګنده ده چی ذکر سوی بیانونه پر پریدیکات باندی د یوئیزی Unary عملیی (یعنی په پریدیکات کی د کوانتور داخلول یوه یو ئیزه عملیه دی) د عملی کیدو په نتیجه کی لاس ته راغلی دی .

بیلګه ۱۱ـ فرضوو چی د « د x طبیعی عدد پر دوو د ویش وړ دی » پریدیکات راکړه سویدی . نو ددی پر ځای چی ووایو چی طبیعی عددونه 10,8,6,4,2 ... او نور پر دوو د ویش وړ دی ، په لنډ ډول وایو چی ټوله طبیعی جفت (جوړه) عددونه یا ټوله هغه طبیعی عددونه چی $n=2k$ ، چیری چی k یو طبیعی عدد دی ، په ځیر راوړل کیږی، پر دوو د ویش وړ دی. پدی معنی ، ددی پر ځای چی څو څو ځله د کانجکشن عملیه اجراء کړو ، یو وار د یوئیزی عملیی (یعنی عمومی کوانتور) څخه کار اخلو. پورتنی مطلب د ریاضی په ژبه کی داسی راوړو:

$$(\forall x)(x=2k,\ k\in\mathbb{N})(x\vdots 2)$$

همدا ډول د « د x طبیعی عدد پر درو د ویش وړ دی » پریدیکات څیرلای سو.

ددی پر ځای چی ووایو چی 2:3 یا 4:3 یا 5:3 یا 6:3 ... او داسی نور ، وایو چی د x داسی طبیعی عدد وجود لری چی پر درو د ویش وړ دی . بیاهم ددی پر ځای چی څو څو ځله د دیسجکشن عملیه په کار واچوو ، د یوی یوئیزی عملیی (یعنی موجودی کوانتور) څخه کار اخلو.

په لنډ ډول سره ویلای سو چی عمومی کوانتور د کانجکشن د عملیی او موجودی کوانتور د دیسجکشن د عملیی عمومی څېرې دی .

د کوانتور کلیمه د quantify چی د مقدار په معنی ده، اخیستل سویده . که $f(x)$ یو یو متحوله پریدیکات وی ، نو ددی دپاره چی ددی پریدیکات د تعریف ساحه مو په یوه سب سیټ باندی محدود کړی وی ، د کوانتور څخه کار اخلو . ځکه نو کله کله کوانتور د محدودونکی په نامه هم یادیږی . چی پدی ډول سره یی ښیو : $(\forall x\in A)$, $(\exists x\in A)$

د ریاضی په ژبه کی د کوانتورو څخه استفاده موږ ته د تعریفو او قضیو په مختصر ډول سره د ارائه کولو ، امکانات برابروی.

بیلګه ۱۲ ـ

الف ـ « ټوله انسانان مری» . دا جمله د ریاضی په ژبه کی داسی فور مولبندی کوو:

x - $f(x)$ انسان دی.

x - $h(x)$ مری.

پس راکړه سوی جمله په سمبولیک شکل سره داسی لیکلای سو : … $(\forall x)\ f(x)\rightarrow h(x)$ (1)

که د $f(x)$ د پریدیکات د رشتیا والی ساحه په A سره وښیو ، نو پورتنی جمله داسی لیکلای سو :

$(\forall x\in A)h(x)$ … (2)

ب ـ د سب سیټ والی تعریف داسی ارائه کوو:

$A\subset B \overset{df}{\equiv} (\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)$ … (3)

ج ـ جمله « داسی تام عدد وجود لری چی پر 3 او 5 د ویش وړ دی » په سمبولیک شکل داسی ارا ئه کوو:

$f(x)$ - « x تام عدد دی .»

$g(x)$ - « x پر 3 د ویش وړ دی .»

$h(x)$ - « x پر 5 د ویش وړ دی .»

$(\exists x)\ f(x)\ \wedge g(x)\ \wedge h(x)$ … (4)

که د $f(x)$ پریدیکات د "$x\in\mathbb{Z}$" سره عوض کړو او د $g(x)$ او $h(x)$ پریدیکاتونه د ریاضی په ژبه کی راوړو نو (4) افاده به داسی ارائه کړای سو:

$(\exists x)((x\in\mathbb{Z})\wedge(x\vdots 3)\wedge(x\vdots 5))$ … (5)

د ـ لاندنی افاده د ρ غبرگونی اړیکی انعکاسی خاصیت ارائه کوی:

$(\forall x\in A)((x,x)\in\rho)$ …(6)

اوس به نو دوه متحوله پریدیکات $f(x,y)$ چی د تعریف ساحه یی $X\times Y$ په نظر کی ونیسو.

عبارت « د هر $x\in X$ د پاره $f(x,y)$ حقیقت لری » داسی ارائه کوو:

$(\forall x\in X)\ f(x,y)$ … (7)

ښکاره ده چی د (7) افادی رشتیا والی او درواغ والی یوازی او یوازی د y په قیمت پوری اړه لری. پدی لحاظ (7) افاده یو یو متحوله پریدیکات ، د y د متحول سره، دی.

همدا ډول $(\exists y\in Y)f(x,y)$ … (8) هم یو متحوله پریدیکات د x د متحول سره دی.

تعریف ۸ ـ هغه متحول چی د هغه پذ ریعه کوانتور داخلیږی (یعنی په کوانتور باندی تړلی وی) ، د تړلی متحول په نامه یادیږی . غیر له هغه څخه متحول د آزاد متحول په نامه یادیږی.

د بیلگی په توگه په (7) افاده کی د x متحول تړلی او د y متحول آزاد دی. بر عکس په (8) افاده کی د y متحول تړلی او د x متحول آزاد دی .

په II§ کی مو د بیان د فارمول مفهوم او د بیانو مطابق والی تعریف کی . همدا ډول کولای سو چی د پریدیکاتونو فارمول او د پریدیکاتو مطابق والی تعریف کړو. مگر ذکر سوی مفاهیم زموږ د درسی چوکاټ څخه وتلی دی .

دوه متحوله پریدیکات $f(x,y)$ په داسی حال کی په نظر کی نیسو چی دواړه متحوله x او y یی تړلی وی . البته لاندنی امکانات وجود لری :

$$(\exists x)(\exists y)\, f(x,y) \qquad \dots (9)$$

$$(\forall x)(\forall y)\, f(x,y) \qquad \dots (10)$$

$$(\exists x)(\forall y)\, f(x,y) \qquad \dots (11)$$

$$(\forall x)(\exists y)\, f(x,y) \qquad \dots (12)$$

$$(\exists y)(\exists x)\, f(x,y) \qquad \dots (13)$$

$$(\forall y)(\forall x)\, f(x,y) \qquad \dots (14)$$

طبعاً سوال مطرح کیږی چی د پورتنیو افادو څخه کومی جوړی په خپل منځ کی مطابقت لری ؟ په آسانی سره لیدل کیږی چی د 9 او 13 ، د 10 او 14 افادی یو له بله سره مطابقت لری . یعنی :

$$(\exists x)(\exists y)\, f(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\, f(x,y) \qquad \dots (15)$$

$$(\forall x)(\forall y)\, f(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\, f(x,y) \qquad \dots (16)$$

پنځلسمه او شپاړسمه افاده وایی چی په یو شکله کوانتورو کی د هغوی ځایونه سره بدلولای سو، مگر :

$$(\forall x)(\exists y)\, f(x,y) \not\equiv (\exists y)(\forall x)\, f(x,y) \qquad \dots (17)$$

مگر چی کوانتورونه هم شکله نه وی ، نو ځایونه یی تغییر هم نسو ورکولای. د بیلگی په ډول لاندنی بیانونه د پاسنی ادعا ښه ښکارندوی دی.

« د هر انسان دپاره کور وجود لری» ، «کور وجود لری چی د هر انسان دپاره دی» .

ښکاره ده چی پورتنی بیانونه یو دبله سره هیڅکله مطابقت نلری .

لاندنی فارمولونه حقیقت لری:

$$\sim((\forall x)f(x)) \equiv (\exists x)(\sim f(x)) \qquad \ldots.(18)$$

$$\sim((\exists x)f(x)) \equiv (\forall x)(\sim f(x)) \qquad \ldots.(19)$$

$$(\forall x)\,(f(x) \wedge g(x)) \equiv ((\forall x)\,f(x)) \wedge ((\forall x)\,g(x)) \qquad \ldots(20)$$

$$(\exists x)\,(f(x) \vee g(x)) \equiv ((\exists x)\,f(x)) \vee ((\exists x)\,g(x)) \qquad \ldots(21)$$

$$((\forall x)\,f(x)) \vee ((\forall x)\,g(x)) \rightarrow (\forall x)\,(f(x) \vee g(x)) \qquad \ldots(22)$$

$$(\exists x)\,(f(x) \wedge g(x)) \rightarrow ((\exists x)\,f(x)) \wedge ((\exists x)\,g(x)) \qquad \ldots(23)$$

د بیلګی په ډول (18) فارمول په ثبوت رسوو.

څرنګه چی (18) فارمول یو مطابقت دی ، نو باید ددو خواو څخه یی په اثبات ورسو، یعنی د کینی خوا څخه باید ښی خوا په لاس راوړو او بر عکس د ښی خوا څخه کینه خوا لاس ته راوړو. لمړی د کینی خوا څخه ښی لور ته ځو. فرضوو چی $\sim((\forall x)f(x))$ رشتیا دی .

د $\sim((\forall x)f(x))$ رشتیا والی د $(\forall x)f(x)$ د درواغ والی سره مطابقت لری. پدی معنی چی ددوی د تعریف په ساحه M کی داسی یو عنصر x_0 وجود لری چی $f(x_0)$ درواغ دی . فلهذا $\sim f(x_0)$ باید رشتیا وی ، یعنی د $(\exists x)(\sim f(x))$ بیان رشتیا دی .

اوس به نو د ښی څخه و کیڼ لور ته استدلال وکو . که $(\exists x)(\sim f(x))$ رشتیا وی ، نو د $f(x)$ د پریدیکات د رشتیا والی ساحه د M د سیټ سره مطابقت نه کوی ، یعنی $\sim((\forall x)f(x))$ رشتیا دی . پدی ډول (18) فارمول په ثبوت ورسیدی.

پاته دی نه وی چی (18) او (19) فارمولونه د پریدیکاتونو دپاره د ډی. مارګن قوانین ارائه کوی.

X§ . مساواتونه ، غیر مساواتونه، سیستم او مجموعی د مساواتو او غیر مساواتو .

د ښوونځی په ریاضیاتو کی د مساواتو او غیر مساواتو د سیستمو او مجموعو د مفاهیمو سره هرومرو آشنا سوی یاست . همداراز د لمړنی ښوونځی او لیسی زده کونکو ته دا سوال چی مساوات څه شی دی؟ تل سر خوږی پیداکاوه . د پریدیکات مفهوم موږ ته دا اجازه راکوی چی پاسنی ټوله مفاهیم په عمومی شکل سره تعریف کړو .

فرضوو چی $f: X \longrightarrow Y$ او $g: X \longrightarrow Y$ یو متحوله عددی تابع ګانی دی (یعنی د X او Y سیټونه عددی سیټونه دی.) .

تعریف ۱ ـ یو متحوله پریدیکات $f(x)=g(x)$ د X پر راکړه سوی سیټ باندی د x د یو مجهوله مساوات په نامه یادیږی.

تعریف ۲ ـ یو متحوله پریدیکات $f(x)\geq g(x)$ د X پر راکړه سوی سیټ باندی د x د یو مجهوله غیر مساوات په نامه یادیږی، پداسی حال کی چی $\mathbb{R} \subset Y$.

د X سیټ عبارت دی د مساوات (غیر مساوات) د تعریف د ساحی څخه . د $f(x)=g(x)$ د مساوات ($f(x)\geq g(x)$) غیر مساوات) د رشتیا والی ساحه عبارت ده د راکړه سوی مساوات (غیر مساوات) د حل د سیټ څخه.

د حل د سیټ هر عنصر د مساوات (غیر مساوات) د حل په نامه یادیږی. کله کله د مساوات (غیر مساوات) د حل د سیټ عنصر د مساوات (غیر مساوات) د جذر په نامه هم یادوو. د مساوات (غیر مساوات) د حل څخه مو هدف د هغوی د حل د سیټ پیداکول دی. که دهغوی د حل سیټ د تعریف د ساحی سره مطابقت ولری ، نو راکړه سوی مساوات (غیر مساوات) د مطابقت په نامه یادوو.

د مساوات (غیر مساوات) په حالت کی د پریدیکاتو د معادل والی مفهوم د مساوات (غیر مساوات) په معادل والی سره تبد یلیږی.

بیلګه ۱ -

د $x^2=2x-2$ مساوات چی د حقیقی عددو پر سیټ $\mathbb{R}$ راکړه سوی دی ، حل نلری ، ځکه چی داسی حقیقی عدد وجود نلری چی هغه د x پر ځای وضع کړو او د $x^2=2x-2$ پریدیکات دی په رشتیا بیان واوړی . فلهذا ددی مساوات د حل سیټ یو خالی سیټ دی.

بیلګه ۲ - د $x^2 -2x \geq -1$ غیر مساوات چی د حقیقی عددو پر سیټ $\mathbb{R}$ راکړه سویدی ، یو مطابقت دی . ځکه چی د $(x-1)^2-1\geq-1$ پریدیکات تل حقیقت لری . پدی معنی چی د تعریف ساحه یی د رشتیاوالی د ساحی سره منطبقه ده.

تعریف ۳ - فرضوو چی د $f_1(x)=g_1(x), f_2(x)=g_2(x), \ldots, f_k(x)=g_k(x)$ مساواتونه دی چی د هغوی عمومی د تعریف ساحه X ده . د

$$f_1(x)=g_1(x) \wedge f_2(x)=g_2(x) \wedge \ldots \wedge f_k(x)=g_k(x) \ldots (1)$$

پریدیکات عبارت دی د راکړه سوو مساواتو د سیستم څخه چی په لاندی ډول سره ښودل کیږی :

$$\begin{cases} f_1(x)=g_1(x) \\ f_2(x)=g_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x)=g_k(x) \end{cases} \ldots (2)$$

د

$$f_1(x)=g_1(x) \vee f_2(x)=g_2(x) \vee \ldots \vee f_k(x)=g_k(x) \qquad \ldots (3)$$

پریدیکات عبارت دی د مساواتو د مجموعی څخه ، چی په لاندی ډول سره ښودل کیږی:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) = g_k(x) \end{cases} \qquad \ldots(4)$$

که په دریم تعریف کی د «=» د علامی پر ځای « ≤» علامه راوړو او د مساوات کلیمه د غیر مساوات سره عوض کړو ، نو د غیر مساواتو سیستم او مجموعه به مو تعریف کړی وی . په هغه صورت کی د X سیټ د مساواتو(غیر مساواتو) د سیستم یا مجموعی د تعریف د ساحی په نامه یادیږی.

البته امکان لری چی مساواتو نه (غیر مساواتونه) د تعریف د مختلفو ساحو ، یعنی $X_n,\ldots,X_2,X_1$ درلودونکی وی ، په هغه صورت کی د مساواتو (غیر مساواتو) د سیستم او مجموعی د تعریف ساحه عبارت ده د $X= X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ د سیټ څخه. که $X=\emptyset$ وی ، نو دا ډول سیستم او یا مجموعه تر څیړنی لاندی نه نیسو.

د سیستم (مجموعی) د حل سیټ عبارت دی د (1)او (3) د پریدیکاتو د رشتیا والی د ساحی څخه.

که $A_1,A_2,\ldots,A_k$ په تر تیب سره د $f_1(x)=g_1(x),f_2(x)=g_2(x),\ldots,f_k(x)=g_k(x)$ پریدیکاتو د رشتیاوالی ساحی وی ، نو $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k$ د (1) د پریدیکات د رشتیاوالی ساحه او $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k$ د (3) د پریدیکات د رشتیاوالی ساحه ده .

د سیستم (مجموعی) د حل د سیټ هر عنصر د هغه سیستم (مجموعی) د حل په نامه یادیږی. د مساواتو (غیر مساواتو) د سیستم (مجموعی) د حل څخه هدف د هغوی د حل د سیټ پیدا کول دی.

که په پورتنیو تعریفو کی د یوه متحوله تابع پر ځای څو متحوله تابع ګانی راوړو ، نو په آسانی سره د مساواتو (غیر مساواتو) عمومی شکل لاسته راځی. غیر له دی څخه کولای سو چی د عددی تابع پر ځای یوه اختیاری تابع $f: X \longrightarrow Y$ راوړو، پداسی ډول چی د X سیټ یو عددی سیټ نه بلکه د تابع ګانو ، ماترکسو او نورو ، سیټ وی . بیاهم پورتنی تعریفونه صدق کوی او پدی ډول د مساواتو (غیر مساواتو) د سیستم او د مساواتو (غیر مساواتو) د مجموعی عمومی ترین شکل حاصلیږی.

بیلګه ۳ـ

الف ـ د مساواتو د سیستم بهترینه بیلګه ، د خطی معادلو سیستم دی.

ب ـ لاندنی غیر مساوات څیړو :

$$x^2-7x+12\geq 0 \qquad \ldots (5)$$

ددی غیر مساوات د حل په پروسه کی د غیر مساواتو سیستم او مجموعه لاسته راځی، یعنی:

$x^2-7x+12\geq 0 \leftrightarrow \quad (x-3)(x-4)\geq 0$

پورتنی غیر مساوات په لاند نیو دوو حالتو کی صدق کوی :

$(x-3)\geq 0 \ \wedge (x-4)\geq 0 \qquad \ldots(6)$

یا

$(x-3)\leq 0 \ \wedge (x-4)\leq 0 \qquad \ldots(7)$

یا په بل عبارت:

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3\leq 0 \\ x-4\leq 0 \end{cases}$$

البته د (5) غیرمساوات د حل سیټ عبارت دی د (6) او (7) دغیر مساوات د سیستمونو د حل دسیټونو د یووالی څخه. یعنی (6) $\vee$(7) ،چی په نتیجه کی د غیر مساواتو مجموعه حاصلیږی:

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3\leq 0 \\ x-4\leq 0 \end{cases} \qquad \ldots(8)$$

یا په بل عبارت:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3\leq 0 \\ x-4\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \ldots(9)$$

ج - د $x2-5x+6=0 \quad \ldots(10)$ مساوات یوازی او یوازی هغه وخت مساوی په صفر سره کیږی چی $x-3=0$ وی او یا $x-2=0$ ، پدی صورت کی د مساواتو لاندنی مجموعه لاسته راځی :

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \qquad \ldots.(11)$$

دوهم فصل

الجبری ساختمانونه ـ د عددو اساسی ساختمانونه

I§ . الجبر او الجبری ساختمانونه .

د معاصر الجبر یو د بنسټیزو مفهومو څخه د عملیی Operation مفهوم دی . کله کله د عملیی پر ځای د الجبری عملیی کلمه هم په کار اچوو . زده کونکی د ښوونځی په دوران کی د جمع ، تفریق ، ضرب، تقسیم او نورو عملیو (د عملیو د اجراء) سره آشنا کیږی . همدا ډول د ذکر سوو عملیو خاصیتونه د عددونو په مختلفو سیټو کی مشاهده کوی.

د سیټ په تیوری کی د $\cap, \cup,$ ` $, \times$ عملیو او دهغوی د خاصیتو سره او د ریاضی په منطق کی د$\wedge, \vee$,

$\sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ عملیو او د هغوی د خاصیتو سره معرفی سو و . طبعآ سوال پیداکیږی ، چی عملیه څه شی ده؟

فرضوو $A\neq\emptyset$ یو کیفی سیټ او د n ($n\in\mathbb{N}$) طبیعی عدد راکړه سوی دی .

تعریف ۱ ـ د φ هر مپینگ د A^n د سیټ څخه د Aپه سیټ کی ($\varphi: A^n \longrightarrow A$) ، د A په سیټ کی د n ـ ئیزی عملیی n-ary Operation په نامه یادیږی.

که $n=1$ سره وی ، نو د $\varphi: A \longrightarrow A$ مپینگ د A په سیټ کی یوه ئیزه Unary Operationعملیه ده .

د بیلگی په ډول د یوه عدد لوړل د یوه طبیعی عدد و طاقت ته ، په سیټونو کی د مکملی عملیه او د ریاضی په منطق کی د نفی عملیه د یوئیزی عملیو ښه مثالونه دی. که $n=2$ وی ، نو د φ مپینگ

$\varphi: A\times A \longrightarrow A$ د A په سیټ کی دوه ئیزه عملیه Binary Operation ده. د جمعی ، تفریق ، ضرب،تقسیم ، مشترکه برخه ، د سیټو یووالی،کانجکشن ، استنباط ... او داسی نور د دوه ئیزو عملیو عادی مثالونه دی. د تاریخ په اوږدو کی د هغو عملیو دپاره چی ډیره استفاده ځنی کیږی ، مخصوص سمبولونه ټاکل سویدی . لکه : «+»، « - » ، «. » ، « :»،« U»،«∩»،«∧ »،«→» ... او داسی نور . دوه ئیزه عملیه د $A\times A$ د سیټ د هری مرتبی جوړی په مقابل کی د A د سیټ یو عنصر ایږدی . ځکه نو هغه سمبولونه چی مخ کی مو ذکر کړه د مرتبو جوړو په منځ کی ایږدو . د بیلگی په توگه : $p\rightarrow q, A\cup B, 2+3$ ... او داسی نور.

که $n=3$ وی ، نو د φ مپینگ $\varphi : A\times A\times A \longrightarrow A$ دA په سیټ کی دری ئیزه عملیه Ternary Operation ده .

د الجبر پدی کورس کی به اکثراً د دوه ئیزو عملیو سره په تماس کی یو . تر هغه ځایه چی سوء تفاهم منځ ته رانسی ، د دوه ئیزی د کلیمی څخه صرف نظر کوو او یوازی د علمیی په نوم اکتفاء کوو.

د یادونی وړ ده چی پر متناهی سیټ باندی د عملیی تعریفول د کیلی Kelley د جدول پذریعه اسانه دی. نوموړی طریقه د لاندنی مثال په ذریعه تشریح کوو.

بیلګه ۱ ـ فرضوو چی د $A=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ سیټ او د $\oplus$ عملیه د لاندنی جدول پذریعه راکړه سویده . د 5×5 حجروی جدول د کیڼ لاس په پاسنی کنج کی د عملیی سمبول ایږدو . د جدول په لمړی سطون او لمړی کرښه کی د A د سیټ عنصرونه ځای پر ځای کوو.، پاتی حجری د $\oplus$ عملیی د نتیجی له مخی ډکوو. د $\oplus$ د عملیی نتیجه $z=x\oplus y$ د (x,y) پر مرتبی جوړی باندی د x د کرښی او y د سطون د تقاطع په حجره کی پرته ده . مثلاً $\bar{2}\oplus\bar{3}=\bar{1}$ ، $\bar{3}\oplus\bar{1}=\bar{0}$ ، ... او داسی نور .

دلته د z عدد عبارت دی د x+y د تقسیم د باقی څخه د 4 پر عدد باندی .

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

جدول ۱۱

فرضوو چی د A په سیټ کی د «*» او د «∘» دوه ئیزی عملیی راکړه سویدی.

تعریف ۳ ـ دوه ئیزه عملیه «*» د A په سیټ کی د اتحادی خاصیت associative درلودونکی ده ، که :

$$(\forall\ a,b,c\in A)\ (a*(b*c)=(a*b)*c)$$

بیلګه ۲ ـ

الف ـ د ټولو بیانو په سیټ کی د منطق د جمع او ضرب عملیی د اتحادی خاصیت درلودونکی دی .

ب ـ د ټولو تامو عددونو په سیټ کی د تفریق عملیه اتحادی خاصیت نلری.

تعریف ۴ ـ دوه ئیزه عملیه «*» د A په سیټ کی د تبدیلی خاصیت commutative درلودونکی ده ، که :

$$(\forall\ a,b\in A)\ (a*b)=(b*a)$$

بیلګه ۳ ـ

الف ـ د تام عددونو په سیټ کی د جمع او ضرب عملیی تبدیلی خاصیت لری.

ب ـ د تام عددونو په سیټ کی د تفریق عملیه تبدیلی خاصیت نلری.

تعریف ۵ ـ د A په سیټ کی دوه ئیزه عملیه «$*$» نظر و دوه ئیزی عملیی «$\circ$» ته توزیعی distributive خاصیت لری ، که :

$$(\forall\, a,b,c\in A)\ \ (a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c))\wedge((b\circ c)*a=(b*a)\circ(c*a))$$

بیلګه ۴ ـ

الف ـ د حقیقی عددونو په سیټ کی د ضرب عملیه نظر د جمع و عملیی ته توزیعی ده .

ب ـ پر سیټونو باندی د مشترکی برخی عملیه نظر د سیټونو و اتحاد ته توزیعی ده .

ج ـ د تام عددونو په سیټ کی د جمع عملیه نظر د ضرب و عملیی ته توزیعی نده .

تعریف ۶ ـ د A سیټ چی پر هغه باندی د $O_1,O_2,\ldots,O_k$ $(k\in\mathbb{N})$ عملیی راکړه سوی وی ، د الجبر Algebra په نامه یادیږی ،چی په $<A;\, O_1,O_2,\ldots,O_k>$ سره یی ښیو.

بیلګه ۵ ـ

الف ـ $<\mathbb{N}\ ;+,.>$ د طبیعی عددونو الجبر دی.

ب ـ $<U;\cap,`>$ د U د عمومی سیټ د سب سیټونو الجبر دی.

ج ـ که A د ټولو بیانو سیټ وی ،نو $<A;\sim,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow>$ د بیان الجبر دی.

که څه هم د الجبر مفهوم په کافی اندازه عمومی دی ، خو پر هغه سر بیره ټوله هغه حالوتونه ،کوم چی په ښوونځی کی ور سره مخامخ سوی یاست ، په بر کی نه نیسی . مثلاً په طبیعی عددونو کی د ویش د وړتیا سره او یا په حقیقی عددونو کی د ,,>" او ,,<" اړیکو سره مخامخ سوی یاست . البته ذکر سوی اړیکی عملیی ندی .

تعریف ۷ ـ د A پر سیټ باندی چی د اړیکو یو مجموعه راکړه سوی وی ، د مودل Model په نامه یادیږی.

که د A پر سیټ باندی اړیکی په $R_1,R_2,\ldots,R_l$ $(l\in\mathbb{N})$ سره وښیو ، نو

$<A\,;\,R_1,R_2,\ldots,R_l>$ یو مودل دی .

د الجبر او مودل دواړه تعریف سوی مفهومونه د الجبری ساختمان (الجبری سیستم) خاص حالتونه دی.

تعریف ۸ ـ د A پر سیټ باندی چی د عملیو او اړیکو مجموعه تعریف سوی وی ، د الجبری ساختمان algebraic structure او یا الجبری سیستم algebraic system په نامه یادیږی ، چی په لاندی ډول سره یی ښیو :

$$<A; O_1,O_2,\ldots,O_k, R_1,R_2, \ldots , R_l>$$

د الجبری ساختمانو بیلګی عبارت دی له: طبیعی عددونو ساختمان ، د حقیقی عددونو ساختمان ، ... او داسی نور .

د اوسنیو ریاضیاتو یوه برخه چی د مودل د تیوری په نامه یادیږی ، په الجبری مودل او الجبری ساختمانو پوری مربوط عمومی مسایل څیړی . په ریاضی کی ټوله ممکنه الجبری ساختمانونه نه څیړل کیږی . د اکثرو څخه یی نه د ریاضی په تیوری او نه په عمل کی استفاده کیدای سی . د ریاضیاتو د تکا مل په پروسه کی ځینو الجبری ساختمانو ، چی پر هغوی باندی تعریف سوی عملیی د عددونو د عملییو سره ورته والی لری خپل ځای تثبیت کړیدی. دغه ډول ساختمانونه به په راتلونکی کی تر مطالعی لاندی ونیسو.

II§. د طبیعی عددونو سیستم ـ د ریاضی د استقراء پرنسیپ.

۱ـ د طبیعی عددونو سیستم .

که د ریاضی تاریخ ته وګورو ، نو به ډیر ژر دی نتیجی ته ورسیږو چی لمړنی عددونه کوم چی د انسان د کار په ډګر کی د هغه د اړتیا پر بنسټ منځ ته راغلی دی ، طبیعی عددونه دی . انسان د کوچنیوالی څخه د طبیعی عددونو سره آشنا او د هغو څخه په دوه هدفه کار اخلی. یو داچی دهر متناهی سیټ په مقابل کی یو د طبیعی عددونو څخه ایږدی (د هغه سیټ د عنصروشمیر) او بل د ترتیب

په موخه . په لمړی حالت کی و لاندنیو سوالو ته په جواب ورکولوکی کار ځنی اخلی :

د ګل جان په رمه کی څو پسونه دی؟ نن می په پلورنځی کی څو بایسکلان و پلورل ؟ احمد څو کوچنیان لری ؟ ... او داسی نور.

په دوهم حالت کی د طبیعی عددونو په مرسته د راکړه سوی سیټ عنصرونه اوډل کیږی، یعنی اول ،دوهم،دریم، ... او داسی نور . پدی حالت کی لاندنیو سوالو ته جواب ورکوو:

د فوټبال په پسرلنی تورنمنټ کی د میوند د اتلانو ټیم څووم سو؟ ثریا د رئیس څووم کوچنی دی؟ داود په کلنی آزموینو کی څووم سو ؟ او داسی نور.

زده کونکو ته د ریاضی ددرس په جریان کی د طبیعی عددونو مفهوم د مشخصو بیلګو په مرسته افاده کیږی . هغوی ته د طبیعی عددونو اساسی خاصیتونه اساساً دقیق په ثبوت

نه رسیږی ، بلکه د غیر کامل استقراء په ذریعه هغوی ته ور فهمول کیږی. البته دا طریقه د ابتدائی ریاضیاتو د موخو جواب ویونکی ده . موږ کولای سو چی د طبیعی عددونو ټول خاصیتونه په دقیق ډول داسی په ثبوت ورسو چی دواړه حالته (د طبیعی عددونوڅخه استفاده د مجموعی او یا اوډونکی په صفت) په بر کی ونیسی.

لمړی طریقه د اصلی عددونو cardinal number او دوهمه طریقه د ترتیبی عددونو ordinal number د تیوری وخواته سوق کیږی . د ترتیبی طبیعی عددونو د تیوری د طرح دپاره مختلف امکانات وجود لری . بیله دی چی موضوع ژوره وڅیړو ، د طبیعی عددونو تعریف او ځنی خصوصیتونه دلته ذکر کوو.

ددی موخی دپاره د نولسمی پیړی په نیمائی کی د ایټالوی ریاضی پوه پئانو D.Peano له خوا د پیشنهاد سوی طریقی څخه استفاده کوو. دده د طریقی ښه والی نظر و نورو طریقو ته په ساده گی او د متناهی اکسیومو په درلولو کی دی . پر هغه بر سیره په ځینو ځایو کی ضرورت ایجادیږی څو دطبیعی عددونو ځنی خاصیتونه په پیچلی شکل سره په اثبات ورسوو.

دمخه تردی چی په اکسیوماتیک سیستم شروع وکو ، غواړم چی د یوه اساسی مفهوم پر اصطلاح لږ وږغیږم. زموږ په ټولنه کی خلک د چوب خط د کلیمی اود هغه د استعمال سره بلد دی ، معمولاً د نان بای څخه د ډوډی د رانیولو په وخت کی استفاده ځنی کیدل. د لرگی پر یوه ټوټه به ئی تر یوه خط وروسته بل خط کیندی. دی چوب خط ته په انگلیسی کی تالی Tally وائی . ددغه مفهوم دپاره چی اوس ئی دلته تعریفوو ، په نورو ژبو کی د خلف ، تعقیبونکی successor کلیمی هم استعمالیږی . زه بیاهم دلته د تالی د کلیمی استعمال غوره بولم.

فرضوو چی د $\mathbb{N}$ سیټ خالی ندی ($\mathbb{N}\neq\emptyset$)او ρ پر هغه باندی یوه غبرگونی اړیکه ده. که $(a,b)\in\rho$ وی ، نو وایو چی « b د a تالی دی » یا « b بلا فاصله د a په تعقیب راځی» . په لنډ دول ئی داسی لیکو : $b=a'$

تعریف ۱ ـ د $\mathbb{N}$ سیټ چی پر هغه باندی د تالی غبرگونی اړیکه راکړه سویده ، د طبیعی عددونو د سیستم په نامه یادیږی ، که لاندنی اکسیومی صدق وکی .

۱ـ د $\mathbb{N}$ په سیټ یو عنصر چی یو «1» نومیږی داسی وجود لری ،چی هغه د بل هیڅ عنصر تالی ندی . یعنی :

$$(1\in\mathbb{N})\wedge(\forall a\in\mathbb{N})(a'\neq 1)$$

۲ـ د $\mathbb{N}$ د سیټ د هر عنصر ($a\in\mathbb{N}$) د پاره یوازی او یوازی یو تالی $a'\in\mathbb{N}$ وجود لری .

$$(\forall a\in\mathbb{N})\,(\exists!\, a'\in\mathbb{N})$$

نوټ - !∃ د یوازنی موجودیت په معنی ده . یعنی یوازی او یوازی یو شی وجود لری.

۳ - د $\mathbb{N}$ د سیټ هر عنصر حد اکثر د یوه عنصر تالی دی .

۴ - د $\mathbb{N}$ هر سب سیټ یعنی $M\subset\mathbb{N}$ چی د یو « 1» عنصر ولری او د هر عنصر a سره د هغه

تالی a' هم ولری ،نو د M او $\mathbb{N}$ سیټونه سره منطبق دی . یعنی :

$$(\forall M \subset\mathbb{N})\ [((1\in M) \wedge (\forall\ a \in M \to a'\in M)) \to (M= \mathbb{N})$$

پدی صورت کی د $\mathbb{N}$ د سیټ عنصرونه د طبیعی عددونو natural numbers په نامه یادیږی .

د ۱ څخه تر ۴ پوری خاصیتونه د طبیعی عددونو دپاره د پئانو د اکسیومو په نامه یادیږی . څلورمه اکسیومه د استقراء induction د اکسیومی په نامه یادیږی.

د پئانو د اکسیومو څخه لاندنی قضیی استنباط کیږی.

قضیه ۱- د a او b طبیعی عددونه یوازی او یوازی هغه وخت په خپل منځ کی مساوی دی ، چی د هغوی تالی ، یعنی a' او b' ، سره مساوی وی .

$$(\forall\ a,b \in \mathbb{N})\ (a=b \leftrightarrow a'= b')$$

د قضیی ثبوت مستقیماً د دوهمی او دریمی اکسیومی څخه استنباطیږی .

قضیه ۲ - هیڅ طبیعی عدد د خپل تالی سره مساوی ندی . $(\forall a\in \mathbb{N})(a\neq a')$

ثبوت - فرضوو د M سیټ د طبیعی عددونو x سیټ دی چی $x\neq x'$ وی . یعنی :

$$M=\{\ x\in \mathbb{N}\ \ / x \neq x'\}$$

د لمړی اکسیومی څخه استنباطیږی چی $1\in M$. یعنی زموږ له خوا په تعریف سوی سیټ M کی د یو عدد شامل دی . که د $a\in M$ یو عنصر وی ، یعنی $a\neq a'$ وی ، نو باید ثابته کو چی $a' \neq (a')'$ دی . که دا ډول نه وای ، یعنی $(a')'=a'$ وای ، نو د لمړی قضیی له مخی $a'=a$ سره وی . مګر دا حالت خو د M د سیټ د تعریف سره مغایرت لری . پدی ترتیب د M سیټ د استقراء د اکسیومی له مخی د $\mathbb{N}$ دسیټ سره منطبق دی . یعنی $M=\mathbb{N}$ او $(\forall a\in \mathbb{N})(a\neq a')$.

قضیه ۳ - هر طبیعی عدد چی د یوه څخه خلاف وی ، یوازی او یوازی د یوه طبیعی عدد تالی دی .

$$(\forall a\in \mathbb{N}\ ;\ a\neq 1)\ (\exists!\ b\in \mathbb{N}\ ;\ b'=a)$$

دا قضیه هم د دوهمی قضیی په ډول ثبوتولای سو .

په اول نظر امکان لری داسی ښکاره سی چی ګواکی د طبیعی عددونو داډول تعریف هغه عمومی خاصیتیونه ، کوم چی موږ ورسره د ښوونځی په دوران کی پیژند ګلوی درلوده ، وئی نلری. ځکه چی تر اوسه مو د جمعی او ضرب د عملیی څخه هیڅ یادونه نده کړی. د پئانو د اکسیومو له مخی د جمعی عملیه په لاندی ډول تعریفوو.

تعریف ۲ ـ دطبیعی عددونو پر سیټ د جمعی عملیه عبارت له $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ میپینګ څخه ده چی د طبیعی عددونو د هری مرتبی جوړی (a,b) په مقابل کی د $a+b$ طبیعی عدد پداسی ډول ایږدی چی لاندنی شرطونه پر ځای کی :

$i)(\forall a\in\mathbb{N})\ (a+1=a')$

$ii)(\forall\ a,b\in\mathbb{N})(a+b'=(a+b)')$

د $a+b$ عدد د a او b د طبیعی عددونو د جمعی د حاصل په نامه یادیږی او د a او b طبیعی عددونه د جمع د عملیی د اجزا ؤ په نامه یادیږی .

تعریف ۳ ـ ـ دطبیعی عددونو پر سیټ د ضرب عملیه عبارت له $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ میپینګ څخه ده چی د طبیعی عددونو د هری مرتبی جوړی (a,b) په مقابل کی د $a.b$ طبیعی عدد پداسی ډول ایږدی چی لاندنی شرطونه پر ځای کی :

$i)(\forall a\in\mathbb{N})\ (a.1=a)$

$ii)(\forall\ a,b\in\mathbb{N})(a.b'=a.b+a)$

د $a.b$ عدد د a او b د طبیعی عددونود ضرب د حاصل په نامه یادیږی او د a او b طبیعی عددونه په ترتیب سره دضرب د عملیی په مضرب او مضرب منه سره یادیږی .

ثابتیدلای سی چی د طبیعی عددونو په سیټ کی د جمع او ضرب عملیی بی ساری Unique دی . قرارداد به وکړو چی د یوه تالی به د 2 په نامه ، د 2 تالی به د 3 په نامه ... او داسی وړاندی ، ونوموو. یعنی:

$1'=1+1=2$

$2'=2+1=3$

$3'=2+1=4$

د بیلګی په ډول ثابته به کړو چی $3+2=5$ کیږی: $3+2=3+1'=(3+1)'=4'=5$

همدا ډول : $3+2=2'+2=(2+2)'=(1'+2)'=((1+2)')'=(3')'=(4)'=5$

د طبيعی عددونو د جمعی او ضرب د تعریفو څخه ثابتيدلای سی چی نوموړی عملیی د تبدیلی او اتحادی خاصیتو درلودونکی دی او د ضرب عملیه نظر د جمعی و عملیی ته د توزیعی خاصیت درلودونکی ده.

د بیلګی په توګه ثابتوو چی د جمع عملیه اتحادی خاصیت لری . یعنی :

$$(\forall\ a,b,c \in \mathbb{N})((a+b)+c=a+(b+c)) \ \ldots\ (1)$$

فرضاً M د c د ټولو هغو عددونو سیټ وی چی د هر $a,b\in \mathbb{N}$ دپاره د (1) رابطه صدق وکی. ښکاره کوو چی د M سیټ د ټولو طبیعی عددونو دسیټ سره د استقراء د اکسیومی د شرایطو له مخی ، منطبق دی . پدی معنی چی:

$$(a+b)+1=(a+b)`=a+b`=a+(b+1) \ \rightarrow 1\in M$$

فرضوو چی $c\in M$ دی ، یعنی :

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

فلهذا :

$$(a+b)+c'=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'= a+(b+c)'= a+(b+c')$$

یعنی $c'\in M$. پدی ترتیب $M=\mathbb{N}$ او اتحادی قانون صدق کوی.

اوس نو کولای سو چی د طبیعی عددونو پر سیټ د "<" اړیکه تعریف او دهغه معلوم خاصیتونه په اثبات ورسوو.

تعریف ۴ ـ که د طبیعی عددونو د سیټ عنصرونه داسی ځای پر ځای سوی وی چی په لمړی ځای کی د یوه عدد ولاړ وی او د n هر عدد و ښی خواته د هغه تالی یعنی $n+1$ قرار ولری ، یعنی :

$$1,2,3,\ldots n,n+1,\ldots$$

ته د طبیعی عددونو لاړ (سلسله یا ترادف) sequence وایو.

۲ ـ د ریاضی د استقراء پرنسیپ Principe of mathematical induction

د ریاضی په مختلفو برخو کی په ډیر پراخ ډول د یو ډول ثبوت د متود څخه چی د ریاضی د استقراء د متود په نامه یادیږی، کار اخیستل کیږی. دا متود د استقراء د اکسیومی پر بنسټ چی په تیره برخه کی ورسره معرفی سوو ، ولاړ دی . د ریاضی د قضیی د ثبوت په وخت کی د ریاضی د استقراء د پرنسیب د مختلفو شکلو څخه استفاده کیږی . د استقراء د پرنسیب هر شکل د ریاضی د استقراء و متود ته منتسب کیږی.

دلته د ریاضی د استقراء د پرنسب د اساسی بڼی په ثبوت اکتفاء کوو.

قضیه ۱ ـ (د ریاضی د استقراء د پرنسیب اساسی بڼه)

که د $T(n)$ یوه قضیه د طبیعی عددونو دپاره ترتیب سوی وی ، پداسی ډول چی داقضیه د یوه دپاره صدق وکی یعنی $T(1)$ یو رشتیا بیان وی او که دفرضیی څخه چی نوموړی قضیه د ټولو طبیعی عددونو $k \geq 1$ صدق کوی (یعنی $T(k)$) ، استنباط کړای سو چی قضیه د طبیعی عدد $k+1$ دپاره هم صدق کوی (یعنی $T(k+1)$) ، نو په نتیجه کی قضیه د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی .

ثبوت ـ فرضاً M د ټولو طبیعی عددونو سیټ دی چی دهغه د هر عنصر دپاره د T قضیه صدق کوی .

$$M = \{ n \in \mathbb{N} / T(n) \}$$

د قضیی د شرط له مخی $1 \in M$ دی او که $k \in M$ وی ، نو $k+1=k' \in M$. فلهذا د استقراء د اکسیومی پر اساس $\mathbb{N} = M$ سره کیږی ، یعنی د $T(n)$ قضیه د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی .

قضیه ۲ ـ (د کوچنی ترین عدد پرنسیب)

د طبیعی عددونو هر غیر خالی سب سیټ د کوچنی ترین عدد درلودونکی دی .

قضیه ۳ ـ

که د $T(n)$ یوه قضیه د طبیعی عددونو دپاره داسی ترتیب سوی چی د یوه n_0 طبیعی عدد دپاره صدق وکی (یعنی $T(n_0)$ یو رشتیا بیان دی) ، او ددی فرضیی چی قضیه د طبیعی عدد $k \geq n_0$ صدق کوی ، استنباط کړای سو چی قضیه د طبیعی عدد $k+1$ دپاره هم صدق کوی ، پس د $T(n)$ قضیه د هر طبیعی عدد $n \geq n_0$ دپاره صدق کوی .

قضیه ۴ ـ

که د $T(n)$ یوه قضیه د طبیعی عددونو دپاره داسی ترتیب سوی چی د یوه n_0 طبیعی عدد دپاره صدق وکی (یعنی $T(n_0)$ یو رشتیا بیان دی) ، او ددی فرضیی څخه چی قضیه د ټولو طبیعی عددونو $n_0 \leq l < k$ صدق کوی ، استنباط کړای سو چی قضیه د طبیعی عدد k دپاره هم صدق کوی ، پس د $T(n)$ قضیه د هر طبیعی عدد $n \geq n_0$ دپاره صدق کوی .

د طبیعی عددونو دپاره ترتیب سوی قضیبی چی د ریاضی د استقراء په متود په ثبوت رسیږی ، مختلفی بڼی لری. د هغوی د ثبوت لپاره ، قضیبی د پورتنیو ۱ تر ۴ قضیو و شکل ته عیاروو .

د ریاضی د استقراء د اساسی متود څخه په لاندی ډول استفاده کوو:

۱ـ د قضیبی رشتیاوالی د $n=1$ دپاره امتحانوو.

دا نقطه د استقراء د قاعدی په نامه یادیږی .

۲ ـ فرضوو چی قضیه د طبیعی عدد $n=k\geq 1$ دپاره صدق کوی . ددی فرضیی څخه نتیجه گیری کوو چی قضیه د $k+1$ طبیعی عدد دپاره هم صدق کوی .

دا نقطه د استقراء د گام په نامه یادیږی .

۳ ـ د قضیه ۱ پر اساس استنباطیږی چی قضیه د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی .

بیلگه ۱ ـ

ثابته کی چی :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \ldots (1)$$

ثبوت ـ

که $n=1$ وی ، نو

$$1^2=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1 \qquad \ldots(2)$$

دو همه افاده حقیقت لری .

فرضوو چی د (1) مساوات د $n=k$ دپاره صدق کوی . یعنی :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \ldots(3)$$

اوس نو باید ثابته کړو چی د (1) مساوات د $n=k+1$ دپاره هم صدق کوی ، پدی معنی چی لاند نی اړیکه باید په ثبوت ورسوو:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \ldots(4)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k+1}{6}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$$

$$=\frac{k+1}{6}\left[2k^2+k+6k+6\right]$$

$$=\frac{k+1}{6}\left[2k^2+7k+6\right]$$

$$=\frac{k+1}{6}\left[2k^2+4k+3k+6\right]$$

$$=\frac{k+1}{6}\left[2k(k+2)+3(k+2)\right]=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

پدی ډول (4) مساوات په ثبوت ورسیدی.

د ریاضی د استقراء د پرنسیب پر بنسټ استدلال کولای سو چی د (1) مساوات د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی .

بیلګه ۲ ـ د ټولو طبیعی عددونو $n\in\mathbb{N}$ د پاره صدق کوی چی n^3+2n پر 3 د ویش وړ دی .

دویش د وړتیا تعریف او د هغه خصوصیتونه به ددی کتاب په دوهم ټوک کی وڅیړو.
دلته به پدی اکتفاء وکړو چی n^3+2n هغه وخت پر 3 دویش وړدی چی داسی طبیعی عدد $m\in\mathbb{N}$ وجود ولری چی :

$n^3+2n=3m$ وی.

$T(n): (\forall n\in\mathbb{N})(\exists\, m\in\mathbb{N})(3 \vdots (n^3+2n))$

اوس به نو راسو زموږ د ادعا و ثبوت ته :

که $n=1$ وی ، نو $1^3+2.1=3=1.3$ مساوات ، یعنی $T(1)$حقیقت لری . پدی حالت کی $m=1$ سره کیږی.

فرضوو چی د $n=k$ دپاره زموږ ادعا $T(k)$صدق کوی ، یعنی داسی طبیعی عدد $p\in\mathbb{N}$ وجودلری چی $k^3+2k=3p$ سره کیږی . باید په اثبات ورسو چی زموږ ادعا د $n=k+1$ دپاره یعنی $T(k+1)$هم صدق کوی :

$(k+1)^3+2(k+1)=\underline{k^3}+3k^2+3k+1+\underline{2k}+2=$
$\underline{k^3+2k}+3k^2+3k+3=3p+3k^2+3k+3$

$$=3(p+k^2+k+1)$$

پورتنی مساوات وایی چی د مساوات کینه خوا پر 3 د ویش وړ ده . (زموږ د تعریف په پرتله په پورتنی مساوات کی m مساوی په څو سره کیږی ؟) .

د دریاضی د استقراء د پرنسیب پر بنسټ استدلال کولای سو چی د T(n) د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی .

§III . گروپ Group- رینګ (کړی) Ring- فیلډ Field(ډګر).
د ښوونځیو په ریاضیاتو او همدا ډول په معاصرو ریاضیاتو کی اکثرآ هغه الجبرونه مطالعه کیږی چی د یوی یا دوو دوه ئیزو عملیو درلوونکی وی . پدی ډول په ښونځیو کی د طبیعی عددونو ، د حقیقی عددونود جمع او ضرب د خاصیتو زده کړه او یا په مستوی کی د موازی تغییر مکان د عملیی دمسلسل اجراء څیرنه صورت نیسی. د توابعو په انالایز کی Functional Analysis پر تابع ګانو باندی د عملیو خاصیتونه تر مطالعی لاندی نیول کیږی. ددی ډول الجبرو د نورو بیلګو سره به د الجبر او عددونو د تیوری په کورس کی څوڅو ځله مخامخ سو.

تعریف ۱ ـ که د G سیټ راکړه سوی وی او ,,*'' د G په سیټ کی یوه عملیه وی ،نو د e∈G عنصر نظر د ,,*'' و عملیی ته د خنثی عنصر neutral په نامه یادیږی که:

$(\forall x\in G)(x*e=e*x=x)$

بیلګی ۱-

الف ـ د ناطقو عددونو په سیټ $\mathbb{Q}$ کی د یو 1 عدد نظر د ضرب وعملیی ته یو خنثی عنصر دی .

ب ـ د تامو عددونو $\mathbb{Z}$ په سیټ کی د صفر 0 عدد نظر د جمع و عملیی ته خنثی عنصر دی .

ج ـ خالی سیټ $\emptyset$ نظر د سیټونو د اتحاد وعملیی ته خنثی عنصر دی .

د ـ د عینیت مپینګ Identical mapping نظر د مپینګو د ترکیب و عملیی ته خنثی عنصر دی.

تعریف ۲ ـ که د G سیټ راکړه سوی وی او „*“ د G په سیټ کی یوه عملیه وی ،نو د $a\in G$عنصر نظر و „*“ عملیی ته د $b\in G$ د عنصر د متضاد عنصر په نامه یادیږی که : $a*b=b*a=e$

بیلګی ۲ ـ

الف ـ د تامو عددونو $\mathbb{Z}$ په سیټ کی د 2 د عدد متضاد عنصر ، نظر د جمع و عملیی ته ، د -2 عدد دی.

ب ـ د ناطقو عددونو په سیټ $\mathbb{Q}$ کی د $\frac{2}{3}$ د عدد متضاد عنصر ، نظر د ضرب و عملیی ته ، د $\frac{3}{2}$ عدد دی.

پورتنی دوو تعریفو موږ ته د اساسی الجبرو د تعریف لاره پرانیستله.

تعریف ۳ ـ د G سیټ د دوه ئیزی عملیی „*“ سره د ګروپ Group په نامه یادیږی ، که :

۱ـ د „*“ عملیه اتحادی خاصیت ولری ، یعنی :

$(\forall x,y,z \in G)(x*(y*z)=(x*y)*z)$

۲ـ د G په سیټ کی نظر و راکړه سوی دوه ئیزی عملیی „*“ ته خنثی عنصر وجود ولری :

$(\exists e\in G)(\forall x\in G)(x*e=e*x=x)$

۳ ـ د G د سیټ و هر عنصر ته ، نظر و „*“ عملیی ته ، د G په سیټ کی متضاد عنصر وجود ولری . یعنی :

$(\forall x\in G)(\exists y\in G)(x*y=y*x=e)$

که زموږ په نظر کی دوه ئیزه عملیه د “+„ د جمعی عملیه وی ، نو ګروپ د جمعی ګروپ additive group په نامه یادیږی.اوکه زموږ په نظر کی دوه ئیزه عملیه د “ . „ د ضرب عملیه وی ، نو ګروپ د ضربی ګروپ multiplicative group په نامه یادیږی .

بیلګه ۳ ـ د تامو عددونوسیټ $\mathbb{Z}$ ، نظر د جمعی “+„ و عملیی ته ګروپ دی . خنثی عنصر یی صفر 0 او د هر عدد $a\in\mathbb{Z}$ متناظر عدد $a\in\mathbb{Z}$ - دی . په جمعی ګروپ

کی معمو لاً و متضاد عنصر نظر د جمعی و عملیی ته په ساده توگه متضاد عنصر ویل کیږی .

بیلگه ۴ ـ د مثبتو ناطقو عددونو سیټ $\mathbb{Q}_+$ نظر د ضرب و عملیی ته گروپ دی . دلته خنثی عنصر عبارت دی له یوه 1 څخه او د $a\in\mathbb{Q}_+$ و هر عنصر ته متناظر عنصر د $\frac{1}{a}\in\mathbb{Q}_+$ عدد دی.

په عین ترتیب په ضربی گروپ کی ،نظر د ضرب و عملیی ته ، متضاد عنصر ته ، معکوس عنصر وایو .

بیلگه ۵ ـ پر خپل مرکز باندی د دایری د ټولو دورانو سیټ ، یو ضربی گروپ دی . پداسی حال کی چی ددورانو ضرب عبارت دی د دورانو د پر له پسی اجراء (ترکیب) څخه .

قضیه ۱ـ په هر گروپ $<G,*>$ کی یوازی یو خنثی عنصر وجود لری . همدا ډول د هر عنصر دپاره یوازی یو متضاد عنصر وجود لری.

ثبوت ـ فرضوو چی د G گروپ دوه خنثی عنصرونه د e_1 او e_2 لری . پس د ټولو $x\in G$ د پاره لاندنی اړیکه صدق کوی.

$$e_1*x=x*e_1=x \wedge e_2*x=x*e_2=x$$

ددی ځایه : $e_1=e_2*e_1=e_2$ یعنی e_1 او e_2 په خپل منځ کی سره مساوی دی . خنثی عنصر به په e سره ښیوو.

اوس نو فرضوو چی :

$$x*y_1=y_1*x=e \wedge x*y_2=y_2*x=e$$

$$y_1=y_1*e=y_1*(x*y_2)=(y_1*x)*y_2=e*y_2=y_2$$

نو

د گروپ په هکله نور جزئیات به د گروپ د تیوری په اړوند څپرکی کی جلا وڅیړو.

بل مهم الجبر رینگ دی .

تعریف ۴ ـ د R سیټ د جمعی «+» او ضرب « . » د دوه ئیزو عملیو سره د رینگ Ring په نامه یادیږی که :

۱ـ $<R,+>$ گروپ وی.

۲ـ د جمع عملیه تبدیلی وی ، یعنی :

$$(\forall\, x,y \in R)\ (x+y = y+x)$$

۳ـ د ضرب عملیه اتحادی وی ، یعنی :

$$(\forall\, x,y,z \in R)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$$

۴ ـ د ضرب عملیه نظر د جمعی عملیی ته توزیعی وی . یعنی :

$$(\forall\, x,y,z \in R)\ (x \cdot (y+z))=x \cdot y + x \cdot z) \ \wedge\ ((y+z) \cdot x) = y \cdot x + z \cdot x)$$

بیلگه ۶ ـ د تامو عددونو سیټ $\mathbb{Z}$ نظر د جمع او ضرب و عملیو ته رینگ دی .

بیلگه ۷ ـ د حقیقی عددونو سیټ $\mathbb{R}$ نظر د جمع او ضرب و عملیو ته رینگ دی .

بیلگه ۸ ـ د $K=\{0\}$ سیټ هم رینگ دی چی د صفری رینگ null ring په نامه یادیږی .

وروسته به د رینگ د نورو بیلگو سره مخامخ سو.

په ریاضی کی تبدیلی رینگونه چی د صفر څخه خلاف عنصرونه یی نظر د ضرب و عملیی ته گروپ جوړوی ، ډیر مهم رول لوبوی او د فیلډ په نامه یادیږی.

تعریف ۵ ـ د F سیټ د جمع او ضرب دوه ئیزو عملیو سره د فیلډ Field په نامه یادیږی ، که F لږ تر لږه دوه عنصره ولری او لاندنی شرایط پر ځای کی :

۱ ـ $<F, +, .>$ رینگ وی .

۲ـ د ضرب عملیه تبدیلی وی و یعنی :

$$(\forall\, x, y \in F)\ (x \cdot y = y \cdot x)$$

۳ ـ نظر د ضرب و عملیی ته خنثی عنصر (واحد عنصر) ولری .

۴ ـ د صفر څخه خلاف د هرعنصر دپاره نظر د ضرب و عملیی ته متضاد عنصر (معکوس عنصر) وجود ولری .

بیلگه ۹ ـ د ټولو ناطقو عددونو سیټ $\mathbb{Q}$ نظر د جمع او ضرب عملیو ته فیلډ دی .

بیلگه ۱۰ ـ د ټولو حقیق عددونو $\mathbb{R}$ رینگ ، فیلډ دی .

بیاگه ۱۱ ـ د ټولو تام عددونو $\mathbb{Z}$ رینگ ، فیلډ ندی .

څرګنده ده چې رينګ او فيلډ د جمعي ګروپ ټول خصوصيات لري . البته د جمع او ضرب دوه ئيزوعمليو په اړوند نور په زړه پوري خاصيتونه هم لري چې وروسته به يې مطالعه کړو .

§IV . مرتب فيلډ ـ د حقيقي عددونو فيلډ .

د حقيقي عددونو د تيوري د جوړلو دپاره د رياضي په انلايز کې مختلفي تيوري ګانې څيړل کيږي. د بېلګې په تو ګه د دې دکيند Dedekind ، وايرشتراس Weierstraß او جورج کانتور G. Cantor نظريې د يادولو وړ دي. څنګه چې څرګنده ده د ټولو حقيقي عددونو سيټ فيلډ دی . طبعاً پوښتنه کيږي چې آيا امکان لري چې د حقيقي عددونو سيټ د يو الجبري ساختمان په څير تعريف کړو ؟ ددې پوښتنې جواب مثبت دی . موږ به يې دلته د جوړلو شيما طرح کړو.

تعريف ۱ ـ د F فيلډ د مرتب فيلډ په نامه ياديږي ، که د هغه عنصرونه د خطي ترتيب د اړيکې په ذريعه a>b (a لوی دی تر b) ترتيب سوي وي او لاندني شرايط پر ځای کړي :

1. $(\forall\ a, b, c \in F)\ (a>b \rightarrow a+c > b+c)$.

2. $(\forall\ a, b, c \in F)\ (a>b \wedge c>0 \rightarrow a.c>b.c\ )$.

په آسانی سره ثابتيد يلای سی چې د $\mathbb{Q}$ او $\mathbb{R}$ سيټونه مرتب فيلډونه دي.

د لوی والی د اړيکی « > » ډير خاصيتونه ، کوم چې د حقيقي عددونو د پاره ثابتيدلای سی ، امکان لري چې د هر مرتب فيلډ دپاره په اثبات ورسيږي . په خاص ډول لاندني خاصيتونه صدق کوي .

۱ ـ د Fد مرتب فيلډ عنصر a $(a\in F)$ د b د عنصر $(b\in F)$ څخه يوازی او يوازی هغه وخت لوی دی ، چې $a-b>0$ وی .يعنی :

۱- $(\forall\ a,b,\in F)\ (\ a>b \leftrightarrow a-b > 0)$

۲- $(\forall\ a, b, c \in F)\ (a+c >b+c \rightarrow a>b)$

۳- $(\forall\ a, b, c \in F)\ (a.\ c >b\ .\ c \rightarrow a>b)$

۴- $(\forall\ a, b, c\ , d \in F)\ (a >b\ \wedge c>d \rightarrow a +c >b + d)$

۵ ـ د F د مرتب فيلډ د ټولو مثبتو عنصرو (يعنی لوی تر صفر) d,c,b,a دپاره د a>b او c>d څخه استنتاج کيږی ac>bd دی .

$$(\forall\ a,b,c,d \in F)\ (a>0 \wedge\ b>0 \wedge\ c>0 \wedge\ d>0)$$

$$(a>b\ \wedge c>d \rightarrow a\ .\ c>b\ .\ d)$$

د بیلګی په توګه ۲ـ هم خاصیت په ثبوت رسوو.

فرضوو $a+c > b+c$ وی . د $c\in F$- عنصر په نظر کی نیسو . نوموړی عنصر د غیر مساوات و دواړو خواو ته اضافه کوو. د مرتب فیلډ د تعریف د لمړی شرط پر بنسټ به ولرو :

$$(a+c)+(-c) > (b+c)+ (-c)$$

$$a+(c+(-c)) > b+ (c+ (-c))$$

$$a > b$$

په مرتب فیلډ کی کولای سو چی د $a \in F$ د عنصر د مطلقه قیمت مفهوم تعریف کړو.

تعریف ۲ ـ د $a \in F$ د عنصر مطلقه قیمت Modul عبارت دی د a او یا $-a$ د عنصر څخه چی لوی او یا مساوی په صفر سره وی .

د a مطلقه قیمت په $|a|$ سره ښیو. اوس نو ددی امکان سته چی د مطلقه قیمت ډیر خصوصیتونه په ثبوت ورسوو. همدا ډول هر مرتب فیلډ د حقیقی عددونو فیلډ ندی . ددی دپاره چی د حقیقی عددونو فیلډ وی نو باید لاندنی شرطونه هم پر ځای کی .

د ارشیمیدس اکسیومه ـ د F د مرتب فیلډ هر عنصر $a > 0$ او b دپاره داسی طبیعی عدد $n\in \mathbb{N}$ وجود لری ، چی $na > b$ (دلته $na=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{-ځله}}$) دی .

$$(\forall a,b\in F)(a>0)(\exists\ n\in \mathbb{N}\ )\ (na > b)$$

تعریف ۳ ـ د F مرتب فیلډ د ارشیمیدس Archimedes د مرتب فیلډ په نامه یادیږی ، که په نوموړی فیلډ کی د ارشیمیدس اکسیومه صدق وکی .

په اسانی سره ثابتیدلای سی چی د ناطقو عددونو فیلډ $\mathbb{Q}$ د ارشیمیدس مرتب فیلډ دی .

تعریف ۴ ـ د F د مرتب فیلډ د $a_1,a_2,\ldots,a_m\ldots$ عنصرو تصاعد د اصلی Fundamental Progression تصاعد په نامه یادیږی ، که د هر $\varepsilon\in F$ ، $\varepsilon>0$ داسی طبیعی عدد $n_0\in \mathbb{N}$ وجود ولری چی د هر $n_1 > n_0$ او $n_2 > n_0$ دپاره صدق وکی $|a_{n1}-a_{n2}| < \varepsilon$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - Fundamental $\overset{df}{\equiv}$ $(\forall\, \varepsilon \in F;\ \varepsilon>0)\ (\exists\, n_0 \in \mathbb{N})((\forall\, n_1,n_2 \in \mathbb{N})$

$(n_1 > n_0 \wedge n_2 > n_0) \rightarrow (|a_{n1}-a_{n2}| < \varepsilon))$

تعریف ۵ ـ د F مرتب فیلډ د کامل complete فیلډ په نامه هغه وخت یادوو ، که د F د عنصرو د هر اصلی تصاعد لیمیټ د F په فیلډ کی شامل وی .

$$(F\text{- Complete}) \overset{df}{\equiv} (\forall\, \{a_n\}_{n=0}^{\infty},\ a_n \in F)(\lim a_n \in F)$$

د یادولو وړ ده چی د $\mathbb{Q}$ فیلډ کامل فیلډ ندی . ځکه چی و $\sqrt{2}$ ته نژدی کیدونکی لسیز تصاعد یو اصلی تصاعد دی ،مګر $\sqrt{2}$ د $\mathbb{Q}$ په فیلډ کی شامل ندی .

تعریف ۶ ـ کامل او ارشیمدیسی فیلډ د حقیقی عددونو د فیلډ په نامه یادوو .

پورتنی تعریف یوازی او یوازی هغه وخت په اصطلاح د «موجودیت» حق لری چی دغه ډول فیلډ جوړ کړای سو. معلومه ده چی د حقیقی عددونو د فیلډ د جوړیدو په نتیجه کی ، په هره هغه طریقه چی دمخه مو ذکر کړی (د دیدیکیند ، کانتور او وایير شتراس طریقی) ، کامل ارشیمیدسی فیلډ لاسته راځی.

د تعریف ۶ پر بنسټ کولای سو چی د حقیقی عددونو ټوله معلوم خصوصیتونه ثابت کړو .

V§ . د ګروپو ، رینګو او فیلډو ایزومورفیزم .

د ګروپ، رینګ او فیلډ تصوری یا خیالی (ابسترکټ Abstract) مفهومونه موږ ته ددی امکان برابروی چی د سیټو ځنی عمومی خاصیتونه او هغه الجبری عملیی چی پر هغوی باندی تعریف سویدی ، په عین حال کی تر مطالعی لاندی ونیسو . همدارازپه ګروپو، رینګو او فیلډو کی ددی ډول عمومی خاصیتو مو جودیت چی یوه بنه لری، پدی معنی نده چی د هغو د جوړلو طریقه هم یو شان وی.

د بیلګی په ډول د تام عددونو د رینګ څخه د ناطقو عددونو ورینګ ته د تیریدو دپاره و یو «وسیلی» ته ضرورت لرو ، چی د هغه په مرسته وکولای سو چی د تامو عددونو د رینګ پر بنسټ د ناطقو عددونو رینګ جوړ کړو. دا ډول وسیله د ګروپو ، رینګو او فیلډو دپاره ایزومورفیزم Isomorphism دی.

نوټ ـ د ایزومورفیزم کلمه په زړه یونانی کی د «یوه بنه، هم شکله» په معنی دی .
آیزوس ίσός «عین، هم» مورفی μηφρό بنه .

تعریف ۱ ـ د P_1 او P_2 فیلډونه د جمع او ضرب د عملیو سره چې په یو ډول سره ښودل سوي دي ، آیزوموف Isomorph دي ، که داسې بایجکتیف مپینګ $f:P_1 \rightarrow P_2$ وجود ولري چې :

$$(\forall\ x,y \in P_1)\ (\ f(x.y) = f(x)\ .\ f(y)\ ) \qquad \ldots (1)$$

$$(\forall\ x,y \in P_1)\ (\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ ) \qquad \ldots (2)$$

دلته د f میپینګ د آیزومورفیزم په نامه یادیږي .

په پورتني تعریف کې که د فیلډ کلمه د رینګ سره عوض کړو ، نو د رینګ د آیزومورفیزم به مو تعریف کړی وي .

متوجه اوسی چې د بیلګې په توګه د ضرب عملیه د (1) مساوات په کینه خوا کې د P_1 په فیلډ کې صورت نیسي او په ښې خوا کې د P_2 په فیلډ کې صورت نیسي.

تعریف ۲ ـ د $<G, *>$ او $<M, °>$ ګروپونه ، پر هغوی باندې راکړه سوي عملیو «*» او «°» سره هغه وخت آیزومورف دي که د $f : G \rightarrow M$ بایجکتیف میپینګ داسې وجود ولري چې :

$$(\forall x,y \in G)\ (f(x*y) = f(x) \circ f(y)\ ) \qquad \ldots .(3)$$

بیلګه ۱ ـ د ټولو مثبتو حقیقي عددونو ګروپ $\mathbb{R}_+$ نظر د ضرب و عملیې ته د حقیقي عددونو $\mathbb{R}$ د ګروپ سره نظر د جمعې و عملیې ته آیزومورف دي .

په رشتیا هم دلته د بایجکتیف د مپینګ وظیفه د $\mathbb{R}_+$ او $\mathbb{R}$ په منځ کې د لوګاریتم تابع $lg: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ، د لسو پر اساس ، اجراء کوي . یعنې :

(3) اړیکه د لاندني مساوات پر بنسټ صدق کوي : $lg(x.y)=lgx+lgy$

بیلګه ۲ ـ د تامو عددونو جمعي ګروپ د ټولو هغو تامو عددونو د ګروپ سره چې پر 3 دویش وړ دي ، آیزومورف دي ، ځکه چې پر دواړو ګروپو د جمعي عملیه راکړه سویده او میپینګ مو عبارت دي له :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \{3k\ /\ k \in \mathbb{Z}\ \}$$

چې د $f(n)=3n$ د فارمول پذریعه ارائه کیږي. په آسانی ثابتیدلای سی چې نوموړی میپینګ بایجکتیف دي . علاوه پر دي :

$$f(n_1+n_2)=f(n_1)+f(n_2)$$

یعنې د آیزومورفیزم شرط پر ځای دی .

VI§ . د مختلطو عددونو Complex Numbers فیلډ .

په ریاضی او طبیعی علوموکی حقیقی عددونه ډیر لوی رول لوبوی . همداډول ځنی مسئلی وجود لری چی د هغوی د حل لپاره حقیقی عددونه کافی ندی. د بیلګی په ډول د حقیقی عددونو په فیلډ کی د $x^2+1=0$ معادله جذر نلری ، ځکه چی داسی حقیقی عدد وجود نلری چی مربع یی د منفی یوه سره مساوی سی.

همداډول پوهیږو چی پر یوه مستقیمه کرښه د هر نقطی په مقابل کی یو حقیقی عدد ایښودلای سو ، او برعکس د مستقیمی کرښی هره نقطه د یوه حقیقی عدد جواب ورکونکی ده . په عین حال کی ضرور دی چی د مستوی د هری نقطی او عددونو ترمنځ یوه بایجکتیف اړیکه ټینګه کړو.

مسئله په لاندی توګه طرح کوو:

د حقیقی عددونو فیلډ $\mathbb{R}$ ته باید داسی وده ورکړو چی ورسته له انکشافه په لاسته راغلی نوی فیلډ کی ، مخکنی مطرح سوو سوالو ته مثبت جواب ورکړای سو.

فرضاً $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ د حقیقی عددونو د ټولو مرتبو جوړو سیټ وی . یعنی :

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b) \,/\, a\in\mathbb{R} \ \wedge\ b\in\mathbb{R}\}$$

څرګنده ده چی د $\mathbb{C}$ د سیټ عنصرونه $z_1=(a,b)$ او $z_2=(c,d)$ یوازی او یوازی هغه وخت سره مساوی دی چی $a=c$ او $b=d$ سره وی . اوس نو د $\mathbb{C}$ په سیټ کی د جمع او ضرب عملیی په لاندی ډول تعریفوو.

فرضاً $z_1=(a,b)$ او $z_2=(c,d)$ وی :

$$z_1+z_2 \overset{\mathbf{df}}{=} (a+c,b+d)$$

$$z_1 \,.\, z_2 \overset{\mathbf{df}}{=} (a.c-b.d\ ,\ a.d+b.c) \qquad .....(*)$$

قضیه ۱ ـ د $\mathbb{C}$ سیټ د جمع او ضرب د علیی سره چی پورته د (*) په ذریعه تعریف سول ، فیلډ دی .

ثبوت ـ ښکاره ده چی د $\mathbb{C}$ په سیټ کی تر دوو عنصرو اضافه وجود لری . د $z_0=(0,0)$ او $z_1=(1,0)$ د صفر او یو د عنصرو رول لوبوی . پدی معنی چی نظر د جمع او ضرب و عملیی ته د خنثی عنصرو وظیفه لری . په مستقیمه توګه د فیلډ ټوله اکسیومی د $\mathbb{C}$ په سیټ کی ثبوتولای سو. د بیلګی په توګه ثابتوو چی د ضرب عملیه نظر د جمع و عملیی ته توزیعی ده .

فرضاً $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)$ او $z_3=(k,l)$ وی ، نو :

$z_1(z_2+z_3)=z1((c,d)+(k,l))=(a,b)\ (c+k, d+l)=(a(c+k)-b(d+l),a(d+l)+b(c+k))=$

$(ac+ak-bd-bl,ad+al+bc+bk)$

او

$z_1z_2+z_1z_3= (ac-bd, ad+bc)+(ak-bl,al+bk)=(ac-bd+ak-bl,ad+bc+al+bk)$

یعنی : $z_1(z_2+z_3)= z_1z_2+z_1z_3$

همدا ډول ښیو چی د $z_1.z= z_2$ معادله حل لری ، البته پداسی حال کی چی $z_1=(a,b)\neq(0,0)$ وی .

فرضاً $z=(x,y)$ وی ، نو :

$(a,b)\ .\ (x,y)=(c,d)$

$(ax-by, ay+bx)=(c,d)$

او

ددی ځایه :

$$\begin{cases} ax-by=c \\ bx+ay=d \end{cases} \quad \text{او یا} \quad \begin{cases} ax-by=c \\ ay+bx=d \end{cases}$$

نوموړی د معادلو سیستم د یوازنی حل درلودونکی دی :

$$y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$$

پدی ډول قضیه ثبوت سول.

تعریف ۱ـ د $\mathbb{C}$ فیلډ د مختلطو عددونو د فیلډ په نامه یادیږی او دنوموړی سیټ عنصر د مختلط عدد Complex Number په نامه یادیږی .

فرضوو چی $\mathbb{R}'=\{(a,0)\ /\ a\in\mathbb{R}\ \}$. ښکاره ده چی $\mathbb{R}'\subset\mathbb{C}$ او د $\mathbb{R}'$ پر عنصرو د جمع او ضرب د عملیی د اجراء په نتیجه کی د $\mathbb{R}'$ د سیټ عنصر لاسته راځی .

قضیه ۲ـ د حقیقی عددونو فیلډ $\mathbb{R}$ د $\mathbb{R}'$ د سیټ سره چی پر هغه باندی د د مختلطو عددونو جمع او ضرب تعریف سوی وی ، آیزومورف دی .

ثبوت ـ د $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ میپینګ د $f(a)=(a,0)$ د فارمول پذریعه تعریفوو. په آسانی سره لیدل کیږی چی د f میپینګ بایجکتیف دی ، علاوه پر دی :

$$f(a \,.\, b) = (a \,.b \,,\, 0) = (a,\, 0) \,.\, (b,\, 0) = f(a) \,.\, f(b) \,;$$

$$f(a+b)= (a+b \,,\, 0)=(a,0) + (b,0) = f(a) + f (b).$$

یعنی f آیزومورفیزم دی .

پورتنی قضیه موږ ته دا اجازه راکوی چی حقیقی عدد $a\in\mathbb{R}$ د مختلط عدد سره $\mathbb{C} \ni (a,0)$ سره منطبق کړو ، یعنی : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

اوس به نو راسو د $(0,1)$ عدد به وګورو ، لیدل کیږی چی نوموړی عدد د $z^2+(1,0)=(0,0)$ د معادلی حل دی . په رشتیا هم : $(0,1) \,.\, (0,1) = (0,0)$ او $(-1,0) \,.\, (0,1) = (0,0)$ سره کیږی .

د قبول سوی قرار داد له مخی $i=(0,1)$ سره دی . پدی ډول مو د حقیقی عددونو $\mathbb{R}$ د فیلډ پر مختللی فیلډ داسی جوړ کړی چی په هغه کی د $x^2+1=0$ معادله هم حل لری . ددی فیلډ د کوچنیترین والی او تر آیزومورفیزم پوری یووالی په ثبوت رسیدلای سی .

§VII. د مختلطو عددونو الجبری څرګندونه .

فرضوو چی $z=(a,b)$ یو کیفی مختلط عدد دی ، نو :

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b) = (a,0) + (b,0) \,.\, (0,1)$$

تر هغه ځایه چی د $(a,0)$ او $(b,0)$ عددونه د a او b حقیقی عددونو سره منطبق کولای سو ، نو :

$$z=a+bi$$

د مختلط عدد پورتنی څرګندونه د مختلط عدد د الجبری څرګندونی په نامه یادیږی .په پورتنی څرګندونه کی د a عدد د z د مختلط عدد د حقیقی برخی ، د bi عدد یی د موهومی برخی په نامه او د b عدد د د موهومی برخی د ضریب په نامه یادیږی .

د $z_1=(a,b)$ او $z_2=(c,d)$ د مختلطو عددونو د مساوی والی د تعریف څخه استنباط کیږی چی دوی په خپل منځ کی یوازی او یوازی هغه وخت مساوی دی ، یعنی $z_1=z_2$ ، چی د z_1 د موهومی برخی ضریب د z_2 د موهومی برخی د ضریب سره مساوی وی او د z_1 حقیقی برخه د z_2 د حقیقی برخی سره مساوی وی . په آسانی سره یی ازمویلای سو چی د مختلطو عددونو جمع،تفریق، ضرب او تقسیم په الجبری څرګندونه کی د لاندنی ډیری درلودونکی دی :

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi) - (c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$(a+bi) . (c+di)=(ac - bd)+(ad+bc)i$

که $c+di \neq 0$ وی ، نو :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ca+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

تعریف ۱ ـ د $a+bi$ او د $a-bi$ مختلط عددونه د یو او بل د مزدوج (عربی متوافق) conjugate په نامه سره یادیږی .

د مختلط عدد z مزدوج په $\overline{z}$ سره ښیو . د بیلګی په ډول د د مختلط عدد $2+i$ مزدوج د $2-i$ عدد دی .

د مزدوجو عددونو په هکله لاندنی خاصیتونه صدق کوی :

$$(\forall z \in \mathbb{C})(z+\overline{z} \in \mathbb{R} \wedge z.\overline{z} \in \mathbb{R}); \qquad \ldots(1)$$

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})(\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2); \qquad \ldots(2)$$

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})(\overline{z_1.z_2} = \overline{z}_1.\overline{z}_2); \qquad \ldots (3)$$

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\left(z_2 \neq 0 \rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right) \qquad \ldots.(4)$$

د بیلګی په ډول(3) خاصیت ثابتوو.فرضوو چی $z_1 = a+bi$ او $z_2 = c+di$ سره وی ، نو :

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$
$$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$\overline{z_1.z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$
$$\overline{z_1}.\overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

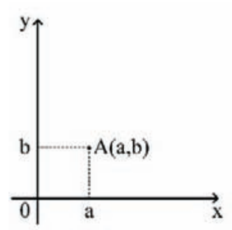
همداډول کولای سی چی پاتی خاصیتونه (1),(2) او (4) د تمرین په څیر په اثبات ورسوی.

§VIII. د مختلطو عددونو هند سی څرګندونه .
مختلط عددونه د لمړی ځل دپاره په ۱۶ پیړی کی د ایټالوی ریاضی پوه رافایل بومبلی Rafael Bombelli له خوا تشریح سول. د ډیرو کلونو په اوږدو کی اکثره ریاضی پوهانو مختلط عددونه یو خیالی څیز تصور کاوه . له همدی جهته دا عددونه د موهومی عددونو په نامه هم یادیږی.

اصلی ستونځه پدی کی وه چی څه ډول مختلط عددونه په عینی ژوند کی څرګند کی . بلاخره په نولسمه پیړی کی یی د مختلطو عددونو هند سی څرګندونه پیدا کړه . ددی څرګندونی سره جوخت د دمختلطو عددونو «د موجودیت د حق» مسئله هم یو طرفه سوه .

په اوسنی عصر کی د مختلطوعددونو څخه په ریاضی کی په پراخه توګه کار اخیستل کیږی . دلته به دمختلطو عددونو د دوو مختلفو تعبیرو څخه یادونه وکړو.

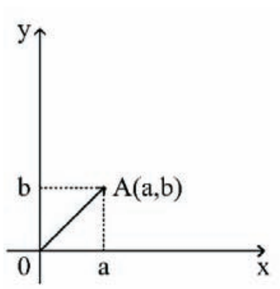
په مستوی کی د کارتیزین د وضعیه کمیتو سیستم (وروسته به یی یوازی د کارتیزین سیستم په نامه یادوو) Coordinate System په نظرکی نیسو. پدی سیستم کی د a+bi مختلط عدد د A(a,b) د نقطی د ترسیم سره داسی تړو چی د a عدد پر افقی محور باندی او د b عدد پر عمودی محور باندی پروت دی . پدی ترتیب به د مختلطو عددونو او د مستوی پر مخ د نقطو په منځ کی یو بایجکتیف میپینګ تینګ کړو. څرنګه چی د مختلطو عددونو یوازی حقیقی برخه د Ox پر محور پراته دی نو ځکه دغه محور د حقیقی محور په نامه یادیږی. د Oy پر محور یوازی موهومی عددونه پراته دی ، ځکه نو دا محور د موهومی محور په نامه یادیږی.



ش ۳۰

د مختلطو عددونو پورتنی تعبیر په ساده گی سره هغو سوالو ته جواب ورکولای سی ، کوم چی د مختلطو عددونو د فیلډ د جوړولو په وخت کی ور سره مخامخ کیږو ، مگر د جمع ،تفریق، ضرب او تقسیم د عملیو د اجراء دپاره د هندسی څرگندونی څخه کار نسو اخیستلای.

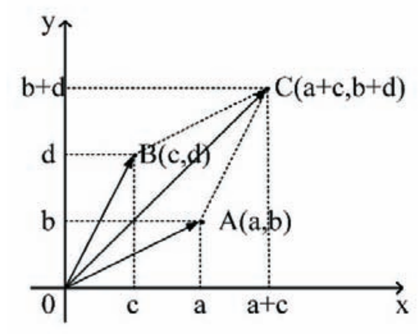
بیاهم فرضوو چی په مستوی کی د Oxy کارتیزین سیستم راکړه سوی وی . د هر مختلط عدد a+bi په مقابل کی د A د نقطی ، چی مختصات (کورډینات) یی (a,b) وی، وکتوری وړانگه $\overrightarrow{OA}$ ایږدو. پدی ډول په مستوی کی د ټولو وکتوری وړانگو او مختلطو عددونو د سیټ ترمنځ یو بایجکتیف میپینگ ټینگیږی . ۳۱ شکل وگوری.



ش۳۱

پدی ډول څرگندونه کی د مختلطو عددونو د جمع عملیه د وکتورو په جمع باندی اوړی . یعنی د مختلطو عددونو جمع په مستوی کی دوکتورو د جمع سره ورته والی لری.

په رشتیاهم ، د بیلگی په توگه د $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ د مختلطو عددونو دجمع لاسته راوړنه $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$ ده ، چی د کارتیزین په سیستم کی یې داسی ښودلای سو (۳۲ شکل وگوری):



ش ۳۲

په شکل کی په آسانی سره لیدلای سو چی د OBCA شکل یوه متوازی الاضلاع او $\overrightarrow{OC}$ یې قطر دی ، پداسی حال کی چی هغه د $\overrightarrow{OA}$ او $\overrightarrow{OB}$ د وکټورود جمع په نتیجه کی لاسته راغلی دی . په هندسی څرگندونه کی د مختلطو عددونو ضرب نظر د هغوی و جمع ته مغلق دی . دلته باید ددو وکټورو د ضرب په نتیجه کی بیرته یو وکټور لاسته ته راسی. د وکټورو د ضرب په هکله به په بل ځپرکی وړغیږو. د مختلطو عددونو د تفریق او ضرب دپاره و نورو وسیلو ته اړتیا لرو ، نو ځکه ښه به داوی چی د مختلطو عددونو ضرب په مثلثاتی څرگندونه کی وگورو.

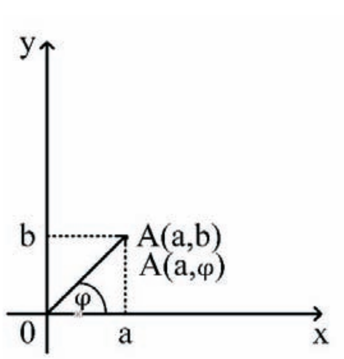
§IX . د مختلطو عددونو مثلثاتی څرگندونه .

د مختلطو عددونو د مثلثاتی څرگندونی دپاره په مستوی کی علاوه پرکارتیزین سیستم و قطبی سیستم Polar System ته هم ضرورت لرو.

په مستوی کی د وضعیه کمیتو سیستم (کارتیزین سیستم) ددو یو پر بل عمود محورو Ox او Oy څخه تشکیلیږی ، د هری نقطی موقعیت نظر د Ox او Oy ومحورو ته تعینیږی .

قطبی سیستم هم د وضعیه کمیتو سیستم دی ،خو په دغه سیستم کی د مستوی د هری نقطی موقعیت نظر و ټاکلی نقطی ته او د ټاکلی مسیر سره د زاویی په ذریعه تعینیږی. ټاکلی نقطه د قطب په نامه او ټاکلی مسیر د محور په نامه یادیږی.

زموږ د موخې دپاره به دواړه سیستمونه (کارتیزین او قطبی سیستم) یو پر بل باندی داسی منطبق کړو چی د قطبی سیستم قطب د کارتیزین د سیستم په مبداء کی پروت وی او د قطبی سیستم محور د کارتیزین د سیستم د Ox د محور سره منطبق وی. لاندنی شکل د A(a,b) د نقطی وضعیه کمیتونه نظر و یاد شوی سیستمو ته ښکاره کوی.



ش ۳۳

د بیلګی په توګه د B(3, 45°) نقطه رسم کړی او وګوری چی د کارتیزین په سیستم کی ددی نقطی وضعیه کمیتونه څودی؟

اوس به نو راسو د a+bi مختلط عدد به زموږ په سیستم کی وګورو . په کارتیزین سیستم کی ددی عدد جواب ورکونکی د $\overrightarrow{OA}$ وکتوری وړانګه او وضعیه کمیتونه یی (a,b)دی.د نوموړی وکتوری وړانګی وضعیه کمیتونه نظر و قطبی سیستم ته ارائه کوو ، یعنی a=ρ cosφ او b=ρ sinφ ، پداسی حال کی چی ρ د وکتوری وړانګی اوږدوالی او φ د A د نقطی قطبی زاویه ده .

ددی ځایه :

$$z=a+bi=\rho\ (\cos\varphi+i\sin\varphi)\ \ldots..(1)$$

د (1) اړیکه د مختلط عدد z د مثلثاتی (قطبی) څرګندونی په نامه یادیږی . د وکتوری وړانګی اوږدوالی ρ د مختلط عدد z د مطلقه قیمت (مودول Modul) په نامه یادیږی ، چی په |z| سره یی ښیو. φ د نوموړی عدد د ارګومینت Argument په نامه یادیږی ، چی په argz سره ښودل کیږی.

د (1) اړیکی څخه لیدل کیږی چی :

$$\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

د φ زاویه د لاندنی فارمولو پذریعه ټاکلای سو:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho}\qquad;\ \sin\varphi=\frac{b}{\rho}$$

د پورتنی فارمولو پذریعه نه سو کولای چی د φ ارگومینت د 2π په تفاوت په یوازنی ډول وټاکو. ځکه چی مثلثاتی تابع گانی متناوبی (پېراو لرونکی) تابع گانی دی . نو پدی حساب د (1) د اړیکی پر ځای داسی هم لیکلای سو:

$z=a+bi=\rho(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi))$

په آسانی سره پوهیدلای سو چی دوه مختلط عددونه په مثلثاتی څرگندونه کی یوازی او یوازی هغه وخت مساوی دی چی د هغوی مطلقه قیمتونه یو دبله سره مساوی او ارگومنټونه یی د $2k\pi$ په اندازه تفاوت ولری.

زده کونکی کولای سی چی پورتنی واقعیت د تمرین په څیر په ثبوت ورسوی .

په اکثره حالتو کی چی مختلط عدد په مثلثاتی څرگندونه کی ولیکل سی ، نو ارگومینټ یی د صفر او 2π په منځ کی ، یعنی $0<\varphi<2\pi$ ، وی. د φ د ارگومینټ د ټاکلو دپاره به ښه داوی چی د مختلط عدد وکټوری وړانگه رسم سی .

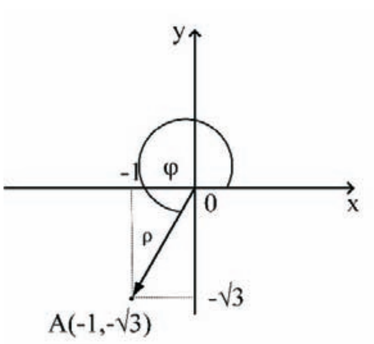
بیلگه -

د $z=-1-\sqrt{3}i$ مختلط عدد په مثلثاتی څرگندونه کی ولیکی .

د راکړه سوی مختلط عدد جواب ورکونکی وکټور د $\overrightarrow{OA}$ وکټور دی . د نوموړی عدد مودول او ارگومینټ پیداکوو

$$|z|=\rho=\sqrt{1+3}=2$$

$$\begin{cases}\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$



ش ۳۴

ددی ځایه $\varphi=\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi$ ، پداسی حال کی چی $k\in\mathbb{Z}$ ، فلهذا :

$$-1-\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$$

باید یاداور سو چی د صفر عدد په مثلثاتی ځرګندونه کی نسو راوستلای ، ځکه چی صفر وکتوری وړانګه وجود نلری .

X§. په مثلثاتی ځرګندونه کی پر مختلطو عددونو عملیی.

۱ـ د ضرب او ویش عملیی .

په آسانی سره لیدل کیږی چی په مثلثاتی ځرګندونه کی پر مختلطو عددونو د جمع اوتفریق عملیی دونه مستریح ندی، ولی د ضرب او ویش عملیی په ډیره ساده ګی سره تر سره کولای سو.

فرضوو چی د $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ او $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ مختلط عددونه راکړه سوی وی . د z_1 او z_2 د ضرب حاصل موندو:

$$z_1.z_2= \rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) . \rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$= \rho_1 \rho_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2+i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2+ i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2-\sin\varphi_1 \sin\varphi_2)=$$

$$= \rho_1 \rho_2(\cos(\varphi_1+ \varphi_2)+i \sin(\varphi_1+ \varphi_2))$$

د وروستی کرښی ځخه ښکاری چی په مثلثاتی ځرګندونه کی ددو مختلطو عددونو z_1 او z_2 د ضرب په نتیجه کی د هغوی مطلقه قیمتونه یو دبل سره ضرب او ارګومینتونه یودبل سره جمع کیږی. په بل عبارت ویلای سو چی د z_1 او z_2 د مختلطو عددونو د ضرب د حاصل مطلقه قیمت مساوی دی د هغوی د مطلقه قیمتو د ضرب د حاصل ځخه ، یعنی $\rho_1 \rho_2$ او د ضرب د حاصل ارګومینټ مساوی دی دهغوی د ارګومینتو د جمعی په حاصل باندی ، یعنی $\varphi_1+ \varphi_2$. پدی معنی چی :

$$| z_1.z_2|=| z_1 |. | z_2|$$

$$\arg(z_1.z_2)=\arg z_1 + \arg z_2$$

فرضوو چی مختلط عددونه z_1 او z_2 راکړه سویدی ، $z_2\neq0$ دی. اوس به نو د z_1 مختلط عدد پر z_2 باندی وویشو .

$$\frac{z_1}{z_2}= \frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i \sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i \sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i \sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i \sin\varphi_2)}.\frac{\cos\varphi_2-i \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2-i \sin\varphi_2}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 +i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 -i\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 +\sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi 1-\varphi 2)+i\sin(\varphi 1-\varphi 2))$$

ددی ځایه $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ یعنی $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

او

$$\arg(\frac{z_1}{z_2})=\varphi_1-\varphi_2=\arg z_1-\arg z_2$$

پدی معنی چی د z_1 او z_2 د مختلطو عددونو دویش د حاصل مطلقه قیمت مساوی دی د z_1 د مطلقه قیمت او z_2 د مطلقه قیمت د ویش د حاصل څخه، یعنی $\frac{\rho_1}{\rho_2}$. او د z_1 او z_2 د مختلطو عددونو دویش د حاصل ارگومینټ ددوی د ارگومینتو د تفریق په حاصل سره ، یعنی $\varphi 1-\varphi 2$، مساوی کیږی.

۲ـ د مختلط عدد لوړول په تام طاقت باندی.

که وغواړو چی یو مختلط عدد د هغه په الجبری څرگندونه کی په تام طاقت لوړ کړو ، نو به د اوږدو شمیرونو سره مخامخ سو. ولی په مثلثاتی څرگندونه کی ددی عملیی تر سره کول ډیره ساده وی.

که $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ مختلط عددوی ، نو د هغه ضربول په خپل ځان کی دوه ځلی، دری ځلی،.... لاندنی نتیجه لا سته راولی .

$$z^2=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

$$z^3=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$$

قضیه ۱ ـ د هر تام عدد n دپاره لاندنی مساوات صدق کوی .

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad \dots (1)$$

پورتنی فارمول د د ـ موأور De-Moivre د فارمول په نامه یادیږی.

ثبوت ـ که $n=0$ وی ، نو $1=1$ سره لاسته راځی ، یعنی دا فارمول حقیقت لری. اوس به نو دغه فارمول د طبیعی عدد n دپاره په ثبوت ورسو. دغه ثبوت د ریاضی د استقراء پذریعه سرته رسوو.

د $n=1$ دپاره فارمول حقیقت لری. فرضوو چی فارمول د $n=k-1$ دپاره حقیقت لری ، یعنی :

$$[\rho\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)]^{k-1} = \rho^{k-1}\,(\cos\,(k-1)\varphi+i\,\sin\,(k-1)\varphi)$$

نو :

$$[\rho\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)]^{k} = [\rho\,(\cos\,\varphi+i\,\sin\,\varphi)]^{k-1}.\,[\quad\rho\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)\;]$$

$$=\rho^{k}\,(\cos\,k\varphi+i\,\sin\,k\varphi)$$

یعنی د (1) فارمول د k د عدد دپاره هم صدق کوی . د ریاضی د استقراء د پرنسیب پر بنسټ د (1)فارمول د ټولو طبیعی عددونو n دپاره صدق کوی.

زموږد قضیی ادعا د هر تام عدد دپاره ده . د صفر او هر طبیعی عدد n دپاره مو ثابته کړه چی د (1) فارمول صدق کوی .اوس به نو وګورو چی که n منفی تام عدد وی څه پېښیږی.

که n منفی تام عدد وی ،نو $m=-n$ طبیعی عدد دی. ددی ځایه :

$$[\rho\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)]^{n} = [\rho\,(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)]^{-m} =$$

$$=\frac{1}{\left[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^{m}}=\left(\frac{1}{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right)^{m}=\left(\frac{1}{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}.\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)^{m}=$$

$$=\left(\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\rho(\cos^{2}\varphi+i^{2}\sin^{2}\varphi)}\right)^{m}=\left(\frac{\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)}{\rho}\right)^{m}=\frac{\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi)}{\rho^{m}}=$$

$$=\rho^{n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

پدی ترتیب قضیه ثبوت سول.

بیلګه۔

$$\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right]^{6}=2^{3}(\cos\pi+\sin\pi)=-2^{3}=-8$$

۳ ـ د مختلطو عددونو د جذر څخه خارجول(د جذرو استخراج).

اوس به نو د مختلطو عددونو د جذر څخه د ایستلو مسئله وګورو .

تعریف ۱ ـ د $z_1=a+bi$ مختلط عدد n ـام ($n\in\mathbb{N}$) جذر عبارت دی د z دمختلط عدد څخه چی $z^n=z_1$ سره کیږی. n ـام ($n\in\mathbb{N}$) جذر په $z=\sqrt[n]{a+bi}$ سره ښیو .

په آسانی سره لیدلای سو ، که $z_1=0$ سره وی ، نو د هر طبیعی عدد دپاره صدق کوی چی $\sqrt[n]{0}=0$. اوس نو فرضوو چی $z_1=a+bi\neq0$ راکړه سوی دی.

قضیه ۱ ـ د $a+bi$ مختلط عدد دوهم جذر (جذر مربع) یوازی د دوو جذرو درلودونکی دی چی د لاندنی فارمولو په ذریعه ټاکل کیږی .

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \qquad ,\ b\geq0 \quad \text{که} \quad \ldots(1)$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \qquad ,\ b<0 \quad \text{که} \quad \ldots(2)$$

ثبوت ـ فرضو چی $b\geq0$ ده ، نو :

$$\left[\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)\right]^2=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}+2i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}=$$

$$=a+2i\sqrt{\frac{(a^2+b^2)-a^2}{4}}=a+bi$$

پدی ډول هغه عددونه چی د (1) د فارمول په ښی خوا کی واقع دی، په رشتیاهم د $a+bi$ د عدد دوهم جذر دی.

اوس نو باید ثابته کړو چی تر دغو دوو جذرو اضافه وجود نلری. فرضوو چی :

$$\sqrt{a+bi}=u+vi$$

$$(u+vi)^2=a+bi$$

$$(u^2-v^2)+2uvi=a+bi$$

د u او v د ټاکولو دپاره باید په لوړنی مساوات کی حقیقی او موهومی برخی سره پرتله کړو، یعنی :

$$\begin{cases} u^2-v^2=a \\ 2uv=b \end{cases}$$

ددی ځایه :

$$\begin{cases} u^4-2u^2v^2+v^4=a^2 \\ 4u^2v^2=b^2 \end{cases}$$

د پورتنی معادلو دواړی خواوی سره جمع کوو:

$$u^4+2u^2v^2+v^4=a^2+b^2$$

$$u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}$$

څرنګه چی $u^2-v^2=a$ سره کیږی ، نو لاندنی مساوی ګانی به لاسته راسی:

$$u^2=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2};v^2=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

په نتیجه کی د u او v قیمتونه داسی ټاکو:

$$u=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \qquad ; \; v=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

څرنګه چی $uv=\frac{b}{2}\geq 0$ دی ، نو د u او v عددونه باید یو ډول علامی ولری . پدی معنی چی یا باید دواړه مثبت او یا باید دواړه منفی وی . پدی ترتیب د (1) فارمول یوازی والی په ثبوت ورسیدی.

په هغه صورت کې چې $b<0$ وی ، قضیه په عین شکل په ثبوت رسیږی.

پورتنی قضیه موږ ته د هر ډول دوهمی درجې معادلو چې مختلط ضریبونه ولری ، د حل امکانات برابروی .

بیلګه ـ

لاندنی معادله حل کی :

$$i\,x^2+(2-4i)x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(1-2i)\pm\sqrt{(1-2i)^2+8i}}{i}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1+2i)\pm\sqrt{-3+4i}}{i}$$

اوس به نو د (1) فارمول څخه کارواخلو:

$$x_1=\frac{-1+2i+(1+2i)}{i}=4$$

$$x_2=\frac{-1+2i-(1+2i)}{i}=-\frac{2}{i}=2i$$

ثابتیدلای سی چې په عمومی شکل د مختلطو عددونو په الجبری څرګندونه کی تر دوهم جذر اضافه ، د جذر د ایستلو امکان وجود نلری.

فرضوو چې $a+bi=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

قضیه ۲ ـ د $a+bi\neq0$ مختلط عدد n ـام ($n\in\mathbb{N}$) جذر یوازی او یوازی د n جذردرلودونکی دی ، چې د لاندنی فارمول په ذریعه محاسبه کیږی.

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi}=\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})\qquad\ldots(3)$$

پداسی حال کی چې $k\in\{0,1,2,\ldots,n\text{-}1\}$

تر هغه ځایه چې د قضیی ثبوت ډیر اوږد او پیچلی دی ، نو دلته یې د پوره ثبوت څخه تیریږو او د ثبوت شیما په لنډ ډول راوړو.

۱ـ ثابتوو چې د (3) فارمول په ښی خواکې ټول عددونه د $\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ د عدد n ـام جذر دی.

۲- ثابتو چی توله نوموړی عددونه په خپل منځ کی مختلف دی .

۳- باید وښیو چی د $\rho\ (\cos\varphi+i\ \sin\varphi)$ دعدد ،غیر له پورتنی جذرو څخه، نور جذرونه وجود نلری.

دو همه قضیه بیاهم د مختلطو عددو د مثلثاتی څرګندونی کامل والی تائیدوی .

په مثلثاتی څرګندونه کی د یو عدد 1 په لاندی ډول لیکلای سو .

$1=\cos 0°+i \sin 0°$

فلهذا د (3) فارمول پر بنسټ به ولرو:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad ; k\in\{0,1,\ldots,(n-1)\}$$

قرارداد سویدی چی د یوه 1 د عدد n ـام جذرونه په $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}$ سره وښیو.

د یوه 1 د عدد د ټولو n ـام جذروسیټ د ډیرو په زړه پوری خاصیتو درلودونکی دی ، چی دلته یی د ځینو څخه یادونه کوو.

۱ ـ په مختلطه مستوی کی د یوه 1 د عدد n ـام جذر، منظمه n ـضلعی ترسیموی چی د یوه واحد په اوږدوالی وړانګه دایری باندی محاط وی . یا په بله اصطلاح د یوه 1 د عدد n ـام جذر، منظمه n ـ ضلعی ترسیموی چی د هغه پر شاوخوا یوه دایره چی دوړانګی اوږدوالی یی یو واحد دی، راګرځیدلی ده.

۲- د یوه 1 د عدد د n ـام جذرسیټ $G=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}\}$ نظر د ضرب و عملیی ته تبدیلی ګروپ تشکیلوی.

د پورتنیو او همداراز نورو په زړه پوری خاصیتو څیرنه زموږ د پروګرام څخه بهرده.

دریم فصل

n - بعدی وکټوری فضاء - د خطی معادلو سیستمونه

I§ . n - بعدی وکټوری فضاء.

په ریاضی،میخانیک،تخنیکی علومو او اقتصاد کی ډیر پرابلمونه دی چی حل یی د خطی معادلو په سیستم پوری اړه پیداکوی . همدارازپه ښوونځی کی هرومرو د لاندی ډول مسئلو سره مخامخ سوی یاست .

بیلګه ۱-

د ثریا ، ظاهر او نفیسی د عمرو مجموعه مساوی په 60 سره کیږی . که د ظاهر د عمره دوه ځله ، د ثریا دعمر دری ځله او د نفیسی عمر سره جمع کړو ، نو 120 لاسته راځی . که د نفیسی د عمر د دری ځلی څخه د ظاهر د عمر دوه ځلی منفی کړو، نو دثریا عمر لاسته راځی . اوس نو وواياست چی هر یو ددوی څخه څوکلن دی ؟

ددی مسئلی د حل دپاره د ثریا عمر په C ، د ظاهر عمر په Z او د نفیسی عمر په N سره ښیو. اوس نو راکړه سوی مسئله ریاضی په ژبه لیکو :

$$\begin{cases} Z+N+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ 3N-2Z=C \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} Z+N+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ -2Z+3N-C=0 \end{cases}$$

څرنګه چی د خطی معادلو د سیستمو په ترکیب کی n -بعدی وکټور مفهوم ډیر مهم رول لوبوی ، نو دمخه تردی چی د پورته ذکرسوو مسئلو په حل او د خطی معا دلو د سیستمونو د طرحی په عمومی شکل شروع وکړو ، لمړی به د وکټورو د مفهوم د تشریح څخه راشروع کړو.

فرضوو چی د حقیقی عددونو فیلډ $\mathbb{R}$ او د $V_n = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{-ځله}}$ سیټ راکړه سویدی.

تعریف ۱ - د V_n د سیټ هر عنصر د حقیقی عددونو پر فیلډ باندی د n - بعدی وکټور په نامه یادوو.

د پورتنی تعریف څخه استنباط کیږی چی n - بعدی وکټور د حقیقی عددونو د مرتبه n - ئیزه څخه عبارت دی . ددی نه وروسته به وکټورونه په $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ... او داسی نورو سره ښیو. که : $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ وی ، نو د $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ عددونه د $\vec{a}$ د وکټور د اجزاؤ

په نامه یادیږي . پدې معنی چې α_1 د $\vec{a}$ د وکتور لمړی جز ، α_2 یې دوهم جز ،...، α_n د $\vec{a}$ د وکتور n ـ ام جز دی . کله کله به ښه وی چې وکتور په داسې ډول سره وښیو:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

په لمړی حالت کی د کرښه ئیز وکتور او په دوهم حالت کی د ستونی وکتور څخه بحث کوو. نظر و ضرورت ته به د وکتور د لیکلو طرز ټاکو. د مرتبو n ـ ئیزو د مساوای والی د تعریف څخه پوهیږو چی د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ او $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ وکتورونه یوازی او یوازی هغه وخت سره مساوی دی چې د هغوی اجزاوی په خپل منځ کی سره مساوی وی ، یعنی : $\alpha_1=\beta_1$ ، $\alpha_2=\beta_2$ ، ... ،$\alpha_n=\beta_n$

اوس نو د V_n په سیټ کی د وکتورو د جمع عملیه او په وکتور کی د حقیقی عدد د ضرب عملیه تعریفوو. تاسو به یی وگوری چې دا تعریفونه د هغو تعریفو عمومی بڼه ده ،کوم چی تاسو په هندسه کی ورسره آشنا یاست.

تعریف ۲ ـ د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ او $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ د وکتورو جمع عبارت دی د

$\vec{c}=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$ د وکتور څخه.

قضیه ۱ ـ د V_n سیټ نظر د وکتورو د جمع عملیی ته ، تبدیلی گروپ دی .

ثبوت ـ په رشتیا سره . څرنگه چې د وکتورو د جمع په وخت کی د هغوی اجزاوی سره جمع کیږی او اجزاوی یې حقیقی عددونه دی ، نو د حقیقی عددونو د جمع د تبدیلی او اتحادی خاصیتو پر بنسټ استدلال کولای سو چې :

$(\forall \vec{a},\vec{b}\in V_n)(\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a})$

$(\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_n))(\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})$

د V_n په سیټ کی ، نظر د جمع وعملیی ته، د خنثی اود $\vec{a}$ د وکتور د متناظر عنصروظیفه د

$\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ او د $-\vec{a}=(-\alpha_1, -\alpha_2,\ldots, -\alpha_n)$ پر غاړه ده . پدې معنی چې :

$(\forall \vec{a}\in V_n)(\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a})$

$\vec{a}+(-\vec{a})=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)+(-\alpha_1, -\alpha_2,\ldots, -\alpha_n)=$

$(\alpha_1+(-\alpha_1),\ldots, \alpha_n+(-\alpha_n))=$

$=(\alpha_1-\alpha_1,\ldots, \alpha_n-\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)=\vec{0}$

پدې ډول مو ثابته کړه چې د V_n سیټ د جمع د عملیې سره د تبدیلې ګروپ د خاصیتو درلودونکې دی.

تعریف ۳ ـ د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ په وکتور کې د λ د حقیقي عدد $\lambda\in\mathbb{R}$ ضرب عبارت دی د

$$\lambda\vec{a}=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2,\ldots, \lambda\alpha_n)$$

د وکټور څخه .

تعریف ۴ ـ د حقیقي عددونو $\mathbb{R}$ پر فیلډ باندې ټوله n بعدي وکټورونه د جمع او ضرب د عملیې سره د حقیقي عددونو $\mathbb{R}$ پر فیلډ باندې د n بعدي وکټوری فضاء په نامه یادیږي.

قضیه ۲ ـ د حقیقي عددونو $\mathbb{R}$ پر فیلډ باندې د V_n ، د n بعدي وکټورو، په فضاء کې لاندنی خاصیتونه صدق کوي :

$(\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall\vec{a}\in V_n)(\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a})$ (1

$(\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall\vec{a}\in V_n)((\alpha+\beta)\vec{a}=(\alpha\vec{a}+\beta\vec{a})$ (2

$(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\forall\vec{a},\vec{b}\in V_n)(\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b})$ (3

$(\forall\vec{a}\in V_n)(1.\vec{a}=\vec{a} \quad\wedge(-1)\vec{a}=-\vec{a})$ (4

$(\forall\vec{a}\in V_n)(0.\vec{a}=\vec{0})$ (5

$(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\lambda.\vec{0}=\vec{0})$ (6

$(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\forall\vec{a}\in V_n)(\lambda\vec{a}=\vec{0}\rightarrow\lambda=0\vee\vec{a}=\vec{0})$ (7

د پورتنیو خاصیتو ثبوت ساده دی . د بیلګې په توګه (3) خاصیت ثابتوو:

فرضوو چې $\lambda\in\mathbb{R}$ ، $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ او $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda((\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n))=\lambda(\alpha_1+\beta_1,\ldots, \alpha_n+\beta_n)=$

$=(\lambda(\alpha_1+\beta_1),\ldots, \lambda(\alpha_n+\beta_n))=(\lambda\alpha_1+\lambda\beta_1,\ldots, \lambda\alpha_n+\lambda\beta_n)=$

$$= (\lambda\ \alpha_1,\ldots,\ \lambda\ \alpha_n)+(\ \lambda\ \beta_1,\ldots,\ \lambda\ \beta_n)=\ \lambda\,\vec{a}+\lambda\,\vec{b}\,.$$

همداړول کولای سو چی نور خاصیتونه هم په ثبوت ورسوو.

نوټ ـ دحقیقی عددونو پر فیلډ یعنی $\mathbb{R}$ باندی د n بعدی وکټوری فضاء مفهوم کولای سو چی بیله کومی ستونځی څخه د P پر هر فیلډ باندی په عمومی شکل تعریف کړو. په بله اصطلاح کولای سو چی نوموړی مفهوم ته پر هر فیلډ باندی عمومیت ورکړو.څرنګه چی پدی کورس کی موږ اکثراً دحقیقی عددونو پر فیلډ یعنی $\mathbb{R}$ باندی د n بعدی وکټوری فضاء سره په تماس کی یو ، نو ځکه په راتلونکی کی د « دحقیقی عددونو پر فیلډ یعنی $\mathbb{R}$ باندی» د ذکر څخه صرف نظر کوو. په لنډ ډول سره وایو چی n بعدی وکټوری فضاء راکړه سویده. همداړول په n بعدی وکټوری فضاء V_n کی د سکالری ضرب د تعریف امکانات موجوددی.

دمخه تردی چی د سکالری ضرب په تعریف پیل وکړو ،باید ووایم چی د سکالر Scalar کلمه د درجی او مقدار په مفهوم استعمالیږی . د لمړی ځل دپاره د فرانسوی ریاضی پوه فرانسوا فیت François Vie`te له خوا استعمال سویده. ددی دپاره چی سوء تفاهم منځته رانسی باید یادونه وکوو چی د سکالری ضرب مفهوم معمولاً په دوه مفهومه استعمالیږی . یو داچی د یوه حقیقی عدد λ (λسکالر دی) ضرب د $\vec{a}$ په وکټور کی او بل داچی ددو وکټورو ضرب په خپل منځ کی چی په نتیجه کی یې یو عدد (سکالر) لاسته راځی.

تعریف ۴ ـ د $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ او $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ د وکټورو سکالری ضرب عبارت دی د عدد څخه : $\vec{a}\,.\,\vec{b}=(\ \alpha_1\ \beta_1,\ldots,\ \alpha_n\ \beta_n)$

په آسانی سره ثابتولای سو چی په n بعدی وکټوری فضاء کی سکالری ضرب لاندنی خاصیتونه لری.

$(\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_n)((\ \vec{a}+\vec{b}\,)\,\vec{c}=\vec{a}\ \ \vec{c}+\vec{b}\ \vec{c}\,)$ (1

$(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\forall\vec{a},\vec{b}\in V_n)(\ \lambda(\vec{a}\,.\,\vec{b}\,)=(\lambda\,\vec{a}\,).\,\vec{b}=\ \vec{a}\ (\ \lambda\,\vec{b}\,))$ (2

§II. د خطی معادلو سیستمونه او د هغوی د څرګندونی مختلف شکلونه.

فرضو چی $b,a_n,\ldots,a_2,a_1$ کیفی حقیقی عددونه دی .

تعریف ۱ ـ د $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \qquad \ldots(1)$ معادله د n مجهوله خطی معادلی په نامه یادوو. پدی حالت کی $x_n,\ldots,x_2,x_1$ د پورتنی معادلی د مجهولو ، حقیقی عددونه $a_n,\ldots,a_2,a_1$ د ضریبو او b د ثابت په نامه یادیږی .

د (1) څرګندونه د n مجهوله خطی معادلو د عمومی شکل په نامه یادیږی. که د (1) د معادلی کینی خواته په ځیر سره وګورو ، نو د سکالری ضرب سره خاص ورته والی لری . که د $a_n,\ldots,a_2,a_1$ عددونه او د $x_n,\ldots,x_2,x_1$ مجهولونه د $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ او $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ وکتورو په ځیر ولیکو، نو د $\vec{a}$ او $\vec{x}$ د وکتورو د سکالری ضرب په نتیجه کی د (1) د معادلی کینه برخه لاسته راځی . فلهذا د (1) معادله په لاندی ډول لیکلای سو :

$$\vec{a}.\vec{x}=b \qquad \ldots(2)$$

د (2) معادله د خطی معادلی د وکتور- سکالری شکل په نامه یادیږی .

څرګنده ده چی د (2) د معادلی حل عبارت دی د $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ د وکتور څخه ، پداسی ډول چی که ددی وکتور اجزاوی د $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ د اجزاو پر ځای وضع کړو ، یعنی $x_i=c_i\ (1\leq i\leq n)$ ،نو د (1) معادله په یوه حقیقی مساوات یعنی عینیت باندی اوړی . پدی معنی چی $\vec{a}.\vec{c}=b$ سره کیږی. کله کله وایو چی د $\vec{c}$ وکتور د (1) او (2) د معادلو سره موافق دی .

بیلګه ۱- د $3x_1-4x_2+x_3-2x_4=1$ یوه څلور مجهوله خطی معادله د لته -$a_3=1,a_2=$, $4,a_1=3$ $a_4=-2$ او $b=1$ سره ده . په بل عبارت د $\vec{a}=(3,-4,1,-2)$ او $\vec{a}.\vec{x}=1$ سره کیږی. په آسانی سره لیدلای سو چی د $\overrightarrow{c_1}=(0,0,1,0)$, $\overrightarrow{c_2}=(-1,-1,0,0)$ او $\overrightarrow{c_3}=(0,0,-1,-1)$ وکتورونه د راکړه سوی معادلی حل دی . په رشتیا هم : $\vec{a}.\overrightarrow{c_1}$

$$=(3,-4,1,-2)(0,0,1,0)=3.0-4.0+1.1-2.0=1$$

یعنی (1=1) سره لاسته راځی ، چی دا یو حقیقی مساوات دی . په همدی ډول د $\overrightarrow{c_2}$ او $\overrightarrow{c_3}$ وکتورونه امتحانولای سو.

تراوسه مو یوازی یوه n مجهوله خطی معادله تر مطالعی لاندی نیولی وه ، اوس به نو m خطی معادلی د n مجهول سره تر نظر لاندی ونیسو. دمخه تر دی چی د هغوی عمومی شکل وڅیړو، و لمړی بیلګی ته (I§– دریم فصل) راګرځو. په ذکر سوی بیلګه کی دری مجهوله ، چی عبارت دی له N,C او Z څخه، لرو . یعنی $\vec{x}=(Z,N,C)$ او همدا ډول دری مختلفی معادلی لرو. دا ځکه چی په هره معادله کی د b ثابت او د a_3,a_2,a_1 ضریبونه مختلف وه . اوس نو هغه پرابلم په داسی ډول طرح کوو:

د $\vec{c}$ وکتور باید داسی پیداکړو چی د $\vec{x}=(Z,N,C)$ په وکتور کی د هغه د اجزاو د تعویض په نتیجه کی هره یوه د هغو درو معادلو په حقیقی مساوات تبدیل سی .

په هغه صورت کې چې n مجهوله $x_n,\ldots,x_2,x_1$ خطی معادلې د حقیقي عددونو د ضریبو سره چې شمیر یې m>1 وي راکړه سوي وي ، نو وایو چې د n مجهوله $x_n,\ldots,x_2,x_1$ خطی معادلو سیستم د حقیقي عددونو د ضریبو سره راکړه سویدی او د هغوی د ټوله ممکنه حلو سیټ غوښتل سویدی . پدی حالت کی وایو چی د m خطی معادلی د n مجهوله سره راکړه سویدی ، چی په لاندی ډول یي لیکو :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

دلته $x_n,\ldots,x_2,x_1$ مجهولونه، $a_{mn},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{12},a_{11}$ د سیستم ضریبونه او د $b_m,\ldots,b_2,b_1$ عددونه دراکړه سوی سیستم ثابت دی .

په لمړی بیلگه کی (I§– دریم فصل) $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=1, a_{21}=2, a_{22}=1, a_{31}=-2, a_{23}=3,$ ، $a_{32}=3, a_{33}=-1$ ، $b_1=60, b_2=120$ او $b_3=0$ ده.

که ذکر سوی ضریبونه د وکتور په څیر ولیکو ، یعنی : $\overrightarrow{a_1}=(1,1,1)$ ،

$\overrightarrow{a_2}=(1,1,1)$ او $\overrightarrow{a_3}=(-2,3,-1)$ ، وروسته له هغه لاندنی سیستم لاسته راځی :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{x}=60 \\ \overrightarrow{a_2}.\vec{x}=120 \\ \overrightarrow{a_3}.\vec{x}=0 \end{cases}$$

فلهذا ، که د n مجهوله خطی معادلو د سیستم په عمومی شکل ، یعنی (3) کی دهری معادلی ضریبونه د $\overrightarrow{a_m}=(a_{m1},...,a_{mn}),\ldots,\overrightarrow{a_2}=(a_{21},...,a_{2n})$, $\overrightarrow{a_1}=(a_{11},...,a_{1n})$ او $\vec{x}=(x_1,...,x_n)$ سره وښیو ، نو لاندی سیستم به لاسته راسی:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{x}=b_1 \\ \overrightarrow{a_2}.\vec{x}=b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{x}=b_m \end{cases} \qquad \ldots(4)$$

د خطی معادلو د سیستم (4) څرګندونه د خطی معادلو د سیستم د وکتور ـ سکالری څرګندونی په نامه یادیږی.

د وکتورو د جمع د تعریف ، د حقیقی عدد ضرب په وکتور کی او د وکتورو د سکالری ضرب څخه استنباط کیږی چی د خطی معادلو سیستم (3) په لاندنی شکل هم لیکلای سو .

$$x_1.\overrightarrow{p_1}+x_2.\overrightarrow{p_2}+...+x_n.\overrightarrow{p_n}=\vec{b} \qquad \ldots(5)$$

پداسی ډول چی : $\overrightarrow{p_1}=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1})$, $\overrightarrow{p_2}=(a_{12},a_{22},\ldots a_{m2})$, $\overrightarrow{p_n}$ $=(a_{1n},a_{2n},..,a_{mn})$, او $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ سره دی .

د n مجهوله خطی معادلود سیستم پورتنی څرګندونه، یعنی (5) ، د (3) د سیستم دوکتوری شکل په نامه یادیږی . د خطی معادلو د سیستم د حل هدف په هریوه شکل کی د (3),(4) او (5) عبارت دی د n بعدی $\vec{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ وکتور د پیداکیدو څخه ، پداسی ډول چی د سیستم هره یوه معادله په عین حال کی حل کی .

که د خطی معادلو سیستم (3) حل ولری ، نو سیستم د ثابت consistent سیستم په نامه یادوو ،او که د خطی معادلوسیستم (3) حل ونلری ، نو سیستم د غیر ثابت Inconsistent سیستم په نامه یادوو. ثابت سیستمونه یا د یوه حل درلودونکی دی او یا ځو مختلف حلونه لری. هغه ثابت سیستمونه چی یوازی یو حل ولری د معین سیستم په نامه یادیږی . د خطی معادلو سیستم (3) د خپلو ضریبو په ذریعه یوازنی شکل سره ټاکل سویدی . د کار د آسانی دپاره به ښه داوی چی د خطی معادلو سیستم د یوه جدول په څیر چی ماترکس Matrix نومیږی ولیکو. قراردادبه وکړو چی :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د (3) سیستم د اصلی ماترکس او :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

د (3) سیستم د ارت سوی ماترکس په نامه یادکړو.

که په عین حال کی اصلی او ارت سوی ماترکس تر کتنی لاندی ونیسو ، نو ښه به داوی چی د آخری ستون و مخته یوه عمودی کرښه رسم کړو .د بیلګی په توګه زموږد دلمړی بیلګی د(§I– دریم فصل) د ماترکس د نوشتی په وخت کی پوهیږو چی

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ زموږ دخطی معادلو د سیستم اصلی ماترکس او

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & 1 & 3 & 120 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$ هم د هغه سیستم ارت سوی ماترکس دی .

د خطی معادلو د سیستم د حل ځخه مو هدف په لمړی قدم کی د هغه سیستم د ثابتوالی یا غیرثابتوالی مطالعه ده . کله چی سیستم ثابت وی ، بیانو هڅه کوو چی دهغه حل ولټوو ، یعنی د سیستم د ټولو حلو سیټ تعین کړو.

د خطی معادلو د سیستم په تیوری کی داسی متودونه طرح کیږی چی د هغوی په ذریعه د خطی معادلو هر سیستم حل کولای سو.

§III. د خطی معادلو معادل والی - په سیستم کی ابتدائی اړونی .

فرضوو چی د خطی معادلو دوه سیستمه د $x_1,x_2,\ldots,x_n$ د مجهولو سره راکړه سویدی .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad \ldots.(2)$$

تعریف ۱ - د خطی معادلو سیستمونه (1) او (2) د عین مجهولو سره یودبله معادل بولو ، که د هغوی د حلو سیټونه سره مساوی وی .

بیلګه ۱ ـ د خطي معادلو لاندنی سیستمونه سره معادل دي.

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ x+2y=6 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x+y=3 \\ -2x-y=-3 \end{cases}$$

دا ځکه چې دواړه سیستمونه د یوازني حل $(0,3)=\vec{c}$ درلودونکي دي.

بیلګه ۲ـ د خطي معادلو سیستمونه :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=3 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$$

هم سره معادل دي ، ځکه چې دواړه سیستمونه غیر ثابت دي ، یعنې د هغوی ود حل سیټونه تش (خالي) سیټونه تشکیلوي.

څرګنده ده چې که (1) سیستم د (2) سیستم سره او (2) سیستم د (3) سیستم سره معادل وي نو د (1) سیستم د (3) سیستم سره معادل دی ، یعنې د $(1),(2)$ او (3) سیستمونه په خپل منځ کې معادل دي.

که دوه معادل سیستمونه ولرو ، نو کافي ده چې د هر هغه سیستم د حل سیټ پیداکړو ، کوم چې آسانه او ژر حل کیږي . د خطي معادلو د سیستم د حل په ترڅ کې معمولاً په لمړي سیستم کې داسې تغیرات راوړو ،چې د هغه په نتیجه کې داسې سیستم لاسته راسي چې د اولي سیستم سره معادل او تر هغه ساده تره وي .

تعریف ۲ ـ د خطي معادلاتو په سیستم کې ابتدائي اړوني عبارت دي له :

۱ ـ په راکړه سوي سیستم کې ددوو معادلو د ځایو تعویض .

۲ـ د راکړه سوي سیستم په یوه د معادلاتو کې د حقیقي عدد ، چې صفر نه وي ، ضربول.

۳ـ دراکړه سوي سیستم یوه معادله د بلې معادلې سره چې حقیقي عدد کې پکښې ضرب سوې وي ، جمع کول.

۴ـ د سیستم څخه د هغې معادلې لیرې کول کوم چې مطابقت تشکیلوي.

قضیه ۱ـ د خطي معادلو په سیستم کې د ابتدائي اړونو په نتیجه کې کوم نوی د خطي معادلو سیستم چې لاسته راځي ، د اولي سیستم سره معادل دی.

ثبوت ـ فرضوو چې د خطي معادلو سیستم (3) راکړه سوي وي .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

په رشتیا هم که په (3) سیستم کی ، چی زموږ اولی سیستم دی، هریو د ابتدائی اړونو ځخه عملی کړو، نو یو نوی سیستم به لاسته راسی. اوس نو باید ثابته کړو چی نوی لاسته راغلی سیستم د اصلی یا اولی سیستم سره معادل دی.

۱ ـ که لمړی ابتدائی اړونه پر (3)سیستم عملی کړو ، نو یو نوی سیستم لاسته راځی ،چی په هغه کی نظر واولی سیستم ته ددوو معادلو ځایونه سره تبدیل سویدی . پدی لحاظ دنوی سیستم د حل په سیټ کی کم تغیر نه راځی ، یعنی د (3) سیستم هر حل (پدی شرط که حل ولری !) عبارت دی د $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ چی په عین حال کی د نوی سیستم حل هم دی . په هغه صورت کی چی حل ونلری بیاهم په خپل منځ کی معادل دی ، ځکه چی دواړه سیستمونه غیر ثابت دی .

۲ـ په اصلی سیستم کی دریمه ابتدائی اړونه عملی کوو. یعنی د (3) یا اصلی سیستم په لمړی معادله کی د λ حقیقی عدد ضربوو او ددوهمی معادلی سره يي جمع کوو. دواړه سیستمونه د کار د آسانی په خاطر په وکتور ـ سکالری بنه لیکو.

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{x} = b_1 \\ \overrightarrow{a_2}.\vec{x} = b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{x} = b_m \end{cases} \ldots(4) \wedge \qquad \begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{x} = b_1 \\ \lambda(\overrightarrow{a_1}.\vec{x}) + \overrightarrow{a_2}.\vec{x} = \lambda b_1 + b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{x} = b_m \end{cases} \qquad \ldots.(5)$$

اوس نو باید ثابته کړو چی د (4) او (5) سیستم د حل سیټونه سره مساوی دی .یعنی نظر د سیټونو د مساویوالی و تعریف ته د (4) سیستم د حل د سیټ هر عنصر د (5) سیستم د حل په سیټ کی شامل دی او برعکس.

فرضوو چی $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ د (4) سیستم د حل د سیټو یو عنصر دی ، یعنی

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{c} = b_1 \\ \overrightarrow{a_2}.\vec{c} = b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{c} = b_m \end{cases}$$

حقیقت لری، نو لاندنی مساوات :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{c} = b_1 \\ \lambda(\overrightarrow{a_1}.\vec{c}) + \overrightarrow{a_2}.\vec{c} = \lambda b_1 + b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{c} = b_m \end{cases}$$

به هم حقیقت ولری.

برعکس که $\vec{d} = (d_1,...,d_n)$ د (5) سیستم حل وی ، یعنی:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\vec{d} = b_1 \\ \lambda(\overrightarrow{a_1}.\vec{d}) + \overrightarrow{a_2}.\vec{d} = \lambda b_1 + b_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_m}.\vec{d} = b_m \end{cases}$$

د پورتنی سیستم دوهمه معادله ،د لمړی معادلی د په نظر کی نیولو سره ، داسی هم لیکلای سو:

$$\lambda b_1 + \overrightarrow{a_2}.\vec{d} = \lambda b_1 + b_2$$

ددی ځایه $\overrightarrow{a_2}.\vec{d} = b_2$ سره کیږی.

فلهذا استدلال کولای سو چی د $\vec{d} = (d_1,...,d_n)$ وکتور د (4) سیستم حل هم دی .
یعنی د (4) او (5) سیستمونه سره معادل دی.

د پاتی حالاتو ثبوت زده کوونکو ته د کورنی کار په شکل توصیه کوو.

§IV. د خطی معادلو د سیستم حل په پوره ئیز(تدریجی) ډول د مجهولو د ورکولو (حذفولو) په طریقه.

دحقیقی عددونو د ضریبو سره د خطی معادلو د سیستم د حل د ساده ترینو طریقو څخه یوه هم د گاوس C.F.Gauss طریقه ده.پدی طریقه کی هڅه کیږی چی په تدریجی ډول سره مجهولونه ورک (حذف) کړی. دمخه تر دی چی ددی طریقی په څیرنه باندی پیل وکړو ، لاندنی حالتونه باید وگورو.

که د n مجهوله خطی معادلو په سیستم کی د

$$0.x_1+0.x_2+\ldots+0.x_n=0 \qquad \ldots(1)$$

په شان معادله وجود ولری ، نوواپو چی 0=0 دی او د سیستم څخه یی لیری کوو.

که د خطی معادلو په سیستم کی د

$$0.x_1+0.x_2+\ldots+0.x_n=b \wedge b\neq 0 \qquad \ldots(2)$$

په شان معادله وجود ولری ، نو پدی صورت کی 1=0 کیږی . پدی حالت کی وایو چی راکړه سوی سیستم ثابت ندی ، ځکه چی (2)مساوات هیڅ وخت حقیقت نلری.

اوس به نو د گاوس میتود تر څیړنی لاندی ونیسو. فرضوو چی یو کیفی د خطی معادلو سیستم راکړه سویدی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

فرضوو چی په (3) سیستم کی د (1)په شان معادله وجود نلری. که په سیستم کی د (2)په شان معادله راڅرگنده سی ، نو سیستم غیر ثابت دی ، ځکه نو فرضوو چی په سیستم کی د (2) په شان معادله هم وجودنلری . بیله دی چی د عمومیت پر خلاف مو عمل کړی وی ، فرضوو چی $a_{11}\neq 0$ دی. که داسی نه وی نو د معادلو ځایونه داسی تغیر ورکوچی لمړی ضریب یی د صفر څخه خلاف وی . اوس نو د لمړی معادلی دواړی خواوی د a_{11} پر عدد ویشو.چی په نتیجه کی یی :

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad \ldots(4)$$

لاسته راځی. دغه سیستم نظر د تیر پاراگراف و قضیی ته د (3) سیستم سره معادل دی. اوس نو پر (4) سیستم په لاندی ډول ابتدائی اړونی سرته رسوو کوو. په لمړی معادله کی د a_{21}– عدد ضربو اوبیایی ددوهمی معادلی سره جمع کوو، همداډول په لمړی معادله کی د a_{31}– عدد ضربو اوبیایی ددریمی معادلی سره جمع کوو، ... همداشان مخ

ته ځو ځو بلاخره لمړی معادله د a_{m1}– په عدد کی ضربو او د د m ـامی معادلی سره یی جمع کوو، چی په نتیجه کی یی به لاندنی سیستم لاسته راسی:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + \ldots + a'_{1p} x_p + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{2p} x_p + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{mp} x_p + \ldots + a'_{mn} x_n = b'_m \end{cases} \qquad \ldots(5)$$

دلته $2 \le p \le n$ سره دی، یعنی غیر له اولی معادلی څخه نور په ټولو معادلو کی مو د x_1 مجهول ورک کړی. البته امکان لری چی پدی پروسه کی نور مجهولونه هم ورک سی ، نو پدی صورت کی به $p>2$ وی.

ټوله د a'_{ij} ضریبونه او د b'_j ثابت د (4) سیستم د ضریبو د جنسه څخه دی ، د هغوی د اوړدوالی له کبله د پوره لیکلو څخه یی ډډه کوو.

اوس نو که په (5) سیستم کی د (1) په شان معادله وجود ولری ، نو هغه ایسته کوو او یا که د (2) په شان معادله وجودولری ، نو استدلال کوو چی (5) سیستم غیر ثابت دی ، پدی معنی چی حل نلری. فرضوو چی په (5) سیستم کی د (2) په شان معادله وجود نلری او د (1) په شان معادلی مو ایسته کړیدی. د $a'_{mp},\ldots,a'_{3p},a'_{2p}$ په ضریبو کی لږتر لږه یو ضریب د صفر څخه خلاف دی . فرضوو چی a'_{2p} د صفر سره مساوی ندی (دافرضیه حقیقت لری ځکه چی تل د معادلو د ځای د تبدیل په نتیجه کی یی لاسته راوړای سو.). اوس نو د (5) سیستم لمړی معادله بیله تغیره لیکو ، ددوهمی معادله ضریبونه پر a'_{2p} ویشو، ددریمی معادلی څخه یی راشروع کو په ټولو معادلو کی x_p ورک کوو .البته په عین ترتیب باندی لکه x_1 چی مو ورک کی . په نتیجه کی (6) سیستم چی د (5) سیستم سره معادل دی لاسته راځی.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + \ldots + a'_{1p} x_p + \ldots + a'_{1s} x_s + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ \qquad x_p + \ldots + a''_{2s} x_s + \ldots + a''_{2n} x_n = b''_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a''_{ks} x_s + \ldots + a''_{kn} x_n = b''_k \end{cases} \qquad \ldots(6)$$

پداسی ډول چی $2 \le p < s \le n$ او $k \le m$ سره دی. د مخکنی حالتو د ارزیابی پروسه پر (6) سیستم هم عملی کوو او فرضوو چی په (6) سیستم کی د (2) په شان معادله وجودنلری . په هر پړاو کی زموږ لاس ته یو سیستم راځی چی د (3) سیستم سره معادل

دی.که څو ځلی (البته حد اکثر n-1 ځلی) دا پروسه تکرار کړو ،نو یو د لاندنیو حالتوڅخه به پیښ سی :

۱- په یوه پړاو کی دداسی حالت سره مخامخ کیږو چی لاسته راوړل سوی سیستم د (2) په شان معادلی درلودونکی وی ، ځکه نو وایو چی لاسته راوړل سوی سیستم او په نتیجه کی (3) سیستم غیر ثابت دی .

۲- په هرپړاو کی چی نوی سیستم لاسته راسی او په هغه کی د (2) په شان معادله وجود ونلری ،نو پدی صورت کی به وروستی سیستم لاندنی بڼه ولری:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + c_{1p}x_p + \ldots + c_{1s}x_s + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2p}x_p + \ldots + c_{2s}x_s + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad c_{3s}x_s + \ldots + c_{3r}x_r + \ldots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{lr}x_r + \ldots + c_{ln}x_n = d_l \end{cases} \quad \ldots(7)$$

پداسی ډول چی $2 \le p < s < r \le n$ او $l \le m$ سره دی. وایو چی (7) سیستم زینه ئی بڼه لری.که $l = n$ ، $p = 2$ او $s = 3$ سره وی ، نو سیستم ځانته مثلثی بڼه غوره کوی، یعنی:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \quad \ldots(8)$$

لیدل کیږی چی (8) سیستم په آسانی سره حل کیدای سی ، یعنی په (8)-ام سیستم کی د وروستنی معادلی څخه $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$ لاسته راځی . لاسته راغلی قیمت په (n-1) - مه معادله کی ایږدواو د x_{n-1} د مجهول قیمت لاسته راوړو. په همدا ډول د $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, x_{n-2}$ قیمتونه پیداکولای سو. پدی حالت کی (8) -ام سیستم (پدی معنی چی (3) -یم سیستم) د یوازنی حل درلودونکی دی.

فرضوو چی $l < n$ څخه دی . پدی حالت کی د $x_1, \ldots, x_s, x_p, x_l$ مجهولونه د اساسی (تړلی) مجهولو په نامه یادوو او پاتی مجهولونه ، یعنی د $l+1$ څخه تر n پوری د آزادو مجهولو په نامه یادوو . د (8)-ام سیستم د حل دپاره ټوله آزاد مجهولونه د مساوی د نښی

و ښې خواته راوړو ځو د هغوی له مخې د نړلو مجهولو قیموتونه، په هغه طریقه لکه مخکې چې مو تشریح کړه، پیدا کړو. پدې حالت کې (8)ـام سیستم د لایتناهی حلونو درلودونکی دی، چې د ټولو حلوسیټ یې په لاندې ډول پیداکوو.

د آزادو مجهولو په عوض کې کیفي حقیقي عددونه وضع کوواو د هغه پر بنسټ د لاسته راغلو فارمولو پذریعه د نړلو مجهولو قیمتونه پیداکوو. هغه فارمولونه چې د هغوی پر بنسټ د (8)ـام سیستم د نړلو مجهو لو قیمتونه د آزادو مجهولو له مخې موندل کیږی ، د (3) یم خطي معادلو د سیستم د عمومي حل په نامه یادیږی.

پدې ډول د ګاوس د میتود څخه د هری خطي معادلې د سیستم د حل دپاره ګټه اخیستلای سو.

که په سیستم کی د 1=0 په شان معادله لاسته راسی،نو وایو چې سیستم غیر ثابت دی او حل نلری . که مو وکولای سوای چې د خطي معادلو سیستم د ګاوس په میتود باندی مثلثي شکل ته راوړو ، نو په هغه صورت کی راکړه سوی سیستم د یوازنی حل درلودونکی دی او که مو وکولای سوای چې سیستم و زینه ئی شکل ته راوړو ، نو په هغه صورت کی سیستم لایتناهی حلونه لری چې حلونه یی دلاسته راغلو عمومي فارمولو څخه موندلای سو.

د ګاوس په میتود باندی د خطي معادلو د سیستم د حل په موخه به ښه داوی چې د راکړه سوی خطي معادلو د ارت سوی ماترکس څخه کاروا‌خلو.یعنی ښه به داوی چې ابتدائی اړونی د ارت سوی ماترکس پر کرښو باندی عملی کړو.

بیلګه ۱ ـ

د خطي معادلو لاندنی سیستم حل کړی:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \qquad x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{array}\right)$$

دراکړه سوی خطي معادلو د سیستم پر ارت سوی ماترکس مو ابتدائی اړونی عملی کړی ،څو د هغه په نتیجه کی دوهم ماترکس لاسته راغی چې تر غشی وروسته مو لیکلی دی.

په لمړی حالت کی مو د ماترکس لمړی کرښه په 2- کی ضرب کړه او ددریمی کرښی سره مو جمع کړه ،چی په نتیجه کی دوهم ماترکس لاسته راغی. په دوهم ماترکس کی مو دوهمه کرښه د 5- په عدد کی ضرب کړی او ددریمی کرښی سره مو جمع کړیده ،چی په نتیجه کی یی دریم ماترکس لاسته راغلی دی. اوس نو د دریم ماترکس څخه بیرته د خطی معادلو سیستم جوړوو.

یعنی:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=1 \\ \qquad x_2-x_3=2 \\ \qquad -12x_3=5 \end{cases}$$

ددی ځایه ښکاره ده چی $x_3=-\frac{5}{12}$ او

$$x_2=2+x_3=2-\frac{5}{12}=\frac{19}{12}$$

$$x_1=1-2x_2-4x_3=1-2.\frac{19}{12}-4(-\frac{5}{12})=1-\frac{19}{6}+\frac{5}{3}=\frac{6-19+10}{6}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

د حل د تعریف له مخی $\vec{c}=(-\frac{1}{2},\frac{19}{12},-\frac{5}{12})$.

بیلګه ۲ ـ

د خطی معادلو لاندنی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ -2x_1+2x_2-4x_3=-1 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

حل ـ دراکړه سوی سیستم ارت سوی ماترکس څیړو او د دریمی او لمړی معادلی ځایونه سره اړوو. یعنی:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vert & 0 \\ -2 & 2 & -4 & \vert & -1 \\ 3 & -1 & 2 & \vert & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 4 & -8 & \vert & -1 \\ 0 & -4 & 8 & \vert & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & -4 & 8 & \vert & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & -4 & 8 & \vert & 1 \end{pmatrix}$$

اوس نوبیرته د خطی معادلو سیستم جوړوو.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad -4x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

دبیلگی په ډول دلته x_3 د آزاد مجهول په صفت ټاکو.په نتیجه کی د سیستم د وروستی معادلی څخه به یی ولرو:

$$x_2 = 2x_3 - \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 2x_3 - 2x_3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

پدی ترتیب مو د راکړه سوی سیستم عمومی حل وموندی.

بیلگه ۳ ـ

د خطی معادلو لاندنی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - \ x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ \qquad 5x_2 + 2x_3 + \ x_4 = -2 \end{cases}$$

حل ـ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&-1&1\\ -2&1&2&3&-3\\ 0&5&2&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&-1&1\\ 0&5&2&1&-1\\ 0&5&2&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&-1&1\\ 0&5&2&1&-1\\ 0&0&0&0&-1\end{array}\right)$$

لیدل کیږی چی په پورتنی سیستم کی د 1-=0 معادله موجوده ده ، فلهذا راکړه سوی سیستم غیر ثابت دی .

§V. د وکتورو خطی وابستګی (Linear dependence).

د n بعدی وکتوری فضاء V_n مطالعه موږ ته د ا امکانات برابروی چی په ډیروحالاتو کی د خطی معادلو د سیستم د څیړنی پروسه ساده تره کړو.

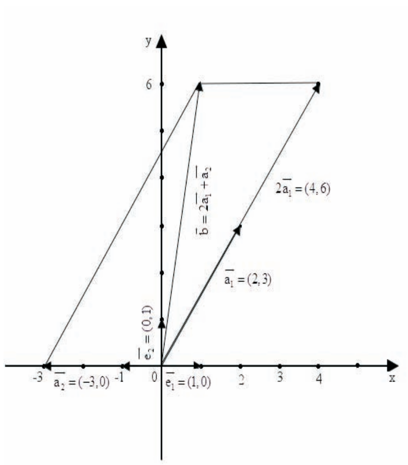
فرضوو چی $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m}$ د V_n وکتوری فضاء ځنی وکتورونه دی .

تعریف ۱ ـ د $\vec{b}\in V_n$ وکتور د $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m}$ د وکتورو د خطی ترکیب په نامه یادیږی ،که د $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_m\in\mathbb{R}$ حقیقی عددونه داسی وجود ولری چی :

$$\vec{b}=\lambda_1.\vec{a_1}+\lambda_2.\vec{a_2}+...+\lambda_m.\vec{a_m}$$

بیلګه ۱ ـ فرضوو چی $\vec{a_1}=(2,3)$ او $\vec{a_2}=(-3,0)$ وی، پس د $\vec{b}=(1,6)$ وکتور د $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ د وکتورو خطی ترکیب دی. ځکه چی : $\vec{b}=2\vec{a_1}+\vec{a_2}$

لاندی شکل زموږ د بیلګی هندسی څرګندونه ده.



شکل ۱

بیلګه ۲ـ

د $\vec{e_1}=(1,0)$ او $\vec{e_2}=(0,1)$ وکتورونه د دوه بعدی فضاء V_2 د واحدو وکتورو په

نامه یادوو. د دوه بعدی فضاء V_2 هر وکټور $\vec{b}=(\alpha_1,\alpha_2)$ د $\vec{e_1}$ او $\vec{e_2}$ د وکټورو خطی ترکیب دی . په رشتیا هم :

$$\vec{b}=\alpha_1\,\vec{e_1}+\alpha_2\,\vec{e_2}$$

شکل ۱ وګوری چی د $\vec{a_1}=(2,3)=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$ کیږی.

بیلګه ۳ ـ

صفری وکټور $\vec{0}\in V_n$ د وکټوری فضاء V_n د هر غیر خالی سیټ د وکټورو خطی ترکیب دی ، په رشتیا هم که $\vec{a_1},....,\vec{a_m}\in V_n$ وی ، نو

$$\vec{0}=0.\vec{a_1}+0.\vec{a_2}+...+0.\vec{a_m}$$

تعریف ۲ ـ د وکټوری فضاء V_n د $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m}$ وکټورونه خطی وابستګی لری ، که لږ تر لږه یو د هغوی څخه د پاته وکټورو خطی ترکیب جوړ کی .

د $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m}$ وکټورونه هغه وخت خطی وابستګی نلری ، که دهغوی په منځ کی داسی وکټور وجود ونلری چی د پاته وکټورو د خطی ترکیب په شکل څرګند سی.

بیلګه ۴ ـ

د $\vec{a_1}=(2,3)$, $\vec{a_2}=(-3,0)$ او $\vec{a_3}=(1,6)$ وکټورونه خطی وابستګی لری . ځکه چی :

$$\vec{a_3}=2\vec{a_1}+\vec{a_2}$$

بیلګه ۵ ـ

دوکټوری فضاء V_n هر سیټ چی صفری وکټور $\vec{0}$ په ځان کی ولری ، خطی وابستګی لری. ځکه چی:

$$\vec{0}=0.\vec{a_1}+0.\vec{a_2}+...+0.\vec{a_m}$$

بیلګه ۶ ـ

د دوه بعدي وکټوري فضاء V_2 د واحدو وکټورو سيټ خطي وابستګی نلري. په رشتيا هم د هر حقيقي عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ دپاره ، $\overrightarrow{e_1} \neq \lambda \overrightarrow{e_2}$ دی ، ځکه چی $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ او $\lambda \overrightarrow{e_2} = (0,\lambda)$ سره کيږی.

قضيه ۱ ـ د V_n دوکټوري فضاء سيټ $\{\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_m}\}$ يوازی او يوازی هغه وخت خطي وابستګی لری چی داسی حقيقي عددونه $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_m \in \mathbb{R}$ ، چی ټوله يی مساوی په صفر نه وی ، موجودوی او لاندنی مساوات صدق وکړی :

$$\lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_m.\overrightarrow{a_m} = \vec{0} \qquad ...(1)$$

ثبوت ـ فرضوو چی خطي وابستګی لری ، نو يو د وکټورو څخه ،د بيلګی په توګه $\overrightarrow{a_1}$ ، د پاتی وکټورو دخطي ترکيب په څير څرګندولای سو. يعنی :

$$\overrightarrow{a_1} = \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_m.\overrightarrow{a_m}$$

ددی ځايه $(-1).\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_m.\overrightarrow{a_m} = \vec{0}$. يعنی (-1) $\lambda_1 = -1$ سره کيږی او د (1) مساوات صدق کوی.

برعکس فرضوو چی داسی حقيقي عددونه $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_m \in \mathbb{R}$ ، چی ټوله يی مساوی په صفر نه وی ، وجودلری ، فرضوو چی $\lambda_1 \neq 0$ دی او د (1) مساوات صدق کوی. يعنی :

$$\lambda_1.\overrightarrow{a_1} + \lambda_2.\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_m.\overrightarrow{a_m} = \vec{0}$$

نظر و فرضيی ته $\lambda_1 \neq 0$ دی .فلهذا :

$$\overrightarrow{a_1} = (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\overrightarrow{a_2} + ... + (-\frac{\lambda_m}{\lambda_1})\overrightarrow{a_m}$$

وروستی مساوات وايی چی د $\overrightarrow{a_1}$ وکټورد $\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}$ د وکټورو خطي ترکيب دی. پدی ډول قضيه په ثبوت ورسيده .

د ثابتی سوی قضيی پر اساس کولای سو چی د وکټورو خطي وابستګی په لاندی ډول سره هم طرح کړو. يعنی لاندنی تعريف د (۲) تعريف سره د (۱) قضيی پر اساس معادل دی.

تعریف ۳ـ د V_n دوکتوری فضاء سیټ $\{\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_m}\}$ خطی وابستګی لری ، که داسی حقیقی عددونه $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ ، چی ټوله یی مساوی په صفر نه وی ، موجودوی او لاندنی مساوات صدق وکړی:

$$\lambda_1.\overrightarrow{a_1}+\lambda_2.\overrightarrow{a_2}+...+\lambda_m.\overrightarrow{a_m}=\vec{0}$$

که پورتنی مساوات یوازی او یوازی پداسی حال کی حقیقت ولری چی $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$ سره وی ، نو وایو چی د $\{\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_m}\}$ د وکتورو سیټ خطی وابستګی نلری.

په مختلفو حالتو کی د (۲) تعریف پر ځای د (۳) تعریف څخه کار اخلو.

نوټ ـ د وکتورو سیټ هغه وخت دخطی وابسته سیټ په نامه یادوو ، چی د ذکر سوی سیټ وکتورونه خطی وابستګی ولری . که دراکړه سوی سیټ وکتورونه خطی وابستګی ونلری نو د وکتورو سیټ د خطی غیر وابسته په نامه یادوو.

بیلګه ۷ ـ

ثابت کی چی په V_n ، n- بعدی وکتوری فضاء کی د واحدو وکتوروسیټ $\overrightarrow{e_1}$ $=(1,0,\dots,0)$ ، $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0,..,0)$ ،... ، $\overrightarrow{e_n}=(0,0,0,\dots,1)$ خطی وابستګی نلری.

ثبوت ـ لاندنی مساوات مشاهده کوو:

$$\lambda_1.\overrightarrow{e_1}+\lambda_2.\overrightarrow{e_2}+...+\lambda_n.\overrightarrow{e_n}=\vec{0}$$

که پورتنی مساوات ارت کړو ، نو داسی به یی ولیکلای سو:

$$\lambda_1(1,0,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,0,..,0)+\dots+\lambda_n(0,0,0,\dots,1)=(0,0,0,\dots,0)$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=(0,0,\dots,0)$$

پورتنی مساوات یوازی او یوازی په هغه صورت کی حقیقت لری چی :

$$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$$

وی . فلهذا نظر و ۳ یم تعریف ته د $\overrightarrow{e_n},\dots,\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}$ واحد وکتورونه خطی وابستګی نلری.

قضیه ۲ ـ که د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ د وکټوروسیټ ،خطی وابسته سب سیټ ولری ، نو ذکر سوی سیټ هم خطی وابستگی لری.

قضیه ۳ ـ که د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ د وکټوروسیټ خطی وابستگی ونلری ، نو دراکړه سوی سیټ هر سب سیټ خطی وابستگی نلری.

قضیه ۴ـ که په n- بعدی وکټوری فضاء V_n کی د $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}$ دوکټورو څخه هر یو د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ د وکټورو خطی ترکیب وی ،نو $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}$ وکټورونه خطی وابستگی لری.

ثبوت ـ دقضیی ثبوت د ریاضی د استقراء په طریقه سرته رسوو.

که $m=1$ سره وی ، نو $\vec{b}_1 = \lambda_1.\overrightarrow{a_1}$ او $\vec{b}_2 = \lambda_2.\overrightarrow{a_1}$ ، څرنګه چی $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$ دی،نو $\lambda_1 \neq 0$، $\lambda_2 \neq 0$ او

$\overrightarrow{a_1} \neq \vec{0}$ دی . فلهذا $\vec{b}_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.\vec{b}_1$ سره کیږی . یعنی د $\vec{b}_1$ او $\vec{b}_2$ وکټورونه خطی وابستگی لری او قضیه صدق کوی.

فرضوو چی قضیه د $m<k$ دپاره حقیقت لری . د $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}$ او د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ د وکټورو سیټونه مشاهده کوو. د قضیی د شرط پر بنسټ لاندنی مساواتونه صدق کوی:

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \lambda_{11}\overrightarrow{a_1} + \lambda_{12}\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_{1k}\overrightarrow{a_k} \\
\vec{b}_2 &= \lambda_{21}\overrightarrow{a_1} + \lambda_{22}\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_{2k}\overrightarrow{a_k} \\
&\vdots \\
\vec{b}_k &= \lambda_{k1}\overrightarrow{a_1} + \lambda_{k2}\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_{kk}\overrightarrow{a_k} \\
\vec{b}_{k+1} &= \lambda_{(k+1)1}\overrightarrow{a_1} + \lambda_{(k+1)2}\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_{(k+1)k}\overrightarrow{a_k}
\end{aligned}
$$

فرضوو چی $\lambda_{(k+1)1} \neq 0$ ده ، لاندنی وکټورونه ګورو:

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{(k+1)1}} \vec{b}_{k+1} = 0.\vec{a_1} + \alpha_{12}\vec{a_2} + \ldots + \alpha_{1k}\vec{a_k}$$

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{(k+1)1}} \vec{b}_{k+1} = 0.\vec{a_1} + \alpha_{22}\vec{a_2} + \ldots + \alpha_{2k}\vec{a_k}$$

$$\vdots$$

$$\vec{c}_k = \vec{b}_k - \frac{\lambda_{k1}}{\lambda_{(k+1)1}} \vec{b}_{k+1} = 0.\vec{a_1} + \alpha_{k2}\vec{a_2} + \ldots + \alpha_{kk}\vec{a_k}$$

پداسې ډول چې α_{ij} عبارت دی دهغو ضریبو څخه چې د لمبدا λ د جنسه د محاسبو په نتیجه کې لاسته راځي، د بیلګې په توګه $\alpha_{12} = \lambda_{12} - \frac{\lambda_{11}\lambda_{(k+1)2}}{\lambda_{(k+1)1}}$ سره کیږي . عمومي ځیره یې $\alpha_{ij} = \lambda_{ij} - \frac{\lambda_{i1}\lambda_{(k+1)j}}{\lambda_{(k+1)1}}$ ده. تر هغه ځایه چې د $\vec{c_k},\ldots,\vec{c_2},\vec{c_1}$ وکټورونه د $\vec{a_k},\ldots,\vec{a_2},\vec{a_1}$ د وکټورو خطي ترکیب دی ، نونظر و فرضیې ته د $\vec{c_k},\ldots,\vec{c_2},\vec{c_1}$ وکټورونه خطي وابستګي لري . فرضوو چې

$$\vec{c_1} = \beta_2\vec{c_2} + \ldots + \beta_k\vec{c_k}$$

$$\vec{b}_1 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{(k+1)1}}\vec{b}_{k+1} = \beta_2(\vec{b}_2 - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{(k+1)1}}\vec{b}_{k+1}) + \ldots + \beta_k(\vec{b}_k - \frac{\lambda_{k1}}{\lambda_{(k+1)1}}\vec{b}_{k+1})$$

او $\vec{b_1} = \beta_2\vec{b_2} + \ldots + \beta_k\vec{b_k} + \beta_{k+1}\vec{b_{k+1}}$ پداسې حال کې چې :

$$\beta_{k+1} = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{(k+1)1}} - \beta_2\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{(k+1)1}} - \ldots - \beta_k\frac{\lambda_{k1}}{\lambda_{(k+1)1}}$$

آخري مساوات راته ښیي چې د $\vec{b}_{k+1},\vec{b}_k,\ldots,\vec{b}_2,\vec{b}_1$ وکټورونه خطي وابستګي لري .
فلهذا قضیه د $m=k$ دپاره هم حقیقت لري. د ریاضي د استقراء د پرنسیپ پر بنسټ زموږ ادعا د هر طبیعي عدد دپاره صدق کوي.

نتیجه - په n- بعدي وکټوري فضاء V_n کې هر د $\vec{a_m},\ldots,\vec{a_2},\vec{a_1}$ وکټوروسیټ خطي وابستګي لري ، که $m>n$ وي.

په رشتیا هم هریو د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ وکټورو څخه د V_n وکټوری فضاء د واحد وکټورو خطی ترکیب دی . د دوه بعدی فضاء دپاره لمړی شکل وګوری.

فلهذا ، نظر و ۴ ـمی قضیی ته هغوی خطی وابستګی لری. د دوهمی قضیی څخه په استفاده سره زموږ ادعا په ثبوت رسیږی.

ددی پاراګراف په پای کی یوه بله قضیه ، چی په راتلونکی کی ورڅخه ګټه اخلو، په ثبوت رسوو.

فرضوو چی $\vec{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$ د n ـبعدی وکټوری فضاء وکټور دی . د $\overrightarrow{a'} = (\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_k)$ او $\overrightarrow{a''} = (\alpha_r, \alpha_{r+1} \dots, \alpha_n)$ وکټورونه ، پداسی حال کی چی $k<n$ او $r>1$ وی، د $\vec{a}$ د وکټور د لنډ سوی shorted وکټورو په نامه یادیږی.

قضیه ۵ ـ که د $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}$ n ـبعدی وکټوروسیټ خطی وابستګی ولری ، نو د هغوی د لنډ شویو وکټورو هر سیټ $\overrightarrow{a'_1}, \overrightarrow{a'_2}, \dots, \overrightarrow{a'_m}$ او $\overrightarrow{a''_1}, \overrightarrow{a''_2}, \dots, \overrightarrow{a''_m}$ هم خطی وابستګی لری.

ثبوت ـ فرضوو چی :

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \\
\vec{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}) \\
&\vdots \\
\vec{a}_m &= (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})
\end{aligned}
$$

د بیلګی په توګه :

$\vec{a}_1 = \lambda_2 . \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_m . \overrightarrow{a_m}$ نو

$$
\begin{cases}
\alpha_{11} = \lambda_2 \alpha_{21} + \dots + \lambda_m \alpha_{m1} \\
\alpha_{12} = \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_m \alpha_{m1} \\
\vdots \\
\alpha_{1n} = \lambda_2 \alpha_{2n} + \dots + \lambda_m \alpha_{mn}
\end{cases}
$$

اوس نو که لمړی k مساواتونه وټاکو ، نو $\overrightarrow{a'_1} = \lambda_2 . \overrightarrow{a'_2} + \dots + \lambda_m . \overrightarrow{a'_m}$ لاسته راځی.

په همدا ډول که یوازې د هغو مساواتو څخه چې په α_{12} پیل کیږي مشاهده کړو ، نو $\overrightarrow{a_1''} = \lambda_2.\overrightarrow{a_2''} + ... + \lambda_m.\overrightarrow{a_m''}$ به لاسته راسي. لاسته راغلي مساواتونه زموږ د نظر نتیجه راکوي.

بیلګه ۸ ـ

د $\vec{a}_1 = (1,-3,2)$, $\vec{a}_2 = (4,5,-3)$ او $\vec{a}_3 = (6,-1,1)$ خطي وابستګي لري ، ځکه چې $\overrightarrow{a_3} = 2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ سره کیږي . دهغوی دوه بعدي لنډ شوي وکتورونه $\overrightarrow{a_3'} = (6,-1)$ ، $\overrightarrow{a_1'} = (1,-3)$, $\overrightarrow{a_2'} = (4,5)$, او $\overrightarrow{a_1''} = (-3,2)$, $\overrightarrow{a_2''} = (5,-3)$, $\overrightarrow{a_3''} = (-1,1)$ هم خطي وابستګي لري ، ځکه چې $\overrightarrow{a_3'} = 2\overrightarrow{a_1'} + \overrightarrow{a_2'}$ او $\overrightarrow{a_3''} = 2\overrightarrow{a_1''} + \overrightarrow{a_2''}$ سره کیږي.

§VI. دوکتورو د متناهي سیټ بیس Base(قاعده) او رنک Rank (صف یا قطار).

فرضوو چې $\left\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}\right\}$ د n- بعدي وکتوري فضاء V_n کیفي سیټ او $\left\{\overrightarrow{a_{i_1}}, \overrightarrow{a_{i_2}}, ..., \overrightarrow{a_{i_r}}\right\}$ د همدې سیټ یو د خطي غیر وابسته سب سیټو څخه دی .

تعریف ۱ـ

$$\left\{\overrightarrow{a_{i_1}}, \overrightarrow{a_{i_2}}, ..., \overrightarrow{a_{i_r}}\right\} \qquad ...(1)$$

$$\left\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}\right\} \qquad ....(2)$$

د خطي غیر وابسته سب سیټ (1) د n- بعدي وکتوري فضاء V_n ،یعنې (2) د بیس Base یا قاعده په نامه یادیږي ، که د (2) د سیټ هر وکتور د (1) د سیټ خطي ترکیب وي.

بیلګه ۱ـ د $\overrightarrow{e_1}$ =(1,0) او $\overrightarrow{e_2}$ =(0,1) د وکتورو سیټ په دوه بعدي فضاء V_2 کې خطي وابستګي نلري. نوموړی سیټ په دوه بعدي فضاء کې د هرهغه سیټ چې نوموړي دوه وکتورونه په ځان کې ولري ، بیس دی .

د { $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$ } { $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$,(2,3) } د سیټ بیس دی ، ځکه چې : (2,3)=2 $\overrightarrow{e_1}$ +3 $\overrightarrow{e_2}$ سره کیږي.

قضیه ۱ـ د n- بعدي وکتوري فضاء V_n په هر سیټ کې چې د صفر څخه خلاف وکتورولري ، بیس وجود لري.

ثبوت ـ فرضوو چی د $\{\vec{a_1},...,\vec{a_m}\}$ د وکتورو په سیټ کی د $\vec{a_{j1}}$ وکتور د صفر څخه خلاف دی .اوس نو گورو چی ددی سیټ پاتی وکتورونه د $\vec{a_{j1}}$ د وکتور خطی ترکیب دی او که نه ؟ که خطی ترکیب نه وی ، یعنی که د $\{\vec{a_{j1}}\}$ سیټ د راکړه سوی سیټ بیس نه وی نو بل داسی د $\vec{a_{j2}}$وکتور لټوو چی د $\vec{a_{j1}}$ سره خطی ترکیب ونلری ،یعنی د $\{\vec{a_{j1}},\vec{a_{j2}}\}$ سب سیټ خطی وابستگی نلری. که لاسته راغلی سب سیټ بیس نه وی ، نو په راکړه سوی سیټ کی د $\vec{a_{j3}}$ داسی وکتور وجود لری چی د $\{\vec{a_{j1}},\vec{a_{j2}},\vec{a_{j3}}\}$ سب سیټ خطی وابستگی ونلری . په همدا ډول مخ ته ځو . څرنگه چی راکړه سوی سیټ m وکتورونه لری ، نو دا پروسه متناهی ده. چی ډیر سی نو وروسته له n قدم څخه د راکړه سوی سیټ بیس ټاکلای سو ، ځکه چی په n- بعدی وکتوری فضاء V_n کی n+1 وکتور د پاتی وکتورو خطی ترکیب دی .

قضیه ۲ ـ دوکتورو د یوه راکړه سوی سیټ دوه مختلفه بیسونه ، د مساوی شمیر وکتورو درلودونکی دی .

ثبوت ـ فرضوو چی د (2) دوکتورو سیټ د دوو بیسو ، یعنی د (1) بیس او د

$$\{\vec{a_{j1}},\vec{a_{j2}},...,\vec{a_{js}}\} \qquad \ldots(3)$$

درلودونکی دی .

فرضوو چی r>s دی. څرنگه چی (1) او (3) دواړه بیس دی ،نو د (1) د سیټ هر وکتور د (3) د سیټ د وکتورو خطی ترکیب دی ، یعنی :

$$\begin{cases}\vec{a_{i1}}=\alpha_{11}\vec{a_{j1}}+\alpha_{12}\vec{a_{j2}}+...+\alpha_{1s}\vec{a_{js}}\\ \vec{a_{i2}}=\alpha_{21}\vec{a_{j1}}+\alpha_{22}\vec{a_{j2}}+...+\alpha_{2s}\vec{a_{js}}\\ \vdots\\ \vec{a_{ir}}=\alpha_{r1}\vec{a_{j1}}+\alpha_{r2}\vec{a_{j2}}+...+\alpha_{rs}\vec{a_{js}}\end{cases}$$

اوس نو د $\{\vec{c_1},...,\vec{c_r}\}$ د وکتورو سیټ داسی مشاهده کوو چی :

$$\overrightarrow{c_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1s})$$
$$\overrightarrow{c_2} = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2s})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{c_r} = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rs})$$

ځرنګه چې $r>s$ دی ، یعنې د وکټورو شمیر د دوکټودی فضاء د بعد څخه ډیر دی ، فلهذا باید خطی وابستګی ولری . یعنې :

$$\overrightarrow{c_1} = \lambda_2 \overrightarrow{c_2} + ... + \lambda_r \overrightarrow{c_r}$$

$$\overrightarrow{c_1} = \lambda_2 \overrightarrow{c_2} + ... + \lambda_r \overrightarrow{c_r} = \lambda_2 (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2s}) + ... + \lambda_r (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rs})$$

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1s}) = (\lambda_2 \alpha_{21} + ... + \lambda_r \alpha_{r1}, ..., \lambda_2 \alpha_{2s} + ... + \lambda_r \alpha_{rs})$$

ددی ځایه :

$$\lambda_2 \overrightarrow{a_{i2}} + ... + \lambda_r \overrightarrow{a_{ir}} = \lambda_2 (\alpha_{21} \overrightarrow{a_{j1}} + \alpha_{22} \overrightarrow{a_{j2}} + ... + \alpha_{2s} \overrightarrow{a_{js}}) + ... + \lambda_r (\alpha_{r1} \overrightarrow{a_{j1}} + \alpha_{r2} \overrightarrow{a_{j2}} + ... + \alpha_{rs} \overrightarrow{a_{js}}) =$$

$$(\lambda_2 \alpha_{21} + ... + \lambda_r \alpha_{r1}) \overrightarrow{a_{j1}} + ... + (\lambda_2 \alpha_{2s} + ... + \lambda_r \alpha_{rs}) \overrightarrow{a_{js}} = {}_{11} \overrightarrow{a_{j1}} + ... + \alpha_{1s} \overrightarrow{a_{js}} = \overrightarrow{a_{i1}}$$

وروستی مساوات دا ښرګندوی چې د (1) د وکټورو سیټ خطی وابستګی لری ، مګر د (1) سیټ بیس دی باید خطی وابستګی ونلری ، فلهذا $r \not> s$ r تر s لوی ندی . په عین ترتیب ثبوتولای سو چې $r \not< s$ ، r تر s کوچنی ندی، ددی ځایه ثابتیږی چې r=s سره دی . فلهذا د راکړه سوی سیټ ټوله بیسونه د مساوی شمیر وکټورو درلودونکی دی.

تعریف ۲ ـ د راکړه سوی وکټورو د سیټ د بیس دوکټورو شمیر د نوموړی سیټ د صف یا رنک Rank په نامه یادیږی.

د رنک کلمه د انګلیسی څخه اخیستل سویده او د صف، قطار یا ردیف په معنی ده. موږ یی دلته د صف په معنی په کار اچوو.

که Aد n- بعدی وکټوری فضاء V_n د وکټورو یو سیټ وی ،نو د نوموړی سیټ رنک په rank A سره ښیو. څرګنده ده چی $\text{rank } A \leq n$ سره دی.

بیلګه ۲ ـ فرضوو چی $A=\{(1,0),(2,0),(3,0)\}$ دی. په آسانی سره لیدل کیږی چی $\text{rank } A=1$ سره دی . دا معنی چی ددغه سیټ ټوله وکټورونه په یوه صف کی قرارلری.

قضیه ۳- په (2) سیټ کی د خطی غیر وابسته وکټورو اعظمی شمیر مساوی دی د هغه سیټ په رنک سره .

ثبوت ـ فرضوو چی $\text{rank}\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}=r$ او $\left\{\overrightarrow{a_{i_1}},\overrightarrow{a_{i_2}},...,\overrightarrow{a_{i_r}}\right\}$ یو د ذکر سوی سیټ د بیس څخه دی . اوس به نو د (2) سیټ یو کیفی سب سیټ $\left\{\overrightarrow{a_{t_1}},\overrightarrow{a_{t_2}},...,\overrightarrow{a_{t_r}},\overrightarrow{a_{t(r+1)}}\right\}$ مشاهده کړو. څرنګه چی د $\overrightarrow{a_{t(r+1)}},...,\overrightarrow{a_{t_1}}$ وکټورونه د بیس د وکټورو خطی ترکیب دی ، نو نوموړی سیټ خطی وابستګی لری . فلهذا د غیروابسته وکټورو اعظمی شمیر په رشتیا هم r دی .

د پورتنی قضیی پر بنسټ د وکټورو د رنک تعریف داسی هم بیانولای سو.

تعریف ۳- دوکټورو په راکړه سوی سیټ کی د خطی غیروابسته وکټورو اعظمی شمیر دراکړه سوی وکټورو د سیټ د رنک په نامه یادیږی.

§VII. دوکټورو په سیټ کی ابتدائی تبدیلونه ـ دوکټورو د سیټ قطری او پوړئیز رنک .

فرضوو چی $A=\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ د n- بعدی وکټوری فضاء V_n د وکټورو کیفی سیټ دی .

تعریف ۱ ـ د A د وکټورو په سیټ کی ابتدايي تبدیلونه عبارت دی له :

۱ـ د Aپه سیټ کی دداسی یوه وکټور اضافه کول چی هغه د A د سیټ د وکټورو خطی ترکیب وی .

۲ـ د Aد سیټ څخه دداسی یوه وکټور حذفول یا لیری کول چی هغه د A د سیټ د وکټورو خطی ترکیب وی .

۳ـ د Aد سیټ یو وکټور د Aد سیټ د بل وکټور سره داسی جمع کول چی هغه په کیفی عدد کی ضرب سوی وی .

۴ـ د Aد سیټ یو د وکټورو څخه په یوه حقیقی عدد کی ، چی صفر نه وی ، ضربول.

بیلګه۱ ـ فرضوو چی د $A=\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}\right\}$ سیټ راکړه سویدی . د $A_1=\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_1}+2\vec{a_2}\}$ سیټ د A د سیټ څخه د (1) ابتدایی تبدیل د عملی کیدو په نتیجه کی لاسته راغلی دی . د بیلګی په ډول که $\vec{a_3}=5\vec{a_1}$ وی ، نو د $A_2=\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4}\right\}$ سیټ د د A د سیټ څخه د(2) ـ دوهمی ابتدایی تبدیل د عملی کیدو په نتیجه کی لاسته راغلی دی (د $\vec{a_3}$ وکټور چی د $\vec{a_1}$ د وکټور خطی ترکیب دی ، حذف یا د سیټ څخه ایسته سویدی) . که دریم ابتدایی تبدیل (3) د A پر سیټ داسی عملی کړو چی د $\vec{a_2}$ وکټور د λ په عدد کی ضرب کړو او د $\vec{a_4}$ د وکټور سره یی جمع کړو نو د $A_3=\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_4}+\lambda\vec{a_2}\right\}$ د وکټورو سیټ به لاسته راسی.

قضیه ۱ـ د هغه سیټ رنک چی دابتدایی تبدیلونو د عملی کیدو په نتیجه کی د راکړه سوی سیټ څخه لاسته راځی ، د اصلی (دراکړه سوی) سیټ د رنک سره مساوی دی . پدی معنی چی د ابتدایی تبدیلو د عملی کیدو په نتیجه کی د سیټ رنک تغیر نه موندی.

ثبوت ـ فرضوو چی $\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m}\right\}\subset V_n$ د وکټورو سیټ او د $\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_r}\right\}$ همدی سیټ بیس دی ، نو rankA=r≤m دی.

د $A_1=\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_m},\lambda_1\vec{a_1}+...+\lambda_m\vec{a_m}\right\}$ سیټ تر ځیرنی لاندی نیسو. څرنګه چی د

$\vec{a}=\lambda_1\vec{a_1}+...+\lambda_m\vec{a_m}$ وکټور د $\vec{a_1},...,\vec{a_m}$ د وکټورو خطی ترکیب دی او هر یو د نوموړی وکټورو څخه د بیس د وکټورو یعنی $\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_r}\right\}$ خطی ترکیب دی ،نو پدی لحاظ د $\vec{a}$ وکټور هم د بیس د وکټورو د جنسه ښودلای سو . پدی معنی چی $\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_r}\right\}$ د A_1 د سیټ بیس هم دی . یعنی $rankA=rankA_1$.

فرضوو چی $\vec{a_m}=\lambda_1\vec{a_1}+...+\lambda_{m-1}\vec{a_{m-1}}$ ، د $A_2=\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_{m-1}}\right\}$ سیټ مشاهده کوو. څرنګه چی د $\vec{a_m}$ وکټور د A د سیټ د پاتی وکټورو خطی ترکیب دی ، نو $r<m$ کیږی . ددی ځایه استدلال کولای سو چی $\left\{\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_r}\right\}\subset A_2$ او د A_2 بیس هم دی ، یعنی $rankA=rankA_2$ سره دی.

اوس به نو د $A_3=\left\{\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ سیټ تر مطالعی لاندی ونیسو. په نوموړی سیټ کی د $\overrightarrow{a_1}$ د وکټور سره د $\overrightarrow{a_2}$ وکټور چی د λ په عدد کی ضرب سویدی ، جمع سویدی. همداډول د $A'=A\bigcup\left\{\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2}\right\}=\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m},\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2}\right\}$ سیټ دپاره نظر و لمړی خاصیت ته چی مخکی مو ثبوت کی ، صدق کوی $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\,A'$:

ځکه چی د A په سیټ کی د $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\in A$ وکټور چی د $\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2}$ دوکټورو خطی ترکیب دی ، اضافه سوی دی ، څو په نتیجه کی یی د A' سیټ لاسته راغلی دی . د $\mathrm{rank}\,A'=\mathrm{rank}A_3$ سره کیږی ، ځکه چی د A' سیټ د A_3 د سیټ څخه داسی لاسته راغلی دی چی د A_3 د سیټ څخه د $\overrightarrow{a_1}$ وکټور چی د $\overrightarrow{a_2}$ او $\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2}$ خطی ترکیب دی ، حذف سویدی. $\overrightarrow{a_1}=(-\lambda)\overrightarrow{a_2}+(\overrightarrow{a_1}+\lambda\overrightarrow{a_2})$

ددی ځایه استدلال کولای سو چی $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A_3$.

په همدی ترتیب یی امتحانولای سو چی د (4) ابتدایی تبدیل په نتیجه کی هم د وکټورو د سیټ په رنک کی تغیر نه راځی. پدی ډول قضیه په ثبوت ورسیده.

تعریف ۲ـ د $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_m}$ د وکټورو سیټ یعنی $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ د پوړئیز (زینه ای) سیټ په نامه یادیږی ، که د لاندنی ځیری درلودونکی وی .

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{a_1}=(0,...,0,\alpha_{1r},...,\alpha_{1n})\\
&\overrightarrow{a_2}=(0,...,0,...,\alpha_{2s},...,\alpha_{2n})\\
&\vdots\\
&\overrightarrow{a_k}=(0,...,0,0,...,\alpha_{kt},...,\alpha_{kn})\\
&\overrightarrow{a_{k+1}}=...=\overrightarrow{a_m}=\vec{0}
\end{aligned}$$

پداسی ډول چی $1\le r<s\ldots<t\le n$ دی او $\alpha_{1r},\alpha_{2s},\ldots,\alpha_{kt}\neq 0$ وی .

بیلګه ۲ ـ د لاندنیو وکټورو سیټ پوړئیزه ځیره لری :

$\overrightarrow{a_1}$ =(0,1,2,3,4)

$\overrightarrow{a_2}$ =(0,0,0,2,0)

$\overrightarrow{a_3}$ =(0,0,0,0,0)

تعریف ۳ ـ د $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_m}$ د وکتورو سیټ یعنی $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ د قطری سیټ په نامه یادیږی ، که د لاندنی ځیری درلودونکی وی .

$$\overrightarrow{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n})$$
$$\overrightarrow{a_2} = (0, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{a_m} = (0, 0, ..., \alpha_{mm}, ..., \alpha_{mn})$$

پداسی ډول چی $\alpha_{11},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{mm}\neq 0$ دی.

بیلګه ۳ـ د لاندنیو وکتورو سیټ قطری ځیره لری :

$\overrightarrow{a_1}$ =(0,1,2,3)

$\overrightarrow{a_2}$ =(0,-1,0)

$\overrightarrow{a_3}$ =(0,0,5)

لیدلای سو چی د وکتورو قطری سیټ په عین حال کی دوکتورو پوړئیز سیټ دی ، خو بر عکس یی حقیقت نلری . یعنی قطری ځیره د پوړئیزی ځیری خاص حالت دی.

قضیه ۲ ـ د ابتدایی تبدیلاتو په استفادی سره د وکتورو هر سیټ و پوړئیز شکل ته راوستلای سو.

دقضیی ثبوت د ګاوس و شیما ته (ددی فصل VI§ وګوری) ورته دی . ځکه نو ثبوت یی د تمرین په ځیر توصیه کوو.

قضیه ۳ ـ که د وکتورو سیټ $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ پوړئیز (په خاص حالت کی قطری) ځیره ولری ،نو ددی سیټ رنګ د همدغه سیټ د هغو وکتورو د شمیر سره مساوی دی چی خلاف د صفر وی.

ثبوت ـ د لمړی قضیی پر بنسټ کولای سو چی ټوله هغه صفری وکټورونه د راکړه سوی سیټ څخه لیری کړو. د راکړه سوی سیټ په رنګ کی به کوم تغیر رانسی.
فرضوو چی د $A=\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\right\}$ په سیټ کی صفری وکتور وجود نلری او دغه سیټ پوړئیزه ځیره ولری. فلهذا

$$\overrightarrow{a_1} = (0,...,0,\alpha_{1r},...,\alpha_{1n})$$
$$\overrightarrow{a_2} = (0,...,0,...,\alpha_{2s},...,\alpha_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{a_m} = (0,...,0,0,...,\alpha_{mt},...,\alpha_{mn})$$

پداسې ډول چې $1\leq r<s\ldots<t\leq n$ دي او $\alpha_{1r},\alpha_{2s},\ldots,\alpha_{mt}\neq 0$ وي .

فرضوو چې :

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+...+\lambda_m\overrightarrow{a_m}=\vec{0} \qquad ..(1)$$

وروستي مساوات داسې هم ليکلای شو:

$$\lambda_1(0,...,0,\alpha_{1r},...,\alpha_{1n})+\lambda_2(0,...,0,...,\alpha_{2s},...,\alpha_{2n})+...+ \lambda_m(0,...,0,0,...,\alpha_{mt},...,\alpha_{mn})=(0,0,...,0)$$

ددې ځايه به لاندني مساوات لاسته راسي:

$$(0,\ldots,\lambda_1\alpha_{1r},\lambda_1\alpha_{1(r+1)},\ldots,\lambda_1\alpha_{1s}+\lambda_2\alpha_{2s},\ldots,\ \lambda_1\alpha_{1n}+\ldots+\lambda_m\alpha_{mn})=(0,0,\ldots,0)$$

څرنگه چې $1\leq r<s\ldots<t\leq$ دي ، نو

$$\begin{cases}\lambda_1\alpha_{1r}=0\\ \lambda_1\alpha_{1s}+\lambda_2\alpha_{2s}=0\\ \vdots\\ \lambda_1\alpha_{1n}+...+\lambda_m\alpha_{mn}=0\end{cases}$$

څرنگه چې $\alpha_{1r}\neq 0$ دي ، نو بايد $\lambda_1=0$ سره وي . په همدې ډول د پورتني سيستم دوهمې معادلې څخه لاسته راځي چې $\lambda_2=0$ سره کيږي. همداسې که وړاندې ولاړ سو ودې نتيجې ته به ورسيږو چې (1) معادله يوازې او يوازې هغه وخت حقيقت لري چې $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$ سره وي. پدې معنی چې د $\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\}$ دوکټورو سيټ خطي وابستگي نلري او رنک يې مساوي په m سره کيږي.

بيلگه ۴ ـ د لاندنيو وکټورو د سيټ رنک په درې سره مساوي کيږي.

$\overrightarrow{a_1}=(0,0,-1,2,3,4)$

$\overrightarrow{a_2}=(0,0,0,5,0,0)$

$\overrightarrow{a_3}=(0,0,0,0,0,-2)$

$\overrightarrow{a_4}=(0,0,0,0,0,0)$

ځکه چې دوکتورو راکړه سوی سیټ پوړئیزه ځیره لری او د $\overrightarrow{a_1}$، $\overrightarrow{a_2}$ او $\overrightarrow{a_3}$ وکتورونه دصفر څخه خلاف دی.

دوکتورود سیټ د رنک د موندلو دپاره موړته لمړی او دوهمه قضیه لاربښوونه کوی. پدی معنی که د وکتورو سیټ راکړه سوی وی ، نو د هغه سیټ د رنک دموندلو دپاره باید لمړی د ابتدایی تبدیلاتو څخه په استفاده سره دغه سیټ ته پوړئیز ه ځیره ورکړو او وروسته هغه وکتورونه چی خلاف د صفر وی وشمیرو.

بیلګه ۵ ـ د وکتورو د لاندنی سیټ رنک ومومندی.

$\overrightarrow{a_1}=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2,3,-5)$, $\overrightarrow{a_3}=(-1,1,2)$

حل:که د $\overrightarrow{a_2}$ د وکتور سره $2\overrightarrow{a_1}$ او د $\overrightarrow{a_3}$ د وکتور سره $\overrightarrow{a_1}$ جمع کړو ،نو د وکتورو لاندنی سیټ به لاسته راسی :

$\overrightarrow{a_1}=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{a_2}+2\overrightarrow{a_1}=(0,1,1)$ او $\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_1}=(0,0,5)$

لاسته داغلی نوی سیټ قطری ځیره لری او رنک یی مساوی په 3 سره کیږی.

پاسنی شمیرنه که د ماترکس په ځیر ولیکو ، نو کار به مو آسانه سی.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

§VIII. د ماترکس رنک .

په §II کی مود خطی معادلو د سیستم د اصلی او ارت سوی ماترکس مفهومونه در وپیژندل. موږکولای سو چی ماترکس په ځانګړی شکل د خطی معادلو د سیستمونه له

ارتباط نه پرته هم وڅېړو.په راتلونکی کی د ماترکس تر مفهوم لاندی د عددونو مستطیلی جدول په نظر کی لرو ، چی په لاندی ډول سره یی لیکلای سو.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

پورتنی جدول m کرښی او n ستونه لری. د ماترکسو د ښودلو دپاره د لاتینی غټو تورو، یعنی $C,B,A,\ldots$ څخه کار اخلو. یعنی:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

اکثرآ ماترکس په لنډ ډول په $A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$ سره ښیو.

که د مضوع د متن څخه ښکاره وی چی راکړه سوی ماترکس څو کرښی او څو ستونه لری ، نو ساده لیکو چی $A=(\alpha_{ij})$. پدی حالت کی i او j په ترتیب سره د راکړه سوی ماترکس د عنصر د کرښی او ستون نمری دی. پدی معنی چی نوموړی عنصر د ماترکس په i ـمه کرښه او په j ـ ام ستون کی ځای پر ځای سویدی. د ماترکسو په اړوند د وکټورو دوو سیټو په هکله ږغیدلای سو . یعنی :

M_1- د کرښه ئیزووکټورو سیټ .

M_2- د ستونی وکټورو سیټ.

په پاسنی ماترکس کی د M_1 سیټ د n، m ـ بعدی وکټورو درلودونکی دی، یعنی

$$M_1=\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_m}\}$$

پداسی حال کی چی :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_1} &= (\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1n}) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{a_m} &= (\alpha_{m1},\alpha_{m2},\ldots,\alpha_{mn}) \end{aligned}$$

او د M_2 سیټ د m، n ـ بعدی وکټورو درلودونکی دی، یعنی

$$M_2=\left\{\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2},...,\overrightarrow{p_n}\right\}$$

پداسی حال کی چی :

$$\overrightarrow{p_1}=(\alpha_{11},\alpha_{21},...,\alpha_{m1})$$
$$\overrightarrow{p_2}=(\alpha_{12},\alpha_{22},...,\alpha_{m2})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{p_n}=(\alpha_{1n},\alpha_{2n},...,\alpha_{mn})$$

تعریف ۱ـ د ماترکس کرښه ئیز رنک عبارت دی د ماترکس د کرښه ئیز و وکټورو د سیټ د رنک څخه .

بیلګه ۱ ـ

په لاندنی ماترکس کی د هغه رنک موندو:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

څرنګه چی د راکړه سوی ماترکس کرښه ئیز وکټورونه قطری بڼه لری نود VII§ د دریمی قضیی پر بنسټ زموږ د ماترکس رنک 3 دی.

په آسانی سره ازمویلای سو چی د $\overrightarrow{p_1}=(1,0,0),\overrightarrow{p_2}=(0,-1,0),\overrightarrow{p_3}=(2,3,5)$ وکټورونه خطی وابستګی نلری ، یعنی د A د ماترکس ستونی رنک هم په 3 سره مساوی کیږی. وروسته به یی وګورو چی د ماترکسو کرښه ئیز او ستونی رنک یود بله سره مساوی دی.

تعریف ۲ ـ د A پر ماترکس باندی ابتدائی تبدیلونه عبارت دی له :

۱ـ په ماترکس کی د دوو کرښو (ستونو) د ځایو تبدیلول.

۲ـ د ماترکس په کرښه (ستون) کی د حقیقی عدد ،چی صفر نه وی، ضربول.

۳ـ د ماترکس د کرښو (ستونو) څخه په یوه کرښه (یو ستون) کی د یوه حقیقی عدد،چی صفر نه وی، ضربول او د بلی کرښی (بل ستون) سره جمع کول.

په VII§ کی ابتدائی تبدیلونه دوکتورو پر سیټ راکړه سوی وه . د لمړی قضیی څخه استنباط کیږی چی د ابتدائی تبدیلو د عملی کولو په نتیجه کی دوکتورو د کرښه ئیز (ستونی) سیټ په رنک کی تغیر نه راځی.

قضیه ۱ ـ دراکړه سوی ماترکس پر ستونو باندی د ابتدائی تبدیلو د عملی کولو په نتیجه کی د نوموړی ماترکس په کرښه ئیز رنک کی تغیر نه راځی . همداډول دراکړه سوی ماترکس پر کرښو باندی د ابتدائی تبدیلو د عملی کولو په نتیجه کی د نوموړی ماترکس په ستونی رنک کی تغیر نه راځی.

ثبوت ـ فرضوو چی د

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

ماترکس راکړه سویدی او $M_1=\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\}$ د نوموړی ماترکس د کرښه ئیزو وکتورو سیټ دی .

دلته به ثابته کړو چی که دراکړه سوی ماترکس پر ستونو باندی ابتدائی تبدیلونه عملی کړو ، نو د نوموړی ماترکس په کرښه ئیز رنک کی تغیر نه راځی .

د A پر ماترکس باندی لاندنی ابتدائی تبدیلونه عملی کوو:

۱ـ د لمړی او دوهم ستون ځایونه سره اړوو.

۲ ـ په لمړی ستون کی د $k\neq0$ عدد ضربوو .

۳ـ د A د ماترکس په دوهم ستون کی د λ عدد ضربو او د لمړی ستون سره یی جمع کوو.

د پورتنیو تبدیلو د عملی کولو په نتیجه کی دری نوی ماترکسونه د B_2,B_1 او B_3 لاسته راځی چی موږ هغوی یوازی د کرښه ئیز وکتورو په بڼه لیکو:

$$B_1 : \overrightarrow{a_1}^{(1)} = (\alpha_{21}, \alpha_{11}, ..., \alpha_{1n})$$
$$\overrightarrow{a_2}^{(1)} = (\alpha_{22}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{a_m}^{(1)} = (\alpha_{m2}, \alpha_{m1}, ..., \alpha_{mn})$$

$$B_2 : \overrightarrow{a_1}^{(2)} = (\alpha_{11}, k\,\alpha_{21}, ..., \alpha_{1n})$$
$$\overrightarrow{a_2}^{(2)} = (\alpha_{21}, k\,\alpha_{22}, ..., \alpha_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{a_m}^{(2)} = (\alpha_{m1}, k\,\alpha_{m2}, ..., \alpha_{mn})$$

$$B_3 : \overrightarrow{a_1}^{(3)} = (\alpha_{11} + \lambda\alpha_{21}, \alpha_{21} ..., \alpha_{1n})$$
$$\overrightarrow{a_2}^{(3)} = (\alpha_{21} + \lambda\alpha_{22}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{a_m}^{(3)} = (\alpha_{m1} + \lambda\alpha_{m2}, \alpha_{m2}, ..., \alpha_{mn})$$

اوس به نو ثابته کړو چی $\text{rank}M_1 = \text{rank}M_1^1 = \text{rank}M_1^2 = \text{rank}M_1^3$ سره کیږی.پداسی حال کی چی M_1^1, M_1^2 او M_1^3 د B_2,B_1 او B_3 د کرښه ئیزووکتورو سیټونه دی.

د معادلو لاندنی سیستمونه مشاهده کوو:

$$x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + ... + x_m\overrightarrow{a_m} = \vec{0} \qquad ...(1)$$

$$x_1\overrightarrow{a_1}^{(1)} + x_2\overrightarrow{a_2}^{(1)} + ... + x_m\overrightarrow{a_m}^{(1)} = \vec{0} \qquad ...(2)$$

$$x_1\overrightarrow{a_1}^{(2)} + x_2\overrightarrow{a_2}^{(2)} + ... + x_m\overrightarrow{a_m}^{(2)} = \vec{0} \qquad ...(3)$$

$$x_1\overrightarrow{a_1}^{(3)} + x_2\overrightarrow{a_2}^{(3)} + ... + x_m\overrightarrow{a_m}^{(3)} = \vec{0} \qquad ...(4)$$

د پورتنیو معادلو عمومی بڼه په لاندی ډول سره ده:

$$\begin{cases} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_m\alpha_{m1} = 0 \\ x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_m\alpha_{m2} = 0 \\ \vdots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_m\alpha_{mn} = 0 \end{cases} \qquad \ldots(1')$$

$$\begin{cases} x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_m\alpha_{m2} = 0 \\ x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_m\alpha_{m1} = 0 \\ \vdots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_m\alpha_{mn} = 0 \end{cases} \qquad \ldots(2')$$

$$\begin{cases} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_m\alpha_{m1} = 0 \\ kx_1\alpha_{12} + kx_2\alpha_{22} + \ldots + kx_m\alpha_{m2} = 0 \\ \vdots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_m\alpha_{mn} = 0 \end{cases} \qquad \ldots(3')$$

$$\begin{cases} x_1(\alpha_{11} + \lambda\alpha_{12}) + x_2(\alpha_{21} + \lambda\alpha_{22}) + \ldots + x_m(\alpha_{m1} + \lambda\alpha_{m2}) = 0 \\ x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_m\alpha_{m2} = 0 \\ \vdots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_m\alpha_{mn} = 0 \end{cases}$$
$$\ldots(4')$$

د هغه ځایه چې د $(2')$ ، $(3')$ او $(4')$ سیستمونه د $(1')$ سیستم څخه د ابتدائی تبدیلونو د عملی کیدو په نتیجه کی لاسته راغلی دی ، نو د III§ د لمړی قضیی پر بنسټ هغوی په خپل منځ کی معادل دی . ددی ځایه استنباط کیږی چې د (1),(2),(3) او (4) سیستمونه هم په خپل منځ کی معادل دی .

اوس نو فرضوو چې د $rankM_1=r\leq m$ او د $\overrightarrow{a_r},..,\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_1}$ وکتورونه خطی وابستګی نلری، یعنی

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_r\overrightarrow{a_r} = \vec{0} \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$$

ددی ځایه د $\left\{\overrightarrow{a_1}^{(1)},\overrightarrow{a_2}^{(1)},...,\overrightarrow{a_r}^{(1)}\right\},\left\{\overrightarrow{a_1}^{(2)},\overrightarrow{a_2}^{(2)},...,\overrightarrow{a_r}^{(2)}\right\}$ او
$\left\{\overrightarrow{a_1}^{(3)},\overrightarrow{a_2}^{(3)},...,\overrightarrow{a_r}^{(3)}\right\}$ سیتونه هم خطی وابستګی نلری، ځکه چی د $1\leq i\leq 3$ دپاره به
یی ولرو:

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}^{(i)}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}^{(i)}+...+\lambda_r\overrightarrow{a_r}^{(i)}=\vec{0}\leftrightarrow$$
$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}^{(i)}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}^{(i)}+...+\lambda_r\overrightarrow{a_r}^{(i)}+0.\overrightarrow{a_{r+1}}^{(i)}+...+0.\overrightarrow{a_r}^{(i)}=\vec{0}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+...+\lambda_r\overrightarrow{a_r}+0.\overrightarrow{a_{r+1}}+...+0.\overrightarrow{a_m}=\vec{0}$$
$$\leftrightarrow\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+...+\lambda_r\overrightarrow{a_r}=\vec{0}\leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_r=0$$

فلهذا د M_1^1, M_1^2 او M_1^3 رنک تر r کوچنی ندی.دهر j $(r\leq j\leq m)$ دپاره د
$\overrightarrow{a_j}=\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}$ د مساوات څخه
$\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}-\overrightarrow{a_j}=\vec{0}$ لاسته راځی.

ددی ځایه :

$$\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(1)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(1)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(1)}-\overrightarrow{a_j}^{(1)}=\vec{0}$$
$$\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(2)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(2)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(2)}-\overrightarrow{a_j}^{(2)}=\vec{0}$$
$$\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(3)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(3)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(3)}-\overrightarrow{a_j}^{(3)}=\vec{0}$$

یعنی

$$\overrightarrow{a_j}^{(1)}=\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(1)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(1)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(1)}$$
$$\overrightarrow{a_j}^{(2)}=\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(2)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(2)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(2)}$$
$$\overrightarrow{a_j}^{(3)}=\beta_{1j}\overrightarrow{a_1}^{(3)}+\beta_{2j}\overrightarrow{a_2}^{(3)}+...+\beta_{rj}\overrightarrow{a_r}^{(3)}$$

ددی ځایه استنباط کیږی چی د $\left\{\vec{a}_1^{(1)}, \vec{a}_2^{(1)}, \dots, \vec{a}_r^{(1)}\right\}$ سیټ د M_1^1 بیس ، د $\left\{\vec{a}_1^{(2)}, \vec{a}_2^{(2)}, \dots, \vec{a}_r^{(2)}\right\}$ سیټ د M_1^2 بیس او د $\left\{\vec{a}_1^{(3)}, \vec{a}_2^{(3)}, \dots, \vec{a}_r^{(3)}\right\}$ سیټ د M_1^3 بیس دی. پدی معنی چی :

$$\operatorname{rank} M_1^1 = \operatorname{rank} M_1^2 = \operatorname{rank} M_1^3 = r$$

د نورو ستونی ابتدائی تبدیلونو د پاره عین نتیجه لاسته راځی.

د قضیی د پاتی نیمایی ثبوت کاملاً مشابه دی.

قضیه ۲ ـ د هر ماترکس کربښه ئیز او ستونی رنک سره مساوی دی .

ثبوت ـ فرضوو چی په راکړه سوی ماترکس کی کربښه ئیز رنک مساوی په r او ستونی رنک مساوی په s سره دی . د کار د آسانی دپاره فرضوو چی د A د ماترکس لمړی r کربښی خطی وابستگی نلری (زموږ فرضیه صحیح ده،ځکه چی د کربښو د ځایو د تبدیلولوپه نتیجه کی موږ تل یو ماترکس و نوموړی حالت ته راوستلای سو).پدی حساب هر $r+i$ مه $(r<i\leq m)$ کربښه د لمړیو r کربښو خطی ترکیب دی . که د $r+i$ ـمی $(r<i\leq m)$ کربښی څخه هغه کربښی چی هغوی یی خطی ترکیب دی ، تفریق کړو ، هغه کربښه لاسته راځی چی ټول عنصرونه یی مساوی په صفر دی . که پر هری $r+i$ ـمی $(r<i\leq m)$ کربښی باندی ابتدائی تبدیلونه عملی کړو ، نو لاندنی ماترکس به لاسته راسی:

$$B=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n\dots} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

چی کربښه ئیز رنک یی r او ستونی رنک یی s دی.

اوس نو فرضوو چی په ماترکس کی لمړی s ستونونه خطی وابستگی نلری، نو د راکړه سوی ماترکس پر ستونو باندی د ابتدائی تبدیلونو د عملی کیدو په نتیجه کی لاندنی ماترکس لاسته راځی:

$$B_1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rs} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

چی کرښه ئیز رنک یی r او ستونی رنک یی s دی.

اوس به نو فرض کړو چی $s>r$ دی ، فلهذا د $\overrightarrow{b_1}=(\alpha_{11},\alpha_{21},...,\alpha_{r1})$ ، ...، $\overrightarrow{b_s}=(\alpha_{1s},\alpha_{2s},...,\alpha_{rs})$ وکتورونه د قضیه ۴ ($V§$) پر بنسټ خطی وابستگی لری . پدی معنی چی د B_1 ماترکس اول s ستونه خطی وابستگی لری . خو دا ادعا زموږ د فرضیی خلاف ده . پس $s \ngtr r$.په همدی ډول ثابتولای سو چی $r \ngtr s$.
فلهذا $r=s$ دی.

تعریف ۳ ـ د ماترکس رنک عبارت دی د نوموړی ماترکس د کرښه ئیز او ستونی رنک د مشترک عدد(شمیر) څخه.

د ماترکس رنک د ابتدائی تبدیلونو په استفاده سره داسی لاسته راوړای سو چی کرښه ئیز ویکتورونه د هغه تبدیلونو په نتیجه کی و پوړئیز شکل ته راولو.

IX§. دخطی معادلو د سیستم د ثابتوالی معیار.

فرضوو چی د خطی معادلو لاندنی سیستم راکړه سویدی .

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

د نوموړی سیتم د حل په وخت کی لمړی پوښتنه چی طرح کیږی هغه ددغه سیستم د ثابتوالی مسئله ده. د مترکس د رنک د مفهوم د مشاهدی په نتیجه کی په آسانی سره ودی پوښتنی ته جواب ورکولای سو.

څرنګه لکه مخ کې چې مو په نښه کړه (I§) د (1) سیستم داصلی ماترکس ستونی وکتورونه په $\vec{p_1},\vec{p_2},...,\vec{p_n}$ سره ښیو او $\vec{b}$ د (1) سیستم د معادلاتو د ثابتو عنصرو ستون دی ، فلهذا د (1) سیستم د ارت سوی ماترکس د ستونی وکتورو سیټ عبارت دی له : $\{\vec{p_1},\vec{p_2},...,\vec{p_n},\vec{b}\}$.

قضیه ۱- (کرونکرKronecker - کاپیلی Capelli)

د خطی معادلو سیستم یوازی او یوازی هغه وخت ثابت دی چې د (1) سیستم د اصلی او ارت سوی ماترکس رنک سره مساوی وی .

ثبوت ـ د (1) سیستم په وکتوری بڼه لیکو:

$$x_1\vec{p_1}+x_2\vec{p_2}+...+x_n\vec{p_n}=\vec{b} \qquad \ldots(2)$$

د کافی شرط ثبوت :

فرضوو چې :

$$\text{rank}\{\vec{p_1},\vec{p_2},...,\vec{p_n}\}=\text{rank}\{\vec{p_1},\vec{p_2},...,\vec{p_n},\vec{b}\}=r$$

پدی معنی چې د $\vec{p_1},\vec{p_2},...,\vec{p_r}$ وکتورونه خطی وابستګی نلری. پس دا وکتورونه په (2) ـ هم سیستم کی هم بیس تشکیلوی او

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{p_1}+\lambda_2\vec{p_2}+...+\lambda_r\vec{p_r}=\lambda_1\vec{p_1}+\lambda_2\vec{p_2}+...+\lambda_r\vec{p_r}+0.\vec{p_{r+1}}+...+0.\vec{p_n}$$

یعنی $x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2,...,x_r=\lambda_r, x_{r+1}=0,...,x_n=0$ د (2)سیستم حل دی.فلهذا دغه سیستم ثابت دی.

دلازمی شرط ثبوت:

فرضوو چې (2) ـ هم سیستم ثابت او د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ وکتور یی حل دی، نو

$$\alpha_1\vec{p_1}+\alpha_2\vec{p_2}+...+\alpha_n\vec{p_n}=\vec{b}$$

ثابتوو چې د راکړه سو ی سیستم د اصلی او ارت سوی ماترکس رنک سره مساوی دی .

فرضوو چی د $\vec{p_n},...,\vec{p_2},\vec{p_1}$ د وکټورو د سیټ رنک مساوي په s سره دی او د $\vec{p_s},...,\vec{p_2},\vec{p_1}$ وکټورونه دنوموړي سیټ بیس تشکیلوی. د $\vec{p_s},...,\vec{p_2},\vec{p_1}$ وکټورونه د $\left\{\vec{p_n},...,\vec{p_2},\vec{p_1},\vec{b}\right\}$ په سیټ کی هم خطی وابستګی نلری، علاوه پر دی:

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{p_{s+1}} = \beta_{11}\vec{p_1} + \ldots + \beta_{1s}\vec{p_s} \\
&\vdots \\
&\vec{p_n} = \beta_{(n-s)}\vec{p_1} + \ldots + \beta_{(n-s)s}\vec{p_s}
\end{aligned}
$$

فلهذا:

$$
\begin{aligned}
\vec{b} &= \alpha_1\vec{p_1} + \alpha_2\vec{p_2} + \ldots + \alpha_n\vec{p_n} = \\
&= \alpha_1\vec{p_1} + \alpha_2\vec{p_2} + \ldots + \alpha_s\vec{p_s} + \alpha_{s+1}(\beta_{11}\vec{p_1} + \ldots + \beta_{1s}\vec{p_s}) + \ldots + \\
&\qquad \alpha_n(\beta_{(n-s)1}\vec{p_1} + \ldots + \beta_{(n-s)s}\vec{p_s}) = \\
&= (\alpha_1 + \alpha_{s+1}\beta_{11} + \ldots + \alpha_n\beta_{(n-s)1})\vec{p_1} + \ldots + (\alpha_s + \ldots + \alpha_n\beta_{(n-s)s})\vec{p_s}
\end{aligned}
$$

یعنی د $\vec{p_s},...,\vec{p_2},\vec{p_1}$ وکټورونه د ارت سوی ماترکس د ستونی وکټورو د سیټ بیس هم تشکیلوی. فلهذا د ارت سوی ماترکس رنک هم په s سره مساوي کیږی.

که د خطی معادلو د سیستم مشخصه بیلګه راکړه سوی وی ، نود هغه د ثابت والی د جواب په هکله باید لمړی د نوموړی سیستم د اصلی او ارت سوی ماترکس رنک وموندو او بیا د کرونکر-کاپیلی د قضیی څخه کار واخلو.

قضیه ۲ـ ددی دپاره چی د خطی معادلو یو ثابت سیستم معین وی (یعنی یوازنی حل ولری) لازمه او کافی ده چی د اصلی ماترکس رنک د سیستم د مجهولونو د شمیر سره مساوی وی.

دقضیی ثبوت د تمرین په شکل تاسو ته توصیه کوو.

X§. د خطي معادلو هم جنسه Homogeneous سيستمونه او د هغوی د حل خاصيتونه .

فرضوو چې د خطي معادلو لاندنی سيستم راکړه سوی دی :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

تعريف ۱ ـ د خطي معادلو سيستم (1) د خطي معادلود هم جنسه Homogeneous سيستم په نامه يادوو ، که ددغه سيستم هره معادله هم جنسه وی ، يعنی $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$ وی.

د Homogeneous د کليمې دپاره کله کله د عربی کليمې متجانس څخه هم کار اخيستل کيږی .

د خطي معادلو په هم جنسه سيستم کی د اصلي ماترکس څخه ارت سوی ماترکس داسی لاسته راوړو چی په اصلي ماترکس کی يو د صفر ستون اضافه کوو. تر هغه ځايه چی پوهيږو د صفری ستون د اضافه کيدو په نتيجه کی د ماترکس په رنک کی تغير نه راځی. فلهذا د خطي معادلو هم جنسه سيستم د کرونکرـکاپيلي د قضيي پر بنسټ تل ثابت وی . په آسانی سره ليدلای سو چی $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ يا د $\vec{0}=(0,0,...,0)$ وکتور د خطي معادلو د هم جنسه سيستم د حلو څخه يو حل دی. اوس نو که دخطي معادلو د هم جنسه سيستم اصلي ماترکس رنک د مجهولو د شمير سره مساوی وی ، نو صفری حل د نوموړی سيستم يوازنی حل دی .

پداسی حال کی چی د خطي معادلو د هم جنسه سيستم د اصلي ماترکس رنک تر n کوچنی وی ، نو د گاوس په طريقه (III§) سيستم و پوړ ئيز شکل ته راولو. په نتيجه کی يی د معادلو شمير د مجهولو تر شمير لږ وی ،ځکه نو سيستم به د لايتناهی حلونو درلودونکی وی . څرگنده ده چی د خطي معادلو د هم جنسه سيستم د حل سيټ د په زړه پوری خاصيتو درلودونکی دی چی لاندی به يی وگورو.

قضيه ۱ـ که د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ وکتورد خطي معادلو د هم جنسه سيستم حل وی ،نو د هر عدد λ دپاره $\lambda\vec{a}=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n)$ هم د همدغه سيستم حل دی.

ثبوت ـ د خطي معادلو هم جنسه سيستم په وکتوری شکل گورو :

$$x_1\overrightarrow{p_1}+x_2\overrightarrow{p_2}+...+x_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0} \qquad \ldots(2)$$

څرنګه چې د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ وکټور د (1) د سیستم حل دی ،نو

$$\alpha_1\overrightarrow{p_1}+\alpha_2\overrightarrow{p_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

سره کیږی. ددی ځایه

$$\lambda(\alpha_1\overrightarrow{p_1}+\alpha_2\overrightarrow{p_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{p_n})=\lambda.\vec{0}=\vec{0}$$

$$(\lambda\alpha_1)\overrightarrow{p_1}+(\lambda\alpha_2)\overrightarrow{p_2}+...+(\lambda\alpha_n)\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

یعنی د $\lambda\vec{a}$ وکټور هم د (2) ـ هم سیستم حل دی.

قضیه ۲ ـ که د $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ او $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ وکټورونه د (2) ـ هم سیستم حلونه وی ، نو د $\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$ وکټور هم د (2) ـ هم سیستم حل دی.

ثبوت ـ فرضوو چې د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکټورونه د(2) ـ هم سیستم حلونه دی. یعنی :

$$\alpha_1\overrightarrow{p_1}+\alpha_2\overrightarrow{p_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

$$\beta_1\overrightarrow{p_1}+\beta_2\overrightarrow{p_2}+...+\beta_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

ددی ځایه

$$\alpha_1\overrightarrow{p_1}+\alpha_2\overrightarrow{p_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{p_n}+\beta_1\overrightarrow{p_1}+\beta_2\overrightarrow{p_2}+...+\beta_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

$$(\alpha_1+\beta_1)\overrightarrow{p_1}+(\alpha_2+\beta_2)\overrightarrow{p_2}+...+(\alpha_n+\beta_n)\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

پدی معنی چې د $\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$ وکټور هم د (2) ـ هم سیستم حل دی.

د تیرو دوو قضیو څخه لاندنی نتیجه استباط کولای سو .

نتیجه ـ که د $\overrightarrow{c_k},...,\overrightarrow{c_2},\overrightarrow{c_1}$ وکټورونه د خطی معادلو د هم جنسه سیستم (2) حلونه وی ،نو ددغو وکټورو هرخطی ترکیب ، یعنی $\vec{c}=\gamma_1\overrightarrow{c_1}+\gamma_2\overrightarrow{c_2}+...+\gamma_k\overrightarrow{c_k}$ هم د نوموړی سیستم حل دی.

دلته باید یادونه وکو چی ،که په (1) سیستم کی لږ تر تره یو د ثابتو اجزاؤ څخه د صفر څخه خلاف وی ، نو تیری لمړی او دو همه قضیه صدق نه کوی .

د خطی معادلو د غیر معین سیستم د حلونو سیټ به په U سره وښیو. د U سیټ یو لایتناهی سیټ دی او پدی سیټ کی تولہ وکتورونه n - بعدی دی ، یعنی $U \subset V_n$. پدی پوهیږو چی هر s- ام n -بعدی وکتور ، پداسی حال کی چی $s>n$ وی ، خطی وابستگی لری . ددی ځایه استنباط کولای سو چی د نوموړو وکتورو د سیټ څخه د $\overrightarrow{c_m},...,\overrightarrow{c_2},\overrightarrow{c_1}$ سب سیټ چی په اعظمی شکل خطی وابستگی ونلری ، ټاکلای سو.

نوټ ـ د وکتورو سیت هغه وخت په اعظمی شکل خطی وابستگی نلری ، که پر هغه سیټ باندی یو بل وکتور اضافه کړو ، نو هغه سیټ به خطی وابسته وی. ځکه نو د راکړه سوی سیستم هر حل $\vec{c} \in U$ د $\overrightarrow{c_m},...,\overrightarrow{c_2},\overrightarrow{c_1}$ د وکتورو د خطی ترکیب په شکل راوړلای سو.

تعریف ۲ ـ د هم جنسه خطی معادلو د سیستم د غیر معین د حلو هرخطی غیر وابسته سیټ ، چی د هغو پذریعه نور حلونه دهغوی د خطی ترکیب په څیر راوستلای سو ، د حل داساسی سیستم په نامه یادیږی.

دهغو واقعیتو څخه چی د هم جنسه خطی معادلو د سیستم په هکله پوه سوو، استنباط کیږی چی:

د هم جنسه خطی معادلو هر سیستم چی غیر معین حل ولری ،د حل داساسی سیستم درلودونکی دی. همداډول امکان لری چی د حل د څو مختلفو اساسی سیستمو درلودونکی وی ،ولی د حل شمیر یی په راکړه سوی سیستمو کی تل مساوی دی.

قضیه ۳ ـ که د (2)خطی معادلو د سیستم د ماترکس رنک د مجهولود شمیر څخه لږ وی ، نو دخطی معادلو د سیستم د اساسی حل هر سیستم $n-r$ عنصرونه لری ، پداسی ډول چی r د ماترکس رنک او n د مجهولو شمیر دی.

ثبوت ـ فرضوو چی $1 \leq r<n$ دی.

که لاندنی سیستم د گاوس په طریقه حل کړو ،

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

نو په نتیجه کی به یو سیستم لاسته راسی چی r معادلی ولری . ددی ځایه استنباط کیږی چی r اساسی مجهولونه او $n-r$ آزاد مجهولونه وجود لری . فرضوو چی آزاد مجهولونه یی عبارت دی له $x_n,...,x_{r+2},x_{r+1}$. څکه نو د (2) سیستم عمومی حل به داسی شکل ولری :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1(r+1)}x_{r+1} + \alpha_{1(r+2)}x_{r+2} + ... + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \alpha_{2(r+1)}x_{r+1} + \alpha_{2(r+2)}x_{r+2} + ... + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{r(r+1)}x_{r+1} + \alpha_{r(r+2)}x_{r+2} + ... + \alpha_{rn}x_n \end{cases} \qquad ...(4)$$

پداسی ډول چی $\alpha_{rn},...,\alpha_{1(r+2)},\alpha_{1(r+1)}$ عددونه دی. اوس نو د $x_n^\circ,...,x_{r+2}^\circ,x_{r+1}^\circ$ د هر قیمت د انتخاب په نتیجه کی اساسی مجهولونه لاسته راوړو. یعنی د (2) سیستم حل $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ,...,x_r^\circ,x_{r+1}^\circ,...,x_n^\circ)$ موندو. غیر له دی څخه د سیستم هر حل د (4) فارمول پر بنسټ په آزادو مجهولو د وضع کولو په نتیجه کی لاسته راوړو.

د $n-r$ بعدی وکتوری فضاء واحد وکتورونه مشاهده کوو:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,...,0) \\ \vec{e}_2 &= (0,1,...,0) \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0,0,...,1) \end{aligned}$$

څرنګه چی معلومه د ه پورتنی واحد وکتورونه په V_{n-r} بعدی وکتوری فضاء کی خطی وابستګی نلری او ددی فضاء هر وکتور $\vec{a} \in V_{n-r}$ دهغوی خطی ترکیب دی. په (4) فارمول کی اوس نو د آزادو مجهولو $x_n,...,x_{r+1}$ پر ځای د واحد وکتورو $\vec{e}_n,...,\vec{e}_2,\vec{e}_1$ اجزاوی وضع کوو ، په نتیجه کی یی د (2) سیستم $n-r$ مختلف حلونه لاسته راځی.

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= (\alpha_{1(r+1)}, \alpha_{2(r+1)},..., \alpha_{r(r+1)}, 1, 0,..., 0) \\ \vec{c}_2 &= (\alpha_{1(r+2)}, \alpha_{2(r+2)},..., \alpha_{r(r+2)}, 0, 1,..., 0) \\ &\vdots \\ \vec{c}_{n-r} &= (\alpha_{1n}, \alpha_{2n},..., \alpha_{rn}, 0, 0,..., 1) \end{aligned}$$

ادعا کوو چی د $\left\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_{n-r}\right\}$ وکتورو سیټ دخطی معادلو د (3) سیستم د حل اساسی سیستم دی.

په رښتیا هم ، نوموړی وکتورونه خطی وابستګی نلری ، که یی خطی وابستګی درلودای ، نو د قضیه ۵ (V§) پر بنسټ ددغه سیټ لنډ سوی وکتورونه ، یعنی $\vec{e}_{n-r}, ..., \vec{e}_2, \vec{e}_1$ به هم خطی وابستګی در لودلای .

فرضوو چی $\vec{c} = (\gamma_1, ..., \gamma_r, \gamma_{r+1}, ..., \gamma_n)$ د (1) سیستم یو کیفی حل دی. د $\vec{d} = \gamma_1 \vec{c}_1 + ... + \gamma_{n-r} \vec{c}_{n-r} - \vec{c}$ وکتور چی د $\vec{c}, \vec{c}_{n-r}, ..., \vec{c}_2, \vec{c}_1$ وکتورو،یعنی د (3) سیستم د حلونو، خطی ترکیب دی مشاهده کوو. نظر د (2) ـ همی قضیی و نتیجی ته د $\vec{d}$ وکتور هم د (3) سیستم حل دی . اوس نو که په آخری مساوات کی د $\vec{c}, \vec{c}_{n-r}, ..., \vec{c}_2, \vec{c}_1$ دوکتورو پر ځای دهغوی قیمتونه کښیږدو:

$$\vec{d} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r, 0, ..., 0)$$

لاسته راسی، پداسی حال کی چی:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \gamma_1 \alpha_{1(r+1)} + \gamma_2 \alpha_{1(r+2)} + ... + \gamma_r \alpha_{1n} \\
\delta_2 &= \gamma_1 \alpha_{2(r+1)} + \gamma_2 \alpha_{2(r+2)} + ... + \gamma_r \alpha_{2n} \\
&\vdots \\
\delta_r &= \gamma_1 \alpha_{r(r+1)} + \gamma_2 \alpha_{r(r+2)} + ... + \gamma_r \alpha_{rn}
\end{aligned}$$

په همدا ډول د (4) فارمول له مخی په هغه صورت کی چی $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$ وی ، صفری حل لاسته راځی . فلهذا $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_r = 0$ یعنی $\vec{d} = \vec{o}$ دی. ددی ځایه

$$\gamma_1 \vec{c}_1 + \gamma_2 \vec{c}_2 + ... + \gamma_{n-r} \vec{c}_{n-r} - \vec{c} = \vec{0}$$

او

$$\vec{c} = \gamma_1 \vec{c}_1 + \gamma_2 \vec{c}_2 + ... + \gamma_{n-r} \vec{c}_{n-r} \qquad \ldots(5)$$

پدی معنی چی د(3)ـ یم سیستم هر حل $\vec{c}$ ، د $\vec{c}_{n-r}, ..., \vec{c}_2, \vec{c}_1$ د وکتورو خطی ترکیب دی.

ددی ځایه استنباط کیږی چی د $\vec{c}_{n-r},\dots,\vec{c}_2,\vec{c}_1$ د (3) سیستم د اساسی حل سیستم دی چی n−r وکتورونه په ځان کی لری .

یادونه کوو چی د (3) قضیی د ثبوت د پروسی پر بنسټ کولای سو په عملی توگه د هم جنسه خطی معادلو دسیستم د حل اساسی سیستم لاسته راوړو. علاوه پردی (5) فارمول د هم جنسه خطی معادلو د سیستم (2) ، د حل د سیستم عمومی شکل دی.

§XI. دغیر هم جنسه خطی معادلودسیستم د حل د سیستم اړیکه دهغه هم جنسه خطی معادلو د سیستم د حل د سیستم سره کوم چی د راکړه سوی غیر هم جنسه خطی معادلو د سیستم څخه لاسته راغلی وی.

ددی پراگراف عنوان اوړددی ، خو هدف دادی چی که یوغیر هم جنسه د خطی معادلو سیستم راکړه سوی وی نو د هغه څخه موږ یو هم جنسه د خطی معادلو سیستم جوړو او بیا ددوی دواړو د حل د سیستمونو تر منځ اړیکه څیړو.ددی موخی دپاره فرضوو چی یو اختیاری غیر هم جنسه د خطی معادلو سیستم چی د m خطی معادلو درلودونکی دی، په وکتوری بڼه راکړه سوی دی .

$$x_1\overrightarrow{p_1}+x_2\overrightarrow{p_2}+\dots+x_n\overrightarrow{p_n}=\vec{b} \qquad \dots(1)$$

د هم جنسه خطی معادلو سیستم :

$$x_1\overrightarrow{p_1}+x_2\overrightarrow{p_2}+\dots+x_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0} \qquad \dots(2)$$

د (1) سیستم په اړوند یادوو. او وایو چی (2) د (1)په اړوند لاسته راغلی دی .

بیلگه ۱ـ یو غیر همجنسه د خطی معادلو سیستم په لاندی ډول راکړه سوی دی :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

د پورتنی سیستم په اړوند د خطی معادلو هم جنسه سیستم عبارت دی له :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

د (1)او (2) د سیستمونو په منځ کی لاندنی معینه اړیکه وجودلری.

قضیه ۱ ـ د خطی معادلو د غیر هم جنسه سیستم (1) د هر حل او دهغه په اړوند د خطی معادلو د هم جنسه سیستم (2) دهر حل د جمع حاصل د خطی معادلو د غیر هم جنسه سیستم (1) حل دی.

ثبوت ـ فرضوو چی $\vec{c}=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ د (1) سیستم او $\vec{d}=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ د (2) سیستم کیفی حل دی. نو

$$\vec{c}+\vec{d}=(\gamma_1+\delta_1,...,\gamma_n+\delta_n)$$

$$(\gamma_1+\delta_1)\overrightarrow{p_1}+...+(\gamma_n+\delta_n)\overrightarrow{p_n}=(\gamma_1\overrightarrow{p_1}+...+\gamma_n\overrightarrow{p_n})+(\delta_1\overrightarrow{p_1}+...+\delta_n\overrightarrow{p_n})=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$$

یعنی د $\vec{c}+\vec{d}$ وکتور د (1) سیستم حل دی.

قضیه ۲ ـ د خطی معادلو د غیر هم جنسه سیستم (1) د دوو کیفی حلونو د تفریق حاصل د هغه سیستم په اړوند د خطی معادلو دهم جنسه سیستم (2) حل دی.

ثبوت ـ فرضوو چی $\vec{c}=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ او $\vec{d}=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ د خطی معادلو د غیر هم جنسه سیستم (1) اختیاری حلونه دی،یعنی:

$$\gamma_1\overrightarrow{p_1}+...+\gamma_n\overrightarrow{p_n}=\vec{b}$$
$$\delta_1\overrightarrow{p_1}+...+\delta_n\overrightarrow{p_n}=\vec{b}$$

ددی ځایه :

$$(\gamma_1-\delta_1)\overrightarrow{p_1}+...+(\gamma_n-\delta_n)\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$$

یعنی د $\vec{c}-\vec{d}$ وکتور د (2) سیستم حل دی.

د پورتنیو قضیو څخه چی په ثبوت مو ورسولی استنباط کیږی ، که د خطی معادلو د غیر هم جنسه سیستم یو حل ولرو ، نو ددغه حل د جمع کیدو په نتیجه کی ، دهغه په اړوند د خطی معادلو دهم جنسه سیستم (2) د حل سره ، د (1) سیستم د ټولو حلو سیټ لاسته راځی. پدی معنی که $\overrightarrow{c_0}$ د (1) سیستم حل وی او $\vec{c}=\gamma_1\vec{c}_1+\gamma_2\vec{c}_2+...+\gamma_{n-r}\vec{c}_{n-r}$ د (2) سیستم عمومی حل وی ، نو

$$\vec{x}=\vec{c}_0+\gamma_1\vec{c}_1+\gamma_2\vec{c}_2+...+\gamma_{n-r}\vec{c}_{n-r}$$

د (1) سیستم عمومی حل دی.

ددی فصل په پای کی باید یادونه وکړم چی ټوله تعریفونه او قضیی (د وکتورو دسکالری ضرب څخه پرته) چی پدی فصل کی مو مطالعه کړی ، د هغو خطی معادلو دپاره چی ضریبونه یی مختلط عددونه وی ، هم صدق کوی.

ځلرم فصل

ماترکسونه Matrices **او دیترمنانتونه**Determinants

I§. ماترکس ـ پر ماترکسو باندی عملیی او د هغوی خاصیتونه.

په تیر فصل کی مو د ماترکس مفهوم د خطی معادلو د سیستم او وکتورونو په اړوند یاد کی. پر ماترکسونو باندی مو یوازی یوه ئیزی عملیی چی د ابتدائی تبدیلونو په نامه یاد کړل، عملی کولای سوای. په واقعیت کی هغه عملیی یوازی د راکړه سوو ماترکسونو پر کرښه ئیزو او ستونی وکتورونوباندی عملی کولی. تر هغه ځایه چی د ماترکس مفهوم تر وکتور عمومی تره دی (وکتور د ماترکس خصوصی حالت دی، یعنی وکتور هغه ماترکس دی چی یوه کرښه یا یو ستون ولری)،ځکه نو سوال مطرح کیږی چی آیا امکان لری چی د وکتورونو دجمعی عملیه او په وکتور کی د حقیقی عدد د ضرب عملیه ، پر هر کیفی ماترکس باندی عمومی کولای سو؟

ځرګنده ده ، نه یوازی داچی د عمومی والی امکان یی سته بلکه د کار د آسانی دپاره ګټور تمامیږی . ځکه چی د ماترکسونو جمع او د حقیقی عدد ضرب په ماترکس کی موږ ته د ماترکسونو و خاصیتو ته د ژوری کتنی لار هواروی. د بلی خوا ځرګنده ده چی په ماترکسونو کی ابتدائی تبدیلونه د ماترکسو د ضرب د عملیی یو خاص حالت دی.

دمخه تر دی چی پر ماترکسونو باندی د عملیو په هکله وړ.غیږو ، د ځینو مخصوصو ماترکسونو او د ماترکسونو د مساوی والی یادونه ضروری ده . فرضوو چی :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

یو د ماترکسونو څخه وی. د A د ماترکس عنصرونه a_{ij} د عددی فیلډ P څخه دی. ځکه نو وایو چی د A ماترکس د P پر عددی فیلډ باندی راکړه سویدی . که د A په ماترکس کی د کرښو شمیر m د ستونو د شمیر n سره مساوی وی ، نو د A ماترکس د n ـمرتبه ای مربعی ماترکس په نامه یادوو. که $m \neq n$ وی ، نو د A ماترکس د $m \times n$ بعدی مستطیلی ماترکس په نامه یادوو.

د n ـمرتبه ای مربعی ماترکس قطر Diagonal چی د کینی پاسنی ځوکی څخه شروع کیږی او په ښی کښتنتی ځوکه ختمیږی ، د اصلی قطر په نامه یادیږی. د $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ عنصرونه پر اصلی قطر باندی پراته دی. لیدل کیږی چی ددی عنصرو دواړه اندکسه Index سره مساوی دی .

دوه ماترکسه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{p\times q}$ هغه وخت سره مساوی دی ، که د A د ماترکسس د کرښو او ستونو شمیر د B د ماترکس د کرښو او ستونو د شمیر سره مساوی

وی او هغه عنصرونه چی په دواړو ماترکسو کی یود بل په مقابل کی پراته دی ، یو د بله سره مساوی وی، یعنی :

$$A=B \overset{df}{\leftrightarrow} (m=p \wedge n=q) \wedge (\forall i,j \,/ 1\leq i\leq m\ ,\ 1\leq j\leq n)(\ a_{ij}= b_{ij})$$

ښکاره ده چی پورتنی تعریف د وکټورونود مساوی والی و مفهوم ته عمومی بڼه ورکوی.

بیلګه ۱ـ لاندنی ماترکسونه یود بله سره مساوی ندی.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

ځکه چی د هغوی د ستونو شمیر یو دبله سره مساوی ندی.

بیلګه ۲ـ د $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}a & 3\\ 0 & b\end{pmatrix}$ ماترکسونه یوازی او یوازی هغه وخت مساوی دی چی $a=2$ او $b=1$ سره وی.

مربعی (مستطیلی) ماترکس چی ټوله عنصرونه یی مساوی په صفر سره وی ، د صفری ماترکس په نامه یادیږی، چی په 0_n $(0_{m\times n})$ سره یی ښیو. کله کله یی په ساده ډول په O سره ښیو، د بیلګی په ډول:

$$0_{3\times 4}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

د A ماترکس د پوړئیز ماترکس په نامه یادیږی که دهغه کرښه ئیز وکټورونه پوړئیز شکل ولری، د بیلګی په ډول :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

د n ـمرتبه ای مربعی ماترکس $A=(a_{ij})$ د قطری ماترکس په نامه یادوو، که ټوله هغه عنصرونه چی پر قطر ندی پراته ، مساوی په صفر سره وی. د بیلګی په ډول :

$$a)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad ; \quad b)\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

قطری ماترکس هغه وخت د سکالری ماترکس په نامه یادوو ، چی د قطر ټوله عنصرونه یی سره مساوی وی . د (b بیلګه وګوری.

هغه سکالری ماترکس چی د قطر ټوله عنصرونه یی مساوی په یوه سره وی ، د واحد ماترکس په نامه یادوو او په E_n یا E سره یی ښیو.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

فرضوو چی د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ ماترکسونه د P پر فیلډ باندی راکړه سوی او $\lambda\in P$ دی.

تعریف ۱- د $C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ ماترکس عبارت دی د A او B دماترکسونو د جمع د حاصل څخه، چی په $C=A+B$ سره ښودل کیږی.

پورتنی تعریف په سمبولیک شکل داسی لیکلای سو:

$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}\overset{\mathbf{df}}{=}(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

پدی معنی چی د A او B هغو ماترکسونو جمع چی بعدونه یی سره مساوی دی ، عبارت دی په ټاکلی ځایو کی د هغوی د عنصرو د حاصل جمع څخه . د بیلګی په ډول :

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a & 3 & 5\\ 5 & 5 & a\end{pmatrix}$$

تعریف ۲- د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ په ماترکس کی د λ د عدد ضرب عبارت دی د $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$ د ماترکس څخه چی په λA سره ښودل کیږی.

هغه عملیه چی په نتیجه کی یی د λ عدد او د A ماترکس د λA په شکل راوړی په ماترکس کی د سکالرد ضرب د عملیی په نامه یادیږی. پدی ډول :

$$\lambda A\overset{\mathbf{df}}{=}(\lambda a_{ij})$$

پدی معنی چی د A په ماترکس کی د λ د عدد ضرب په نتیجه کی د A د ماترکس هر عدد په λکی ضربیږی. د بیلګی په توګه :

$$2.\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

لیدل کیږی چی د A او B د ماترکسونو د جمعی عملیه او د A په ماترکس کی د λ د عدد د ضرب عملیه د وکتورو د جمعی د عملیی سره او په وکتور کی د عدد د ضرب دعملیی سره مطابقت کوی.

قضیه ۱ـ د ماترکسونو د جمعی عملیه او په ماترکس کی د عدد د ضرب عملیه لاندنی خاصیتونه لری.

۱ـ د ماترکسونو د جمعی عملیه تبدیلی خاصیت لری، یعنی:

$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}+(a_{ij})_{m\times n}$$

۲ـ د ماترکسونو د جمعی عملیه اتحادی خاصیت لری ، یعنی:

$$((a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n})+(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}+((b_{ij})_{m\times n}+(c_{ij})_{m\times n})$$

۳ـ د هر ماترکس دپاره د $A+0=A$ مساوات صدق کوی .

۴ـ د ماترکسونو په سیټ کی چی د هغوی بعد معین وی ، د هر A ماترکس دپاره نظر د جمعی و عملیی ته د هغه متضاد ماترکس $\overline{A}$ داسی وجود لری چی:

$$A+\overline{A}=\overline{A}+A=0$$

۵ـ د هر ماترکس A او کیفی عددونو $\alpha,\lambda\in P$ دپاره صدق کوی چی:

$$\alpha(\lambda A)=(\alpha\lambda)A=\lambda(\alpha A)$$

۶ـ په ماترکس کی د عدد دضرب عملیه نظر د ماترکسو د جمع عملیی ته توزیعی خاصیت لری، یعنی:

$$(\forall\alpha,\lambda\in P)(\forall A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n})((\alpha+\lambda)A=$$
$$\alpha A+\lambda A\wedge\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B)$$

ثبوت ـ فرضوو چی د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ ماترکسونه راکړه سوی وی، نو

$A+(-A)=(-A)+A=0$ سره کیږیو یعنی ۴ـم خاصیت صدق کوی.

همداډول د نور خاصیتوثبوت پر ماترکس باندی د عملیو د تعریف پر بنسټ او د عملیو د خاصیتوڅخه پر عددی فیلډ باندی، استنباط کولای سو. په رشتیا هم :

$$\alpha(\lambda A)=\alpha(\lambda(a_{ij}))=\alpha(\lambda a_{ij})=(\alpha(\lambda a_{ij}))=((\alpha\lambda)a_{ij})=$$
$$((\alpha\lambda)a_{ij})=(\alpha\lambda)(a_{ij})=(\alpha\lambda)A$$

په همدی ډول نور خاصیتونه هم په ثبوت رسولای سو.

نتیجه ـ د ټولو $m\times n$ ماترکسونوسیټ نظر د جمعی و عملیی ته گروپ دی.

د ماترکسونو د ضرب د عملیی تعریف لږ څه پیچلی دی . په لمړی نظر کی داسی بریښی چی گواکی داډول تعریف د تجربی له مخی فارمولبندی سوی دی . په ورستنیو پاراگرافو کی به وگورو چی ماترکسونو د ضرب تعریف په دغه شکل چی اوس به یی راوړو ، د ماترکسونو په تیوری کی ضروری دی.

فرض کړو چی د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{st})_{n\times q}$ ماترکسونه پر عددی فیلډ باندی داسی راکړه سوی دی ، چی د A د ماترکس د ستونو شمیر د B دماترکس دکرښو د شمیر سره مساوی وی .

تعریف ۳ ـ د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{st})_{n\times q}$ د ماترکسونو ضرب عبارت دی د $C=(c_{pq})_{m\times l}$ د ماترکس څخه ، پداسی ډول چی :

$$c_{pq}=a_{p1}b_{1q}+a_{p2}b_{2q}+\ldots+a_{pn}b_{nq}=\sum_{j=1}^{n}a_{pj}b_{jq}$$

د A او B د ماترکسونو ضرب په $C=A.B$ سره ښیو،یعنی:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} & \cdots & b_{1t} \\ b_{11} & \cdots & b_{2q} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{11} & \cdots & b_{nq} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1q} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & \cdots & c_{2q} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & \boxed{c_{pq}} & \cdots & c_{pt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mq} & \cdots & c_{mt} \end{pmatrix}$$

د دریم تعریف پورتنی شیما داسی تعبیرولای سو:

که وغواړی چی د C د ماترکس د c_{pq} عنصر ؛چی د A او B د ماترکسونو د ضرب په نتیجه کی لاسته راغلی دی ، ومونډو ، نو د A د ماترکس pـیمه کرښه باید د B د ماترکس په q ـیم ستون کی سکالری ضرب کړو.

بیلگه ۳ ـ

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\5\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1.1+2.5+3.4} \\ \boxed{0.1+1.5+0.4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

بیلگه ۴ ـ د $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ماترکسونو د پاره د

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ په ډول ضرب وجود نلری ، ځکه چی د دریم تعریف شرطونه

نه پر ځای کوی . پدی معنی چی د لمړی ماترکس د ستونو شمیر ددوهم ماترکس د کرښو د شمیر سره مساوی ندی.

قضیه ۲ ـ د ماترکسونو د ضرب عملیه د لاندنیو خاصیتو درلودونکی دی .

۱ـ د ماترکسونو د ضرب عملیه تبدیلی خاصیت نلری. یعنی د A او B ماترکسونه وجود لری چی $A.B \neq B.A$ دی. یعنی:

$(\exists A,B)(A.B \neq B.A)$

۲ـ د ماترکسونو د ضرب عملیی اتحادی خاصیت لری .یعنی د هرو درو ماترکسونو ، چی معین بعدونه ولری ، صدق کوی چی : $(A.B).C=A.(B.C)$

۳ـ د ټولو مربعی ماترکسونو ،چی n-ام ترتیب ولری ، په سیټ کی دضرب عملیه نظر د جمع و عملیی ته توزیعی ده . یعنی :

$(A+B).C=A.C+B.C \ \wedge \ C.(A+B)=C.A+C.B$

ثبوت ـ

۱ ـ که د قضیی منطقی څرګندونی ته ځیر سو ، نو کافی ده چی دوه داسی ماترکسونه ومومو چی د هغوی د ضرب په نتیجه کی دوه مختلف ماترکسونه ، چی په خپل منځ کی

مساوی نه وی لاسته راسی. ددی ډول ماترکسونو یو نمونه هم د $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ او

$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ماترکسونه دی .

$$A.B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B \quad \wedge \quad B.A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

سره کیږی . یعنی $A.B\neq B.A$ دی.

۲ ـ فرضو چی د $B=(b_{ij})_{n\times l},A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $C=(c_{ij})_{l\times t}$ ماترکسونه راکړه سوی دی . که $F=A.B=(f_{kr})_{m\times l}$ سره وښیو، نو نظر و دریم تعریف ته به ولرو:

$$f_{kr}=a_{k1}b_{1r}+a_{k2}b_{2r}+...+a_{kn}b_{nr}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ir}$$

د $D=(A.B).C=F.C=(d_{ks})_{m\times t}$ دماترکس d_{ks} عنصر لاندنی شکل لری :

$$\begin{aligned}d_{ks}&=f_{k1}c_{1s}+f_{k2}c_{2s}+...+f_{kl}c_{ls}=\sum_{r=1}^{l}f_{kr}c_{rs}=\sum_{r=1}^{l}(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ir})c_{rs}\\&=\sum_{r=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ir}c_{rs}\end{aligned}$$

اوس به نو د $G=A.(B.C)=(g_{ks})_{m\times t}$ د ماترکس د g_{ks} عنصر پیداکړو.

که $Q=(B.C)=(q_{is})_{n\times t}$ سره وښیو ، نو نظر و دریم تعریف ته به ولرو:

$$q_{is}=b_{i1}c_{1s}+b_{i2}c_{2s}+...+b_{il}c_{ls}=\sum_{r=1}^{l}b_{ir}c_{rs}$$

ددی ځایه :

$$\begin{aligned}g_{ks}&=a_{k1}q_{1s}+a_{k2}q_{2s}+...+a_{kn}q_{ns}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}q_{is}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}(\sum_{r=1}^{l}b_{ir}c_{rs})\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}a_{ki}b_{ir}c_{rs}\end{aligned}$$

که د d_{ks} او g_{ks} افادی سره مقایسه کړو، نو لیدل کیږی چی $d_{ks}=g_{ks}$ سره کیږی ، یعنی $G=D$ سره کیږی.

د دریم خاصیت د ثبوت دپاره فرضوو چی د $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ او $C=(c_{ij})$ ماترکسونه د n ـمرتبه ای مربعی ماترکسونه دی . که $(A+B).C$ په $D=(d_{ij})$ سره وښیو ، نو :

$$d_{ir}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij}).c_{jr}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{jr}+b_{ij}c_{jr})$$

که $A.C+B.C$ په $G=(g_{ij})$ سره وښیو ، نو

$$g_{ir}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jr}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{jr}$$

دلته د ټولو $i,j\in\{1,2,,\ldots,n\}$ دپاره $d_{ir}=g_{ir}$ سره کیږی ، فلهذا $G=D$ سره دی.

نتیجه ـ پر عددی فیلډ باندی د n ـلم ترتیبد ټولومربعی ماترکسونو سیټ نظر د ماترکسونو د جمع اوضرب وعملیو ته رینګ دی.

§II. معکوس ماترکسونه او د هغوی محا سبه د ابتدائی تبدیلو پذریعه.

فرضوو چی n ـمرتبه ای د A ماترکس او n ـمرتبه ای د E واحد ماترکس راکړه سویدی. د ماترکسونو د ضرب د تعریف څخه استنباط کیږی چی $A.E=E.A=A$.

پدی معنی چی د E واحد ماترکس د n ـام ترتیب د ټولو ماترکسونو په سیټ کی نظر د ضرب و عملیی ته خنثی عنصر دی.

تعریف ۱ـ د B ماترکس د A د ماترکس د معکوس Inverse ماترکس په نامه یادوو ، که $A.B=B.A=E$ وی .

که د A د ماترکس دپاره معکوس ماترکس وجود ولری نو وایو چی د Aماترکس معکوس پذیره Invertible ده .

بیلګه ۱ ـ د $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ماترکس معکوس پذیره دی . ددی ماترکس معکوسه ماترکس هم دا پخپله E ده.

بیلګه ۲ـ د $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ د ماترکس دپاره معکوسه ماترکس وجود نلری ، ځکه چی د هر دوهم ترتیب ماترکس $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ دپاره لاندنی مساوات صدق کوی :

$$A.B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

یعنی $A.B \neq E$ دی.

قضیه ۱ـ که د A د ماترکس دپاره معکوس ماترکس وجود ولری نو دهغه معکوس ماترکس به یوازنی وی.

ثبوت ـ فرضوو چی د B او Cماترکسونه د A د ماترکس معکوس ماترکسونه وی ، یعنی:

$$A.B=B.A=E \wedge A.C=C.A=E$$

فلهذا :

$$B=B.E=B.(A.C)=(B.A).C=E.C=C$$

یعنی که د B او C ماترکسونه د A د ماترکس دپاره معکوس ماترکسونه وی ، نو هغوی سره مساوی دی .

په راتلونکی کی به د A د ماترکس معکوس ماترکس به په A^{-1} سره ښیو.

د معکوس ماترکس د تعریف څخه لاندنی قضیی استنباط کیږی :

۱ـ واحد ماترکس ، معکوس پذیر دی پداسی ډول چی $E^{-1}=E$ دی.

۲ـ که د Aماترکس معکوس پذیر وی او د هغه معکوس ماترکس A^{-1} وی ، نو د A^{-1} ماترکس هم معکوس پذیر دی او د هغه معکوس ماترکس $(A^{-1})^{-1}=A$ دی .

۳ـ معکوس پذیره ماترکس او د هغه معکوس ماترکس مربعی او د عین ترتیب درلودونکی دی.

که دوهمی بیلگی ته په ځیر سره وگورو ، نو ویلای سو چی هر مربعی ماترکس معکوس پذیر ندی . سوال طرح کیږی چی کوم ماترکسونه معکوس پذیر دی ؟ که یو ماترکس معکوس پذیر وی ، نو د هغه معکوس ماترکس څنگه لاسته راوړلای سو؟ ددی پاراگراف په پاته برخه کی به دی سوالو ته جواب ورکړو.

تعریف ۲ ـ یو مربعی ماترکس د غیر سنگولار (عربی: غیرالمفرد) nonsingular په نامه یادیږی ، که د ماترکس رنک د هغه د ترتیب سره مساوی وی.

کله کله غیر سنگولار ماترکسونه د معکوس پذیرو ماترکسو په نامه هم یادوی (په مأخذ کی Birkhoff &MacLane) وگوری. موږ به دا واقعیت وروسته د قضیی په شکل راوړو(قضیه ۴ ـ وگوری).

قضیه ۲ ـ د هر غیر سنگولار ماترکس پر کربنو باندی د ابتدائی تبدیلونو د عملی کولو په نتیجه کی واحد ماترکس لاسته راځی .

ثبوت ـ د دریم فصل ، VI§ ددوهمی قضیی پر بنسټ کولای سو چی د A د ماترکس پر کربنو باندی د ابتدائی تبدیلونو د عملی کولو په نتیجه کی ، ماترکس و پوړئیز شکل ته راواړوو. تر هغه ځایه چی د A راکړه سوی ماترکس غیر سنگولار دی ، ځکه نو د هغه پوړئیز شکل به په لاندی ډول وی :

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

پداسی ډول چی داصلی قطر ټول عنصرونه $b_{nn},\ldots,b_{22},b_{11}$ د صفر څخه خلاف دی .

د B د ماترکس وروستی کربنه پر b_{nn} باندی ویشو او بیا یی په ترتیب سره د $-b_{(n-1)n},\ldots,-b_{2n},-b_{1n}$ په عددونو کی ضربوو او د لمړی ،دوهمی ،...او (n-1) مه کربنی سره جمع کوو، څو بلاخره لاندنی ماترکس لاسته راځی :

$$B_1=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(n-1)} & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په همدی ډول مشابه تبدیلونه پر (n-1) مه کربنی ،...،دوهمی کربنی باندی سرته رسوواو بلاخره لمړی کربنه د b_{11} پر عددویشو ، څو په نتیجه کی یی واحد ماترکس لاسته راسی.

تعریف ۳ ـ ابتدائی ماترکس عبارت د هغه ماترکس څخه دی چی د لاندنیو ابتدائی تبدیلونو په نتیجه کی د واحد ماترکس څخه لاسته راځی:

۱ـ ددوو کربنو (ستونو) د ځایو تبدیلول.

۲ـ د سکالر ضربول په یوه کربنه (ستون) کی.

۳ـ یو د کربنو (ستونو) جمع کول د بلی کربنی (ستون) سره چی په سکالر کی ضرب سوی وی .

بیلگه ۳ -

$$1.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ 2.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\lambda\neq 0\ ,3.\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

قضیه ۳ - پر راکړه سوی ماترکس باندی هر یو د ابتدائی تبدیلونو څخه معادل دی د هغه ماترکس د ضرب څخه په یوه د ابتدائی ماترکسونو کی ، پداسی ډول چی هغه ابتدائی تبدیلونه چی د ماترکس پر کرښو عملی سوی دی معادل دی د ابتدائی ماترکس د ضرب څخه په اصلی ماترکس کی ، د اصلی ماترکس د کیڼی خوا څخه ؛ او هغه ابتدائی تبدیلونه چی د ماترکس پر ستون عملی سوی وی معادل دی د ابتدائی ماترکس د ضرب څخه په اصلی ماترکس کی ، د اصلی ماترکس د ښی خوا څخه.

ثبوت - فرضوو چی لاندنی د n - مرتبه ای ماترکس راکړه سوی دی :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

فرضاً غواړو چی د لمړی او i -ام ستون ځایونه سره تبدیل کړو. ابتدائی ماترکس چی ددی ابتدائی تبدیل جواب ورکونکی دی ، تر نظر لاندی نیسو.

$$E^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow\ i\text{ -مه کرښه}\\ \\ \\ \end{array}$$

څرنگه چی په ستون کی ابتدائی تبدیلات راولو ، نو ابتدائی ماترکس باید په اصلی ماترکس کی د ښی خوا څخه ضرب کړو، یعنی

$$AE^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2i} & a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

په نتیجه کی یی داسی ماترکس لاسته راغی چی د اصلی ماترکس A په پرتله د لمړی او i ـیم ستون ځایونه سره تبدیل سوی دی.

فرضاً، اوس نو که وغواړو چی د A د ماترکس i ـام ستون د $\lambda \neq 0$ په عدد کی ضرب کړو. د $E^{(2)}$ ابتدائی ماترکس چی زمونږ د غوښتنی د ابتدائی تبدیل جواب ورکونکی دی ، د ښی خوا څخه د A په ماترکس کی ضربوو.

$$A.E^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

اوس نو که وغواړو چی د A په ماترکس کی لمړی کرښه ددوهمی کرښی سره چی د λ په عدد کی ضرب سوی ده ، جمع کړو، باید ابتدائی ماترکس $E^{(3)}$ چی ددی تبدیل جواب ورکونکی ده د کینی خوا څخه د A په ماترکس کی ضرب کړو.

$$E^{(3)}.A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \cdots & a_{1n}+\lambda a_{2n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

پدی معنی چی د ماترکسونو د ضرب په نتیجه کی هغه ابتدائی تبدیل چی زموږ په نظر کی ؤ ، عملی سو ی دی .

په همدی ترتیب هغه پاته دری حالتونه امتحانولای سو.

د ثابت سوی قضیی څخه و دی نتیجی ته رسیږو چی د ابتدائی تبدیلو عملی کول پر راکړه سوی ماترکس باندی ، د ماترکسونو په ضرب باندی اړولای سو.

دوهمه او دریمه قضیه موږ ته دا اجازه راکوی چی د ماترکسونو د معکوس پذیری ډیر مهم معیار فارمولبندی او په ثبوت ورسو.

قضیه ۴ ـ هر غیر سنګولار ماترکس معکوس پذیر دی.

ثبوت ـ فرضوو چی د A ماترکس د n ـام ترتیب غیر سنګولار ماترکس دی ، پس د دوهمی قضیی پر بنسټ کولای سو چی د A ماترکس د هغه پر کرښو باندی د ابتدائی تبدیلو د عملی کولو په نتیجه کی په واحد ماترکس E باندی تبدیل کړو.

فرضوو چی د نوموړو ابتدائی تبدیلونو جواب ورکونکی ابتدائی ماترکسونه $E^{(k)},E^{(k-1)},\ldots,E^{(2)},E^{(1)}$ دی ، فلهذا د دریمی قضیی پر بنسټ به ولرو:

$$E^{(k)}.E^{(k-1)}\ldots.E^{(2)}.E^{(1)}.A=E$$

د ابتدائی ماترکسونو د ضرب حاصل به په B سره وښیو، یعنی:

$$B= E^{(k)}.E^{(k-1)}\ldots.E^{(2)}.E^{(1)}$$

د B ماترکس غیر سنګولار دی ، ځکه چی د واحدو ماترکسونو څخه د ابتدائی تبدیلو په نتیجه لاسته راځی او $B.A=E$ سره کیږی.

که د B پر ماترکس باندی مشابه عملیی عملی کړو ،نو دC ماترکس به داسی لاسته راسی چی $C.B=E$ سره وی. نو

$$B.A=E \rightarrow B.A.B=B \rightarrow C.B.A.B=C.B \rightarrow A.B=E$$

پدی ترتیب $B.A=E=A.B$ دی، یعنی $B=A^{-1}$ سره کیږی ، یا په بل عبارت د B ماترکس د A د ماترکس معکوسه ماترکس دی .

د څلورمی قضیی د ثبوت په پروسه کی د معکوس ماترکس د موندلو طریقه نغښتی ده .

تر هغه ځایه چی $B= E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}= B= E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}.E=A^{-1}$ سره کیږی، نو کافی ده چی پر واحد ماترکس E باندی عینی ابتدائی تبدیلونه عملی کړو کوم چی د A پر ماترکس ئی عملی کول غواړو ، ځو په نتیجه کی یی د A^{-1} ماترکس لاسته راسی.

په عمل کی دا کار په لاندی ډول سره سرته رسوو:

راکړه سوی د A ماترکس او د هغه د ترتیب سره مساوی واحد ماترکس E څنګ پر څنګ سره ایږدو.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

په سمبولیک شکل یی داسی لیکو: A/E

پر وروستی ماترکس باندی چی $n\times 2n$ بعد لری، کرښه ئیز ابتدائی تبدیلونه داسی عملی کوو ځو د A د ماترکس پر ځای واحد ماترکس E لاسته راسی.

نوموړی ابتدائی تبدیلونه د A د ماترکس ،همداډول د E د ماترکس ، دښی خوا څخه د ابتدائی ماترکسو $E^{(k)},E^{(k-1)},\ldots,E^{(2)},E^{(1)}$ ، دضرب سره معادل دی.

نتیجه یی په لاندی ډول ده:

$$E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}.A/ E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}.E$$

ولی $E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}.A=E$ او $E^{(k)}.E^{(k-1)}.....E^{(2)}.E^{(1)}.E=A^{-1}$

او بلاخره E/ A^{-1} لاسته راځی.

د معکوس ماترکس د محاسبی طریقه ، چی پاس مو طرح کړه ، د ابتدائی تبدیلو پذریعه د معکوس ماترکس د موندلو د طریقی په نوم یادیږی.

بیلگه ۴ ـ د لاندنی ماترکس دپاره معکوس ماترکس پیداکړی.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

حل ـ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

پدی ترتیب

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د A^{-1} د ماترکس د محاسبې په لړ کې مو د A/E پر ماترکس لاندنی ابتدائی تبدیلونه عملی کړل.

۱ ـ لمړی کرښه مو د -1 په عدد کې ضرب او ددوهمې کرښې سره مو جمع کړه.

۲ـ لمړی کرښه مو د -2 په عدد کې ضرب او ددریمې کرښې سره مو جمع کړه.

۳ـ د دوهمې او دریمې کرښې ځایونه مو سره تبدیل کړه.

۴ـ دریمه کرښه مو د 3 په عدد کې ضرب او ددوهمې کرښې سره مو جمع کړه.

ښکاره ده چې د معکوس ماترکس د محاسبې په لړ کې تل مجبوره نه یو چې ابتدائی تبدیلونه په ځانګړی توګه سره ولیکو.

III§. د ماترکسونو په ذریعه د خطی معادلو د سیستم څرګندونه.

فرضوو چې د خطی معادلو لاندنی سیستم راکړه سوی دی :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

د $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ او $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ وکتورونه د یوه ستون لرونکی ماترکس په شکل لیکو ، فلهذا د ماترکسونو د ضرب د تعریف پر بنسټ د (1) سیستم په لاندی ډول لیکلای سو.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

او یا په لنډ ډول یې داسې لیکلای سو: $A.\vec{x} = \vec{b} \quad \ldots(2)$

پداسې ډول چې A د خطی معادلو د سیستم (1) اصلی ماترکس دی .

د (1) د سیستم څرګندونه د (2) په شکل باندی د خطی معادلو د سیستم څرګندونه د ماترکس د بڼی ، په نامه یادیږی . که $\vec{b} = \vec{0}$ سره وی ، نو د متجانسو خطی معادلو د

سیستم ماترکسی څرګندونه لاسته راځی ، یعنی : $A.\vec{x}=\vec{0} \quad \ldots(3)$

د خطی معادلو د سیستم ماترکسی څرګندونه نه یوازی داچی راکړه سوی سیستم په تړلی بڼه څرګندوی، بلکه د خطی معادلو د سیستم ډېرو خاصیتونوثبوت آسانه کوی.

د بیلګی په تو ګه ثابتوو :که $\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},...,\overrightarrow{d_k}$ د (3) خطی معادلو د سیستم کیفی حلونه وی ، نو دهغوی خطی ترکیب یعنی $\vec{d}=\lambda_1\overrightarrow{d_1}+\lambda_2\overrightarrow{d_2}+...+\lambda_k\overrightarrow{d_k}$ هم د نوموړی سیستم حل دی. (X§ ددوهمی قضیی نتیجه)

ثبوت. نظر و فرضیی ته د ټولو $1\leq i\leq k$ دپاره $A.\overrightarrow{d_i}=\vec{0}$ سره کیږی، ځکه نو

$$A.\vec{d}=A(\lambda_1\overrightarrow{d_1}+\lambda_2\overrightarrow{d_2}+...+\lambda_k\overrightarrow{d_k})=\lambda_1 A.\overrightarrow{d_1}+\lambda_2 A.\overrightarrow{d_2}+...+\lambda_k A.\overrightarrow{d_k}=\vec{0}$$

یعنی $\vec{d}$ هم د (3) سیستم حل دی.

قضیه ـ که د (2) د خطی معادلو د سیستم اصلی ماترکس A مربعب او غیر سنګولار وی ، نو سیستم د یوازنی حل $\vec{x}=A^{-1}.\vec{d}$ درلودونکی دی.

ثبوت ـ فرضوو چی د A ماترکس مربعی د n ـ ام ترتیب درلودونکی او غیر سنګولار دی. پدی معنی چی د $\vec{b}$ وکتور هم n اجزاوی لری او د A معکوس ماترکس ،یعنی A^{-1} داسی وجودلری چی د n ـام ترتیب درلودونکی دی. ځکه نو د $A^{-1}\vec{b}$ د ضرب حاصل هم وجود لری او عبارت دی د هغه ماترکس څخه چی یو ستون او n کرښی لری.

همدا ډول لرو چی : $A(A^{-1}\vec{b})=(A.A^{-1})\vec{b}=E.\vec{b}=\vec{b}$

یعنی ستونی وکتور $\vec{x}=A^{-1}.\vec{b}$ د (2) سیستم حل دی. اوس به نو ددی حل یوازی والی په ثبوت ورسو. فرض کړو چی $\overrightarrow{x_1}$ او $\overrightarrow{x_2}$ د (2) سیستم دوه مختلف حلونه دی ، نو $A.\overrightarrow{x_1}=\vec{b}$ او $A.\overrightarrow{x_2}=\vec{b}$ سره کیږی. ددی په نتیجه کی $A.\overrightarrow{x_1}=A.\overrightarrow{x_2}$ لاسته راځی . ددی ځایه :

$$A^{-1}(A.\overrightarrow{x_1})=A^{-1}(A.\overrightarrow{x_2})$$
$$(A^{-1}.A)\overrightarrow{x_1}=(A^{-1}.A)\overrightarrow{x_2}\rightarrow E\overrightarrow{x_1}=E\overrightarrow{x_2}\rightarrow\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_2}$$

بیلګه ـ د خطی معادلو لاندنی سیستم حل کړی.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

حل ـ لمړی هڅه کوو چې د راکړه سوی خطی معادلو دسیستم واصلی ماترکس ته معکوس ماترکس د ابتدائی تبدیلونو په استفاده سره ومومندو.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 13 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -11 & 13 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{33}{10} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

یعنی د راکړه سوی سیستم اصلی ماترکس معکوس پذیر او دهغه معکوس ماترکس عبارت دی له :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{13}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ددی ځایه زموږ د خطی معادلو سیستم د لاندنی حل درلودونکی دی .

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{13}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

یعنی $x_2=-1, x_1=1$ او $x_3=2$ سره کیږی.

§IV. دوه مرتبه ای او دری مرتبه ای دیترمنانتونه .

په تیر فصل کی موږ د خطی معادلو د سیستمو د حل عمومی تیوری مطالعه کړی . د هغو څخه یوه طریقه هم د ګاوس میتود ؤ. که څه هم هغه میتود دومره پیچلی نه ؤ ، خو د یو رنګه عملیو د سرته رسولو غوښتنه ئی کوله .دبلی خوا د کمپیوټر پذریعه د هغوی د حل د پاره د الګوریتم د جوړولو امکان سته ، خو د ټولو خطی معادلو د سیستمونو د حل د پاره د عمومی فارمول طرح کول مشکل دی. څرګنده ده چی دخطی معادلو د ضریبو او ثابتو پذریعه د عمومی فارمول طرح کول په بله طریقه امکان لری. دغه طریقه د دیترمنانت پر تیوری باندی ولاړه ده .

دمخه تردی چی د دیترمنانتو د عمومی تیوری په مطالعه باندی شروع وکړو، لمړی به ئی پر دوو خاصو حالتو چی عبارت دی له دوه مجهوله او دری مجهوله خطی معادلو د سیستمونو څخه، بحث وکړو.

فرضوو چی د خطی معادلو دوه مجهوله سیستم راکړه سوی دی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

پاسنی سیستم د ګاوس په میتود حلوو. که $a_{11}\neq 0$ وی ، نو د (1) سیستم د لاندنی سیستم سره معادل دی:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \right) x_2 = b_2 - \dfrac{b_1 a_{21}}{a_{11}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \right) x_2 = a_{11}b_2 - b_1 a_{21} \end{cases} \qquad \ldots(2)$$

یا

اوس نو که $\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \right) \neq 0$ وی ،نو

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \qquad \ldots(3)$$

پدی ډول موږ د خطی معادلو د سیستم (1) دپاره د (3) فارمولونه لاسته راوړه.البته په هغه صورت کی چی $\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \right) \neq 0$ وی .پورتنی افاده په آسانی سره د (1) سیستم د اصلی ماترکس په بڼه ارائه کولای سو.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots(4)$$

په رشتیا هم لیدل کیږی چی په (4) ماترکس کی که د اصلی قطر عنصرونه په خپل منځ کی ضرب کړو او د فرعی قطر عنصرو نه په خپل منځ کی ضرب کړو ،نو د هغوی د تفریق حاصل عبارت دی د $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ د افادی څخه.

تعریف ۱ ـ د $D= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ عدد د (4) ماترکس د دیترمنانت یا ددوهم ترتیب دیترمنانت second order determinant په نامه یادیږی . نوموړی دیترمنانت په لاندی بڼه ښرگندوو:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

هغه عددونه چې د (3) فارمول د کسر په صورت کې ځای لري هم ددوهم ترتیب دیترمنانتونه دی، یعنی د x_1 د فارمول دپاره به د D_1 دیترمنانت ولرو:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

لیدل کیږی چې په (3) کسرپه صورت کې د x_1 د قیمت د موندلو دپاره که د اصلی ماترکس په دیترمنانت کې لمړی ستون د راکړه سوی سیستم د ثابت وکټور $\vec{b} = (b_1, b_2)$ سره عوض کړو،نو د کسر د صورت عدد لاسته راځی. همداډول د x_2 دپاره به د D_2 دیترمنانت ولرو:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

د $D2$ دیترمنانت عبارت دی د هغه ماترکس د دیترمنانت څخه چې د راکړه سوی سیستم په اصلی ماترکس کې دوهم ستون د $\vec{b} = (b_1, b_2)$ د وکټور سره عوض سویدی .

پدی ترتیب مو لاندنی قضیه په ثبوت ورسوله .

قضیه ۱ ـ که د دوه مجهوله خطی معادلو د سیستم د اصلی ماترکس دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی، نو دراکړه سوی سیستم حل د لاندنی فارمولو پذریعه ارائه کولای سو.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \wedge x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad \ldots(5)$$

(5) فارمول د دوه مجهوله خطی معادلو د سیستم دپاره د کرامر Cramer د فارمول په نامه یادیږی.

بیلګه ۱ـ د خطی معادلو لاندنی سیستم حل کړی.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 = -17 \end{cases}$$

حل ـ لمړی باید د پورتنی سیستم د اصلی ماترکس دیترمنانت وشمیرو، یعنی:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=21-20=1$$

څرنګه چې $D\neq0$ دی ، نو د نوموړی سیستم د حل دپاره د کرامر دفارمول څخه کار اخلو.

$$D_1=\begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -17 & 7 \end{vmatrix}=-63+68=5\wedge D_2=\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -17 \end{vmatrix}=-51+45=-6$$

فلهذا $x_1=5$ او $x_2=-6$ سره کیږی.

د کرامر طریقه د دوه مجهوله خطی معادلو د سیستمو د حل دپاره خاصی آسانی منځ ته نه راوړی ، خو د m مجهوله خطی معادلو د سیستم د حل دپاره ، چې کاملاً په مشابه شکل لاسته راځی ، ګټوره ده.

فرضوو چې د خطی معادلو لاندنی سیستم راکړه سوی دی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad \ldots(6)$$

تعریف ۲- د

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \quad \ldots(7)$$

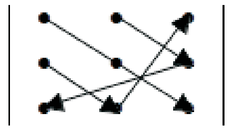
عدد د (6) سیستم د اصلی ماترکس ددیترمنانت یا د دری مرتبه ای دیترمنانت third order determinant په نامه یادیږی ، چې په لاندی ډول یی ښیو.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

په لمړی نظر (7) - مه افاده چاته پیچلی بریښی ،خو په آسانی سره یی شمیرلای سو. په نوموړی افاده کی دری ټوټی د مثبتی علامی او دری ټوټی د منفی علامی درلودونکی دی.

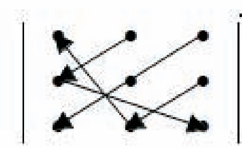
مثبتی ټوټی یی داسی لاسته راوړو چی د ماترکس $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ د اصلی قطر عنصرونه سره ضربوو او داصلی قطر سره د موازی قطر عنصرونه دهغه قطر د مقابل عنصر سره ضربوو. د شیما په بڼه یی داسی ښودلای سو:

+



د (7) – می افادی دری نوری ټوټی چی د منفی علامی سره دی د فرعی قطر د عنصرو د ضرب د حاصل او د فرعی قطر سره موازی قطر او د هغه پر مخامخ عنصر د ضرب څخه لاسته راځی . دغه پروسه هم د شیما په بڼه داسی ښودلای سو:

−



بیلګه ۲ ـ

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(4)(-2)+(3)(1)(3)+(2)(0)(0)-(0)(4)(3)-$$

$$(3)(2)(-2)-(1)(0)(-1) = 8+9+12=29$$

قضیه ۲ ـ که د دری مجهوله خطی معادلو د سیستم د اصلی ماتکس دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی، نو د نوموړی سیستم حل د لاندنی فارمول پذریعه ارائه کولای سو.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad \ldots(8)$$

پداسی ډول چی د D_3, D_2, D_1 دیترمنانتونه عبارت دی د هغو دیترمنانتو څخه چی د راکړه سوی سیستم د اصلی ماترکس ددیترمنانت څخه په ترتیب سره د لمړی ، دوهم او دریم ستون سره د ثابت وکټور یعنی $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ د تعویض په نتیجه کی ،لاسته راغلی دی.

(8) ـام فارمول د دری مجهوله خطی معادلو د سیستم د حل د پاره د کرامر د فارمول په نوم یادیږی. لیدل کیږی چی لمړی قضیه ددوهمی قضیی خاص حالت دی . څرنګه چی وروسته به ددی قضیی عمومی شکل په ثبوت ورسوو، نو دلته د دوهمی قضیی د ثبوت څخه ډډه کوو.

بیلګه ۳ ـ د خطی معادلو لاندنی سیستم حل کړی.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -10 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

حل ـ لمړی د اصلی ماترکس دیترمنانت محاسبه کوو:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} =(2)(-2)(-4)+(1)(1)(5)+(3)(-3)(-3) - $$

$$(-3)(-2)(5) - (1)(-3)(2) - (1)(3)(-4)=$$

$$=16+5+27-30+6+12=36$$

څرنګه چی $D\neq0$ دی ، نود کرامر د فارمول څخه کار اخیستلای سو.

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -10 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} =72+1-90-6+27-40=-36$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 3 & -10 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} =80+45-9-150+108-2=233-161=72$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & -10 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} =-4-50-81+90-3-60=-108$$

ددی ځایه :

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-36}{36}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{72}{36}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-108}{36}=-3$$

§V. اوښتون permutation او تعویض (الیشول) substitution .

په تیر پاراګراف کې مو د دوهم او دریم ترتیب دیترمنانتونه تعریف کړه. د n ـمرتبه ای دیترمنانت د مطالعې دپاره باید لمړی د متناهی سیټو او دهغوی په منځ کې د مپینګ په اړوند په ځینو واقعیتو پوه سو.

فرضوو چې د طبیعي عددونو د لمړی n عددونو سیټ ، یعنی $M=\{1,2,\ldots,n\}$ راکړه سویدی. د M پر سیټ باندی کولای سو چې په مختلفو طریقو د خطي ترتیب اړیکه تعریف کړو، د بیلګې په توګه د „x<y" اړیکه د M د سیټ عددونه مخ پر لوړه (صعودی) ترتیبوی او د „x>y" اړیکه د M د سیټ عددونه مخ پر کښته (نزولی) ترتیبوی.

تعریف ۱ ـ د n اولو طبیعي عددونو اوښتون permutation عبارت دی د هر خطي ترتیب څخه چې د نوموړو عددونو پر سیټ راکړه سوی وی .

بیلګه ۱ـ پر هغه سیټ باندی چې دری عنصره ولری ، یعنی $M=\{1,2,3\}$ وی ، 6 مختلف خطي ترتیبونه وجود لری، چې هغوی عبارت دی له :

2,1,3 ; 3,1,2 1,2,3 ; 3,2,1 ; 1,3,2 ; 2,3,1 ;

په بله اصطلاح پر دری عنصره سیټ باندی د اوښتونو شمیر 6 دی.

پوښتنه ـ پر دوه عنصره سیټ د اوښتونو شمیر څودی ؟

قضیه ۱ ـ د n اولو طبیعي عددونو پر سیټ د اوښتونو شمیر مساوی کیږی په 1.2.3…..n چې په n! (n ـ فاکتوریل factorial) سره ښودل کیږی. په بله اصطلاح
1.2.3….n=n!

ثبوت ـ د قضیې ثبوت د ریاضی د استقراء په طریقه سرته رسوو.

که n=1 سره وی ، نو د $M=\{1\}$ پر سیټ باندی یوازی یوه خطي اړیکه وجود لری. د هغه ځایه چې 1!=1 سره کیږی ،نو د n=1 په حالت کې قضیه صدق کوی .

اوس به نو فرض کړو چې قضیه د هر طبیعي عدد $k\geq 1$ دپاره حقیقت لری ، یعنی د k عنصره پر سیټ باندی k! اوښتونی وجود لری.

د k+1 عدد تر مشاهدی لاندی ونیسو.

د k+1 عنصره پر سیټ باندی هر خطي ترتیب داسی لاسته راوړو چې د k عنصره د سیټ پر خطي ترتیب د k+1 عنصر په لاندی ډول اضافه کوو:

۱ـ د $k!$ په اوښتونو کی د $k+1$ عنصر په پای کی یعنی پر $k+1$ ځای باندی ځای پر ځای کوو.

۲ـ د $k!$ په اوښتونو کی د $k+1$ عنصر په ترتیب سره پر لمړی، دوهم ،...،k ـام ځای باندی ایږدو.

پدی ډول د $k+1$ عنصر ، $k+1$ ځلی د $k!$ په مختلفو اوښتونو کی تنظیمولای سو ، چی په نتیجه کی د $k!(k+1)$ اوښتنی لاسته راځی. یعنی :

$$k!(k+1)=(1.2.3\ldots k)(k+1)=(k+1)!$$

د ریاضی د استقراء د اساسی قضیی پر بنسټ زموږ قضیه د ټولو طبیعی عددونو دپاره صدق کوی.

که مو د قضیی نه مخکی پوښتنی ته درست جواب ورکړی وی ، نو ددوه عنصره سیټ د اوښتنو شمیر باید دوه وی. هغه هم عبارت دی له 1,2 او 2,1 څخه.

په آسانی سره لیدل کیږی چی دوهم اوښتون د لمړی اوښتون څخه یوازی د 1 او 2 د عددونو د ځایو د تبدیلولو په نتیجه لاسته راغلی دی. همدا ډول د دری عنصره اوښتونو په سیټ کی د 3,2,1 اوښتنه د 1,2,3 د اوښتنی څخه یوازی د 1 او 3 د عددونو د ځایو د تبدیلولو په نتیجه کی لاسته راغلی دی .

تاسو کولا سی چی د قضیی د ثبوت کړنلاره د دوه عنصره د اوښتونو پر سیټ داسی عملی کړی چی په هغه کی د 3 عدد اضافه کړی.

اوس نو که د n عنصره سیټ ټوله اوښتنی د یوه سیټ په څیر تصور کړو ، یعنی د n عنصره سیټ د ټولو اوښتونو سیټ راکړه سوی وی ، نو کولای سو چی پر دی سیټ باندی یوه یوه ئیزه عملیه په راکړه سوی اوښتون کی چی د i او j دعنصرو د ځایو د تبدیل څخه عبارت ده، تعریف کړو.

په راکړه سوی اوښتون کی که د i او j دعددونو ځایونه سره الیش کړو ، نو دغی عملیی ته به ترانسپوزیشن transposition یا د عددونو مخ یا شاته کول ، ووایو او په T_i^j سره به یی وښیو.

نظر و مخکنیو بیلګو ته به ولرو:

$$T_1^2(1,2)=2,1 \quad \text{او} \quad T_1^3(1,2,3)=3,2,1$$

همدا ډول که 1,2,3,4,5 د 5 عنصره د اوښتنو د سیټ یوه اوښتنه وی ،نو

$$T_1^3(1,2,3,4,5)=3,2,1,4,5$$
$$T_2^5(1,2,3,4,5)=1,5,3,4,2$$
$$T_2^3(1,2,3,4,5)=1,3,2,4,5$$

که د M د سیټ د ټولو اوښتونو سیټ په P_M سره وښیو ، نو د $M=\{1,2,3\}$ دپاره به د P_M سیټ داسې ښکاری:

$$P_M=\{1,2,3\ ;\ 3,2,1\ ;\ 1,3,2\ ;\ 2,3,1\ ;\ 2,1,3\ ;\ 3,1,2\}$$

د ترانسپوزیشن د یوه ئیزی عملیې د عملی کیدو په نتیجه کی د P_M د سیټ د هر عنصر څخه د هغه بل عنصر لاسته راوړلای سو. د بیلګی په توګه دP_M د سیټ پر $3,2,1$ عنصر باندی د T_3^2 او T_3^1 د پرله پسی عملی کیدو په نتیجه کی د نوموړی سیټ $2,1,3$ عنصر لاسته راځی. یعنی :

$$T_3^2(3,2,1)=2,3,1 \qquad \wedge \qquad T_3^1(2,3,1)=2,1,3$$

قضیه ۲ ـ د n عنصره سیټ د ټولو اوښتنو پر سیټ باندی د ترانسپوزیشن د یوه ئیزی عملیې دیر له پسی د سرته رسولو په نتیجه کی دیوی اوښتنې څخه د نوموړی سیټ بله اوښتنه لاسته راځی.

ثبوت ـ فرضوو چی $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ او $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ د n عنصره سیټ دوی مختلفی اوښتنی دی . باید وښیو چی څه ډول دیر له پسی ترانسپوزیشن پذریعه د یوی اوښتنی څخه بله اوښتنه لاسته راوړو.

فرضوو چی $\alpha_1 \neq \beta_1$ دی ، څرنګه چی $\beta_1 \in \{\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n\}$ ، نو د $T_{\alpha_1}^{\beta_1}$ ترانسپوزیشن په نتیجه کی $T_{\alpha_1}^{\beta_1}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\beta_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ لاسته راځی. تر هغه وروسته باید وګورو چی آیا $\alpha_2=\beta_2$ سره دی؟

که $\alpha_2=\beta_2$ وی ، نو بیاهم α_3 او β_3 سره ګورو.که $\alpha_2 \neq \beta_2$ وی، نو $\beta_2 \in \{\alpha_3,\alpha_4,...,\alpha_n\}$ دی او د $T_{\alpha_2}^{\beta_2}$ د ترانسپوزیشن د عملی کیدو په نتیجه کی $T_{\alpha_2}^{\beta_2}(\beta_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)=\beta_1,\beta_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ لاسته راځی. پورتنی پروسه چی ډیر سی $n-1$ ځله تکرارو ، څو بلاخره د $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ اوښتون څخه د $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ اوښتون لاسته راسی.

بیلګه ۲ ـ

د 5,2,4,3,1 پر اوښتنې باندې د T_4^1 او T_4^2, T_5^3, T_5^2 ترانسپوزیشنو د پرله پسې عملې کېدو په نتیجه کې

د 1,3,2,5,4 اوښتنه لاسته راځي.

$$T_5^2(5,2,4,3,1) = 2,5,4,3,1$$
$$T_5^3(2,5,4,3,1) = 2,3,4,5,1$$
$$T_4^2(2,3,4,5,1) = 4,3,2,5,1$$
$$T_4^1(4,3,2,5,1) = 1,3,2,5,4$$

تعریف ۲ ـ په راکړه سوې اوښتون کې د i او j عددونه یو دبل معکوس بلل کیږي ، که i>j او په راکړه سوې اوښتون کې د i عدد د کیڼ لوري څخه لمړي ځای پر ځای سوی وي او د j عدد تر هغه وروسته (یعني وروسته له i څخه) ځای پر ځای سوی وي.

پدې معنی چې لوی عدد تر کوچنی عدد دمخه راغلی دی. د پورتنی تعریف څخه څرګنده ده ، چې په یوه اوښتون کې امکان لري چې یو عدد د څو عددونو سره معکوس وي.

یوه اوښتنه د جفتي (طاقي) اوښتنې په نامه یادوو ، که په نوموړې اوښتنه کې د یودبل معکوس عددونو شمیر جفت (طاق) وي.

بیلګه ۳ ـ د 4,3,1,2 اوښتنه د 5 جوړو یودبل معکوسو عنصرو درلودونکې ده ، چې هغه عبارت دي له 4,3 ; 4,1 ; 4,2; ;3,1; 3,2 څخه . ځکه نو د 4,3,1,2 اوښتنه طاقه ده .

د 1,2,3,4 اوښتنه هیڅ یود بل معکوس عنصرونه نلري، نو ځکه نوموړې اوښتنه جفت ده .

قضیه ۳ ـ د هر ترانسپوزیشن د عملې کېدو په نتیجه کې د راکړه سوې اوښتون په جفت والې او طاق والې تغیر راځي.

ثبوت ـ فرضوو چې $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ د n کیفي عددونو د اوښتونو څخه یوه اوښتنه ده. د هر $1 \le i < n$ دپاره به ولرو:

$$T_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i+1}, \alpha_i, ..., \alpha_n$$

فرضوو چې په راکړه سوې اوښتون کې و یو او بل ته د معکوسو جوړو شمیر مساوي په s سره دی. که $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ وي ، نو په نوې اوښتنه کې و یو او بل ته د معکوسو جوړو

شمیر $s-1$ کیږی. که $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ وی، نو په نوی اوښتنه کی و یو او بل ته د معکوسو جوړو شمیرمساوی په $s+1$ سره کیږی. اوس نو که s جفت ؤ ، $s-1$ او $s+1$ طاق عددونه دی او که s طاق ؤ، نو $s-1$ او $s+1$ جفت عددونه دی. پدی معنی چی که د $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ د ترانسپوزیشن د عملی کیدو په نتیجه کی $T_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i}$ اوښتنه جفته وه ، نو د به طاقه اوښتنه لاسته راسی او بر عکس.

فرض کړو چی د $T_{\alpha_i}^{\alpha_{i+k+1}}$ ترانسپیوزیشن د α_i او α_{i+k+1} ځایونه سره الیش کړی، پداسی ډول چی ددوی په منځ کی $k>0$ عددونه موجودوی، یعنی:

$$T_{\alpha_i}^{\alpha_{i+k+1}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{i+k}, \alpha_{i+k+1}, ..., \alpha_n) =$$
$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i+k+1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{i+k}, \alpha_i, ..., \alpha_n$$

د راکړه سوی اوښتون څخه مو لاسته راغلی اوښتون د لاندنیو پرله پسی ترانسپوزیشنو د اجراء کولو په مرسته موندلی دی.

$$T_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}, T_{\alpha_i}^{\alpha_{i+2}}, ..., T_{\alpha_i}^{\alpha_{i+k+1}}, T_{\alpha_{i+k+1}}^{\alpha_{i+k}}, ..., T_{\alpha_{i+k+1}}^{\alpha_{i+1}}$$

یعنی د کیڼ لوری څخه وښی لوری ته مو پر له پسی د α_i ځای د α_{i+k+1} د ځایو سره الیش کړی . وروسته برعکس د ښی لوری څخه و کیڼ لوری ته α_{i+k+1} د α_i ځای ته راوړو.په نتیجه کی مو $(k+1)+k = 2k+1$ ترانسپوزیشنونه اجراء کړه . څرنګه چی هر یو د ترانسپوزیشنو (د دریمی قضیی پر بنسټ) د اوښتنی جفت والی او طاق والی ته تغیر ورکوی ، نو د آخری ترانسپوزیشن د عملی کیدو په نتیجه کی لاسته راغلی اوښتون د جفت والی له مخی د راکړه سوی اوښتون خلاف دی.

ثابتیدلای سی چی د n عنصره سیټ $(n\geq 2)$د اوښتونو په سیټ کی د جفتو او طاقو اوښتنو شمیر سره مساوی دی .

تعریف ۳ ـ هر بایجکتیف میپینګ f د $M=\{1,2,…,n\}$ (n لمړی طبیعی عددونه) د سیټ څخه د M پرسیټ باندی (یعنی پر خپل ځان باندی) د n- درجه ای تعویض (substitution) په نامه یادوو.

ددریم تعریف د ښه پوهیدو دپاره تعویض د دوو اوښتون په څیر چی یود بل پر سر لیکل سوی وی ، ارائه کوو، یعنی:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

په لمړی کرښه د M دسیټ عنصرونه او په دوهمه کرښه کی د هغوی انځورونه (تصویرونه) لیکل سوی دی . یعنی د $1 \leq i \leq n$ دپاره $f(i)=\alpha_i$ سره دی. د f تعویض د (1) په مختلفو شکلو سره لیکلای سو. دبیلګی په ډول :

$$f=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

پدی معنی چی اصل او انځور یی باید ، بیله د ترتیب د په نظر کی نیولو څخه ،یود بل په مخامخ کی کښیښودل سی .

د تعویض د یوه شکل څخه بل شکل پرله پسی دستونو د ځای د تبدیلیدو په نتیجه کی لاسته راځی ، پدی حالت کی ترانسپوزیشن په عین وخت کی پر دواړو کرښو باندی اجراء کیږی.

تر هغه ځایه چی په پورتنی حالت کی په هره کرښه کی د اوښتنی جفت والی تغیر کوی ، نو د تعویض په جفت والی کی تغیر نه راځی. پدی معنی چی پر تعویض باندی د ترانسپوزیشن د اجراء کولو په نتیجه کی د اوښتنی جفت والی ساتل کیږی.

تعریف ۴ ـ د f تعویض جفت بولو که دیو دبل معکوسو عنصرو د جوړو عمومی شمیر په دواړو کرښو کی جفت وی ، غیر له هغه څخه تعویض د طاق تعویض په نامه یادیږی.

په اسانی سره ښودل کیدای سی چی د n درجه ای د جفت او طاق تعویضونوشمیر سره مساوی او په $\frac{1}{2}n!$ سره کیږی.

بیلګه ۲ ـ

که $M=\{1,2\}$ وی ، نو د M د سیټ څخه د M پر سیټ باندی لاندنی بایجکتیف میپینګونه وجود

لری.

$$f_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; f_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

په لمړی میپینګ کی $f_1(1)=1$ او $f_1(2)=2$ دی . په دوهم میپینګ کی $f_2(1)=2$ او $f_2(2)=1$ سره دی. پدی معنی چی f_1 او f_2 دوه مرتبه ای تعویضونه دی.

د $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ میپینګ تعویض ندی ! ولی؟

د دری مرتبه ای تعویضو بیلګی :

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

د دری مرتبه ای تعویضو شمیر به څو وی ؟ هغوی ټوله ولیکی.

دوه مرتبه ای تعویض f_1 جفت دی ، ځکه چی یودبل سره د معکوسو عنصرو د جوړو شمیر مساوی په صفر سره دی . د f_2 دوه مرتبه ای تعویض طاق دی ، ځکه چی یودبل سره د معکوسو عنصرود جوړو شمیر په لمړی کرښه کی صفر او په دوهمه کرښه کی مساوی په یوه سره دی . نو پدی حساب د معکوسو عنصرو د جوړومجموعی شمیر یو او تعویض طاق دی.

په همدی ډول د دری مرتبه ای تعویض په تیره بیلګه کی په ترتیب سره f_1 جفت ، f_2 او f_3 طاق دی .

§VI. n ـمرتبه ای دیترمنانت.

په §IV کی مود دوه مجهوله او دری مجهوله خطی معادلو د سیستمونو په اړوند دوه مرتبه ای او دری مرتبه ای دیترمنانتونه مطالعه کړه ، چی په نتیجه کی یی و لاندنی واقعیت ته ورسیدو:

که د دوه مجهوله او دری مجهوله د خطی معادلو د سیستمو د اصلی ماترکس دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی، نو د ذکر سوی سیستمو د حل دپاره د کرامر فارمول وجودلری. سوال مطرح کیږی چی آیا د n مجهوله خطی معادلو د سیستم دپاره مشابه فارمولونه هم وجود لری او که نه؟ د طرح سوی سوال جواب مثبت دی ، خو لمړی باید n مرتبه ای دیترمنانتونه تر مطالعی لاندی ونیسو. بیا هم دوه مرتبه ای او دری مرتبه ای دیترمنانتونه تحلیلوو او د هغوی پر بنسټ د n مرتبه ای دیترمنانت عمومی مفهوم تعریفوو.

ددی موخی دپاره لاندنی جدول تر مطالعی لاندی نیسو:

د دیترمنانت په جزء کی مضربونه څه ډول ټاکل سوی دی؟	په هر جزء کی د مضربو شمیر	د دیترمنانت د اجزاؤ علامه	د اجزاؤ شمیر په دیترمنانت کی	د دیترمنانت ترتیب
د هری کرښی او ستون څخه یو عنصر ټاکل کیږی او دهغوی د ضرب حاصل د دیترمنانت جزء دی	2	$a_{11}a_{22}$ $-a_{12}a_{21}$	2.1=2	2
-//-	3	$a_{11}a_{22}a_{33};-a_{13}a_{22}a_{31}$ $a_{13}a_{21}a_{32};-a_{11}a_{23}a_{32}$ $a_{12}a_{23}a_{31};-a_{12}a_{21}a_{33}$	6=1.2.3=3!	3

که د پورتنی جدول دریم ستون ته په ځیر سره وګورو ،نو لاندنی په زړه پوری واقعیت به مشاهده کړو:

که د هر جزء د مضربو لمړی اندکسونه په پاسنی کرښه او دوهم اندکسونه تر هغه په لاندی کرښه کی یو پر بل باندی ولیکو، نو لاندنی تعویضونه لاسته راځی.

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$f_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} f_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$f_7=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ f_8=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

د f_5,f_4,f_3,f_1 تعویضونه جفت او پاته تعویضونه یی طاق دی .جفت تعویضونه د مثبت علامی او طاق تعویضونه د منفی علامی درلودونکی دی. د دوه مرتبه ای او دری مرتبه ای دیترمنانتو تحلیل او تجزیه موږ ته دا اجازه راکوی چی د n مرتبی ای دیترمنانت عمومی تعریف طرح کړو. فرضوو چی د A مربعی ماترکس راکړه سویدی.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

تعریف ۱ـ د مربعی ماترکس A ، n مرتبه ای دیترمنانت عبارت دی د $n!$ اجزاؤ د جمع د حاصل څخه چی په لاندی ډول ترتیب سویدی:

۱ـ د دیترمنانت اجزاوی عبارت دی د A د ماترکس د ټولوممکنو n عنصره د ضرب د حاصل څخه ، پداسی ډول چی د هری کربنی او هر ستون څخه یوازی یو عنصر ټاکل سوی وی.

۲ـ یو جزء د مثبت علامی درلودونکی دی که دعنصرو د اندکس تعویض جفت وی ، غیر له هغه څخه د منفی علامی درلودونکی دی .

په آسانی سره لیدل کیږی چی که $n=2$ او یا $n=3$ وی ، نو د لمړی تعریف خصوصی حالت یعنی دوه مرتبه ای او دری مرتبه ای دیترمنانتو نه لاسته راځی. که $n=1$ وی، نو دیترمنانت یی په هم هغه عدد سره مساوی کیږی (په یوه مرتبه ای ماترکس سره مساوی کیږی)

n ـ مرتبه ای دیترمنانت په

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots(2)$$

سره ښیو.

کله کله دیترمنانت په D سره ښیو. تر هغه ځایه چی د تعویضونو جفت والی په تعویض کی د مختلفو ستونو د تسلسل په ترتیب اړه نلری ،ځکه نو لمړی تعریف داسی هم فارمولبندی کولای سو.

تعریف ۲ ـ د مربعی ماترکس A ، n مرتبه ای دیترمنانت عبارت دی د $n!$ اجزاؤ د جمع د حاصل څخه چی په لاندی ډول ترتیب سویدی:

۱ـ د دیترمنانت اجزاوی عبارت دی د A د ماترکس د ټولوممکنو n عنصره د ضرب د حاصل څخه ، پداسی ډول چی د هری کربنی او هر ستون څخه یوازی یو عنصر ټاکل سوی وی.

۲ـ د هر جزء علامه $(-1)^{s+t}$ ده ، پداسی ډول چی s په راکړه سوی جزء کی د یودبل معکوسو عنصرو شمیر د مضربو د اندکسو په لمړی اوښتون کی دی او t په راکړه سوی جزء کی د یودبل معکوسو عنصرو شمیر د مضربو د اندکسو په دوهم اوښتون کی دی.

ددیترمنانت په هر جزء کی مضربونه داسی اوډلای سو چی لمړنی اندکسونه یی مخ پر لوړه لاړ جوړ کړی ، په هغه صورت کی د مضربو د اندکسو په لمړی اوښتون کی د یودبل معکوسو عنصرو شمیر مساوی په صفر سره دی.

بلاخره د دیترمنانت تعریف داسی هم فارمولبندی کولای سو:

تعریف ۳ ـ د مربعی ماترکس A ، n مرتبه ای دیترمنانت عبارت دی د $n!$ اجزاؤ د جمع د حاصل څخه چی په لاندی ډول ترتیب سویدی:

۱ـ د دیترمنانت اجزاوی عبارت دی د A د ماترکس د ټولوممکنو n عنصره د ضرب د حاصل څخه ، پداسی ډول چی د هری کربنی او هر ستون څخه یوازی یو عنصر ټاکل سوی وی.

۲ـ د هر جزء علامه $(-1)^{t}$ ده ، پداسی ډول چی t په راکړه سوی جزء کی د مضربو د دوهمو اندکسوپه اوښتون کی د یودبل معکوسو عنصرو شمیر دی.پدی شرط چی مضربونه داسی اوډل سوی وی چی د هغوی لمړی اندکسونه مخ پر لوړه لاړ جوړ کړی.

د دوه مرتبه ای اودری مرتبه ای دیترمنانتو د محاسبی دپاره مو وکولای سوای چی طریقه (فارمولونه) طرح کړو، لاکن د n مرتبه ای دیترمنانتو $(n>3)$ ورته فارمول وجود نلری . د $n=4$ دپاره دیترمنانت 24 اجزاوی لری. په عین ترتیب تصور یی کولای سی چی د n مرتبه دیترمنانت محاسبه پیچلی ده . د هغو دیترمنانتو محاسبه چی ډیر عنصرونه یی مساوی په صفر وی ، نظر و نورو دیترمنانتو ته ساده ده .

بیلګه ۱ ـ

الف ـ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^1.1.2.4.3 = -24$$

دلته یوازی یو جزء تشکیلیږی او هغه عبارت دی له: $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ څخه . اوس نو که د لمړی اندکسو اوښتون وګورو ، نو هغه یو مخ پر لوړه لاړ جوړوی او د دوهم اندکس په اوښتون کی یوازی یو ه جوړه یودبل معکوس عنصرونه وجودلری .

ب -

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ددیترمنانت د تعریف له مخی باید هر جزء د هری کربښی او هر ستون څخه یو عنصر په ځان کی ولری .څرنګه چی د دوهمی کربښی ټول عنصرونه مساوی په صفر دی ، او په هر جزء کی یو نماینده لری ، نو ځکه ټولی اجزاوی به مساوی په صفر سره وی.

ددیترمنانتو د محاسبی دپاره لازمه ده چی ددیترمنانتو د خاصیتوپه جزئیاتوپوه سو.

§VII. د دیترمنانتو اساسی خاصیتونه .

فرضوو چی د

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماترکس راکړه سوی دی.

که په نوموړی ماترکس کی کربښی د ستونو سره داسی تعویض کړو چی دهغوی ترتیب وساتل سی ، په ترتیب سره لمړی کربښه لمړی ستون ،دوهمه کربښه دوهم ستون او n - کربښه n ـام ستون سی ، نو د

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماترکس لاسته راځی چی د A د ماترکس د ترانسپوز Transpose ماترکس په نامه یادیږی او په A^T سره یی ښیو.

قضیه ۱ـ د A د ماترکس دیترمنانت د همدغه ماترکس د ترانسپوز ماترکس ددیترمنانت سره مساوی دی ، یعنی: $|A| = |A^T|$.

ثبوت ـ د A د ماترکس یوه کیفی جزء مشاهده کوو؛ د بیلګی په توګه

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \qquad \ldots(1)$$

پداسی ډول چی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ د $n, \ldots, 2, 1$ د عددونو د اوښتنو څخه یوه اوښتنه وی.د (1) افادی ټوله مضربونه د A^T د ماترکس په مختلفو کرښو او ستونو کی هم قرارلری. پدی معنی چی د (1) افاده د $|A^T|$ د دیترمنانت یو جزء هم ده . په عین ډول استدلال کولای سو چی د $|A^T|$ د دیترمنانت هر جزء د $|A|$ ددیترمنانت جزء هم دی ، پدی معنی چی دواړه دیترمنانتونه د عین اجزاؤ درلودونکی دی.

د $|A|$ د دیترمنانت د (1) جزء علامه $(-1)^t$ ده ، پداسی حال کی چی t د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ په اوښتون کی د یودبل معکوسو عنصرو د جوړو شمیر دی . که د (1) افاده د $|A^T|$ په دیترمنانت کی مشاهده کړو ، نو د مضربو لمړی اندکس د ستون نمره او دو هم اندکس د کرښی نمره ارائه کوی، ځکه نو لاندنی تعویض به ولرو:

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

د دیترمنانت ددوهم تعریف پر اساس چی د $|A^T|$ په دیترمنانت کی د (1) جزء د $(-1)^{t+0}=(-1)^t$ د علامی درلودونکی دی . پدی ترتیب د $|A|$ او $|A^T|$ دیترمنانتونه د عین اجزاؤ چی عین علامی لری ، د جمعی حاصل دی . په بله اصطلاح ددواړه

دیترمنانتو اجزاوی او په هغوی پوری تړلی علامی سره مساوی دی. څکه نو دواړه دیترمنانتونه سره مساوی دی.

د قضیه ۱ څخه استنباط کیږی چی : هره قضیه چی د دیترمنانتو د کرښو په هکله صدق وکړی ، نو د ستونو په هکله هم صدق کوی . او برعکس . څکه نو ویلای سو چی د دیتر منانتو د کرښو او ستونو په هکله قضیی سره معادل دی.

قضیه ۲ـ که په یو دیترمنانت کی د یوی کرښی ټوله عنصرونه مساوی په صفر سره وی ، نو دیترمنانت مساوی په صفر سره دی.

د قضیی ثبوت مستقیماَ د دیترمنانت د تعریف د لمړی جزء څخه استنباط کیږی.

قضیه ۳ ـ که ددیترمنانت د یوی کرښی ټول عنصرونه د λ په عدد کی ضرب کړو ، نو ټول دیترمنانت د λ په عدد کی ضربیږی.

ثبوت ـ فرضوو چی د یوی کرښی ټول عنصرونه مو د λ په عدد کی ضرب کړه . نو د دیترمنانت د تعریف له مخی د دیترمنانت هر جزء د هری کرښی او هر ستون یو نماینده په ځان کی لری ، پدی ترتیب د هغی کرښی ، چی عنصرونه یی د λ په عدد کی ضرب سوی دی ، هم په ځان کی لری ، نو څکه ټول دیترمنانت په نوموړی عدد کی ضربیږی. ددیترمنانتو دغه خاصیت په لاندی ډول لیکلای سو:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

په بله اصطلاح د دیترمنانت د کرښی مشترک مضرب ، د دیترمنانت د علامی څخه بهر لیکلای سو.

قضیه ۴ ـ که په دیترمنانت کی ددو کرښو ځایونه سره واړوْ ، نو د دیترمنانت علامه تغیر کوی (یعنی د مثبت څخه په منفی یا د منفی څخه په مثبت اوړی) ، لاکن مطلقه قیمت یی ثابت پاتیږی .

ثبوت ـ لاندنی دیترمنانت مشاهده کوو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \ldots(3)$$

په (3) دیترمنانت کی د i ـمی او j ـ می کرښی ځایونه سره اړؤ.

$$|A_1| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{i - مه کرښه} \\ \\ \longleftarrow \text{j - مه کرښه} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\ldots(4)$

که د (3) دیترمنانت یو د اجزاؤ څخه $\ldots(5)$ $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$ وی،نو نوموړی اجزاوی په د (4) دیترمنانت په مختلفو کرښو او ستونو کی هم ځای پر ځای سوی دی. ځکه نو (4) ـ ام او (3) ـام دیترمنانتونه د عین اجزاؤ درلودونکی دی. د

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

تعویض د (5) ـ ام جزء جواب ورکونکی دی. پداسی حال کی چی په (4) ـ دیترمنانت کی به تعویض داسی ښکاری:

$$f_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

په رشتیا هم هر یو د $a_{i\alpha_i}$ $(1\leq\alpha_i\leq n)$ د عنصرو څخه او س په j ـ مه کرښه ولی په خپل هغه پخوانی ستون کی ، چی مخکی پراته وه ، پراته دی. تر هغه ځایه چی f_2 د f_1 څخه د ترانسپوزیشن په نتیجه کی لاسته راغلی دی ، ځکه نو جفت والی یی تغیر کوی. ددی ځایه استنباط کیږی چی د (3) ـ یم دیترمنانت ټوله اجزاوی په (4) ـ ام دیترمنانت کی په مخالفه علامه سره پراته دی . یعنی : $|A|=-|A_1|$

قضیه ۵ ـ که په یوه دیترمنانت کی دوی کرښی یو له بله سره مساوی ، نو دیترمنانت مساوی په صفر سره دی.

ثبوت ـ

فرضو چی په راکړه سوی دیترمنانت کی دوی کرښی یوله بله سره مساودی ، ځکه نو نظر و څلورمی قضیی ته ددی دوو کرښو دیود بله د اوښتون په نتیجه کی د دیترمنانت مطلقه قیمت ثابت ، مګر علامه تغیر کوی ، یعنی $|A|=-|A|$

ددی ځایه باید $|A|=0$ سره وی.

نتیجه ـ که په یوه دیترمنانت کی دوی کرښی بو دبل سره متناسبی وی ، نو دیترمنانت مساوی په صفر سره دی .

په رشتیا هم که د i ـمی کرښی عنصرونه د j ـ می کرښی د عنصروسره $(i\neq j)$ د λ نسبت ولری ، نو کولای سو چی د دریمی قضیی پر اساس λ د دیترمنانت څخه دباندی ولیکو ،څو په نتیجه کی یی یو دیترمنانت چی دوی مساوی کرښی لری لاسته راځی . څو بلاخره د پنځمی قضیی له مخی دیترمنانت مساوی په صفر سره دی.

قضیه ۶ ـ که په یوه n ـ مرتبه یی دیترمنانت کی د i ـ می کرښی ټول عنصرونه د دوو اجزاؤ د جمعی حاصل تشکیلوی ، نو دغه دیترمنانت مساوی کیږی ددوو دیترمنانتو د جمعی په حاصل سره ، پداسی توګه چی ددواړو دیترمنانتو نو ټوله عنصرونه سره مساوی دی ، یوازی په i ـ مه کرښه کی د لمړی دیترمنانت د جمعی دحاصل لمړی او په دوهم دیترمنانت کی د جمعی دحاصل دوهم جزء پروت دی.

دغه قضیه په سمبولیکه بڼه داسی لیکو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ثبوت ـ د راکړه سوی دیترمنانت هره جزء لاندنی بڼه لری:

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...(a_{i\alpha_i}+b_{i\alpha_i})...a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{i\alpha_i}...a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...b_{i\alpha_i}...a_{n\alpha_n}$$

په همدی ډول ټوله اجزاوی د دوو جزء د جمعی د حاصل په بڼه لیکو ، چی په نتیجه کی دوه مختلف دیترمنانته لاسته راځی. پدی معنی چی زموږ ادعا حقیقت لری.

په آسانی سره لیدل کیږی ، که د یوه دیترمنانت کی په یوه کرښه کی تر دوو جزء اضافه سره جمع سوی وی ، نو په نتیجه کی دغه دیترمنانت د هغو اجزاؤ په شمیرددیترمنانتو د جمع په حاصل سره مساوی کیږی.

نتیجه ۱ ـ که په یوه دیترمنانت کی یوه کرښه د نورو پاتی کرښو خطی ترکیب وی ، نو دیترمنانت مساوی په صفر سره کیږی.

په رشتیاهم ، د بیلگی په توگه د ټولو i $(1 \le i \le n)$ دپاره $a_{1i} = \lambda_2 a_{2i} + ... + \lambda_n a_{ni}$ وی.

د شیږمی قضیی پر بنسټ یی لرو :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ددریمی قضیې پر بنسټ د پورتنی مساوات په ښی خواکی هر یو د دیترمنانتو څخه مساوی په صفر دی ، نو په نتیجه کی د هغوی د جمعی حاصل او بلاخره د مساوات څخه و کیڼ لاسته دیترمنانت مساوی په صفر سره دی.

نتیجه ـ که په یودیترمنانت کی د یوی کرښی د عنصرو سره د بلی کرښی عنصرونه چی په یو حقیقی عدد کی ضرب سوی وی ، جمع کړو ، نو په دیترمنانت کی تغیر نه راځی.

په رشتیا هم :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i1}+\lambda a_{j2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

د پنځمی قضیی پر بنسټ په λ کی ضرب سوی دیترمنانت مساوی په صفر سره کیږی ، ځکه چی دوی مساوی کرښی لری.

اوس به نو وګورو چی ددیترمنانتو د خاصیتو څخه په استفاده سره د دیترمنانتو په محاسبه کی څونه سهولتونه منځ ته راځی.

بیلګه ۱ـ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

د لاندنیو خاصیتو څخه په استفاده سره مو لمړی مساوات لاسته راوړی:

۱ـ لمړی کرښه مو د -2 په عدد کی ضرب او ددوهمی کرښی سره جمع کړه.

۲ـ لمړی کرښه مو د2 په عدد کی ضرب او ددریمی کرښی سره جمع کړه.

۳ـ لمړی کرښه مو د څلورمی کرښی سره جمع کړه .

دوهم مساوات مو د اسی لاسته راوړی :

۱ـ څلورمه کرښه مو په -4 کی ضرب او ددوهمی کرښی سره جمع کړه .

۲ـ دریمه کرښه مو په -5 کی ضرب او د دوهمی کرښی سره جمع کړه.

ددیترمنانت د تعریف له مخی ویلای سو چی دیترمنانت مو مساوی په 3 سره کیږی.

بیلگه ۲ ـ د $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ دیترمنانت مساوی په صفر سره کیږی

، ځکه چی څلرمه کرښه د پاته درو کرښو د جمعی حاصل دی. پدی معنی چی څلرمه کرښه د پاتی دروکرښو خطی ترکیب دی ، نو د شپږمی قضیی د نتیجی له مخی دیترمنانت مساوی په صفر سره کیږی.

§VIII. ماینر Minor ـ الجبری مکمله او دهغوی خاصیتونه.

فرضوو چی د A ، n ـ مرتبه ای مربعی ماترکس راکړه سوی دی.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

د پورتنی ماترکس د عنصرو څخه کولای سو یو n ـ مرتبه ای دیترمنانت $|A|$ جوړ کړو.

علاوه پر دی کولای سو چی د نوموړی عنصرو څخه داسی دیترمنانت چی د هغه ترتیب تر n ـ کښته وی ، هم جوړ کړوؤ پداسی ډول چی د ماترکس پر مساوی شمیر کرښو او ستونو باندی خط کش کړو.و به یی وینو چی دغه ډول لاسته راغلی دیترمنانت د اصلی دیترمنانت د محاسبی دپاره ډیر ښه مرستندوی دی.

تعریف ۱ـ د راکړه سوی ماترکس k ـ مرتبه ای ماینر (Minor) عبارت دی د k مرتبه ای دیترمنانت څخه ، پداسی ډول چی عنصرونه یی د راکړه سوی ماترکس د k کرښو او k ستونو د تقاطع څخه لاسته راځی.

د ماینر کلمه د لاتینی ژبی څخه اخیستل سویده او د کوچنی په معنی ده،کله کله ماینر ته سب ماترکس هم وایی . k مرتبه ای ماینر په $M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ سره ښیو.$i_k,\dots,i_2,i_1$ تاکل سوی کرښی دی او $j_k,\dots,j_2,j_1$ تاکل سوی ستونونه دی.

بیلګه ۱ ـ فرضوو چی لاندنی ماترکس راکړه سوی دی.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ددی ماترکس څخه کولای سو چی 9 مختلف د دوهم ترتیب ماینرونه جوړ کړو، د بیلګی په توګه :

$$M^{1,2}_{1,2}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \quad M^{2,3}_{1,2}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

فرضوو چی د A د ماترکس څخه یو k ـ مرتبه ای ماینر $M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ جوړ سوی دی . وروسته له دی چی د A د ماترکس د $i_k,\dots,i_2,i_1$ پر کرښو اود $j_k,\dots,j_2,j_1$ پر ستونو خط کش کړی ، نو بیاهم د A په ماترکس کی عنصرونه پاتیږی چی هغوی بیاهم یو مربعی ماترکس چی مرتبه ای $n-k$ ده تشکیلوی. د لاسته راغلی $n-k$ مرتبه ای ماترکس دیترمنانت د $M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ ماینر د مکملی په نامه یادوو، چی په $\overline{M}^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ سره ښیو. $n-1$ مرتبه ای ماینر د یو مرتبه ای ماینر ، یعنی a_{ij} مکمله ده ، چی په M_{ij} سره

يي ښيو. ښکاره ده چې د M_{ij} د ماينرو شمير په n مرتبه ای ماترکس کې n^2 دی. د بيلګې په توګه که $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ وی ، نو

$$M_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

دی.

تعريف ۲ ـ د A د ماترکس د $M^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$ د ماينر الجبری مکمله يا cofactor عبارت دی د لاندی عدد څخه:

$$A^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}=(-1)^{(i_1+\dots+i_k)-(j_1+\dots+j_k)}.\overline{M}^{i_1,i_2,\dots,i_k}_{j_1,j_2,\dots,j_k}$$

په هغه حالت کې چې ټاکل سوی ماينر يو مرتبه ای وی ، يعنی د a_{ij} سره تطابق وکړی ، نو دوهم تعريف داسی هم فارمولبندی کولای سو.

تعريف ۳ ـ د راکړه سوی مربعی ماترکس A د a_{ij} د عنصر الجبری مکمله A_{ij} عبارت د هغه عدد څخه دی چې د A د ماترکس د M_{ij} د ماينر او د $(-1)^{i+j}$ د عدد د ضرب د حاصل څخه لاسته راځی، پدی معنی چې :

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,.\,M^{i}_{j}$$

د يوه واقعيت يادونه دلته ضرور ده ، هغه داچې موږ د ماترکسو د ماينرو او الجبری مکملی د ښودلو دپاره ؛ څه ډول لکه په الجبر کی معمول دی؛ دغټو لاتينی حروفو څخه کار اخلو. منتهی بايد پاملرنه وکو چې د ماترکس معنی نه ورکوی بلکه يو عدد دی.

بيلګه ۲ ـ د لمړی بيلګی ماترکس په نظر کی نيسو.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-17$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}.M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A^{1,2}_{1,2}=(-1)^{(1+2)+(1+2)}.\overline{M}^{1,2}_{1,2}=5$$

قضیه ۱ـ که د یوه دیترمنانت ($|A|$) د i په کربنه کی غیر له a_{ij} څخه ټوله عنصرونه مساوی په صفر وی ، نو د $|A|$ دیترمنانت مساوی کیږی د a_{ij} او دنوموړی عنصر د الجبری مکملی د ضرب په حاصل سره ، یعنی : $|A|=a_{ij}.A_{ij}$

ثبوت ـ فرضوو چی :

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

د i ـ می کربنی څخه د a_{ij} عنصر د دیترمنانت څخه دباندی لیکو او i ـ مه کربنه د ځای د اړولو په نتیجه کی په لمړی کربنه کی ځای پر ځای کوو. د (VII§) د څلورمی قضیی پر بنسټ دیترمنانت $(i-1)$ ـ ځلی خپله علامه اړوی او په نتیجه کی یی لاندنی دیترمنانت لاسته راځی:

$$|A|=(-1)^{i-1}a_{ij}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)j} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)j} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

په همدی ډول j ـ ام ستون و لمړی ستون ته را اړو . پدی حالت کی ددیترمنانت علامه $(j-1)$ ـ ځلی تغیر کوی . په نتیجه کی یی لاندنی دیترمنانت لاسته راځی .

$$\left|A\right| = (-1)^{i+j-2}\, a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اوس به نو لمړی کرښه د a_{ij}– په عدد کی ضرب کړو او ددوهمی کرښی سره به یی جمع کړو. همدا راز په ترتیب سره لمړی کرښه د a_{2j}–,…,a_{nj}– کی ضربوو او د دریمی،…، n - می کرښی سره جمع کوو. څو په نتیجه کی یی لاندنی دیترمنانت لاسته راسی:

$$\left|A\right| = (-1)^{i+j-2}\, a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ 0 & a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2}\, a_{ij} \,.\, M_{ij}$$

$$= a_{ij} \,.\, (-1)^{i+j} M_{ij}\, (-1)^{-2} = a_{ij}\, (-1)^{i+j} M_{ij} = a_{ij} \,.\, A_{ij}$$

د (VII§) لمړی قضیی پر بنسټ ، پورتنی قضیه د دیترمنانتو د ستون په هکله هم صدق کوی.

قضیه ۲ ـ د $\left|A\right|$ دیترمنانت مساوی کیږی د کیفی کرښی (ستون) د ټولو عنصرو او د هغوی د الجبری مکملی د ضرب د حاصلو د جمعی په حاصل سره . یعنی لاندنی فارمول صدق کوی:

$$\left|A\right| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \qquad \ldots.(1)$$

$$\left|A\right| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \qquad \ldots.(2)$$

ثبوت ـ د قضیی دوهم فارمول به ثبوت کړو.

د قضیې د ثبوت دپاره د یوی مرستندوی عملیې څخه کار اخلو ، هغه داچې د j - ام د ستون هر عنصر د یوه n - عنصره د جمع د حاصل په څیر داسې تصور کوو چې ټوله $n-1$ عنصرونه یې صفر او i - ام جزء یې a_{ij} وی. یعنی د $1\leq i\leq n$ دپاره

$a_{ij} = 0+0+\ldots+a_{ij}+0+\ldots+0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1j}+0+\ldots+0) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (0+a_{2j}+\ldots+0) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (0+0+\ldots+a_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

د مساوات ونبی خواته په هر دیترمنانت کی په j - ام ستون کی غیر له یوه عنصر څخه نور ټوله مساوی په صفر دی. د لمړی قضیې څخه په استفادی سره دوهمه اړیکه لاسته راځی . یعنی :

$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}\,A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$

په عین شکل لمړی اړیکه په ثبوت رسولای سو.

د (1) او (2) اړیکی د دیترمنانت د تجزیي په نامه د کرښی او ستون پربنسټ یادیږی.

قضیه ۳ ـ په یوه دیترمنانت کی حاصل جمع د یوی کیفی کرښی (ستون) د ټولو عنصرو د ضرب حاصل دبلی کرښی (ستون) په الجبری مکمله کی مساوی په صفر سره ده .

ثبوت ـ فرضوو چې لاندنی دیترمنانت راکړه سوی دی :

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \vdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

د a_{jk} د عنصر د الجبری مکملی د تعریف څخه استنباط کیږی ، چې الجبری مکمله د نوموړی عنصر تابع نده . پدی ترتیب که په j ـ می کرښه کی ټول عنصرونه د نورو عددونو سره عوض کړو ، نو په الجبری مکمله کی کوم تغیر نه راځی. د j ـ می کرښی ټول عنصرونه د i ـ کرښی د عنصرو سره تعویضوو، چې په نتیجه کی لاندنی دیترمنانت لاسته راځی:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \vdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

څرنگه چې لیدل کیږی د D_1 په دیترمنانت کی دوی کرښی (i ـ مه کرښه او j ـ مه کرښه) سره مساوی دی ، ځکه نو دیترمنانت په صفر سره مساوی کیږی ، یعنی $D_1=0$ دی . اوس نو که د D_1 دیترمنانت ته د j ـ می کرښی پر بنسټ انکشاف ورکړو ، نو زموږ هدف به لاسته راسی.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0$$

د لمړی او دوهمی قضیی ثبوت موږ ته دا اجازه راکوی چې د n ـ مرتبه ای دیترمنانتو پر ځای $n-1$ مرتبه ای دیترمنانتونه محاسبه کړو. د یادونی وړ ده چې دوهمه قضیه د k مرتبه ای $(1\leq k<n)$ ماینر او دهغوی د الجبری مکملی د څرگندولو دپاره عمومی لار پرانیزی.

د لاپلاس (Laplace) قضیه به بیله ثبوت څخه فارمولبندی کړو.

قضیه ۴ ـ (لاپلاس Laplace)

که د D په n ـ مرتبه ای دیترمنانت کی k $(1<k<n)$ کیفی کرښی و ټاکو حاصل جمع د ټولو k مرتبه ای ماینرو او په نوموړی کرښی کی د الجبری مکملی حاصل ضرب مساوی کیږی د D په دیترمنانت سره .

§IX. د n مرتبه ای دیترمنانتو د محاسبی اساسی طریقی .

پدی پاراگراف کی به د دیترمنانتو د محاسبی د طریقو څخه یادونه وکړو. ددی طریقو بنسټ په تیرو پاراگرافو کی د دیترمنانتو د خاصیتو او دالجبری مکملی په هکله ثابتی سوی قضیی تشکیلوی.

۱ ـ د ماینر طریقه .

ددی طریقی تیوریکی بنسټیزه د §VIII دو همه قضیه تشکیلوی . پدی معنی چی n مرتبه ای دیترمنانت ته د هغه د یوی کرښی (ستون) پر اساس انکشاف ورکووچی په نتیجه کی ی $n-1$ مرتبه ای دیترمنانتونه لاسته راځی. و روسته $n-1$ مرتبه ای دیترمنانت ته انکشاف ورکو و ، چی په نتیجه کی یی $n-2$ مرتبه ای دیترمنانتونه لاسته راسی . په همدی ډول دغی پروسی ته ادامه ورکو څو بلاخره دری مرتبه ای دیترمنانتونه لاسته راسی . دری مرتبه ای دیترمنانتونه نظر و هغو قاعدو ته چی مخ کی مو تشریح کړه ، محاسبه کوو. دغه طریقه د هغو دیترمنانتو د پاره چی مرتبه یی ډیره لوړه وی ، پیچلی ده .

بیلگه ۱ ـ لاندنی دیترمنانت محاسبه کړی .

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

د D دیترمنانت ته د لمړی کرښی پر بنسټ انکشاف ورکوو.

$$D=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}.0\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}.1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=-1+3-16=-14$$

بیلګه ۲ ـ لاندنی دیترمنانت محاسبه کړی .

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 0 & 12 & 3 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+2}.0.\begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 12 & 3 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\ .\ 0.\begin{vmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}+$$

$$+\ (-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=1452+42-132=1362$$

د پورتنیو بیلګو د حل څخه لاندنی نتیجه اخیستلای سو.

په هره اندازه چی د صفرو شمیر د دیترمنانت په یوه کرښه (ستون) کی ډیر وی په همهغه اندازه د دیترمنانت محاسبه آسانتره ده.

۲ ـ د صفر کولو طریقه .

دا طریقه د §VIII پر لمړی قضیی او په §VII کی ددیترمنانت پر خاصیتو ولاړه ده . پدی طریقه کی موږ هڅه کوو چی غیر له یوه عنصر څخه نور ټوله عنصرونه په یوه کرښه او یا ستون کی د دیترمناتو د خاصیتو څخه په استفاده باندی صفر کړواو بیا لمړی قضیه پر عملی کړو.

بیلګه ۳ ـ لاندنی دیترمنانت محاسبه کړی .

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

په راکړه سوی دیترمنانت کی په ترتیب سره لمړی ستون د -2، -3 او -4 په عدد کی ضربوو او بیا یی د دوهم ، دریم او څلورم ستون سره جمع کوو. په نتیجه کی یی لاندنی دیترمنانت لاسته راځی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=16-10+20+5+20-32=-42$$

ددی طریقی څخه استفاده په هغه صورت کی چی ددیترمنانت مرتبه لوړه وی او دیترمنانت د عددونو پر ځای حروف (د مجهول په صفت) هم په ځان کی ولری کاملاً مفیده نده . غیرله دی څخه عمومی طریقه ددی ډول دیترمنانتو د محاسبی دپاره وجود نلری . اکثره دغه ډول دیترمنانتونه و خپل ځانته په خاصه طریقه سره چی په دیترمنانت کی داخلی افادی ساده کوی ، محاسبه کیږی.

۳ـ د یترمنانت و مثلثی شکل ته د را اړولو طریقه .

پدی طریقه کی دیترمنانت و مثلثی شکل ته را اړؤ، یعنی ټوله هغه عنصرونه چی داصلی قطر پر سر باندی ځای پر ځای سوی دی ، باید مساوی په صفر سره سی. د §VIII د لمړی قضیی له مخی دیترمنانت مساوی کیږی پر اصلی قطر باندی د ټولو عنصرو په حاصل ضرب سره .

بیلګه ۴ ـ لاندنی دیترمنانت محاسبه کړی .

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

د لمړی ستون د عنصرو سره د دوهم ،دریم او څلورم ستون عنصرونه جمع کوو او د §VII دریمه قضیه په کار اچوو.

$$\begin{vmatrix} 15 & 4 & 4 & 4 \\ 15 & 3 & 4 & 4 \\ 15 & 4 & 3 & 4 \\ 15 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

اوس نو لمړی ستون په -4 کی ضربوو او د دوهم،دریم او څلورم ستون سره یی جمع کوو.په نتیجه کی لاندی دیترمنانت لاسته راځی.

$$D=15\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^3 \,.\, 15=-15$$

§X. **د ماترکس د رنک اړیکه د ماینر سره .**

ددریم فصل په §VIII کی مو د ماترکسو د رنک مفهوم تعریف کړی. دلته به یی بیاهم یادونه وکړو چی د ماترکس رنک عبارت دی د ماترکس د کرښه ئیز (ستونی) وکتورو په سیت کی د خطی غیر وابسته وکتورو د اعظمی شمیر څخه.

د ماترکس د رنک او د ماترکس د ماینر ترمنځ ډیره نژدی اړیکه وجود لری چی د هغه په واسطه د ځینو ماینرو د محاسبی په نتیجه کی د ماترکس رنک موندلای سو. ددی اړیکی د پیداکیدو دپاره لمړی باید د ماینر عمومی مفهوم د مسطیلی ماترکس دپاره تعریف کړو.

فرضوو چی لاندنی ماترکس راکړه سوی دی :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د A په ماترکس کی ځینی (کیفی) د k کرښی او k ستونونه داسی ټاکو چی $k\leq\min(m,n)$ وی.

تعریف ۱ـ د A د مستطیلی ماترکس k مرتبه ای ماینر عبارت دی د k مرتبه ای دیترمنانت څخه چی عنصرونه یی د نوموړو k کرښو او k ستونو د تقاطع په نتیجه کی لاسته راځی.

بیلگه ۱ ـ فرضوو چی :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

د A ماترکس یوازی یو مرتبه ای او دوه مرتبه ماینرونه درلودلای سی ؛د بیلگی په توگه :

$$M_{2,3}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

دوه مرتبه ای ماینر دی . که په راکړه سوی ماترکس کی پر لمړی ، دوهمی کرښی او پر دوهم اودریم ستون باندی خط کش کړو، نو د نومووړو خطو د تقاطع پر نقطو باندی د ماینر عنصرونه پراته دی.

په راتلونکی کی موږ ته یوازی د A د ماترکس هغه ماینرونه اهمیت لری چی د صفر څخه خلاف وی .

همدا ډول په یاد یی ولری ، که چیری د A د ماترکس ټوله k مرتبه ای ماینرونه مساوی په صفر سره وی ، نو د لاپلاس د قضیی (قضیه ۴ ، VIII§) څخه استنباط کیږی چی ټوله ماینرونه چی د هغوی ترتیب تر k لوړ وی هم مساوی په صفر سره دی. ځکه چی هرد k+s ـ ام ترتیب ماینر کولای سو چی د الجبری مکملو د حاصل ضرب د جمعی په شکل راوړو.

قضیه ۱ـ د A د ماترکس د صفر څخه خلاف ماینر اعظمی ترتیب د A د ماترکس د رنک سره مساوی دی.

ثبوت ـ فرضوو چی د A د ماترکس د صفر څخه خلاف ماینر اعظمی ترتیب مساوی په r سره دی. فرضوو چی د D ماینر چی د صفرڅخه خلاف دی د A د ماترکس د کینی خوا په لوړ کنج ځای پر ځای سوی دی (یعنی د لمړی r کرښو او r ستونو د عنصرو څخه تشکیل سوی دی). دغه فرضیه د ثبوت عمومی والی نه نقض کوی ، ځکه چی د کرښو (ستونو) د ځایو د تبدیلولو په نتیجه کی د ماترکس په رنک کی تغیر نه راځی.

تر هغه ځایه چی $D\neq0$ دی ، نو د A د ماترکس r کرښی (r ستونونه) خطی وابستگی نلری. که داسی نه وای ، نو باید دهغوی لنډ سوی وکټورونه هم خطی وابستگی ولری ، فلهذا لمړی r کرښی (r ستونه) باید هم خطی وابستگی ولری . په دغه حالت کی بیا $D=0$ سره کیږی. اوس به نو ثابته کړو چی د A په ماترکس کی لمړی rستونونه د ستونی وکټورو په سیټ کی بیس تشکیلوی ، یعنی د A د ماترکس ستونی رنک مساوی په r سره دی. ددی د پاره باید ثابته کړو چی د A د ماترکس د پاتی ستونو هر وکټور د لمړی r ستونو خطی ترکیب دی.

فرضوو چې $\overrightarrow{p_n},...,\overrightarrow{p_r},...,\overrightarrow{p_2},\overrightarrow{p_1}$ د A د ماترکس ستونی وکتورونه وی او $r<s\leq n$ دی ،نو

$$\overrightarrow{p_s}=(a_{1s},a_{2s},...,a_{ms})$$

لاندنی مرستندویه دیترمنانتونه مشاهده کوو :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2s} \end{vmatrix},\dots$$

$$\Delta_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)s} \end{vmatrix},\ \dots.,$$

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{ms} \end{vmatrix}$$

پورتنی ماینرونه مو داسی لاسته راوړی دی چې د

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$$

وماینر ته مو s ـام ستون او په ترتیب سره لمړی ، دوهمه،...او m ـ مه کربنه ور گاونډی کړی دی. هر یو د پورتنیو دیترمنانتو څخه مساوی په صفر دی . ځکه چې د $\Delta_r,\dots,\Delta_2,\Delta_1$ په دیترمنانتو کی دوی مساوی کربنی وجود لری او د $\Delta_m,\dots,\Delta_{r+2},\Delta_{r+1}$

ماینرونه د A د ماترکس $r+1$ - ترتیب درلودونی ماینرونه چی د قضیی د شرط له اسیته مساوی په صفر دی.

هر یو د $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r, \Delta_{r+1}, \Delta_{r+2}, \ldots, \Delta_m$ د یترمنانتو څخه د $r+1$ - می کرښی پر بنسټ تجزیه کوو. تر هغه ځایه چی په نوموړی دیترمنانتوکی لمړی r کرښی مساوی دی او دهغوی د الجبری مکملی عنصرونه $(r+1)$ - مه کرښه یوازی د اولو r کرښو د عنصرو تابع دی ، نو ټوله تر مشاهدی لاندی دیترمنانتونه د مساوی الجبری مکملی درلودونکی دی. د کار د آسانی دپاره هغوی په لاندی ډول سره څرګندؤ.

$$A_{(r+1)1} = \lambda_1, A_{(r+1)2} = \lambda_2, \ldots, A_{(r+1)r} = \lambda \qquad \wedge \qquad A_{(r+1)1(r+1)} = D$$

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1r}\lambda_r + a_{1s}D = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2r}\lambda_r + a_{2s}D = 0 \\ \vdots \\ a_{(r+1)1}\lambda_1 + a_{(r+1)2}\lambda_2 + \ldots + a_{(r+1)r}\lambda_r + a_{(r+1)s}D = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mr}\lambda_r + a_{ms}D = 0 \end{cases}$$

ددی ځایه

$$\begin{cases} a_{1s} = -\dfrac{\lambda_1}{D}a_{11} - \dfrac{\lambda_2}{D}a_{12} - \ldots - \dfrac{\lambda_r}{D}a_{1r} \\ a_{2s} = -\dfrac{\lambda_1}{D}a_{21} - \dfrac{\lambda_2}{D}a_{22} - \ldots - \dfrac{\lambda_r}{D}a_{2r} \\ \vdots \\ a_{ms} = -\dfrac{\lambda_1}{D}a_{m1} - \dfrac{\lambda_2}{D}a_{m2} - \ldots - \dfrac{\lambda_r}{D}a_{mr} \end{cases}$$

وروستی سیستم په وکتوری بڼه داسی لیکلای سو:

$$\overrightarrow{p_s} = -\frac{\lambda_1}{D}\overrightarrow{p_1} - \frac{\lambda_2}{D}\overrightarrow{p_2} - \ldots - \frac{\lambda_r}{D}\overrightarrow{p_r}$$

وروستی مساوات ښیی چی د A د ماترکس کیفی s - ام ستون $(r<s\leq n)$ د لمړیو r ستونو خطی ترکیب دی ، یعنی د A د ماترکس رنک مساوی په r سره دی.

ثابته سوی قضیه موږ ته د ماترکس د رنک د یوه بل تعریف امکان برابروی.

تعریف ۲ ـ د ماترکس رنک عبارت دی په هغه ماترکس کی د صفر څخه خلاف ماینر د اعظمی ترتیب څخه.

همدا ډول ثابته سوی قضیه موږ ته د ماترکس د رنک د موندلو عملی لاره ښئی . نوموړی طریقه د ګاونډیو ماینرو د طریقی په نامه یادیږی.

د مترکس د رنک د محاسبی په وخت کی د کوچنی ترین ترتیب درلودونکی ماینر څخه شروع کوو او تر هغه ماینر پوری چی k ـ ام ترتیب ولری ادامه ورکوو تر څو د M ماینر چی خلاف د صفر دی او ترتیب یی k دی ، لاسته راسی. وروسته له هغه د $k+1$ ترتیب درلودونکی ماینر چی د M د ماینر ګاونډی دی محاسبه کوو. که ټوله دغه شان ماینرونه مساوی په صفر سره وی ، نو وایو چی د ماترکس رنک مساوی په k سره دی.

بیلګه ۲ ـ د لاندنی ماترکس رنک پیداکړی.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

حل ـ څرنګه چی د A ماترکس د صفر څخه خلاف دی ، نو رنک یی خامخا تر یوه کوچنی ندی. ددی ماترکس دوه مرتبه ای ماینر چی د صفر څخه خلاف وی پیداکوو. یو د هغو ماینرو څخه M_{34}^{12} دی.

$$M_{34}^{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5$$

د پورتنی ماینر سره دوه د دری مرتبه ای ماینرونه ګاونډی دی.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}=0$$

څرنګه چی د A د ماترکس دری مرتبه ای ماینرونه مساوی په صفر سره دی ، نو د ماترکس رنک مساوی په 2 سره دی.

همدا ډول د لمړی قضیی پر بنسټ د د دیترمنانت د صفر والی معیار په لاندی ډول فارمولبندی کوو.

قضیه ۲ ـ یو n ـ مرتبه ای دیترمنانت یوازی او یوازی هغه وخت مساوی په صفر سره دی چی د کرښو (ستونو) ترمنځ یی خطی وابستګی موجوده وی.

ثبوت ـ که په یوه n ـ مرتبه ای دیترمنانت کی کرښی (ستونونه) خطی وابستگی ولری ، نو د §VII د شپږمی قضیی د نتیجه پر بنسټ دیترمنانت مساوی په صفر سره دی.

فرضوو چی راکړه سوی n ـ مرتبه ای دیترمنانت مساوی په صفر سره دی . ددی ځایه استنباط کیږی چی دنوموړی دیترمنانت جواب ورکونکی ماترکس د صفر څخه خلاف ماینر اعظمی ترتیب تر n کوچنی دی . فلهذا د نوموړی ماترکس رنک تر n کوچنی دی ، پدی معنی چی دهغه کرښی (ستونونه) خطی وابستگی لری.

اوس نو د ماترکس د رنک دموندلو دپاره ددوو طریقو سره آشنا سوو، یو د ابتدائی تبدیلونو پذریعه او بل د گاونډیو ماینرو د جوړولو پذریعه . د یادولو وړ ده چی لمړی طریقه په عملی ډول غوره ده.

§XI. د ماترکسو د ضرب دیترمنانت ـ د معکوس ماترکس محاسبه .

د الجبری هغه مسئلو د حل په وخت کی چی په ماترکسو او دیترمنانت پوری اړه ولری ، اکثراً ضرورت پیداکیږی چی د هغسی ماترکس دیترمنانت محاسبه کړو کوم چی د نوروڅو مربعی ماترکسو د ضرب څخه په وجود راغلی وی.

طبعاً سوال مطرح کیږی چی: آیا داسی فارمول وجود لری چی دماترکسو د حاصل ضرب دیترمنانت د هغه د ضرب د اجزاؤ پذریعه ارائه کړی؟

مسئله په هغه حالت کی چی د ماترکس د اجزاؤ دیترمنانتونه نظر دماترکسو د حاصل ضرب و دیترمنانت ته په مراتبو آسانتره محاسبه سی ، په زړه پوری ده .

قضیه ۱ ـ د دوو n ـ مرتبه ای ماترکسو د حاصل ضرب دیترمنانت مساوی دی دهغوی د هریوه د دیترمنا نتو په حاصل ضرب سره.

ثبوت ـ فرضوو چی $A=(a_{ij})$ او $B=(b_{ij})$ دوه n مرتبه ای ماترکسونه دی . د n مرتبه ای ماترکس $C=AB$ هر عنصر c_{ij} نظر د ماترکسو د ضرب و تعریف ته داسی شکل لری:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad \ldots(1)$$

د AB د ماترکس د لمړی ستون عنصرونه د (1) په څیر لیکو. د $|AB|$ د دیترمنانت د محاسبی دپاره نوموړی دیترمنانت د دیترمنانتو په حاصل جمع تجزیه کوو. نتیجه یی په لاندی ډول ده :

$$|AB|=|C|=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\ldots+a_{nn}b_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}==$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21}b_{11} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{22}b_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2}b_{21} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$\begin{vmatrix} a_{1n}b_{n1} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{2n}b_{n1} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{s_1=1}^{n} b_{s_1 1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1s_1} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{2s_1} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ns_1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

په همدی ډول ورسته د n ـام ستون د ارائی څخه به یی ولرو:

$$|AB|=\sum_{s_1,\ldots,s_n=1}^{n} b_{s_1 1}.b_{s_2 2}.....b_{s_n n}\begin{vmatrix} a_{1s_1} & a_{1s_2} & \cdots & a_{1s_n} \\ a_{2s_1} & a_{2s_2} & \cdots & a_{2s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ns_1} & a_{ns_2} & \cdots & a_{ns_n} \end{vmatrix}\ldots(2)$$

په (2) مساوات کی دلمړی برخی هر جزء یا د صفر سره مساوی دی (که دهغوی په منځ کی د s_i ځینی اندکسونه مساوی وی) او یا د $|A|\pm$ سره مساوی کیږی(په هغه حالت

کی چی د $|A|$ د دیترمنانت د s_i د اندکسو جوړه یوازی د مختلفو ستونو په ترتیب کی وی) . څکه نو و به یی لرو:

$$|AB| = |A| \sum_{s_1,\ldots,s_n=1}^{n} (\pm b_{s_1 1}.b_{s_2 2}.....b_{s_n n}) = |A|.q_B \qquad \ldots(3)$$

پداسی ډول چی q_B یو دهغو عددونو څخه دی چی یوازی د B د ماترکس د عنصرو څخه دی.

په (3) فارمول کی د A د ماترکس پر ځای n مرتبه ای واحد ماترکس وضع کووو څکه نو:

$$|EB| = |E| q_B \quad \wedge \quad |B| = q_B$$

که په (3) مساوات کی لاسته راغلی قیمتونه وضع کړو نو $|AB| = |A||B|$ به لاسته راسی.

نتیجه ـ که $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، n مرتبه ای ماترکسونه وی ، نو لاندنی فارمول صدق کوی.

$$|A_1.A_2.....A_k| = |A_1.(A_2.....A_k)| = |A_1|.|A_2.(A_3.....A_k)| =$$
$$|A_1|.|A_2|.|A_3.(A_4.....A_k)| = \ldots =$$
$$= |A_1|.|A_2|.....|A_k|$$

بیلگه ۱ـ د D=ABC د ماترکس دیترمنانت په داسی حال کی محاسبه کی چی :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&-1&-2\\0&0&-3&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\0&3&-1&2\\0&0&-3&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

حل ـ د A د ماترکس دیترمنانت د لاپلاس د قضیی څخه په استفاده سره محاسبه کوو:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.(-1)^6.\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=(-2)(-2)=4$$

د $|B|$ او $|C|$ دیترمنانتونه مثلثی شکل لری ، ځکه نو :

$$|B|=(-2)(-3)(3)2=36 \quad \wedge \quad |C|=1$$

ددی ځایه $\quad |D|=|A|.|B|.|C|=4.36.1=144$

په عین حال کی باید ددی واقعیت یادونه وکړو چی د لاندنی ماترکس

$$D=\begin{pmatrix} 9 & 11 & 4 & 5 \\ 19 & 25 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

د دیترمنانت محاسبه نظر و تیری پروسی ته ډیر پیچلی دی.

د ثابتی سوی قضیی (۱) څخه په استفاده سره کولای سو چی د ماترکس د معکوس پذیری لازمی او کافی شرط طرح (§II وگوری) او د راکړه سوی ماترکس دپاره د معکوس ماترکس د موندلو فارمول پیداکړو.

قضیه ۲ـ د A ، n مرتبه ای ماترکس یوازی او یوازی هغه وخت معکوس پذیر دی چی د هغه دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی ، یعنی $|A|\neq 0$ وی .

ثبوت ـ فرضوو چی د A ماترکس معکوس پذیر اود B ماترکس د هغه معکوس ماترکس وی ، نو:

$AB=BA=E$ او $|AB|=|BA|=|E|=1$

د قضیه ۱ پر بنسټ $|AB|=|BA|=1$ کیږی. ځکه نو $|A|\neq 0$ دی.

برعکس فرضوو چی $|A|\neq 0$ دی. لاندنی ماترکس مشاهده کوو:

$$C=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

پداسی ډول چی A_{ij} د A د ماترکس د a_{ij} د عنصر الجبری مکمله ده. د Aاو C د ماترکسو د ضرب حاصل څیرو.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\ldots+a_{2n}A_{1n} & \cdots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\ldots+a_{2n}A_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\ldots+a_{nn}A_{1n} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\ldots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

هغه عنصرونه چی د پورتنی ماترکس پر اصلی قطر باندی ځای پر ځای سوی دی د $1\leq i\leq n$ د پاره لاندنی بڼه لری:

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

او دا افاده د §VIII د قضیه ۲ پر بنسټ د $|A|$ په دیترمنانت سره مساوی کیږی. نظر د §VIII و دریمی قضیی ته ټوله هغه عنصرونه چی پر اصلی قطر باندی ندی پراته ، مساوی په صفر سره کیږی. ځکه نو وبه یی لرو:

$$AC=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{|A|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E$$

په همدی ډول ثابتولای سو چی $CA=E$ سره کیږی.

ددی ځایه استنباط کیږی چی د A معکوس پذیره ماترکس دپاره معکوس ماترکس وجود لری .

د پورتنی قضیی د ثبوت څخه لاندنی نتیجه لاسته راځی.

نتیجه ۱ ـ که د یوه n مرتبه ای ماترکس A دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی ($|A| \neq 0$) ، نو دهغه معکوس ماترکس A^{-1} د لاندنی فارمول پذریعه محاسبه کولای سو.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

نتیجه ۲ ـ یو n مرتبه ای مترکس یوازی او یوازی هغه وخت معکوس پذیره دی چی A غیر سنګولار وی ، یعنی $rankA=n$ وی.

XII§. د کرامر Cramer طریقه .

د n مرتبه ای دیترمنانت مفهوم مو و دوه او دری مرتبه ای دیترمنانت ته د ورته والی پر بنسټ د دیترمنانت د عمومی شکل په صفت طرح کړی . ځرګنده ده چی د n مرتبه ای دیترمنانت عمومی مفههوم د n $(n>3)$مجهوله خطی معادلو د سیستم د حل دپاره ښه مرستندوی دی .

فرضوو چی د n مجهوله ، د n خطی معادلو سیستم راکړه سوی وی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \ldots(1)$$

د (1) سیستم د اصلی ماترکس دیترمنانت په D سره ښیو. n ـمرتبه ای دیترمنانت چی د i ـ ام ستون پر ځای یی د (1) سیستم د ثابتو اجزاؤ ستون ځای پر ځای سوی دی په D_i $(1\leq i\leq n)$ سره ښیو. لاندنی قضیه صدق کوی.

قضیه ـ که د n مجهوله ، n معادلو د خطی سیستم د اصلی ماترکس دیترمنانت د صفر څخه خلاف وی، نو سیستم د یوازنی حل درلودونکی دی او په لاندنی فارمول باندی محاسبه کیږی .

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D},\dots, x_n=\frac{D_n}{D} \qquad \dots(2)$$

ثبوت ـ فرضو چی $D\neq 0$ دی، نو د (1) سیستم د اصلی او ارت سوی ماترکس رنک سره مساوی او مساوی په n سره دی. پر (1)سیستم باندی لاندنی ابتدائی تبدیلونه عملی کوو:

لمړی معادله په A_{1j} یعنی د a_{1j} د عنصر په الجبری مکمله کی ضربوو ، د سیستم دو همه معادله په A_{2j} ،...او بلاخره n ـ مه معادله په A_{nj} کی ضربو او ټوله لاسته راغلی معادلی سره جمع کوو. د هر $n\geq j\geq 1$دپاره د نوموړو تبدیلونو د عملی کولو په نتیجه کی لاندنی معادله لاسته راځی.

$$(a_{11}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{n1}A_{nj})x_1+\dots+(a_{1n}A_{1j}+\dots+a_{nn}A_{nj})x_n=$$

$$b_1A_{1j}+\dots+b_nA_{nj}$$

دلته د الجبری مکملی د خاصیتو پر بنسټ د $x_n,\dots,x_{j+1},x_{j-1},\dots,x_2,x_1$ ضریبونه مساوی په صفر دی.

د x_j ضریب به داسی بڼه ولری:

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj}=D$$

دپورتنی معادلی په ښی خوا کی یوازی D_j لرو . په نتیجه کی یی د هر $n\geq j\geq 1$ دپاره لیکلای سو:

$$D.X_j=D_j$$

وروسته له هغه چی ټوله داړول ابتدایی تبدیلونه مو عملی کړه ، لاندنی سیستم به لاسته راسی:

$$\begin{cases} D.x_1=D_1 \\ D.x_2=D_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ D.x_n=D_n \end{cases} \qquad \dots(3)$$

ښکاره ده چی د (1) سیستم هر حل د (3) سیستم حل دی او په عین حال کی (3) د یوازنی حل درلودونکی دی.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D} \qquad ....(4)$$

پدې ډول قضیه مو ثابته سوه.

د (2) فارمولونه د کرامر د فارمولو او قضیه د خطی معادلو د سیستم د کرامر د طریقی په نامه یادیږی. که $n=2$ یا $n=3$ وی ، نو (4) فارمولونه ځانته هغه خصوصی بڼه اخلی ، کوم چی موږ مخکی ورسره آشنا سوی یو.

نتیجه ـ که د n مجهوله ، n خطی معادلی لرونکی متجانس سیستم د صفر څخه خلاف حل ولری ،نو دیترمنانت یی مساوی په صفر سره دی.

په رشتیاهم ، که یی دیترمنانت خلاف د صفر څخه وای ، نو د ثابتی سوی قضیی پر بنسټ سیستم د یوازنی حل درلودونکی دی او هغه هم صفر دی، ځکه چی $D_1=D_2=...=D_n=0$. د D_1، D_2، ... او D_n دیترمنانتونه د صفری ستون درلودونکی دی. لاکن د قضیی د شرط له مخی راکړه سوی سیستم غیر له صفری حل څخه ، غیر صفری حل هم لری. ځکه نو $D=0$ دی.

د کرامر طریقه په هغه صورت کی د n مجهوله m $(m<n)$ خطی معادلو سیستم راکړه سوی وی ، هم په کار اچولای سو. فرضوو چی لاندنی سیستم راکړه سوی دیږ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad ...(5)$$

فرضوو چی دراکړه سوی سیستم (5) د اصلی او ارت سوی ماترکس رنک مساوی په r سره دی.فرضوو چی د هغه r مرتبه ای ماینر د سیستم د اصلی ماترکس په پورتنی کینی برخه کی ځای لری ، نو هره یو د $m-r$ معادلو څخه د سیستم د لمړیو r معادلو خطی ترکیب دی . پدی معنی چی د ابتدایی تبدیلونو په مرسته د (5) سیستم ځنی معادلی د $0=0$ بڼه اخلی او په نتیجه کی یی د (5) سیستم سره معادل دخطی معادلو سیستم لاسته راځی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad ...(6)$$

که $r=n$ سره وی ، نو (6) سیستم د کرامر په طریقه حلوو. فرضوو چی $r<n$ دی ، پدی حالت کی د (6) سیستم د معادلاتو په کینه خوا کی r مجهوله داسی ځای پر ځای سوی دی چی ضریبونه یی د صفر څخه خلاف r مرتبه ای ماینر تشکیلوی.

قرارداد به وکړو چی نوموړی r مجهوله یعنی $x_r,\ldots,x_2,x_1$ بنستیز مجهوله دی. پاتی اجزاوی د ثابتو اجزاؤ سره د معادلود سیستم ښی خواته راوړوچی په نتیجه کی یی لاندنی سیستم لاسته راځی.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad \ldots(7)$$

پورتنی سیستم د (5) سیستم سره معادل دی . اوس نو د (7) سیستم د هری معادلی د ښی برخی افادی د ثابتو اجزاؤ به صفت قبلؤو او (7) سیستم د کرامر په طریقه حلوو.

پدی ډول مو د دیترمنانتو د تیوری څخه په استفاده سره د خطی معادلو د سیستمو نو د حل بله طریقه زده کړه چی د راکړه سوی سیستم د ضریبونه پذریعه یو عمومی فارمول ارائه کوی.

بیلګه ۱ ـ دخطی معادلو لاندنی سیستم حل کړی.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

حل ـ د پورتنی سیستم اصلی ماترکس مشاهده کوو.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

په پورتنی ماترکس کی دوه دومرتبه ای ماینره چی خلاف د صفر څخه وی ، وجود لری.

یو دهغو څخه یی د بیلګی په توګه $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0$ دی.

د نوموړی ماینر دری مرتبه ای ګاونډی ماینرونه مشاهده کوو.

$$D' = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \; D'' = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

پدی معنی چی د اصلی ماترکس رنک یی مساوی په 2 سره دی.

د راکړه سوی سیسټم په ارت سوی ماترکس یو ګاونډی ماینر بل هم وجودلری ، چی هغه هم عبارت دی له :

$$D''' = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

پدی معنی چی د راکړه سوی سیسټم د ارت سوی ماترکس رنک هم مساوی په 2 سره دی، فلهذا دغه سیسټم سازګار دی.تر هغه ځایه چی د صفر څخه خلاف دوه مرتبه ای ماینر ددوهمی او دریم معادلی د ضریبو څخه تشکیل سوی دی ، نو راکړه سوی د خطی معادلو سیسټم د لاندنی سیسټم سره معادل دی.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

دلته اساسی مجهوله x_1 او x_2 دی. وروستی سیسټم په لاندی ډول لیکو.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 - 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 - 4x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

اوس نو سیسټم د کرامر په طریقه حلوو.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 - 2x_3 + x_4 & -2 \\ 3 - 4x_3 + 2x_4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 14x_3 + 7x_4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2x_3 + x_4 \\ 2 & 3 - 4x_3 + 2x_4 \end{vmatrix} = 1$$

د هغه ځایه چی $D=7$ سره دی ، نو د خطی معادلو د سیسټم عمومی حل لاندنی بڼه لری.

$$x_1 = \frac{9 - 14x_3 + 7x_4}{7}$$

$x_2 = \frac{1}{7}$

پداسې ډول چې x_3 او x_4 آزاد مجهوله دي او ځانته کیفي قیمتونه اخلي.

نوټ ـ په پای کې ددې دپاره چې د محاسبې یو تصور درسره وي د کرامر په طریقه باندې د محاسبې پر لګښت یو ه لنډه روښنایي اچوو.

لمړی خو دابايد په ذهن کې راته واضح وي ،کله چې د کرامر په طریقه د خطي معادلو یو n مجهوله سیستم حلوو ، نو یوازې د n+1 دیترمنانتو و حل ته ضرورت سته . د اریتمتیکي عملیو شمیر د دیترمنانت د محاسبې په الګوریتم (طریقه) پورې اړه لري . که موږ دیترمنانتونه پدې طریقه لکه پدې کتاب کې مو ولوستل ، حل کړو ، نو موږ $(n-1).n!$ د ضرب عملیو ، $n!-1$ د جمع عملیې ته ضرورت لرو . که لږ مشخص بحث وکړو ، نو د ځلور مجهوله معادلو د سیستم د حل دپاره چې ځلور معادلې راکړه سوې وي ، 360 د ضرب عملیو، 115 د جمع عملیې په کار دي.

په یوه کمپیوټر کې چې په ثانیه کې 10^8عشاریه عددونه سره جمع او ضربوي (لاتیني 10^8 Floating Point Operation) ، د یوه n مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل دپاره چې n معادلې ولري، لاندني په زړه پوري د کمپیوټر د وخت محاسبه لاسته راغلي ده .

د n مجهولو شمیر	10	12	14	16	18	20
د کمپیوټر د محاسبې وخت	0,4 ثانیې	1 دقیقه	3,6 ساعته	41 ورځې	38 کاله	16000 کاله

اندکس

J

K

L

M

N

G

H

I

مآخذ

1.Beck, M. Geoghegan, R. , The Art of Proof , Springer Verlag , 2010

2. Birkhoff G., Mac Lane S. : A survey of modern algebra . Macmillan Publishing Co. ,Inc. New york 1965

3.Bukovský, L. Teoria množín . PF UPJŠ, Košice 1980.

4. W.Dahmen, A. Reusken:Numerik für Ingeniere und Naturwissenschaftler, springer, 2006

5.Gavalec, M. ,Chval,V. Algebra I , II , PF UPJŠ, Košice, 1974

6. Kurosh, A.G. Higher Algebra , M. Nauka 1971

7. Kurosh, A.G. Lectures on General Algebra, M. Nauka 1962

8. پوهاند صدیق الله رښتین : پښتو گرامر،یونیورسیټی بُک اجنسی، پېښور

9.Stoll, Robert R. , Sets, Logic and Axiomatic Theories , M. EducationPress, 1968

10.Van der Waerden B.L. , Algebra , M. Nauka 1971

11. Zavalo,S.T., Kostarčuk, V.N. , Chacet B.I., Algebra and Number Theory , Part I , K. Highschool, 1977

Book Name	Algebra and theory of Numbers Part one
Author	Sultan Amad Niazman
Publisher	Nangarhar Science Faculty
Website	www.nu.edu.af
No of Copies	1000
Published	2015, First Edition
Download	www.ecampus-afghanistan.org www.niazman.de

This Publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and Technical support by Afghanic organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:

Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office 0756014640

Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2015

Sahar Printing Press

ISBN: 978 9936 6200 56

Message from the Ministry of Higher Education

In history,books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science;and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers andauthors and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to the chief of German Committee for Afghan Children, Dr. Eroes, and our colleague Dr. Yahya Wardak who have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,

Prof. Dr. Farida Momand

Minister of Higher Education

Kabul, 2015

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 176 different medical textbooks (95 books funded by DAAD, 80 books funded by kinderhilfe-Afghanistan) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh and Kapisa medical colleges and Kabul Medical University. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost. Currently we are working to publish 20 more non-medical textbooks for Nangarhar University. All published medical & non-medical textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:
"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashtu. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state – of – the – art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers and students, we extended this project to the non-medical subjects e.g. Science, Engineering, Agriculture and Economics.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to the Afghan Universities free of charge. I would like the students to

encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) and its director Dr Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 80 other medical textbooks in the past three years which are being used by the students of Nangarhar and other medical colleges of the country. Dr Eroes has made funds available for 20 additional books which are being printed now.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister, Prof M Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, Acting Chancellor of Nangarhar University Prof Dr M Taher Enayat and lectures for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazal Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul/Afghanistan, June, 2015
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Abstract

The first part of *Algebra and theory of numbers* is designed as a text book for the students of the faculty of science of Nangarhar University, which can cover the requirements for the first two semesters.

This book includes four chapters. The first chapter includes the basic terms of the set theory and mathematical logic, which are not only necessary for algebra, but also for other branches of mathematics. Here, we deal with the terms of set and operation on the sets, propositional logic and their basic operations, theorems, the kind of theorems and fundamentals of proof, especially non direct proof (proof by contradiction) of the theorem is widely discussed. Based on the terms of binary relations, equivalent relation, ordered relation, mapping and their Properties, we define the term of predicate with n-variables. We cover the basics of the predicate theory.

The second chapter introduces the general terms of algebraic structures. The set of natural numbers with Peano's Axioms is considered as an algebraic structure. We introduce the principle of mathematical induction. To expand our theory, we introduce shortly the term of group, ring and field. In the second part of this book we will explain these terms deeply. We define the real number by means of axioms and we define isomorphism of group, ring and fields. The set of complex numbers, operations on complex numbers and their geometric and trigonometric representation close this chapter.

In the third chapter, based on the n-dimensional vector spaces, we introduce the general theory of linear equations (based on the n-dimensional vector spaces). Linear dependency, the set of vectors, the rank of the set of vectors and their calculation, criteria for the consistency of the system of linear equation are among the main themes of this chapter.

In the last chapter of this book, we consider the theory of matrixes and determinants. We deal with different methods to calculate the determinant. Here, we consider the solution of linear equation with the method of Cramer.

سلطان احمد نیازمن د ۱۹۵۷ کال د جنوری پر ۱۷ـمه نیټه د کندهار د عمران په کوڅه کی زیږیدلی دی . په ۱۹۷۴ کال کی د کندهار د میرویس نیکه د لیسی څخه فارغ او د کابل په پوهنتون کی د تحصیلی بورس څخه په استفاده سره خپلی لوړی زده کړی د ریاضی په څانګه کی د پخوانی چکوسلواکیا د کوشیځ د ښار د پاول یوزف ښافاریک په پوهنتون کی ، د RNDr په درجه ، سرته رسولی دی . د پوهنتون د فراغت څخه وروسته یی څه ناڅه پنځه کاله د کابل د پیدا ګوژی انستیوت د ریاضی د دیپارتمنت د آمر په صفت وظیفه اجراء کړیده. په تیرو پنځه ویشتو کلو کی یی د کمپیوټری علومو او خصوصآ د کمپیوټرد جال په برخه کی کار کړیدی . د لسو کالو راهیسی د جرمنی د الیمپیک او سپورټ د کنفدراسیون د کمپیوټری جال او د هغه د مصؤنیت د مسؤل په صفت دنده اجراء کوی .

RNDr. Sultan Ahmad Niazman

Certified Network Manager (CNM)

Microsoft CERTIFIED IT Professional | Enterprise Administrator Server Administrator