Afghanic

Nangarhar Science Faculty

Prof Maheburahman Janati

Advanced General Mathematics Courses

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Not For Sale

2015

د عالي رياضياتو عمومي كورس

Advanced General Mathematics Courses

پوهندوی محب الرحمن جنتي

۱۳۹۴

ننګرهار ساينس پوهنځی

د عالي رياضياتو عمومي كورس

پوهندوی محب الرحمن جنتي

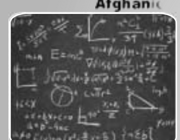
خرڅول منع دي

۱۳۹۴

د عالي رياضياتو عمومي کورس

پوهندوی محب الرحمن جنتی

Afghanic



Pashto PDF
2015

Nangarhar Science Faculty
ننګرهار ساینس پوهنځی

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Advanced General Mathematics Courses

Prof Moheburahman Janati

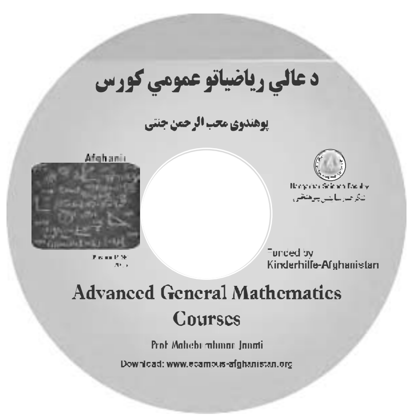
بسم الله الرحمن الرحیم

د عالي رياضياتو عمومي کورس

لومړی چاپ

پوهندوی محب الرحمن جنتی

دغه کتاب په پی دی اف فورمت کی په مله سی دی کی هم لوستلی شی:



د کتاب نوم	د عالي رياضياتو عمومي کورس
ژباړونکی	پوهندوی محب الرحمن جنتی
خپرندوی	ننگرهار ساینس پوهنځی
ویب پاڼه	www.nu.edu.af
چاپ شمېر	۱۰۰۰
د چاپ کال	۱۳۹۴، لومړی چاپ
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org
د چاپ ځای	سهر مطبعه، کابل، افغانستان

د اکتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کميټې په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې په آلمان کې د افغانیک موسسې لخوا ترسره شوي دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسؤلیت د کتاب په لیکوال او اړونده پوهنځی پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:

ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کابل

تیلیفون 0756014640

ایمیل textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان: ISBN: 978 9936 6200 25

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کې ډیر مهم رول لوبولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې دوامداره زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانگو کې درسی کتابونه تألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کړی دی او د پوهې موتور یې په حرکت راوستی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مواد برابر او چاپ کړی، چې له چاپ وروسته د گرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کړو د کیفیت په لوړولو او د علمي پروسې په پرمختگ کې یې نېک گام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د گرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسی مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کی د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې له رئیس ډاکتر ایروس او زموږ همکار ډاکتر یحیی وردگ څخه مننه کوم چې د کتابونو د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چی نوموړې گټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څو په نیږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو وزیره

کابل، ۱۳۹۴

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلينو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لويو ستونزو څخه ګڼل کېږي. يو زيات شمير استادان او محصلين نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه ميتود تدريس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټيټ کيفيت فوتوکاپي کېږي.

تراوسه پورې مونږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپيسا د طب پوهنځيو او کابل طبي پوهنتون لپاره ۱۷٦عنوانه مختلف طبي تدريسي کتابونه چاپ کړي دي، چې د هغوی له جملې څخه ۹۵ د DAAD او ۸۰ نور د kinderhilfe-Afghanistan په مالي مرسته چاپ شوي دي. د ننګرهار پوهنتون لپاره د ۲۰ نورو غيرطبي کتابونو د چاپ چارې روانې دي. د يادونې وړ ده چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هيواد ټولو طب پوهنځيو ته په وړيا توګه ويشل شوي دي.

هر څوک کولای شي ټول چاپ شوی طبي او غير طبي کتابونه

د www.afghanistan-ecampus.org ويب پاڼې څخه ډاونلوډ کړي.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چـــــې د افغانستان د لوړو زده کــــړو وزارت د (۲۰۱۰ ـ ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتيژيک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کيفيت او زده کوونکو ته د نويو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړينه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د ليکلو فرصت برابر شي د تعليمي نصاب د ريفورم لپاره له انګريزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړين دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلين او استادان نشي کولای عصري، نويو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پيدا کړي".

د لوړو زده کړو وزارت، پوهنتونونو، استادانو او محصلينو د غوښتنې په اساس مونږ دا پروګرام غير طبي برخو ته لکه ساينس، انجنيري، کرهنې او نورو پوهنځيو ته هم وغځاوه، تر څو د مختلفو پوهنتونونو او پوهنځيو د اړتيا وړ کتابونه چاپ شي.

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هيواد له پوهنتونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړينه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هيله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه وليکي، وژباړي او يا هم خپل پخواني ليکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او

چیټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوندې پوهنځی استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د یادونې وړ ده چې د مولفینو او خپرونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مولف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکټر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی. دوی په تیرو کلونو کې هم د ننګرهار د طب پوهنځي د ۸۰ عنوانه طبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه درلود.

په ځانګړي توګه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او (CIM) Center for International Migration & Development چې زما لپاره یې په تېرو پنځو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړی دي، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو وزیره پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنوال محمد عثمان بابري، مالي او اداري معین پوهنوال ډاکتر ګل حسن ولیزي، د ننګرهار پوهنتون سرپرست رییس پوهنوال ډاکتر محمد طاهر عنایت، د ننګرهار پوهنتون پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مولف څخه ډېر مننددوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبي او فضل الرحیم څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردګ، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، جون ۲۰۱۵

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.org

سریزه

په اوسني عصر کې چې علمي تخنیکي انقلاب خپل اوج ته رسیدلی او نور هم دانکشاف په حالت کې دی، د دې پرمختګونو سره سم د ریاضیاتو علم په سریع ډول رشد او انکشاف موندلی او د تخنیکي علومو دترقۍ ستر عامل ګرځیدلی دی.

څرنګه چې زموږ ګران هیواد د انکشاف په حالت کې دی نو په دې مرحله کې د پوهنتونونو د استادانو دنده ده چې د هیواد د انکشاف په لار کې د نوو منابعو څخه په استفاده د کتابونو او علمي اثارو په لیکنه او ترجمه کې فعاله ونډه واخلي ترڅو نوی ځوان نسل وکولای شي د دوی د اثارو په مطالعه کولو ځان د نړۍ له انکشافاتو څخه با خبر او د هیواد په بیا رغونه کې فعاله ونډه واخلي.

له همدې امله د انجینرۍ پوهنځي د ریاضیاتود پروګرام په نظر کې نیولو سره د عمومي مضامینو د دیپارتمنت له خوا ماته یې د عمومي ریاضیاتو په نوم کتاب چې د پیداګوژۍ انستیتونو د فزیک او ریاضي رشتولپاره لیکل شوی، لسم، یولسم، دولسم، دیارلسم او څوارلسم فصلونه یې چې د انجینرۍپوهنځي د دوهم او دریم سمسترونو له پروګرام سره مطابقت کوي، د ژباړې دنده وسپارل شوه تر څو و کولای شم هغه ستونزه چې د انجنرۍ پوهنځي محصلین یې د کتابو نو د نه موجودیت له امله لري تر یوه حد ه رفع کړم. البته نوموړې موضوع د انجینرۍ پوهنځي د علمي شورا په غونډه کې ترغور وروسته تائید او د ورستی تائید لپاره د لوړو زده کړو وزارت د اکادمیکو چارو د انسجام ریاست ته راجع او د هغوی دتائید وړ ګرځیدلی ده.

د ذکر شوي کتاب په لسم فصل کې عددي او تابعي سلسلې، په یولسم فصل کې یې څو متحوله توابع او د هغی دیفرنسیالي محاسبې، په دولسم فصل کې یې د څو متحوله توابعوانتګرال نیول ، په دیارلسم فصل کې یې عادي تفاضلي معادلې او په څوارلسم فصل کې یې د ساحې مطا لعه کو ل او په ریاضي کې د فزیکي مسایلو حلول په نظر کې نیول شوي دي .د مو ضوعاتو د روښانه کولو په منظور مختلف مثالونه په نظر کی نیول شوي تر څو د عالي ریاضیاتو مفاهیم او طریقې په کې واضح شي . همدارنګه د هرفصل په پای کې یوشمیرمسایل د ځوابونو سره ورکړل شوي تر څو لوستونکي یې په ځانګړي ډول حل کړي.

د یا دولو ور بولم چې نوموړی کتاب د نوو تازه نظري اوعملي معلوماتونو په درلودلود یادو کورسونو لپاره مکمل او عالي درسي مواد شمیرل کیږي .او هم د استادانو، څیړونکو، محصیلونو او ټولو مینه والوته به انشاءالله په راتلونکې کې د کتاب نورې برخې هم وژباړمترڅو ټوله ژباړه به د دیپارتمنت له تائید څخه وروسته لکه یو مکمل کتاب مینه والوته د استفادې وړ وګرځوم.په دې ژباړه کې، لومړی ،دویم ، دریم څلورم او پنځم فصلونه په ترتیب سره د اصل کتاب دلسم، یولسم ،دولسم،دیارلسم او څوارلسم فصلونوژباړه په ګوته کوي.

سره له دې چې ددرسي کتاب لیکل او ژباړه څه اسانه کار نه دی خوبیا هم ما دد ې کتاب په ژباړه کې د ژباړې ټول اصول په پام کې نیولي دي .کیدای شي له ما څخه د ژباړې په برخه کې ځینې غلطۍ شوې وي چې له کبله یې د کتاب دلوستونکو او په خاصه توګه د مؤلف څخه بخښنه غواړم.

ډیر خوښ یم چې د نوموړې ژباړې په بهیر کې د ښاغلي پوهاند عبدالحق (ایمل) د کابل پوهنتون د ساینس پو هنځي د ریاضیاتو دیپارتمنت استاد، علمي لارښوونې او مرستې له ځان سره لرم . د دې تر څنګ هر یو پوهاند سید قیوم شاه(باور)د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځي د ریاضیاتو د دیپارتمنت استاد، پو هنمل حمید الله(یار)او پوهنمل نظر محمد د ننګر هار پوهنتون استادانو مرستې د قدردا نۍ او یادونې وړ بولم اوله هر یوه څخه د زړه له کومې په منښې سره کور ودانی وایم.

په پای کې ددې په هیله یم چې د ژباړل شوي کتاب ځینې برخې د درسي مواد وپه توګه د افغاني بشري سر چینو د وړ تیا او په هیواد کې د پرمختګ سره سم د هوساینې لامل وګرځي.

په درنښت

پو هنمل محب الرحمن(جنتي)

د ننګرهار پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي تد ریسي غړی.

دمطالبو فهرست

لومړی فصل

§ 1.1 عددي سلسلې 1

§2.1 دتوابعو سلسله 18

§ 3.1 په حقيقي نا حيه کې د طاقت سلسلې. 22

§4.1 په مختلطې ناحيه کې د طاقت سلسلې. 33

§5.1 مثلثاتي سلسلې. 46

تمرينونه 45

دويم فصل

د څو متحوله توابعو ديفر نسيالي محاسبه

§1.2څو متحوله توابع. 49

§2 .2 قسمي مشتقات. 56

§3.2 . دلوړ ترتيب قسمي مشتقات او ديفرنسيال. 66

§4.2. د دوه متحوله توابعو اکستريمم . 69

§5.2. د کوچنيو مربعاتو طريقه. 73

تمرينونه 74

دریم فصل

دخومتحوله توابعو انتگرال نیول

§ 1.3 .دوه گوني انتګرالونه 80

§2.3 د رې ګونی انتیګرال. 96

§3.3 منحني الخط انتیګرالونه 103

§4.3. سطحې انتګرالونه. 116

تمرینونه 127

څلورم فصل

تفاضلي معادلې

§1.4 .تفاضلي معادلو اساسي مفاهیم 133

§2.4 لومړی ترتیب تفاضلي معادلې او په فزیک ،تخنیک او ایکالوژي کې دهغې تطبیق. 135

§ 3.4 لوړ ترتیب تفا ضلي معادلې. 148

§ 4.4 دویم ترتیب خطي تفاضلي معادلې 152

تمرینونه 163

پنځم فصل

دساحې تیوري عناصراو دریاضي ،فزیک اساسي معادلات

§ 1.5سکالري او وکتوري ناحیې . 169

§ 5. 2 په فزیک کې دریاضی مسآلی او معادلې. 189

تمرینو نه 205

تقريظ

ځرنګه چي زموږ ګران هيواد خصوصاً په لوړوتحصيلي موسسو او پوهنتونوکي دعلمي کتابونو او آثاروکمبود د پاملرني وړدی نو ددی د رفع کولو له پاره د لوړوتحصيلات وزارت يو مهم ګام پورته کړی او دپو هنتون استادانوته دنده ورکوي چي ددی کمبودی درفع کولوله‌پاره کتابونه تاليف ياترجمه کړي . په ترجمه يا ژباړه کي هغو کتابونوته ډيراهمت ورکول کيږي چي دنړی په پوهنتونوکی په مستقيمه‌توګه تدريس کيږي په دی ډول له يوی خوا په تدريس کي سهولت راځی او له بلی خوا د درسی کتابونوکمښت له منځه ځي . په دی لړکی محترم پوهنمل محب الرحمن جنتي ته هم دنده ورکړشوه ترڅو د Общий Курс Высшей Математики په نوم کتاب چي په ۱۹۹۵ کال کي دفدرالی روسيی په هيواد کي طبع او په لوړتحصيلی موسسو کی په مستقيمه‌توګه تدريس کيږي ، يوبرخه يی چي ۱۶۲ مخه کيږي او د ننګرهارپوهنتون دانجنيری دپوهنځي د لومړی او دويم تعليمي کال د دويم او دريم سمسترونو د مفرداتو سره سمون خوري ، وژباړي . دادی محترم پوهنمل جنتي دادنده په ښيړه توګه سرته رسولی ده . په دی برخه کي پنځه فصلونه شامل دي چي د لسم فصل څخه پيل او ترڅوارلسم فصل پوری رسيږي.

نوموړي دا فصلونه دمتن سره سم په پوره امانت داری په روانه پښتو ژبه ژباړلی دي. ده په دی ژباړکي هڅه کړيده چی علمي اصطلاحات هم په هيواد کی دمروجو اصطلاحاتو په شکل وژباړي.

محترم پوهنمل جنتي دنوموړي کتاب لسم ، يوولسم ، دولسم ، ديارلسم اوڅوارلسم فصلونه ترجمه کړيدي . په لسم فصل کی عددي سلسلی او دتوابعو دسلسلو ځينی نوردولونه ، مثلثاتی سلسلی، دفوريی سلسلی ، دفوريي دسلسلو مختلط شکلونه ، دسلسلو تقارب ، تباعد اوتمرين شامل دی ، په يوولسم فصل کي د څومتحوله توابعوديفرنسيالي محاسبه ، ددوه متحوله توابعولمت اومتماديت، بشپړديفرنسيال اومشتق،دمرکبوتوابعومشتق اوديفرنسيال، صريح ؛ غيرصريح توابع او دهغوی مشتق ، دلوړو مرتبو دتوابعو قسمي مشتق او ديفرنسيال ، ددوو متحوله توابعواکستريمم، ترټولو کوچنيومربعاتو ميتود اوتمرين شامل دي ، په دولسم فصل کی دڅومتحوله توابعو انتيګرالی محاسبه ، دوه ګونی انتيګرال ، په قطبی مختصاتوکي دوه ګونی انتيګرال ، او په عمل کي دانتيګرال تطبيق ، په استوانوی او کروی مختصاتوکی دری ګونی

انتیگرال اود دری گونی انتیگرال تطبیقات ، د خط پرمخ انتیگرال او دهغي تطبیقات او تمرین په دیارلسم قصل کي تفاضلی معادلي او دهغي دولونه اوپه څوارلسم فصل کی د ساحي د نظریي اساسات او په فزیک کي دریاضی اساسی معادلي ، گرادنیت ، دیوارجنس او روترپه هکله معلومات شامل دی.

زه دمحترم پوهنمل جنتي دا علمی کارستایم پوهندویی علمی رتبی له پاره کافي بولم او لوړو مقاماتو ته یی پیشنهاد کوم . هغه ته دلا نورو بریالیتوبونو ښتونکی یم.

پوهاند عبدالحق ایمل

دکابل پوهنتون دریاضیاتو استاد

تقریظ

کتاب « د عالی ریاضیاتو عمومی کورس» که توسط پوهمل محب الرحمن جنتی ، از روسی به زبان پشتو ترجمه شده فصول دهم ، یازدهم ، دوازهم ، سیزدهم و چهاردهم کتاب معروف « کورس عمومی ریاضیات عالی» تالیف ای. ای. ساورین وال. متروسوف منتشرهٔ مسکو را در بر می گیرد . درین اثر عبارات ، قضایا ، دستور ها ، نتایج ، جداول توام با اشکال طور معیاری و منظم با عبارات معادل و فصیح از روسی به پشتو ترجمه گردیده و با سلیقهٔ بسیار خوب ترتیب و تنظیم شده اند . محتویات اثر عبارت از مباحث عمده و مهم چون سلسله های ریاضی ، توابع چند متحوله و مشتقگیری در آنها ، انتگرال های چندگانه ، معادلات تفاضلی ، نظریهٔ ساحه (آنالیز وکتوری) و معادلات فزیک ریاضی را تشکیل می دهد، که جزء لاینفک مفردات درسی رشته های ریاضی ، فزیک ، کیمیا و انجینری تمام پوهنتون ها می باشد . چنین کتبی به السنهٔ ملی و مخصوصاً زبان پشتو بسیار نایاب می باشد . کتاب مذکور برای استادان و شاگردان رشته های مربوط بحیث کتاب درسی و ممد درسی خیلی مفید و لازمی به شمار می آید .

این اثر جهت ترفیع به رتبهٔ علمی پوهندوی کاملاً کافی است و موفقیت های بیشتر استاد جنتی را از خداوند متعال استدعا میىمایم .

پوهنوال دکتور محمد انور غوری

تقریظ

کتاب " دعالی ریاضیاتو عمومی کورس " که توسط پوهنمل محب الرحمن جنتی اززبان روسی به زبان پشتو ترجمه شده مطالعه نمودم . درعصر حاضرکه کشورعزیزما خصوصاً درپوهنتون ها وموسسات تحصیلات عالی کشور کمبود آثار وکتب درسی بطور چشم گیرقابل ملاحظه است ووزارت تحصیلات عالی همواره غرض رفع این نقیصه برای استادان وظیفه داده تا کتب را که درپوهنتون های جهان مستقیم تدریس میگردد ترجمه نمایند.

کتاب ترجمه فصول های دهم ، یازدهم ، دوازدهم ، سیزدهم وچهاردهم کتاب معروف " کورس عمومی ریاضیات عالی " که مولفین آن ای . ای باورین و وی . ال . متروسوف منتشره مسکو را دربرمیگیرد. درین اثرقضایا ، تعریفات ، جداول واشکال به طورمعیاری ومنظم ترتیب وتنظیم شده است. محتویات اثرمباحث عمده ریاضیات عالی چون سلسله های عددی وتابعی ، توابع چندین متحوله و مشتق گیری آنها ، انتیگرال های چند گانه و منحنی الخط ، معادلات تفاضلی عادی ونظریه ساحه ومعادلات فزیک ریاضی را دربرداردکه برای انجنیران ورشته های فزیک ، ریاضی ، کیمیاهمه پوهنتون ها مفید واقع و در(209) صفحه تدوین گردیده است.

مترجم درانتقال مفاهیم وموضوعات مسلکی ازامانت داری کامل بدون تحریف کارگرفته ترجمه کتاب خیلی روان وبرای خواننده قابل فهم میباشد. موصوف به دولسان یعنی لسان روسی و لسان ترجمه حاکمیت داشته و درترجمه طرزنگارش رابطور معیاری درنظرگرفته است.

من این کتاب را که به لسان ملی پشتو نوشته شده برای ترفیع علمی برتبه پوهندوی کاملاً کافی دانسته وموفقیت بیشتری استاد جنتی را ازخداوند متعال خواهانم.

پوهنوال محمد همایون ناصری

استادریاضیات تطبیقی پوهنتون کابل

مقدمه

دطبیعت پیژندنی په مختلفو ځانګواو دوخت په تیریدو سره د ریاضیاتو رول یو شانته نه او د تاریخ په اوږدوکی منځ ته راغلی ده .دهغی دشته والی تأثیر دوه فکتورونه ثابتوی .یو داچی ریاضیکی موضوعاتو انکشاف اوبل داچی دمسایلو دمطالعه کولو لپاره دهغه معلوماتو ترلاسه کول کوم چی دهغی پواسطه کولایشود نوموړی موضوعاتو مفاهیم او روابط ولیکو .پدی صورت کی ویل کیږی چی د موضوع ریاضیکی بڼه ورکړ شویدی .

دیو ژ موضوع نمونه (مودل)ذکر کوو.فرضوو چی دیوی کوټی مساحت پیداکول مطلوب دی.ددی منظور لپاره د کوټی طول اوعرض پیداکوو او بیا یی سره ضربوو.دا ابتدائی پروسه په حقیقت کی دا معنی لری چی دا حقیقی موضوع (دکوټی مساحت) دریاضی په یو مشخص نمونه یعنی د مستطیل په مساحت بدلیږی . داندازه کولو په صورت کی چی ددی ډول مستطیل مساحت لاسته راځی په تقریبی ډول د مطلوب کوټی اندازه ښیی.

ریاضیکی نمونه دیو سلسه واقعی محاسباتو پواسطه طرح کیږی چی هیڅ کله داصل موضوع سره مطبقتاً مساوی نه دی او دموضوع ټول خصوصیات او مشخصات نه ارایه کوی بلکی هغه په تقریبی ډول

ډول منعکسوی .اما کله چی یو حقیقی موضوع دریا ضیکی نمونی سره تعویض شی ،مونږ ته دا امکانات په ګوته کوی تر څو د موضوع لپاره ریاضیکی بڼه ورکړواو د هغی دمطالعی ،تحلیل او خواصو لپاره کولایشو ریاضیکی عملیی ترسره کړو ، داسی چی دموضوع کوم مشخص اړخ پوری تړلی نه وی .دا عملیی په یو ګونی شکل په لوی وسعت سره مشاهدات بیانوی او دهغی مقداری تحلیل په ګوته کوی .

ریاضیکی نمونی له پخوا راهیسي په ډیر کامیابی سره په فزیک،میخانیک او ستوری پیژندنه کی استعمالیږی.

اکثراً داسی واقع کیږی چی دځینو حوادثو لپاره عملی بڼه پیداکول او په پرنسیپ کی دا ممکن نه دی چی دهغی ټول علتونه ولټوو ،تعقیب یی کړو او علاوه پردی دهغی مقدار پلاس راوړو .دا ډول حادثی نه شو کولای چی دیو تابع په شکل ولیکو .

دمثال په ډول دیوی سکی په غورځیدلوکی نه شو ویلی چی دسکی کوم مخ لویدلی دی . ددی منظور لپاره ډیر ممکنه عوامل په نظرکی نیسو یعنی د سکی په اچولوکی دلاس دعضلاتو کار ،په سکه کی د توزیع شوی موادو ډیر کوچنی فرق ، دها حرکت او داسی نور.

د سکی داچولو نتایج یو اتفاقی حادثه دی اما دا ښیی چی که سکه په کافی اندازه ډیر ځلی و غورځول شی د هغی لپاره یو مشخص قانون بندی پلاس راځی(دشیر او خط شمیر تقریباً سره مساوی دی).

هغه قانون مندی چی دهغی پواسطه اتفاقی حوادث تر مطالعی لاندی نیول کیږی د ریاضی یوه مشخصه برخه ده چی داحتمالاتو په نوم یادیږی .

داحتمالاتو نظریه په طبیعت ، تخنیک او اقتصاد کی په لویه پیمانهاستعمالیږی .همدارنگه په فزیک کی هم استعمال لری (دمثال په توگه په نظری فزیک کی).

لومړی فصل

سلسلې

§ 1.1 عددي سلسلې

1. اساسي مفهو مونه. فرضووچې $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ د اعــدادو یـــو بې نهایت ترادف راکــړل شوې دي.

تعریف. د

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

سمبول د عددي سلسلې په نوم او $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ د سلسلې د حدونو (جملو) په نوم یادوي. د (1) رابطې پر ځای د حاصل جمع سمبول هم استعمالوي او په لنډ ډول یې داسې لیکي .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

د (1) سلسلې د متناهي شمیر حدونو حاصل جمع $s_1 = a_1$ ، $s_2 = a_1 + a_2$ ، $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ، ...، $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ د (1) سلسلې د قسمي حاصل جمع په نوم یادوي. د

$$s_1, s_2, s_3 \dots \dots s_n, \dots \qquad (2)$$

ترادف په پام کې نیسو .

تعریف. که چیرې د

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

لمیت شتون ولري، نو (1) سلسلې ته متقاربه سلسله وایي داسې چې د S عدد ته دسلسلې حاصل جمع وایي په دې حالت کې لیکي :

$$s = a_1 + a_2 + a_3 \dots a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

که چیرې د (2) ترادف لمیت شتون ونه لري، نو د (1) سلسله متباعده سلسله بلل کیږي. متباعدې سلسلې حاصل جمع نه لري.

مثال 1. هغه سلسله په پام کې نیسو چې د $1, q, q^2, \dots q^n, \dots$ هندسي تصــاعد د حدونـــو څخه جوړه شوې وي.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots \qquad (3)$$

که چېرې $q \neq 1$ وي، نو لکه چې ښکاره ده ،

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

او یا

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

په لاس راځي یعنې(3) سلسله متقاربه ده او حاصل جمع يې $\frac{1}{1-q}$ سره مساوي ده.

د $q=1$ لپاره لاندې سلسله په لاس راوړو.

$$1+1+1+\dots+1\dots$$

په پایله کې $s_n = n$ او $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ دی، په دې مانا چې د $q=1$ لپاره (3) سلسله متباعده ده.

مثال2. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

سلسلې تقارب وڅیړئ.

ښکاره ده چې

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} (n = 1,2,3 \dots\dots)$$

بنا پر دې

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

له دې څخه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

په پايله کې (4) سلسله متقاربه ده او حاصل جمع يې د 1 سره مساوي ده.

2 .دسلسلو اساسي خاصيتونه. که چېرې په (1) سلسلې کې لـــومړی محـــدود شمير جملې، مثلاً m جملې ليرې کړو، په دې صورت کې د

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots \qquad (5)$$

سلسله لاسته راوړو چې د (1) سلسلې د m باقي پاتې په نوم يادېږي.

قضيه1. (5) سلسله د (1) سلسلې سره همزمان متقاربه (او يا متباعده) ده.

ثبوت. که

$$\acute{s}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}$$

وضع کړو، لرو چې:

$$\acute{s}_k = s_{m+k} - s_m$$

له دې څخه ليدل کېږي چې د $k\to+\infty$ لپاره د يوې سلسلې د قسمـــي حاصـــل جمع د لميت شتون او يا نه شتون د بلې سلسلـــې د قسمي حاصل جمـــع د لميت شتـــون او يا نـــه شتون ارايه کـــوي ،قضيه په اثبات ورسيده.

نتيجه1. د يوې سلسلې د تقارب د څېړلو لپاره کولای شو د هغې د متناهي شمير لومړې حدونو څخه صرف نظر وکړو.

فرضوو چې (1) سلسله متقاربه ده. نونظر (1) قضيې ته (5) سلسله هم متقاربه ده يعنې د هغې حاصل جمع شتون لـــري اودامجموعه په r_m ښيو. که (6) رابطـــه د $k\to+\infty$ په حالت کې لـــميت ونيسو پلاس راوړو:

$$r_m = s - s_m$$

که چېرې د (1) متقاربې سلسلې د s حاصل جمع پرځای د m لومړنيو حدونو حاصل جمع وټاکو نو r_m هغه خطا ده چې مونږ يې ترسره کوو. څرنګه چې:

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(s - s_m) = s - s = 0 \qquad (7)$$

نو خطا د m په زياتيدو سره کميږي. په نتيجه کې به د باقي مانده مطلقه قيمت

$$|r_m| = |s - s_m|$$

په کافي اندازه کوچنی وي، کله چې m په کافــي اندازه لــوي وټاکو. په دې ډول مونږ دتل لپاره داامکان لروچې په تقریبي ډول د متقاربې سلسلې د حاصل جمع د محاسبه کولو لپاره په کافي اندازه زیات حدونه د نوموړې سلسلې وټاکو.

خو د پیداشوې خطا یعنې د $|r_m|$ دقیمت معلومول یو ستونزمن کار دی. مسأله داسې مطـــرح کوو چې باید د هر ε>0لپاره داسې m (ترټولو کوچنی) پیداشي چې د هغـــې لپاره د $|r_m| < ε$ غیر مساوات صدق و کړي. (په راتلوونکې4، پاراګراف دې وکتل شي). مـــونږ دا ثابتوو چې څه وخت کولای شو د خطا مقدار معلوم کړو. همداسې ثابتوو چې په یو غوښتل شـــوې دقت سره باید د یوې سلسلې د حاصل جمع د پیداکولو څو لومړي حدونه په پام کې ونیول شي.

دا به وښيو چې پورتنی حاصل شوې (7) رابطه د لاندې بیانیې په واسطه ارایه کېږي.

قضیه2. د (1) متقاربې سلسلې د r_m ، m حدونو لمیت د ∞ →n لپاره مساوي په صفر دی.

قضیه3. (د سلسلې د تقارب لازمي شرط). د (1) متقـــاربې سلسلې د عمـــومي حد a_n لمیت د n غیر محدود تزاید لپاره مساوي په صفر دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ثبوت. فرضوو چې د (1) سلسله متقاربه ده لرو چې $a_n = s_m - s_{m-1}$له دې څخه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{s\to\infty} s_{n-1} \;\; = s - s = 0$$

نتیجه2. که چېرې د (1) سلسلې د a_n عمومي حد د ∞→n لپاره صفر ته تقرب ونه کړي نوداسلسله متباعده ده.

مثال1. د (3) سلسلې لپاره که $|q| \geq 1$ وي، لرو چې $|q^{n-1}| \geq 1, n=1,2,\ldots$ پـــه دې مانا چې dq^{n-1} ∞→n لپاره صفر ته متقارب نه وي. نو دا ډول سلسله متباعده ده.

تبصره1. دا به وښيو چې (8) شرط دیوې سلسلې د تقارب لپاره کافي شرط نه دی. دا یـــو حقیقت دی، ځکه چې د هارمونیکي سلسلې.

$$1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \qquad (9)$$

لپاره

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

دی. نو موږ ږي سلسله متباعده ده چې کولای شو د هغې تباعد دقضیې له عکس څخه په لاس راوړو.

قبلـــوو چې د (9) سلسله متقاربه او حاصل جمع یې s ده. بنا پردې:

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

چې د لاندې غیر مساوات سره په تضاد کې واقع دی.

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

په پایله کې هارمونیکي سلسله متباعده ده.

قضیه4. که چېرې (1) سلسله متقاربه او د هغې حاصل جمع s وي نو د

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n \qquad (10)$$

سلسله هم متقاربه او حاصل جمع یې مساوي په cs ده، داسې چې c یو اختیاري عدد دی.

ثبوت. فرضوو چې s_nاو σ_n د (1) او (10) سلسلو لپاره قسمي حاصل جمع ورکړشوي دي.نو:

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cs_n$$

له دې څخه:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs$$

قضیه په اثبات ورسیده.

مثال2. د (1) مثال څخه چې په 1 پاراګراف کې په پام کې نیول شوی وو، د 4 قضیې لـــه مخې دا پایـــله ترلاسه کېږي چې د $|q| < 1$ لپاره د

$$c+cq+cq^2 + \cdots + cq^{n-1} + \cdots$$

سلسله متقاربه ده، په داسې حال کې چې c یو اختیاري عدد دی.

قضیه5.که چېرې د (1) سلسله او د

$$b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots \qquad (11)$$

سلسله متقاربې او دهغې حاصل جمع په ترتیب سره S او σ وي نو د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \qquad (12)$$

سلسله متقاربه او حاصل جمع یې مساوي په σ−sده.

ثبوت.فرضوو چې s_n, σ_n او τ_n د (11)،(1) او (12) سلسلو قسمي حاصل جمع وي. نو:

$$\tau_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$=(a_1 + a_2 + \cdots a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots b_n) = s_n + b_n$$

له دې څخه د لميت په هکله د 4 قضيې په پام کې نيولو سره ليکو:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s + \sigma$$

تبصره2.د 5 قضيې د شرايطو په پام کې نيولو سره د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

سلسله هم متقاربه ده او حاصل جمع یې مساوي په σ−s ده.

په پای کې وینو چې ([8] ته په توجه) که (1) سلسله متقاربه او حاصل جمع یې s وي نـــو د هغې حدود کولای شو په اختياري ډول د قوسونو په واسطه گروپ بندي کړو (بې د هغې چې د هغوي ځايونو ته تغير ورکړو).

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots$$

په دې ډول نوې سلسله چې د هغې حدونه د ورکړ شوې سلسلې د حدونو د حاصل جمع څخه جوړ شوې او په قوسونو کې ليکل شوي دي، هم متقاربه او حاصل جمع یې s ده.

بايد ذکر کړو چې په متقاربو سلسلو کې د قوسونو رفع کول هميشه ممکن نه دي.

لکه څنگه چې د

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + \cdots$$

سلسله متقاربه ده خو د

$$1-1+1-1-\ldots1-1+\ldots \qquad (13)$$

سلسله متباعده ده (د (13) سلسلې عمومي حد صفر ته تقرب نه کوي).

3. مثبتې سلسلې.

تعريف. مثبتې سلسلې هغه سلسلې دي چې حدونه ئې منفي نه وي.

فرضوو چې که:

$$a_1+a_2+a_3 \dots as_n + \cdots \qquad (14)$$

یو ه مثبته سلسله وي يعنې د ...,n=1,2 لپاره، $a_n \geq 0$ وي. څرګنده ده چې:

$$s_{n-1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \,, (n = 1,2, \dots)$$

يعنې د $s_1, s_2, \dots, s_{n,\dots}$ ترادف متناقص نه دی.

لکه څنګه چې مخکې مو مطالعه کړي دي، کــولای شو لاندې ادعا فورمولبندي کړو.

قضیه1. ددې لپاره چې (14) مثبته سلسله متقاربه وي لازم او کافي دي چې د سلسلې د قسمــي حاصل جمعې ترادف له پورتنۍ خوا څخه محدود وي.

قضیه2. (دسلسلو مقايسوي شرط). فرضوو چې دوه مثبتې سلسلې ورکړ شوې دي.

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (B)$$

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \qquad (C)$$

که چېرې د (B) سلسلې حدونه په ترتيب سره د(C) سلسلې د حدونوڅخه لوي نه وي.

$$b_n \leq c_n (n = 1,2, \dots) \qquad (15)$$

نو د (C) سلسلې له تقارب څخه د (B) سلسلې تقارب په لاس راځي او د (B) سلسلې د تبــاعد څخــه د (C) سلسلې تباعد ترلاسه کېږي.

ثبوت. د (B) او (C) سلسلو قسمي حاصل جمع په ترتيب سره په B_n او C_n ښيــو، د(15) رابطــې له مخې لرو.

$$B_n \leq C_n n = 1,2,3, \dots \qquad (16)$$

که چېرې د (C) سلسله متقاربه وي نو د (1) قضيې له مخې د C_n قسمي حاصل جمع د پورتنۍ خواڅخــه محدوده ده:

$$C_n \leq L \;\; (L = \text{const}) \quad , \qquad n = 1,2,3 \dots \qquad (17)$$

د (16) او (17) غير مساواتونو څخه لرو چې

$$B_n \leq L \qquad n = 1,2,3 \dots$$

د (1) قضيې له مخې وايو چې د (B) سلسله متقاربه ده.

فرضوو چې د (B) سلسله متباعده ده نو د (C) سلسله هم متباعده ده برخلاف د هغــــه حالت چې مخکې ثبوت شو د (B) سلسله متقاربه ده.

تبصره1. کله چې (15) شرط د n د ټولو قیمتونو لپاره چې nد د یوه قیمت څخه شروع شوی وي، صدق وکړي.

مثال1. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \tag{18}$$

سلسلې تقارب وڅیړئ.

ورکړشوې سلسله د $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربې سلسلې سره مقایسه کوو. 1 بند ته په پام کې نیولو سره لرو چې.

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},(n=1,2,3,\ldots)$$

له دې څخه د 2 قضیې له مخې د (18) سلسلې تقارب حاصلوو په همدې ډول ویلای شـو چې د 2 بند د 1 پایلې له مخې د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{19}$$

سلسله متقاربه ده.

قضیه3. (د دلامبرت مشخــــصه: ژان لــي رون د لامبــرت (J.R.d,Alembert), (1717-1783) فرانسوي ریاضي پوه). که چېرې (14) مثبتې سلسلې داسې ورکړ شوې وي چې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\rho$$

شتون ولري، نو د $1>\rho$ لپاره (14) سلسله متقاربه او د $1<\rho$ لپاره (14) سلسله متباعده ده.

ثبوت. د ترادفونو له تعریف څخه، د هر اختیاري عدد$\varepsilon>0$ لپاره د $N=N_\varepsilon$ طبیعي عــدد شتون لري داسې چې د ټولو $n>N_\varepsilon$ لپاره

$$\rho-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon \tag{20}$$

که چېــرې $\rho>1$ وي، ε دومره کوچنی ټاکو چې $\rho+\varepsilon$ د یو څخه کــوچنی شي. د $\rho+\varepsilon=q$ په وضع کولو او د (20) لومړني نامساوات له مخې د $n=N+1, N+2,\ldots$ لپاره لرو چې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \text{ اویا } a_{n+1}<a_n.q$$

Nته د پورتنیو قیمتونو په ورکولو سره، د ورستي نامساوات څخه پلاس راوړو چې:

$$a_{N+2} < a_{N+1}.q$$
$$a_{N+3} < a_{N+2}.q < a_{N+1}.q^2$$
$$a_{N+4} < a_{N+3}.q < a_{N+1}q^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ددې مانا داده چې د:

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \ldots\ldots . \qquad (21)$$

سلسلې حدونه مطابقتاً د

$$a_{N+1}q + a_{N+1}q^2 + a_{N+1}q^3 + \cdots$$

متقاربې سلسلې د حدونو څخه کوچنې دي. نو د مقایسوي شرط څخه په استفاده ، (21) سلسله متقـاربه او په پایله کې د (1) قضیې له مخې سلسله هم متقاربه ده.

فرضوو چې $\rho > 1$ دی. اوس ε داسې کوچنی ټاکو چې $\rho - \varepsilon > 1$ وي. نو د n>N لپاره د (20) نامساوات د کیڼې خوا په پام کې نیولو سره د $1 < \frac{a_n+1}{a_n}$ غیر مساوات صدق کـوي او یا $a_{n+1} > a_n$.په دې ډول د (14) سلسلې حدونه د n=N+1 حد په شروع کېدو سره کله چې د هغې شمیـر زیات شي، تزایـد کوي. په دې مانا چې د (14) سلسلې عمومي حد a_n د $n \to \infty$ په حالت کې صفر ته تقرب نه کوي، په پای کې د 2 پایلې څخه په استفاده (14) سلسله متباعده ده.

تبصره2. د $\rho = 1$ لپاره د دلامبرت مشخصه د یوې سلسلې د تقارب او تباعـد مسألې ته ځواب نه شي ورکولای. حقیقتاً د هارمـونیکي سلسلې لپاره $\rho = 1$ دی په داسې حال کې چې هارمـونیکي سلسله متباعده ده .ددې ترڅنګ د (19) سلسلې لپاره هم $\rho = 1$ دی مګر دا سلسله متقاربه ده (1 مثال وګورئ).

تبصره3. د دلامبرت مشخصې له اثبات څخه دا پایله په لاس راځي چې د $\rho > 1$ لپاره د (14) سلسلې عمومي حد a_n د $n \to \infty$ لپاره صفر ته تقرب نه کوي.

تبصره4. (14) سلسله کله چې $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$ وي متباعـده ده. ځکه چې په دې حالت کې د N=n جملو په پیل سره،$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ په لاس راځي. په دې مانا چې a_n د $n \to \infty$ لپاره صفر ته تقرب نه کوي.

مثال2. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

سلسله متقاربه ده ځکه چې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

مثال3. د $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ سلسله متباعده ده ځکه چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

قضیه4. (د کوشي (Cauchy)انتګرالي مشخصه). د(14) مثبتي سلسلې حدونو لپاره قبلوو چې:

$$a_1=f(1),a_2=f(2),\dots,a_n=f(n),\dots\dots$$

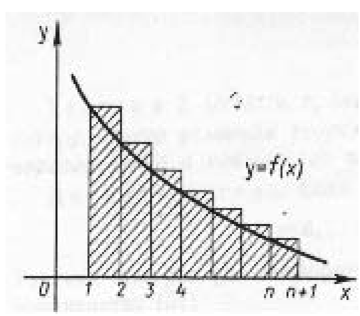
په داسې حال کې چې د f(x) **تابع د** $x\geq 1$ **لپاره متمادي، مثبته او متناقصه ده. نو (14) سلسله او د**

$$\int_1^{\infty}f(x)dx \qquad (22)$$

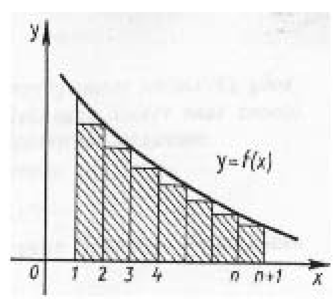
غیر خاص انتګرال همزمان متقارب او یا متباعد دي.

ثبوت. (1) شکل څخه (دمتناهی انتګرال د هندسي مفهوم څخه په استفاده) څرګنده ده چې:

$$I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx<f(1).1+f(2).1+\dots+f(n).1=a_1+a_2+\dots+a_n=s_n$$



(1 شکل)



(2شکل)

په دې ډول د $\{I_n\}$ **او** $\{s_n\}$ **ترادفونه یــو نواخت مــتزاید دي (**$f(x)>0$ **او** $a_n>0$**,** $n=1,2,\dots$**) د (1) قضیې څخه په استفاده دا پایلــه تر لاسه کېږي چې، که چېرې (14) سلسله متقاربه وي نو (22) متقاربه ده.**

په مشابه ډول د (2) شکل څخه څرګنده ده چې $s_{n+1} - a_1 < I_n$.له دې څخه د مخکې په شان دا پایله ترلاسه کېږي چې که (22) انتګرال متقارب وي نو (14) سلسله هم متقاربه ده.

په پای کې که چېرې (14) سلسله متباعده وي نو (22) انتګرال متباعد دی.په معکوس حالت کې دهغې له مخې چې مخکې ثبوت شوه (14) سلسله متقاربه ده. په مشابه ډول که چیرې(22) انتګرال متباعدوي ، نو (14)سلسله متباعده ده.

تبصره5. په (22) انتګرال کې که د لاند یني حد پر ځای د k>1 اختیاري طبیعي عدد په پام کې ونیسو داموضوع د (14) سلسلې د دې سره معادله ده چې دهغې څخه(k-1) حدونه لیرې کړو هغه چې د سلسلې دتقارب په هکله کوم رول نه لوبوي .

مثال4. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \tag{23}$$

سلسله په پام کې نیسو د $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ تابع د 4 قضیې شرط صدق کوي. د (23) سلسلې حدونه د x=1,2,3...s لپاره د تابع په قیمتونو سره مساوي دي. لکه څنګه چې مخکې وښودل شو (د 9,9 پاراګراف ،1 بند دې وکتل شي د$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$انتګرال د $\alpha > 1$ لپاره متقارب او د $\alpha \leq 1$ لپاره متباعد دی.په نتیجه کې نوموړې سلسله د$\alpha > 1$ له پاره متقاربه او د $0 \leq \alpha \leq 1$ له پاره متباعده ده.

په خاص حالت د n=2 لپاره د (19) متقاربه سلسله، د $\alpha = 1$ لپاره (9) متباعده هارمونیکې سلسله د $\alpha = \frac{1}{2}$ لپاره د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

متباعده سلسله او داسې نور، په لاس راوړو.

متناوب العلامه سلسلې.د

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \tag{24}$$

سلسلې ته متناوب العلامه سلسله ویل کېږي په داسې حال کې چې:

$$a_n > 0 \quad , \qquad (n = 1,2,3 \ldots .)$$

قضیه 1 (دلایبنز (Leibniz) قضیه). کــه چېرې د (24)سلسلې د حدونو مطلقه قیمت یو نــواخت متناقص وي یعنې.

$$a_{n+1} < a_n, (n = 1,2,3, \dots) \qquad (25)$$

او عمومي حد یې صفر ته تقرب وکړي:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (26)$$

نو (24) سلسله متقاربه ده.

ثبوت. د s_{2m} قسمي حاصل جمع کولای شو په لاندې دوو شکلونو ولیکو:

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \qquad (27)$$

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \qquad (28)$$

د (25) شرط له مخې د هر کوچني قوس په دننه کې تفاضل یــو مثبت عدد دی. د (27) څخــه دا په لاس راځي چې $s_{2m} > 0$ او په پایله کې د $\{s_{2m}\}$ ترادف یــو نواخت متزاید دی.د (28) څخه څرګنده ده چې $s_{2m} < a_1$ دی، په دې مانا چې $\{s_{2m}\}$ محــدود دی. په پایله کې داترادف د لمیت لرونکی دی.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (29)$$

ضمناً

$$0 < s < a_1$$

سر بیره پر دې د (29) او (26) په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2m} + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = s \qquad (30)$$

د (29) او (30) څخه په لاس راځي:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

په دې مانا چې د (24) سلسله متقاربه ده ضمناً:

$$0 < S < a_1 \qquad (31)$$

مثال1. د

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

سلسله متقاربه ده ځکه چې دلایبنز قضیې شرطونه صدق کوي.

قضیه2. د (24) متناوب العلامه سلسلې پاتــې r_n، کوم چــې دلایبنز قضیې شرطــونه صدق کوي، د لومړي حد اشاره لري او د هغې د مطلقه قیمت څخه کوچنی دی.

ثبوت. که چېرې n جفت وي نو:

$$r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots$$

څرنګه چې داسلسله دلایبنز قضیې شرطونه صدق کوي نو د (31) غیر مساوات په پام کې نیولو سره:

$$0 < r_n < a_{n+1}$$

که چېرې n جفت نه وي، نو

$$r_n = -a_{n+1} + a_{n-2} + \cdots$$

له دې څخه

$$-r_n = a_{n+1} - a_{n-2} + \cdots$$

د (31) په پام کې نیولو سره

$$0 < -r_n < a_{n+1}$$

له دې څخه

$|r_n| < a_{n+1}$ او $r_n < 0$

قضیه په اثبات ورسیده.

مثال2. د

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots \qquad (32)$$

متقاربې سلسلې حاصل جمع د 0,1 په دقت سره محاسبه کړئ:

د (32) سلسلې د (5) قسمي حاصل جمعې له جملې څخه مونږ باید د s_n هغه قسمي حاصل جمــع په پام کې ونیسو چې د هغې لپاره $|r_n| < 0,1$ وي. د (2) قضیې په پام کې نیولو سره $|r_n| < \frac{1}{n+1}$ په پایله کې کافي ده 10=n+1 وضع کړو یعنې n=9 په دې ترتیب

$$s_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cong 0,74$$

له دې څخه د 0,1 په دقت سره $s \cong 0,7$ ده.

مطلق او شرطي تقارب. اوس هغه سلسلې په پام کې نیسو چې اختیاري اشارې ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (33)$$

سلسلې په شان مثبتي چې حدونــه يې د نوموړې سلسلې د حدونو د مطلــقه قيمت څخــه جوړ شوي وي، ارتباط مومي يعنې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (34)$$

سلسلې لپاره لاندې قضيه صدق کوي.

قضيه1. که چېرې (34) سلسله متقاربه وي نو (33)سلسله هم متقاربه ده.

ثبوت. دوه مثبتې سلسلې په پام کې نيسو:

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (p) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n \quad (q)$

داسې چې:

$$P_n = \begin{cases} a_n, \text{که چېرې } a_n > 0 \\ 0, \text{که چېرې } a_n < 0 \end{cases} \text{،} \quad q_n = \begin{cases} 0\,, \text{که چېرې } a_n \geq 0 \\ a_n, \text{که چېرې } a_n < 0 \end{cases}$$

څرنګه چې د ...,n=1,2,3 لپاره $p_n \leq |a_n|$ او $q_n \leq |a_n|$، نو د 2 قضيې په پام کې نيولو سره د (p) او (q) سلسلې متقاربې دي. د نوموړو سلسلو قسمي حاصل جمع په ترتيب سره په P او Q ښيو. د (33) ورکړشوې سلسلې قسمي حاصل جمع کــولای شو د p_n او q_n تشکيل شــو و سلسلو په واسطه دا سې وليکو:

$$s_n = (p_1 + p_2 \ldots + p_n) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$$

د $n \to \infty$ په حالت کې لميټ په نيولو سره حاصلوو.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = P - Q \qquad (35)$$

په نتيجه کې (33) سلسله متقاربه ده.

تعريف. (33) سلسلې ته مطلقاً متقاربه سلسله وايي. که چېرې(34) سلسله متقاربه وي. او که چېرې (33) سلسله متقاربه او (34) سلسله متباعده وي، نو (33) سلسلې تــه غير مطلــقه متقــاربه سلسله او يا شرطاً متقاربه سلسله وايي.

تبصره. له (35) مساواتو څخه لرو.

$$\left|\lim_{n\to\infty} s_n\right| \le P + Q$$

نو

$$P + Q = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

مثال. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \tag{36}$$

سلسله د $\alpha > 1$ لپاره مطلقاً متقاربه او د $0 < \alpha \le 1$ لپاره شرطاً متقاربه ده. په رښتیا چې مخکې په اثبات ورسیدل . که چېرې $\alpha > 1$ وي نو (23) سلسله متقاربه او د $0 < \alpha < 1$ لپاره، (23) سلسله متباعده ده، سره له دې چې دلایبنز د قضیې له مخې (36) سلسله متقاربه ده.

د مطلقاً متقاربو سلسلو دځاي بدلو نې خاصیت.

فرضوو چې د

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{37}$$

متقاربه سلسله و رکړ شوې ده.که په اختیاري ډول د نوموړې سلسلې حدونو ته تغییر ورکړو د

$$\acute{a}_1 + \acute{a}_2 + \acute{a}_3 + \cdots + \acute{a}_k + \cdots \tag{38}$$

سلسله په لاس راځي، ضمناً د (38) سلسلې حدونه د (37) سلسلې حدونو سره دا ډول اړیکې لري:

$$\acute{a}_1 = a_{n_1} \quad , \quad \acute{a}_2 = a_{n_2}, \dots, \acute{a}_k = a_{n_k}, \dots$$

قضیه2. که چېرې د (37) سلسله مطلقاً متقاربه وي نو (38) سلسله هم متقاربه ده او حاصل جمع یې د (37) سلسلې له حاصل جمع سره مساوي ده، یعنې د (37) مطلق متقاربې سلسلې د ځاي بدلونې خاصیت صدق کوي.

ثبوت. د نمونې په توګه په [8] کې و ګورئ.

شرطاً متقاربې سلسلې د ځاي بدلونې خاصیت نه لري.

مطلقاً متقاربې سلسلې یو بل مهم خاصیت هم صدق کوي. هغه داچې کولای شوهغوي سره ضرب کړو.

فرضوو چې دوه مطلقاً متقاربې سلسلې ورکړ شوي دي.

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (39)$$
$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

نوې سلسلې جوړوو:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots \quad (40)$$

نوموړې سلسله د (39) دوو سلسلو د حاصل ضرب څخــه عبارت ده. پــه اثبات رسيدلې چې (40) سلسله هم مطلقاً متقاربه ده او حاصل جمع يې د s=AB سره مساوي ده.

6. د مختلطو حدونو سلسلې. د مختلطو حدونو سلسله يعنې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (41)$$

سلسله په پام کې نيسو داسې چې $U_n = \alpha_n + i\beta_n (n = 1,2, \dots)$ وي.

د حقيقي حدونو سلسلو په شان (1 بند)، ددې سلسلې لپاره د s_n قسمي حاصل جمع دا سې ليکو:

$$s_n = u_1 + u_2 \dots + u_n$$

د مختلطو حدونو (41) سلسله متقاربه بلله کېږي که چېرې د

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

لميت موجود وي، ضمناً S د (41) سلسلې د حاصل جمع په نوم يادوي. دلته د مختلطو عددونــو د ترادف لميت مفهوم پکار وړو او مفــهوم يې داسې څرګندوو چې: د S عــدد ته د$\{s_n\}$ تــرادف لميت وايي که چېرې د هــر $\varepsilon > 0$ اختياري عــدد لپاره $N = N_\varepsilon$ شميــره داسې شتــون ولري چې د n>N لپاره لاندې نامساوات صدق وکړي:

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad (42)$$

يا دا چې

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - s| = 0$$

وي.

د حقيقي حدونو لرونکې سلسلو په شان د (41) سلسلې لپاره د تقارب لازمي شرط فورمول بندي کوو. د(41) متقاربې سلسلې عمومي حد u_n د n قيمتونو په غير محدود زياتوالي سره صـــــفر ته تقرب کوي يعنې:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

مثال. د

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots \qquad (43)$$

سلسلې لپاره (q یو مختلط عدد او خلاف د1 دی) قسمي حاصل جمع یې

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

ده ځکه چې $(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n$ **دی.**

د (44) رابطې له مخې لرو:

$$\left|s_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{|1-q|}$$

له دې څخه د $|q| < 1$ **لپاره**

$$\lim_{n\to\infty}\left|s_n - \frac{1}{1-q}\right| = 0$$

په دې مانا چې د$|q| < 1$ **لپاره (43) سلسله متقاربه او د هغې د جمع حاصل S مساوي دی په** $\frac{1}{1-q}$.

د $|q| \geq 1$ **لپاره د (43) سلسله متباعده ده ځــکه چې په دې حالت کــې د n د قیمتونو په غیر محدود زیاتوالي سره د هغې عمومي حد** q^{n-1} **صفر ته تقرب نه کوي.**

لاندې قضیه کې د (41) سلسلې چې حدونه یې مختلط عددونه دي، د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad (45)$$

سلسلو سره ارتباط ورکوي کوم چې حدونه یې حقیقي عددونه دي.

قضیه1. **د (41) سلسله متقاربه ده که او یوازې که (45) سلسله متقاربه وي.**

ثبوت. **فرضوو چې د (41) سلسله متقاربه ده. ددې سلسلې قسمي حاصل جمع** s_n **او قیــمت یې S په الجبري ډول لیکو:**

$S=a+ib, s_n = a_n + ib_n$ **داسې چې** a_n **او** b_n**، د (45) سلسلو قسمي حاصل جمع ده. نو (42) شرط لاندې شکل غوره کوي.**

$$|s_n - s| = |a_n - a + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2} < \varepsilon (n > N) \qquad (46)$$

د(46) غیرمساواتو څخه لاندې نامساواتونه پلاس راځي.

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |(b_n - b)| < \varepsilon (n > N) \qquad (47)$$

په دې ډول (45) سلسله په ترتیب سره a او b ته تقارب کوي. که چېرې (45) سلسله په ترتیب سره a او b ته تقارب وکړي نو (47) رابطه صـــدق کوي او ترڅنګ يې د $|s_n - s| < \varepsilon\sqrt{2}$ غیر مساوات هـــم صدق کوي. دا رابښيي چې (41) سلسله متقاربه ده.

قضیه2. که چېرې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (48)$$

سلسله متقاربه وي، نو د (41) سلسله متقاربه ده.

ثبوت. لرو چې:

$$|u_n| = |\alpha_n + i\beta_n| = \sqrt{\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2} \geq |\alpha_n|, \quad |u_n| \geq |\beta_n|$$

د سلسلو د مقایسوي شرط له مخې دا پایله ترلاسه کوو چې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \qquad \text{او} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

سلسلې متقاربې دي او مانا يې داده چې د (45) سلسله متقاربه ده.(1) قضيـــې له مــــخې د (41) سلسله متقاربه ده.

د هغو سلسلو په شان چې حدونه يې حقیقي عددونه وي، (41) سلسلې ته مطلق متقاربه سلسله وايي، که چېرې (48) سلسله متقاربه وي. که چېرې (41) سلسله متـــقاربه او (48) سلسله متباعده وي، نو (41) سلسله شرطاً متقاربه سلسله بلله کېږي.

د مطلقاً متقاربو سلسلو لپاره چې حدونه يې مختلط عددونه وي د ځاي بدلونې او ضربولوخـــواص چې د حقیقي حدونو لرونکو سلسلو لپاره لیکل شوي وو، توسعه مومي.

§2.1 . دتوابعو سلسله.

1. د توابعو د سلسلې د تقارب ناحیه. دلته هغه سلسله پــــه پام کې نیسو چې حدونه يې عددونه نه وي بلکه توابع وي.

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

دا ډول سلسلې د توابعو سلسلې په نوم يادوي.

د مثال په ډول د

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (1)$$

سلسله د توابعو يوه سلسله ده.

که چېرې د (1) په سلسله کې x ته د x_0 يو اختياري قيمت د$u_n(x)$ ($n = 1,2,\ldots$) د تعــريف له ناحيې څخه ورکړ شي نو د

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \qquad (2)$$

عددي سلسله پلاس راځي چې يا به متقاربه او يا به متباعده وي. که چېرې سلسله متقاربه وي نو x_0 ته د (1) توابعوسلسلې د تقارب نقطه وايي. که چېرې (2) سلسله متباعده وي نو x_0 ته د (1) دتوابعــو د سلسلې د تباعد نقطه وايي. کېداې شي د يو شمير نقطو لپاره چې د $u_n(x)$ توابعو د تعريف په ناحيه کې شامــــلې وي، (1) سلسله متقاربه وي مګر د نورو نقطو لپاره به متباعده وي.

تعريف.د توابعو سلسلې دتقارب دټولو نقطو مجموعې ته د هغې دتقارب ناحيه ويل کېږي.

د توابعو سلسلې قسمي حاصل جمع يعنې د n لومړنيو حدونو حاصل جمع

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

د x متحول يوه تابع ده.

د توابعو سلسلې د تقارب ناحيې د تعريف څخه دې پايلې ته رسيږو چې ددې ناحيې د x هــرې اختياري نقطې لپاره د قسمي حاصل جمع $s_n(x)$ لميټ د $n \to \infty$ لپاره موجود دی. په هغو نقطو کې چې د تقارب په ناحيه کې واقع نه وي د قسمي حاصل جمع $s_n(x)$ لميټ موجود نه دی. څرګنده ده چې د (1) توابعو سلسلې حاصل جمع $s(x)$ ، د x تابع ده چې د (1) سلسلې د تقارب په ناحيه کې تعريف شوې ده.

په دې حالت کې ليکې:

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

که چېرې (1) تابعــې سلسله متقــاربه او د $s(x)$ حاصــل جمــع ولــري. د عــددي سلسلو په شان د $s(x) - s_n(x)$ تفاضل د n حدونو د باقي مانــده په نوم يادېږي،داباقي مانده د$r_n(x)$په واسطــه ښــودل کېږي: $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ څرګنده ده چې

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

مثال3. د 3>x>3- په انټروال کې د

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

سلسله متقاربه ده ځکه چـــې په دې انټروال کې $q=\left|\frac{x}{3}\right|<1$ دي د $|x|\geq 3$ لپاره ورکـــړ شـــوې سلسله متباعده ده.

2 .د توابعود سلسلې منظم تقارب.

تعریف. د (1) تابعي سلسلې ته د [a,b] په قطعه خط کې منظمه متقاربه سلسله وایـــي، که چېرې د هر اختیاري عدد $\varepsilon>0$ لپاره د $N=N(\varepsilon)$ یو طبیعي عدد داسې شتون ولري چې د x پورې اړه نه لري او د n>N لپاره د $|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$ غیر مساوات د [a,b] پر قطعه خط د x د هر قیمت لپاره صدق وکړي.

قضیه1. (د ویرشتراس (Weierstrass)مشخصه). که چېرې د (1)د توابعو سلسلې حـــدونه د [a,b] په قطعه خط باندې د

$$|u_n(x)|\leq a_n \quad ,\ (n=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

شرط صدق کړي داسې چې د a_n

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{4}$$

متقاربې مثبت العلامه سلسلې حدونه دي. نو په دې صورت کې (1) سلسله د [a,b] په قطعه خط کې منظماً او مطلقاً متقاربه ده.

ثبوت. د $0<\varepsilon$ اختیاري عدد په پام کې نیسو. څرنګه چې د (4) سلسله متقاربه ده نـــوددې سلسلې لپاره لرو $\lim_{n\to\infty} r_n=0$

(r_n د (4) سلسلې د n پاتې حدونو حاصل جمع ښيي). په دې ډول د N یو طبیعي عدد داسې شتون لري چې د n>N لپاره لاندې غیرمساوات صدق کوي.

$$\sum_{k=n-1}^{\infty}a_k<\varepsilon \tag{5}$$

د (3) نامساواتو له مخې پلاس راځي چې د p هر طبیعي عدد لپاره

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \qquad (6)$$

له دې څخه د (5) رابطې په پام کې نیولو سره، پلاس راوړو چې،

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \quad (n > N) \qquad (7)$$

(د $n \to \infty$ لپاره د (6) رابطــې د ښي خــوا لمیټ نظر 1 قضیـــې ته شتــون لري نوموړی مطلب د (1) سلسلې مطلقاً تقارب ثابتوي. نو د (7) غیرمساوات په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| < \varepsilon$$

داسې چې n>N او x د[a,b] یوه اختیاري نقطه ده، یعنې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

سلسله په [a,b] کې منظمه متقاربه سلسله ده.

مثال. د [1,1-] په قطعه خط باندې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$$

سلسله منظمه متقاربه ده،ځکه چې په دې قطعه خط کې $(n = 1،2 \dots)$، $\frac{|x^n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ او د

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سلسله متقاربه ده

3. دمنظمو متقاربو سلسلوخواص. له ثبوت څخه پرته(ثبوت دمثال په توګه په [12] ،1جلد کې وګورئ)یولړقضیې دمنظمومتقاربوسلسلو لپاره په ګوته کوو.

قضیه1. که چیرې د (1) منظمې متقاربې دتوابعود سلسلې حدونه د [a,b] په قطعه خــط کې متمادي وي، نو دهغې مجموعه هم د [a,b]په قطعه خط کې متمادي ده.

قضیه 2. که چیرې د (1) منظمې متقاربې توابعود سلسلې حدونه د [a,b] په قطعه خــط کې متمادي وي، نو (1) سلسله کولای شود[a,b]پرقطعه خط جمله په جمله انتګرال ونیسو.

ددې مانا داده چې که x_1 او x_2 د [a,b] قطعه خط دوه اختیاري نقطې وي،نو

$$\int_{x_1}^{x_2} (u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots)dx = \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)dx + \cdots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx + \cdots$$

قضیه3. فرضووچې(1) دتوابعو سلسله د[a,b] پرقطعه خط متقاربه ده اوحدونه يې پر نوموړي قطعه خط د(... ،n=1،2) ،$\acute{u}_n(x)$ متمادي مشتقات ولري نو که چېرې د$\sum_{n=1}^{\infty} \acute{u}_n(x)$ سلسله د[a,b] پرقطعه خط منظماً متقاربه وي نو پر نوموړي قطعه خط

$$(u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x))' = \acute{u}_1(x) + \acute{u}_2(x) + \cdots + \acute{u}_n(x) + \cdots$$

قضیه4.که چېرې د [a,b] پرقطعه خط کې د(1)تابع منظماًمتقاربې سلسلې حدونه د$\varphi(x)$ په محدودې تابع کې ضرب شي ،نو د

$$\varphi(x)u_1(x) + \varphi(x)u_2(x) + \cdots + \varphi(x)u_n(x) + \cdots$$

لاسته راغلې سلسله هم د[a,b] په قطعه خط کې منظماًمتقاربه ده.

§3.1 په حقیقي نا حیه کې د طاقت سلسلې.

1. دطاقت سلسلې او دهغې د تقارب ناحیه.

تعریف. د

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \qquad (1)$$

په شان دتوابعــوسلسلې تــه د طاقت سلسله وايي داسې چې $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ ثابت حقیقي عددونه او د طاقت دسلسلې ضریبونه دي.

هره اختیاري دطاقت سلسله د x=0 لپاره متقاربه ده، ځکه چې د لومړي حد څخه پــرته د (1) سلسلې نور ټول حدونه صفر کېږي. د (1) په شان داسې دتوابعو سلسلې شته دی چې یوازې د x=0 په نقطه کې متقاربې دي. دې ډول سلسلو ته د لومړي کلاس سلسلې وايي.

د مثال په ډول د

$$1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots n!\,x^n + \cdots \qquad (2)$$

سلسله یوازې د x=0 په نقطه کې متقاربه ده او د x≠0 په هره اختیاري نقطه کې متباعده ده. دا یو حقیقت دی چې، د حقیقي محور د هر x≠0 لپاره مونږ یــوه حقیقي سلسله په لاس راوړواو ددې سلسلې تقارب څیړو. د

$$1 + |x| + 2!\,|x|^2 + \cdots + n!\,|x|^n + \cdots \qquad (3)$$

سلسله تشکیله او په دې سلسلې د دلامبرت مشخصه تطبیقوو نو د x≠0 هر قیمت لپاره حاصلوو:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|}=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

په پایله کې(3) سلسله، او یا په بل عبارت (2) سلسله د هر x≠0 لپاره متباعده ده.

د (1) نوعې په شان داسې سلسلې موجودې دي چې د حقیقي اعدادو د محور پر مخ متقاربې دي (دا ډول سلسلې، د سلسلو دویم کلاس پورې تړلې دي). د مثال په ډول د

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

سلسله د حقیقـــي اعدادو دمــحور پر مــخ متقاربـــه ده (ضمــناً مطلقاً) ځکه چې د هر $x\epsilon(-\infty,\infty)$ لپاره

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

د (1)ډول هغه سلسلې چې په لــومړي او دویـــم کلاس کې شاملې نه وي، نو هغه د سلسلو په دریم کلاس پورې تړلې دي.

قضیه. (د آبل قضیه) (نیلس، گینریخ آبل(Niels,Henric,Abel) (1802-1829) نارویژي ریاضي پوه). که چیرې (1) د طاقت سلسله د $x=x_0\neq 0$ لپاره متقاربه وي نو سلسله د x د ټولــو هغو قیمتونو لپاره چې د

$$|x|<|x_0|$$

غیرمساوات صدق و کړي متقاربه ده. که چیرې د $x=x_0$ لپاره (1) سلسله متباعده وي نو د x د ټولو هغو قیمتونو لپاره چې د $|x|>|x_0|$ شرط صدق کوي، متباعده ده.

ثبوت.فرضوو چې د $x=x_0\neq 0$ لپاره (1) سلسله متقاربه ده یعنې:

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n+\cdots \tag{4}$$

سلسله متقاربه ده .

$$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$$

له دې څخه دا پایله ترلاسه کیږي چې د (4) سلسلې دحدونو مطلقه قیمت محدود دی.

$$|a_nx_0^n|\le M\,,n=0,1,2 \tag{5}$$

(M یو مثبت ثابت عدد دی)

اوس که د یو اختیاري x لپاره چې د $|x|<|x_0|$ شرط صدق کړي د

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots \qquad (6)$$

سلسله په پام کې نیسو د $(n=1,2,\dots)$ $|a_nx^n|=|a_nx_0^n|.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ مساواتو له مخې د (5) رابطــې څخه په استفاده لیکو چې

$$|a_nx^n|<M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

یا

$$|a_nx^n|\le Mq^n \qquad (n=0,1,2,\dots) \qquad (7)$$

داسې چې $q=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ دی ځکه چې $|x|<|x_0|$.

د

$$M+Mq+Mq^2+\cdots+Mq^n+\cdots$$

سلسله متقــاربه ده په دې ډول له مقایسوي شرط څخه په استفاده د (7) غیــرمساواتــو په مرسته (6) سلسله د هر x لپاره چې د $|x|<|x_0|$ شرط صدق کوي، متقاربه ده. په پایله کې (1) سلسله ددې x لپاره مطلقاً متقاربه ده.

اوس فرضوو چې (1) سلسله د $x=x_0$ لپاره متباعــده ده. ثبوتوو چې دxدټولوهغو قیمتونو لپاره چې د $|x|<|x_0|$ غیرمساوات صدق کــوي متباعــده ده. حقیقتاً که چېــري د $x=x_1$ په قیــمت کــې د $|x_1|<|x_0|$ لپاره د(1) سلسله متقاربه وي،نودلــومړۍ برخې دثبــوت څخه په استفاده د $x=x_0$ لپاره متقاربه ده، چې د فرضیې خلاف ده. قضیه په اثبات ورسیده.

نتیجه1. د (1) دویم کلاس سلسله د $(-\infty,\infty)$ په انتروال کې مطلقاً متقاربه ده.

نتیجه2. د (1) په شان دریم کلاس د طاقت دهــرې سلسلې لپاره د R>0 عــدد شتون لــري چې د سلسلې د تقارب شعاع ورته وایي، او دا لاندې خاصیتونه لري:

د $|x|<R$ لپاره (1) سلسله مطلقاً متقاربه او د $|x|>R$ لپاره (1) سلسله متباعده ده.

(-R,R) انتروال ته د (1) سلسلې د تقارب انتروال بلل کېږي.

د (1) نتیجې څخه په استفاده د (1) دویم کلاس سلسلو لپاره دتقارب ناحیه د$(-\infty+\infty)$ انتروال دی.

د(1) دريم کلاس سلسلولپاره د تقارب نا حيه د $(-R,R)$ انتروال څخه عبارت ده. چې په بيلابيلو حالتونو کې د هغې يوه او يا دواړه انجامي نقطې ورسره جمع کېږي (چې دا د سلسلې د دقيقې څيړنې پورې اړه لري).

مثال1. د (1) لومړي کلاس سلسلو لپاره $R=0$ او د (1) دويم کلاس سلسلو لپاره $R=\infty$ دي.

قضيه2. فرضوو چې د (1) سلسلې لپاره لاندې خلاف د صفر لميټ شتون لري.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

نو

$$R = \frac{1}{L}$$

ثبوت. هغه سلسله چې د (1) سلسلې د حدونو د مطلقه قيمت څخه جوړه شوې ده په پام کې نيسو.

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots \qquad (8)$$

که د د لامبرت مشخصه تطبيق کړو (نظر 1.10 پارګراف، 3 بند ته):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|$$

ددې مشخصې په مطابق (8) سلسله متقاربه ده، کله چې $|x|L < 1$ وي يعنې $|x| < \frac{1}{L}$ متباعده ده، کله چې $|x|L > 1$ يعنې که $|x| > \frac{1}{L}$ وي (په ورستي حالت کې د (8) سلسلې د عمومي حـد لميټ، په دې مانا چې د (1) سلسلې عمومي حد $n \to \infty$ په حالت کې د صفر خواته تقرب نه کوي).

په پايله کې (1) سلسله د $|x| < \frac{1}{L}$ لپاره مطلقاً متقاربه او د $|x| > \frac{1}{L}$ لپاره متباعده ده.په دې مانا چې د (1) سلسلې د تقارب شعاع عبارت له:

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

څخه ده.

تبصره2. که چېرې $L=0$ وي د حقيقي محـور د x هر قيمت لپاره $|x|\,L = 0 < 1$، يعنې (8) سلسله د حقيقي اعدادو د محـور پـر مخ متقاربـه ده. په دې ما نا چـې (1) سلسله د اعـدادو د محور پر مخ مطلقاً متقاربه ده. په پايله کې $R=\infty$ دی. کـه چېرې $L=\infty$ وي نـو د اعـدادو د محور د هر $x\neq0$ لپاره $L=\infty$ دی. په دې مانا چـې (1) سلسله د هـره $x\neq0$ اختياري عـدد لپاره متباعـده ده يعنې $R=0$ ده.

مثال. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

سلسلې د تقارب شعاع R=3 ده ځکه چې:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

د ورکړشوې سلسلې د تقارب ناحیه د$-3 \le x < 3$ انتروال دی.

2.دطاقت لرونکو سلسلو خواص:

قضیه1. که د (1) هره طاقت لرونکې سلسله چې د $R > 0$ تقارب شعاع $[-\rho,\rho]$ په هر انتروال کې چې د $(-R,R)$ تقاربه انتروال کې شامله وي، منظماً متقاربه ده.

ثبوت. نظر د $0 < \rho < R$ شرط له مخې د

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \cdots + |a_n|\rho^n + \cdots$$

د مثبتو العلامو سره سلسله د $[-\rho,\rho]$ پر قطعه خط متقاربه ده.

$$|a_n x^n| \le |a_n|\rho^n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

په پایله کې د وایرشتراس د مشخصې له مخې (1) سلسله د $[-\rho,\rho]$ په قطعه خط باندې منظمه متقاربه ده.

د پورتنۍ قضیې څخه دې نتیجې ته رسیږو چې دطاقت سلسله د منظمو متقاربو سلسلو ټول خاصیتونه لري.

نوموړي خواص فورمول بندي کوو (د مثال په ډول [12] لومړی جلد دې وکتل شي).

قضیه2. (1) د طاقت د سلسلې حاصل جمع د تقارب د انتروال په هــره نقطــه کې متمادي تابع ده. د طاقت سلسلې کولای شو د تقارب د انتروال په د ننه کې هغــه جمله په جمله څــو ځلې مشتق او انتګرال ونیسو .ضمناً ددې عملیو په ترسره کولو بیا هم دطاقت یوه سلسله په لاس راځي، کوم چې د تقارب ناحیه یې د ورکړشوې متقاربې سلسلې، د تقارب ناحیه ده.

3 . هغه سلسله چې د(x-a) تفاضل یې توانونه ولري. لانــدې د توابعــو سلسلې ته د طاقت سلسله وایي.

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad (9)$$

د (9) د طاقت سلسلې د تقــارب انتروال د هغــه انتروال څخه عبارت دی چــې اوږدوالي یې د 2R په اندازه او مرکز یې د a په نقطه کې واقع وي.

د x په توانونو د طاقت د سلسلو خواص د (x−a) په توانونو طاقت لرونکــو سلسلو لپاره محفوظ دي.

4. د طاقت په سلسلو کې د توابعو تجزیه. د تیلور(Taylor.B) سلسله. که چیرې د $f(x)$ تابع د (9) سلسلې حاصل جمع وي، نو په دې صورت کې وایي چې د $f(x)$تابع د (x−a) د تــوانونو په سلسله تجزیه شوې ده.

ددې ډول سلسلو اهمیت په دې کې دی چې مونږ کولای شو دا امکان پیداکړو تر څــو په تقــریبي ډول د توابعوحاصل جمع د طاقت د سلسلې د څولومړیو حــدونو په حاصل جمــع سره تعویض کــړو (یعنې د یو پولینوم سره).

قضیه1. که چیرې د $f(x)$ **تابع د** $(x_0 - R,\ \ x_0 + R)$ **په انتروال کې د**

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + .. \tag{10}$$

د طاقت په سلسلې تجزیه شي داتجزیه یوازې یوه ده (یوازینی تجزیه ده).

ثبوت. د 2 قضیې له مخې لرو.

$$f'(x) = 1.a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \cdots + na_n(x - a)^{n-1} + \cdots$$
$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3(x - a) + \cdots + n(n-1)(x - a)^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4(x - a) + \cdots + n(n-1)(n-2)(x - a)^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \ldots (n-1)na_n + 2.3 \ldots n(n+1)a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$$

په پورتنیو رابطو او (10) رابطې کې ، د $x = x_0$ په وضع کولو سره حاصلوو.

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, , a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \ldots \tag{11}$$

د (11) رابطې څخه دې پایلې ته رسیږو چې د (10) سلسلې ضریبونه د (11) فــورمــولونو په مرسته په یوازې یو ډول سره، د (11) فورمول په واسطه تعریف کیږي دا قضیه په اثبات رسوي.

په (10) سلسلې کې د لاسته راغلو ضریبونو په وضع کولو سره د

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \qquad (12)$$

سلسله پلاس راوړو چې د $f(x)$ تابع لپاره د تیلـور دسلسلې په نـوم یادیږي، ددې سلسلې ضریبـونه $a_0 = f(x_0) \quad , a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$ د $f(x)$تابع د x_0 پـه نقطـه کې د تیلـور د ضریبونو په نوم یادیږي.

په دې ډول که چیرې د $f(x)$ تابع د $(x-a)$ په توانو په طاقت لـرونکې سلسلې تجزیه شي نو سلسله ضرور د نوموړې تابع لپاره د تیلور سلسله ده.

که چیرې د تیلور په سلسله کې $x_0 = 0$ وضع کړو نو د تیلور سلسلې خاص حالت په لاس راوړو چې د مکلورن(C.Maclaurin) د سلسلې په نوم یادیږي:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (13)$$

په ګوته کوو،ټول هغه بحثونه چې د طاقت د سلسلو لپاره د$f(x)$ د تابع د تجزیې په هکله ذکرشوې دي په دې حالت کې هم د تطبیق وړ دي.

که چیرې په لومړي مرحله کې دا فرض کړو چې سلسله د $f(x)$ تابع ته متقـاربه نه ده بلکې د $f(x)$ تابع یوازې بې نهایت ځلې مشتق منونکې ده او د هغې لپاره د تیلور سلسله ولیکو نـو هیڅکله به دې نتیجې ته ونه رسیږو چې داسلسله د x خلاف x_0 قیمتونو لپاره متقاربه ده سر بیره پردې امـکان لـري چې د $f(x)$ تابع لپاره تشکیل شوې، د تیلور سلسله متقاربه ده خو د هغې حاصل جمع به د $f(x)$تابع سره مساوي نه وي.

فرضـوو چې د $f(x)$تابع د $(x_0 - R, x_0 + R)$ انتروال کـې د اختیاري ترتیب مشتقات لري ، نو ددې انتروال د هر x او هر اختیاري n لپاره لاندې د تیلور فورمول صحت لري .

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \qquad (14) \end{aligned}$$

داسې چې

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_{0+\theta})(x-x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (15)$$

اوس غواړو هغه شرطــونه څرګند کړو، د کومو په مرسته چــې د تیلور سلسله د $f(x)$ یــوې تابع لپاره جوړه شوې ده.

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (16)$$

د (x_0-R,x_0+R) په انټروال کې متقاربه او مجموعه یې د $f(x)$ سره مساوي ده.

څرنګه چې د $f(x)$او (16) سلسلې د (n+1) لومړنیو حــدونو د حاصل جمعــې ترمنځ تفاضل د (14) رابطې له مخې مساوي په $r_n(x)$ دی، نو ددې لپاره چې د تیلــور (16) سلسله (کومه سلسله د هغې لپاره تشکیل شوې دي) د (x_0-R,x_0+R) په انټروال کې د $f(x)$ خواته متقاربه ده لازم او کافــي ده چې د تیلور په فورمول کې د $f(x)$ لپاره د $r_n(x)$ حدونو باقي مانده په نــوموړي انټروال کې د x هــر قیمت لپاره صفر ته تقرب وکړي کله چې $n\to\infty$ وي.

اوس د $f(x)$ د تیلو ر سلسلې لپاره هغه کافي شرط فورمولبندي کوو، د کوم لپاره چې د تیلورسلسله نوموړې تابع ته متقاربه وي.

قضیه2. که چېري د $f(x)$ تابع د x_0-R,x_0+R په انټروال کې اختیاري ترتیب مشتقات ولري او د ټولو مشتقاتو مطلقه قیمت یې په عین عدد پورې محدود وي:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad (n=1,2,\dots) \qquad (17)$$

نو په نوموړي انټروال کې (12) انکشاف صحت لري.

ثبوت. د (x_0-R,x_0+R) په انټروال کې د (15) او (17) رابطو له مخې لرو چې:

$$|r_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (18)$$

څرنګه چې د

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

سلسله د هــر اختیاري x لپاره د دلامبرت د مشخصې له مخــې متقاربه ده نو د هراختیاري x لپاره

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

دی .له دې څخه د (18) رابطې له مخې د(x_0-R,x_0+R) په انټروال کې متقاربه ده.

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

د طاقت په سلسلو د اساسي ابتدايي توابعو تجزیه.

1. $f(x) = e^x$. دلته $f^n(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ دی. د نوموړي تابع لپاره د (17) شرط د$|x| < r$په هر اختیاري انتروال کې صدق کوي ځکه چې$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^r$ ،په دې ډول د (2) قضيې له مخې د

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (19)$$

فورمول د هر x لپاره صدق کوي.

2. $f(x) = \sin x$. دلته $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ او د k=2n لپاره $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = 0$ او د k=2n+1 لپاره $f^{(k)}(0) = (-1)^n$ دی. په دې ډول د حقیقي اعـــدادو په ټول محـــور $|f^{(n)}(x)| \le 1$ دی، بناء د 2 قضيې (4 بند) له مخې د

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

فورمول د هر x لپاره چې د $(-\infty,+\infty)$ په انتروال کې واقع وي ، صحت لري.

په مشابه ډول

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

فورمول د هر x لپاره چې د $(-\infty,+\infty)$ په انتروال کې واقع وي ، صحت لري.

3. د $f(x) = (1+x)^{\propto}$ تابع په نظر کې نیسو داسې چې $\propto$ یو اختیاري حقیقي عدد دی له دې ځخه د

$$f^{(n)}(x) = \propto(\propto-1)\ldots(\propto-n+1)(1+x)^{\propto-n}$$
$$f^{(n)}(0) = \propto(\propto-1)\ldots(\propto-n+1)$$

کولای شو ثابت کړو (دمثال په ډول د [6] لومړي جلد له مخې) د$|x| < 1$ لپاره د

$$(1+x)^{\propto} = 1 + \propto x + \frac{\propto(\propto-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\propto(\propto-1)(\propto-2)\ldots(\propto-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (20)$$

مساوات صدق کوي.

(20) سلسله د بینوم د سلسلې په نوم یادیږي.

که چیرې $\propto = m$ وي داسې چې m یو طبیعي عدد وي، نو (20) مساوات د نیوټن (I.Nemton)بینوم فورمول لاسته راځي.

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n-1}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$$

د بینوم سلسلې لپاره لاندې خاص حالتونه لیکو:

د $\propto=-1$ لپاره

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \tag{21}$$

2) د $\propto=\frac{1}{2}$ لپاره

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n \tag{22}$$

3)د $\propto=-\frac{1}{2}$ لپاره لرو چې:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n$$

4. د 0 څخه تر x پــورې انټروال کې $\left(|x|<1\text{ د}\right.$ لپاره$\left.\right)$، د (21) سلسلې څخه د انتګــرال نیــولو په طریقه د $f(x)=\ln(1+x)$ تابع تجزیه په لاس راوړو داسې چې:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n+1}\qquad(-1<x\le 1) \tag{23}$$

5 . د (21) سلسلې څخه د انتګرال نیولو په طریقه د $f(x)=\operatorname{arctg}x$ تجزیه په لاس راوړو، که چېرې په نوموړې سلسله کې x په x^2 عوض کړو.

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}\qquad(-1\le x\le 1) \tag{24}$$

د (23) او (24) سلسلو د تقارب نا حیه په قوسونو کې ښودل شوې ده.

6 .په تقریبي محاسبو کې د طاقت د سلسلو کار ول.

دطاقت سلسلې د محاسبه کولوښه وسیله ده. د نمونې په توګه د نوموړې سلسلې په مرسته د توابعو قیمتونه په تقریبي ډول محاسبه کېږي، همداسې معین انتګرالونه هــم د طاقت د سلسلو په مرسته محاسبه کېږي.

مثال1. د 0.0001 په دقت سره د $e^{0,2}$ قیمت محاسبه کړئ، د (19) فورمول څخه په استفاده لرو چې:

$$e^{0,2}=1+0,2+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}+\frac{0,2^4}{4!}+\cdots$$

دخطا د محاسبه کولو لپاره د سلسلې ټول هغه توانونه چې له پنځم حد څخه وروسته واقع دي، په نظر کې نه نیسو:

$$r_4=\frac{0,2^4}{4!}+\frac{0,2^5}{5!}+\frac{0,2^6}{6!}=\frac{0,2^4}{4!}\left(1+\frac{0,2}{5}+\frac{0,2^2}{5.6}+\cdots\right)<\frac{0,2^4}{4!}\left(1+\frac{0,2}{5}+\left(\frac{0,2}{5}\right)^2+\cdots\right)$$
$$=\frac{0,0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0,2}{5}}<0,0,0001$$

په دې مانا چې 0,0001 په دقت سره لرو.

$$e^{0,2}=1+0,2+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}=1,2+\frac{0,04}{2}+\frac{0,008}{6}\cong 1,2213$$

(په دې برخه کې کولای شو د حساب ماشین هم پکار یوسو)

مثال2. د$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ انتګرال د 0,0001 په دقت سره محاسبه کړئ. په (19) فورمول کې د x پر ځای د $-x^2$ په وضع کولو سره پلاس راوړو:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

که پورتنۍ سلسله په انتګرال کې وضع، او حد په حدیې انتګرال ونیسو په لاس راوړو:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}dx-\int_0^{\frac{1}{4}}x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}x^4dx-\frac{1}{3!}\int_0^{\frac{1}{4}}x^6dx+\cdots \qquad (25)$$
$$=0,25-\frac{1}{3.4^3}+\frac{1}{10.4^5}-\frac{1}{42.4^7}+\cdots$$

نوموړې متناوب العلامه سلسله دلایبنزشرط صدق کوي .

څرنګه چې:

$$\frac{1}{10\cdot 4^5}<\frac{1}{10240}<\frac{1}{10000}=0,0001$$

دی نو د مطلوب دقت د ترلاسه کولو لپاره لازم دی چې د (25) سلسلې دوه لومړني حـدونه په پام کې ونیول شي:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{x^2}}dx=0,25-\frac{1}{3\cdot 4^2}\approx 0,25-0,0052=0,2448$$

(په دې برخه کې هم کولای شو د حساب ماشین پکاریوسو).

§4.1 په مختلطې ناحیه کې د طاقت سلسلې.

1 د طاقت د سلسلو د تقارب دایره. فرضوو چې $z = x + iy$ د یو مختلط متحـــول کمیت وي. څرنګه چې د یو مختلط عدد د رفع کولو عملیه پر تامو مثبتو عددونو څرګنده ده نو کولای شو $w = z^n$ د مختلط متحول طاقت لرونکې تابع په پام کې ونیسو داسې چې n یو طبیعي عدد دی. دلته مستقل متحول او تابع دواړه مختلط قیمتونه اخلي. د مختلط متحول توابع په دې کتاب کې په خاص ډول تر مطالعې لاندې، نه نیول کېږي (د مثال په ډول دا ډول محاسبه د [10] په کتاب کې ترسره شوې ده) مونږ د ساده توابعو پېژندنه کوو کومې چې د طاقت د سلسلو د خواصو لپاره اساس جوړوي.

تعریف . لاندې سلسله

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots \tag{1}$$

د $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ په ضریبونوسره د طاقت د سلسلې په نوم یادیږي، داسې چې $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ په عمومي ډول مختلط عددونه او z مختلط متحول دی.

د آبل قضیه. که چېرې (1)د طاقت سلسله د $z = z_0 \neq 0$ لپاره متقاربــه وي نو د z ټولـــو هـــغو قیمتونو لپاره چې د $|z| < |z_0|$ شرط صدق کــوي، مطلقاًمتقاربه ده. که چېرې د$z = z_0$ لپـــاره د طاقت سلسله متباعده وي نو د z د ټولو هغو قیمتونو لپاره چې د $|z| > |z_0|$ شرط صدق کوي، متباعــده ده.

ثبوت. د قیقاً د هغه ثبوت په شان دی کوم چې د آبل قضیه د حقیقي متحول لپاره په اثبات رسیدلی وو.

هغه حالت په پام کې نیسو چې په کې (1) سلسله د z د خلاف د صـــفر یو قیمت لپاره ، متقــاربه او د نورو لپاره متباعده ده، (دریم کلاس سلسله). د آبل د قضیې څخه دې پایلې ته رسیږو چې د R یو مثبت عدد شتون لري(داعــدد د (1) سلسلې د تقارب شعــاع رابښيي) داسې چـــې $|Z| < R$ لپاره سلسله مطلقــاً متقاربه او د $|Z| > 0$ لپاره سلسله متباعده ده.

$|Z| < R$ دایره د (1) طاقت لــرونکې سلسلې لپاره د تــقارب دایرې په نـــوم یادیږي($|Z| < R$) یو دایره ده څکه چې $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ دی. که چېرې (1) سلسله د z د ټولو قیمتونو لپاره متقاربه وي (دویم کلاس سلسله) نـــو وایي چې د تقارب شعاع یې$R = +\infty$ ده د $z = 0$ لپاره (1) ډول طاقت لرونکې

سلسلې متقاربې دي. کــه چېرې (1) سلسله يوازې د $z=0$ لپاره متقــاربه وي (لــومړي کلاس سلسله) نو دهغې د تقارب شعاع، $R=0$ ده.

مثال. د

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad (2)$$

$$\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad (3)$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad (4)$$

سلسلې د z هر اختياري قيمت لپاره مطلقاً متقاربې دي. حقيقتاً لکه څنګه چې د طاقت سلسلې د اعدادو د محور پر مخ متقاربې دي بناً د آبل د قضيې له مخې نوموړې سلسلې د هر مختلط z لپاره مطلقاً متقاربې دي. په پايله کې د (2)-(4) سلسلو لپاره $R=+\infty$ ده.

2 . د مختلط متحول طاقت نما(اکسپونانشيل) او مثلثاتي توابع.

د e^z تابع چې z يو مختلط متحول دی د

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad (5)$$

سلسلې د حاصل جمع په شکل تعريف کېږي.

د z_1 او z_2 هر اختياري مختلط عدد لپاره لاندې فورمول صحت لري:

$$e^{z1}\cdot e^{z2}=e^{z1+z2} \qquad (6)$$

حقيقتاً، څرنګه چې (2) سلسله د z د هر قيمت لپاره مطلقاً متقاربه ده، نو مونږ کولای شو د مطلقاً متقارب سلسلو لپاره د دمطلق ضرب خاصيت تطبيق کړو په لاس راوړو چې:

$$e^z\cdot e^w=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=1+(z+w)+\frac{(z+w)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z+w)^n}{n!}+\cdots=e^{z+w}$$

د(6)ثبوت شوي فورمول څخه داپایله په لاس راځي چې$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ له دې څخه $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ دی. په دې مانا چې د e^z تابع د z د هر قیمت لپاره خلاف صفر ده .حقیقتاً، که چېرې $e^{z_0} = 0$ رابطه صحت ولري نو:

$$1 = e^{z_0 - z_0} = e^{z_0} \cdot e^{-z_0} = 0 \cdot e^{-z_0} = 0$$

په لاس راوړو.

د $\sin z$ او $\cos z$ توابع چې z یو مختلط عدد وي د

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{7}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{8}$$

سلسلو د حاصل جمعې په شکل تعریف کېږي. څرګنده ده چې

$$\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z \tag{9}$$

د(5) ، (7) او (8) فورمولونو له مخې په مطلقاً متقاربو سلسلو کې کولای شو د حدونو د ځایونو د تغیرولو خاصیت په پام کې ونیسو لرو چې

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2z^2}{2!} + \frac{i^3z^3}{3!} + \frac{i^4z^4}{4!} + \frac{i^5z^5}{5!} + \frac{i^6z^6}{6!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \cos z + i \sin z$$

په دې ډول

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{10}$$

له دې څخه د (9) رابطې په پام کې نیولو سره

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{11}$$

د (10) او د (11) مساواتونو د جمع کولو او په 2 باندې د ویشلو په صورت کې حاصلو چې

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{12}$$

په مشابه ډول

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{13}$$

(10)، (12) او (13) فورمولونه د ایلر د فورمولونو په نوم یادیږي. د (16) او (10) فورمولونو د تطبیقولو په صورت کې لرو:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

په دې مانا چې دe^z تابع د $2\pi i$ پریود لرونکې ده.

په پاې کې د(10)فورمول دتطبیقولو په صورت کې د $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ مختلط عدد د مثلثاتي شکل څخه کولای شو د یو مختلط عدد لپاره د $z = re^{i\phi}$ طاقت نما شکل په لاس راوړو.

§ 5.1 مثلثاتي سلسلې.

1.د مثلثاتي توابعو سیستم او د هغوی قایم والی.

د $\varphi(x)$ او $\psi(x)$ توابعوته د [a,b] په قطعه خط بانـدې یو پر بل عمـود بللې کېږي کـه چېـرې $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ وي.

د [a,b] پر قطعه خط د توابعو سیستم ته قایم سیستم ویل کېږي که چېرې د نوموړې سیستم هره دوه تابع په نوموړې قطعه خط باندې یوه پر بل عمودې وي.

مثال. د توابعو مثلثاتي سیستم:

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx \ldots \qquad (1)$$

د $[-\pi,\pi]$ پر قطعه خط قایمې دي.

حقیقتا، که چېرې $k\neq0$ او تام عدد وي نو.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k x\, dx = \frac{1}{k}\sin k \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin k x\, dx = -\frac{1}{k}\cos k \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

مانا یې داده چې د (1) سیستم هره یوه تابع په نورو ټولو توابعو عموده ده.

اوس داوایوچې دm اوnهر طبیعي عدد لپاره د$\sin nx \cos mx\ (m \neq n)$، $\cos nx \cos mx\ (m \neq n)$ او$\sin nx \cos mx\ (m \neq n)$حاصل ضرب د ټل لپاره کولای شو د $\sin kx$ او یا $\cos kx$ توابعو د حاصل ضرب په شکل ولیکو. بناً د نوموړې حاصل ضرب انتګرال د $-\pi$ څخه تر π پورې د صفر سره مساوي دي.

د (1) سیستم لپاره یو بل خاصیت عبارت دی له:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi \text{ او } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi \qquad (4)$$

په داسې حال کې چې n يو اختياري عدد دی.

د فوريه (J.B.J.Fourier) سلسله. د

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

په شان د توابعو سلسله د مثلثاتي سلسلې په نوم يادېږي. او يا په لنډ ډول د

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (5)$$

په شان سلسله داسې چې $(n = 1,2,\ldots)$ a_0, a_n, او b_n ثابت عدودنه وي او د مثلثاتي سلسلې د ضريبونو په نوم يې ياد وي.

دسلسلې څخه دباندې حد د $\frac{a_0}{2}$ په شکل ليکل شوی دی، ځکه چې هغه به په يوازينې شکل په راتلونکې فورمول کې په لاس را وړل شي.څرنګه چې د (5) سلسلې حدونو دپريود عمومي شکل $T=2\pi$ دی نود سلسلې حاصل جمع، که چېرې متقاربه وي، هم پريود ي شکل لري او پريود يې 2π دی. فرضوو چې د $f(x)$ پريوديکه تابع د 2π په پريود د (5) سلسلې حاصل جمع وي.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cons} x + b_n \sin nx \qquad (6)$$

په دې حالت کې وايي چې د $f(x)$ تابع په مثلثاتي سلسله تجزيه شوې ده. که چېرې نومــوړې سلسله د $[-\pi, \pi]$ پر قطعه خط منظماً متقاربه وي دابه وښيو چې څنګه کولای شو نوموړې ضريبونه تعيين کړو.

څرنګه چې کولای شو منظمه متقاربه پر يو قطعه خط دتوابعو سلسله جمله په جمله انتګرال ونيسو نو د (2) او (3) فورمولونو په پام کې نيولو سره لرو.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \text{ دې له ځايه } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi$$

اوس (6) سلسله په $\cos kx$ (k يو مشخص طبيعي عدد وی) کې ضربوو. بيا هم مونږ د $[-\pi,\pi]$ پر قطعه خط يوه منظمه متقاربه سلسله په لاس راوړو .

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nk \cos kx + b_n \sin nx \cos kx$$

پورته سلسله د [π,π-] پر قطعه خط انتګرال نیسو او په لاس راوړو.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k cos^2 kxdx$ د (4) فورمول څخه په استفاده $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = a_k\pi$ له دې څخه

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

په مشابه ډول که د (6) رابطې دواړه خوا په $\sin kx$ کې ضرب کړو او د π-څخه تر π پورې یې انتګرال ونیسو، په لاس راوړو.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin k\ xdx$$

په دې ډول که چېرې د f(x) پریود یکه تابع د2π په پریود د $]-\pi,\pi[$ پر قطعه خط د (5) منظمې متقاربې مثلثاتي سلسلې مجموعه وي، نو د نوموړې سلسلې ضریبونه د لاندې فورمولــونو په واسطه ټاکل کېږي:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\, ,\, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cosnxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \dots \qquad (7)$$

او دا f(x) تابع لپاره د فوریه د ضریبونو په نوم یادوي. (5) سلسله د نوموړې ضریبونو په درلودلو سره د f(x) تابع د فوریه سلسلې په نوم یادیږي (ژان باتست ژوزف فوریه (1768-1830) فرانسوي ریاضي پوه او فزیک پوه).

3. د فوریه سلسلې مختلط شکل. نظر د ایلر فورمولونو ته

$$cosnx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$$

په (6) سلسله کې د نوموړې افادو په وضع کولو سره داسې حاصلوو:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right)$$

که

$$\frac{a_0}{2} = c_0\, , \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \qquad (8)$$

وضع کړو، په دې صورت کې

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$$

او یا په لنډ ډول:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{9}$$

نوموړې سلسله د فوریه سلسلې مختلط شکل رابنیي.

دc_n او c_{-n} ضریبونه د انتګرالونو په واسطه ارایه کوو. د (7) فـــورمولونو په استعمالوو، د(8) فورمولونه کولای شو داسې ولیکو:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx (n = 0,1,2,\dots)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx\ (n = 1,2,\dots)$$

4. د فوریه سلسلې متقاربیت.

د (7) فورمول په اثبات کې مخکې تر مخکې دا فرض شوي وو چې د f(x) تابع په (6) منظمې متقاربې مثلثاتي سلسلې تجزیه کېږي. که چېرې فرضیه قبوله نه کړو او یوازې دا فرض کړو چې د (7) د لومړۍ برخې ټول انتګرالونه د f(x) تابع لپاره شتون ولري. نو مونږ کولای شو د نوموړو فورمولونو په ذریعه د a_0, a_nاو b_n ضریبونه محاسبه او (5) مثلثاتي سلسله تشکیل کړو چې د نوموړې تابع لپاره د فوریه مثلثاتي سلسلې څخه عبارت ده. آیا په دې شکل جوړه شوي فوریه سلسله متقاربه ده؟ که چېرې متقاربه وي نو آیا مونږ مستقیماً په دې مطمین کېدلای شو چې داسلسله د f(x) تابع ته متقاربه ده، د کومې لپاره چې د سلسلې ضریبونه محاسبه شوي دي؟

معلومیږي چې د فوریه سلسلې تقارب یوې ورکړل شوي تابع ته، د توابعو په کافي اندازه لوی صنف لپاره صدق کوي.

د فوریه په سلسله کې د یوې تابع د ارایه کولو کافي شرط فورمول بندي کوو. فرضوو چې د f(x) تابع د $[-\pi,\pi]$ پر قطعه خط کې د دریچلې (پتر دریچلې (P.G.L.Dirichlet) (1805-1859) جرمني ریاضي پوه) شرایط صدق کوي. په دې مانا چې نوموړې تابع په ورکړ شوي قطعه خط متمادي او یا قسماً متمادي (یعنې د معین شمیر لومړي نوع غیرمتمادي نقطولرونکې ده)،یونواخت یا قسمأیونواخت

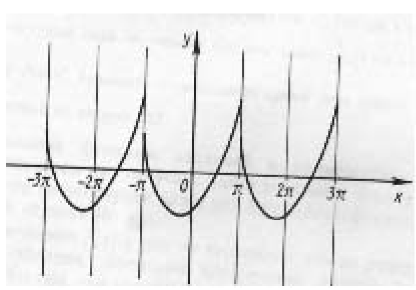
(یعنی قطعه خط کولای شوپه معین شمیر قطعه خطونوو ویشو داسې چې په هر یوه ددې قطعه خطونو به نوموړې تابع یو نواخت متزایده یا یونواخت متناقصه او یا به ثابته وي) ده.

د دریچلې قضیه. که چېرې د f(x) تابع د [−π,π] پر قطعه خط د دریچلې شرطونه صدق کړي،نو د [−π,π] پر قطعه خط کې نوموړې تابع لپاره د فوریه سلسله متقاربه او متمادي نقطو لپاره د نوموړې سلسلې حاصل جمع د f(x) سره مساوي ده، همداسې د x_0 غیرې متمادي نقطې لپاره د نوموړې سلسلې حاصل جمع د $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$ او د $[-\pi,\pi]$ په انجامي نقطو کې د $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$ سره مساوي ده.

ثبوت دې د [12] کتاب په II جلد کې دې وکتل شي.

د دریچلې قضیې د فورمول بندۍ په هکله یو لږ تبصرې په پام کې نیسو. د (5) سلسلې حدونه د 2π پریود سره پریودیکې توابع دي. بنا پردې که (5) سلسله د [−π,π] پرقطعه خط متقاربه وي نوداسلسله دهرحقیقی قیمت لپاره متقاربه اود (5) سلسلې دحاصل جمعې هغه قیمتونه چې له [−π,π] څخه نیول شوي دي، په پریودیکې ډول د هر 2π وروسته څخه تکرارېږي. په دې ډول که چېرې مونږ د فوریه سلسله د [−π,π] قطعه خط څخه دباندې په پام کې ونیسو، نو ضرور باید فرض کړو چې د f(x) تابع د نوموړې قطعه خط څخه دباندې د 2π پریود په درلودلو سره په متناوب ډول انکشاف مومي (3 شکل). ددې ټکې په پام کې نیولو سره د قطعه خط انجامي نقطې x=π او x=−π د تابع دتداوم لپاره غیر متمادي نقطې دي که چېرې، $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$ وي.

په (3) شکل کې یوه تابع چې د [−π,π] پر قطعه خط متمادي ده، رسم شوې، داچې د f(x) تابع قیمتونه د [−π,π] قطعه خط په انجامي نقطو کې یو پر بل منطبق نه دي.



(3شکل)

نو متناوب امتداد يې يوه غير متمادي تابع ده.

مثال. د $f(x) = x$ تابع د دريچلې قضيې شرطونه صدق کوي نو کولای شو د فوريه په سلسله يې تجزيه کړو. د (7) فورمولونو له مخې لرو چې:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\, x\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - 1/n\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \ = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx = -1/\pi\, x\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}$$

په نتيجه کې د دريچلې د قضيې له مخې د $-\pi<x<\pi$ لپاره.

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right)$$

د $x=-\pi$ او $x=\pi$ په نقطو کې د فوريه سلسلې مجموعه د دريچلې دقضيې له مخې د $f(x) = x$ تابع د قيمتونو سره مطابقت نه کوي، بلکې:

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

دپريوديک حالت له مخې د سلسلې د حاصل جمع گراف په 4 شکل کې ښودل شويدی.

5 .د ساينونو او کوساينونو سلسلې. که چېرې د $f(x)$ تابع د $[-\pi,\pi]$ په قطعه خط يوه جفته تابع وي يعنې $f(-x) = f(x)$، $x \in [-\pi,\pi]$ نو د هغې لپاره د فوريې د سلسلې د b_n ضريب د صفر سره مساوي دی. په رښتيا

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\right).$$

په لومړي انتگرال کې $x = -t$ عوض کوو، داچې $f(x)$ جفته او د ساين تابع يوه طاقه تابع ده، بناً په لاس راوړو.

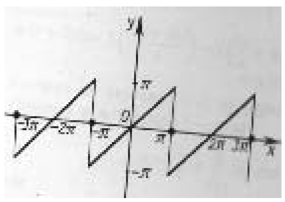
$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\, dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$$

له دې او د مخکنيو مساواتونو څخه په لاس راځي چې د ټولو n=1,2,... له پاره $b_n = 0$ دی.او د a_n ضريبونه (داهم په اسانی ثبوتيږي) کولای شو د لاندې فورمول په واسطه محاسبه کړو.

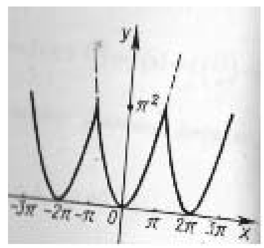
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f(x)}\, dx \quad , \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f(x)} \cos nx\, dx \ (n = 1,2, \dots)$$

په مشابه ډول ثابتږي ، که چېرې $f(x)$ يوه طاقه تابع وي نو

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f(x)} \sin nx \ dx \ (n = 1,2, \dots)$ او $a_n = 0(n = 0,1,\infty..)$. پــه دې ډول کـــه چــېــرې $f(x)$ يوه جفته تابع وي نو د هغې لپاره د فوريه سلسله يوازې ساينونه په برکې لري (په ساينونو غير کامله سلسله).



(4شکل)



(5 شکل)

مثال. $f(x) = x^2$ تابع په نظر کې نيسو.نوموړې تابع د ديريچليې د قضيې ټول شرطونه صدق کوي. په پايله کې کولای شو هغه د فوريه په سلسله تجزيه کړو. څرنګه چې نوموړې تابع جفته ده نو:

$$b_n = 0, (n = 1,2, \dots), a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int \int_0^{\pi} x^2 \ \cos nx\, dx = 2/\pi(\frac{1}{n}x^2 \ \sin nx\Big|_0^{\pi} \ -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx) = (-1)^n\, \pi\, \frac{4}{n^2}.$$

مانا يې داده چې د ديريچلې د قضيې له مخې د π>x>π– لپاره

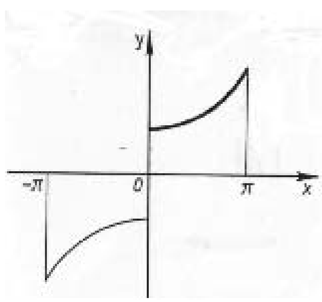
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(cosx - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

دا تجزيه د [π,π–] ټولې خطي قطعې لپاره صحيح ده، ځکه چې د x=–π او x=π په انجامي نقطو کې د سلسلې حاصل جمع د د ريچلې د قضيې له مخې مساوي په $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0) = \frac{1}{2}(\pi^2 + \pi^2) = \pi^2$ ده. دا چې د سلسلې حاصل جمع پريوديکي تابع ده نو دهغې ګراف د 5 شکل په شان رسم شوې دی.

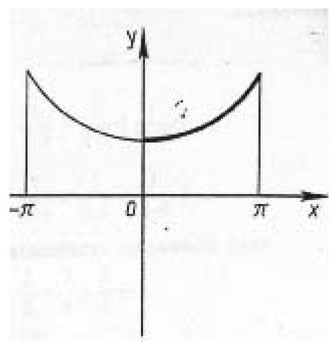
6. په یوې ورکړ شوې خطي قطعې کې د فوریه په سلسله دیوې تابع تجزیه کول په ساینونو او کوساینونو باندې. دساینو او یا کوساینو په سلسلو د $f(x)$ تجزیه کول چې د [0,π]

پر قطعه خط کې ورکړ شوې، یوه له مطرح شوو مسایلو څخه ده.ددې لپاره چې $f(x)$ د کوساینوپه سلسله تجزیه شي کولای شو لاندې طریقه په پام کې ونیسو. د f(x) تابع ته د تعریف په ناحیه داسې توسعه ورکوو چې د $-\pi \le x \le \pi$ لپاره $f(x) = f(-x)$ شي. په پایله کې یوه جفته تابع پلاس راځي (په دې حالت کې وایې چې د $f(x)$ تابع ته د [0,π] پر قطعــه خــط په جفت ډول انکشاف ورکړ شــوې دی (6 شکل). نو پراختیا موندلې جفتې تابع له پاره ټولې هغه مخکینۍ ادعا ګانې صدق کوي او د فوري ضریبونه یې د لاندې فورمول له مخې محاسبه کېږي.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, (n = 0,1,2 \ldots) \quad b_n = 0 (n = 1,2, \ldots)$$



(7 شکل)



(6 شکل)

که په دې فورمولونو کې د f(x) تابع قیمتونه یوازې د [0,π] پر قطعه خط په پام کې نیول شوې وي.په نتیجه کې د عملي محاسبو په صورت کې په جفت ډول انکشا ف کولی شو تر سره نه کړو.

که چېرې وغواړو د $f(x)$ تابع ته نظر ساینونو ته انکشاف ورکړو (7 شکل)،نود$f(x)$تابع باید داسې تعریف کړو $f(x) = -f(x)$ ،کله چې$-\pi \le x < 0$ وي.نو مونږ یوه طاقه تابع حاصلوو (وایې چې د $f(x)$ تابع په طاق ډول پراختیا موندلې). په دې صورت کې دطاق توب مفهوم لپاره باید

$f(x)=0$ وي. په طاق ډول انکشاف ورکولو په صورت کې یو ځل بیاد 5 بند محتویات د تطبیق وړ دي او په پایله کې د فوریه سلسلې ضریبونو لپاره لاندې فورمولونه صحت لري:

$$a_n = 0, (n = 0,1,2, \dots), b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f(x)} \sin nx \, dx (n = 1,2, \dots)$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع قیمتونه یوازې د [0,π] په انټروال کې شامل دي نو د کوساینونو د سلسلې په شان ممکن په عمل کې د $f(x)$ تابع انکشاف د [0,π] قطعه خط څخه د [π,0-] قطعه خط ته ممکن نه وي.

7. په یوه اختیاري قطعه خط کې د فوریه سلسله. که و غواړو د 2ℓ پریود لرونکې $f(x)$ تابع په مثلثاتي سلسله تجزیه کړو داسې چې د $[-\ell, \ell]$ په قطعه خط کې د دریچلیت شرطونه صدق کړي، نو $x = \frac{\ell}{\pi}t$ وضع کوو. په پایله کې د $\varphi(t) = f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$ تابع چې پریود، یې 2π دی پلاس راوړو.

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{\ell(t+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{\ell t}{\pi} + 2t\right) = f(x+2\ell) = f(x) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \varphi(t)$$

نوموړې تابع د [π,π-] پر قطعه خط د دریچلې شرط صدق کوي بناء پردې د [π,π-] په قطعه خط:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n const + b_n \sin nt)$$

ده، داسې چې:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt + dt \; (n = 0,1,2 \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt + dt \; (n = 1,2 \dots)$$

د x اصلي متحول ته دګرځیدو په صورت کې د $[-\ell, \ell]$ پر قطعه خط لاسته راوړو.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi nx}{\ell}\right) \qquad (10)$$

داسې چې:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{\pi nx}{\ell} dx \;\; (n = 0,1,2, \dots) \qquad (11)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{\pi nx}{\ell} dx \;\; (n = 1,2, \dots) \qquad (12)$$

د $n = (1,2,\dots)$ ، a_n, a_0 او b_n ضریبونه د $f_{(x)}$ تابع لپاره د فوریه ضریبونه دي او (10) سلسله د $f(x)$ تابع لپاره د فوریه سلسله ده.

که چېرې x د $f(x)$ تابع د غیر متمادیت نقطه وي نو په (10) مساواتوکې د $f(x)$ پر ځای $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ راوړل کېږي.

تمرینونه.

د سلسلو حاصل جمع پلاس راوړئ؟

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ $[2]$

2. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$ $[\frac{3}{4}]$

3. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

4. $\frac{1}{1-3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

5. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\cdots$ $\left[\frac{11}{8}\right]$

د سلسلو تقارب وڅېړئ.

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots$ [متباعده ده]

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ [متباعده ده]

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+n)^n}$ [متباعده ده]

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+$ [متباعده ده]

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-2^n}$ [متقاربه ده]

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n(n+2)}$ [متباعده ده]

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ [متباعده ده]

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-2n}}$ [متباعده ده]

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ [متقاربه ده]

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ [متقاربه ده]

16$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{3^n}$,$0<\alpha<3\pi$. [متقاربه ده]

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ [متقاربه ده]

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ [متقاربه ده]

19. $\sum_{n=1}^{\infty}n.\tan\frac{\pi}{2^{n-1}}$ [متقاربه ده]

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$ [متقاربه ده]

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ [متقاربه ده]

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ [متباعده ده]

لاندې سلسلې د مطلق او شرطي تقارب لپاره وڅیړئ.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ [متقاربه ده]

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$ [متقاربه ده]

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$ [متباعده ده]

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$ [متقاربه ده]

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)^2}{n^2+1}$ [متباعده ده]

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$ [متقاربه ده]

د سلسلو د تقارب ناحیه پیداکړئ؟

29. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n$ [$|x|<\frac{1}{3}$]

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 x^n$ [$|x|<1$]

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ [$|x|<1$،د $x=1$ لپاره شرطاً متقاربه ده]

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{(n+1)}$ [$|x|<1$]

33. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{e^2}$ $[|x|<e]$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.7^n}$ [$|x|<7$], د $x = -7$ لپاره شرطاً متقاربه ده]

35. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ $[-\infty<x<+\infty]$

لاندې توابع د x د توانو په سلسله تجزیه کړئ.

36. e^{-x^2} $$\left[\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\ ,\quad |x|<+\infty\ \right]$$

37. x^2e^{-2x} $$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{2n}}{n!}\ ,\quad |x|<+\infty\right]$$

38. $sinx^2$ $$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}\ ,\quad |x|<+\infty\right]$$

39. $\cos^2 x$ $$\left[\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\ ,|x|<+\infty\right]$$

40. $\frac{1}{1-x^2}$ $\left[\ \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ ,|x|<1\right]$

41. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left[\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2x-1}}{2n+1}\ ,|x|<1\right]$

42. $\frac{1}{(1-x)^2}$ $$\left[\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ ,|x|<1\ \right]$$

43. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $$\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)!}x^{2n}\ ,\qquad |x|<1\right]$$

44. $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ $$\left[\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}\ ,|x|<2\ \right]$$

د مربوطه سلسلو په استعمال سره لاندې محاسبې د 0,001 په دقت محاسبه کړئ؟

45. $\sqrt{e}$ [1.649]

46. $sin18^0$ [0.309]

47. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ [0.747]

48. د [−π,π] پر قطعه خط د $f_{(x)} = |x|$ تابع د فوریه په سلسله تجزیه کړئ.

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\right]$$

49. د [−π,π] پر قطعه خط د $f_{(x)} = \pi - x$ تابع د فوریه په سلسله تجزیه کړئ؟

$$\left[\pi + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} sin\, kx\right]$$

دويم فصل

د څو متحوله توابعو ديفر نسيالي محاسبه

1.2§ څو متحوله توابع.

د توابعو لميټ او متماديت.

1 .د څو متحوله توابعو تعريف. د يو متحوله توابعو مفهوم په يوازې ډول نه شي کولای ټول هغه روابط چې په طبيعت کې شتون لري احتوا کړي. حتی تردې چې په ډېرو ابتدايي مسألو کې له داسې کميتونو سره مخامخ کېږو چې مقدار يې د څو کميتونو د مقدارونو د مجموعې په واسطه تعنيرږي.

مثال1. د يو مستطيل مساحت S چې داضلاعو اوږدوالی يې x او y دی د s=x.y فورمول په واسطه ټاکل کېږي. يعنې د s کميت مقدار د xاو y کميتونو د مقدارونو له مخې ټاکل کېږي.

مثال 2. د يو مکعب مستطيل حجم v چې د اضلاعو اوږدوالي يې x,y او z وي د v=xyz فورمول په واسطه ټاکل کېږي، يعنې د v کميت مقدار د y,x او z کميتونو د مقدارونو له مخې ټاکل کېږي.

مثال 3.ديو معين مقدار ګاز مطلقه حرارت T، فشار P ، حجم V د منديليف –کلا پيرون فورمول PV=RT پورې تړلی دی، په داسې حال کې چې R يو ثابت دی.

مثال 4. د برقي جريان په واسطه د توليد شوي حرارت مقدار Q د U ولتاژ، I جريان او t وخت پورې تړلی او ضمناً Q=0,24uIt دی يعنې د Q کميت مقدار د I,U او t کميتونو د مقدار له مخې ټاکل کېږي.

په دې ډول د مناسبوي رابطو د پيژندنې لپاره د څو متحوله توابعو د مفاهيمو پيژندل لازم دي.

دZ متحول ته د x او y مستقلو متحولينو تابع وايي، که چېرې د x او y هره جوړه د کومې طريقې يا قانون له مخې د Z له يوه قيمت سره مطابقت وکړي.

د x او y جوړو د قيمتونو مجموعې G ته د تابع د تعريف يا د موجوديت نا حيه او د هغې قيمتونو مجموعې ته چېz يې د تابع د تعريف په ناحيه کې اخلي د z تابع د قيمتونو نا حيه وايي.د x

او y متحولینو ته د z تابع ارگومنتونه ویل کیږي. په سمبولي ډول یوه دوه متحوله تابع په $z=\varphi(x,y)$ او $z=z(x,y)$ یا $z=f(x,y)$، $z=F(x,y)$ او داسې نورو ډولونو سره ښودل کېږي.

واضح ده چې د x او y عددونو هره جوړه د xoy په مستوي کې د M نقطې موقعیت د x او y مختصا تو سره ښيي، او برعکس.په دې ډول د $Z=f(x,y)$ دوه متحوله تابع کولای شو د نقطو د یوې تابع په شان په پام کې ونیسو، او د $z=f(M)$ په شکل ولیکو و یا یې د یوې سکالري تابع په شان چې ارگومنت یې د $\bar{r}$ یو وکتور وي ، او د $f=f(\bar{r})$ په شکل لیکل کېږي، وښیو.

د یو متحوله تابع په شان د دوه متحوله تابع ښودنه په څوډوله ده.په دې کتاب کې یې ترټولو مهمه ښودنه، تحلیلی ښودنه ده چې یکې تابع د یو فورمول په واسطه ورکول کېږي. د تابع د تعریف ناحیه، د مستوي د هغو نقطو له مجموعې څخه عبارت ده چې دافورمول په کې مفهوم ولري.

مثال 5 . د $Z=1-x-y$ تابع د تعریف ناحیه د (x,y) جوړه عددونو مجموعه ده یعنې د xoy مستوي دی او د قیمتونو ناحیه یې $(-\infty,+\infty)$ انتروال دی.

مثال 6 .د $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ تابع د تعریف ناحیه د xoy مستوي د ټولو هغو نقطو مجموعه ده چې د قیمتونو ناحیه یې د $[0,\infty]$ انتروال دی.

مثال7. د $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ تابع د تعریف ناحیه د مستوي د هغو نقطو مجموعه ده چې مختصات یې د $1-x^2-y^2\geq 0$ غیر مساوات صدق کړي (دلته د Z یوازې حقیقي قیمتونه په پام کې نیول کېږي) او یا د $x^2+y^2\leq 1$ غیرمساوات، یعنې د دایرې په شمول هغه دایروي سطح ده چې د $x^2+y^2=1$ دایرې په واسطه احاطه شوې ده (تړلې دایروي سطح) د نوموړې تابع د قیمتونو ناحیه د $[0,1]$ قطعه خط جوړوي.

مثال8. د $Z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ تابع د موجودیت ناحیه هغه دایروي سطح ده چې د $x^2+y^2=1$ دایرې په واسطه احاطه شوې او د دایرې محیط په کې شامل نه دی. (خلاصه دایروي سطح) او د تابع د قیمتونو ناحیه یې د $[0,+\infty)$ انتروال دی.

د پورتني مثالونو څخه معلوميږي چې د يوې دوه متحوله تابع د تعريف ناحيه کېداى شي د xoy ټوله مستوي او يا د هغې يوه برخه وي.

ثرګنده ده چې د oxyz په فضا کې د (x;y;z) هر درې عددونه د M(x;y;z) له يوې نقطې سره مطابقت کوي (په دې مانا چې د $(\bar{r}=O\overline{M})$ شعاع وکتور دی) او برعکس. په مشابه ډول ددوه متحوله توابعو په شان کولای شو، درې متحوله تابع $U=F(x;y;z)=F(M)=F(\bar{r})$ تعريف کړو. د درې متحوله توابعو د تعريف ناحيه کېداى شي ټوله فضا او يا د هغې يوه برخه جوړه کړي.

په مشابه ډول کولای شو څلور متحوله او څو متحوله توابع تعريف کړو.

په راتلونکې کې موږ په مفصل ډول دوه متحوله توابع تر مطالعې لاندې نيسو، دا ځکه چې د څو متحوله توابعو ټول مهم حقايق په دوه متحوله توابعو کې تر کتنې لاندې نيول کېږي. د درې متحوله او تر هغې د زياتو متحولينو توابعو کې لاسته راغلې پايلې او تعريفونه د تخنيکي ستونزو له امله يوازې د قانون حيثيت لري.

2 . د دوه متحوله توابعو هندسي تعبير. دوه متحوله تابع کولای شو رسم کړو. د $Z=f(x,y)$ تابع ګراف چې د G په ناحيه کې تعريف شوې، په فضا کې د (x;y;z) هغو نقطو مجموعې ته وايي چې د نوموړو نقطو لپاره (x,y) د G په ناحيه کې واقع او $Z=f(x,y)$ وي. په اکثرو ساده حالتونو کې دا ډول ګرافونه يو لړ سطحې راښيي (۴ فصل وګورئ). د مثال په توګه د1 بند 5 مثال کې د تابع ګراف د مستوي څخه عبارت دی کوم چې د (1,0,0)، (0,1,0) او د (0,0,1) له نقطو څخه تيرېږي د تابع ګراف د الپتيکي پارابولوئيد څخه عبارت دی.

خو په اکثرو مسايلو کې د دوه متحوله توابعو د ګراف رسمول خورا مشکل دي. په دې برخه کې د دوه متحوله توابعو مناسب هندسي تصور په پام کې نيول کېږي. کوم چې له درې بعدي فضا څخه ونه وزي. داډول رسمونه د سويې خطونو په نوم يادېږي. د xoy په مستوي کې د (x,y) ټولې هغې نقطې چې په کې د $f(x,y)$ تابع يوازې يوه قيمت اخلي د مثال په ډول د C قيمت، په نښه کوو او يا په بل عبارت د (x,y) ټولې هغه نقطې په نښه کوو د کومو لپاره چې د:

$$f(x,y)=C \qquad (1)$$

رابطه صدق کړي. ددې نقطو مجموعه د $f(x,y)$ تابع لپاره د سويې د خط په نوم ياد وي او څرګنده ده چې (1) معادله د نوموړي خط معادله ده. C ته د مختلف قيمتونو په ورکولو د هر ځل لپاره يو خط چې معادله يې (1) ده په لاس راوړو. په پايله کې مجموعه د خطونو په لاس راځي چې نوموړي مجموعه په څرګند ډول د $f(x,y)$تابع رسموي. معمولاً د سويې د خطونو ترڅنګ د Cهغه قيمتونه په پام کې نيول کېږي، کوم چې نوموړي خط د هغې په مرسته تشکېليږي.

مثال. د

$$Z = x^2 + y^2 \tag{2}$$

تابع لپاره د سويې خطونه په لاس راوړئ.

د (2) سطح د Z=C (0< C<+∞) مستوي په واسطه قطع کوو. د C په مختلفو قيمتونو مثلا د C=0,1,2,... لپاره د سويې خطونو مجموعه په لاس راوړو چې هره يوه يې يوه دايره ده. د C=0 لپاره دايره د (0,0) نقطه ښيي (8 شکل).دا چې د سويې خطونه د هغو دايرو څخه عبارت دي، کوم چې مرکزونه يې د وضعيه کمياتو په مبداء کې واقع دي، نو دا پايله تر لاسه کيږي چې د تابع ګراف بايد يوه دوراني سطح وي، چې د OZ محور په شاوخوا يې دوران کړی وي. څرګنده ده چې د تحليلي هندسې له مخې (2) معادله د دوراني پارابولوييد سطح ده.

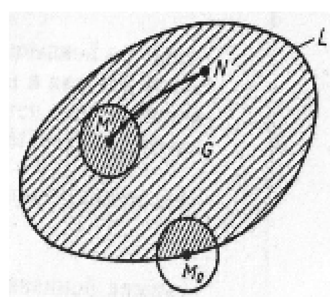
د جغرافيې په نقشو کې د بحرونو ژورې نقطې او د غرونو لوړې څوکې د سويې خطونو په واسطه ښودلې کيږي. په مشابه ډول په ځمکه کې د مختلفو موادو توزيع کېدل طبقات، د شپې او ورځې متوسط حرارت او داسې نورو کمياتو د ښودلو لپاره خطونه په کار وړل کېږي.

3. د دوه متحوله توابعو لميټ. د M(x,y) نقطو مجموعه چې د x او y مختصات يې د $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ يا په لنډ ډول $MM_0 < \delta$غير مساوات صدق کړي،د $M_0(x_0,y_0)$ نقطې د δ مجاورت په نوم يادېږي. يا په بل عبارت د M_0 نقطې δ مجاورت د هغو نقطو مجموعه ده، چې د M_0 په مرکز او δ شعاع د دايرې په منځ کې واقع وي.

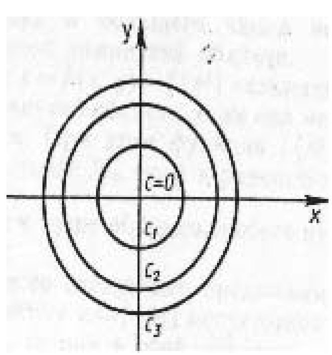
تعریف.که M د $M_0(x_0,y_0)$خواته تقرب وکړي، په لنډ ډول د $M \to M_0$ په شکل لیکل کېږي. نو د A عدد ته د Z= $f(x,y)$=F(M) تابع لمیټ وایي، که چیرې د هراختیاري عدد$0<\varepsilon$ لپاره د δ>0 عدد داسې پیدا شي، چې د نوموړې تابع د موجودیت ناحیې د M هرې اختیاري نقطې لپاره چې د $0<MM_0<\delta$شرط صدق کوي، د $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ غیر مساوات صحت ولري. هغه داسې ښیي:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \qquad \text{یا} \qquad \lim_{M\to M_0} f(M)=A$$

د $M\to M_0$ لپاره د Z=F(M) تابع ته بې نهایت کوچنی کمیت وایي که چیرې. $\lim_{M\to M_0} f(M)=0$ وي.



(9شکل)



(8 شکل)

.د بې نهایت کوچني کمیتونو لپاره چې د لمیټ په برخه کې کوم خواص چې د یو متحوله توابعو لپاره صدق کوي، ددوه متحوله او څو متحوله توابعو لپاره عمومیت لري.

4. د دوه متحوله توابعو متمادیت. فرضوو چې د$M_0(x_0,y_0)$ نقطه دZ= $f(x,y)$)=F(M) تابع د تعریف په ناحیه کې واقع وي.

تعریف. د Z= $f(x,y)$=F(M) تابع د M_0 په نقطه کې متمادي ده، که چیرې:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad \text{یا} \qquad \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \qquad (3)$$

وي، ضمناً د M نقطه د M_0 نقطې خواته چې د تابع د تعریف په ناحیه کې واقع ده، په اختیاري توګه تقرب کوي.

$x - x_0 = \Delta x$ او $y - y_0 = \Delta y$ وضع کوو. د Z= $f(x,y)$=F(M) تابع کلي تزاید کله چې د M_0 نقطې څخه د M نقطې ته عبور کوي، په نوموړو نقطو کې د تابع د قیمتونو له تفاضل څخه عبارت دی او هغه دا چې $\Delta z = f(M) - -f(M_0)$ یعنې $\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0)$

د M_0 په نقطه کې د تابع د متمادیت (3) شرط، د لاندې شرط سره معادل دی.

$$\lim_{M \to M_0} \Delta z = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0$$

مثال. د $z = x^2 + y^2$ تابع د xoy مستوي په هره نقطه کې متمادي ده، دا ځکه چې د x او y ټولو اختیاري قیمتونو لپاره د:

$$\Delta Z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

کمیت صفر ته تقرب کوي، کله چې $\Delta x \to 0$ او $\Delta y \to 0$ وکړي.

په یوه نقطه کې پر متمادي توابعو الجبري عملیې، په نوموړې نقطه کې د توابعو په متمادیت بدلیږي (د تقسیم په حالت کې د بدلیدو شرط دا دی چې باید مخرج په نوموړې نقطه کې صفر نه شي)،داشرط لکه د یو متحوله توابعو په شان برقراریږي.

د ناحیې مفهوم. ناحیه یا خلاصه ناحیه د مستوي دټولوهغو نقطو سټ ته وایي چې لاندې شرطونه صدق کړي:

1) د ناحیې د هرې نقطې سره یو شمیر مجاورتونه په نوموړې ناحیه کې واقع وي (د خلاص والي شرط).

2) د ناحیې هرې دوه اختیاري نقطې وکولای شو د یو متمادي منحني په واسطه وصل کړو (متمادي منحني پر مستوي کې د M(x,y) نقطو مجموعې ته وایي، داسې چې مختصات یې د $x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; a \le t \le b$ متمادي توابعو په واسطه ورکړ شوي وي)، یا په نوموړې ناحیه کې په مکمل ډول واقع وي. (ارتباطي خاصیت).

د مستوي هغه برخه چې د L تړلي منحني په منځ کې واقع وي (9 شکل)، یوه ناحیه ده، دا ځکه چې پام لومړي شرط ته د M هرې اختیاري نقطې لپاره چې د L په دننه کې واقع وي، یوه مجاورت وجود

لري، داسې چې د L په داخل کې واقع دی. پام دوم شرط ته د M او N هرې دوه اختیاري نقطې چې د L په دننه کې واقع دي، کولای شو د یو متمادي خط په واسطه یې چې په کامل ډول د L منحني په دننه کې واقع دي وصل کړو.

د M_0 نقطه د G ناحیې لپاره سرحدي نقطه ده، که چېرې د نوموړې نقطې هر اختیاري مجاورت د G ناحیې نقطې او ټولې هغې نقطې چې په نوموړې ناحیه کې واقع نه وي، پکې شامل وي.

د سرحدي ټولو نقطو مجموعې ته د ناحیې سرحد ویل کېږي، په (9شکل) کې د L منحني هره نقطه څرګنده د سرحد یوه نقطه ده.

که چېرې د یوې خلاصې ناحیې سره د هغې سرحدي نقطې هم شاملې کړو نو د نقطو لاسته راغلې مجموعې ته تړلې ناحیه ویل کېږي. په دې ډول په 7 مثال کې د تابع د تعریف ناحیه یوه تړلې مجموعه ده.

که چېرې د یوې ورکړ شوې ناحیې لپاره موږ وکولای شو داسې یوه دایره په پام کې ونیسو، چې نوموړې مجموعه یې په کامل ډول پوښ کړې وي، دې ډول مجموعې ته محدوده مجموعه وایي. د مثال په ډول په 7 او 8 مثالونو کې د توابعو د تعریف ناحیه محدودې ناحیې راښیي.

د G ناحیې ته (که تړلې یا خلاصه وي) یو ارتباطي ناحیه وایي، که چېرې د هر اختیاري تړلي منحني لپاره چې په نوموړې ناحیه کې واقع وي، د مستوي هغه برخه چې ددې منحني په واسطه محدوده شوې، د G په ناحیه کې کاملاً واقع وي. د مثال په ډول په پورته مثالونو کې د تابع د تعریف ناحیه یو ارتباطي ناحیې راښیي. هغه ناحیه چې د $x^2 + y^2 = 2$ او $x^2 + y^2 = 4$ دایرو په منځ کې واقع ده، یو ارتباطي ناحیه نه ده ځکه چې د $x^2 + y^2 = 3$ دایره په نوموړې ناحیه کې واقع ده، مګر د دایرې په داخل کې داسې نقطې موجودې دي، چې په ناحیه کې شاملې نه دي د مثال په ډول د مختصاتو مبداء.

تبصره. ټول هغه مقدماتي مفاهیم چې په دې بند کې ولوستل شول، بې له تغیر څخه د درې بعدي او څو بعدي فضاګانو لپاره د تطبیق وړ دي.

6. د دوه متحوله متمادي توابعو اساسي خواص. لکه چې پورته مو مطالعه کړل دهغو توابعو خواص چې په یوه قطعه خط کې متمادي دي، تر مطالعې لاندې ونیول. نوموړي خواص د هغه دوه متحوله او څو متحوله توابعو لپاره توسعه مومي، کوم چې په یوې تړلې محدودې ناحیې کې متمادي وي.

د $Z = f(x,y) = f(M)$ تابع په خلاصې یا تړلې ناحیه کې متمادي بلله کیږي، که چیرې ددې ناحیې په هره نقطه کې متمادي وي، په همدې ترتیب د $f(M)$ تابع د M_0 په سرحدي نقطه کې متمادي بلله کیږي، که چیرې د

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

په مساواتو کې M د M_0 خواته د هغې منحني پر مخ تقرب وکړي، کوم چې په کامل ډول په نوموړې ناحیه کې واقع وي.

لاندې ادعاوې د صحت وړ دي.

که چیرې د z=f(M) تابع په یوې محدودې تړلې ناحیې کې متمادي وي نو تابع په نوموړې نا حیه کې:

1) د تر ټولو لوي او کوچني قیمت لرونکې ده.

2) محدوده ده (K یو مثبت عدد دی). $|f(M)| \leq K$.

3) د هرو دوه اختیاري قیمتونو ترمینځ ټول منځني قیمتونه اخلي، یعنې که چیرې A او B د f(X) تابع دوه اختیاري قیمتونه په ورکړ شوې ناحیه کې وي، داسې چې A<C<B وي. نو په نوموړې ناحیه کې یوه د M_0 نقطه داسې شتون لري، چې د هغې لپاره F(M_0)=C دی.

د 3 خاصیت څخه په خاص حالت کې دا نتیجه تر لاسه کیږي، چې که M_1 او M_2 د ورکړ شوې ناحیې دوه نقطې وي، داسې چې F(M_1)<0 او F(M_2)=0 وي. نو په نوموړې ناحیه کې د M_0 نقطه موجوده ده، داسې چې F(M_0)=0 دی.

تبصره. باید ووایو چې د 5 قضیې په هغه حالت کې چې تابع دوه متحوله او یا څو متحوله وي، توسعه مومي (د [8] کتاب دې وکتل شي).

2.2§قسمي مشتقات.

کامل دیفرنسیال.

1 . قسمي مشتقات. په یوه معینه نقطه کې د یو څو متحوله تابع قسمي مشتق نظر یوه اختیاري متـــحول ته له عـــادي مشتق څـــخه عبارت دی، داسې چـــې نـــور متحولیـــن ثابت وي .د مثال په ډول د $z = f(x,y)$دوه متحوله تابع قسمي مشتق د $M_0(x_0, y_0)$ په نقطه کې داسې تعریفوي.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{x^z}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{y^z}}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

کــــه چـــــېـــرې دا مشـــتـــقـــات مـــــوجـــــــــــود وي. د $\Delta_{x^z} = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ **او**

$\left(\Delta_{y^z} = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right)$ **مقدار د** M_0 **په نقطه کې د Z تابع قسمي تزايد نطر X او (يا Y)**

ته رابښيي، د قسمي مشتقاتو د ښودلو لپاره نورې ښوونې په کار وړل کېږي.

$$\acute{z}_x = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \qquad \acute{f}_x(x_0, y_0)$$

$$\acute{z}_y = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), \qquad \acute{f}_y(x_0, y_0)$$

د $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ **او** $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ **سمبولونو د کسرونو په شان تعبيرول مجاز نه دي (دا فرق په يو متحوله**

توابعو کې هم په پام کې نيول کېږي).

د تعريف له مخې د دوه محتوله توابعو لپاره د قسمي مشتقاتو هندسي مفهوم داسې په لاس راځي.

د $\acute{f}_x(x_0, y_0)$ **(يا** $\acute{f}_y(x_0, y_0)$**) قسمي مشتق دهغه مماس د زاويوي ضريب څخه عبارت دی، کوم چې د**

$Z = f(x, y)$ **او** $y = y_0$ **(يا** $x = x_0$**) مستوي د تقاطع منحني په اړونده نقطه کې رسموي (10 شکل).**

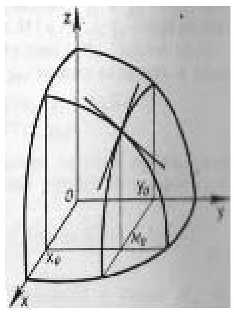
د متحول د سرعت تغير له مخې کولای شو وښيو چې $\acute{f}_x(x_0, y_0)$ **(يا** $\acute{f}_y(x_0, y_0)$**) قسمي مشتق د**
F(x,y) تابع سريع تغير نظر x (يا y) ته رابښيي، کلـــــــه چې
y (ياx) ثابت وي.

د قسمي مشتقاتو د تعریف له مخې دا نتیجه تر لاسه کېږي، چې د مشتق نیول ټول قواعد کوم چې د یو متحوله توابعو لپاره په کار وړل شوي دي، په دې برخه کې په خپل حال پاتې کېږي. یوازې دومره باید څرګنده شي چې نظر کوم متحول ته مشتق نیسو.

مثال1. که چېـــــړې $Z = x^2 + y^2$ وي. نــــو

$\acute{Z}_x = 2x, \acute{Z}_y = 2y$

مثال2. که چېـــــړې $P = \frac{RT}{V}$ وي، نـــــــــو:



$$\acute{P}_T = \frac{R}{V}, \qquad \acute{P}_V = \frac{-RT}{V^2}$$

د $\acute{P}_V$ کـــمیت د الاستیـــکې ایـــدیال ګازونــــو دایـــزوترمـــي ضریب په نــــوم یادیـــــږي

(10شکل)

په مشابه ډول د 3 متحوله او څو متحوله توابعو قسمي مشتقات تعریف اوښودل کېږي.

کلي دیفرنسیال. لکه څنګه چې ولیدل شو د (x_0, y_0) په نقطه کې د $Z= f(x, y)$ تابع کلي تزاید د X او Y متحولینو د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره د

$$\Delta Z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (1)$$

څخه عبارت دی.

که چېرې د (1) تزاید په لاندې ډول ولیکلای شو:

$$\Delta Z = A\Delta X + B\Delta Y + \alpha(\Delta X, \Delta Y)\Delta X + \beta(\Delta X, \Delta Y)\Delta Y. \qquad (2)$$

په داسې حال کې چې A او B د ΔX او ΔY پورې اړه نه لري او هم $\alpha(\Delta X, \Delta Y)$ او $\beta(\Delta X, \Delta Y)$ د صفر خواته تقرب کوي، کله چې ΔX او ΔY صفر ته تقرب وکړي. نو په دې صورت کې وایي چې د$f(x, y)$ تابع د (x_0, y_0) په نقطه کې مشتق منونکې ده.

د تابع دکلي تزاید خطي برخه $A\Delta X + B\Delta Y$ (یعنې د ΔZ هغه برخه ده چې نظر ΔX او ΔY ته خطاً مربوط ده)، د (x_0, y_0) په نقطه کې د نوموړې تابع د کلي دیفرنسیال (یا په لنډ ډول دیفرنسیال) په نوم یادوي او د dz سمبول په واسطه ښودل کېږي.

$$dZ = A\Delta X + B\Delta Y \qquad (3)$$

د دیفرنسیال لرونکو توابعو له تعریف څخه دې نتیجې ته رسیږو، چې که یوه تابع د (x_0, y_0) په نقطه کې دیفرنسیال ولري،نوتابع په نوموړې نقطه کې متمادي ده.

په رښتیا، که چېرې $z = f(x,y)$ تابع د (x_0, y_0) په نقطه کې دیفرنسیال ولري نو د نوموړې نقطې لپاره ΔZ د (2) په شکل ارایه کېږي. له دې ځایه په لاس راځي:

$$\lim_{\substack{\Delta X \to 0 \\ \Delta Y \to 0}} \Delta Z = 0$$

په دې مانا چې د$z = f(x,y)$ تابع د (x_0, y_0) په نقطه کې متمادي ده.

په یوه نقطه کې د یوې تابع د دیفرنسیال پذیرې څخه، په نوموړې نقطه کې د هغې د قسمي مشتقاتو موجودیت ترلاسه کېږي (د دیفرنسیال پذیرۍ لازمي شرط).

حقیقتاً، فرضوو چې که د $Z = (X,Y)$ تابع د (x_0, y_0) په نقطه کې د دیفرنسیال لرونکې وي نو (2) رابطه صحیح ده. په دې رابطه کې $\Delta Y = 0$ وضع کوو، لرو چې:

$$\Delta_{x^z} = A\Delta x + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x$$

د $\Delta x \neq 0$ په ویشلو او د $\Delta X \to 0$ په حالت کې د لمیټ په نیولو سره په لاس راوړو:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta_{X^Z}}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \to 0} \big(A + \alpha(\Delta X, 0)\big) = A$$

په دې مانا چې د (x_0, y_0) په نقطه کې د $Z = f(x,y)$ تابع قسمي مشتق نظر X ته موجود او

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \qquad (4)$$

دی.

په مشابه ډول ثابتیږي، چې د (x_0, y_0) په نقطه کې د :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B \qquad (5)$$

قسمي مشتق موجود دی.

د (4) او (5) فورمولونو په کارولو کولای شو (3) رابطه داسې ولیکو:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

که چېرې Z=X وضع کړو، نو $dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0\Delta y = \Delta x$ یعنې $dx = \Delta x$ ،په مشابه ډول د Z=Y له وضع کولوڅخه $dy = \Delta y$ په لاس راوړو. په دې مانا چې د متحولینو دیفرنسیال د نوموړو متحولینو د تزاید سره مطابقت کوي.او کولای شو ددیفرنسیال (3) رابطه د $dz = \acute{f}_x(x,y)dx + \acute{f}_y(x,y)dy$ په شکل ولیکو.

قضیه(ددیفرنسیال نیولو کافي شرط). که چېرې د $z = f(x,y)$ تابع د $M_0(x_0,y_0)$ نقطې په شاخوا کې دقسمي مشتقات ولري او نوموړي مشتقات د M_0 په نقطه کې متمادي وي نو نوموړې تابع دM_0 په نقطه کې ددیفرنسیال نیولو قابلیت لري.

ثبوت. د x_0 او y_0 متحولینو لپاره د Δx او Δy تزاید داسې په نظر کې نیسو چې د $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ نقطه د M_0 مجاورت څخه خارجه نه شي. د$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ کلي تغیرات کولای شو داسې ولیکو.

$$\Delta z = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + \left(f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right)$$

له دې دوه تفاضلونو څخه هرېوېې د تابع قسمي تغیر ښیې. د لاګرانژ د فورمول له مخې د له دې دوه تفاضلو څخه هریوه کولای شو په لاندې ډول تغییر او په لاس راوړو:

$$\Delta z = (\acute{f}_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x - (\acute{f}_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y, \qquad (0<\theta,\theta_1<1)) \qquad (6)$$

څرنګه چې د $\acute{f}_x$ او $\acute{f}_y$ مشتقات د M_0 په نقطه کې متمادي دي نو:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \acute{f}_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) = \acute{f}_x(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \acute{f}_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y) = \acute{f}_y(x_0,y_0)$$

له دې څخه.

$$\acute{f}_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y) = \acute{f}_x(x_0+y_0)+\alpha,$$
$$\acute{f}_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y) = \acute{f}_y(x_0+y_0)+\beta,$$

په داسې حال کې چې $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y$ $\alpha = \alpha(\Delta x,\Delta y)$ د$\Delta x \to 0$او $\Delta y \to 0$ په حالت کې بې نهایت کوچنې کمیتونه وي. په (6) رابطه کې ددې قیمتونو په وضع کولو سره په لاس راوړو:

$$\Delta z = \acute{f}_x(x_0, y_0)\Delta x + \acute{f}_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

په دې مانا چې دM_0 په نقطه کې ددېفرنسیال نیولو قابلیت لري. $z = f(x,y)$ **تابع د**

3.د مرکبو توابعو مشتق اود یفرنسیال. **فرضوو چې**$z = f(x,y)$ **وي داسې چې** $x = \varphi(t)$ **او**$y = \Psi(t)$ **ده.په پای کې** z **د** t **له جنسه یو متحوله تابع ده. فرضوو چې** $\acute{z}_x$ **او**$\acute{z}_y$ **متمادي او** $\frac{dx}{dt}$ **او**$\frac{dy}{dt}$ **موجود دي.**$\frac{dz}{dt}$ **محاسبه کوو.د**t **متحول ته د** Δt **په اندازه تزاید(تغیر) ورکوو په نتیجه کې** x، y **او** z **د** Δx، Δy **او** Δz **په اندازه تزاید مومي .د دیفرنسیال دکافي شرط په نظر کې نیولو سره:**

$$\Delta z = \acute{f}_x(x,y)\Delta x + \acute{f}_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

له دې ځخه

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \acute{f}_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \acute{f}_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

اوس Δt **ته د صفر په خوا تقرب ور کوو په نتیجه کې** Δx **او** Δy **دصفرخواته تقرب کوي،ځرنګه چې** x **او** y **متمادي دي(مونږ د** $\acute{x}_t$ **او**$\acute{y}_t$ **مشتقاتو موجودیت فرضوو) په پای کې پلاس راوړو:**

$$\frac{dz}{dt} = \acute{f}_x(x,y)\frac{dx}{dt} + \acute{f}_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

اویا په لنډ ډول

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (7)$$

(7) فورمول د مرکبوتوابعود مشتق نیولو دفورمول په نوم یادیږي.

مثال1 . فرضوو چې $z = f(x,y)$ ، $x = t^3 + 3$ ، $y = 2t^4 + 1$ **.د (7) فورمول له مخې لرو.**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}8t^3.$$

فرضوو چې په خاص حالت کېx **دمستقل متحول رول لوبوي. یعنې د** $z = f(x,y)$ **تابع په پام کې نیسو داسې چې** $y = \Psi(t)$ **ده. نو د(7) فورمول له مخې لرو چې :**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (8)$$

ځکه چې $\frac{dx}{dx} = 1$ دی. د (8) په فورمول کې $\frac{\partial z}{\partial x}$ د $f(x,y)$ د دوه متحوله تابع نظر x متحول ته قسمي مشتق ښيي او $\frac{dz}{dx}$ نظر x ته د $z = f\left(x, \Psi(x)\right)$ مرکبې تابع ،عادي مشتق رابنيي. وروستی مشتق دتابع دکامل مشتق په نوم يادوي . په هغه حالت کې چې $z = f(x,y)$ او $x = \varphi(y)$ وي په مشابه ډول پلاس راوړو:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

($\frac{\partial z}{\partial y}$ د $z = f(x,y)$ تابع قسمي مشتق نظر دويم متحول ته او $\frac{dz}{dx}$ د $z = f(\varphi(y), y)$ مرکبی تابع کامل مشتق نظر y ته ښيي) .

اوس فرضووچې $x = \varphi(t,\tau)$, $y = \Psi(t,\tau)$ (دلته دx او y لومړي ترتيب مشتقاتوموجوديت نظر t او τ ته فرض شوی) دی. په دې صورت کې z د t او τ ددوه متحولينوتابع ده په نتيجه کې لازم ده چې(7) فورمول داسې وليکو:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (9)$$

په همدې ترتيب

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} \qquad (10)$$

مثال2 . که چېرې $z = xy$ وي داسې چې $x = t\cos\tau$ او $y = t^2\tau$ نو

$z'_\tau = -2yt\sin 2\tau + xt^2$, $z'_t = yt\cos 2\tau + 2xt\tau$.

د (9)او (10) فورمولونوڅخه څرګنده ده چې دقسمي مشتقاتوسمبول لکه چې په پورتني ډول په پام کې نيول شوی، نه شو کولای دکسرونوپه شان تعبيرکړو.حقيقتاً که چېرې مونږ نظر ∂x او ∂y ته اختصار وکړو ،نو له(9) او(10) فرمولونوڅخه په لاس راځي:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2\frac{\partial z}{\partial t} \text{ او } \frac{\partial z}{\partial \tau} = 2\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

4 غيرې صريحې(اشکارا) تابع ګانې اودهغوي ديفرنسيال نيول.

لکه څنګه چې موو ليدل هغه معادله چې نظر x ته يوه متحوله تابع دهغې په مرسته ورکول کېږي او نظر y ته دحلولو وړنه وي نوداډول تابع ته غير صريح تابع ويل کېږي. نظر y ته دداډول معادلو دحلولوپه صورت کې مونږ يوه تابع پلاس راوړو چې داتابع صريح شکل لري . اکثر داسې پيښيږی کله چې دا ډول معادلې y ته حل

کړو، دحلولو وړنه وي (دمثال په توګه$2^y-2y+x^2-1=0$) اویا نامعقوله دي په دې صورت کې معادله د لاندې عمومي شکل په لرلو سره

$$F(x,y)=0 \qquad (11)$$

ناحله پاتې کېږي (په دې صورت کې دهغې ټول حدونه کېڼې خواته انتقالیږي). په دې برخه کې داسوال مطرح کېږي ،څنګه کولای شو دغیر صریحو توابعو مشتق لاسته راوړو، کله چې (11) معادله نظر yته دحلولو وړ نه وي.

که چېرې په (11) معادله کې غیر صریح تابع د $y=f(x)$په شکل تعریف شي. نو د x مستقل متحول ته د قیمتونو په ورکولو سره، د مربوط y دقیمتونو د لاسته راوړولو لپاره باید یوه معادله حل کړو. که چېرې په دې معادله کې دهغې حلونه وضع شي عینیت لاسته راشي .په دې ډول کولای شو ووایو چې د $y=f(x)$ غیر اشکار تابع چې د (11) معادلې په واسطه ورکړشوې، داسې یوه تابع ده چې که په (11) معادله کې یې وضع کړو په عینیت بدلیږي. که ددې عینیت نظر xته مشتق ونیسو نو دمرکبو توابعو د مشتق نیولو دقاعدې له مخې په لاس راوړو:

$$\acute{F}_x(x,y)+\acute{F}_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

که چېرې$\acute{F}(x,y)\neq 0$ وي نودغیر صریح توابعو د مشتق نیولو فورمول په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\acute{F}_x(x,y)}{\acute{F}_y(x,y)} \qquad (12)$$

مثال 1. فرضاً y دx تابع او د $e^{xy}-x-y=0$ رابطې په واسطه ه ورکړشوې وي. $\frac{dy}{dx}$ په لاس راوړئ.

د $F(x,y)=e^{xy}-x-y$ لپاره لرو: $\acute{F}_x=ye^{xy}-1$, $\acute{F}_y=xe^{xy}-1$ د (12) فورمول له مخې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}$$

فرضوو چې د

$$F(x,y,z)=0 \qquad (13)$$

په معادله کې z د $z=f(x,y)$غیر صریح تابع په شان ور کړشوې وي داسې چې x او y آزاد متحولین دي.

د (12)فورمول دکارولو په نتیجه کې د (13) رابطې څخه لیکلای شو:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\acute{F}_x}{\acute{F}_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\acute{F}_y}{\acute{F}_z} \qquad (14)$$

مثال2. د z غير صريح تابع لپاره قسمي مشتقات پيداکړئ کله چې هغه د $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ معادلې په واسطه ورکړشوې وي.د (14) فورمول له مخې.

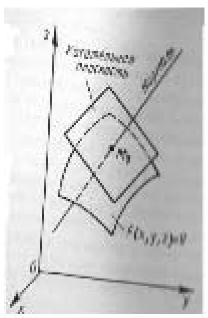
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

5 .د يوې سطحې پرمخ مماسي مستوي او نورمال. د

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (15)$$

يوه سطح او دهغه پر مخ د$M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه په پام کې نيسو . دM_0له نقطې څخه د L منحني چې په بشپړ ډول په (15) سطــح کې واقــــــع دی، تيــرووو(11 شــکل). فرضــــوو چــــې د L پارامتــريکـــــي مــعــــادله عبــارت ده له

$$x = \varphi(t), \; y = \Psi(t), \quad z = \omega(t)$$



(11شکل)

ضمناً د $t = t_0$ لپاره د M_0نقطــې مختــصات په لاس راوړو. څرنگه چې دL منحني هــره نقطه د (15)ورکړشوي سطحې پرمخ واقع ده نود t پارامتر دهر اختياري قيمت لپاره لرو:

$$F\big(\varphi(t), \Psi(t), \omega(t)\big) = 0$$

نوموړې رابطه نظر t ته يوه عيني رابطه ده. ددې رابطې دمشتق نيولوپه صورت کې په لاس راوړو.

$$\acute{F}_x\big(\varphi(t), \Psi(t), \omega(t)\big)\,\acute{\varphi}(t) + \acute{F}_y(\ldots.)\acute{\Psi}(t) + \acute{F}_z(\ldots.)\acute{\omega}(t) = 0$$

په دې رابطه کې د $t = t_0$په وضع کولو سره په لاس راوړو.

$$\acute{F}_x(M_0)\acute{\varphi}(t_0) + \acute{F}_y(M_0)\Psi(\acute{t_0}) + \acute{F}_z(M_0)\acute{\omega}(t_0) = 0 \qquad (16)$$

دL منحني دM_0په نقطه کې مماس د لاندې معادلې په واسطه ارايه کېږي.

$$\frac{x - x_0}{\acute{\varphi}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\acute{\Psi}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\acute{\omega}(t_0)} \qquad (17)$$

په پورتنې مستقيم خط کې دقيمتونو په وضع کولوسره دهغې معادله په لاندې توگه تعريف کوو:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}} \qquad (18)$$

(16) رابطه ښيېي چې د (17) او (18) مستقيم خطونه يو پر بل عمود دي. د(18)رابطې څخه داځرګندېږي چې د(18) مستقيم خط د (15) سطحې او په نوموړې سطحه باندې دM_0 نقطې په ټاکلو تعينيږي، نو د L منحني پورې مربوط نه دی کوم چې مونږيې په(15) سطحه کې دM_0 له نقطې څخه په اختياري ډول تير کړو. څرنګه چې مماسي خطونه پر هغومحنياتو چې دM_0 له نقطې څخه تيريږي او په (15) سطح کې واقع او هم د (18) مستقيم خط يوازې يوه نقطه کې عمود دی، نو په يوه مستوي کې واقع دی چې نوموړې مستوي په ورکړل شوې سطحې باندې دM_0 په نقطه کې دمماس مستوي په نوم يادوي او د(18) مستقيم خط دM_0 په نقطه کې دنورمال په نوم نومول کيږي.

د مماس مستوي معادله يادهغه مستوي معادله چې د M_0له نقطې څخه تريږي او په (18) مستقيم خط عمود ده ، عبارت ده له

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0 \qquad (19)$$

که چېرې سطح د$z=f(x,y)$ معادله په واسطه ورکړشوې وي نو د مماس مستوي معادله د (19)معادلې د خاص حالت په ډول د$F(x,y,z)=z-f(x,y)$ څخه لاسته راځي. نو

$$\acute{F}_z=1\,,\acute{F}_y=-\acute{f}_y\,,\ \acute{F}_x=-\acute{f}_x$$

او(19) معادله لاندې شکل غوره کوي.

$$z-z_0-\acute{f}_x(x_0,y_0)(x-x_0)-\acute{f}_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

دلته د$\Delta x=(x-x_0)$, $\Delta y=(y-y_0)$او $z-z_0=\Delta z$ په ښودلو سره په لاس راوړو.

$$\Delta z=\acute{f}_x(x_0,y_0)\Delta x+\acute{f}_y(x_0,y_0)\Delta y$$

او يا

$$df(x_0,y_0)=\Delta z$$

په دې مانا چې د يوې دوه متحوله تابع کامل ديفرنسيال، دمماس مستوي دz مختصې له تغير سره مساوي دی. دا ؤ د$f(x,y)$ تابع د کامل ديفرنسيال هندسي مفهوم.

مثال. دمماس مستوي او نورمال معادله د $z=x^2+y^2$ تابع لپاره د $M_0(1,1,2)$ په نقطه کې په لاس راوړئ.

دلته $F=z-x^2+y^2$, $\acute{F}_x=2x$, $\acute{F}_y=2y$, $\acute{F}_z=1$ دی. دM_0په نقطه کې $\acute{F}_x=\acute{F}_y=-2$ او $\acute{F}_z=1$دی. د (19) او(18) فورمولونو په پام کې نيولوسره دمماس مستوي د

$2x + 2y - z - 2 = 0$ او نورمال معادله په لاندې ډول ده:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

§3.2. دلوړ ترتيب قسمي مشتقات او ديفرنسيال.

1.دلوړ ترتيب قسمي مشتقات. ديوې څو متحوله تابع قسمي مشتقات بياهم نظر مربوطه متحولينو ته يوه تابع ده چې ممکن دقسمي مشتقاتو لرونکې وي.ددې تابع لپاره داوروستي مشتقات ددويم ترتيب قسمي مشتقاتوپه نوم يادېږي په دې ډول د$z = f(x,y)$دوه متحوله تابع لپاره کولا ی شو ددويم ترتيب څلور قسمي مشتقات(قبلو چې داټول مشتقات موجود دي) چې د لاندې سمبولونو په واسطه ښودل کېږي، تعريف کړو:

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \ , \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \ , \quad z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

د z''_{xy}او z''_{yx} قسمي مشتقات چې د مشتق نيولو ترتيبونه يې سره فرق لري ددويم ترتيب مختلطوقسمي مشتقاتوپه نوم يادېږي.

په مشابه ډول دريم ،څلورم اولوړترتيب قسمي مشتقات تعريف کېږي.

مثال. د$z = e^{x-2y}$ تابع لپاره دويم ترتيب قسمي مشتقات په لاس راوړئ.

لرو:

$$z'_x = e^{x-2y} \ , \quad z'_y = -2e^{x-2y}$$

$$z''_{x^2} = e^{x-2y} \ , \ z''_{xy} = -2e^{x-2y} \ , \ z''_{yx} = -2e^{x-2y} \ , z''_{y^2} = 4e^{x-2y}$$

دلته $z''_{xy} = z''_{yx}$ دي. په دې حالت کې لاندې قضيه وجودلري (دمثال په ډول [8] دي وکتل شي).

قضيه .که دويم ترتيب مختلط قسمي مشتقات متمادي وي نوسره مساوي دي.

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

نتيجه. که چېرې لوړترتيب مختلط قسمي مشتقات متمادي وي نو سره مساوي دي او هغه نتايج چې د مشتق نيولو په صورت کې لاسته راځي يوشان دي.او نظر متحولينو ته دمشتق نيولو ترتيب پورې اړه نه لري.کولای شو په مختلفو ډولونو يې مشتق ونيسو.

دا موضوع د مثال په ډول ثابتوو

$$z'''_{x^2y} = ((\acute{z}_x)\acute{}_x)\acute{}_y = ((\acute{z}_x)\acute{}_y)\acute{}_x = ((\acute{z}_y)\acute{}_x)\acute{}_x$$

يعنې

$$z'''_{x^2y} = z'''_{xyx} = z'''_{yx^2}$$

دلته مونږ دوه ځلې پورتنۍ ذکر شوې قضیه په کار وړې ده. په لومړي ځل موقضیه د $\acute{z}_x$په تابع(مونږ ترتیب د مشتق نیولو ته تغیر ورکړی)، دویم ځل مونږ د $z''_{xy} = z''_{yx}$مساوات په کار یووړی. په عمومي ډول ددی مطلب شیما مشابه ده.

2.بشپړ(کامل) دیفرنسیال مشخصه. دا څرګنده کوو چې د کومو شرایطو په پام کې نیولو سره د

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1)$$

افاده د$u = u(x,y)$ تابع دکامل دیفرنسیال څخه عبارت ده او یا یو کامل دیفرنسیال دی کله چې د$P(x,y)$او $Q(x,y)$ توابع سره د لومړي ترتیب قسمي مشتقاتو متمادي وي.

قضیه. د (1) افاده یو کامل دیفرنسیال دی که او یوازې که لاندې شرط صدق کړي:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

3. لوړ ترتیب دیفرنسیال. ترهرڅه دمخه باید ووایو چې د څو متحوله توابعو لپاره، دیو متحوله توابعو د دیفرنسیال نیولو عمومي قوانین صدق کوي:

$$I.\, d(u+v) = du + dv\big(u = u(x,y), v = v(x,y)\big)$$
$$II.\, d(u.v) = vdu + udv$$
$$III.\, d(cu) = cdu \qquad , \qquad (c = const)$$
$$IV.\, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - vdu}{v^2}, (v \neq 0)$$

دمثال په ډول لرو:

$$d(u+v) = (u+v)\acute{}_x dx + (u+v)\acute{}_y dy$$
$$= \acute{u}_x dx + \acute{v}_x dx + \acute{u}_y dy + \acute{v}_y dy$$
$$= \left(\acute{u}_x dx + u_y dy\right) + \left(\acute{v}_x dx + \acute{v}_y dy\right) = du + dv$$

فرضوو چې نظر x او y ته د$Z = f(x,y)$دوه متحوله تابع دویم ترتیب متمادي قسمي مشتقات ولري.

دنوموړې تابع کامل دیفرنسیال په پام کې نیسو .

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(dx او dy اختياري تزايدبنيږي)،دا ديفرنسيال د لومړي ترتيب کامل ديفرنسيال په نوم ياديږي(ياپه لنډ ډول لومړی ديفرنسيال).

ځرنګه چې دفرضيې له مخې $\frac{\partial z}{\partial x}$ او $\frac{\partial z}{\partial y}$ دلومړی ترتيب قسمي متمادي مشتقات دي نود dz تابع څخه په ترتيب سره کولای شو د$d(dz)$ کامل ديفرنسيال ونيسو.په دې ډول مونږ دويم ترتيب کامل ديفرنسيال (اويا په لنډ ډول دويم ترتيب ديفرنسيال)په لاس راوړو او هغه د d^2z په شکل ښودل کيږي.

په مشابه ډول د دريم،څلورم او n– ام ترتيب متمادي قسمي مشتقاتود موجوديت په فرضولو سره کولای شو دريم،څلورم او n– ام ترتيب کامل ديفرنسيال په لاس راوړو.

دقسمي مشتقاتو په مرسته د دويم ترتيب ديفرنسيال لپاره غواړو يوه افاده په لاس راوړو. دI، III قوانينو څخه په ګټه اخيستنه (dx اوdy ،xاوyپورې اړه نلري،يعنې د يوثابت په شکل پام کې نيول کيږي) او د 1بند د قضيې پکاروړلو سره کولای شو وليکو:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (2)$$

دلته$dx^2 = (dx)^2 \quad , \quad dy^2 = (dy)^2$

د nام ترتيب د يفرنسيال لپاره، (2) فورمول توسعه موندلی شي.

4 . د دوه متحوله توابعو لپاره دتيلور فورمول. فرضوو چې د$z = f(x,y)$ تابع د $M_0(x_0, y_0)$ او د هغې په يـــو مجـــاورت کـــې د(n–1)تـــرتيب مـــتمادي قسمـــي مشتقاتـــو لـــرونکې ده. فرضوو چې $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$په نوموړي مجاورت کې واقع دی. د F(t)کومکي تابع د$0 \le t \le 1$لپاره په لاندې ډول تعريفوو.

$$F(t) = f(x,y)$$

په داسې حال کې چې $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ دی. د تيلور فورمول په مطابق لرو:

$$F(t) = F(0) + \acute{F}(0)t + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1) \qquad (4)$$

د(3) رابطې په مرسته په (4) فورمول کې ضريبونه محاسبه کوو.د $t=0$ لپاره لرو،

$F(0) = f(x_0, y_0)$. د $F(t)$ مرکبه تابع نظر t ته مشتق ونيسو،په لاس راوړو:

$$\acute{F}(t) = \acute{f}_x(x,y)\Delta x + \acute{f}_y(x,y)\Delta y = df(x,y),$$

$$F''(t) = f''_{x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(x,y)(\Delta y)^2 = d^2f(x,y)$$

$$F^{(n)}(t) = d^n f(x,y)$$

$$F^{(n+1)}(t) = d^{n+1}f(x,y).$$

په وروستيو مساواتو کې t په θt او په نورو مساواتو کې t=0 وضع کړو په لاس راوړو:

$$F^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0) \quad , \quad (k = 1,2, \dots, n)$$

$$F^{(n+1)}(\theta t) = d^{n+1}f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y)$$

که چېرې لاسته راغلې افاده په(4) مساواتو کې وضع او بيا په هغې کې $t = 1$ وضع کړو نو د $f(x,y)$ تابع لپاره د تيلور فورمول په لاس راوړو.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{2!} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n-1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}$$

په نتيجه کې د څومتحوله توابعو لپاره د تيلور فورمول په همدې ډول دی

§4.2. د دوه متحوله توابعو اکستريمم .

1. د اکستريمم د موجوديت لازمي شرط. د مگزيمم او مينمم مفهوم کولای شودڅو متحوله توابعو لپاره هم په پام کې ونيسو(دلته د دوه متحوله توابعو لپاره).

ويل کېږي چې $z = f(x,y)$ تابع د $M_0(x_0, y_0)$ په نقطه کې مگزيمم(يامينمم) قيمت لري که چېرې د M_0 نقطې لپاره داسې يو مجاورت موجود شي چې د نوموړي مجاورت د هرې $M(x,y)$ خلاف M_0 اختياري نقطې لپاره لاندې نامساوات صدق وکړي:

$$f(x_0, y_0) > f(x,y) \qquad \left(f(x_0, y_0) < f(x,y) \text{ يا}\right)$$

يا

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0) < 0 \quad \left(\Delta z = f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0 \text{ يا}\right)$$

قضيه (د اکستريمم نقطو د موجوديت لازمي شرط).که چېرې د $z = f(x,y)$ تابع په $M_0(x_0, y_0)$ نقطه کې اکستريمم ولري او هم په نوموړې نقطه کې $\acute{z}_x$ او $\acute{z}_y$ قسمي مشتقات موجود وي نو.

$$f'_x(x_0,y_0)=0 \ , \ f'_y(x_0,y_0)=0 \qquad (1)$$

ثبوت. د اکستریمم د تعریف له مخې د $f(x,y_0)$ **تابع نظر** x **ته یوازې یو متحوله تابع ده او د** $x=x_0$ **لپاره د اکستریمم لرونکې ده.بناً پر دې** $f'_x(x_0,y_0)=0$ **په مشابه ډول د** $f'_y(x_0,y_0)=0$ **رابطه حاصلولی شو.**

تبصره. د اکستریمم دا شرط،کافي شرط نه دی، لاندې مثال دامطلب توضیح کوي.

مثال. $z=x^3+y^3 \ , \ z'_x=3x^3, z'_y=3y^2$

د تابع قسمي مشتقات په(0,0) **نقطه کې مساوي په صفر دي مګرنوموړې تابع د**(0,0) **په نقطه کې اکستریمم نه لري. ځکه چې د نوموړې نقطې په هراختیاري مجاورت کې ورکړ شوې تابع مختلف الاشاره قیمتونه اخلي اوپه** (0,0) **نقطه کې**$z=0$ **دی.**

2. د اکستریمم لپاره کافي شرط.

قضیه(د اکستریمم لپاره کافي شرط). فرضوو چې د $z=(x,y)$ **تابع او د هغې لومړی ترتیب او ددویم ترتیب قسمي مشتقات د** $M_0(x_0,y_0)$**په نقطه او دهغې په شاوخوا کې متمادي او د(1)شرط صدق کړي.**

$A=f''_{x^2}(M_0) \ , \ B=f''_{xy}(M_0) \ , \ C=f''_{y^2}(M_0)$ **او** $D=AC-B^2$ **وضع کوو.**

نو دM_0 **په نقطه کې د**$f(x,y)$ **تابع: 1) منیمم لري که چېرې** $A>0$, $D>0$ **وي،**

2) مګزیمم لري که چیرې $D>0$ **او**$A<0$ **وي،3) داکستریمم نقطې نلري کله چې** $D<0$ **وي.**

ثبوت. په لنډ ډول د 1) او 2)حالتونه ثبوتوو. فرضووچې د 1 شرط صدق کوي دتیلور د قضیې له مخې،کله چې$n=1$ **وي لروچې:**

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[\acute{A}(\Delta x)^2+2\acute{B}\Delta x\Delta y+\acute{C}(\Delta y)^2\right] \qquad (2)$$

په داسې حال کې چې

$$\acute{A}=f''_{x^2}(M_*) \ , \ \acute{B}=f''_{xy}(M_*) \ , \ \acute{C}=f''_{y^2}(M_*)$$
$$(M_*(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \ , \ 0<\theta<1$$

دM_0 **په نقطه کې ددویم ترتیب مشتقاتو د متمادیت له مخې پلاس راځي:**

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\acute{A}=A \ , \ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\acute{A}\acute{C}-(\acute{B})^2\right]=AC-B^2=D$$

بنا پردې په مطلقه قیمت سره دΔxاو Δy د کافي اندازه کوچنیو قیمتونو په پام کې نیولو سره لرو.

$$\acute{A} > 0 \;\; (A > 0 \text{ که چېرې}) \qquad (3)$$

$$\acute{A} < 0 \;\; \left(A < 0 \text{ که چېرې}\right) \qquad (4)$$

$$\acute{A}\acute{C} - (\acute{B})^2 > 0 \;\; \left(D > 0 \text{ که چېرې}\right) \qquad (5)$$

د(4)او(5) رابطو په پام کې نیولو سره ،(2) رابطه داسې لیکو:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\acute{A}}((\acute{A})^2(\Delta x)^2 + 2\acute{A}\acute{B}\Delta x\Delta y + \acute{A}\acute{C}(\Delta y)^2)$$

او یا دتکمیل مربع له مخې پورتنۍ رابطه په لاندې ډول لیکو.

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\acute{A}}((\acute{A}\Delta x + \acute{B}\Delta y)^2 + (\acute{A}\acute{C} - (\acute{B})^2(\Delta y)^2)$$

د(5) رابطې له مخې د قوس په داخل کې افاده یوه مثبته افاده ده.بناپه دې:1)که چېرې $A > 0$ (له دې څخه به د(3) نامساواتو له مخې$\acute{A} > 0$) وي نو $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ دی. په نتیجه کې دM_0 نقطه د مینمم نقطه ده.2)که چېرې$A < 0$ (له دې ځایه د(4) نامساواتو له مخې$\acute{A} < 0$) وي نو $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ دی. په نتیجه کې M_0د مګزیمم نقطه ده.

مثال1. د$Z = x^3 + y^3 - 3xy$ تابع د اکستریمم لپاره تحقیق کړئ.

دنوموړې تابع قسمي مشتقات $\acute{Z}_y = 3y^2 - 3x$،$\acute{Z}_x = 3x^2 - 3y$ د $M_0(0,0)$ او $M_1(1,1)$ په نقطو کې صفرکېږي او دویم ترتیب قسمي مشتقات یې عبارت دي له. $Z''_{x^2} = 6x$، $Z''_{y^2} = 6y$،$Z''_{xy} = -3$ دM_0په نقطه کې$D = -9 < 0$ دی.په نتیجه کې په نوموړې نقطه کې اکستریمم وجود نه لري. دM_1په نقطه کې $D = 27 > 0$ضمناً $A = 6 > 0$دی.په نتیجه کې M_1د مینمم نقطه ده.

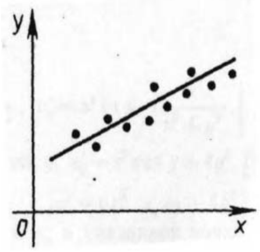
تبصـــــره. د مثالونو په واسطه دا ښیو چې د $D = 0$لپاره کېدای شي اکستریمم موجود او یا کېدای شي موجود نه وي.

مثال2 .لکه څنګه چې مخکې مطالعه شو د$Z = x^3 + y^3$ تابع د$M_0(0,0)$په نقطه کې د اکستریمم نقطه نه لري په داسې حال کې چې $D = 0$ دی.

مثال3 .د$Z = x^4 + y^4$ تابع د$M_0(0,0)$ په نقطه کې د مینمم قیمت لري دا ځکه چې دنوموړې نقطې په هر اختیاري مجاورت کې دا تابع مثبته ده. او د$(0,0)$په نقطه کې قیمت یې مساوي په صفر دی.په داسې حال کې چې$D = 0$ دی.

§5.2. د کوچنیو مربعاتو طریقه. په طبیعت کې داسې واقع کېږي چې تجربوي فورمولونه په کار ویسي کوم چې د تجربو د مشاهداتو په واسطه منځ ته راغلي دي. له دغو تر ټولو ښو طریقو څخه یو د کوچنیو مربعاتو د طریقې فورمول دی. ددې طریقې نظریه د دوه خطأ مربوطو متحولینو لپاره تشریح کوو.

فرضوو چې د x او y دوومتحولیـــــنو ترمنځ ارتباط مـــطلوب دی(دمثال په ډول دفلزي میلې د اوږدوالی او حرارت ترمنځ). مربوطه تجربه ترسره کـــوو او نتایج یې پـــه لانـــدې جـــــدول کــــې لیـــکــــــو



(12شکل)

(دمثال په ډول nځلې). دلته x او y په مستوی کې دیوې نقطې د قایمو مختصاتو په څیر،پام کې نیسو.قبلوو چې(x_k, y_k)

$k = 1,2 \dots n$, د یو مستقیم خط په امتداد په شاوخوا را ټولې شوې دي (12شکل). څرګنده ده چې په دې حالت کې دx او y ترمنځ په تقریبي ډول یوخطي ارتباط وجود لري یعنې

$$y = ax + b \qquad (2)$$

د(أ) جـــدول له مـــخې دx_k په نقـــطه کې د (2) تابــع داصلي قیمت او دهغې د مربوطه y_k تفاضـــــل

$$\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$$

ترڅنګ کېدلو (یا انحراف) په نوم یادوو. د ترڅنګ کېدو د مربعاتو مجموعه نظر aاو bمقادیرو ته یوه تابع ده:

x	x_1	x_2	x_3	…..	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…..	y_n

(1)

$$u(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2$$

د وړو مربعاتو په طريقه لاندې اصول ځاى په ځاى شوي دي:دaاوbمطلوب قيمتونه دهغو قيمتونوڅخه عبارت دي چې دهغې لپاره د$u(a,b)$تابع مينمم قيمت ولري. ددې مطلب لپاره لازم ده چې.

$$\frac{\partial u}{\partial u}=2\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)x_k=2a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2b\sum_{k=1}^{n}x_k-2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=2\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)=2a\sum_{k=1}^{n}x_k+2abn-2\sum_{k=1}^{n}y_k=0$$

له دې څخه

$$a\sum_{k-1}^{n}x_k^2+b\sum_{k-1}^{n}x_k=\sum_{k-1}^{n}x_ky_k \quad (3)$$

$$a\sum_{k=1}^{n}x_k+bn=\sum_{k=1}^{n}y_k$$

دا وروستى شكل د كوچنيو مربعاتو د طريقې نورمال سيستم په نوم يادېږي.فرضوو چې$a=a_0$ او $b=b_0$ دسيستم حل دى. كولاى شو ثابت كړو چې د$u(a,b)$كميت د a_0 اوb_0لپاره اصغري قيمت اخلي.د(2) تابع د$a=a_0$ او$b=b_0$ لپاره د $y=a_0x+b_0$ تجربوي فورمول په لاس راكوي.

مثال. د x او y كميتونو د تغيراتو نتايج په لاندې جدول كې وركړشوي دي

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

فرضوو چې د x او y ترمنځ د$y=ax+b$خطي رابطه وجود لري په داسې حال كې چې aاوbدكوچنيو مربعاتو دطريقې له مخې ټاكل كېږي. دلته $n=5$ دي.

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25\ , \sum_{k=1}^{5} x_k = 5\ , \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16.5\ \ , \sum_{k=1}^{5} y_k = 8$$

د(3) نورمال سیستم لاندې شکل غوره کوي:

$$25a + 5b = 16.5$$
$$5a + 5b = 8$$

ددې سیستم د حل په نتیجه کې $a = 0.425$ او $b = 1.175$ په لاس راځي.بناء $y = 0.425x + 1.175$ دی.

تمرینونه

دلاندې توابعو دموجودیت ناحیه په لاس راوړئ.

1. $u = 4 - x + 2y$ [د xoy ټوله مستوي]

2. $u = \frac{3}{x^2+y^2}$ [پرته له $(0,0)$ نقطې څخه د xoy ټوله مستوي]

3. $u = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

[د I او III حجرې $0 < x > 0, y$ او $[y < 0, x < 0$

4. $u = arc\ cos(x + y)$

[د $-1 < x + y \leq 1$ پټه]

5. $u = ln(x + y) + x - y + 1$

[د $x + y > 0$ نیمه مستوي]

6. $u = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

[د $x^2 + y^2 < 4$ دایروي سطح]

7. $u = arc\ sin(x^2 + y^2)$

[د $x^2 + y^2 \leq 1$ دایروي سطح]

8. $u = \frac{xy}{x-y}$

[پرته د $y = x$ خط څخه د xoy ټوله مستوي]

9. $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

[د xoy ټوله مستوي پرته د ox او oy خطونو څخه]

10. $u = ln\,x\,ln\,y$

[I ربع $0 < x > 0, y$]

11. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

[$y > 0, x > 0$ ربع I]

دلاندې توابعو لومړی ترتیب قسمي مشتقات په لاس راوړئ.

12. $u = x^3 + 3x^2y - y^3$

$[\acute{u}_x = 3x^2 + 6xy, \acute{u}_y = 3x^2 - 3y^2]$

13. $u = \sqrt{x + 3y}$

$[\acute{u}_x = \frac{1}{2\sqrt{x+3y}}, \acute{u}_y = \frac{3}{2\sqrt{x+3y}}]$

14. $u = arc\,tan\frac{y}{x}$

$[\acute{u}_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \acute{u}_y = \frac{x}{x^2+y^2}]$

15. $u = arc\,tan(2x - y)$

$[\acute{u}_x = \frac{2}{1+(2x-y)^2}, \acute{u}_y = \frac{-1}{1-(2x-y)^2}]$

16. $u = (1 - x)^{y^2}$

$[\acute{u}_x = -y^2(1 - x)^{y^2-1}, \acute{u}_y = 2y(1 - x)^{y^2}\,ln(1 - x)]$

17. $u = x^3y^2 + 2x\,ln\,y + x^y$

$[\acute{u}_x = 3x^2y^2 + 2\,ln\,y + yx^{y-1}, \acute{u}_y = 6x^3y + \frac{2x}{y} + x^y\,ln\,x]$

18. $u = (1 + xy)^y$

$[\acute{u}_x = \frac{y^2u}{1+xy}, \acute{u}_y = u(ln(1 + xy) + \frac{xy}{1+xy}]$

19. $u = x^y + arc\,tan\frac{x}{y}$

$[\acute{u}_x = yx^{y-1} + \frac{y}{x^2+y^2}, \acute{u}_y = x^4\,ln\,x - \frac{x}{x^2+y^2}]$

20. $u = x^3\,sin\,y + y^4$

$[\acute{u}_x = 3x^2\,sin\,y, \acute{u}_y = x^3\,cos\,y + 4y^3]$

21. $u = x^6 - y^4$

$[\acute{u}_x = 6x^5, \acute{u}_y = -4y^3]$

د لاندې توابعو لپاره $\acute{u}_x$ او $\acute{u}_y$ قیمتونه په ورکړشوو نقطوکې په لاس راوړئ.

22. $u = \frac{x+y}{x-y}, A(2,1)$

[$\acute{u}_x = -2, \acute{u}_y = 4$ د $A(2,1)$ په نقطه کې]

23. $u = \frac{1 - xy}{1 + xy}, A(0,1)$

[$\acute{u}_x = -2, \acute{u}_y = 0$ د $A(0,1)$ په نقطه کې]

24. $u = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, B(1,1)$

[د $B(1,1)$ په نقطه کې $\acute{u}_x = \frac{2}{3}, \acute{u}_y = \frac{3}{2}$]

25. $u = ln\sqrt{x^2y^2}, C(\sqrt{2},1)$

[د $C(\sqrt{2,1})$ په نقطه کې $\acute{u}_x = \frac{\sqrt{2}}{3}, \acute{u}_y = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

د لاندې توابعو کلي دیفرنسیال په لاس راوړئ .

26. $u = \frac{5x+3y}{9x-2y}$

$[du = \frac{37(-ydx+xdy)}{(9x-2y)^2}]$

27. $u = ln(3x+2y)$

$[du = \frac{3dx+2dy}{3x+2y}]$

28. $u = e^{2x+5y}$

$[du = (12dx+5dy)e^{12x+5y}]$

29. $u = ln(x^2+y^2)$

$[du = \frac{2(xdx-ydy)}{x^2+y^2}]$

30. $u = x\,ln\,y$

$[du = ln\,ydx + \frac{x}{y}dy]$

31. $u = x^4$

$[du = x^4\left(\frac{y}{x}dx + ln\,xdy\right)]$

32. $u = \frac{x}{y}$

$[du = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy]$

33.د (1,2,3) په نقطه کې د $Z = x^2 + 2y^2$ پر سطحې باندې دمماس مستوي معادله ولیکئ .

$[2x + 4y - 7 = 3]$

34. د (1,1,1) په نقطه کې د $x^2 + y^2 - Z^2 = 1$ پرسطحې باندې دمماس مستوي معادله ولیکئ .

$[x + y - Z = 1]$

35.په لاندې سطحو باندې دنورمال معادله ولیکئ.

a) د $Z = x^2 + y^2$ (1,1,3) په نقطه کې .

b) د $x^2 + y^2 = Z^2$ (3,4,5)په نقطه کې .

$$\left[a)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{Z-3}{1},\ b)\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{Z-5}{-5}\right]$$

دلاندې توابعو دویم ترتیب قسمي مشتقات په لاس راوړئ.

36. $a)\ \ Z = x^3 - 4x^2y + 5y^3$

$[u''_{x^2}=6x-8y, u''_{xy}=-8x, u''_{y^2}=10]$

b) $e^x \ln y$

$[u''_{x^2}=e^x \tan y, u''_{xy}=\frac{e^x}{y}, u''_{y^2}=-\frac{e^x}{y^2}]$

37. $u=\sin(x+y)$

$[u''_{x^2}=u''_{xy}=u''_{y^2}=-\sin(x+y)]$

38. $u=x \operatorname{arc}\tan y$

$[u''_{x^2}=0, u''_{xy}=\frac{1}{1+y^2}, u''_{y^2}=-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}]$

39. $u=e^{-\frac{y}{x}}$

$[u''_{x^2}=\frac{y}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}-2\right), u''_{xy}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right), u''_{y^2}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}]$

40. $u=1+x+y$

$[u''_{x^2}=u''_{xy}=u''_{y^2}=0]$

د لاندې توابعو لپاره دریم ترتیب قسمي مشتقات په لاس راوړئ.

41. $u=x^5+3y^3+2x-y \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=? \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=?$

$[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=60x^2, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=18]$

42. $u=\cos(x-y) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=?$

$[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=-\sin(x-y)]$

43. $u=\frac{y}{x}+10 \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}=? \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=?$

$[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}=0, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=\frac{2}{x^3}]$

په لاندې مسایلو کې فرض کړئ چې $x=x(t)$ او $y=y(t)$ دی، $\frac{du}{dt}$ په لاس راوړئ.

44. $u=ye^x+1$

$[\frac{du}{dt}=e^x\left(y\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)]$

45. $u=\cos\frac{x}{y}$

$[\frac{du}{dt}=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)]$

46. $u=\ln(4+x^2+y^2)$

$[\frac{du}{dt}=\frac{2}{4+x^2+y^2}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)]$

فرض کړئ چې $x=x(t,\tau)$ ، $y=y(t,\tau)$ دي ، $\frac{\partial u}{\partial t}$ او $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ په لاس راوړئ.

47. $u=e^{\frac{y^2}{x}}$

$$[\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(\frac{-y}{x}\frac{\partial x}{\partial t}+2\frac{x}{\partial t}\right),\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{x}{y}e^{\frac{y^2}{x}}\left(\frac{-y}{x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+2\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)]$$

48. $u = x\tan y$

$$(\frac{\partial u}{\partial t}=\tan y\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{x}{\cos y^2}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{\cos y}(\sin y\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial t}),\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{1}{\cos y}(\sin y\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial \tau}))$$

49 . د لاندې غیر صریحو توابعو لپاره$\frac{du}{dx}$په لاس راوړئ.

$a)\quad x^3+y^3-3xy=0$

$b)\quad xy-\ln y=0$

$c)\quad ye^x+e^y=0$

$$(a)\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x},b)\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy},c)\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^x}{e^x+e^y})$$

د لاندې توابعو لپاره اکستریمم وڅیړئ.

50. $u=x^3+8y^3-6xy+5$

[د$(1,\frac{1}{2})$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $(u_{min}=4)$، $(0,0)$ په نقطه کې اکستریمم نه لري]

51. $u=(x-1)^2+2y^2$

[د$(1,0)$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $(u_{min}=0)$]

52. $u=2x^3-x^2+xy^2-4x+3$

[د $(-\frac{2}{3},0)$ په نقطه کې تابع د اعظمي قیمت لرونکې ده $\left(u_{max}=4\frac{17}{27}\right)$, د $(1,0)$ په نقطه کې اصغري $(u_{min}=0)$ ، د $(0,-2)$ او $(0,2)$ په نقطوکې اکستریمم نه لري]

53. $u=2x^3+2y^3-36xy+430$

[د$(6,6)$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $(u_{min}=-2)$ د $(0,0)$ په نقطه کې تابع اکستریمم نه لري]

54. $u=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

[د$(-4,1)$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $(u_{min}=-1)$]

55. $u=3x+6y-x^2-xy-y^2$

[د$(0,3)$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $(u_{min}=9)$]

56. $u=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

[د$(-2,0)$ په نقطه کې تابع اصغري قیمت لري $\left(u_{min}=-\frac{2}{e}\right)$]

57. هغه قایم متوازي السطوح چې داضلاعو مجموعه یې 12a او اعظمي حجم لرونکې وي په لاس راوړئ. [مکعب]

58. د a مثبت عدد په درې مثبتو برخو داسې وویشئ چې دهغوي دمربعاتو حاصل تر ټولو کوچنی وي.

[ټول ضربي اجزاء مساوي په $\frac{a}{3}$ دي]

59. فرض کړئ چې x او y د $y = ax + b$ خطي رابطې په واسطه ارتباط موندلی دی د a او b قیمتونه دکوچنې مربعاتو دطریقې پر اساس تعین کړئ ، کله چې په ورکړ شوې تجربه کې د x او y متحولینو ترمنځ رابطه په لاندې جدول کې ورکړ شوې وي.

X	0	1	1.5	2.1	3
Y	2.9	6.3	7.9	10.0	13.2

$[a = 3.42, b = 2.86]$

60. دپنځو کلونو په موده کې د یوې موسسې دکار تولید قوه د لاندې جدول په واسطه انعکاس موندلی.

کلونه	1	2	3	4	5
دتولیداتو داوسط مقدار تفصیلی تغیر	235	250	270	292	300

فرضوو چې دکار تولیدي قوه د $y = ax + b$ خطي رابطې په واسطه لاس ته راځي.دورکړ شوو معلوماتو په پام کې نیولو سره د a او b پارامترونه دوړومربعاتو دطریقې له مخې په لاس راوړئ.

دریم فصل

دڅومتحوله توابعو انتګرال نیول

§ 1.3 .دوه ګوني انتګرالونه

1 .هغه مسألې چې ددوه ګوني انتګرالونو په مفهوم بدلیږي.

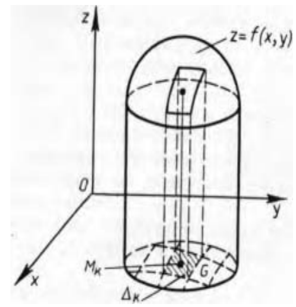
دیوې غیر متجانسې مقوا(لوحې) دکتلې په هکله مسأله . فرضوو چې Gد همواره سطح دهغه مواد و څخه جوړه شوې ده چې کثافت یې د $\rho = (M) = \rho(x,y)$ په واسطه تاکل کیږي.دېتولې مادې سطحې کتله (دېتولې مقوا موادومقدار) په لاس راوړئ .د M په نقطه کې دکثافت مفهوم ،دG ناحیې دیوې ډیرې کوچنۍ برخې دحدې قیمت څخه عبارت دی کوم چې د M نقطه په هغې کې شامله ده.د G ناحیه په اختیاري ډول سره د $\Delta_n ....\Delta_2, \Delta_1$ په n قسمي ناحیو پرته دداخلي نقطوڅخه ویشو داسې چې د هرې برخې اړوند مساحت $\Delta\omega_n ....\Delta\omega_2, \Delta\omega_1$ په واسطه ښودل شوی دی (13 شکل) . فرضوو چې په حدي حالت کې د Δ_k هرې قسمي برخې کثافت ثابت او د $\rho(N_k)$ سره مساوي اوهم د Δ_k لپاره N_k (ξ_k, η_k)یوه اختیاري نقطه ده. نو د Δ_k کتله په تقریبي ډول مساوي ده په :

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\omega_k$$

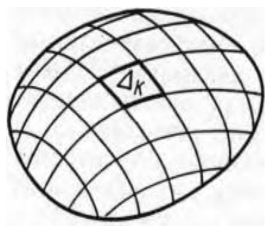
دېتولې لوحې دکتلې پیداکولو لپاره لاندې تقریبي فورمول په لاس راوړو:

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\omega_k \qquad (1)$$

فرضوو چې λ د قسمي ناحیو ترټولو لوی قطروي .باید ووایو چې دیوې ناحیې قطر د نوموړې ناحیې دسرحدي نقطو ترټولو لوئی فاصلې ته وایي .دمثال په ډول دیو مکعب مستطیل قطرونه دهغې قطر او د الیپسوئید قطر دهغې لوی محور څخه عبارت دی . دکرې لپاره دقطر ذکرشوی تعریف دعادي تعریف سره مطابقت کوي.(1) مجموعه دm مطلوبې کتلې لپاره ترټولودقیقه ارایه ده ، کله چې $\Delta_n ....\Delta_2, \Delta_1$ هر قسمي ناحیې قطرونه ډیرکوچني وي .په دې ډول د mکتلې ددقیقې لاسته راوړنې لپاره لاندې رابطه پکار وړل کیږي.



(14شکل)



(13 شکل)

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k$$

تبصره.ددې مسألې په مطلق شباهت سره ، دبرقي چارچونو د مجموعې مسأله چې د G په ناحیه کې توزیع شوې او د (M) ρ کثافت لرونکې ده ، په یوه لوښي کې دمایع فشار، دنوري انرژۍ مقدار چې د Gپه ناحیه کې کمیږي، او داسې نور مسایل محاسبه کیږي.

داستوانه اي جسم(سلندوئید) دحجم په هکله مسأله. فرضوو چې د G په ناحیه کې د f(x,y) متمادي اوغیرمنفي تابع ورکړشوې ده. هغه حجم محاسبه کړئ چې د پورتنۍ خوا څخه د($f(x,y$متمادي تابع، له بنکته خواڅخه د G ناحیې او شاوخوا څخه داستوانوي سطحو په واسطه چې موءلد یې دهغه نړلې منحنې پرمخ حرکت کوي کوم چې دG ناحیه یې احاطه کړې ، محدوددی(14 شکل). داډول جسمونه په لنډ ډول داستوانوي سطحې په نوم یادوو.په خاص حالت کې کله چې پورتنۍ قاعده دمستوي یوه برخه وي چې د لاندینۍ سطحې سره موازي وي دسلندوئید په نوم یادیږي. دمدورو استوانوجسم جانبي سطح داستوانې بنه مثال دی.

دورکړشوې استوانې د V حجم دپیداکولو لپاره د G نا حیه په اختیاري ډول د $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots\ldots \Delta_n$ په n وړوناحیو ویشو داسې چې د هرې ناحیې مساحت دداخلي مشترکو نقطو څخه پرته مطابقتاً د $\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}, \ldots \ldots \Delta_{\omega_n}$ په واسطه ښیو.د $\Delta_1 \Delta_2 \ldots\ldots, \Delta_n$ په هرې قسمي ناحیه کې د N_k (ξ_k, η_kاختیاري نقطه ټاکو اود قایم استوانوي شکلي ستون چې قاعده یې د$\Delta_{k.}$ او ارتفاع یې $f(\xi_k, \eta_k)$ ده تشکیلوو.ددې قایم استوانوي شکلي ستون حجم عبارت دی له $f(\xi_k, \eta_k)\Delta\omega_k$.ددې

ستونونومجموعي حجم دزينه يي شكله جسم حجم وركوي او په تقريبي ډول دا داستوانې دحجم سره معادل دی .په نتيجه کې .

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k$$

دا مجموعه د V مطلوب حجم په دقيقه توګه ارايه کوي، کله چې $\Delta_1, \Delta_2 .... \Delta_n$ هرې قسمي ناحيې قطر په کافی اندازه کوچنی وي. په دې ډول د V حجم لپاره په مطلق ډول لاندې رابطه ليکو.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k$$

په داسې حال کې چې λ د $\Delta_1, \Delta_2 .... \Delta_N$ قسمي ناحيو تر ټولو لوي قطر دی .

2 . ددوه ګوني انتګرال تعريف . دهغه مسايلوله حل څخه چې په 1 بند کې ذکر شو،ليدل کېږي چې نوموړې مسألې دمختلفو مفاهيمو لرونکې دي ليکن دهغوی دحل لپاره درياضي يوه او يوازې يوه طريقه وجودلري.په ټولو دې ذکرشوو مسايلو کې يوازې او يوازې لاندې افاده په لاس راوړو.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k \qquad (2)$$

په داسې حال کې چې f(x,y) تابع د G په ناحيه کې تعريف شوې ده.

تعريف.که چېرې د(2) لميټ موجود اود G ناحيې په ويشلو او په ويشل شوو ساحو که د $N_k(\xi_k, \eta_k)$ نقطې په انتخاب پورې اړه ونه لري ، نو دالميټ د f(x,y) تابع لپاره د G په ناحيه کې ددوه ګوني انتګرال په نوم ياديږي او د لاندې سمبول په واسطه ښودل کېږي.

$$\iint_G f(x,y)\,d\omega = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k \qquad (3)$$

دG په ناحيه کې د f(x,y) تابع ته دانتګرال نيولو وړ تابع وايي په دې ډول f(x,y) تر انتګرال لاندې تابع، dw عنصر مساحت ،G دانتګرال نيولو ناحيه ، x او y دانتګرال نيولو متحولين او $\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\omega_k$ دانتګرالي مجموعې په نوم ياديږي .

تبصره. $\iint_G f(x,y)\,dxdy$ دليکلو طريقه ددوه ګوني انتګرال لپاره هم استعماليږي .

تعریف. یوه منحني ته هموار منحني وایي که چېرې دهغې په هره نقطه کې مماس موجودوي او دیوې نقطې څخه بلې نقطې ته دتیریدوپه صورت کې دمماسو نو موقعیت په متمادي ډول تغیر وکړي.په دې ډول هغه منحني چې $x = \varphi(t), y = \psi(t)\ , \alpha \le t < \beta$ معادلوپه واسطه ورکړل شي،یو هموار منحني ده کله چې د $\varphi(t)$ او $\psi(t)$ توابع متمادي او د $\varphi'(t)$ او $\psi'(t)$ متمادي مشتقات و لري او په عین زمان کې دصفر سره مساوي نه شي (په حقیقت کې منحني په هره نقطه کې دمماس لرونکی وي).هغه متمادي منحني چې د معین شمیر هموارو ټوټو څخه تشکېل شوی وي دقسماً هموار منحني په نوم یادیږي .

لاندې قضیه صحت لري (دا قضیه دهغه عمومي قضیې څخه په لاس راځي کومه چې د .دانالیز ریاضي په مکمل کورس کې لیکل شوې ده دمثال په ډول کولای شي [6]دویم جلد وګورئ).

ددوه ګوني انتګرال د موجودیت قضیه. که چېرې د G نا حیه د Γ قسماً هموار سرحد په واسطه محدوده ، تړلې اوهم د $f(x,y)$ تابع د G په نا حـــیه کې متـــمادي وي نـــو دا تابع دG په نا حـــیه کې د انتګرال نیولو وړ ده.

په راتلونکې کې مونږ فرضوو چې ددې قضیې شرایط دتطبیق وړ دي.

دپورتنۍ ذکرشوې مسألې او د ددوه ګوني انتګرال د تعریف له مخې دانتیجې ترلاسه کېږي:

1) د(3) دوه ګوني انتګرال کله چې تر انتګرال لاندې تابع مثبته وي کولای شو په فزیکې ډول تعبیر کړو دمثال په ډول دیوې لوحې دکتلې سره مطابقت کوي.

2) نوموړی انتګرال کله چې تر انتګرال لاندې تابع مثبته وي دهندسې له نقطې نظر ه کولای شودمربوطه سلندوئید دحجم سره تعبیر کړو. په خاص حالت کې د واحدې تابع $f(x,y) = 1$ انتګرال د G په نا حیه کې یعنې $\iint_G d\omega$ دانتګرال نیولو ناحیې د مساحت سره مساوي دی: $s=\iint_G d\omega$.

3. ددوه ګوني انتګرالونو خواص. دا هغه خاصیتونه دي چې دهغوی ثبوت دمعینو انتګرالونو د خاصیتونو په شان صورت نیسي . نوموړي خواص بې له ثبوت څخه ذکر کوو.

1) ثابت ضریب کولای شو دانتګرال د علامې څخه د باندې ولیکو.

2) دوو توابعو دحاصل جمع انتګرال مساوي دی په حاصل جمع دانتګرالونو دتوابعو سره.

تبصره. دويم خاصيت ته کولای شو دتوابعو تر معين شمير دحاصل جمعې پورې عموميت ورکړو.

3) فرضوو چې د G ناحيه د G_1 او G_2 په ناحيو ويشل شوې ده.

نو.

$$\iint_G f(x,y)d\omega = \iint_{G_1} f(x,y)d\omega + \iint_{G_2} f(x,y)d\omega$$

4) که چېرې دG په ناحيه کې $f(x,y) > 0$ وي نو د $\iint_G f(x,y)d\omega > 0$ دی.

5) د انتګرال نيونې ناحيې G مساحت او دانتيګرال لاندې تابع قيمت دانتيګرال نيونې ناحيې په يو شمير نقطو کې دضرب حاصل يې ددوه ګوني انتګرال سره مساوي دی (دمتوسط قيمت په هکله قضيه)

4) ددوه ګوني انتګرال محاسبه. فرضوو چې د$\iint_G f(x,y)d\omega$ دانتګرال محاسبه د $f(x,y)$تابع لپاره چې دG په ناحيه کې متمادي ده، غوښتل شوې وي.

دمستطيل شکل ناحيې حالت. فرضوو چې د انتګرال نيولو ناحيه د $a \le x \le b, c \le y \le d$ مستطيل وي (په لنډ ډول$[a,b,c,d]$)دG ناحيه دمستقيمو خطونو په واسطه چې دمحوراتو سره موازي دي او د ox محور د $x_0 = a, x_1, \dots, x_{m-1}$ $x_m = b$, او د oy محور د $y_0 = c, y_1 \dots\dots\dots y_{p-1}, y_p = b$ له نقطو څخه تيريږي په کوچنيو ناحيو ويشو. په نتيجه کې دG ناحيه په کوچنيو مستطيلونو ويشل کيږي داسې چې دهغوی لوی قطردλپه واسطه ښيو. فرضوو چې د$\Delta_{\nu j}$ مستطيل دνعمودي او د j افقي نوارونو دتقاطع څخه جوړ شوی دی. دنوموړي مستطيل مساحت عبارت دی له$\Delta_{\omega_{\nu j}} = \Delta x_\nu \Delta y_j$ څخه، په داسې حال کې چې $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ او $\Delta y_\nu = y_\nu - y_{\nu-1}$. د $(\xi_{\nu j}, n_{\nu j}) \epsilon \Delta_{\nu j}$ نقطه انتخابوو داسې چې$\xi_{yj} = x_{yj},\ j = 1,2, \dots p$.نو دانتګرال نيولو مجموعه عبارت ده له:

$$\delta = \sum_{\nu,j} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j})\Delta x_\nu)\Delta y_j \qquad (4)$$

په داسې حال کې چې مجموعه د ټولوپراختيا موندلو مستطيلونو ده. يعنې دν اوj په ټولو قيمتونو سره $j = 1,2,3 \dots\dots p, \nu = 1,2,3 \dots\dots .m.$

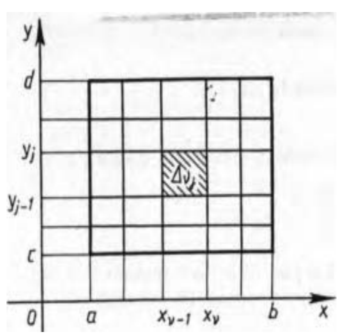
(4) شکله مجموعه چې دجمع کولو دوه اندیکسونه لري ،ددوګوني انتګرالي مجموعې په نوم یادیږي. دنوموړې مجموعی دمحاسبې لپاره کولا ی شو دجمع کولو عملیه یوازې دj لپاره ترسره کړو په داسې حال کې چېνثابت فرض شي. یعنې جمعي اجزاوې یوازې یوه اختیاري ستون او لاسته راغلي نتایج نظرν ته جمع کوو، په نتیجه کې په لاس راوړو.

$$\delta=\sum_{\nu=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} f\left(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}\right) \Delta x_{\nu} \Delta y_{j}\right)=\sum_{\nu=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} f\left(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}\right) \Delta x_{\nu}\right.$$

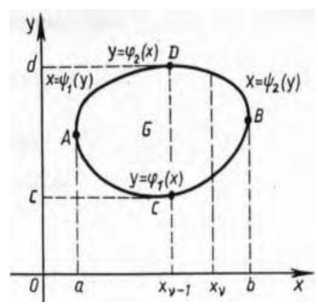
دابنکاره ده چې دیوې مجموعې څخه بلې مجموعې ته تیریدنه ممکنه ده او دا دویم ډول لیکنه ده .په لومړۍ مرحله کې داخلي جمع کول نظرν ته او خارجي جمع کول نظر jته صورت مومي.

د معینو انتګرالونو دیو خاصیت په کارولو سرهاو دوسطي قیمت په برخه کې د قضیې له مخې لرو چې

$$\int_{c}^{d} f\left(x_{\nu-1}, y\right) d y=\sum_{i=1}^{p} \int_{y_{i-1}}^{y_{i}} f\left(x_{\nu-1}, y\right) d y=\sum_{i=1}^{p} f\left(x_{\nu-1}, \eta_{\nu i}\right) \Delta y_{i}$$



(15 شکل)



(16 شکل)

په نتیجه کې.

$$\delta=\sum_{\gamma=1}^{m} \phi\left(x_{\nu-1}\right) \Delta x_{\nu} \tag{5}$$

په داسې حال کې چې

$$\phi\left(x_{\nu-1}\right)=\int_{c}^{d} f\left(x_{\nu-1}, y\right) d y \tag{6}$$

د $\lambda \to 0$ (د $\lambda \to 0$) لپاره $\max \Delta x \to 0$ ،لکه دمخکې په شان λ دقسمي ساحو ترټولو لوي قطر دی) د (5) رابطې څخه دلمیټ په نیولو سره

$$\iint_G f(x,y)d\omega = \int_a^b \phi(x)dx$$

یاله (6)رابطې څخه:

$$\iint_G f(x,y)d\omega = \int_a^d \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{7}$$

اکثراً(7) فورمول په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$\iint_G f(x,y)d\omega = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{8}$$

دوروستنۍ رابطې دښي خوا افاده د مکرر انتگرال په نوم یادیږي . دهغې دمحاسبې لپاره باید په ترتیب سره دوه عادي انتگرالونه ونیول شي. په لومړۍ مرحله کې داخلي انتگرال

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

چې په هغې کې x ثابت په پام کې نیول کېږي او بیا دلاسته راغلې افادې څخه (افاده یوازې x پورې اړه لري) نظرx ته د a څخه تر b پورې خارجي انتگرال نیول کېږي.

په مشابه ډول ددویمې طریقې له مخې دورکړ شوې انتگرالي مجموعې مکرر انتگرال داسې په لاس راوړو:

$$\iint_G f(x,y)d\omega = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \tag{9}$$

مثال. لاندې دوه گونی انتگرال محاسبه کړئ:

$$I = \iint_G (x^2+y^2)dw$$

په داسې حال کې چې دG نا حیه د$1 \geq x \geq 1{,}0 \geq y \geq 0$ مربع ده.

د (8)فورمول څخه په گټه اخیستنه لرو چې.

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\mathbf{1}}(x^2+y^2)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}\ y^2\right)\Big|_0^1=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

دا دوه گونی انتگرال کولای شو د (9) فورمول په واسطه محاسبه کړو.

داختياري ناحيې حالت. فرضووچې د G نا حيه دxoy په مستوي کې (16 شکل) په واسطه ښودل شوې وي. په دې صورت کې د:

$$\int_c^d f(x_{v-1},y)dy$$

انتگرال پرځای (دمستطيل شکل ناحيې حالت) لاندې انتگرال لرو.

$$\int_{\varphi_1(x_{v-1})}^{\varphi_2(v-1)} f(x_{v-\mathbf{1},y})dy$$

په داسې حال کې چې $y=\varphi_{1(x)}$ او $y=\varphi_2(x)$ د G ناحيې دښکتنی اوپورتنی برخې دسرحداتو معادلې دي چې د A او B نقطو په واسطه سره بيليږي.

مطابقتاً دتعويض په طريقه د (8) فورمول په پای کې داسې ليکل کېږي.

$$\iint_G f(x,y)d\omega=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathbf{10})$$

مونږ کولای شو په بل ترتيب هم انتگرال وښيو. يعنې نوموړې انتگرال نظر x ته اوبيايې نظر y ته. نو لا ندې فورمول لاسته راځي.

$$\iint_G f(x,y)d\omega=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad\qquad (11)$$

په داسې حال کې چې$\psi_1(y)$ او $\psi_2(y)$ د G ناحيې دکينې اوښی برخې دسرحداتو معادلې دي(16شکل دې وکتل شي)، چې دC اوD نقطو په واسطه سره بيليږي.

(10)او (11) فورمولونه دهغه شرط په پام کې نيولو سره لاسته راغلي کوم چې د oxاو oy محورراتو سره موازي خطونه د G ناحيې سرحدونه ددوو نقطو څخه په زياتو نقطو کې نه قطعه کوي. که چېرې دا شرط صدق ونه کړي نو دG نا حيه په قسمي ناحيو ويشو.

مثال. لاندې انتگرال د G په ناحيه کې چې د y=x او $y = x^2$ منـــحنياتـــوپه واسطه مـــحدوده شـــوې (17 شکل)، په لاس راوړئ.

$$\iint_G (x+y)dxdy$$

انتگرال لومړی نظر y ته اوبيا نظرx ته نيسو او په لاس راوړو:

$$\iint_G (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy = \int_0^1 \left(x\,y + \frac{1}{3}y^2\right) \Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

کولای شو د انتگرال نيولو د ترتيب په تغير سره لاس ته راغلې نتيجه امتحان کړو.

په قطبي مختصاتو کې دوه گونی انتگرال. فرضوو چې د

$$\iint_G f(x,y)d\omega$$

دوه گونی انتگرال راکړل شوی دی په داسې حال کې چې G د xoy په مستوي کې يوه ناحيه ده او د 18 شکل کې ښودل شوې ده . ښکاره ده چې $x = r\cos\varphi$ او$y = r\sin\varphi$ دی. د G نا حيه دقطبي مختصاتو په سيستم کې د $r = const$ او $\varphi = const$قطبي خطونو په واسطه په کوچنيو ناحيو ويشو (18 شکل). يوه کوچنۍ نا حيه په پام کې نيسو چې مرکزي زاويه يې $\Delta\varphi$ جانبي ضلع يې Δrاو r هغه شعاع وکتور دی کوم چې دنوموړې ناحيې د ښکتنۍ قاعدې سره مطابقت کوي (په دې مانا چې ښکتنۍ قاعده يې $r\Delta\varphi$ ده). دا کوچنۍ نا حيه يو منحني الخط څلور ضلعي ده چې کولای شو په تقريبي ډول يې د هغه مستطيل په واسطه وښيو کوم چې اضلاع يېΔr او $r\Delta\varphi$ دي (دا تبديل دکوچني دقت څخه تر لوړ ترتيب دی ځکه چې دڅلور ضلعي مساحت عبارت دی له

$$\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\varphi}{2} - \frac{r^2\Delta\varphi}{2} = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{(\Delta r)^2\Delta\varphi}{2})$$

نو $\Delta\omega = r\Delta r\,\Delta\varphi$ دی او مونږ به ولرو.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_G f(x_k,y_k)\Delta\omega_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(r_k\cos\varphi_k, r_k\sin\varphi_k)r_k\Delta r_k\Delta\omega_k$$

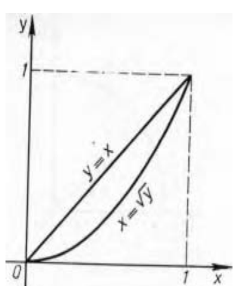
($\sum_G f(x_k,y_k)\Delta\omega_k$ د $f(x,y)$ تابع لپاره د G په ناحیه کې انتګرالي مجموعه ده)

او یا

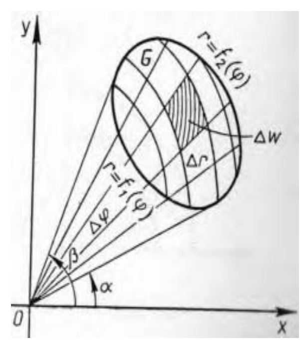
$$\iint_G f(x,y)d\omega = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (12)$$

که دویم انتګرال ته ور شو ، په لاس راوړو.

$$\iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi == \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr, \qquad (13)$$



(17شکل)



(18شکل)

په داسې حال کې چې د انتګرال نیولو حدونه په (18 شکل)کې ښودل شوي دي.

تبصره. که چېرې د انتګرال لاندې تابع او یا دانتګرال نیولو په حدونو کېx^2+y^2 مجموعه شامله وي،نو په اکثرو حالتونو کې دهغې تبدیلول د قطبي مختصاتو سیستم کې دانتګرال محاسبه ساده کوي. ځکه چې ورکړشوې مجموعه په قطبي مختصاتو کې د $(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2$ ډیر ساده شکل غوره کوي.

مثال. دقطبي مختصاتو څخه په استفاده لاندې دوه گونی انتگرال محاسبه کړئ.

$$I = \iint\limits_{G} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

په داسې حال کې چې G د1= R دایرې هغه برخه ده چې په لومړي ناحیه کې واقع او ددایرې مرکز د مختصاتو په مبدا کې واقع دی(19 شکل).

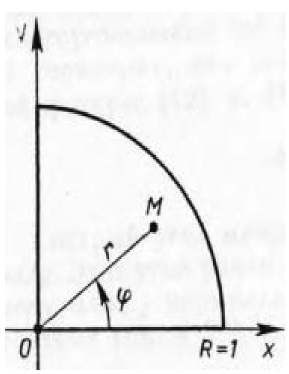
لرو:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

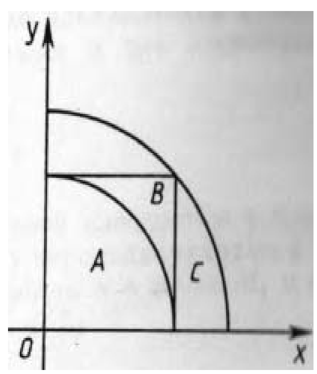
د G په ناحیه کې r د 0 له سرحد څخه تر 1 پورې تبدیلیږی خو φ له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تغیر مومي. پدې ډول د (12) او (13) فورمولونو څخه په لاس راوړو.

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{1} dr = \frac{\pi}{2}$$

دایلر پویزون انتگرال. (سیمسون دین پویزون (PoissonSimeonDenis) (1840–1781) فرانسوی ریاضی او فزیک پوه). لاندې انتگرال ته دایلر (Euler .L)-پویزون انتگرال وایي.



(19 شکل)



(20 شکل)

$$\int\limits_{0}^{-\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} e^{-x^2}\,dxr \qquad (14)$$

دا انتګرال داحتمالاتو او فزيکي احصايې په نظر ياتو کې دنمونې په ډول استعماليږي. ثابتوو چې داانتګرال متقارب او دهغې قيمت په لاس راوړو.

فرضوو چې A دهغې دايرې څلورمه برخه ده چې شعاع يې R ده، B هغه مربع ده چې. اضلاع يې R او A وي او C دهغه دايرې څلورمه برخه ده چې شعاع يې $r\sqrt{2}$ او B په برکې لري. ددوه ګونې انتګرال دخواصو څخه په ګټه اخيستنې لرو:

فرضوو چې A دهغې دايرې څلورمه برخه ده چې شعاع يې r وي، B هغه مربع ده چې. اضلاع يې R او A وي او C دهغه دايرې څلورمه برخه ده چې شعاع يې $R\sqrt{2}$ او B په برکې لري. ددوه ګونې انتګرال دخواصو څخه په ګټه اخيستنه لرو:

$$\iint_A e^{-x^2-y^2}\,d\omega < \iint_B e^{-x^2-y^2}\,d\omega < \iint_C e^{-x^2-y^2}\,d\omega \qquad (15)$$

دA اوB په ناحيو کې انتګرال په قطبي مختصاتو کې محاسبه کوو:

$$\iint_A e^{-x^2-y^2}\,d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{y} e^{-R^2}\,Rdr = \frac{\pi}{4}\left(1-2^{-R^2}\right)$$

$$\iint_C e^{-x^2-y^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

د B په ناحيه کې انتګرال د معين انتګرال مربع ته راوړو.

$$\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dw = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \int_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

(15)رابطه لاندې شکل غوره کوي.

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^{y} e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} < \int_0^R e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}$$

ددې نامساواتو دواړه انجامي نقطې د$R \to \infty$ لپاره د$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ خواته تقرب کوي. نو په څرګند ډول د ورکړ شوې قضيې له مخې

$$lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

په نتيجه کې (14) انتګرال متقارب او$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ دی.

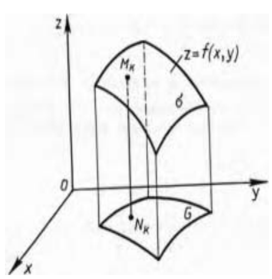
7.منحني الخطو سطحو دمساحت محاسبه. فرضوو چې σ د$z=f(x,y)$ سطحې يو برخه ده او G د x0y په مستوي د هغې تصوير دى (21 شكل). فرضوو $f(x,y)$ او دهغې قسمي مشتقات د G په ناحيه كې تر سرحدي نقطو پورې متمادي دي. دσسطحې مساحت s مطلوب دى، په لاس راوړئ (په دې ځاى كې او په3.4 پاراگراف كې په لنډ ډول دسطحې د يوې برخې په نوم يادوو).

د G ناحيه $\Delta_1,\Delta_2\ldots\ldots\Delta_n$په n كوچنيو ناحيو چې دمشتركو داخلي نقطو لرونكې نه وي ،ويشو داسې چې دهغوي مساحتونه په ترتيب سره $\Delta\omega_1,\Delta\omega_2,\ldots,\Delta\omega_n$ دي.دΔ_kپه هره ناحيه كې د $N_k(\xi_k,\eta_k)$ اختياري نقطه انتخابوو.دانقطه دσ په سطحه كې د$M_k(\xi_k,\eta_k,\theta_k$ نقطې سره مطابقت كوي داسې چې $\theta_k=f(\xi_k,\eta_k)$ دي .د M_k په نقطه كې د σ پر سطحې مماس مستوي او نورمال په نوموړې سطح رسموو د(22 شكل). دمماس په مستوي كې د Δ'_k شكل چې مساحت يې د $\Delta_{\omega' k}$ په واسطه ښيو، په پام كې نيسو نوموړى شكل دمماس مستوي څخه قايمه استوانه بيلوي چې قاعده يې Δ_k ده. په دې ډول د σ سطح د Δ'_k نريو مستوي سطحو په واسطه پوښل كېږي داسې چې ددې سطحو دمساحتونو مجموعه په تقريبي ډول د σ سطحې s مساحت ارايه كوي يعنې:

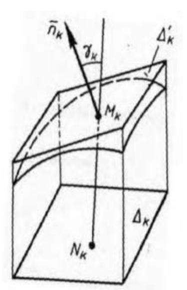
$$s\approx\sum_{k=1}^{n}\Delta\omega'_k$$

څرگنده ده چې

$$\Delta\omega_k=\Delta\omega'_k\cos\gamma_k$$



(21شكل)



(22 شكل)

دا رابطه دڅوضلعي لپاره په ابتدايى هندسه كې ثبوتيږي. نوموړې رابطه داختياري مستوي اشكالو لپاره هم صدق كوي [12]د II جلد). او يا

$$\Delta\omega'_k = \frac{\Delta\omega_k}{\cos\gamma_k}$$

دلته γ_k دمماس مستوي او دxoyمستوي ترمنځ حاده زاويه ده. نوموړې زاويه د هغې عمودو نو ترمنځ زاويې سره مساوي ده کومه چې په سطحو باندې رسميږي يعنې هغه زاويه چې دoz محور او هغه نورمال تر منځ جوړيږي کوم چې دM_k په نقطه کې دσ پر سطحې عمود رسميږي. بنا پر دې

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k,\eta_k) + f'^2_y(\xi_k,\eta_k)}}$$

دی.

په نتجه کې

$$\Delta\omega'_k = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k,\eta_k) + f'^2_y(\xi_k,\eta_k)}\,\Delta\omega_k$$

بنا پر دې

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\omega'_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(\xi_k,\eta_k)-f'^2_y(\xi_k,\eta_k)}}\Delta\omega_k \qquad (16)$$

دتعريف له مخې د σ سطحې مساحت s دوروستنی مجموعې د لميټ څخه عبارت دی کله چې د Δ_k قسمي ناحيو تر ټولو لوی قطر صفر ته تقرب وکړي. څرنگه چې(16) رابطې بنی خواد

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}$$

متمادي تابع لپاره انتگرالي مجموعه ده نو د (16) مجموعې لميټ موجود او

$$s = \iint_G \sqrt{1 + f'^2x(x,y) + f'^2y(x,y)}\; d\omega$$

دی.

مثال . د

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

دکرې دجانبي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

د کرې دپورتنی برخې معادله عبارت ده له:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

په دې حالت کې د

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, z'_y = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

په نتیجه کې

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y(x,y)} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

لروچې

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_G \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

په داسې حال کې چې د انتګرال نیولو ناحیه دR^2 $x^2+y^2 \le$ شرط په واسطه تعینیږي. په نوموړي انتګرال کې دقطبي مختصاتو څخه په استفاده، لاسته راوړو:

$$s = 2\int_0^{2\pi} D\varphi \int_0^R \frac{Rrdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = -2r\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\,\Big|_0^R d\varphi =$$
$$= 2R\int_0^{2\pi} Rd\,\varphi = 4\pi r^2$$

8.په میخانیک کې ددوه ګوني انتګرال تطبیق. مخکې مو ددوه ګوني انتګرال تطبیق د هندسې او فزیک په ځینو برخوکې مطالعه کړ اوس دهغې دتطبیق ناحیه په میخانیک کې هم په پام کې نیسو.

ستاتیکي مومنت او د مقوا د ثقل مرکز. دپورته مقوا دستاتیکي مومنت په محاسبه کولو کې دقایمو وضعیه کمیاتو سیستم په پام کې نیسو .ددې منظور لپاره د $N_k(\xi_k, \eta_k)$ په نقطه کې د مربوطه قسمي ناحیې کتله متمرکزه کوواودتشکېل شـــــــــــوو مادي نقطوسیستم ستاتیکي مومنت لاسته راوړو:

$$M_x^{(n)} = \sum_{k-1}^{n} \eta_k\,\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\omega_k, M_y^{(n)} = \sum_{k-1}^{n} \xi_k\,\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\omega_k$$

دلمیټ او د لمیټ دمعمولي شرایطوپه پام کې نیولو او د3.9 پاراګراف حالت سره په مشابهت کې لاسته راوړو.

$$M_x = \iint_G y\rho(x,y)d\omega \quad , \quad M_y = \iint_G x\,\rho(x,y)\,d\omega$$

په پای کې دثقل مرکزد تعریف په پام کې نیولوسره لرو:

$$x_c = \frac{M_x}{m} \quad , \quad y_c = \frac{M_y}{m}$$

په دې ځای کېm د مقواکتله ښيي .

دمتجانیسې مقوا دحالت په صورت کې لرو:

$$x_c = \frac{1}{s}\iint_G xd\omega \quad , \quad y_c = \frac{1}{s}\iint_G yd\omega$$

مثال1. دهغې متجانیسې مقوا(1= ρ) دثــقل مرکزپه لاس راوړئ کوم چې ox، د محــوراو د $y=\sqrt{R^2-x^2}$ نیمې دایرې په واسطه احاطه شوې ده.

دتناظر په پام کې نیولو سره پوهیږو چې $x_c=0$. علاوه پر دې

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$M_x = \iint_G yd\omega = \iint_G r^2 \sin\varphi dv d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \int_0^\pi \frac{r^3}{3}\sin\varphi \Big|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi$$

$$= -\frac{R^3}{3}\cos\varphi \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}R^3$$

بنأ

$$Y_C = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.24R$$

دانتایج مخکې دګولدېن(Guldin)دویمه قضیې په مرسته لاسته راغلي وو.

دمقوا انرشیامومنت . دP مادي نقطې انرشیامومنت چې د m کتلې لرونکي ده نظر یوه اختیاري

محورته، دکتلې اودنوموړي محورڅخه د p نقطې د فاصلی مربع دحاصل ضرب څخــه عبارت دی.

دیوې مقواانرشیامومنت نظر دقایمو وضعیه کمیاتومحورونوته دلاسته راوړلوپه منظورکولای شو

دهغې طریقې په شان عمل کووکوم چې د ستاتیکي مومنت لــــپاره پکاروړل شوې ده.په دې ډول مونږیوازې نهایې نتایج په پام کې نیسو.

$$I_x = \iint_G y^2\rho\ (x,y)d\omega\ ,\qquad I_y = \iint_G x^2\rho\ (x,y)d\omega$$

بايد ووايوچې $\iint_G xy\rho\ (x,y)d\omega$ دمرکزڅخه د فرارانرشیامومنت په نوم یاد اود I_{XY} پواســـطه ښودل کېږي.

په میخانیک کې اکثراًدنقطودانرشیاقطبي مومنت په پام کې نیول کېږي او هغه دقطب څخه دنقطو دفاصلې مربع اوکتلوحاصل ضرب څخه عبارت ده.دیوې مقواقطبي انرشیانظر محورراتومبدأ ته عبارت ده له:

$$I_O = \iint_G (x^2+y^2)\,\rho\ (x,y)d\omega = I_x + I_y$$

مثال2. د $R^2 \leq x^2+y^2 ,0 \leq$y نیمایي متجانیسې کرې(ρ=1)لپاره لرو.

$$I_y = \iint_G x^2\,d\omega = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} (rcos\varphi^2)\,rdr = \frac{1}{8}\pi R^4$$

§2.3د رې ګوني انتیګرال.

درې ګوني انتیګرالونه په کامل ډول د دوه ګوني انتیګرالونوسره شباهت لري بناً ددې پاراګراف څرګندونه دامکان ترحده پورې خلاصه شویده.

1 . دغیرمتجانیسې کتلې په هکله مسآله.درې ګونی انتیګرال.

فرضووپه درې بــعــدي فضا کې دΩناحیه دهغومـــوادوڅخه ډکه شوې کــومه چې کثافت يې $\rho(x,y,z)\ =\ \rho$ (M) دی. غواړو د ناحیې دټولوموادو کتله په لاس راوړو.د دې منظور لپاره دΩناحیه د$\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_n$ په n کوچنیو ناحیو ویشوداسې چې دمشترکو نقطو لرونکې نــــه وي اومربوطه حجمونه يې د $\Lambda v_1, \Lambda v_2,\ldots,\Delta V_n$ په واسطه ښیو.فرضووچې په حدي حالت کې د هرې قسمي ناحیې کثافت ثابت اوله(N_K)= ρ سره مساوي دی. همــدارنګه دΔ_K قسمـــي ناحیـــې لپاره$N_k(\xi_n,\eta_k,\theta_k)$ یوه اختیاري نقطه ده. نو دΔ_k ناحیې کتله په تقریبي ډول د$\rho(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta v_k$سره مساوي ده. دټول جسم دکتلې لپاره لاندې تقریبي مساوات پلاس راوړو.

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k \ , \eta_k, \theta_k)\Delta v_k$$

دا مجموعه د m مطلوبې کتلې دقیقه محا سبه ښیي کله چی د $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$ قسمي ناحیوترټولو لوی قطر په کافی اندازه کوچنی شي.(دیوي درې بعدي ناحیې دقطرتعریف دمستوي ناحیودقطر پـــه شان دی .

د m مطلق قیمت لپاره لرو .

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k \ , \eta_k, \theta_k)\Delta v_k$$

پـــه داسې حال کې چې λ د $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$ ناحیو لپاره تر ټولو لوی قطردی.په مشابه ډول د لمیټ د محاسبه کولو لپاره باید نورې مسألې ذ کرکړو .ددې له پاره دا لاندې افاده په پام کې نیسو .

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k \ , \eta_k, \theta_k)\Delta v_k \qquad (1)$$

په داسې حال کې چې(f(x,y,zتابع دG په ناحیه کې ور کړشوې ده.

تـــعریـــف. که چېرې د(1) لمیټ موجودوي داسې چې دΩناحیې Δ_K په ویشلواو د $N_K(\xi_k, \eta_k, \theta_k)$ نقطې ټاکلو پورې اړه ونه لري، نودې لمیټ ته د(f(x,y,z تابع درې ګونی انتیګرال دΩ په ناحیه کې وایي اود لاندې سمبول په واسطه ښودل کېږي.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k \ , \eta_k, \theta_k)\Delta v_k \qquad (2)$$

په دې صورت کې د(f(x,y,z تابع ته دΩپه ناحیه کې انتیګرال منونکې تابع وایي.

ددرې ګوني انتیګرالونونظریې تـــشریـــح کول لکه ددوه ګوني انتیګرالونودنظریې په شان دی او په مشابه ډول ددرې ګوني انتیګرالونود موجودیت قضیه فورمولبندي کېږي.

د غیر متجانیسې کتلې په برخه کې چې کومه مسآله طرح شوې وه،هغه ددرې ګوني انتګرانو دتعریف څخه په ګټه اخیستنه دجسم کتله ورکوي کله چې ترانتګرال لاندې تابع یوه مـــثبته تابع وي.په خاص حالت کې د1 ≡(f(x,y,z واحدې تابع درې ګوني انتیګرال، د انتګرال نیولوساحې حجم ورکوي.

$$\iiint_{\Omega} dv = v_{\Omega} \qquad (3)$$

د دوه ګوني انتیګرالونود محاسبه کولو خاصیتونه چې ذکر شوي دي په

پوره ډول درې ګوني انتیګرالونولپاره انتقال مومي . یوازې بایدو وایوچې

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dv = f(\xi\ ,\eta, \theta) v_{\Omega}$$

په داسې حال چې$(\xi\ ,\eta\ ,\theta)$ دΩناحیه یوه نقطه ده (دمنځنی قیمت په برخه کې قضیه) .

2.ددرې ګوني انتیګرال محاسبه. د درې ګوني انتیګرالونو محاسبه کول کاملاً ددوه ګونو انتیګرالونوپه شان دي،کولای شودپرله پسې مکررو انتیګرالونوپه شان یې انتیګرال ونیسو.د کار داسانتیا لپاره فرضوو چې دΩ نا حیه هغه جسم دی چې دپورته خواڅخه د $Z=z_2(x,y)$ اودښکته خواڅخه د $Z=z_1(x,y)$ سطحواود هغې استوانوي شکلې سطحې په واسطه چې تشکېلونکې یې دozمحورسره موازي دی، احاطه شوې ده(23شکل).نو (د دوه ګوني انتیګرالونوپه برخه کې)سره په مشابه ډول لاندې فورمول لرو

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint_{G} \Big(\int_{Z_{1(X,Y)}}^{Z_{2(X,Y)}} f(x,y,z)dz \Big) d\omega$$

په داسې حال کې چېG د xoyپه مستوي کې دΩناحیې مرتسم دی. دلته د داخلي انتیګرال دمحاسبه کولوپه صورت کېx او y ثابت په پام کې نیول کېږي.کله چې داداخلي انتیګرال محاسبه شي یوه افاده چې یوازې پهx اوy پورې اړه لري.، لاســه راځي. ددې دوه متحوله تابع انتیګرال باید دG په ناحیه کې ونیسو. لکه څنګه چې په دوه ګونی انتیګرال په دوه معینو انتیګرالو نوبدلیږي.

مثال. لاندې درې ګونی انتګرال محاسبه کړئ .

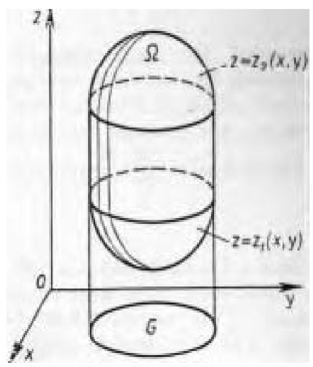
$$I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)dv$$

پــه داسې حــال کې چې دΩناحیه د $X+y+Z=1$ او $Z=0,y=0,x=0$ مستوي ګانــو په واسطه احاطه شوې ده (24شکل) . نظرZ ته دانتګرال نیولوپه صورت کېZ د$Z=0$ څخه تر $Z=1-x-y$ پورې تغیر کوي.بناً دΩ ناحیې مرتسم دxoyپه مستوي کې دG په واسطه ښیواوپه لاس راوړو:

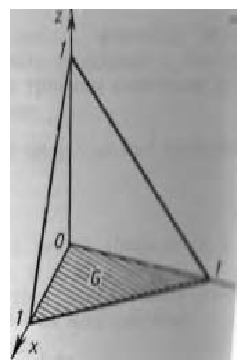
$$I = \iint_G \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)\, dz \right) d\omega = \iint_G \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} d\omega$$
$$= \iint_G \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) d\omega$$

اوس لیدل کېږي چېG **یو مثلث دی چې د**x+y=1 **او**Y=0,x=0 **خطونو په واسطه احاطه شوې لرو چې:**

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{8}$$



(23شکل)



(24شکل)

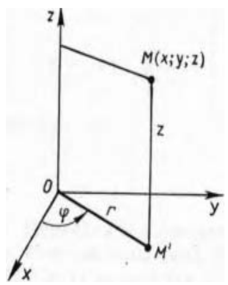
3.په کروي اواستوانوي مختصاتوکې درېږ گوني انتيگرالونه. د دوه گونوانتيگرالونو په شان ددرېږ گونو انتيگرالونولپاره دتبديل فورمول دقايمومختصاتوسيستم څخه نوي مختصاتو سيستم ته دي.ترټولو داستعمال وړ سيستمونه دقطبي او استوانوي وضعيه کمياتو سيستمونه دي.

داستوانوي وضعيه کمياتوسيستم. په دې مختصاتو سيستم کې دM نقطې مـوقيعت په فضا کې، د´M نقطې د r او φ قطبي وضيعه کمياتواو په خپله دM نقطې اپليکات Z په واسطه تعنيږي پـه داسې حـال کـې چېM دḾ نقطې مـرتسم دxoy پرمستـوي را ښيې (25شکل).دr،φ او z عـدد دونـــه

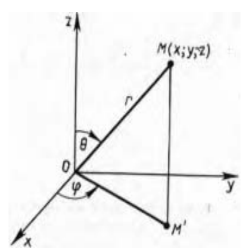
د M نقطې د استوانوي مختصاتوپه نوم یادیږي او ضمناً $0 \le r, 2\pi \le \varphi \le 0$ او z اختیاري قیمتونــه اخیستلای شــي. د (25 شکل)څخه لیــدل کېږي چېr، φ اوz استوانــوي مختصات دقایمو مختصاتو له سیستم سره لاندې رابطه لري:

$$x = r\cos\varphi \ \ , \ \ y = r\sin\varphi \ \ , \ \ z = z$$

د درې ګوني انتیګرال د تبدیل فورمول دقایمو مختصاتوله سیستم څخه د استوانوي مختصاتو سیستم ته،د دوه ګوني انتیګرالونوپه شان چې د قایمو مختصاتو څخه دقطبي مختصاتوسیستم ته صورت مومي، ترسره کېږي.



(25شکل)



(26 شکل)

دقایمو مختصاتوله سیستم څخه داستوانوي مختصاتوسیستم ته ددرې ګوني انتیګرال د تبدیل فورمول لاندې شکل لري:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(rcos\varphi, rsin\varphi, z)rdvd\varphi dz$$

داستوانوي مختصاتوپه سیستم کې د درې ګوني انتیګرال محاسبه لکه دقایمو مختصاتو د سیستــم پــه شان نظر r، z اوφته په درې مکررو انتیګرالونوتبدیل اومحاسبه کیږي.

مثال1. دهغه دایــروي استوانوي جسم حجم په لاس راوړئ کوم چې ارتفــاع یې H اودقــاعــدې شعاع یې R ده.

د(3) فورمول په کارولو سره په لاس راوړو:

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^H dz=\pi R^2 H$$

قطبي مختصات. په دې حالت کې د M نقطې موقیعت په فضا کې دنوموړې نقطې فاصلې د O له مبدا څخه چې د r په واسطه ښودل کېږي ، دXOY په مستوي کې دφزاویه کومه چې دOM قطعه خط دمرتسم او دOX محوردمثبت جهت په واسطه اودθزاویه کومه چې د oz محور دمثبت جهت اوOMقطعه خــــــط په واسطه جوړیږي،ټاکل کیږي (26شکل).د r ، ϕ اوθ عددونه دM نقطې دکروي مختصاتواویاد قطبي مختصاتو په نوم یادوي.په دې ترتیب$r\geq 0$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$ دي.

د(26شــــکل) څخه واضح ده چې د r ، ϕ اوθ قطبي مختصات دقایمو مختصاتو دمختصاتــوسره لاندې رابطه لري:

$$x=rsin\theta cos\varphi \quad , \quad y=rsin\theta sin\varphi \quad , \quad z=rcos\theta$$

له دې څخه

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, tan\varphi=\frac{y}{x} \quad , tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

لکه څنگه چې دقایمــو مختصاتــو له سیستم څخه د قطبــي مختصاتــو سیستم ته دتبدیل فورمول په دوه گونوانتیگرالونوکې ترسره شوي دهغه سره په مشابه ډول دقایمو مختصاتو له سیستم څخه دکروي مختصاتو سیستم ته دتبدیل فورمول لاندې شکل لري.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)=\iiint_{\Omega} f(rsin\theta cos\varphi, rsin\theta sin\varphi, rcos\theta)r^2 sin\theta drd\theta d\varphi \qquad (4)$$

دوروستني انتیگرال محاسبه هم نظرr ، φ او θ ته په درې مکرروانتیگرالونو بدلیږي.

که چېرې په (4)فورمول کې $f(x,y,z)\equiv 1$ وي نو په کروي مختصاتوکې د(3) رابطې څخه په گټه اخیستنې د Ω جسم حجم په لاندې ډول لاسته راځي.

$$V_{\Omega}=\iiint_{\Omega} r^2 \ sin\theta drd\theta d\varphi \qquad (5)$$

دلته$r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$ په کروي مختصاتو کې د عنصـري حجم په نوم یادیږي.

مثال 2 .دهغې کرې حجم په لاس راوړئ چې شعاع یې R ده.

د(5)فورمول په کارولوسره لرو چې:

$$v=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{R} r^2 dr=2\pi .2.\frac{R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

په میخانیک کې د درې گوني انتیگرال تطبیق. دمخه مود درې گوني انتیگرال تطبیق په هند سه اوفزیک کې په پام کې ونیو ،دهغه تطبیق په میخانیک کې تر کتنې لاندې نیسو .

دیو جسم دثقل مرکزدمختصاتودپیداکولو لپاره دستا تیکې مومنت مختصات په xoy،xoz او yoz په لاس راوړو(هغه مونږ په M_{XY} , M_{XZ} , M_{YZ} سره ښیو). په تکراري ډول استدلال کولوسره دجسم دثقل مرکزمختصاتو x_c ،Y_c اوz_cد لاسته راوړو لپاره لاندې فورمولونه پلاس راځي په داسې حال کې چې نوموړی جسم دΩ نا حیه په برکې نیسي:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},y_c=\frac{M_{xz}}{m},z_c=\frac{M_{xy}}{m}$$

دلته

$$M_{yz}=\iiint_{\Omega} x\,\rho dv\,,\qquad M_{xz}=\iiint_{\Omega} y\,\rho dv\,,M_{xy}=\iiint_{\Omega} z\,\rho dv$$

m دجسم کتله،ρ = $\rho(x,y,z)$ دجسم کثافت دی.

له دې څخه د متجانیس جسم لپاره

$$x_c=\frac{1}{v}\iiint_{\Omega} xdv\,,\qquad y_c=\frac{1}{v}\iiint_{\Omega} ydv\,,z_c=\frac{1}{v}\iiint_{\Omega} zdv$$

V دجسم حجم دی.

مثال1. دمتجانیسې کرې(ρ=1)دنیما یي برخې دثقل مرکز Ω پیدا کړئ.

$$x^2+y^2+z^2\le R^2\,,z\ge 0$$

دتناظر په پام کې نیولوسره $x_c=y_c=0$ او سربیره پردې لرو:

$$m=\frac{2}{3}\pi R^2\,,\iiint_{\Omega} zdv=\int_0^{\pi/2} sin\theta\,cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{R} r^3\,dr=\frac{1}{4}\pi R^4$$

نو

$$z_c=\frac{3}{8}R$$

اوس ديو جسم دانرشيامومنت نظردمختصاتومحوراتوته پيداکوو.څرنگه چې د M(x,y,z) نقطې دفاصلې مربع د oy,ox اوozمحورنو څخه مطابقتاً د y^2+z^2 ،x^2+z^2 ،x^2+y^2 سره مساوي دي نو لاندې فورمولونه په لاس راوړو:

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\rho dv, I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\,\rho dv, I_z = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\,\rho dv$$

په مشابه ډول د هموار(مستوي) حالتونو لپاره د

$$I_{XY} = \iiint_\Omega xy\rho dv \text{ ، } I_{yz} = \iiint_\Omega yz\rho dv \text{ ، } I_{zx} = \iiint_\Omega zx\,\rho dv$$

انتيگرالونه دانرشيا مومنت په نوم ياديږي.

دقطبي انرشيا مومنت لپاره فورمول لاندې شکل غوره کوي:

$$I_o = \iiint_\Omega (x^2+y^2\ +z^2)\rho dv \text{ ،}$$

په نتيجه کې.

$$2I_O = I_x + I_y + I_z$$

مثال 2. د متجانسې (ρ=1) کرې $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ لپاره لرو.

$$I_o = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta\ d\theta \int_0^{R} r^2 r^2 dr = \frac{4\pi R^2}{5}$$

§ 3.3 منحني الخط انتيگرالونه

1. هغه مسألې چې په منحني الخطو انتيگرالونو بد ليږي.

ديومادي منحني دکتلې په هکله مسأله.فرضووچې دABهموار منحني پر امتداد يوه کتله پرته ده داسې چې خطي کثافت يې ρ (M) تغير کوي اوM دAB منحني اختياري نقطه ده.(ρ(M)) د منحني پر امتداد د توزيع شوې مادې حدي کثافت پرډير کوچني قوس ښيي کوم چې دM نقطه په کې شامله وي).دABقوس دm کتلې لاسته راوړل مطلوب دي.

دمسألې دحل لپاره د ABقوس په nقسمي کوچنيو قوسونو ويشو، د هرې برخې کتله په تقريبي ډول پيدا کوو، فرضوو چې په هرو قسمي قوسونوکې کثا فت ثابت او د k-امې برخې کثافت د ρ(NK) سره مساوي دی داسې چېN_K ددې قسمي قوس يوه اختياري نقطه ده.نو د K-امې برخې کتله په تقريبي

ډول $\Delta m_K \approx \rho(N_K)\Delta L_K$ (k=1,2,....n) سـره مسـاوي. او د ټـولې منـحنـي کتـلـه پـه تقريبي

ډول $m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta lk$ سره مساوي ده، داسې چېΔl_k د k - امې برخې طول دی.

د لميټ په اخيستلو سره کولای شو د AB قوس کتله په دقيقه توګه لاسته راوړو کله چې $\lambda\to 0$ وکړي

.(λ=max Δl_k)

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_K)\Delta L_K$$

ديوې استوانوي سطحې دمساحت په هکله مسأله. فرضووچې دxoy په مستوي کې دAB يو

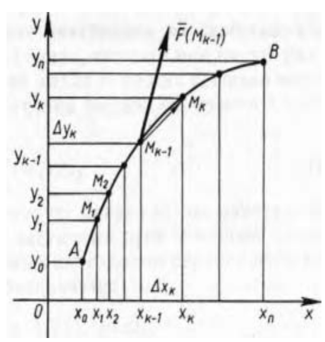
هموار منحني ور کړشوي او دهغې پرمخ د f(M)=f(x,y)≥0 متمادي تابع تعريف شوې ده.(دf(M) تابـع

متماديت د AB منحني پرمـخ په دې مانا دی چـــې ددې منحنـــــي د M_0 په هـــره اختياری نقطــــــه

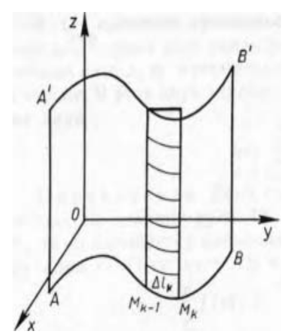
کـــــې $lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ داسې چې M دنوموړي منحني يوه نقطه ده). نو د((x,y,f(x,y)

نقطو مجمـــــوعه په فضا کې يـــــو منحني جـــــوړوي چې ديوې استوانوي سطحې پرمخ پرته ده

داسې چې تشکيلوونکې دxoy پر مستوي عمود اوجهت ورکوونکی يې دAB منحني ده. دهغې سطحې



(27شکل)



(28 شکل)

دمساحت محاسبه کول مطلوب دي کــــوم چې د پورتنۍ خوا څخه د z=f(x,y) منحني د ښکته خوا څخه

دAB منحني او د دواړو خوا څخه ´AA او ´BB خطونو په واسطه احاطه شوی دی (27شکل).

په اختياري ډول دAB منحني د $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n=B$ نقطوپه واسطه په n کوچنيو برخـــوويشــــو.

د M_k $(K=1,2,\ldots,n)$ تقسیمــونکــې هــرې نقطې څخه د xoy پر مستوي عمود رسمــوو داسې چې ارتفاع یې $f(M_K)$ ده .په نتیجه کې ټوله استوانوي سطح په n بر خوویشل کېږي.

ددې ویشل شوو برخوهره یوه دغه مستطیل سره تعویض کوو کوم چې قاعده یېΔl_k او ارتفاع یې د$f(N_K)$تابع قیمت سره مساوي ده.په داسې حال کې چېΔl_k د$M_{k-1}M_K$منحني طول اوN_K د$M_{k-1}M_K$ یوه اختیاري نقطه ده $(K=1,2,\ldots,n)$.په 144 شکل کې ددې نقطو له جملې څخه دM_{k-1} نقطه په پام کې نیول شوې دي.نو د K–امې برخې مساحت په تقریبي ډول د $S_K \approx f(N_K)\Delta l_K$ سره مساوي دی.په همدې ترتیب د $AA'BB'$ استوانوي سطحې مساحت عبارت دی له:

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} f(N_K)\Delta l_K$$

د$\lambda \to 0$په صورت کې دلمیټ په اخیستلو سره مطلوب مساحت په دقیق ډول داسې لاسته راوړو:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_K)\Delta l_K$$

د قوې دکار په هکله مسأله.په مخکې پاراګراف کې دمتحولې قوې دکار په هکله یوه مسأله تر کتنې لاندې نیول شــوې ده داسې چې متحرکه نقطه دمستقیم خط پرمخ حرکت او هم دقوې جهت اودحرکت جهت سره یو شان وو. اوس مونږ ترټولو عمومي حالت په پام کې نیسو.

فرضووچې مادي نقطه د $\bar{F}$قوې تر تأ ثیر لاندې په مستوي کې دAB منحني پرمخ دAڅخه ترBپورې حرکت کوي.فرضووچې د $\bar{F}$ قوه متحوله اودABمنحني دنقطو موقعیت پورې اړه لري. دهغې قوې کار محاسبه کوو،کوم چې دیوې نقطې دځای بدلولولپاره دAڅخه ترB نقطې پورې صورت نیسي.د دې هدف په پام کې نیولوسره مونږدAB منحني د $A=M_0,M_1,\ldots M_n=B$ نقطو پواســطـــــــه د M_0M_1 , $M_1M_2,\ldots$, $M_{n-1}M_n$ په قسمي منحنیاتــوچې اوږدوالي یېΔl_1 , $\Delta l_2,\ldots,\Delta l_n$ دي، پــــــــه اختیــــــاري ډول ویشو(28شکل).د $\Delta l_K(K=1,2,\ldots,n)$ طولونو ترټولو لوی طول په λ ښیــــــو.د Δl_K د کـــو چنیــــوالي پـــــــه صورت کې په تقریبي ډول ویلی شوچې: a)د$\bar{F}$ قـــوې وکتـــورد $M_{k-1}M_K$ په منحني کې د $F(N_K)$ ثابت قیــمت اخلي په داسې حال کې چېN_Kد $M_{k-1}M_K$منحني یوه اختیاري نقطه ده(د 28په شکل کې ددې ډول نقـــطوڅخـــه دM_{k-1} نقطــه انتخاب شوې ده). b)د$M_{k-1}M_K$ منحني کولای شو د$M_{k-1}M_K$ قاطع سره چې د نوموړې منحني انجامي نقطې نښلـــوي تعـــویض کړو .د

$M_{k-1}M_K$ وکتور د $\bar{r}(M)$ شعاع وکتور دتزاید سره مساوي دی

$$\Delta\bar{r}_k = \bar{r}(M_k) - \bar{r}(M_{k-1}) \; (\Delta\bar{r}_k \; (x_k - x_{k-1} \; ; \; y_k - y_{k-1}))$$

نو د$M_{K-1}M_K$ په منحني کې د$\bar{F}$قوې کار په تقريبي ډول مساوي دی په:

$$\bar{F}\,(N_K)\,\Delta\bar{r}_k$$

فرضووچې د$\bar{F}$ (M) وکتوردمحورونوپه مخ د p(M) او Q(M) مر تسمونه ولري.نود$\bar{F}$ قوې کار دAB منحني په امتداد په تقريبي ډول مساوي دی په:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}\,(N_K)\Delta\bar{r}_k$$

او يا

$$\sum_{k=1}^{n} (P(N_K)\Delta x_k \; + Q(N_K)\Delta y_k) \qquad (1)$$

په داسې حال کې چې$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$، $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

د(1)مجموعې څخه دلمیټ په اخيستلود$\lambda \to 0$ لپاره،د$\bar{F}$قوې کار دABمنحني پرامتدادپه دقيقه توګه داسې لاسته راوړو.

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(N_K)\Delta x_k \; + Q(N_K)\Delta y_k) \qquad (2)$$

2.دمنحني الخطو انتيګرالونوتعريف اودهغې خواص.ددوه لومړنيومسألودحل پــــــه نتيجه کې (1بند کې) څرګنده ده چې دا مسألې مختلف مفاهيم لري.ليکن دنوموړې مسألې دحلولو رياضيکي بڼه يــــــوشان ده.د دې دوومسألولپاره په لاندې ډول يوازې يوه افاده په لاس راوړو.

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_K)\Delta l_k \qquad (3)$$

تعريف.که چيرې(3)لمت موجودوي داسې چې دAB منحني په ورو ساحو دويشلوپه طريقه اوN_Kنقطې انتخاب پورې اړه ونه لري نودABمنحني پرمخ د(M)fتابع دلومړی نوعې منحني الخط انتيګرال په نوم يادیږي اوهغه داسې ښودل کيږي:

$$\int_{AB} f(M)dl \quad \text{یا} \quad \int_{AB} f(x,y)dl$$

دABمنحني ته دانتيګرال نيونې لاره، A ته دانتيګرال نيولــو د پيــل نــقطه ،B ته دپای نــقطه او $\sum_{K=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k$ ته انتيګرالي مجموعه وايي.

په1بند کې مطالعه شوې دوه لومړنی مسلی دابښيې:1) د f(M)≥0(f(M)) دABمنحني پرمخ متمادي ده) لپـــــاره،د لومړی نوعې منحني الخط انتيګرال عددي قيمت دهغې استوانوي سطحې مساحت سره مساوي دی، کوم چې مولد يې دoz له محور سره موازي ،دبنکته خوا څخه د ABمنحني اودپورته خوا څخـــه دهغه منحني په واسطه چې د z=f(M)تابع په واسطه ارايه کېږي، احاطــــه شوی دی.په دې ډول دلــــومــــړی ډول منحني الخط انتيګرال هند سي مفهوم ارايه کېږي د

$$\int_{AB} \rho(M)\, dl$$

منحني الخط انتيګرال(ρ(M)) خطي کثافت ښيي) دABمنحني پرمخ دمـــوادوکتلـــــه mښيي . په دې ډول دلومړی نوع منحني الخط انتيګرال فزيکي مفهوم ارايه کېږي.له دې څخه دانتيجــه ترلاســـه کولای شو چې د

$$\int_{AB} dl$$

انتيګرال عددي قيمت دABمنحني طول دی.

لکه څنګه چې به وښودل شي،لومړی نوع منحني الخط انتيګرال په اسانی سره په مــعيـــــــن انتيګرال بد ليږی،ددې مفاهيموترمنځ لاندې توپير موجود دی.په(3) افاده کې دΔl_K کېمت دتل لپــاره مثبت او هم په دې پورې اړه نه لري چې د ABمنحني کومه نقطه دې لومړنی نقطه اوکومه نقطه اخرنی نقطـــه فرض شي.بناً

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)\, dl$$

لکه څنګه چې وښودل شوه، دیوې قوې دکار پـــــه برخـــه کې دطــرح شـــوې مسلــې حـــــــل د(2)لميټ په محاسبه کولوتبديل شو.ددې ډول لميټونودمحاسبې سره په مشابه ډول په نورو مسألو بدليدلای شي. په دې ډول مونږلاندې افاده په پام کې نيسو:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(N_K)\Delta x_k + Q(N_K)\Delta y_k) \qquad (4)$$

(دلته $P(M)$ او $Q(M)$ د $\bar{a}(M)$ وکتور چې د AB منحني پرمخ تعريف شوی،دمختصاتودمحوراتو پرمخ مرتسمونه دي).

تعريف.که چېرې (4)لمیټ موجود اود AB منحني په کوچنیو برخودویشلو طريقی پورې او د N_K نقطې په ټاکلو پورې اړه ونه لري،دا لمت د $\bar{a}(M)=P(M)\bar{i}+Q(M)\bar{j}$ وکتوري تابـــع لپـــــــاره دويم نـــــوع منحني الخــــــطو انتيګرال د AB منحني پرمخ نومول کېږي اوداسې يې ښودلای شو.

$$\int_{AB} \bar{a}d\bar{r} \qquad \text{يا} \qquad \int_{AB} pdx + Qdy$$

د

$$\sum_{k=1}^{n} (p(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\,\Delta y_k) \qquad (5)$$

مجموعه، د انتيګرالي مجموعې په نوم يادوي.

د دويمې نوعې منحني الخطو انتګرالونوهندسي مفهوم لکه چې په مخکيني بند کې ورڅخه يا دونه وشوه دطرح شوې مسلې څخه داځرګنديږي چې دويم نوعې منحني الخط انتيګرال د $\bar{a}(M)$ قوې کار د AB منحني پرمخ ښيي.

که چېرې $Q(x,y)=0$ ($P(x,y)=0$) وي نو دويمې نوعې انتيګرال لاندې شکل غوره کوي.

$$\int_{AB} p(x,y)dx \qquad \left(\int_{AB} Q(x,y)dy\right)$$

او نظر x (يا y) مختصاتو ته د منحني الخط انتيګرال په نوم ياديږي.

د لومړي نوعې منحني الخط انتيګرال سره په تفکيک کولو،دويمه نوعه منحني الخط انتيګرال (داموضوع ددويم نوع منحني الخط انتيګرال د تعريف څخه واضح ده) دې پورې اړه لري چې په کوم جهت د AB منحني (يا پـــه لنډ ډول L) پـــر مخ حرکت صورت مومي (د A څخه تر B او يا د B څخه تر A) .په نتيجه کې د منحني د جهت په تغير سره د انتيګرال علامه تغير کوي.

که چیرې Lتړلی منحني وي یعنې د Aنقطه پرBنقطې منطبقـــه وي نودمنحني پرمخ دیوې نقطې دحرکت دوه ممکنه جهتونوشته، هغه جهت ته مثبت جهت وایي ،کوم چې دهغې حرکت دجهت په پام کې نیولو سره هغه نا حیه چې دنوموړی منحني په واسطه احاطه شوې، کینې خواتـــه واقع شي. دLمنحني پرمخ معکوس جهت ته منفي جهت ویل کیږي.

دویم نوع منحني الخط انتیگرال دL دیو تړلې منحني مثبت جهت پرمـــــخ اکثراً د لاندې سمبـــول په واسطه ښودل کیږي.

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$$

دM نقطې شعاع وکتور په پام کې نیسو $r(M)=xi+yj$. د(5)مجموعې د عمومي حد لپاره لیکلا ی شو:

$$P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k = \bar{a}(N_k)\Delta\bar{r}_k\,, \Delta\bar{r}_k = \Delta x_k\bar{\imath} + \Delta y_k\bar{\jmath}$$

څرنګه چې $\bar{a}(N_k)\Delta\bar{r}_k = |\bar{a}(N_k)||\Delta\bar{r}_k|cos(\overline{a_k},\Delta\bar{r}_k)$. بناپردې دوروستنۍ رابطې څخه په ګټه اخیســـتـــنې کولای شو ولیکو

$$P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k = |\bar{a}(N_k)||\Delta\bar{r}_k|cos(\overline{a_k},\Delta\bar{r}_k)$$

([2]دې وکتل شي) . دلومړي‌یاودویم نوعې منحني الخط انتیګرالونو تر منځ لاندې رابطه ثابتو و.

$$\int_{AB} \bar{a}(M)d\bar{r} = \int_{AB} a_\tau(M)dl$$

په داسې حال کې$\tau = \tau(M)$ د AB منحني دm په نقطه کې مماس وکتور دی چې دA څخه د Bپه جهت دمنحني پرمخ تغیرکوي .همداسې $a_\tau(M)=|\bar{a}(M)\cos(\bar{a},\tau)|$ د(M) $\bar{a}$وکتور مرتسم دنوموړي مماس پرمخ ښیي.

د معین انتګرالونودحالت په شان د دویمې نوعې منحني الخط انتګرالونو د تعــریف څخــه په ګټه اخیستنې سره دلومړي اودویم نوع منحني الخط انتیګرالونو لپاره لاندې درې خاصیتونه لیکلای شو.

1. ثابت حد کولای شو دانتیګرال دعلامې څخه د باندې ولیکو.

2. دمعین شمیر توابعود الجبري جمعې منحني الخط انتیګرال،د هرې جمعي برخې دمنحني الخط انتیګرال دحاصل جمعی سره مساوي دی.

3. که چېرې دانتيگرال نيولو مسير په معين شمير ټوټوووېشل شي نو منحني الخط انتيگرال په ټول مسير کې د هرې ټوټې د منحني الخط انتيگرال دمجموعې سره مساوي دی.

بايد ذکر کړو چې دABمنحني کېداي شي تړلی منحني وي.

د لومړي او دويم نوعې منحني الخطو انتيگرالونو لپاره يوبل خاصيت هم صدق کوي:

منحني الخط انتيگرال ديوتړلې منحني پرمخ دپيل نقطې په انتخاب پورې کومه چې دنومورې منحني پرمخ واقع ده اړه نه لري.

په رښتيا که چېرې دپيل نقطه Aفرض کړو نود(3)خاصيت له مخې(29شکل) په لاس راوړو

$$\int_{ABCDA} = \int_{ABC} + \int_{CDA} \tag{7}$$

(د لنډو ليکنو په منظور دلته، او په راتلونکې کې د انتيگرال لاندې افاده نه ليکو)

که چېرې دپيل نقطه C فرض کړو نوپه لاس راوړو .

$$\int_{CDABC} = \int_{CDA} + \int_{ABC} \tag{8}$$

3.د لومړی نوع منحني الخط انتگرال محاسبه.فـرضــــــووچې دAB همـــوار منحني د

$x=x(t)$، $y=y(t)$ ، $(\alpha\leq t\leq\beta)$په واسطه راکړشوي اود$f(x,y)$،$p(x,y)$او $Q(x,y)$توابــــــــــع دنومورې منحني پــــرمـــخ تعريف شوې اومتمادي دي.

د لومړۍ نوع منحني الخط انتگرال د محاسبی لپاره د منحني دطول تزايدΔl_k دانتيگرال په شکل ليکواو د منځنۍ قضيې په مرسته په لاس راوړو:

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2\, t}\, dt = \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)}\, \Delta t_k$$

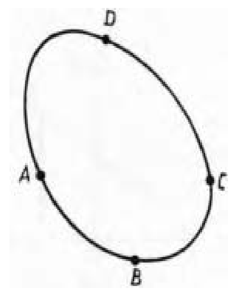
په داسې حال کې چې متحوله منځنۍ نقطه t_k^*د$[t_{k-1},t_k]$ پرقطعه خــــــط پرته ده.د$M_{k-1}M_k$ منحني د N_k نقطې پرځای دN_k^*نقطه انتخابووداسې چې د t_k^* پارا متــــــــر پورې اړه لري، په لاس راوړو

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k^*)\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*))\, \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)}\, \Delta t_k$$

دداسې مساواتو ښي خوا د$f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ تابع لپاره د$[\propto,\beta]$قطعه خط پرمخ انتيګرالي

مجموعه ده په نتيجه کې د$\lambda\to 0$لپاره دانتيګرال په نيولـــو پــه لاس راوړو:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\propto}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (9)$$



(29 شکل)

دا فورمول همزمان د$f(x,y)$متمادي تابع لپـــاره دABهمـــوار منحني پرمـــخ د لـــومړی نـــــوع منحني الخـــط انتيګرال موجوديت ثابتوي کله چې د متمادي تابــــع لپـــاره دمعين انتيګرال موجوديت څرګنــــدوي.

په خاص حالت کله چې دABمنحنـــي د$y=y(x)$تابـــع په واسطه د$[a,b]$پـــرمـــخ ورکړشـــوی وي (دپارامتررول دxمتحول ترسره کوي)نو د(9)فورمول له مخې

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+y'^2}dx \qquad (10)$$

د دويمې نوعې منحني الخط انتيګرال (6)محاسبه کولو لپاره د Δx_kکميت د لاګرانژدفورمول له مخې

د$\Delta t_k(t_k^*)x'=\Delta x_k$ دضرب دحاصل په شکل ليـــکوداسې چې t_k^* د (t_{k-1},t_k) په انتروال کې واقع دی.د

$M_{k-1}M_k$ منحني د N_K نقطې پرځای د N_K^* نقطه انتخابوو کومه چېt_k^* قيمت سره مطابقت کوي،په دې

ډول(6)انتيګرال د لاندې انتيګرالي مجموعې سره مطابقت کوي:

$$\sum_{k=1}^{n} p(N_K^*)\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} p(x(t_k^*), y(t_k^*))\, x'(t_k^*)\, \Delta t_k$$

ددې مساوات ښي خوا د[∝,β] پــر قطــعه خــط د(t)´P(x(t),y(t)) x تابــع انتيــګرالي مجموعـــــه ده

پــه نتيجــه کې د0→λلپاره که هغــه انتيګرال و نيول شي په لاس راوړو.

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\propto}^{\beta} P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)dt \qquad (11)$$

دا فورمول همزمان د(x,y)f متمادي تابع لپاره دABهموار منحني پرمخ ددويمې نوعې منحني الخط انتيګرال(6) موجوديت ثابتوي.

په مشابه ډول لاندې فورمول ترلاسه کېږي:

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\propto}^{\beta} Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)dt \qquad (12)$$

د(11) او (12)فورمولونو دجمع کولوپه صورت کې په لاس راوړو.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta}(P\acute{x} + Qy')dt \qquad (13)$$

په خاص حالت کې چې د AB منحني د y=y(x)معادلې په واسطه د[a,b] انتروال پرمخ ورکړشوی وي

نو د (10)فورمول سره په مشا به ډول د(13)فورمول له مخې لرو:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\Big(p\big(x,y(x)\big)\Big)\grave{y}(x)dx \qquad (14)$$

تبصره. که چېرې د انتګرال نيولو منحني L يو قطعه خط وي چې دox له محور سره موازي دی

($y=y_0;\ x_1 \le x \le x_2$) په دې صورت کې دويم نوع منحني الخط انتګرال مستقيماً په عادی

انتګرال بدليږي. حقيقتا څرنګه چې $y=y_0$ دی نودامانا لري چې $dy=0$ نو.

$$\int_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x1}^{x2} p(x,y_0)dx$$

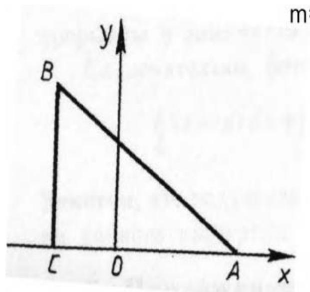
په مشابه ډول که چېرې دانتګرال نيولومنحنيL يو قطعه خط وي چې دترتيب له محور سره موازي

وي.

مثال1. د$x^2+y^2=R^2$, X≥0 , y≥0 دایرې دڅلور مې برخې کتله په لاس راوړئ که چېرې په هره نقطه کې کثا فت یې دنومورې نقطې دترتیب سره مسا وي وي.

د$x^2+Y^2=R^2$ دایرې پارا متــــــریک شکل عبارت دی له x=Rcost، y=Rsint په نتیجه کې $x^2+\acute{y}^2=R^2$ اود(9)فورمول په مرسته

$$m=\int_{AB}Sdl=\int_{AB}ydl=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2 sint dt=-R^2 cost\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=R^2$$



(30 شکل)

مثال2. د$\bar{F}=2xy\bar{\imath}-x\bar{\jmath}$. وکتور کار محا سبه کړئ کله چې د M نقطه د A (2,0) لــه مــوقیعیت څخه د B(−1,3) مـــوقعیت تــه: 1) دAB قطعه خط پــرمخ تغیر ورکړي

2)که د ABC منکسرخط پر مخ تغیر وکړي (30شکل).مسآله د لاندې منحني الخط انتګرال په محاسبه کولو بد لیږي

$$I=\int_{AB}2xydx+xdy.$$

1) AB د مستقیم خط پرمخ لرو y=2−x , dy=−dx نو

$$I=\int_2^{-1}(2x(2-x)-x)dx=\frac{3}{2}$$

2)دACB منکسر خط پرمخ د AC برخې لپاره y=0 اوdy= 0 ، د CB برخې لپاره x=−1، dx=0 . په دې ډول

$$I=\int_{AC}+\int_{CB}=0\int_0^3 dy=-3.$$

په پای کې باید ووایوچې مونږ منحني الخط انتګرالونه یوازې دمستوي منحنیاتو لپاره تر مطالعې لاندې نیولي.کولای شوتول هغه مطا لب چې په دې حالت کې په پام کې نیول شوي دي دهغومنحنیاتو لپاره چې په فضا کې واقع وي په پام کې ونیسو .

دمستوي منحنیاتو سره په مشابهت کې کولای شو د

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl.$$

لومړی نوع منحني الخط انتګرال او د

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx\ ,\int_{AB} Q(x,y,z)dy\ \ ,\int_{AB} R(x,y,z)dz$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx\ +\ Q(x,y,z)dy\, R(x,y,z)dz$$

دویمه نوعه منحني الخط انتګرالونه تعریف کړو .دپورتنیو انتګرالونو دمحاسبه کولو طریقې یې له کوم تغیرڅخه دمستوي منحنیا تو دانتګرال نیولو طریقو په شان سرته رسیږي.

4 **.دریمان ــ ګرین فورمول**.(ګیورګ ریمان (G.F.B.Rieman) (1826ــ1866)جرمني ریاضي پوه، ژوژ ګرین (G. Green's)(1793ــ1841)انګلیسی مشهور فزیک اوریاضي پوه).

فرضوو چې د(p(x,y او Q(x,y) توابع(یابه لنډ ډول Q او P) د P_Y' ,او Q_X' قسمي مشتقاتو سره د G په تړلې ناحیه کې متمادي او دG ناحیې سرحد L دمحوراتو سره د موازي خطونو په تیرولو ، یوازې په دوو نقطو کې په اعظمي ډول قطع شي (په لنډ ډول دا رنګه ناحیې دمنظم ناحیو په نوم یادیــــــــږي). فـــــرضـــووو چـــــې د L ســـرحـــــد هـــمـــواراویا قسمــــا همـــوار منــــــحني دی اود $y=y_1(x)\ \ ,\ \ y=y_2(x)\,,a\le x\le b$ اویا د $x=x_1(y),\ \ x=x_2(y),\ c\le y\le d$ معا دلــــــــو په واسطه ارایه شوی وي(شکل 31).

لاندې انتګرال په پام کې نیسو :

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial Y}dxdy.$$

نومونړی انتګرال په مکـــرر انتګرال داسې بــدلــــووچې دنیوټن ــ لایبنز فـــورمول له مــــخې داخلي انتګرال نظر y ته صورت ونیسي، په لاس راوړو:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial Y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial Y} dy = \int\limits_a^b (p(x, y_2(x)) - p(x, y_1(x)))\, dx.$$

له بلی خوا دمنحني الخط انتګرالونو فورمول په استعمال سره لرو:

$$\oint\limits_L p(x,y)dx = \int\limits_a^b p\left(x, y_1(x) - Q\left(x, y_2(x)\right)\right) dx.$$

په دې ډول :

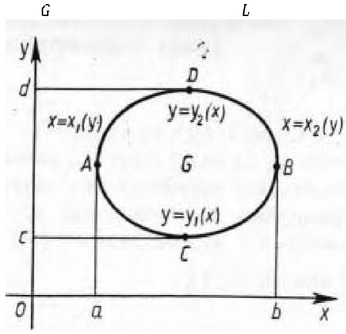
$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial Y} dxdy = -\oint\limits_L p(x,y)dx \qquad (15)$$

په مشابه ډول لاندې فورمول په لاس راځي

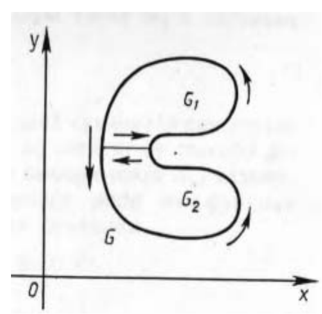
$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial X} dxdy = \oint_L Q(x,y)dY. \qquad (16)$$

که له (16)رابطی څخه د(15)رابطه طرح کړودافورمول په لاس راځي:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right) dxdy = \oint\limits_L p(x,y)dx + \oint\limits_L Q(x,y)dY. \qquad (17)$$



(31 شکل)



(32 شکل)

پورتني فورمول دريمان – ګرين فورمول (او يا د ګرين فورمول)په نوم يا دېږي.

دافورمول ددوه ګـونو اومنحني الخـط انتګرالـونو تر منځ رابطه ساتـي.دا فورمول د ريا ضی په انا لـيز اودهغې په تطبيقي ساحوکې ډيرداستعمال وړدی .

تبصره. دريمان – ګرين فورمول په خپل حالت پاتی کېږي کله چې دG تړلې ناحيه داضافي خطونو په واسطه په معين شمير،منظمو ناحيوو ويشل شي(32شکل).

مثال . د P(x,y)=x-y ، $Q(x,y)=x+y$, او $Q'_x=1$ ، P'_y **توابع** د $x^2+y^2=R^2$ په
تړلې دایره کې متمادي دي .

که په ورکړ شوي انتګرال کې د(17)فورمول وکاروو،په لاس راوړو:

$$\oint_L (x-y)dx+(x+y)dy=\iint_G [1-(-1)]\,dxdy=2\iint_G dxdy=2\pi R^2.$$

باید ووایوچې لاسته راغلې نتیجه په اسانی سره د دوه ګوني انتګرال محاسبه کول تر سره کوي .

5. دمنحني الخط انتګرالونوتطبیقات. دلومړۍ نوع منحني الخط انتګرال هندسي مفهوم مخکې مطا لعه شو . سربیره پردې لومړۍ نوع منحني الخط انتګرالونه په فزیک کې د استعمال زیا ت ځایونه لري چې دنوموړي منحني الخط انتګرالونو فزیکي مفهوم مخکې مــطالعه شو د لومړۍ نوع منحني الخط انتګرالونو په مرسته کولای شودمنحني الخط مادي سطحې دثقل مرکز،نظردمختصاتو محوراتو ته انرشیا مــومنت لکه چې په دوه ګــوني انتګرالونو کې محاسبه شوي دي پلاس راوړو.

دویمه نوعه منحني الخط انتګرال هم لکه دلومړۍ نوعې منحني الخط انتګرال په شان په هندسه او فزیک کې ډیر داستعمال ځایونه لري. دمخه مو دقوې دکارمسآله تر مطالعې لاندې ونیوله.

§4.3. سطحي انتګرالونه.

1. د لومړي نوعې سطحي انتګرال تعریف.

د منحني سطحې دکتلې په هکله مسأله: فرضوو چې د б سطحې پرمخ په متمادي ډول داسې مواد توزیع شوي چې کثافت یې (M) ρ دی. دMپه نقطه کې دбسطحې کثافت دهغې بې نها یت کوچنۍ برخې له حدي کثافت څخه عبارت دی کوم چې دMنقطه په کې شامله ده.دбسطحې پرمخ دټولې توزیع شوې مادې دکتلې محاسبه کول مطلوب دي.

دбسطح(33شکل)په اختیاري ډول دهموارومنحنیاتو په واسطه د $б_1,б_2...б_n$ په n وړو برخو ویشو داسې چې مشترکــې نقطې نه لــري او دΔs_n .... $\Delta s_1,\Delta s_2$ مسا حتــونــولرونکــې ده. د دې مسا حتونوترټولو لوي مساحت په λ ښیو. فرضووچې د $б_k$ په هره کوچنۍ برخه کې کثافت ثا بت او د$\rho(N_K)$ سره مساوي دی، په داسې حال کې چېN_K د $б_k$ یوه اختیا ري نقطه ده.نو د k- امې برخې کتله

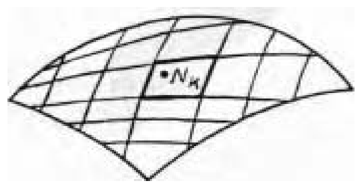
په تقريبي ډول د $\Delta m_{k} \approx \rho(N_k)\Delta s_k$ سره مسا وي ده. دټولې سطحې دکتلې دمحاسبې لپاره مونږ لاندې تقريبي فورمول په لاس راوړو:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta s_k$$

دلاسته راغلې مجموعې څخه دلميټ نيول كله چې λ صفر ته تقرب وكړي،په د قيقه توگه دسطحې (منحني سطح)

دمادي نقطو كتله په لاس راځي

$$m=lim_{\lambda\to 0} \sum_{K=1}^{N} \rho(N_k)\ \Delta s_k$$



(33شكل)

غـــواړو دلـــومړنـــۍ نـــوعې منـــحني السطـــح انتـــــگرال عمومي تعريف فورمـــولبندي كړو.فرضوو چې د F(x,y,z) تابع دσ په سطح چې هموار ه اويا قسما هموار ه ده، تعريف شوي (يوې سطحې ته هموار ه سطحه وايي كه چېرې دهغې په هره نقطه كې د مماس مستوي موجود وي او ديوې نقطې څخه بلې نقطې ته دتيريدو په صورت كې دمماس مستوي موقعيت په متما دي ډول تغير وكړي. هغه سطح چې دمعين شمير هموارو سطحو څخه په متمادي ډول جوړه شوي وي د قسماً هموارې سطحې په نوم يا ديږي) .

دσ سطح دمخكې په شان په n كوچنيو برخوو يشو او په هـــرې ويشل شـــــوې نا حيه كې د N_k اختيا ري نقطه په پام كې نيسو او لاندې انتگرالي مجموعه تشكيلوو:

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\ \Delta s_k \qquad (1)$$

تعريف. د(1)انتگرالي مجموعې لميټ كله چې λ صفر ته تقرب وكړي (كه چېرې دالميټ موجود وي او دσسطحې په ويشلواو N_k نقطې په انتخاب پـــورې تړلې نه وي). د(f(M تابع لـــومـــړني نوعـــې سطحې انتگرال په نوم يا ديږي او د لاندې سمبول په واسطه ښودل كېږي:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)ds \quad \text{يا} \quad \iint_{\sigma} f(M)ds$$

دبيلگې په توگه دنومړي انتگرال فزيكې مفهوم د مادي سطحې كتله را ښيي كومه چې د توزيع شوي موادو كثا فت يې،(f(M وي.

ورکړل شوی تعریف په حقیقت کې ددوه ګوني انتګرالونو دتعریف په شان دی . په دې ترتیب د دوه ګوني انتګرالونو دموجودیت قضیه او دهغې خـــواص پـــرته دخاصو تغیراتو څخه دلومړي نوعې سطحې انتګرالونو لپاره صدق کوي.

په خاص حالت که چېرې د σ سطحې پرمخ $f(x,y,z) \equiv 1$ وي نو:

$$\iint_{\sigma} ds = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = s_\sigma$$ (د σ سطحې مسا حت را ښئ s_σ)

2 . دلومړي نوعې سطحې انتګرال محاسبه.فرضوو چې دσ سطح د $z=z(x,y)$ تابـــع په واسطـــــه ورکــړشوې ده داسې چـــې $z(x,y)$ تابع او دهغــــې قسمــي مشتـــقات $\acute{z}_x(x,y)$ او $\acute{z}_y(x,y)$ د G پرتړلې نا حیې کې متمادي دي، G د σ ناحیې مرتسم د xoy پر مستوي دی (34 شکل).همدا رنګـــه فرضوو چې $f(x,y,z)$ د σ پرسطحې متمادي او په نتیجه کې د σ سطحې پـــر مـــخ دانتــګرال نیولـــو قا بیلیت لري.

لکه دمخکې په شا ن د σ ناحیه دσ_n...... σ_2 ، σ_1 , په اختیاري ډول، پهn قسمي برخــــو ویشووداسې چې داخلي مشترکې نقطې نه لري او مساحتونه یې $\Delta s_1,\Delta s_2,\ldots\Delta s_n$ وي. دې ویشل شوو ناحیو ته د xoy پرمستوي ارتسام ورکوو په نتیجه کې د G ناحیه په ترتیب سره د $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ برخو چې مساحت یې هم په ترتیب $\Delta\omega_1$,$\Delta\omega_2$.......$\Delta\omega_n$ دی، ښیو .

د هرې قسمي برخې مسا حت Δs_k کولای شو په لاندې ډول ارایه کړو .

$$\Delta s_k = \iint_{\Delta k} \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}\ d\omega$$

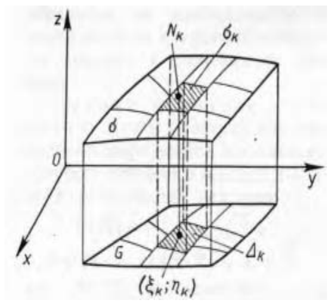
دوسطی قضیې دتطبیق په صورت کې په لاس راوړو.

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k\eta_k) + z_y'^2(\xi_k\eta_k)}\quad \Delta\omega_k \qquad (2)$$

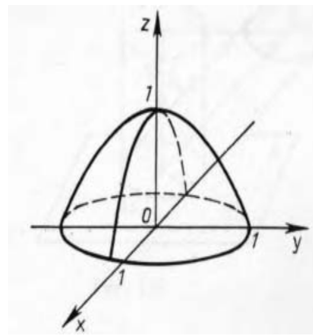
د σ_k د k–امې برخې پر سطحود N_k نقطې چې د (ξ_k,η_k,Θ_k) مختصات لري او $\Theta_k = z(\xi_k,\eta_k)$ دی،ښیي. لاندې ا نتیګرالي مجموعه تشکیلوو.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,gk)\,\Delta s_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k\eta_k) + z_y'^2(\xi_k\eta_k)}\ \Delta$$



(35 شکل)



(34 شکل)

که دا د $\lambda \to 0$ په حالت کې لمت ونیسو(څرګنده ده چې د $\lambda \to 0$ لپاره $\max \Delta\omega \to 0$) لاندې فورمول په لاس راوړو(ددوه ګوني او لومړی نوعې منحني السطح انتګرالونو دتعریف له مخې):

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)ds = \iint_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\;dxdy \qquad (3)$$

د б ناحیې پر مخ دلمړي نوعې سطحې انتګرال لپاره په مشابه ډول یوه افاده لاسته راځي کله چې دб ساحې مرتسم د xoy او یا yoz په مستوي ګانو په پام کې ونیول شي.

مثال . لاندې انتګرال محاسبه کړي ؟

$$I = \iint_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,ds$$

په داسې حال کې چې б د $z = 1 - x^2 - y^2$ پارابولویېډ یوه برخه ده چې د $z = 0$ مستوي په واسطه بیله شوې ده (35شکل).

دб سطحه د $z = 1 - x^2 - y^2$ معادلې په واسطه ورکړل شوې ده ، مرتسم یې د $x^2 + y^2 = 1$ دایره ده. په نتیجه کې دG ناحیه د $x^2 + y^2 \leq 1$ دایروي ناحیې څخه عبارت ده. په نومـــوړې ناحیـــه کې د

$$z = 1 - x^2 - y^2 \;, \quad z_y'(x,y) = -2y \;, \quad z_x'(x,y)$$

توابع متمادي دي. د(3) فورمول څخه لیکلای شو:

$$I = \iint_{G}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;dxdy = \iint_{G}(1+4x^2+4y^2)dxdy$$

په وروستي انتګرال کې دقطبي مختصاتو دتعويض کولو په صورت کې په لاس راوړو.

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+4r^2) r dr = 3\pi$$

ددويمې نوعې سطحې انتګرالونو تعريف. ددې لپا ره چې دويم نوع سطحي انتګرالونه تعريف کړو لازم دي چې دسطحې د مخونو مفهوم وپيژنو.

د σ هموارې سطحې پرمخ د M يوه اختياري نقطه اوپه نوموړي نقطه کې پرسطح باندې نورمال په پام کې نيسو(د $\bar{n}$ ويکتور). د σ پرسطحې يو اختياري تړلې منحني چې د σ سطحې سرحدي نقطو سره شريکه نقطه ونه لري اود M نقطې څخه تيرشي په پام کې نيسو. د $\bar{n}$ ويکتورته دنوموړي تړلي منحني پرمخ حرکت ورکوو داسې چې σ پرسطحې باندې دتل لپاره عمود او جهت يې تغيــر وکـــړي (36 شکل). پدې صورت کې د M نقطې په اصلی موقعيت کې به دنورمال جهت، يا به اصلي موقعيت غوره کوي اويا دا چې داصلي موقعيت سره به په مخالف جهت کې واقع شي .که چېرې د σ پرسطحې ديوتړلي منحني پرمخ چې د σ سرحدي نقطوسره شريکه نقطه نه لــري ، د نورمال جهت ددوران په صورت کې تغيرونکړي او پرسطحې عمود وي نود σ سطــح ددوه اړخيزې سطحې په نوم ياديږي (برعکس ديواړخيزې سطحې په نوم ياديږي).

د کرې سطح د دوه اړخيزوسطحولپاره يوه ښه نمونه ده ، اوداسې نور.

مونږ يوازې دوه اړخيزې سطحې ترمطالعې لاندې نيسو.

هغه دوه اړخيزې سطحې چې دهغې لپاره نورمال دسطحې پرټولونقطوکې ديوې نقطې څخه بلې نقطې ته دتيريدو په صورت کې خپل جهت ته تغيرورکړي، دې ډول دوه اړخيزو سطحوته طرف لرونکې سطحې وايي. انتخاب شوي مشخص طرف ته دسطحې جهت وايي.

دسطحې دجهت مفهوم اودسطحې دسرحد جهت ترمنځ مطلقه رابطه وجودلري.

فرضوو چې σ يوه موجه سطح (دسطح جهت تعين شوي) ده چې L سرحد په واسطه احاطـــه شوې داسې چې سره نه قطع کوي . دL سرحد پرمخ مثبت جهت(σ سطحې دجهت په مطابق) هغه جهت دی کوم چې د سرحد پرمخ د حرکت کولوپه صورت کې يې سطح چپې خواته واقع شي (37 شکل). معکوس

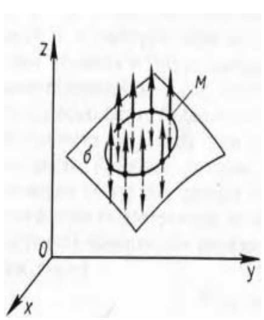
جهت ته منفي جهت وايي. که چېرې دسطحې جهت تغيروکړي نوپه دې صورت د L سرحد پرمخ دمثبت او منفي جهتونو رول تغير کوي.

دمايعاتو د سيلان په هکله مسأله. فرضوو چې يوجسم دبهيدونکې مايع په واسطه ډک شوی دی داسې چې د(x,y,z) Mپه نقطه کې مايع سرعت د لاندې ويکتورپه واسطه ورکړشويدی.

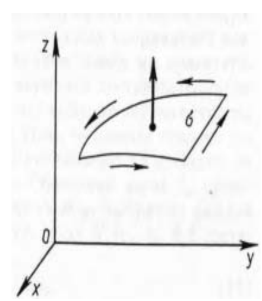
$$\bar{v}\,(M)=p(x,y,z)\bar{\imath}+Q(x,y,z)\bar{\jmath}+R\,(x,y,z)\vec{k}$$

په داسې حال کې چې Q ، P او R دسرعت د ويکتورمرتسمونه دمختـــــصاتو په محـــــور بنيي. فرضوو چې د Q ، P او R توابع نظرمختصاتوته متمادي توابع دي. دπ هغه مقدار مايع محاسبه کوو کـــــــوم چې دوخت په واحد کې د б د موجه سطحې پرمخ لګيږي ، (د б پرسطح دمايع سيلان ديوې خيالي سطحې په شان داسې وګڼئ چې دجريان ضدنه ګرځي) او د L فضايي منحني په واسطه احاطه شوی دی. فرضوو چې دمايع کثافت ρ=1 دی.

قبلووچې $\bar{n}=\bar{n}(M)=\bar{\imath}\cos\alpha+\bar{\jmath}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma$ دб پرسطح دبهيدونکو مايع د M په نقطـــه کې دنورمال په جهت واحد وکتوردی همدارنګه فرضووچې دجهت کوساينونه دz,y,x مختصاتوپه پام کې



(36شکل)

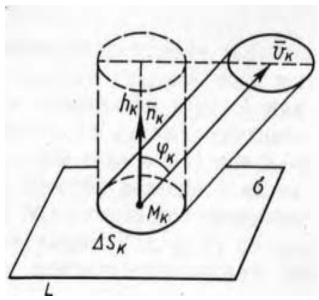


(37 شکل)

نيـــــولوسره په نـــــومــوړې نقطه کې متـــمادي دي. داسې چـــې دمشترکې نقـــطې نه لــــر ي اود ΔS1،ΔS2, ،.........ΔSn مساحتونولرونکې وي. په هرې ويشل شوي برخې کې د(ξ_k,η_k,θ_k)،M_k اختياري نقطه انتخابوو. د $\Delta\pi_k$ هغه مقدارمايع محاسبه کوو کوم چې دوخت په واحد کې په k- ام برخې لګيږي (38شکل).

د $\overline{v}_k=\overline{v}\,(M_k)$ او $\overline{n}_k=\overline{n}\,(M_k)$

وکتورونوترمنځ زاویه په φ_k سره بنیو .که دσ سطحې په کافی اندازه په کوچنیو برخو وویشو ،کولای شو دا فرض کړو چې دk-امې برخې په ټولو نقطو کې د$\bar{v}$ سرعـــت ثابت او د $\bar{v}\,(M_k)$ سره مساوي دی. نو د $\Delta\pi_k$ مایــــع چې دوخت په واحد کې



(38شکل)

مقدار د$\bar{n}_k$نورمال جهت په k- امې بـــــرخې لګیرې، په تقریبي ډول دهغې استوانې دحـــجم سره مساوي دی کـــوم چې قاعده یـــې

Δs_kاوارتـــــفاع h_k ده یعنې $\Delta s_k h_k \approx \Delta\pi_k$.څرنګه چې

$$h_k = |\bar{v}_k| \cos \varphi k = |\bar{v}_k| . |\bar{n}_k| \cos(\bar{v}_k, \bar{n}_k)$$

دی نو

$$\Delta\pi_k \approx (\bar{v}_k, \bar{n}_k)\ \Delta s_k$$

دټولې مایع دمقداردمحاسبه کولولپاره چې دوخت په واحد کې دσ سطح پرمخ لګیږي، لاندې تقریبي فورمول په لاس راوړو:

$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}_k, \bar{n}_k)\ \Delta s_k$ په داسې حال کې چې $\Pi_k \approx \Pi_k\ \Delta \sum_{k=1}^{n} = \prod$

او یا

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} (p(M_k) cos d_k + Q(M_k) cos\beta_k + R(M_k) cos\gamma_k)\ \Delta s_k \qquad (4)$$

که چېرې $\lambda \to 0$ وي نود(4)رابطې څخه دلمیټ په اخیستلو کولای شو په دقیقه توګه دټولې مایع مقدار په لاس راوړو په داسې حال کې چې λ دσ سطحې دویشل شوې برخې ترټولو لوی قطر دی.

$$\prod = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[p(M_k) cos \propto_k + Q(M_k) cos\beta_k + R(M_k) cos\gamma_k \right] \Delta s_k \qquad (5)$$

(4)مجموعې ته تغير ورکوو. فرضوو چې $(\Delta\omega_k)_{yz}$ **دk امې قسمي برخې دمرتسم د yoz پــه مستوي** **بنيي ، مثبت اومنفی اشاره لري.دااشا ره دهغه زاويې پورې اړه لري کومه چې د** n_k **نورمال يې د ox محورسره حاده يا منفرجه زاويه جوړوي. لروچې .**

$$(\Delta\omega_k)_{yz} = \Delta s_k \cos \alpha_k \quad (6)$$

$$(\Delta\omega_k)_{xz} = \Delta s_k \cos\beta_k \quad (7)$$

$$(\Delta\omega_k)_{xy} = \Delta s_k \cos \gamma_k \quad (8)$$

د(6)، (7)،(8)فورمولونو په پام کې نيولو سره د(4)مجموعه او د(5)لمت په ترتيب سره لاندې شکل غوره کوي.

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n}(p(M_k)(\Delta\omega_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}) \quad (9)$$

$$\prod = \lim_{\gamma\to 0}\sum_{k=1}^{n}(p(M_k)(\Delta\omega_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}) \quad (10)$$

تبصره .په گوته کوو چې د (5)او (10) رابطو دښي خوا لمتونه سره مساوي دي (قبلوو چې دا لمتونه موجودي)، داځکه چې د(4) او(10) فورمولونه عين مجموعه ښيي يوازې دليکلو طرز يې توپير لري .

اوس دويمه نوع سطحې انتگرال تعريف کوو.

فرضوو چې σ **يوه موجه سطح او د z=f(x,y) معادلې په واسطه ورکړل شوې ده. همدارنگه فرضوو چې د(R(x,y,z تابع د** σ **سطحې په ټولو نقطو کې تعريف شوي ده . دسطحې له دوو خواو څخه يوه خوا ټاکواو يا په بل عبارت يو له هغو دوه ممکنه موجه وکتورونو څخه چې په سطحې باندې عمود وي، ټاکو (په حقيقت کې مونږ سطح موجه گرځولې). که چېرې نورمال وکتور دoz له محور سره حاده زاويه جوړه کړي نو په دې صورت کې به (z=f(x,y سطحې پورتنۍ خوا او که چېرې منفرجه زاويه جوړ کړي وي نو په دې صورت کې به دسطحې ښکتنې خوا ټاکل شوي وي. د** σ **سطح په اختياري ډول په n قسمي سطحو داسې ويشو چې شريکه نقطه ونه لري. د**Δ_k **په واسطه دk- امې برخې مرتسم د xoy پر مستوي ښيو. په هرې ويشل شوې سطحې کې په اختياري ډول د(**$N_k(\xi_k,\eta_k,\theta_k$ **نقطه ټاکو او لاندې مجموعه تشکيلوو:**

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta\omega_k \quad (11)$$

په داسې حال کې چې $\Delta\omega_k$ د Δ_k مساحت ورکوي او په مثبتې علامې سره په پام کې نیول کېږي کله چې ټاکل شوې سطح د σ سطحې پورته خواوې ،او په منفي علامې سره په پام کې نیول کېږي کله چې ټاکل شوې سطح د σ سطحې ښکتنې خوا وي. دλ په واسطه د σ دویشل شوو برخې تر ټولو لوی قطر ښیو.او په لاندې ډول دویم نوع سطحي انتگرال تعریفوو.

تعریف . د $\lambda \to 0$ لپاره د(11) انتگرالي مجموعې لمیټ(که چېرې دالمیټ موجود اودσ سطحې په ویشلواو دN_k نقطې په انتخابولوپورې متعلق نه وي) د (R(x,y,z تابع دویم نوع سطح انتگرال پرټاکل شوې σ سطحې ښيي اوپه یوله لاندې ډولونوښودل کېږي.

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy \quad \text{یا} \quad \iint_{\sigma} R(M)dxdy$$

په مشابه ډول لاندې دویم نوع سطحي انتگرالونه تعریفیږي.

$$\iint_{\sigma} p(x,y,z)dydz \quad \text{او} \quad \iint_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx)$$

دا مجموعه

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy \; + \; \iint_{\sigma} p(x,y,z)dydz$$

مجموعه ددویمې نوعې عمومي سطحي انتگرال په نوم یادیږي اوپه لاندې ډول لیکل کېږي.

$$\iint_{\sigma} p(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \qquad (12)$$

ټول هغه خواص چې لومړی نوع سطحي انتگرالونو کې صدق کوي، دویم نوع سطحي انتگرالونوکې هم صدق کوي پرته دیوه خاصیت څخه چې دسطحې دطرف په تغیر(تبدیل دجهت)سره دانتگرال اشاره تغیر کوي .

دپورتنې ذکرشوي مثال څخه چې دمایع سیلان په برخه کې مطالعه شوه. داترلاسه کېږي چې په نوموړي مثال کې د(12) سطحي انتگرال فزیکي مفهوم دهغې مایع مقدارښيي کوم چې د وخت په واحد کې د σ سطحې څخه چې په نوموړي مثال کې ذکر شو لګېږي .

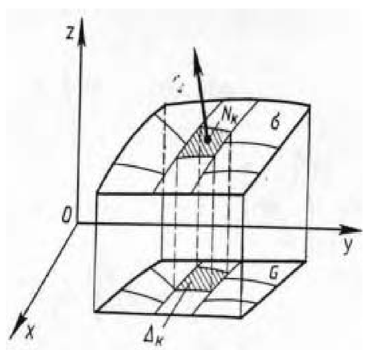
د دویم نوع سطحي انتگرال محاسبه.فرضووچې د σ موجه (پاسنی طرف په پام کې نیسو) سطحه د(z=f(x,y معادلې په واسطه ورکړشوې داسې چې (f(x,y د G په محدوده ناحیه کې تعریف شوې او G د σ سطحې مرتسم د x oy پرمستوي ښيي. همدارنګه فرضوو چې (R=(x,y,z د σ پرسطحه یوه متمادي تابع ده.

د б سطح په اختياري ډول په n برخوويشو چې داخلي شريکې نقطې ونه لري او دنوموړي سطحې مرتسم د xoy پرمستوي رسموو (39شکل).

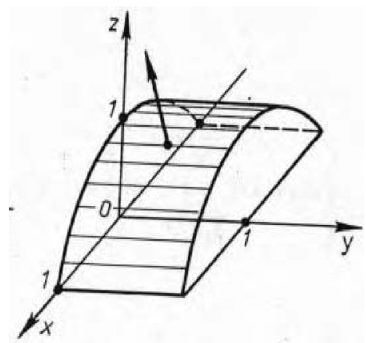
د $\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta\omega_k$ انتگرالي مجموعه تشکیلوو،داسې چې $\Delta\omega_k$ د Δ_k مساحت ښيي.

څرنگه چې (θ_k =f(ξ_k , η_k, θ_k ده نو:

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\theta_k)\Delta\omega_k = \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k \qquad (13)$$



(39شکل)



(40شکل)

(13) معادلې ښيي چې د R(x,y,f(x,y)) تابع لپاره چې د G په ناحيه کې متمادي ده ديو دوه گــــوني انتگرال،انتگرالي مجموعه ده.که چېرې $\lambda \to 0$ په صورت کې د (13)رابطې لميټ ونيول شي،په لاس راوړو:

$$\iint_{б} R(x,y,z)dxdy = \iint_{G} R(x,y\,,f(x,y))dxdy \qquad (14)$$

که چېرې دنوموړي سطحې لاندينې طرف په پام کې ونيول شي نو د انتگرال تر مخه علامه په منفي علامې تغيره اوبدليږي.

د دې سره مشابه لاندې انتگرالونه محاسبه کوو.

$$\iint_{\mathfrak{S}} p(x,y,z)dydz \quad \text{او} \quad \iint_{\mathfrak{S}} Q(x,y,z)dydz$$

د(12)رابطې د عمومي انتګرال دمحاسبې لپاره دپورتنو درې ذکر شوو انتګرالونو دفورمولونو څخه ګټه اخیستل کېږ ي،کله چې د б سطحې ارتسام په یو قیمته ډول دمختصاتو په مستوي ګانو صورت ومومي.

مثال1. لاندې انتګرال محاسبه کړئ؟

$$\iint_{\rho} (y^2 + z^2)dxdy$$

په داسې حال کې چې б د $z = \sqrt{1 - x^2}$ سطحې پورتنی طرف وي کوم چېy=0 او y=1د مستوي ګانو په واسطه قطع شوی دی (40شکل) .

دورکړل شوې سطحې ارتسام دxoy په مستوي کې د G: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ ، مستطیل دی.

د(14) فورمول څخه لیکلای شو:

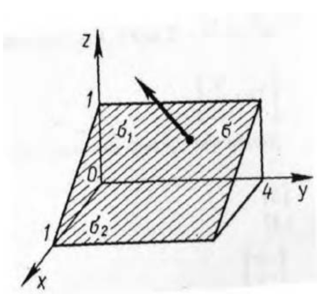
$$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2)dxdy = \iint_{G} \left(y^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)\right)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} (y^2 + 1 - x^2)dy = 2$$

مثال2 .د $\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$ انتګرال محاسبه کړئ کله چې σ د X+Z −1=0 مستوي پورتنی خوا وي کومه چې د y=0 , y=4 مستوي ګانو په واسطه قطع کېږي او په لمړۍ ناحیه کې واقع وي (41شکل).

$$\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy =$$

$$\iint_{\sigma 1} (1 - z)dydz + \iint_{\sigma 2} (1 - x)dxdy$$

$$= 2 + 2 = 4$$



(41شکل)

دلومړي او دويم نوع سطحي انتګرالونو تر منځ اړيکې. په ذکرشوو تبصرو او دلومړي او دويم نوع سطحي انتګرالونو دتعریف څخه په ګټه اخیستنې سره په لاس راځي:

$$\iint_{\sigma} (p(x,y,z)cos\alpha + Q(x,y,z)cos\beta + R(x,y,z)cos\gamma)ds$$

$$= \iint_{\sigma} p(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \qquad (15)$$

6 . **دسطحي انتګرالونو استعمال.** مخکې مونږ د لومړی او دویم نوع سطحي انتګرالونو فزیکي مفهوم او همداسې دلومړی نوعې سطحي انتګرال په واسطه د مساحت پیداکول مطالعه کړل. دلومړی نوعې سطحي انتګرال په واسطه کولای شودیوې سطحې دثقل مرکز لکه چې په دوه ګوني انتګرالونوکې ترسره شوي، په لاس راوړو. همدارنګه کولای شو دا نرشیا مومنت نظر قایمو محورانو ته په لاس راوړو.

تمرینونه

لاندې انتګرالونه محاسبه کړئ؟

1. $\int_0^2 dx \int_0^x 3dy.$ [6] 2. $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x-y)dy$ [0.9]

3 . $\iint_G x\sqrt{y}$dxdy داسې چې G د $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ مربع ده. [$\frac{1}{3}$]

4. $\iint_G ydxdy$ G هغه ناحیه ده چې د $y^2 = x$ او $y=x-2$ منحنیاتو په واسطه احاطه شوي. [$\frac{9}{4}$.]

5 . $G, \iint_G (x-y)dxdy$ هغه ناحیه ده چې د $y=0$, $x+y=2$ او $y=x$ او واسطه خطونو په. احاطه شوي. . [$\frac{2}{3}$]

دانتګرال نیولو ترتیب ته تغیر ورکړي.

6. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$ $[\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx]$

7. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ $[\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx]$

8 $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

$[\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)]$

9. $\int_0^1 dy \int_y^{y+2} f(x,y)dx.$

$$|\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_2^3 dx\int_{x-2}^1 f(x,y)dy|$$

قطبي مختصاتو ته د تيريدو په صورت کې لاندې دوه ګوني انتګرالونه محاسبه کړی.

10. $\iint_G e^{x^2+y^2}dxdy,$ په داسې حال کې چې Gد $x^2+y^2\le 1$دايروي سطح ده $[\pi(e-)]$.

11. $\iint_G(x^2+y^2)2\,dxdy$ .G د $x^2+y^2\le 4$دايروي سطح ده. $\left[\frac{\pi 64}{3}\right]$

12. $\iint_G\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

G د $x^2+y^2\le 2x$ د ايروي سطحې څلورمه برخه ده کومه چې په اوله حجره کې واقع ده.

$[\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)]$

13. $\iint_G(x^2+y^2)\,dxdy$.

په داسې حال کې چې G د $x^2+y^2\le 2x$ دايروي سطح ده

$[\frac{3}{2}\pi]$

لاندې درې ګوني انتګرالونه محاسبه کړئ؟

14. $\iiint_\Omega\frac{dxdyz}{(1+x+y+z)3}$

په داسې حال کې چې Ωد X+y+Z=1 او X=0,y=0,z=0 مستوي ګانو په واسطه احاطه شوې وي(41شکل)

$[\frac{1}{2}ln2-\frac{5}{16}]$.

15. $\iiint_\Omega(x+y)dxdydz$

په داسې حال کې چې Ωد X=1,y=1,z=1 , Z=0,y=0,x=1 مستوي ګانو په واسطه احاطه شوې وي .

[1]

استوانوي مختصاتوته د تيريدو په صورت کې لاندې درې ګوني انتګرالونه محاسبه کړئ؟

16. $\iiint_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$.

په داسې حال کې چې Ω د $2z=x^2+y^2$ اود $Z=2$ سطحو په واسطه احاطه شوې ده.

$[\frac{16}{3}\pi]$

17. $\iiint_\Omega zdxdydz$.

په داسې حال کې چې Ω د z=a (a>0)او $x^2+y^2=1$,z=0 سطحو په واسطه احاطه شوی دي.

$[\frac{a^2\pi}{2}]$

کروي مختصاتو ته دتیریدوپه صورت کې لاندې انتګرالونه محاسبه کړئ؟

18. $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

دΩناحیه $x^2+y^2+z^2\le R^2$کروي سطح ده

$[\frac{4\pi R^5}{5}]$

19. $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$.

په داسې حال کې چې د Ω ناحیه د $x^2+y^2+z^2\le R^2$ کروي سطحې پورتنۍ برخه ده.

$[\frac{4}{15}\pi R^5]$

ددوه ګوني انتګرالونو په مرسته هغه مساحتونه محاسبه کړي کوم چې دورکړل شوي منحنیاتو په واسطه احاطه شویدي.

20. x+y=2,x=0,y=0 .

[2]

21. y=x^2, $4y=x^2, x=2, x=-2$.

[4].

22. د $x^2+y^2=y$ دایره.

$[\frac{\pi}{4}]$

23. هغه نا حیه چې دارشمیدس اسپیرال r=a φ لومړی دور او قطبي محور په واسطه احاطه شوی دی په داسې حال کې چې a یو مثبت عدد دی .

$\left[\frac{4}{3}a^2\pi^3\right]$

24. x^2+y^2=4 او $x^2+y^2=1$ د دایروترمنځ .

$[3\pi]$

په دوه طریقو (ددوه ګوني اودری ګوني انتګرالونو په مرسته)هغه حجم محاسبه کړي کوم چې دلاندې سطحو په واسطه احاطه شوی دی.

, y=0 z=0 , x+y+z=1 x=0 . 25,

$[\frac{1}{6}]$

z=0 , z=1−x+y, ,y=0 , x=0 , x+y=**1** . 26

$[\frac{5}{6}]$

x+y=z, x+y=1, x=0,y=0,z=0 . 27

$[\frac{1}{3}]$

z=0د. z= $x^2 + y^2 = 1$ .28

$[\frac{\pi}{2}]$

z=1−x^2−y^2 , **z=0** .29

$[\frac{\pi}{2}]$

30. **دهغې متجانسې مقوا د ثقل د مرکزمختصات په لاس راوړئ کوم چې د**(a>0) x+y=2a **او** ay=x^2 **خطونو په واسطه احاطه شوی دی.**

$[x_c=-\frac{a}{2}, y_c=\frac{8}{5}a]$

31. **دهغې متجانسې مقوا دثقل دمرکز مختصات په لاس راوړئ کوم چې د** $x^2 = 20y$. **او** $y^2 = 20x$ **پارابولونو په واسطه احاطه شویدی.**

$[x_c = 9$ **د** $y_c = 9]$

32. **د هغه جسم دثقل د مرکز مختصات په لاس راوړئ کوم چې د** z=0,y=0,x=0,x+y+z=a (a>0)**سطحو په واسطه احاطه شویده.**

$[x_c = y_c = z_c = \frac{a}{4}]$

33. **دهغه جسم دثقل د مرکز مختصات په لاس راوړئ کوم چې** Z=0 **او** Z=1 − $x^2 - y^2$ **د سطحو په واسطه احاطه شویدی .**

$[x_c = 0 y_c = 0 z_c = \frac{1}{3}]$

34. **دهغه جسم دانرشیا مومنت نظرد** oz **محور ته په لاس راوړئ کوم چې د** $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ **سطحې په واسطه احاطه شوی او کثافت یې دسطحې په ټولو برخوکې ثابت او د 1 سره مساوي دی.**

$|\frac{8}{15}\pi R^5|$

35 د دهغه مقوا دانرشیامومنت نظر دox محورته په لاس راوړئ کوم چې د y=2+x, y=2−x او y=0

خطونو په واسطه احاطه شوی او کثافت یې دسطحې په ټولو برخوکې ثابت او د1 سره مساوي دی .

$|\frac{8}{3}|$

لاندې منحني الخط انتګرالونه محاسبه کړئ؟

36. $\int_{OA}(x-y)dl$.

په داسې حال کې چې دانتګرال نیولو منحني د(O(0,0 څخه تر, A(4,3) مستقیم خط راکړشوي وي.

$|\frac{5}{2}|$

37. $\int_L xydl$

په داسې حال کې چې L دهغه مثلث محیط دی کوم چې راسونه یې A(−1,0)، C(0,1) او B(1,0)

په نقطو کې واقع دي.

[0]

38. $\int_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy$

کله چې دانتګرال نیولو منحني د څخه A(1,1) تر B(3,4) مستقیم خط وي.

$[\frac{67}{6}]$.

39. $\int_{OA}xdy-ydx$

کله چې OA د $y=x^2$ پارابول هغه قوس دی کوم چې د O(0,0) او A(2,4) نقطو په منځ کې واقع دی.

$|\frac{8}{3}|$.

40. دګرین دفورمول په تطبیقولو د $\oint_L y^2dx+(x+y)^2dy$ انتګرال محاسبه کړئ کله چې د

انتګرال نیولو منحني دهغه مثلث محیط وي کوم چې راسونه یې د A(1,0)، B(1,1) او C(0,1)

په نقطو کې واقع وي.

$|\frac{2}{3}|$

لاندې سطحي انتګرالونه محاسبه کړئ؟

41. $\iint_\sigma(x^2+y^2)ds$

کله چې σ د $z^2 = x^2 + y^2$ د مخروطې سطح وې کومه چې z=0 او z=1 مستوي ګانو ترمنځ واقع دی.

$[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}]$

42. $\iint_\sigma zdxdy$ کله چې دانتګرال نیولو سطح د $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ کرې دنیمایې پورتنۍ برخې طرف وي

$[\frac{2\pi R^3}{3}]$

43. $\iint_\sigma (x^2 + y^2)dxdy$ کله چې دانتګرال نیولو سطح د $z = 1 - x^2 - y^2$ پارابولو ئید دهغې برخې پورتنې طرف دی کوم چې د z=0 مستوي په واسطه جلا کېږي.

$[\frac{\pi}{2}]$

44. هغې سطحې مساحت پیداکړئ کوم چې د $2z = x^2 + y^2$ سطحې څخه د $x^2 + y^2 = 3$ استوانه بیلوي.

$\left[\frac{14}{3}\pi\right]$

45 . دهغې سطحې مساحت پیداکړئ کوم چې د $z^2 = x^2 + y^2$ محدبې مخروطي سطحې د z=0 او z=1 مستوي ګانو په منځ کې واقع دی.

$[\pi\sqrt{2}]$

څلورم فصل

تفاضلي معادلې

§ 1.4.تفاضلي معادلو اسا سي مفاهیم

1. هغه مسأله چې په تفاضلي معادلاتو بدلیږي

د علم په مختلفو ساحو او تخنیک کې اکثرا دداسې مسایلو سره مخامخ کېږو د کوم د حلولولپاره یې لازم دي یوه یا څو داسې معاد لې حل کړو چې په کې د مطلوبې تابع مشتق موجود وي.داډول معادلې د تفاضلي معادلو په نوم یادیږي. یو شمیرهغه مسایل په یام کې نیسو چې په تفاضلي معاد لو بد لیږي .

مسأله1 . د xoy په مستوي کې داسې یو منحني په لاس راوړئ چې(0.0) Oله نقطې څخه تیراو د نوموړ ي منحني د مماسی خط زاویو ي ضریب کوم چې د منحني مختلفو نقطو څخه تیریږي،د تماس نقطو د فاصلې له دوه چند سره مساوي وي.

حل. فرضوو چې $y = f(x)$ د مطلوب منحني معادله ده د مسألې د شرط له مخې د$M(x, f(x))$ په هر ه نقطه کې مماس موجود او زاویوي ضریب یې $f'(x)$د 2x سره مساوي دی،

په دې ډول لرو:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (1)$$

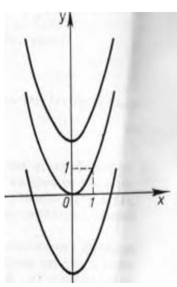
دا یوه تفاضلي معادله ده ځکه چې په نوموړې معادله کې د مطلوبې تابع مشتق موجود دی. د(1) معادلې څخه څرګندیږي چې د yتابع د $2x$ اولیه تابع ده په دې توګه لرو:

$$y = \int 2x dx$$

او یا

$$y = x^2 + c \qquad (2)$$

په داسې حال کې چېCیو اختیاري ثابت دی د(2) فورمــــــول څخه څرګندیږ ي چې(1) تفاضلي معادله بې نهایتو حلونه لري. یعنې(1) معادله نه یوازې یو منحني صدق کوي بلکه د بې نهایتو منحني ګانو مجموعـــــه صدق کـــوي(42شکل).ددې لپاره چې



(42شکل)

نــــوموړ ي مجموعې څخه کــــوم مطلوب منحني وټاکو،دا باید په پام کې ونیسو کــــوم چې نوموړی منحني باید د(0,0)Oله نقطې څخه تیر شي .په نتیجه کې د نــــوموړې نقطې مختصات باید(2)معادله صدق کړي.پدې توګه O=O+Cیعنې C=0 په دې مانا چې مطلوب منحنی $y = x$ څخه عبارت دی.

2 مسأله.په خلا کې د یوجسم د أزاد سقوط قانون په لاس راوړئ کله چې د حرکت د شروع کېدو مسیر یې $t = 0$ په لحظه کې داسې صورت ونیسي کوم چې اولیه سرعت یې د صفر سره مساوي وي. پوهیږو چې پدې حالت کې سرعت د $v = \mathrm{g}t$ فورمول په واسطه بنودل کېږي.

حل.پوهیږو چې د فاصلې مشتق نظروخت ته د مستقیم الخط حرکت له سرعت څخه عبارت دی بنا پردې.

$$V = \frac{ds}{dt} = \mathrm{g}t$$

له دې رابطې څخه څخه څرګندیږ ي چې د s تابع د gt تابع یوه اولیه تابع ده په نتیجه کې

$$s = \int \mathrm{g}t dt$$

او یا

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 + c \qquad (2)$$

د c اختیاري ثابت د تعینولو لپاره هغه اولیه شرایط په پام کې نیسو کوم چې دحرکت پیل یې د زمان دپیل سره مطابقت کوي یعنې د t=0 لپاره S=0 وي.په(3)رابطه کې ددې قیمتونو په وضع کولو سره 0=0+c یعنې C=0 دی په نتیجه کې په لاس راوړو

$$S = \frac{\mathrm{g}t^2}{2}$$

په پورتنیو ذکر شوو دوو مثالونو کې مونږد $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$ په شان تفاضلي معادلې په لاس راوړوکومې چې ساده تفاضلي معادلې ورته وایي.مګر پر ډیرو طبیعي او انجینري مسایلو کې مـــــونږ د عمومي او مغلقو تفاضلي معادلاتو سره مخامخ کېږو.

د تفاضلي معادلو تعریف،ترتیب او حل یې.

د $y = f(x)$ مطلوبې تابع،دهغه د مشتقاتواو x ازاد متحول ترمنځ رابطې ته تفاضلي معادله وایي.که چیرې مطلوبه تابع د یو متحول پورې اړه ولري دې ډول تفاضلي معادلوته عادي یا معمولي تفاضلي

معادلې وايي. په دې فصل کې مونږ يوازې معمولي تفاضلي معادلې ترمطالعې لاندې نيسو. په تفاضلي معادله کې د مشتق لوړ ترتيب ته د تفاضلي معادلې ترتيب وايي. په دې ډول د n-ام ترتيب تفاضلي معادلې عمومي شکل عبارت دی له:

$$f(x, y,, y', \dots \quad y^{(n)}) \tag{4}$$

په خصوصي ډول په دې معادله کې کېدای شي x او yموجود نه وي او يا داچې تر n ترتيب څخه کم مشتقات پکې موجود وي. د مثال په ډول $y' \frac{y}{x} = x$ $y''+ y'=1$ معادلات په ترتيب سره د لومړي او دويم ترتيب لرونکې تفاضلي معادلې دي.

د $y = f(x)$ په شان ټولې هغه توابع چې که په (4) معادله کې وضع او په عينيت بدله شي ، د معادلې د حل په نوم يادېږي.

مثال. د $y = e^{\frac{x^3}{3}}$ تابع د $y' - x^2 y = 0$ تفاضلي معادلې حل دی دا ځکه چې معادله صدق کوي.

§2.4 .لومړی ترتيب تفاضلي معادلې او په فزيک ،تخنيک او ايکالوژي کې دهغې تطبيق.

1. لومړی ترتيب تفاضلي معادلې د هغوي هندسي مفهوم،عمومي حل او اوليه شرط.

لومړی ترتيب تفاضلي معادله د ا لاندې شکل لري:

$$f(x, y, y') = 0$$

او يا دا شکل(که چېرې نظر y' ته دحلولو قابليت ولري).

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

په (1) معادله کې دx او yمتحولين دxoy پر مستوي کې ديوې نقطې د مختصاتو په څير په پام کې نيول کېږي.فرضوو د$y = \varphi(x)$ د(1) معادلې معادله حل دی،هغه منحني چې د $y = \varphi(x)$معادلې په واسطه تعريف ،د(1) معادل دانتگرالي منحني په نوم يادېږي.دانتگرالي منحني د $M(x, y)$ په اختياري نقطــه کې مما س په پام کې نيسو.په نوموړې نقطه کې د مشتق د هندسي مفهوم په پام کې نيولو سره لرو:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

داسې چې α دمماسي خط زاويه د Ox محور سره ورکوي د اخرې (1) معادلې څخه لاس ته راځي.

$$tg\alpha = f(x,y)$$

داسې چې x او y د Mنقطې مختصات دي . په دې ډول د انتګرالي منحني په هره نقطه کې دمماس خط ميل د(1)معادلې د ښي خوا سره مساوي دی.بناً(1) تفاضلي معادله د انتګرالي منحني په هره نقطه کې موجه مماسونه له نوموړي منحني سره ښيي.

د همدې ناحيې د M (x,y) په هره نقطه کې چيرې چې د f(x,y) تابع(د (1) معادلې ښي خـــوا)تعريف ده ،که د k= f(x,y) زاويوي ضريب سره خطي قطعه وضع کړو داسې چې(x,y) د M نقطې مختصات دي، د موجه خطونو سټ يا دا چې د ورکړ شوي تفاضلي معادلې د جهتونو ساحه په لاس راوړو.

په دې پدې ډول د (1) معادله د خپل جهت له نا حيې سره مطابقت کوي.دا موضوع د لومړي ترتيب تفاضلي معادلو (1) هندسي مفهوم ښيي.که چېرې د يوې ناحيې د بې نهايتو نقطو څخه يو شمير خطي قطعي کـــومې چې د هغې څخه پورته يادونه شوې،تيرې کړو په ځرګند ډول د جـــهت نا حيه پـــه لاس راوړو. ځرنګه چې د مماس خطونو جهت د خطي قطعو د جهت سره په ټولو نقطو کې مطابقت کوي،نو کولای شو د(1) معادلې حل په هندسي مفهوم سره دارنګه تعبير کړو.هغه منحني پيداکړئ چې د هغې په هره نقطه کې د مماس جهت د ناحيې له جهت سره مطابقت کوي.

کله چې د اوسپنې پودر په يوه مقنا طيسی نا حيه کې کېښودل شي دامشهوره تجربه پورتنۍ ذکر شوې مطابقت ښه واضح کوي. په دې مانا چې پودر د جهتونو نا حيه تشکېلوي او د مقناطيسي قوې د خطونو له جملې څخه يو خط انتګرالي منحني ارايه کوي.

د (1) معادلې حل چې د C يو اختياری ثابت په کې موجود دی د معادلې د عمومي حل په نوم ياديږي.او لاندې شکل لري.

$$y = \varphi(x,c) \qquad (2)$$

د پورتني حل په خلاف په ځينو حالاتو کې د معادلې حل د $\varphi(x,y,c)=0$ او يا $\psi(x,y)=c$ غير اشکارې تابع په شکل لاس ته راځي. په دې حالت کې$\varphi(x,y,c)=0$ او يا $\psi=(x,y)=c$ د(1) تفاضلي معادلې د عمومي حل په نوم ياديږي.

د ورکړل شوي تفاضلي معادلې حلول او یا انتګرال نیول په دې مانا دی چې باید د هغې حل په یو له پوره ته ذکر شوو ډولونو پیداکړو.

هغه حل چې د عمومي حل څخه د c اختیاري ثابت د مشخص قیمت په ورکولو لاسته راځي د تفاضلي معادلې د قسمي حل په نوم یادیږي.

د(1) معادلې لپاره دا لاندې قضیه چې د(1) تفاضلي معادلې د حل یو موجودیت او یوازې والي قضیې په نوم یادیږي،صحت لري.

قضیه:که چیرې په (1) معادله کې د f(x,y) تابع او دهغې قسمي مشتق $f'_y(x,y)$ د D په ناحیه کې چې د xoy په مستوي کې واقع دی،متمادي وي نو د نوموړې معادلې لپاره د$y = \varphi(x)$ یواځینی حل وجود لري داسې چې د $x = x_0$, $y = y_0$ **شرط صدق کوي** او د (x_0,y_0) نقطه د D په ناحیه کې شامله ده.

ددې قضیې هندسي مفهوم دادی چې د $Y=\varphi(x)$ یواځینی تابع موجوده ده کومه چې ګراف یـــــې له(x_o,y_0) له تقطی څخه تیریږي.(ددې قضیې ثبوت ددې کتاب له محدودیت څخه وتلی)(لوستونکي کولای شي دهغې ثبوت په [9]کې پیداکړي)).هغه شرط چې د$x = x_0$ لپاره باید دy تابع د y_0 سره مساوي شي،د اولیه شرط په نوم یادیږي.د اولیه شرط له مخې کولای شو له عمومي حل څخه قسمي حل په لاس راوړو.

د جلا کېدووړ متحولینو معادله. (1) معادله داسې لیکو.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{یا} \quad dy = f(x,y)dx$$

دا ډول معادلې کولای شو په لاندې شکل هم ولیکو:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

(3) فورمول هغه وخت مناسب دی چې د x او y متحولین دعین خاصیت لرونکي وي په دې مانا چې د متحولینو له جملې څخه هر متحول وکولا ی شو د بل متحول د تابع په شکل فرض کړو.

فرضوو چې کولای شو د M(x ,y) او N(x, y) توابع د لاندې حاصل ضرب په شکل لیکو داسې چې ضربي جز یوازې دیو متحول تابع وي.

$$M(x, y) = M_1(x)\, M_2(y) \quad , \quad N(x, Y) = N_1(x)\, N_2(y)$$

نو (3) معادله کولای شو داسې ولیکو.

$$M_1(x)\ M_2(y)\ dx + N_1(x)\ N_2(y) dx=0 \qquad (4)$$

که چیرې دا پر , $M_2(y)\ N_1(x)$ حاصل ضرب وویشو (فرضوو چې دا حاصل ضرب به صفر سره مساوي نه وي) په لاس راوړو

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_1(y)}{M_1(y)}dy = 0 \qquad (5)$$

لیدل کېږي چې په (5) رابطه کې د dx دمخه ضریب یوازې د x متحول تا بع او dy دمخه ضریب یوازې د y متحول تابع دی.

(5) معادله د جلا شوو متحولینو په نوم یادېږي او (4) معادله د جلا کېدونکو متحولینوپه نوم یادیږي. پدې ډول د جلا کېدونکو متحولینو (4) ، جلا شوو متحولینو معادلې ته راګرځی که چیرې هغــــــه په $M_2(y)\ N_1(x)$ باندې و ویشو. داعملیه د متحولینو د جلا کېدو دعملیې په نوم یادوي. ثبوتووچې د

$$F(x, y) = C \qquad (6)$$

رابطه د (5) او (4) معادلو عمومي حل دی په داسې حال کې چې:

$$F(x, y) = \int \frac{M_{1(X)}}{N_{1(X)}}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(Y)}\ dy$$

په رښتیا ، فرضوو چې که $y = \varphi(x,c)$ (او یا په لند ډول $y=\varphi$) هغه معادله ده چې د (6) معادلې په واسطه تعریف شوې ده په دې حالت کې دامطابقت لرو

$$F(x,\varphi) \equiv C$$

که د پورتنې عنیت نظر x ته مشتق ونیسو په لاس راوړو.

$$F'_X(x,\varphi)+F'_Y(x,\varphi) \equiv 0 \quad \text{یا} \quad \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy + \frac{M_1(X)}{N_1(X)}\ dx \equiv 0$$

په نتیجه کې د $y=\varphi(x,c)$ تابع د(5) معادلې عمومي حل او په پای کې د(4) معادلې حل ورکوي چې په c پورې اړه لري. په دې مانا چې (6) رابطه او یا د

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\ dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy \equiv 0$$

رابطه د(5) او (4) معادلې عمومي انتګرال یا حل دی.

تبصره. که په عمومي حالت کې، N_1(y)M_2(x) **حاصل ضرب باندې و ویشو مونږ** د(4) **معادلې هغه حلونه چې د هغه لپاره نوموړې حاصل ضرب صفر کېږي،له لاسه ورکوو.د ډېر ساده تعویض په واسطه لیدل کیږي چې د** y=b **تابع** د(4) **معادلې حل دی،داسې چې**b د 0 =(y) M_2 **معادلې جذر دی.د مثال په ډول** د x=a تابع هم د (4)**معادلې جذر دی په داسې حال کې چې** a د(x)N_1**جذر دی.**

مثال1.د

xdx+ydy=0

معادله حل کړئ.

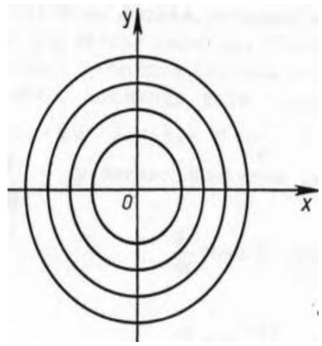
که انتگرال و نیسو $\frac{x^2}{2}$ + $\frac{y^2}{2}$ =c_1 **په لاس راوړو.څرنگه چې په اخري مساواتو کې د کیڼې خوا مقدار مثبت دی نو باید ښې خوا هم مثبت وي. که** $2c_1$ **د** c^2 **له جنسه وښیو وبه لرو** x^2−y^2=c^2 **دا دهغو متحدالمرکز دایرو معادله ده چې مرکز یې د مختصاتو په مـــبدا کې واقــع او شعاع یې** C **ده** (43**شکل).**

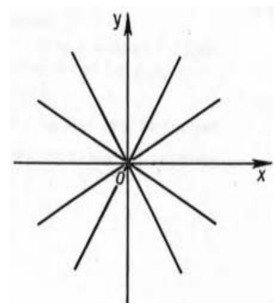
مثال2. د x dy = y dx **معادله حل کړئ.که متحولین سره جلاکړو** $\frac{dy}{y}$ = $\frac{dx}{x}$ **په لاس راوړو.که وروستۍ رابطې انتگرال ونیسو لرو.**

lny=lnx+lnc (7)

په دقیقه توگه باید ووایو چې C>0 د |ln|y|= ln|x|−ln|c **باید ولیکل شي.که چیرې په** (7) **رابطه کې د** C **ثابت یو حقیقي عدد فرض کړو نو د محاسبې په نتایجو کوم تاثیر نه کوي.دا کار مونږ په راتلونکې کې هم ترسره کوو.**

څرنگه چې د C_1 **ټول مثبت او منفي اعداد کولای شو د بل عدد د لوگارتم په شکل ولیکو نو په**(7) **رابطه**





(43 شکل)　　　　(44شکل)

کې چې ثابت په لوګارتمي شکل ورکړل شوی وي هغه د $C=e^{c_1}$ په شان ښيو.په (7) رابطه کې د وضع کولو په صورت کې مونږ د ورکړل شوې تفاضلي معادلې حل د y=cx په شکل لاس ته راوړو.دادهغو خطونو مجموعه ده کوم چې د مبدا څخه تيريږي(44 شکل).

3. متجانسې معادلې. د f(x,y) تابع ته د m ترتيب متجانيسه تابع وايي که چېرې لاندې مطابقت صدق وکړي.

$$F(tx,ty) = t^m F(x,y)$$

مثال1 .د $f(x,y)=+2y^2x^2-xy$ تابع يوه دويم ترتيب متجانسه تابع ده ځکه چې

$(tx)^2+2(ty)^2-(tx))(ty)=(t^2+2y^2-xy)\,t^2$

د متجانيسې تابع مفهوم،د متجانيسې تفاضلي معادلې له مفهوم سره رابطه لري.

د

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (8)$$

معادلې ته لومړی ترتيب متجانيسه تفاضلي معادله وايي که چېرې د M(x,y) او N(x,y) توابع د عين ترتيب متجانيسې توابع وي.

په (8) تفاضلي معادله کې د $y = ux$ په وضع کولو،کولای شو ثابت کړو چې نوموړې معادله د جلاکېدونکومتحولينوله جنسه په تفاضلي معادله بد له شي داسې چې u د x يوه نوې مطلوبه تابع ده.بايد ووايو چې $dy = u\,dx+x\,du$ دی.

په ځینو حالاتو کې د y = u x تعویض پرځای د x = u y تعویض څخه کټه اخیستل کېږي.

2مثال . د $(y^2 - 3x^2)$ d x +2 xy dy =0 تفاضلي معا د له حل کړئ که x = 0 لپاره y = 0 وي.د

y = u x تعویض په مرسته لرو.

$$(u^2x^2-3x^2)\, dx + u\, (u\, dx + x\, du)\, 2x^2=0$$

له دې څخه

$$3(u^2 - 1)\, dx + 2x\, u\, du = 0$$

که متحولین جلا او انتګرال و نیسو پلاس راوړو.

$$3\, ln x - ln\ (u^2 - 1) = ln c \quad \frac{3}{x}dx + \frac{2u\, du}{u^2 - 1} = 0$$

له محاسبه کو لو څخه وروسته د $x^2(u^2 - 1) = 0$ مساوات پلا س راځي.

څرنګه چې $u = \frac{y}{x}$ ده نو $(\frac{y^2}{x} - 1) = C\, x^2$ او عمومي حل د $x\, (y^2 - x^2) = C$ شکل غوره کوي.د اولیه شرط څخه په کټه اخیستنې C = 0 په لاس راځي . په دې ډول مطلوب قسمي حل د y = ± x شکل لري.

لومړۍ ترتیب خطي تفاضلي معادلې .د

$$\acute{y} + p\, y = q \qquad (9)$$

معادلې ته د لومړۍ ترتیب خطي تفاضلي معا د له وایي.کلــه چې د(x)p = p او q = q(x) د (a,b) پـــــر انتروال،متمادي توابع وي.د(9) معادلې د حل لپاره د y = u.v له تعـــویض څــخه کاراخلـــــو داسې چې u = u(x) نوې مطلوبه تابع په پام کې نیسو.په دې تعویض سره په لاس راځي.$\acute{u}\, v - u\, \acute{v} + p\, u\, v = q$ او

یا $v\frac{du}{dx} + u = q(\frac{dv}{dx} + pv)$ داچې v په اختیاري ډول ټاکل کېږي نو ددې شرط په پام کې نیولو سره مونږ د هغې لپاره $\frac{dv}{dx} - pv = 0$ په لاس راوړو.

که متحولین جلا او انتګرال و نیسولرو.

$$\frac{dv}{v} = -p dx\ , \qquad ln v = -\int p dx$$

له دې څخه

$$V=e^{-\int pdx}$$

بنآ پر دې لاندې معادله په لاس راوړو.

$$\frac{du}{dx}e^{-\int pdx} = q$$

ددې معادلې د حلولو په نتيجه کې پلاس راوړو.

$$U= c+\int qe^{-\int pdx}dx$$

د y متحول په پام کې نيولو سره د(9) معادلې عمومي حل کولا ی شو داسې وليکو.

$$y=e^{-\int pdx}(c + \int qe^{-\int pdx}dx) \qquad (10)$$

تبصره.که چېرې په (9) معادله کې q(x)≡ 0 وي،نو نوموړې معادله د لومړي ترتيب خطي متجانيسي معادلې په نوم ياديږي بې له دې لومړی ترتيب خطي غير متجانيسه معادله ورته وايي. په دې ډول لومړی ترتيب خطي متجانيسه معادله لاندې شکل لري.

$$\acute{y} + p\,y = 0 \qquad (11)$$

له (10) فورمول څخه د(11)معادلې لپاره د حل عمومي فارمول په لاس راځي.

$$y=c \quad e^{-\int pdx}$$

مثال. $\acute{y} - \frac{y}{x} = x$ معادله حل کړئ.

د(10) فارمول څخه په کټه اخيستنې لرو.

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}(C+\int xe^{\frac{-\int dx}{x}}dx)=e^{lnx}(dx\ c+\int x.e^{-lnx})=x(c+\int dx)=cx-x^2$$

5.د فزیک،تخنیک او ایکالوژي مسایل.

د حرکت د قانون په هکله مسأله. د V سرعت،S مسیر او t وخت ترمنځ په مستقیم الخط حرکت کې د $v\cos t+S\sin t = 1$ رابطه وجود لري.د حرکت قانون په لاس راوړئ کله چې د $t=0$ لپاره $S=2$ وي.

حل.څرنګه چې $v=\frac{ds}{dt}$ دی نو په ورکړ شوې معادلې کې د v قیمت په وضع کولو د حرکت لپاره لاندې تفاضلي معادله پلاس راځي.

$$\frac{dv}{dt}\cos t+S\sin t=1$$

$$\frac{ds}{dt}+S\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}$$

او س د(10) رابطې په پام کې نیولو سره لرو چې.

$$S=e^{-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}.e^{\int\frac{\sin t}{\cos t}}dt\right)=$$

$$=e^{\int\frac{d(\cos t)}{\cos t}dt}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}\quad e^{-\int\frac{d(\cos t)}{\cos t}dt}\right)=$$

$$=e^{\ln\cos t}\left(C+\int\frac{1}{\cos t}.e^{-\ln\cos}dt\right)=\cos t\left(C+\int\frac{dt}{\cos t^{2}}\right)$$

$$=\cos t(c+tgt)=C\cos t+\sin t$$

$s = 2 , t = 0$ داولیه شرط په نیولوسره $c = 2$ په لاس راځي. په دې ترتیب دحرکت معکوس قانون عبارت دی له $S = \sin t+2\cos t$.

دخازن دچارج کېدوپه هکله مسله . یوخازن د Q ظرفیت په درلودوسره په یوه دوره کې چې د u پوتنشیل تفاوت او R مقاومت لرونکی دی ترل شوی.دترلوڅخه وروسته د t وخت په تیریدو خازن کې د q مقدار چارج په لاس راوړئ.

حل .دبرقي جریان شدت پهt وقت کې د q مقدار چارج مشتق په واسطه رامنځ ته کېږي کوم چې د ها دي څخه تیریږي.

$$I=\frac{dq}{dt}$$

په دوره کې دبرقي ناحیې شدت E د دورې دپوتنشیل تفاوت u اودخازن دپوتنشیل تفاوت $\frac{q}{Q}$ تفاضل څخه عبارت دي کله چې tد په وخت کې دخازن چارج q دجریان شدت $I=\frac{dq}{dt}$ وي یعنې

$$E = u - \frac{q}{Q}$$

داوم قانون له مخې:

$$I = \frac{E}{R}$$

بناء

$$\frac{dq}{dt} = \frac{u - \frac{q}{Q}}{R}$$

له دې ځخه

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{u}{R}$$

اوس د (10)فورمول له مخې لروچې :

$$q = e^{-\int \frac{dt}{QR}}\left(c + \frac{u}{R}\int e^{\frac{dt}{QR}}dt\right) = \quad e^{-\frac{t}{QR}}\left(c + \frac{u}{R}\int e^{\frac{t}{QR}}dt\right) =$$

$$= e^{-\frac{t}{QR}}\left(c + \frac{uQR}{R}e^{\frac{t}{QR}}\right) = \mathrm{c}\, e^{-\frac{t}{QR}} + QR$$

دشرط له مخې د t = 0 لپاره q = 0 دی نو 0 =c+u Q یا c = − uQ . په دې ډول دt په وخت کې

$$\cdot q = uQ(1 - e^{-\frac{t}{QR}})$$

درادیوکتیف تجزیې په هکله مسأله . درادیوم دتجزیې سرعت په هره لحظه کې داولیه کتلې سره متناسب دی. که چېرې دوخت په شروع کېدو (t=0)سره د m_0 گرام رادیوم موجودوي اورادیوم دنیمایي عمر پریود 1590 کاله وي (دوخت هغه پریودکوم چې پرهغې کې درادیوم دکتلې نیمایي برخه تجزیه شوې وي) نودرادیوم دتجزیې قانون په لاس راوړئ.

حل . فرضوو چې د t لحظه کې درادیوم کتله x گرامه ده نو درادیوم دتجزیې سرعت عبارت دی له

:

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}$$

دمسألې دشرط له مخې:

$$-\frac{dx}{dt} = kx \qquad (12)$$

داسې چې k دتناسب ضریب دی. په (12) رابطه کې دمتحولینوپه جلاکېدواودانتګرال نیولو سره په لاس راوړو:

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

$$\ln x = -kt + \ln c$$

دمحاسبه کولوڅخه وروسته په لاس راځي:

$$x = ce^{-kt}$$

د c دتعینولولپاره اولیه شرط په کاروړو. t=0 لپاره $x = m_0$ دی په نتیجه کې $c = m_0$ اوداماناً لرو چې

$$x = m_0 e^{-kt}$$

دk د تناسب ضریب د t= 1590 او $x = \frac{m_0}{2}$ اضافي شرط له مخې ټاکل کېږي .او

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k} \quad \text{یا} \quad e^{1590k} = 2$$

په نتیجه کې $e^k = 2^{\frac{1}{1590}}$.بنا پر دي معکوسه تابع عبارت ده له :

$$x = m_0 2^{\frac{1}{1590}}$$

دیوجسم دسړېدلو په هکله مسأله. په هواکې دیوجسم دسړېدوسرعت دجسم حرارت اودهوا دحرارت په تفاضل سره متناسب دی .دهوا دحرارت درجه 20^0 ده .څرګنده ده چې د 20 دقیقوپه موده کې جسم 100 درجوڅخه تر 60^0 پورې سړېږي. دجسم دحرارت درجې Q د تغیر قانون نظر t وخت ته په لاس راوړئ.

حل. د مسلې دشرط له مخې لرو:

$$\frac{dQ}{dt} = k(Q - 20)$$

چې دلته k دتناسب ضریب دی . که متحولین جلااوانتګرال یې و نیسو په لاس راوړو.

$$\frac{dQ}{Q - 20} = kdt$$

$$\ln(Q - 20) = k\,t - \ln c$$

دمحاسبه کولو څخه وروسته لرو:

$$Q - 20 = c.e^{kt}$$

په نتیجه کې

$$Q = 20 + c\, e^{kt}$$

د c دتعینولو لپاره اولیه شرط په کارورود t = 0 لپاره Q =100 دی له دې څخه c = 80 ، بناپردې

$$Q = 20 + 80\, e^{kt}$$

دتناسب ضریب t = 20 , Q = 60 اضافي شرط په مرسته تعینیږي. له دې څخه

$$60=20+80\, e^{20k} \quad \text{یا} \quad e^{20k} = \frac{1}{2}$$

په نتیجه کې

$$e^{k} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{20}}$$

نو معکوسه تابع عبارت ده له :

$$Q = 20 + 80\, (\frac{1}{2})^{\frac{t}{20}}$$

دغلیظ محلول په هکله مسأله .په یوه ذخیره کې 10kg مالګه په $100\ li$ مخلوط کې موجوده ده له t دقیقې څخه وروسته څومره مالګه په ذخیره کې پاتې کیږي داسې چې مخلوط په هره شیبه کې وخوځول شي.

حل. فرضوو چې د t په لحظه کې په ذخیره کې x مقدار مالګه موجوده ده ، dx - هغه مقدار مالګه ده چې د dt په لحظه کې د ذخیرې څخه تویيږي (منفي علامه داښيي چې x نظر وخت ته یوه متناقصه تابع ده) د t په لحظه د مخلوط حجم په ذخیره کې په څرګند ډول د

$$V= 100 + 30\, t - 20\, t = 100 - 10\, t$$

سره مساوي دي په دې ډول د مالګې غلظت (په یوه مخلوط کې د مالګې مقدار) د t په لحظه کې مساوي دي په:

$$\frac{x}{100+10t}$$

په نتیجه کې د وخت په یوه کوچني انتروال dt کې د مالګې مقدار د

$$\frac{x}{100+10t}\,.\,20dt$$

په اندازه کمیږي.

د طبیعي ودې قانون په هکله مسآله. د طبیعي ودې قانون ، دا هغه قانون دی چې په هغې کې دموادو د ودې سرعت دهغې له مقدار سره مستقیم تناسب لري . د x مقدارموادو دتغیېر فارمول په لاس راوړئ کوم چې د t د وخت تابع دی.

فرضووچې د $t = 0$ په لحظه کې موادو مقدار x_0 دی.

حل. د تولید دفزیکې مفهوم په استعمالولو سره د طبیعی ودې قانون داسې ولیکو:

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (13)$$

په داسې حال کې چې k د تناسب ضریب دی.(13) معادله د زیا تیدو جریان (زیاتیدل)ښیي (دامعادله د (12) معادلې څخه یوازې د کینې خوا د منفي علامی په درلودلو سره ، فرق کوي).

د (13) معا دلې حل کوم چې د $t = 0$ لپاره د $x = x_0$ سره صدق و کړي، دلاندې شکل څخه عبارت دی:

$$x = x_0\, e^{kt} \qquad (14)$$

(14) فارمول د طبیعي ودې قانون ارایه کوي. ددې قانون په واسطه د نمونې په ډول په هستوي تعاملاتوکې د نیوترونو شمیر، د بکتریاو ود شمیر زیا تیدل، د کرستلونو زیاتیدیل ، د نفوس زیاتیدل او داسې نور محاسبه کېږي.

دبکتریا د ژر ودې کولو په هکله مسآله. دبکتریا شمیر 100 دی، د3 ساعتو نو په موده کې دهغوی شمیر دوه چنده کیږي. د بکتریا دودې او د وخت ترمنځ رابطه په لاس راوړئ .د 9 ساعتونو په موده کې څوځلې د بکتریا شمیر زیاتیږي ؟

حل . فرضوو چې x دبکتریا شمیر په ورکړشوې موده کې را ښیي نو د

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

تفاضلي معادلې دشرایطوپه پام کې نیولوسره کله چې k دتناسب ضریب وي نو د (12) معا دلې د حل په شان په لاس راوړو.

$$x = C\, e^{kt}$$

د C د ټاکلو له پاره $t = 0$ ، $x=100$ اولیه شرط په پام کې نیسو . لرو چې $C=100$ په دې مانا

$$x = 100\, e^{kt}$$

د تناسب ضریب k د ټاکلو لپاره د x=200,t=3 اضافي شرط په پام کې نیسو ، لرو چې

$$200=100\ e^{3K} \qquad \text{یا}\ 2=e^{3K}$$

په نتیجه کې $e^{K}=2^{\frac{1}{3}}$. په دې ډول مطلوبه تابع عبارت ده له:

$$X=100\ e^{\frac{t}{3}}$$

له دې څخه د t=9 لپاره X=800 دی. په پای کې د 9 ساعتونو په موده کې د بکتریا وده 8 ځلې زیاتیږي.

§ 3.4 لوړ ترتیب تفاضلي معادلې.

1 .اساسي مفهومونه. د n–ام ترتیب تفاضلي معادلې عمومي شکل عبارت دي له:

$$F\,(x, y, \acute{y}\ldots\ldots y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

دلته امکان لري چې $F\,(x, y, \acute{y}\ldots\ldots y^{(n)})$ د $x, y, \acute{y}\ldots$ یو شمیر متحولینو پورې مربوط نه وي.

که چېرې(1) معا دله د n–ام ترتیب تفاضلي معا دله وي نو د F تابع د $y^{(n)}$ متحول پورې ضروري تړلې ده .

د (1) تفاضلي معا دلې تر ټولو ساده شکل له لاندې معادلې څخه عبارت دی.

$$y^{(n)}=f(x) \qquad (2)$$

داسې چې $f(x)$ یوه تابع ده.د دې ډول ساده معادلې یو مثال د

$$y''=\frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

تفا ضلي معادله ده دې معادلې څخه په څرګند ډول معلومیږي چې:

$$\acute{y}=-\int\frac{1}{X^2}\,dx+c_1=\frac{1}{x}+C_1 \qquad (4)$$

دا سې چې C_1 یو اختیاري ثابت دی.په همدې ترتیب له

(4) معا دلې څخه په لاس راځي.

$$y=\int\left(\frac{1}{x}+C_1\right)dX+C_2=ln|x|+C_1\,x+C_2$$

داسې چې C_2 یو اختیاري ثا بت دی او د C_1 ثابت پورې اړه نه لري.

لاس ته راغلی حل د دوو اختیاري ثا بتو پورې اړه لري. په دې ډول (3)تفاضلي معادله د دویم ترتیب یوه تفاضلي معادله ده د معادلې دا ډول حل د عمومي حل په نوم یا دیږي.

په مشا به ډول (2) تفاضلي معادله حل کولای شو اوهغه د مکرر انتگرا ل نیولو په واسطه لاس ته راوړو. په دې هکله لرو.

تعریف. د (1)،n- ام ترتیب تفاضلي معادلې عمومي حل د

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

تابع څخه عبارت دی کوم چې د n اختیاري ثابتو پورې اړه لري او د نوموړې ثابتو نو د ټولو اختیاري قیمتونو په اخیستلو سره (1) معادله په عینیت بدلیږي هغه حلونه چې $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ثابتو د مشخصو قیمتو په اخیستلو سره لاسته راځي ، قسمي حلونه ورته وایي.

تبصره. په تعریف کې د اختیاري ثا بتونو پورې اړونده جمله په گوته شوې ده پدې مانا چې که هغه محا سبه او نوي سمبولونه په کار یوسو، د ثابتو د شمیر کمیدل مجاز نه دي. د مثال په ډول د

$$y=(C_1^2+2C_1+C_3)x-C_4+6C_5$$

په تابع کې دوه اختیاري ثابتونه وجود لري

$$C_1^*=C_1^2+2C_1+C_3 \quad \text{او} \quad C_2^*=C_4+6C_5$$

او یا کېدای شي په لاندې ډول ولیکل شي.

$$y=C_1^*x+C_2^*$$

په عملی مسآلوکې اکثرا داسې واقع کیږي چې د n-ام ترتیب تفاضلي معادلې لپاره باید داسې حل په لاس راوړو چې $X=X_0$لپاره د Y تابع او د هغــې (n−1) لـــــومړني مشتقات $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ د n اولیـــــه ورکړشوي

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0\,;\ y'\Big|_{x=x_0}=y'_0\,,\ \ldots\ldots Y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=Y_0^{(n-1)} \qquad (5)$$

شرطونه صدق کړي په عمومي ډول وایي چې (5) شرطونه د اولیه شرطونوپه نوم یادیږي.د

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

عمومي حل څخه د نوموړو شرطونو په پام کې نیولو سره یوازینی قسمي حل لاسته راځي.

2. د مرتبې دکمیدو حا لت . په دې حا لت کې درې ډوله n–ام ترتیب تفا ضلي معادلې چې د ترتیب کمیدل یې ممکن دی ترکتنې لاندې نیسو .

I . **(2) نوع معادله**. که دا معادله n ځلې په مکرر ډول انتگرال ونیسو عمومي حل لاسته راځي داسې چې دهر انتگرال په نیولو سره یونوی اختیا ري ثا بت په پام کې نیسو .

د.II

$$y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\ldots,y^{(n-1)})\ ,\quad (k\leq n-1) \qquad (6)$$

معادله چې په هغې کې په څرګند ډول y او د هغې مشتقات تر (k-1)–ام ترتیب پورې شتون نه لري . په دې ډول تر k عدد پورې د مرتبې کمیدل ممکن دي. ددې منظور لپاره د $z=y^{(k)}$ نوې مطلوبه تابع په پام کې نیسو . نو

$$y^{(k-1)}=\acute{z},\ldots\ldots,y^{(n)}=z^{(n-k)}$$

دي. لاسته راغلې معادله نظر z ته د (n–k) ترتیب معادله ده:

$$z^{(n-k)}=f(x,z,\acute{z},\ldots z^{(n-k)})$$

کــــه چــــېرې$z=\varphi(x,C_1,\ldots C_{n-k})$ د نــومـــوړې معادلــــې عمـــومي حـــــل وي نو د y لپاره د $y^{(n)}=\varphi\ (x,C_1,\ldots C_{n-k})$ معا دله لرو . د انتگرال نیولو په صورت کې د (6) معا دلې عمومي حل په لاس راوړو.

د. *III*

$$y^{(n)}=f(y,y',\ldots\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (7)$$

معا دله چې په څرګند ډول متحول په کې شامل نه وي . په دې برخه کې د متحول درجه یوه درجه کمیږي کله چې د متحول د تبدیل څخه کار وا خلو . د نویومطلوبو توابعو له جملې څخه که مونږ$y'=p$ وټاکو نو دنو ي متحول په حیث دyمتحول په پام کې نیـول کیږي.

مسأله. یوه مادي نقطه د m کتلې په لرلوسره دیومستقیم خط پرمخ د o مبدا خوانه حرکت کوي (45شکل)داسې چې دراکش کولو قوې مقدارد $\frac{km}{r^3}$ سره مساوي دی. په دې څخه کې r د ما دې نقطې

او مبدا ترمنځ فاصله بنیي .همدارنګه حرکت له مبداڅخه د $r = c$ په فاصلې سره پیل کېږي .هغه وخت په لاس راوړئ کوم چې پرهغې کې مادي نقطه د 0 مبدا ته ورسیږي.

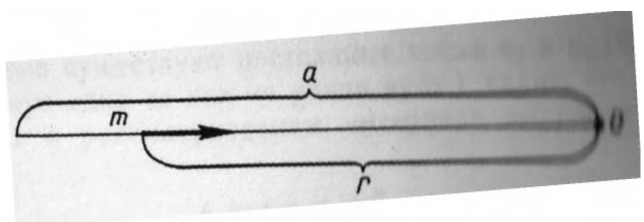
حل . د مسألې دشرط له مخې د t په هره اختیاري لحظه کې په مادي نقطې باندې $F=-\frac{km}{r^3}$ قوه عمل کوي.

له دې څخه به د

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{km}{r^3} \qquad (8)$$

یا

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k}{r^3}$$



(45شکل)

تفاضلي معادله لا س ته راوړو. اوس $p=\frac{dr}{dt}$ وضع کوو، له دې څخه

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dr}.\frac{dr}{dt}=p\frac{dp}{dr}$$

(8) معادله کولای شو دارنګه ولیکو.

$$p\,\frac{d\,p}{\mathrm{dr}}=-\frac{k}{r^3}$$

که متحولین جلا او بیایې انتیګرال و نیسوپه لاس راځي .

$$\mathrm{pdp}=-\frac{k}{r^3}\mathrm{dr}\text{د}p^2=\frac{k}{r^3}+c_1$$

له دې څخه

$$p=\frac{d\,r}{dt}=-\sqrt{\frac{k}{r^2}+c_1}$$

(ترجذر مخکې علامه منفي په پام کې نیول شوې ده ځکه چې د مسألې د شرط له مخې د r تابع تناقص کوي او $\frac{d\,r}{dt}<0$ دی) . یا

$$\frac{d\,r}{dt}=-\frac{\sqrt{k+c_1r^2}}{r}$$

په وروستۍ معادله کې که متحولین جلا او بیایې انتیگرال و نیسو لرو .

$$-\frac{r\,d\,r}{\sqrt{k+c_1r^2}}=dt \text{ ،} -\frac{\sqrt{k+c_1r^2}}{r}=t+c_2$$

که اولیه شرطونه تطبیق کړو (د t=0 لپاره r = a او $\frac{dr}{dt}=0$ دی) پلاس راځي .

$$c_2=-\frac{\sqrt{k-c_1a^2}}{c_1} \text{ ،} 0=-\frac{\sqrt{k+c_1a^2}}{r}$$

له دې ځخه

$$c_1=\frac{-k}{a^2} \qquad , \qquad c_2=0$$

بنا پر دې

$$t=\frac{a\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{k}}$$

کله چه مادي نقطه د o مبداء ته ور سیږي نو په دې صورت کې r = 0 او $t=\frac{a^2}{\sqrt{k}}$ دی .

§ 4.4. دویم ترتیب خطي تفاضلي معادلې

1. ددویم ترتیب تفاضلي معادلو په هکله عمومي معلومات. دا معادله

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

د دویم ترتیب خطي غیر متجانسې تفاضلي معادلې په نــوم یادوي ، کلــه چــې P = p(x) , q = q(x) او f(x) توابع د (a,b) په انټروال متمادي وي. q او p ته د معادلې ضریبونه وایي. که چېرې $f(x)\equiv 0$وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2)$$

دا معادله د دویم ترتیب خطي متجانسې تفاضلي معادلې په نوم یا دوي . که چېرې د (2) معادله همــغه ضریبونه ولري کوم چې د(1) معادله یې لري نو په دې صورت کې (2) معادلې ته د (1)تفاضلي معادلې متجانیسه معا د له وایې .

د$y_1 = y_1(x)$ او $y_2 = y_2(x)$ توابع چې د (a,b) پر انتروال متمادي دي دخطاً مربوطو توابعو په نوم یادیږي که چېرې د α_1 او α_2 دوه داسې عددونه پیداشي (کم ترکمه یو له دوی څخه صفر نه وي) چې په نوموړي انتروال کې د x د ټولو قیمتونو لپاره لاندې شرط صدق وکړي

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \qquad (3)$$

y_1 او y_2 ته د (a, b) په انتروال کې خطاً مستقلې توابع وایي کله چې د (3) رابطه یوازې د $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ لپاره صدق وکړي.

قضیه.که چېرې y_1 او y_2 د (2) دویم ترتیب خطي متجانیسې تفاضلي معادلې خطاً مستقل حلونه وي نوعمومي حل یې د لاندې شکل لرونکی دی.

$$y = c_1 y_1 + c_2 \ y_2 \qquad (4)$$

په داسې حال کې چې C_1 او C_2 اختیاري ثابتونه دي.

ثبوت.-څرنګه چې y_1 او y_2 د(2) معادلې حلونه دي نو لاندې عینیتونه لرو،

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 , \qquad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

$$(c_1 y_1 + c_1 \ y_2)'' + p \ (c_1 y_1 + c_1 \ y_2)' + \ (c_1 y_1 + c_1 \ y_2) =$$

$$= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

په پایله کې (4) افاده د(2) معادلې حل دی څرنګه چې نوموړی حل دوه اختیاري ثابتونه لري نـــو (2) دویم ترتیب خطي متجانسې معادلې عمومي حل دی قضیه ثابته شوه .که چېرېy_1 اوy_2 د(2) معادلې دوه خطاً مربوط حلونه وي ،نو(3) عینیت هغه وخت صدق کوي کله چې $\alpha_1 \neq 0$ اویا $\alpha_2 \neq 0$ وي.
فرضووچې $\alpha_2 \neq 0$ دی.

نو د(3) عینیت څخه $y_2 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} y_1$ او یا ($a = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2}$)، $y_2 = a y_1$ په لاس راځي.

په (4) معادله کې دنوموړي قیمت په وضع کولولاس ته راوړو:

$$y = c_1 y_1 + c_2\, a\, y_1 = (c_1 + c_2\, a) y_1 = c y_1$$

په داسې حال کې چې $C = c_1 + c_2\, a$ دی.

له دې څخه څرګندېږي چې که y_1 او y_2 د (2)متجانیسې معادلې خطاً مربوط حلونه وي نو د(4) حل یوازې دیواختیاري ثابت لري او د عمومي حل په نوم یادیږي.

تبصره.باید ذکرکړو چې د1 قضیې دشرایطوپه پام کې نیولو سره د

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 \end{vmatrix}$$

دیترمینانت دورونسکي(Wronski. J) ددېترمینانت په نوم یادیږي .یوزف ورونسکې یو پولیندي (1853ـــ1776) ریاضي پوه ؤ.پورته دیترمینانت دy_1 او y_2 لپاره خلاف دصفر دی کله چېxد(a,b) په انتروال کې واقع وي. ددې حقیقت ثبوت کولای شی دنمونې په شکل په [13] کې وګورئ .

د(1) غیر متجانسې معادلې دعمومي حل په هکله لاندې قضیه صحت لري .

2قضیه .د(1) غیر متجانیسې تفاضلي معادلې حل دنوموړې غیر متجانیسې تفاضلي معادلې قسمي اختیاري حل او دهغې مربوطه(2) متجانیسې تفاضلي معادلې دحاصل جمعې څخه عبارت دی .

ثبوت. فرضوو چې $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ د(1)تفاضلي معادلې سره په مطابقت کې (2) متجانیسې معادلې عمومي حل اوz د(1) معادلې قسمـــــي حــــل دی .نــــومــــونــــږ د$Y'' + PY' + qY = 0$ او $z'' + z'p + qz = f(x)$ مطابقتــونه لــرو . که دا دوه مطابقتونــه جمله په جــمله جمــع کـــړو نـــو د$(Y + z)'' + p(Y + z)' + q(Y + z) = f(x)$ عینیــت لاســـــته راوړو. پــــه پایلـــه کـــــــې د $y = Y + z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Z$ تابع د(1) معادلې حل دی او داحل عمومي حل دی ځکه چې نو موړی حل د C_1 او C_2 دوه اختیاري ثابتونه لري .

2.په ثابتو ضریبونوسره دویم ترتیب متجانیسه خطي تفاضلي معادله. فرضوو چې د

$$\acute{\acute{y}} + P\acute{y} + qy = 0 \qquad (5)$$

په خطي معادله کې p او q ثابت حقیقي عدودونه دي .

د(5) معادلې قسمي حل د

$$y = e^{kx} \qquad (6)$$

تابع په شکل لټوو داسې چېk ممکن حقیقی او یا مختلط مشخص عددوي. که نظر x ته د (6) رابطې دمشتق ونیسو په لاس راوړو .

$$\acute{y} = ke^{kx} \quad , \quad \ddot{y} = k^2e^{kx} \qquad (7)$$

که په (5) رابطه کې د(6) او (7) قیمتونه وضع کړو لیکلی شو .

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

څرنګه چې $e^{kx} \neq 0$ دی نو له دې څخه لرو:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (8)$$

(8) الجبري معادله د(5) متجانیسې معادلې دمشخصه معادلې په نوم یادوي .دمشخصه معادلې څخه دk قیمتونه پیداکېږي.

(8)معادله یوه دویمه درجه معادله ده او دوه جذرونه لري. نوموړي جذرونه د k_1 او k_2 په واسطه ښیو.دلته دري حالتونه وجود لري .

1) k_1 او k_2 حقیقې جذرونه او مختلف دي $(k_1 \neq k_2)$ په دې صورت کې د(6) فورمول څخه په ګټې اخیستنې د(5) معادلې لپاره د $y = e^{k_1x}$ $y_2 = e^{k_2x}$ دوه قسمي حلونه په لاس راوړو چې خطاً مستقل دي . دایو حقیقت دی،که چېرې نوموړي حلونه خطاً مربوط حلونه وي نود (a,b) په انټروال کې باید د $\alpha_1e^{k_1x} + \alpha_2e^{k_2x} = 0$ عینیت صدق وکړي کله چې α_1 او α_2 همزمان دصفر سره مساوي نه وي او یا داچې $\alpha_1e^{k_1x} = -\alpha_2e^{k_2x}$. له دې څخه $\alpha_1e^{(k_1-k_2)x} = -\alpha_2$ دی چې ممکن نه دی ځکه چې په وروستي مساواتو کې ښي خواته ثابت عدداو کیڼې خواتابع نظر x ته یوه تابع ده . د 1 قضیې له مخې د (5) معادلې عمومي حل دا لاندې شکل لري.1 بند .

$$y = C_1e^{K_1x} + C_2e^{K_2x}$$

مثال 1. د $\ddot{y} - 3\acute{y} + 2y = 0$ معادله حل کړئ .

دنوموړي معادلې، مشخصه معادله $k^2 - 3k + 2 = 0$ د $k_1 = 1$ او $k_2 = 2$ دوه مختلف حقیقي جذرونه لري.نو عمومي حل یې له $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$څخه عبارت دی .

2) دk_1 او k_2 جذرونه حقیقي او سره مساوي دي $(k_1 = k_2)$. په دې حالت کې د (5) معادلې یو قسمي حل د $y_1 = e^{k_1x}$ شکل لري. همدارنګه د $y_2 = xe^{k_1x}$ تابع هم د(5) معادلې قسمي حل دی.

دایو حقیقت دی

$$\ddot{y}_2 + p\dot{y}_2 + qy_2 = (2 + k_1x)k_1e^{k_1x} + p(1 + k_1x)e^{k_1x} + qxe^{k_1x}$$
$$= \quad e^{k_1x}((k^2 + pk + q)x + 2k_1 + p = e^{k_1x}(-p + p) = 0$$

ښیو چې د e^{k_1x} **او** xe^{k_1x} **حلونه خطاً مستقل دی .حقیقتاً که چیرې** e^{k_1x} **او** xe^{k_1x} **خطاً مربوط وي نو د** (a,b) **پر انتروال د** $\alpha_1e^{k_1x} + \alpha_2xe^{k_1x} = 0$ **عینیت صدق کوي په داسې حال کې چې** α_1 **او** α_2 **همزمان دصفر سره مساوي نه دي یعنې د** $\alpha_1 + \alpha_2x = 0$ **عینیت.اودامکن نه دی. په پایله کې د(5) معادلې حل په ورکړشوي حالت کې عبارت دی له:**

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

مثال 2. د $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$ **معادلې لپاره د** $k^2 - 6k + 9 = 0$ **مشخصه معادله مطابقت کوي چې د** $k_1 = k_2 = 3$ **مساوي جذرونو لرونکې ده .نو عمومي حل یې عبارت دی له :**

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$$

3) **د** $k_1 = \alpha + \beta i$ **او** $k_2 = \alpha - \beta i$ **جذرونه مختلط عددونه دي. کولای شوو ښیو چې په دې حالت کې د(5)معادلې عمومي حل د** $y = e^{\alpha x}(C_1\, cos\beta + C_2 sin\beta x)$ **څخه عبارت دی.** [13] **دې وکتل شي .**

مثال3 . د $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$ **معادلې لپاره د** $k^2 - 2k + 2 = 0$ **مشخصه معادله مطابقت کوي چې د** $k_1 = 1 + i$ **او** $k_2 = 1 - i$ **جذرونه لري. په نتیجه کې عمومي حل د** $y = e^x(C_1\, cosx + C_2 sinx)$ **تابع ده .**

3 . د ثابتو ضریبونوسره دویم ترتیب خطي غیر متجانیسې معادلې . دلته دثابتو ضریبونو سره دویم ترتیب غیر متجا نیسو معا د لو ځینې ډولونه ترمطالعې لاندې نیسو .

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = f(x) \qquad (9)$$

په داسې حال کې چې P **او** q **ثابت حقیقي عددونه او** f(x) **د** (a,b) **په انتروال کې متمادي تابع ده .د(9) قضي د1 بند له مخې د(9) معادلې دعمومي حل دپیداکولو لپاره باید د** $\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$ **مربوطه متجانیسې معادلې عمومي حل یعنې** γ **او د(9) معادلې قسمي حل یعنې** z **وپیژنو .د** γ **دپیداکولو لپاره لرو چې**

دقسمي حل نوع د (9) معادلې دښي خوا نوعي پورې اړه لري .دلته یو شمیر حالتونه په پام کې نیسو.

a) که $f(x) \equiv a_2x^2 + a_1x + a_0, (a_2 \neq 0)$ وي .که $q \neq 0$ وي. نو د (9) معادلې قسمي حل د $z = A_2x^2 + A_1x + A_0$ دویمه درجه ترینوم په شکل لټوو،داسې چې A_1, A_0 او A_2 نامعلوم ضریبونه دي. له دې څخه $z' = 2A_2x + A_1$ او $z'' = 2O_2$ دی .دا قیمتونه (9) معادله کې وضع کوو په داسې حال کې چې $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ دی. لاندې عینیت په لاس راوړو.

$$A_2qx^2 + (2A_2P + A_1q)x + 2A_2 + A_1P + A_0q = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

له دې څخه

$$A_2q = a_2 \quad , \quad 2A_2p + A_1p = a_1 \quad , 2A_2 + A_1p + A_0q = a_0 \qquad (10)$$

څرنګه چې $q \neq 0$ دی نو د(10) رابطې څخه د A_1, A_2او A_0 لپاره مشخص عددي قیمتونه لاسته راځي. په دې ډول د Z قسمي حل په کامل ډول لاسته راځي .که چیرې$q = 0$ وي. نو د(9) معادلې قسمي حل د z د $z = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)$ شکل لري کله چې 0 د (8) مشخصه معادلې یوځلې جذروي .همدارنګه د$z = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_2)$ شکل لري کله چې 0 د (8) مشخصه معادلې دوه ځلې جذروي . که چیرې $f(x)$، د$P(x)$ پولینوم وي نوپه مشابه ډول یې قسمي حل ټاکل کیږي .

مثال 1.د $\ddot{y} + \acute{y} = 2X + 1$ معادله حل کړئ . لروچې:

$$k^2 + k = 0, k_1 = 0, k_2 = -1, y = C_1 + C_2e^{-x}$$

څرنګه چې 0 دمشخصه معادله یوځلې جذردی .نو دورکړشوې معادلې قسمي حل د $Z = X(A_1x + A_0)$ شکل لري .سربیره پردې لروچې :

$$z' = 2A_1x + A_0, \qquad \ddot{z} = 2A_1 \quad , 2A_1 + 2A_1x + A_0 = 2x + 1 \ , A_1 = 1 \ , A_0 = -1$$

$$z = x^2 - x \quad , \qquad y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x$$

b)که چیرې $f(x) \equiv ae^{bx}(a \neq 0)$ وي په دې صورت کې قسمي حل د $z = Ae^{bx}$ په شکل لټوو داسې چېA یو نامعلوم ضریب دی .له دې څخه $z' = Abe^{bx}$ ، $z'' = Ab^2e^{bx}$. که چیرې(9) معادله کې

دا قیمتونه وضع کړو په کومه کې چې $f(x) = ae^{bx}$ ده نــو د e^{bx} د اختصار څخـــه وروستـــــــه $A(b^2 + pb + q) = a$ لاسته راځي. له دې څخه لیدل کیږي چې b د مشخصه معادلې جـــذر دی.نـــو .

$$z = \frac{ae^{bx}}{b^2 + pb + q}$$

که چیرې b د مشخصه معادلې جذروي نو د(9) معادلې قسمي حل د $z = AXe^{bx}$ په شکل کې لټوو که b یو ځلي جذر وي .که چیرې b دوه ځلي جذر وي نوقسمي حل یې د $z = Ax^2e^{bx}$ شکل لري . که چیرې $f(x) = p(x)e^{bx}$ وي په مشابه ډول یې قسمي حل ټاکل کېږي .

2 مثال .د $\ddot{y} - 2\acute{y} + y = 2e^x$ معادله حل کړئ.لروچې :

$k^2 2k + 1 = 0$,$k_1 = k_2 = 1$,$Y = (C_1 + C_2x)e^x$.څرنګه چې په نوموړې معادله کې $b = 1$ دی او دمشخصې معادلې دوه ځلي جذردی نو دورکړشوې معادلې قسمي حل د $z = Ax^2e^x$ شکل لري . علاوه پردې لروچې .

$$\acute{z} = Ax(x+2)e^x , \qquad \ddot{z} = A(x^2 + 4x + 2)e^x$$
$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Axe^x(x+2) + Ax^2e^x = 2e^x \ , \qquad A = 1$$
$$z = x^2e^x \ , \qquad y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x$$

C) که $f(x) \equiv a\cos\omega x + b\sin\omega x$ وي, a او b همزمان نه صفرکېږي . په دې صورت کې د Z قسمي حل د

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

دوه حده مثلثاتي افادې په شکل لټوو .په داسې حال کې چېA او B نامعلوم ضریبونه دي .

له دې څخه $\ddot{z} = -A\,\omega^2\cos\omega x - B\,\omega^2\sin\omega x \,, z' = -A\,\omega\sin\omega x + B\,\omega\cos\omega x$ د (9) په معادله کې چې $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ وي، نوموړي قیمتونه وضع کوو .

$$(-A\,\omega^2 + B\,p\,\omega + Aq)\cos\omega x + (-B\,\omega^2 - A\,p\,\omega + B\,q)\sin\omega x = a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

څرنګه چې وروستی مساوات یوعینیت دی نو $\cos\omega x$ او $\sin\omega x$ ضریبونه دمساواتو په دواړو خواوکې بایدسره مساوي وي. نو

$$A(q - \omega^2) + B\,p\,\omega = a \,, -A\,p\,\omega + B(q - \omega^2) = b$$

دا معادلې د A او B ضریبونه تعینوي یې له هغه حالت څخه چې که $p = 0$, $q = \omega^2$ وي (یاکله چې $\pm\omega i$ دمشخـــصه معـــادلې جـــذرونـــه وي) پـــه اخـــري حـــالت کې د(9) معـــادلې قسمـــي حلـــونـــه د $z = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ په شکل کې لټوو .

مثال 3 . $\ddot{y}+y=\cos x$ معادله حل کړئ .لروچې :

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x، \quad k_2=-i \quad ,k_1=i \ ,k^2+1=0$$

څرنګه چې $\pm i$ دمشخصه معادلې جذر دی نود نوموړې معادلې قسمي حل $z=x(A\cos x+B\sin x)$ په شکل کې لټوو . علاوه پردې لرو:

$$z'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$$
$$z''=-2o\sin x+2B\cos x-x(o\cos x+B\sin x)$$
$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x \quad ,A=0 \quad ,B=\frac{1}{2} \quad ,z=\frac{x}{2}\sin x$$
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$$

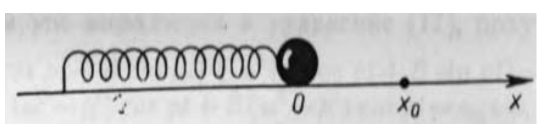
4 . هارمونیک اوسیلاتور .ریزوناس .فروضو چې دیوکاملاً هموارمیز دپاسه یوه ګلوله چې کتله یې m ده واقع او په یو فنرچې دکلک والی ضریب یې $\lambda>0$ دی ،تړلې شوې ده (46 شکل).دفنر په اوږدوکې د ox محور رسموو اود مختصاتو مبداء هغه نقطه په پام کې نیسو کوم چې په نوموړې نقطه کې ګلوله دتعادل په حالت (فنرکش شوي نه وي)کې واقع ده. اوس ګلوله دتعادل له حالت څخه د x_0 په فاصله انتقالوو او خوشې کووېې. نو په نوموړې ګلوله باندې دفنر په مقابل جهت د F قوه عمل کوي ترڅو هغه دتعادل حالت ته راوړي. په فزیک کې ښکاره ده چې دکوچني x لپاره نوموړې قوه مساوي ده په :

$$F(x)=-\lambda x \tag{11}$$

دمنفي علامه ځکه لیکل شوې چې دF قوه د x په بې ځایه شوي جهت برعکس عمل کوي.

دګلولې لپاره دنیوټن دویم قانون لیکو :

$$F=ma \tag{12}$$



(46 شکل)

په داسې حال کې چې تعجيل يې $g=\frac{d^2x}{dt^2}$ دی . له (11) او (12) رابطو څخه لرو چې :

$$ma = -\lambda x$$

يا
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x$$

له دې څخه :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (13)$$

داسې چې
$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

د (13) معادلې لپاره مشخصه معادله ليکو .

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

دنوموړې معادلې جذرونه عبارت دي له :

$$k_1 = \omega i \quad , k_2 = -\omega i$$

په دې ډول د(13) معادلې عمومي حل عبارت دی له:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (13)$$

C_1 او C_2 اختياري ثابتونه دي .

اوس اوليه شرايط په پام کې نيسو .د$t = 0$ په لحظه کې $x = x_0$ دی او سرعت مساوي په صفر دی.

په دې مانا

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x`(0) \quad = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

د(14)معادلې څخه ليکلای شو .

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\, \omega \cos\ \omega t$$

په دې ډول له (15) رابطې څخه ليکو .

$$\begin{cases} C_1 + 0 = x_0 \\ 0 + C_2\, \omega = 0 \end{cases}$$

له دې څخه $C_1 = x_0$ او $C_2 = 0$ دی په نتيجه کې :

$$x = x_0 \cos\omega t$$

په بل عبارت گلوله يو اهتزازي حرکت په ترسره کولو چې داهتزاز لمن يې $|x_0|$او پريوديې.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

دی . داهتزاز فریکوینسی ω ښيي *)

په فزیک کې وايي چې مونږ يو هارمونيک اوسيلاتور لرو .

په حقيقت کې مونږ پوهيږو چه ګلوله ترېي نهايت وخت پورې اهتزاز نه شي کولی او هم داهتزاز لمن يې صفر ته تقرب کوي . داحالت ځکه واقع کيږي چې هره عملي تجربه کې داصطکاک قوه موجوده ده چې مونږ د(13) معادلې نتيجې ته رسوی .

که چيرې داصطکاک قوه ډيره کوچنۍ وي اوهمدارنګه دوخت انتروال ډيرلوی نه وي نو (13) او (16) رابطې تقريباً ښه عمليه تر سره کوي .

اوس فرض کووچې په ګلوله باندې د F_1 يوه بله قوه عمل کوي چې جهت يې د ox محور په جهت او د لاندې قانون په واسطه تغير مومي :

$$F_1 = F_0 \sin pt$$

F_0 او p مثبت ثابتونه دي.

نو دنيوټن دويم قانون لاندې شکل غوره کوي :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x + F_0 \sin pt$$

يا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha_0 \sin pt \tag{17}$$

په دې ځای کې :

$$\alpha_0 = \frac{F0}{m}$$

(17) معادله داجباري اهتزاز معادله ښيي او (13) معادله د آزاد اهتزاز معادله ده .

د (17) معادلې قسمي حل لاسته راوړو .

1) فرضوو چې $p \neq \omega$ دی يعنې د خارجی قوې فريکونسي دآزادو اهتزازونو فريکونسی سره فرق کوي. قسمي حل يې په لاندې ډول لټوو .

---

*) T پريود د $\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$ فورمول څخه لاسته راځي داسې چې 2π د کوساين پريود دی .

$$z = A\cos pt + B\sin pt$$

له دې څخه

$$z' = -A\,p\sin pt + B\,p\cos pt$$
$$z'' = -A\,p^2\cos pt - B\,p^2\sin pt$$

که په (17) معادله کې دا قیمتونه وضع کړو لاسته راځي .

$$-p^2(A\cos\ pt + B\sin pt) + \omega^2(A\cos pt + B\sin pt\ ) = \alpha_0 \sin pt$$
$$A(\omega^2 - p^2)\cos pt + B(\omega^2 - p^2)\sin pt$$

له دې څخه :

$$A(\omega^2 - p^2) = 0 \qquad , \quad B(\omega^2 - p^2) = \alpha_0$$

په نتیجه کې

$$A = 0\ , B = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}$$

نو

$$z = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt$$

که چېرې $p \neq 0$ وي نو د (17) معادلې عمومي حل عبارت وي له :

$$x = C_1\cos\omega\,t + C_2\ \sin\omega\,t + \frac{\alpha_0}{w^2 - p^2}\sin\ p\,t$$

پورته حل ددوو هارمونیکې اهتزازاتو ترکېب ښیي کوم چې فریکونسي یې ω او p ده ضمناً اهتزازونه یې محدود دي .

2) فرضوو چې $p = \omega$ دی یعنې دخارجي قوې فریکونسي دآزاد اهتزاز د فریکونسی سره مطابقت کوي په دې حالت کې د(17) معادلې قسمي حل عبارت دی له

$$z = t(A\cos\omega\,t + B\sin\omega\,t$$

له دې څخه

$$z' = A\cos\omega\,t + B\sin\omega\,t + t\omega(-A\sin\omega\,t + B\cos\omega\,t)$$
$$z'' = 2(-A\,\omega\sin w\,t + B\cos\omega\,t) - t\,\omega^2(A\cos\omega\,t + B\sin\omega\,t)$$

په (17) معادله کې ددې قیمتونو په وضع کولو سره لاسته راځي .

$$2(-A\omega\sin\omega\,t + B\,\omega\cos\ \omega\,t) = \alpha_0\sin p\,t$$

له دې څخه

$$-2A\omega = \alpha_0 \quad , \qquad 2B\omega = 0$$

او یا

$$A = -\frac{\alpha_0}{2\omega}\ , B = 0$$

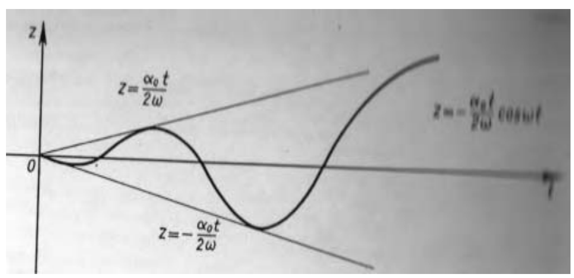
بناءً

$$z = -\frac{\alpha_0 t}{2\omega}\ cos\ \omega t$$

که چېرې $p = \omega$ وي نو د(17) معادلې عمومي حل عبارت له :

$$x = C\ cos\omega t + C_2\ sin\ \omega\ t - \frac{\alpha_0 t}{2\omega}\ cos\ \ \omega\ t$$

ورستی معادله ښیي چې داهتزازتو تفاضل x د t وخت په زیاتیدو سره نامحدود دی(47 شکل).داحادثه دریزونانس په نوم یادیږي .دمختلفو ماشینونو دکار ولو په صورت کې ریزونانس نا مطلوب وي ځکه چې ریزونانس دښه کارکولو مانع او حتئ دهغوي دخرابیدو سبب کرځي .



(47شکل)

تمرینونه

لاندې معادلې حل کړئ .

1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$, $\qquad [(1+y)(1-x) = C]$
2. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ $\qquad [arc\ \ tg\,x + arc\,tg\,y = c]$
3. $(1+e^x)yy' = e^x$, $\qquad \left[\frac{y^2}{2} = ln(1+e^x) + C\right]$
4. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$, $\qquad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
5. $e^{-y} = 1$, $\qquad [e^x = C(1-e^{-y})]$
6. $y' = 2^{x+y}$ $\qquad [2^x + 2^{-y} = C]$
7. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$, $\qquad [1+e^y = C(1+x^2)]$

$8. 2xyy' = X^2 + y^2$, $[x^2 - y^2 - Cx = 0]$

9. $(x + y)dx += 0$, $\left[y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}\right]$

10. $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0,$ $[x^3 + 3x^2 y - y = C]$

11. $y' = \frac{x - y}{x - 2y}$, $[x^2 - 2xy + 2y^2 = C]$

12. $y` + 2xy$ $\left[y = (x^2 + C)e^{-x^2}\right]$

13. $y' = \frac{1}{xcosy + sin\,2y}$, $[X = Ce^{sin\,y} - 2(1 + sin\,y)]$

14. $y' + 2y = e^{-x}$ $[y = (Ce^{-2x} + e^{-x}]$

15. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $\left[y = (C + x)e^{x^2}\right]$

16. $y' + 2xy = e^{-x^2}$, $\left[y = (C + x)e^{-x^2}\right]$

17. $y'xln = 3x^3\, ln^2\, x$, $|y = (C + x^3)lnx|$

18. $(2x - y^2)y' = 2y$, $\left[x = Cy - \frac{y^2}{2}\right]$

19. $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $[y = Cx^2 + x^2 \sin x]$

20. $y' = \frac{y}{2ylny + y - x}$, $\left[x = \frac{C}{y} + ylny\right]$

21. $\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy\right) dy -= 0$, $\left|x = (C + y)e^{\frac{-y^2}{2}}\right|$

22. $y' - ye^x = 2xe^{e^x}$, $\left[y = (C + x^2)e^{e^x}\right]$

23. $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$, $\left[y = (C + x)e^{(1-x)e^x}\right]$

د لاندې معادلو قسمي حل پیداکړئ .

24. $x^2 + xy = y$ که د $x = 1$ لپاره $y = 0$ وي . $[y = x - x^2]$

25. $y' + ycos\,x = cos\,x$ که د $X = 0$ لپاره $y = 1$ وي. $[y = 1]$

26. $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$. که د $X = 2$ لپاره $y = 4$ وي $|y = x^2|$

27. دیو جسم دمستقیم الخط حرکت سرعت د لاندې معادلې په واسطه ورکړشوی دی.

$$V = (2t^2 + t)\frac{cm}{s}$$

دحرکت دشروع څخه تر 6 ثانیو پورې طی شوې فاصله په لاس راوړئ؟

$[162cm]$

28. دیوجسم د مستقیم الخط حرکت سرعت.

$$v = (4t - \frac{6}{t^2})\ \frac{cm}{s}$$

دی.په 6 ثانیو کې طی شوې فاصله په لاس راوړئ؟

[$9cm$]

29. دیوجسم سرعت دهغې د طی شوې فاصلې سره متناسب دی .په لمړی 10 ثانیو کې جسم $100m$ او د15 ثانیو په موده کې $200m$ فاصله طی کړې ده. د t په وخت کې کومه فاصله طی کوي .

[$s = 25.2^{\frac{t}{5}}$]

30.په فضا کې دیوجسم دځړیدو سرعت دجسم او دهوآ حرارت ددرجو له تفاضل سره متناسب دی. که چېرې دهوآ دحرارت درجه 20^0c او جسم د 20 دقیقو په موده کې د 100^0c څخه 60^0c ته لوړه شي .په څومره وخت کې به دهغې حرارت 30^0C ته ټیټیږي ؟

[د60 دقیقو په وخت کې]

31. په یو ټانک کې 100ℓ محلول شته چې په هغې کې $10kg$ مالګه وجود لري. په یوه دقیقه کې په ټانک کې 3ℓ په سرعت اوبه تویېږي اوپه عین زمان کې د 2ℓ په سرعت دټانک څخه اوبه خارجیږي په داسې حال کې دمالګې مقدار دټانګ دمحلول په هره برخه دمخلوط کونکي په واسطه یوشان پاتې کېږي. دیوساعت په موده کې په ټانک کې څومره مالګه موجوده ده ؟

[$3.9kg$]

لاندې معادلې حل کړئ .

32. $\ddot{y} = x$, $\left[y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right]$

33. $\ddot{y} = \sin x + \cos x$, $[y = -\sin x - \cos x + C_1x + C_2]$

34. $\ddot{y} = e^x$, $[y = e^x + C_1x + C_2]$

35. $\ddot{y} - y = 0$, $[y = C_1e^x + C_2e^{-x}]$

36. د $\ddot{y} = -6x$ قسمي حل پیداکړئ چې د $x = 0$ لپاره د $y = 0$, $y' = 0$ اولیه شرطونه صدق کړي.

[$y = -x^3$]

37. یوجسم په مستقم ډول حرکت کوي چې تعجیل یې $\frac{d^2s(t)}{dt^2}$ دی . دحرکت معادله یې پیداکړئ کله چې دوخت په شروع کېدوسره طی شوې فاصله اوسرعت صفر وي .[$s(t) = 2t^2$]

38. په یومستقیم الخط حرکت کې تعجیل دوخت سره متناسب دی دطی شوې فاصلې او وخت ترمنځ رابطه پیداکړئ که چېرې د $t = 0$ لپاره $s = 0$ $v = 0$ اوهمدارنګه د $t = 1$ لپاره $s = \frac{1}{3}$ وي.[$s = \frac{t^3}{3}$]

39. په یوه مستقیم ډول حرکت کې تعجیل د وخت دمر بع سره متناسب دی د s او t تر منځ رابطه پیداکړئ کله چې د $t = 0$ لپاره $s = 1\,, v = 0$ او د $t = 1$ لپاره $s = 2$ وي . $[s = t^4 + 1]$

لاندې معادلې حل کړئ .

40. $y'' - y' - 2y = 0\,,$ $\qquad [y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}]$

41. $y'' + 24y' + 144y = 0,$ $\qquad [y = e^{-12x}(C_1 + C_2 x)]$

42. $y'' = 0\,,$ $\qquad [y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}]$

43. $y'' - 7y' + 10y = 0,$ $\qquad |y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}|$

44. $y'' - 5y = 0,$ $\qquad \left[y = C_1 e^{-\sqrt{5}x} + C_2 e^{\sqrt{5}\,x}\right]$

45. $y'' - 22y' + 121y = 0,$ $\qquad [y = e^{11x}(C_1 + C_2 x)]$

46. $y'' - 4y' + 20y = 0,$ $\qquad [y = e^{2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x]$

47. $y'' + 15y = 0\,,$ $\qquad [y = C_1 + C_2 e^{-15x}]$

48. $y'' + 49y = 0\,,$ $\qquad [y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x\,]$

49. $y'' + 7y' = 0,$ $\qquad [y = C_1 + C_2 e^{-7x}]$

50. $y'' - 49y' = 0,$ $\qquad [y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-7x}]$

51. $y'' + 20y' = 0\,,$ $\qquad [y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-19x}]$

52. $y'' + 2\sqrt{3}\; y' = 0,$ $\qquad \left[y = e^{-\sqrt{3}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2\,x)\right]$

53. $y'' - y' - 12y = 0$ $\qquad [y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}]$

54. $y'' + 4y' - 7y = 0\,,$ $\qquad \left[y = C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{-(2+\sqrt{11})x}\right]$

55. $y'' - 9y' - 1 = 0,$ $\qquad [y = C_1 e^{10x} + C_2 e^{-x}]$

56. $y'' + 16y = 0,$ $\qquad [y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x]$

57. $y'' + 2y = 0,$ $\qquad \left[y = C_1 e^{-(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{-(1-\sqrt{3})x}\right]$

58. $y'' - 4y' + 10y = 0,$ $\qquad \left[y = e^{2x}\left(C_1 \cos \sqrt{6}\,x + C_2 \sin \sqrt{6}\,x\right)\right]$

59. $y'' + 3y$ $\left[y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}\,x\right]$

لاندې معادلې حل کړئ .

60. $y'' + y' = \frac{1}{2}$, $\left[y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}\right]$

61. $y'' - 9y = 2 - x$, $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right]$

62. $y'' + y' = e^x$, $\left[y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x\right]$

63. $y'' - 4y' = 4e^{4x}$, $[y = e^{4x}(C_1 + x) + C_2]$

64. $y'' - y' = 4 + x$, $\left[y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - 5x\right]$

65. $y'' + y = \sin x$, $\left[y = C1 \cos x + C2 \sin x - \frac{1}{24}\sin 5x\right]$

66. $y'' + y = \cos x$, $\left[y = C_1 \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin\, x\right]$

67. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$, $\left[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right]$

68. $y'' + 7y' + 20y = e^x$, $\left[y = e^{\frac{-7}{2x}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{31}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{31}}{2}x\right) + \frac{1}{28}e^x\right]$

69. $y'' + 9y = \cos 3x$, $\left[y = C_1 \cos 3x + \left(C_2 + \frac{x}{6}\right)\sin 3x\right]$

70. $y'' - 2y' - 3y = x^2$, $\left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}\right]$

71. $y'' - 9y = e^{2x}$, $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}e^{2x}\right]$

72. $y'' - 6y + 9y = e^{3x}$, $\left[y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right)\right]$

73. $y'' + 100y = \sin 2x$ $\left[y = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x + \frac{1}{96}\sin 2x\right]$

74. $y'' + 3y' = 1$, $\left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{3}\right]$

75. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$, $\left[y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}\right)\right]$

76. $y'' + 2y' = 1 - x$ $\left[y = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x\right]$

77. $y'' + 4y' + 29y = 0 , y = 0, y' = 15$ لپاره $x = 0$, د $[y = 3e^{2x}\sin 5x]$

78. $4y'' + 4y' + y = 0 , y = 2 , y' = 0$ لپاره $x = 0$ د , $\left[y = e^{-\frac{1}{2}x}(2 + x)\right]$

79. $y'' - 2y + 10y = 0 , y = 1, y' = 0$ لپاره $x = 0$ د , $\left[y = e^{x}\left(\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x\right)\right]$

80. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y = 6 , y' = 10$ لپاره $x = 0$ د , $[y = 4e^{x} + 2e^{3x}]$

81. $y'' - 2y' + 2y = 0 , y = 0 , y' = 1$ لپاره $x = 0$ د , $[y = e^{x}\sin x]$

82. $y'' - 2y' + 3y = 0 , y = 1 , y' = 3$ لپاره $x = 0$ د $[y = e^{x}(\cos x\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)]$

83. $y'' - 9y' = 2 - x , y = 0 , y' = 1$, لپاره $x = 0$ د $\left[y = \frac{7}{27}e^{3x} - \frac{1}{27}e^{-3x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right]$

84. $y'' + 4y = 2\cos 2x , y = 0 , y' = 4$ لپاره $x = 0$ د , $\left[y = 2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x\right]$

85. $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2 , y = 0 , = 0$ لپاره $[y = -0.25 + 0.25e^{-4x} + x^3 - x^2 + x]$

پنځم فصل

دساحې تیوري عناصراودریاضي ،فزیک اساسي معادلات

§1.5 .سکالري او وکتوري ناحیې .

1. دسکالري ناحیې مفاهیم .فرضوو چې Ω په فضاء کې یوه ناحیه ده . که چېرې لهΩ ناحیې څخه د M هره نقطه د یوه معین قانون له مخې د $u = u(M)$ له یوه عدد سره ارتباط ولري نو وایي چې د Ω په ناحیه کې د u سکالري ساحه ورکړ شوې ده .یاپه بل عبارت وایي چې سکالري ساحه ده دا په دې مانا ده چې د$u = u(M)$ سکالري تابع په مرسته ارایه شوې ده.لکه څنګه چې یادونه شوې د$u(M)$ لیکنه دا مانا لري چې دنقاطو یوه تابع ده .یادونه کوو چې دΩ ناحیه کېدای شي توله فضاء وي .

که چېرې د $u = u(M)$ کمیت د t وخت پورې اړه ونه لري نو په دې صورت کې دu سکالري ساحه دساکنې ساحې په نو م یادوي .اویا دهغې ساحې په نوم چې دسکون حالت غوره کوي .مونږ یوازې ساکنه سکالري ساحه تر مطالعې لاندې نیسو.

دیو جسم دداخلي حرارت ساحه ،دکتلې دتراکم ساحه ،په برقي ساحه کې د پوتانسیل د توزیع ساحه ،هره یوه دسکالري ساحې مثالونه دي .

د$u = u(M)$ لیکنه دانه ور کوي چې په فضاء کې د مختصاتو دسیستم مقدمه ده . که چېرې یوه فضاء دمختصاتود سیستم دنمونې په ډول د oxyz قایم سیستم پورې اړه ولري نو په دې صورت کې د M نقطه دy,x اوz مختصاتو په واسطه تعینیږي او u(M) دساحې تابع په u(x,y,z) درې متحوله عادي تابع بدلیږي .مونږ دتل لپاره فرضوو چې نوموړې تابع دقسمي متمادي مشتقاتو لرونکې ده .

2 . د سویې سطح. دهندسې له نقطې نظره سکالري ساحه دسویې دسطحې په واسطه ارایه کېږي .

دفضاء دهغو نقطو مجموعه چې دهغوي لپاره دساحې تابع u ثابت قیمتونه واخلي، د u(M) سکالري ساحې دسویې سطحې په نوم یادیږي .

دقایمو مختصاتو په سیستم کې دسویې سطحې معادله د u(x,y,z)=c بڼه لري .داسې چې C یو ثابت عدد دی .

باید ووایو چې په فزیک کې دپو تنسیل ساحې لپاره دسویې سطحه اکثرآد هم پوتنسیل سطحې(هغه سطحه چې پوتنسیل یې په ټولو نقطو کې یوشان وي) په نوم یادیږي .c ته دمختلف قیمتونو په ورکولوسره مونږ کولای شو دسویې سطحې مجموعه په لاس راوړو.

په مستوي کې دسکالري ساحې دسویې سطحې دښودلو طریقه یوه مناسبه طریقه ده کله چې د سکالري سطحې موضوع په مستوي کې تر بحث لاندې وي. یعنې هغه ساحه چې په مستوي کې ورکړ شوي وي . په دې ساحه کې دu تابع یوازې د x او y دوه متحولینو تابع ده. په دې ډول دهندسې له نقطې نظره په مستوي کې سکالري سطح ،دسویې خطونو په واسطه ښودله کېږي. په هغه حالت کې چې د حرارت ساحه په نظر کې وي نو په مستوي کې دسویې خطونه دحرارت دهم درجه خطونو (ایزوترم) په نوم اوکله چې دفشار ساحه په نظر کې وي نو دهم فشار(ایزوبار) خطونو په نوم یې یادوي او داسې نور .

دسکالري ساحې لاپلاسیون .د $u=u(x,y,z)$ سکالري ساحې لپاره د

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

دویم ترتیب اوپراتورچې د لاپلاس اوپراتور او یا لاپلاسیون په نوم یې یادوي په نظرکې نیسو .

په استوانوي مختصاتو کې د لاپلاسیون لپاره افاده پیداکوو لرو.

$$x=r\cos\varphi \quad , \; y=r\sin\varphi \quad , \; z=z \qquad (1)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,tg\,\varphi=\frac{y}{x} \qquad (2)$$

د (1) رابطې څخه د x او y قیمتونه په نظر کې نیولو سره د $u=u(x,y,z)$ لپاره د $u=u(r\cos\varphi ,r\sin\varphi , z)$ افاده په لاس راځي .نظر r او φ ته د x او y دویم ترتیب مشتقات په لاس راوړو.

دمرکبو توابعو دمشتق نیولو قانون له مخې او

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \; \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (3)$$

د (2) فورمول له مخې

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}.$$

او

$$\frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad , \quad \frac{1}{cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

او یا د(1) فورمول له مخې د X او y په بدلونې :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = cos\,\varphi \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = sin\,\varphi$$

یا

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{sin\,\varphi}{r} \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{cos\,\varphi}{r}$$

په (3) رابطه کې ددې قیمتونو په وضع کولو سره لاسته راځي .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}cos\,\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{sin\varphi}{r} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\,sin\,\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{cos\varphi}{r}$$

دویم ترتیب مشتقات محاسبه کوو. د (4) لاسته راغلې رابطې او دمرکبوتوابعو مشتق نیولو قواعدو له مخې لرو:

$$(5)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,cos\,\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial r}\frac{sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{sin\varphi}{r^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}\,cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial r}\,sin\,\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{sin\varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{cos\varphi}{r}\;. \qquad (7)$$

د (6) رابطې دواړه خواوې په $\frac{\partial r}{\partial x} = cos\,\varphi$ او د (7) رابطې دواړه خواوې په $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{sin\varphi}{r}$ ضرب او بیایې جمع کوو. د (5) رابطې او دمشابه حدونو په پام کې نیولوسره په لاس راوړو.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,Cos^2\varphi - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{sin\varphi\,cos\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{sin\varphi\,cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{sin^2\varphi}{r^2}$$

په مشابه ډول په لاس راوړو .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{r} - 2\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{cos^2\varphi}{r^2}$$

له دې څخه .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

په دې ډول په استوانوي مختصاتوکې دلاپلاس او پراتور افاده لاندې شکل غوره کوي .

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ورستنی افاده اکثراً په لاندې مناسب شکل ليکل کېږي .

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

د کروي مختصاتو په حالت کې د $u(r\, sin\emptyset\, cos\,\varphi . r\, sin\emptyset\, sin\,\varphi\, , r\, cos\,\varphi)$تابع دمشتقاتو په نيولو اود لوی حجم لرونکو ساده محاسباتو په تر سره کولو چې پدې ځای کې دهغې دمحاسبې څخه صرف نظر شوي ، د لاپلاس او پراتور نهايیافاده دکروي مختصاتو په سيستم کې داسې ليکو :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{cos\,\emptyset}{r^2 sin\emptyset}\frac{\partial u}{\partial \emptyset} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} + \frac{1}{r^2\, sin^2\,\emptyset}\frac{\partial^{2u}}{\partial \varphi^2}$$

دا فورمول اکثراً په لاندې ډول ليکل کېږي :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\emptyset}\frac{\partial}{\partial \emptyset}\left(sin\,\emptyset\,\frac{\partial u}{\partial \emptyset}\right) + \frac{1}{r^2\, sin^2\,\emptyset}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

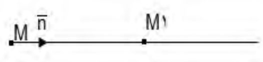
4. په يو جهت کې دساحې مشتق .

تعريف . د M په نقطه او د $\bar{n}$ په جهت د u(M) سکالري ساحې مشتق دسکالري تابع تزايد Δu د M نقطې د تغيراتو پر مقدار $d = MM_1$ دلميټ څخه عبارت دی کله چې د M نقطې د تغيراتو مقدار صفر ته تقرب وکړي . که چېرې دا لميټ موجودوي نو د $\bar{n}$ په جهت د u(M) سکالري ساحې مشتق په نوم يادوي او هغه د دې سمبول په واسطه ښيي (48شکل):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = lim_{d\to 0}\frac{\Delta u}{d} = lim_{d\to 0}\frac{u(M1) - u(M)}{d} \qquad (8)$$

د $\frac{\partial u}{\partial n}$ لپاره د محاسبه کولو مناسب فورمول په پام کې نيسو .فرضوو چې X ،y او Z د M مستقرې نقطې مختصات وي اوس فرضوو چې$cos\,\gamma$ ،$cos\,\alpha$ ،$cos\beta$ د $\bar{n}$وکتور دجهت کو ساينونه دي.

نو د M_1 نقطه د $X + d\cos\alpha$ ،$y + d\cos\beta$ او $Z + d\cos\gamma$مختصاتو لرونکې ده .



(48شکل)

د z,y,x ، $cos\,\alpha$ ، $cos\,\beta$ او $cos\,\gamma$کميتونه ثابت کميتونه دي نو د $u(M_1)$ نقطه يوازې د d دتغيراتو د مقدار تابع ده نوموړې تابع داسې ليکو

ψ(d)= u(x+d cosα , $y + d\ cos\beta$, $z + d\ cos\gamma$)

پوهیږو چې $\psi(0) = u(x, y, z)$ دی نو د (8) رابطې څخه لیکلی شو

$$\frac{\partial u}{\partial n} = lim_{d\to 0}\frac{\psi(d)-\psi(0)}{d} = \psi'(0)$$

دمرکبو توابع دمشتق نیولو فورمول له مخې لیکلی شو

$$\psi'(d) = u'_x(m_1)cos\alpha + u'_y(m_1)cos\beta + u'_z(m_1)cos$$

له دې څخه

$$\psi'(0) = u'_x(m)cos\alpha + u'_y cos\beta + u'_z cos\gamma$$

او یا

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma \qquad (9)$$

د (9) فـــورمـــول څخه څرګنده ده چې $\bar{n}$ وکتـــور جهت د Ox پرمثبـــت جهت منـــطبق دی یعنې $\alpha = 0$ $\beta = \gamma = \pi/_2$ ، بناً $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$.که چیرې د $\bar{n}$ جهت د oy او یا oz په مثبتو جهتونو مطابقت وکړي نو د پورتني حالت سره مشابهت لري .

لکه څنګه چې د$\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ او $\frac{\partial u}{\partial z}$ په پام کې نیولو سره د u تابع د تابع دسرعت مشخصات د مختصاتو د محوراتو پر جهتونو راښیي، په مشابه ډول$\frac{\partial u}{\partial n}$ د(u(x,y,z تابع د سرعت تغیر د M په نقطه کې د $\bar{n}$ په جهت راښیي. د $\frac{\partial u}{\partial n}$ مطلقه قیمت د$\bar{n}$ په جهت دسرعت مقدار ښیي دمشتق اشاره د تا بع د تغیراتو مشخصات (تزاید او یا تنا قص) ښیي په دې ډول د$\bar{n}$ په جهت مشتق نیولو کې د فزیک یو مفهو م پروت دی.

د (9) فورمول څخه څرګنده ده چې د $\bar{n}$ په مخا لف جهت کې مشتق،د $\bar{n}$ په جهت د مشتق سره مساوي دی کله چې ا شاره یې د $\bar{n}$اشارې مخالفه وټاکل شي. دایو حقیقت دی چې د α ،β او γزاویو دجهت په تغیرسره، نوموړې زاویې د π په اندازه تغیر کوي .

که چیرې دu ساحه دمستوي یوه ساحه وي په دی صورت کې د $\bar{n}$ جهت دα دمیل زاویې په واسطه مشخص کېږي کوم چې د فاصلې محور سره یې جوړوي. په (9) عمومي فورمول کې د$\gamma = \pi/_2$ او $\beta = \gamma - \alpha$ قیمتو نو په وضع کولو سره کولای شود نوموړې ساحې لپاره په یـــــو جهت د مشتق فورمول په لاس راوړو. له دې څخه د$\alpha = 0$ لپاره$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$ اوکه $\alpha = \pi/_2$ وي نو$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

5. د سکالري ساحې گرادینت. فرضووچې د $u=u(M)=u(x,y.z)$ سکالري نا حیه ورکړشوې ده.

تعریف .د $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ وکتور ته د M په نقطه کې د $u(M)$ سکالري تابع گرادینت وايي اود او د grad u سمبول په واسطه ښودل کېږي.

$$\text{grad } u =\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} \qquad (10)$$

د $\bar{n}_0(cos\alpha, cos\beta\ , cos\gamma)$ په واسطه واحد وکتور د $\bar{n}$ په جهت ښيو.نو

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{n}_0 grad\ u=|gradu|cos\varphi=np_{\bar{n}}grad\ u$$

په دې څخه کې φ د grad u او $\bar{n}$ ترمنځ زاویه ده.

په دې مانا چې د M په نقطه کې د $u(M)$ سکالري ساحې مشتق په یو ورکړ شوي جهت د M په نقطه کې په نوموړې جهت د گرادینت له مرتسم څخه عبارت دی. له دې څخه د M په نقطه کې، $\frac{\partial u}{\partial n}$ ترټولو لوی قیمت د گرادینت په جهت اخلي د دې جهت لپاره $\varphi=0$ او $\text{Cos } 0=1$ قیمت غوره کوي. په دې حالت کې

$$\frac{\partial u}{\partial n}=|grad\ u|=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2}$$

په دې ډول grad u یو وکتوردی چې د سکالري ساحې ترټولو لوي تزاید په یوې ورکړ شوي نقطه کې ښیي همدارنگه د هغې مطلقه قیمت دنوموړې تزاید دسرعت سره مساوي دی . په دې برخه کې دگرادینت فزیکې مفهوم پروت دی .

کله چې سکالري نا حیه په مستوي کې واقـــع وي $u=u(M)=u(x,y)$ ،نــو گــرادینت عبارت دی

لــه $\text{grad } u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{\jmath}$

مثال . دبرقي ناحیې پو تنشیل کوم چې د q نقطوي چارج په واسطه تشکیلیږي او دمختصاتوپه مبدا کې کمیږي، ورکړشوی. د دې سکالري ساحې گرادینت په لاس راوړئ.

د برق فزیک څخه څرگنده ده چې د $M(x,y,z)$ په نقطه کې پوتنشیل د $u=\frac{q}{r}$ سره مساوي دی په داسې حال کې چې(10) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ دی. د (10) فورمول له مخې

$$\text{grad } u=-\frac{q}{r^2}\frac{x}{r}\bar{\imath}-\frac{q}{r^2}\frac{y}{r}\bar{\jmath}\frac{q}{r^2}\frac{z}{r}\bar{k}=-\frac{q}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}=-\frac{q}{r^2}\bar{r}_0$$

دلته $\bar{r}=x\,\bar{\imath}+y\bar{\jmath}-z\bar{k}$ د M نقطې شعا ع وکتوراو $\bar{r}_0=\frac{r}{r}$ د شعاع وکتور په جهت واحد وکتوررابښيي. د $\bar{E}=\frac{q}{r^2}\bar{r}_0$ وکتور د M په نقطه دنوموړې برقي ساحې شدت ښيي. په دې ډول $\text{grad } u=-\bar{E}$.

6. د نبله او پراتور اود گرادينت محاسبه. ويليم گاملتون (HameltonW.R) (1805–1865)

انگليسي رياضي پوه لاند ې وکتوري اوپراتور لاسته راوړ:

$$\nabla=\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

او د نبله او پراتور په نوم يادېږي. نبله يوه يوناني کليمه ده چې دهارفا په مانا ده او هارف د موزيک يوه آله ده چې د شکل له مخې د مثلث معکوس ښيي. په نوموړې فورمـــول کې چې کـــوم کميت د ∇ او پراتور عمل لاندې واقع کېږي بايد د قسمي مشتقاتو ترسمبول $\frac{\partial}{\partial x}$ او داسې نـــورو لاندې يا په بل عبارت د ديفرنسيل تر او پراتور لاندې واقع شي. بنا پردې ليدل کېږي چې د ديفرنسيلي او پراتور په مرسته يو گوني وکتور ليکلاي شو داځکه چې نوموړی اوپراتورپرهغه افاده عمل کوي کـــوم چې د هغې ښي خواته واقع ده.

نو

$$\nabla u=grad\ u \qquad \text{او يا} \qquad \nabla u=\bar{\imath}\frac{\partial u}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

د ديفرنسيلي محاسبو د مشهورو فورمولونو له مخې چې د څو متحوله توابعـــو په برخه کې کولای شو لاندې ساده قوانين وليکو:

1. $\nabla(c_1u+c_2v)=c_1\nabla u+c_2\nabla v$

دلته c_1 او c_2 ثابت ، u او v د y,x او z متحولينو تابع دي يعنې

$$\text{Grad}(c_1u+c_2v)=c_1grad\ u+c_2grad\ v$$

2. $\nabla\ (uv)=v\nabla u+u\nabla v$

يعنې

$$grad\ (uv)=v\ grad\ u+u\ grad\ v$$

3. $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

يعنې

$$\text{grad } f(u)=f'(u)grad\, u$$

$$4.\nabla f(u,v)=f'_u\nabla u+f'_v\nabla v$$

يعنې

$$\text{grad } f(u,v)=)=f'_u grad\, u+f'_v grad\, v$$

په مشابه ډول د f(u,v,w)لپاره .

7. وکتوري ساحه اوکتوري خط.فرضوو چېΩ پهفضأ کې يوه ناحيه ده .

که چېرې د Ωناحيه د Mهرې نقطې لپاره د $\bar{a}$(M)وکتور تعريف شوی وي نو وايي چې دΩ په ناحيه کې د$\bar{a}$ وکتوري ساحه ورکړشوي ده.

بايد ووايو چې دΩناحيه کېدای شي ټوله فضاوي . مونږ په دې ځای کې ساکنه وکتوري نا حيه په نظر کې نيسو کومه چې په هغې کې د $\bar{a}$(M)وکتور يوازی دMنقطې پورې اړه لري اووخت (زمان) پورې اړه نه لري.

دجاذبې ساحه ، دبهيدونکو ذراتو دسرعت ساحه ، دمقناطيسي اوبرقي القأ ساحې او برقي جريان دتراکم ساحه هره يوه دوکتوري ساحې مثالونه دي.

د oxyz قايم مختصاتوپه سيستم کې د $\bar{a}$(M)وکتور د2.1 داسې ليکل کېږي:

$$\bar{a}(M)=a_x(x,y,z)\bar{i}-a_y(x,y,z)\bar{j}+a_z(x,y,z)\bar{k}$$

دلته a_x(x,y,z) ، a_y(x,y,z) ، a_z(x,y,z) او ياپه لنډ ډول a_x،a_y،a_z دM(x,y,z) نقطې پورې د تړلي وکتـــــور مرتسمونه دox ,oy ,oz مختصاتو په محورونو ښيي. وکتــــــوري تابع چــــې ارگومنټ يې يو سکالرؤ ترمطالعې لاندې ونيول شو . په دې ځای کې درې متحوله تابع چې ارگـــومنټ يې درې سکالره دی تر مطالعې لاندې نيسو.

په راتلونکې برخو کې فرضووچېa_x،a_y،a_z دقسمي مشتقاتو سره يو ځای متمادي توابع دي .

په خاصو حالتو نو کې وکتوري ساحې په گوته کوو.

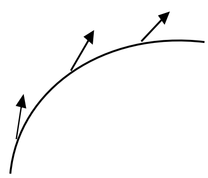
وکتوري ناحيې ته متجانيسه ساحه وايي که چېرې $\bar{a}$(M)يو ثابت وکتوروي يعنی a_x, a_y, a_zثابت کميتونه وي .د جاذبې قوې ساحه د متجانيسې ساحې يوه نمونه ده.

وکتوري ساحې ته مستوي وکتوري ساحه وايي ، کله چې $\bar{a}$(M) وکتوريو مرتسم دصفر سره مساوي وي . دا څرګنده شوي نه ده چې د x ,y او z درې متحولينو له جملې څخه کوم يوېږي په پام کې نيول شوي دي. دنمونې په ډول:

$$\bar{a}(M)= a_x(x,y)\bar{\imath}-a_y(x,y)\bar{\jmath}$$

په هايدرو ډاينامیک کې اکثرآ دمستوي ناحيې سره مخامخ کېږو د نمـــــونې په ډول په سطح کې د مايع جريان يعنې هغه جريان کله چې دمايع ټولې ذرې ديوې سطحې سره موازي حرکت وکړي او په ضمن کې دهغوذراتو سرعت چې په عين خط واقع او په نوموړې سطح عمود او يو ګوني وي .

دوکتوري ساحې وکتوري خط هغه خط ته وايي چې دنوموړي خط په هره نقطه کې مماس خط دهغه وکتورسره چې په نوموړې نقطه رسمېږي منطبق وي(49 شکل).



(49 شکل)

په يوه مشخصه ناحيه کې وکتوري خط يو څرګند فزيکي مفهوم ارايه کوي . که چېرې دبهيدونکې مايع ساحه په پام کې ونيسو نو وکتوري خط يوازې دجريان دخطونو څخه عبارت دی کوم چې په نو موړو خطونو باندې د مايع ذرات حرکت کوي

په برقي ساحه کې وکتوري خطونه دنو موړې ساحې د قوې خطونه دي. دمثال په ډول د نقطـــوي چارچونو په ناحيه کې دا ډول خطونه د هغې شعاع څخه عبارت دي چې د چارج لرونکو ذراتـــو څخه تيرېږي . دمقناطيسي ساحې لپاره وکتوري خطونه (دقوې خطونه) دهغه خطونو څخه عبارت دي کوم چې د شمالي قطب څخه راوځي او په جنوب کې ختمېږي.

8 .ديوې سطحې څخه دساحې دوکتورونو جريان. د مايع مقدارچې د وخت په واحدکې د σ سطحې څخه تيرېږي د لاندې فورمول پوا سطه ارايه کېږي.

$$\Pi=\iint_\sigma p(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

او يا.

$$\Pi=\iint_\sigma p(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)ds \qquad (11)$$

د Πکېمت د σسطحې څخه د مایع جریان ښيي.څرنګه چې P ، Q او R د $\bar{V}$ وکتوردجریان د سرعت مختصات او $\cos\gamma$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\alpha$د σپرسطح د $\bar{n}$نورمال وکتور په جهت د $\bar{n}_0$ واحد وکتورمختصات او $p\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \bar{V}\bar{n}_0$ دي نو(11) فورمول کولای شو داسې ولیکو.

$\Pi=\iint_\sigma \bar{V}_n\bar{n}_0 ds$ اویا $\Pi=\iint_\sigma V_n ds$

دلته V_n د $\bar{V}$ وکتور مرتسم د $\bar{n}$ پر نورمال ښيي .

تعریف . لاندې سطحې انتګرال ته د$\bar{a}(M)$وکتور یا د$\bar{a}(M)$ وکتوري ساحې سیلان Π ویل کېږي

$$\Pi=\iint_\sigma \bar{a}(M)\bar{n}_0 ds \qquad (12)$$

دلته $\bar{n}_0$د σ سطحې دM په نقطه کې دجریان عمود وکتورښيي.د σسطح باید موجه سطح وي په دې مانا چې د هغې په هره نقطه کې د نورمال له دوه جهتو نو څخه هغه جهت وټاکل شي کوم چې دσ په سطح باندې$\bar{n}(M)$ وکتور په متمادي ډول تغیروکړي. کله چې σ تړلې سطح وي نو په دې صورت کې د$\bar{n}(M)$وکتور دسطحې خارجي نورمال په پام کې نیول کېږي.

فرضوو چې

$$\bar{a}(M)=a_x\bar{\imath}+a_y\bar{\jmath}+a_z\bar{k}=\bar{\imath}\cos\alpha+\bar{\jmath}\cos\beta+\bar{k}\cos\gamma$$

نو

$$\Pi=\iint_\sigma (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)ds.$$

د (15)فورمول له مخې د(12) انتګرال کولای شوداسې ولیکو:

$$\Pi=\iint_\sigma (a_x dydz+a_y dzdy+a_z dxdy)$$

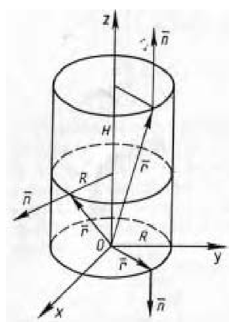
په دې ډول دیو وکتور دسیلان محاسبه کول دسطحې انتګرال په محاسبه کولوبدلیږي. له پورتنی تعریف څخه په څرګندډول معلومیږي چېΠ وکتوري سیلان یو سکالري کمیت دی . که چېرې د$\bar{n}$ نورمال جهت په مقابل جهت تغیر وکړي یعنې د σ سطحې جهت تغیر وکړي نو دΠ اشاره تغیر کوي . څرنګه چې د$\bar{a}(M)$وکتوراود$\bar{n}$واحد وکتورونو سکالري ضرب د$\bar{a}(M)$وکتور مرتسم $a_n(M)$ د $\bar{n}$په جهت ښيي نو دπ سیلان کولای شو دار نګه ولیکو :

$$\Pi=\iint_\sigma a_n(M) ds \qquad (13)$$

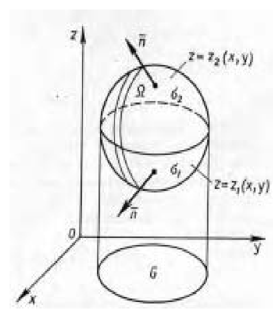
په خاص حالت کې که چېرې د سطحې په ځینو برخو کې د$\bar{a}(M)$ وکتورمرتسم دنورمال پرمخ ثابت وي یعنې$a_n(M) = C = const$وي نو دنو موړې برخې څخه سیلان د Q . C سره مساوي دی . دلتـــهQ د سطحې د ذکرشوې برخې مساحت ښیي.

مثال .یوه قایمه استوانه چې پورتنۍ قاعده یې σ_2 ، ښکتنۍ قاعده یې σ_3 ارتفاع یېHاو شعاع یې R ده په پام کې نیسو . که چېرې د مختصاتو دمرکز مبدا د ښکتنۍ سطحې د ثـــقل په مـــرکز او د استوانې محورد oz پرمحور منطبق وي(50 شکل) .دσ_1جانبي سطحې څخه سیلان د$\bar{r}$ شعاع وکتور محاسبه کړئ.

په ټوله سطح کې$\bar{n}$ د خارجي موجه نورمال شکل لري. د σ_1 په جانبي سطح کې د$\bar{n}$د خارجی نورمال جهت د xoyمستوي سره موازی دی اومرتسم یېr_nد R سره مساوي دی.بناً د(13) فورمول له مخې$s_\sigma = \iint_\sigma ds$دفورمول څخه په ګټه اخیستنه په لاس راوړو :



(50 شکل)



(51شکل)

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} R ds = R 2\pi R H = 2\pi R^2 H$$

دσ_2 په پورتنۍ قاعده کې د$\bar{n}$نورمال دozمحورسره موازي او$r_n = H$دی . په نتیجه کې :

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_2} H ds = H\pi R^2 = \pi R^2 H$$

په پای کې دσ_3 په ښکتنۍ قاعده کې مرتسم $r_n = 0$او $\Pi_3 = 0$ دی.

که چېرېσ یوه تړلې سطح وي داحالت دتوجه وړدی او دخارجي نورمال په پام کې نیولو سره دσ سطحې د داخلي سیلان څخه بحث کوو او هغه په لاندې ډول ارایه کېږي.

$$\Pi = \oiint_\sigma a_n(M) ds$$

په وکتور اناليزکې انتګرال د تړلې سطحې پرمخ د $\oiint_{\sigma}$اويااکثرا د$\oint_{\sigma}$ سمبول په واسطه ښودل کېږي .
هغه ساحه چې دσ سطحې په واسطه احاطه شوې دΩ په واسطه ښودل کېږي.

کله چې د $\bar{a}$(M) وکتوري ساحه د مايع د سرعت ساحه وي نو د Ω په ناحيه کې دداخل شوې مايع اودنومو ړې ناحيې څخه د خارجه شوې مايع تفاضل دΠ سيلان ورکوي (دايو حقيقت دى ځکه چې د $\oiint_{\sigma} a_n$ds انتګرال دسطحې په خارجي برخو کې نيول کېږي. په دې ډول کله چې د سرعت وکتور$\bar{v}$د σ سطحې په نقطو کې خارجاً موجه وي نو پدې صورت کې $0 < \overline{v n_o}$اوکله چې $\bar{v}$ دسرعت وکتور داخلاً موجه وي نو په دې صورت کې $\bar{v}\bar{n}_o < 0$ دى).
که چېرې $\Pi = 0$ وي نو په دې صورت کې په Ωداخل شوي او خارج شوي مايع مقدارسره مساوي دى .
دا ډول ناحيه کولای شو د بهيدونکي سيند داوبو د سيلان په څير په پام کې ونيول شي .

کله چې دΠ کيمت د صفرخلاف وي ، دمثال په ډول که مثبت وي نوپدې صورت کې د Ωناحيې څخه دخارجې شوي مايع مقدار نسبت داخلې شوې مايع مقدار ته ډيردى او دامانا لري چې دΩپه ناحيه کې يوه منبع وجود لري چې د هغې څخه د مايع سيلان رامنځته کېږي. برعکس که چېرې د Πکميت منفي وي نو د پارچاوې په موجوديت دلالت کوي يعنې هغه ځاى چې دهغې څخه مـايع د سيلان څخــه لير ي کېږي.د Πسيلان صفر کېدل دا مانا لري چې يابه منبع اويا به پارچاوي وجود نه لري او يااصلاً د دې ډول منبع او پارچاوي توزيع داسې صورت موندلى چې دهغوى مجموعي مقدارد صفرسره مساوي دى .

9. داسترو ګراد - ګوس فورمول ، ديورجنت .داستروګراد ــ ګوس فــورمول دسطحې دوګونو اودرې ګونو انتګرالونو ترمنځ رابطه ښيي داسې چې سطحي انتګرال ديو ې تړلې سطحې پرمخ او درې ګوني انتګرال دهغه ناحيې پـرمخ چې د نـو مـوړې سطحې په واسطه احاطــه شــوې، محاسبه کېږي.(.ام. ب . استروګراد (Ostrograd) (1861 – 1801) روسى برجسته رياضي پوه و)
نوموړى فورمول د ريمان - ګرين له فورمول سره شباهت لري اوهغه داچې د ريمان ــ ګرين فورمول دمنحني الخط او دوه ګوني انتګرال ترمنځ رابطه ښيي کوم چې منحني الخط انتګرال د تړلې منحني پرمخ او دوه ګوني انتګرال دهغې ناحيې پرمخ چې دنوموړ ې تړلې منحني په واسطه احاطه شوې، محاسبه کير ي .

فرضوو چې د$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ او یا په لنډ ډول P , Qاو R تابع ګانــې د خپلو قسمي مشتقاتو $P'_x Q'_y , R'_z$سره په فضاًکې د Ωپه تړلې ناحیه کې متمادي دي او هم هر هغه خط چې دمحوراتو سره موازي وي د Ω تړلې ناحیې سرحدونه له دوو نقطو څخه په زیاتو نقطو کې سره نه قطع کوي . په لنډ ډول نوموړې ناحیه د ساده ناحیې په نوم یادیږي. دلته دσ سطحې خارجي جهتونه چې نوموړې ناحیه یې احاطه کړې په پام کې نیسو . همدارنګه فرضوو چې دσسطح همــواره اویا قسماً همواره سطح ده . فرضووچې د G ناحیه دσسطحې(اویاد Ωناحیه)مــرتسم د xoyپــــه مستوي بنيــــي (51شکل)، همدارنګه د $z=z_1$ (x ,y) او $z=z_2$ (x ,y) تابع ګانې د σسطحې ښکتنۍσ_1او پورتنۍσ_2برخــو معادلات ښيي داسې چې $z_1(x,y)$او$z_2(x,y)$ دGپه ناحیه کې متمادي د ي. د $\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$انتــګرال تــه پــه لاندې ډول تغیر ورکوو.

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =_{\mathrm{I}} \iint_G dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$=_{II} \iint_G (R(x, y, z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) dxdy$$

$$=_{III} \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dxdy - \iint_{\sigma_1} R(x,y,z) dxdy$$

د I تغیر مــوندل ددرې ګــونــو انتګرالــونــو دمحاسبې له مخــې،د II تغیرموندل د نیوټن ــ لایبنیز فورمول له مخې اود IIIتغیـــــرموندل له مخې صورت نیولی دی . په نتیجه کې دσ_1او σ_2سطحو پرمخ ، سطحي انتګرالونه لاسته راغلي دي . ددویمې نوع سطحي انتګرالونــو دخواص له مخې د σ_1 سطحې پرمخ د انتګراله تغیر څخه په لاس راځي :

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_\sigma R(x, y, z)dxdy. \tag{14}$$

په داسې حال کې چې د ښي خوا انتګرال دσسطحې په خارجي مخ نیول کیږي. پــــه مشابه ډول لاندې فورمولو نه وجود لري .

$$\iiint_\Omega \frac{\partial p}{\partial x} dxdydz = \iint_\sigma pdydz \tag{15}$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial q}{\partial y} dxdydz = \iint_\sigma Qdxdz \tag{16}$$

د (14)، (15)او (16) رابطو دخوا په خوا جمع کولو په صورت کې لاندې فورمول په لاس راوړو .

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_\sigma pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{17}$$

پورتنی فورمول د کوردیناتو په شکل د استروگراد ـــ گوس فورمول په نوم یادیږي په داسې حال کې چې انتگرال د σ سطحې په خارجی برخه نیول کېږي .

تبصره. که چېرېΩ دفضا یوه تړلې اختیاري ناحیه وي او په معین شمیر ساده ناحیووویشل شي نو په نوموړې ناحیه کې د استروگراد ـــگوس فورمول د تطبیق وړدی .

اوس د استروگراد ـــ گوس فورمول وکتوري شکل بنییو . که چېرې د (17)په فورمول کې دP ، QاوRد(M) $\bar{a}$وکتورمرتسمونه وي نو د2 بند له مخې دهغې بنې خوا دM) $\bar{a}$و کتورسیلان چې د σتړلې سطحې څخه تیریږ ي او د σ په سطحې د خارجي نورمال په جهت واقع دی، ښیي.د

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

افاده د (M) $\bar{a}$وکتوري ساحې دایور جنت په نوم یا دیږی او هغه د (M) $div\bar{a}$سمبول په واسطه ښودل کېږي یعنی$div\bar{a}$ې.$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$=(M) .داستروگراد ـــ گوس فورمول کولای شو داسې ولیکو.

$$\oiint_{\sigma}a_n(M)ds=\iiint_{\Omega}div\bar{a}\,(M)dv \qquad (18)$$

دپورته فورمول څخه لاندې نتیجه څرگندیږي: دیوې تړلې سطحې څخه دوکتوري ساحې سیلان د نوموړې سطحې د خارجي نورمال په جهت دوکتوري ساحې دایورجنت په درې گـــوني انتگرال سره مساوي دی. انتگرال دهغه ناحیې پرمخ نیول کېږي کومه چې د ورکړشو ې سطحې په واسطه احاطه شوې ده.

فرضوو چې دMپه نقطه کې د$\bar{V}$سرعت دایورجنت مثبت دی$\text{div}\bar{V}>0$.د قسمي مشتقاتو دمتمادیت له مخې دایورجنت دω په کافي اندازه کوچنۍ دایروي سطحې په ټولو نقطو کې مثبت دی، کوم چې دσکرې په واسطه احاطه شوي او دکرې مرکزدM په نقطه کې واقع دی. نو$\iiint_{\omega}\text{dir}\,\bar{V}dxdydz>0$دی.
په نتیجه کې د (18) فورمول له مخې$\oiint_{\sigma}v_nds>0$دی .یعنې دωناحیې دσسرحد څخـــه د خارج شوي مایع مقدار تر داخل شوي مایع ډیر دی . په دې حالت کې دMنقطه دمنبع په نوم یادیږي.که چـــېرې د Mپه نقطه کې$\text{div}\bar{V}<0$وي نو په کافي اندازه کوچنۍ کره چې مرکزيې دM په نقطه کې واقع دی دمایع دداخلـــیدو مقدارنظرخارجیدوته زیات دی. بنأ په دې حالت کېM دپرچاوۍ په نوم یادیږي . په همد ې ترتیب د(M) $\bar{a}$ هرې وکتوري ناحیې لپاره .

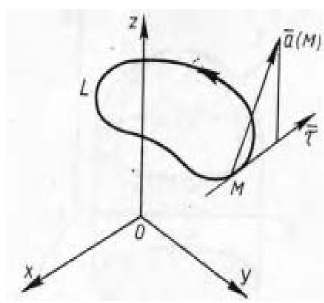
ديوي سطحې څخه دمايع سيلان دټولې منبع او پارچاوي دمجموعي مـــقدار سره مساوي دی يعنې هغه مقدار مايع چې په واحد د وخت کې په نوموړې سطح کې پيداکېږي .داستروګراد ـــ ګوس فـــورمول د دا حقيقت ښکارندوي دی. که چېرې دپارچاوي مقدار نظـــر منـــبع ته زيات وي نـــوپه ناحيـــه کـــې مايع ورکېدونکې ده. که چېرې په خاص حالت کې دايورجنت په ټولونقطوکې د صفرسره مساوي شي نو د هرې تړلې سطحې څخه سيلان دصفر سره مساوي دی.

مثال1. د$\bar{V}=a\bar{\imath}+b\bar{\jmath}+c\bar{k}$دمايع دسرعت ساحې دايـــورجنت محاسبه کړئ کله چـــېb, a او c ثابت وي.دا ساحه يوه متجانيسه ساحه ده. څرګنده ده چې $\mathrm{div}\bar{V}=0$.

په دې ډول په ورکړشوې ساحه کې منبع او پرچاوه موجونه دي. دمايع ټولې برخې د عين سرعت لرو نکې دي. مايع لکه دجامد جسم په شان مخ په وړاندې حرکت کوي. ددې ډول مايـــع سيلان د هـــرې تړلې سطحې څخه د صفرسره مساوي دی.

مثال2. ديوې تړلــــې سطحـــې څخـــه د$\bar{a}=\bar{r}=x\bar{\imath}+y\bar{\jmath}+z\bar{k}$وکتـــور سيلان په لاس راوړئ .څرنګه چې$div\,\bar{r}=3$ دی نـــود(18)فـــورمـــول څخـــه

$$II=3\iiint_{\Omega}dv=3V_{\Omega}$$



لاسته راځي. په دې ترتيب د تړلې سطحې (52شکل)

څخه د$\bar{r}$شعاع وکتو رسيلان دهغې ناحيې د حجم له درې چنده سره مساوي دی کوم چې نوموړې سطح يې محدوده کړې ده.

تبصره . بايد ووايو چې $drv\,\bar{a}=(\bar{V},\bar{a})$. که چېرې$(\bar{V},\bar{a})$ د $\bar{V}=\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ او $\bar{a}=\bar{a}(m)=a_x i+a_y j+a_z\bar{k}$ وکتورونو سکالري ضرب راوښيي اوهم په هغې کې $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ او $\frac{\partial}{\partial z}$ عاملونه لکه دسکالري کميتونو په شان عمل وکړي .

تبصره . په دې برخه کې يو لړ فورمولونه په پام کې نيسو چې دهغې په واسطه د ډېرو مغلقو وکتوري ساحو دايورجنت په اسانۍ سره محاسبه کېږي.

1 . که چېرې c_1 او c_2 اسکالري ثابتونه وي د سکالري ضرب د خواصو له مخې لرو .

$$(\nabla, \bar{c}_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2) = c_1(\nabla, \bar{v}_1) + c_2 \ (\nabla, \bar{v}_2)$$

يعنې

$$\text{div}\,(c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2) = c_1 div\, V_1 + c_2\, div\, c_2$$

2 .که چېرې $\bar{a}$ د ثابتو جهتونو ساحه وي $\bar{a} = u(M)\bar{c}$ په داسې حال کې چې $\bar{c} = c_x\bar{\imath} + c_y\bar{\jmath} + c_z\bar{k}$ يو ثابت وکتور او $u = u(M)$ يوه سکالري ساحه وي نو :

$$(\nabla, \bar{a}) = (\nabla, u\bar{a}) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} = (\bar{c}, \nabla u)$$

يعنې

$$dir(u\bar{c}) = (grad\, u, \bar{c})$$

3 .که چېرې $\bar{c} = \bar{c}(M)$ يو متحول وکتوراو $u = u(M)$ يوه سکالري ناحيه وي نو

$$(\nabla, u\bar{c}) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}\right) = (\bar{c}, \nabla u) + u(\nabla, \bar{c})$$

يعنې

$$dir(u\bar{c}) = (grad\, u, \bar{c}) + u\, div\, \bar{c}$$

10 . د وکتوري ساحې دوران او روټر

د L سرحدي خط پرمخ د $\bar{a}(M)$ وکتوري ساحې دوران مفهوم د L تړلي منحني پرمخ د لاندې منحني الخط انتګرال څخه عبارت دی. انتګرال په نظر کې نيول شوي جهت باندې اخيستل کېږي.

$$\sqcup_L = \oint_L a_\tau dl$$

په داسې حال کې چې a_τ د L منحني د M په نقطه کې د مماس خط پرمخ د $\bar{a}(M)$ وکتوري ساحې مرتسم ښيي ، ضمناً ددې مماس خط پرمخ مثبت جهت هغه جهت په پام کې نيول کېږي کوم چې د سرحد پرمخ جهت سره منطبق دی (52شکل) .

څرګنده ده که چېرې د L سرحد د M په هره نقطه کې د $\bar{a}(M)$ وکتور جهت دمربوط مماس جهت ته نژدې وي په همغه اندازه دوران لوی دی. څرګنده ده چې د L سرحد د جهت په تغيير سره ددوران داشار ې جهت په برعکس اشار ې سره تغييرکوي.

تعريف . لاندې وکتور ته د $a = a(M) = a_x i + a_y j + a_z\bar{k}$ وکتوري ساحې روټيشن ويل کېږي:

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath}+(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})\bar{k}$$

اوهغه د$\bar{a}$ rot په واسطه ښودل کېږي .

په دې ډول

$$\text{rot}\bar{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{\jmath}+(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})\bar{k}$$

$$\text{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \end{vmatrix}$$

لرو: $rot\ \bar{a}=[\nabla,\bar{a}]$

د ګرادنیت او دایورجنت سره په مطلق شباهت کې :

$$rot(c_1\bar{a}_1+c_2\bar{a}_2)=c_1\,rot\bar{a}_1+c_2 rot\bar{a}_2$$

$\bar{a}=u\bar{c}$ **ثابتو جهتونو ساحې لپاره روتیشین لاندې شکل لري.**

$$rot(u\bar{c})=-[\bar{c},grad\ u] \qquad (19)$$

په داسې حال کې چې $\bar{c}=a_x\bar{\imath}+a_y\bar{\jmath}+a_z\bar{k}$ **ثابت وکتور،** $u=u(m)$ **سکالري ساحه ده.**

د (19) فورمول دعمومي فورمول دیو خاص حالت فورمول دی. که چېرې$\bar{c}=\bar{c}(m)$ **یو متحوله وکتور وي نو پدې صورت کې :**

$$[(\nabla,u\bar{c})]=-[\bar{c},\nabla u]+u[\nabla,\bar{c}].$$

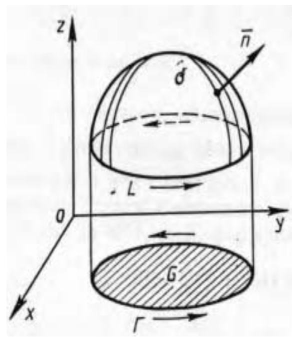
مثال1. که چېرې $\bar{c}$ثابت وکتور وي نو $rot\ \bar{c}=o$ **دی .**

مثال2. که چېرې $\bar{a}=\bar{r}$ **شعاع وکتور وي نو .**

$$rot\ \bar{a}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\bar{\imath}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\bar{k}=0$$

11. دستوکس فورمول .(ژورژ ګبریل ستوکس (G.Stokes) (1819-1903)انګلیسی فزیک اوریاضي پوه) د ریمان ــ ګرین فورمول په شان یوبل فورمول وجود لري داسې چې د σ دسطحې پرمخ دانتګرال محاسبه ،دL سرحد پرمخ د منحني الخط انتګرال په محاسبه تبدیلوي داسې چې د Lسرحد د σسطح یې احاطه کړي (53شکل) .

فرضوو چې د σ سطحه د ozمحـــور سره دموازي خطونو په واسطه يـــوازې په يوه نقطه کې قطع کېږي. فرضوو چې(z=z(x ,y د σسطحې مـــعادله ده په داســـې حـــال کـــې چـــې $z(x\,,y)$، او$z'_x(x\,,y)$ $z'_Y(x\,,y)$تابع گانــــې دG په تړلې ساحه کې متمادي دي اوهم Gد σسطحې مرتسم د xoyپه مستوي کې



(53شکل)

ښيي .Lد سرحد دσسطحه يې احاطه کړې او مرتسم يې دxoyپه مستوي کې د Γتړلې منحنې ده چېGدساحې سرحد جوړوي. دمو جه گرځولو په منظوردσسطحې پورتنۍ مخ په نظر کې نيسو (53 شکل) .فرضوو چـــې د p(x, y, z) , Q(x ,y, z) اوR(x , y, z)تابع گانې او يا په لنډ ډول R , Q ,Pدخپل لومـــړۍ ترتيب قسمــــــي مشتقاتو سره دσ په سطحه کې متمادي دي.

لاندې انتگرال په نظر کې نيسو

$$\oint_L p(x\,,y,z)dx$$

په داسې حال کې چې دL سرحد پرمخ دټاکل شوې سطحې د جهت سره مطابقت کوي(53 شکل دې وکتل شي).کله چې دσسطحې لاندينی مخ په نظر کې ونيول شي نو بايد د Lسرحد جهت له دې ډول ټاکلو سره مطابقت وکړي.

څرنگه چې دL سرحد د σ پرسطح واقع دی نودL سرحد مختصات د z= z(x, y) معادله صدق کوي. بنأ دPتابع قيمتونه دLسرحد په ټولو نقطوکې دΓتړلې منحنې دنقطو مطابق د p(x , y , z(x,y)) تابـــع د قيمتونو سره مساوي دي. همدارنگه دLاو Γ د مربوطه ويشل شوو برخو مرتسمونه د oxمحور پرمخ يو پربل مطابقت کوي. په دې مانا چې دL او Γسرحدونو لپاره دPتابع دمنحنې الخـــطو انتگرالـــــونو مجموعې يو پربل مطابقت کوي ، پدې مانا چې لاندې انتگرالونه سره مساوي دي.

$$\oint_L p(x\,,y,z)dx = \oint_L p(x\,,y,z(x,y))dx$$

د له مخې د ریمان ــــ ګرین فورمول په تطبیق کولو سره منحني الخط انتګرال دG په ساحه کې په دوه ګوني انتګرال بدلیږي. پلاس راوړو.

$$\oint_{\Gamma} p(x\,,y,z(\,x,y\,))dx = -\iint_G\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}z'_y\right)dxdy$$

څرنګه چې دσسطحې خارجې مخ په نظر کې نیول شوی دنوموړې سطحې پرمخ د$\vec{n}$نورمال جهت ورکونکې کوساینونه له مخې د لاندې فورمولونو په واسطه ارایه کېږي.

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1-z'^2_x+z'^2_y}},\ \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},\ \cos\gamma\frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

له دې څخه $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -z'_y$ بناً

$$-\iint_G\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}z'_y\right)dxdy = -\iint_G\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy$$

اوس د(14)او(15)فورمولونو له مخې کولای شودادوه ګونی انتګرال په سطحي انتګرال تبدیل کړو. په لاس راځي

$$-\iint_G\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = -\iint_\sigma\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial p}{\partial z}\cos\beta\right)ds.$$

په دې ترتیب

$$\oint_L pdx = \iint_\sigma\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cos\beta-\frac{\partial p}{\partial z}\cos\gamma\right)ds. \qquad (20)$$

کولای شو ثابت کړو چې (20)فورمول د ډیرو مغلقو سطحو لپاره هم صدق کوي.

په مشابه ډول دمربوطه شرطونو له مخې لاندې رابطې په اثبات رسیږي .

$$\oint_L Qdy = \iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds. \qquad (21)$$

$$\oint_L Rdz = \iint_\sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \qquad (22)$$

د(20), (21) او (22)فورمولونو دجمع کولو په صورت کې لرو:

$$\oint_L pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma +$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)cos\alpha+\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)cos\beta)ds. \qquad (23)$$

پورته فورمول د ستوکس د فورمول په نوم یادیږي.

د (23) فـورمـول ښي خـوا انتـګرال له مخـې د $\oint_L a_\tau dl$ سـره مسـاوي دی،+ $\bar{a}=p\bar{\imath}+Q\bar{\jmath}+$ $R\bar{k}$ د L سرحد پرمخ د دوران وکتوردی. ددښی خوا انتګرال د $rot\ \bar{a}$ وکتور سیلان ښیي چې د σ سطحې څخه تیریږي اود L سرحد په واسطه محدود شوی دی.

په نتیجه کې دستوکس فورمول په وکتوري شکل دا ډول لیکل کیږي .

$$\oint_L a_\tau dl=\iint_\sigma rot_n\bar{a}ds \qquad (24)$$

په داسې حال کې چې $rot\ \bar{a} \ = proj_n rot\ \bar{a}$ دی.

پدې ډول دLتړلې سرحد پرمخ د$\bar{a}$وکتوردوران د $\bar{a}$ وکتور طـوفان له سیلان سره چې د $\bar{a}$ وکتـور په ساحه کې واقع او دL سرحد په واسط احاطه شوي ، مساوي دی.

دستو کس د (15) فورمـول له مخـې چـې دسطحـې

انتګرال ارتباط ر ابښيې ، کولای شو داسې ولیکو:

$$\oint_L p\mathrm{d}x+Qdy+Rdz=\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dzdx+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx \qquad (25)$$

د (25) فورمول څخه دا څرګندیږي چې دنو موړي فورمول د ښي خوا لومړی برخه هغه افاده ښيي کوم چې د ریمان ــ ګرین په فورمول کې د دوه ګوني انتګرال تر علامې لاندې واقع ده. په همـــدې ترتیب دویم او دریم جز Q ,P او R توابع د z ,y ,x دمختصاتو دورانی تبدیل په مرسته لاسته راځي .

په خاص حالت کې کله چېσ دxoyمستوي یوه سطح وي چې د Lسرحد په واسطه احاطه شوې نو انتګرال نظر dydz او dzdx ته دصفر سره مساوي دی او د ستوکس فورمول د ریمان ــ ګرین په فـورمـــول بدلیږي.

تبصره. دستوکس د قضیې څخه واضح معلومیږي چې دیو ثابت وکتور دوران دیو تړلې منحنې پرمخ دصفر سره مساوي دی ځکه چې$rot\bar{c}=0$ او (24)فورمول له مخې.

$$\oint_L a_\tau dl=0$$

مثال . د ستوکس فورمول په واسطه د$\oint_L x^2y^3dx + ydy + zdz$انتګرال محاسبه کړئ کله چېLیوه دايره ده چې د$x^2+y^2 = 1$، z=0 معادلې په واسطه ورکړشوې اوهم د σ سطح د= $x^2+y^2+z^2$،$(z > 0)$ 1کروي سطحې پورتنۍ برخه ده .همدارنګه دLمنحني پرمخ مثبت جهت په نظر کې نيول شوی دی.

څرنګه چې

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2\,y^2\,, \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\,, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

نو د ستوکس (25)فورمول له مخې لرو:

$$\oint_L x^2y^3dx + ydy + zdz = -3\iint_\sigma x^2y^2dxdy = \frac{-\pi}{8}$$

§ 2.5 په فزيک کې درياضي مسألې او معادلې.

1. د دويم ترتيب قسمي تفاضلي معادلو اساسي مفهومونه.

په قسمي مشتقاتوکې تفاضلي معادله هغه معادلې ته وايي چې په هغې کې نامعلومه تابع او د څو نا معلومو آزادو متحولينو ، دهغوي د مربوطه متحولينو او د نا معلومو توابعو قسمي مشتقاتو ترمنځ يوه رابطه بنيي.

په يوې قسمي تفا ضلي معادله کې د موجوده قسمي مشتقا تو ترتيب؛ دتفا ضلی معادلې ترتيب ارايه کوي.

که چيرې u=u(x,y) وي نو په دويم ترتيب قسمي مشتقاتو تفاضلي معادله د لاندې عمومي شکل لرونکې ده.

$$F(x, y, u,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{a x^2}; \frac{\partial^2 u}{a y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = 0 \qquad (1)$$

دلته F يوه معلومه تابع ده.

د قسمي مشتقاتوسره تفاضلي معادله د خطي تفاضلي معادلې په نوم يا ديرې کله چې نوموړې معادله نظر نا معلومې تا بع او د هغې ټولو قسمي مشتقاتو ته خطي وي.

د فزيکي مسايلو په حلولــو کې په دويم ترتيب قسمــي مشتقاتــو کې خطــي تفاضلي معادله ډيره استعما ليږي.

په هغه حالت کې چې په هغې کې د وه نا معلوم مجهو لونه په پام کې وي ،دمهمو خا صو تفا ضلي معادلو شخه یا دونه کوو .

1. دموج معادله.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

دا معادله د اهتزازاتود پروسوپه مطالعه کولو کې منځ ته راځي (د ار تجاعي مزي د اهتزازي حرکت او په تیوب کې د گازاتو اهتزاز او داسې نور).

2. د حرارت دانتقال معادله(د فوریې (J..B.J..Fourier)معا دله).

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3)$$

3 . دلاپلاس (Laplas.P.S)معا دله.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (4)$$

د برقي او مقنا طیسي ساحو او دسکون په حا لت کې د حرارت مسآلې دهایدرو دینا میک د نفوذ او

داسې نورې مسآلې د نوموړې معادلې په واسطه تر څیړنې لاندې نیول کېږي [14] دي وکتل شي.

د مختلفو شرایطو په وضع کولو سره خاص مسایل طرح کېږي چې دنوموړو مسایلو حل د فزیک او

ریاضي مسایلو دحل په نوم یادیږي.

د(1)معادلې حــل د U=(x, y)ټــولې هغه توابــع دي چې (1) معــادله عینیت ته راوړي . ښــرگنده ده چې د معمولې تفاضلي معادلې عمومي حل د ثوا بتوسره او د قسمي مشتقاتو سره تفاضلي معادلې حل اختیاري توابع په ځان کې لري .

2. د اهتزاز کونکې مزي دمعادلې استخراج.

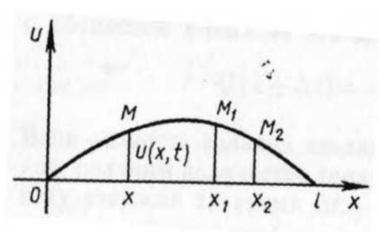
په ریا ضي ؛فزیک کې دمزي مفهوم دانحنا او ارتجاعیت وړ تار (دثابت خطي کثافت سره) څخه هدف دی.

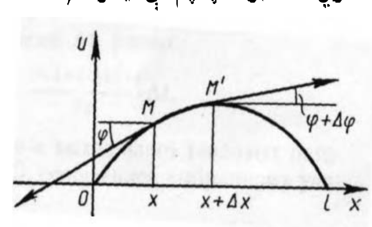
فرضوو د مزي اوږدوالی د پیل په لحظه کې ℓ د ox محور په جهت له o . څخه تر ℓ پورې وي . فرضوو د مزیپای او پیل په x=0 او x= ℓ کې تړل شوی دی. که چیرې مزي ته د لومړي حالت څخه مرحله کې د مزي طول انحنا ورکړو او وروسته خپل حالت ته راشي نو د مزي نقطې حرکت اجرا کوي وایي چې مزي اهتزاز تر سره کړی دی.

دمزي دنقطو کوچنۍ انحنا د لومړي حالت په پرتله په پام کې نیسو.په دې صورت کې کولای شو ووایو چې د مز ي د نقطو حرکتونه په عمودي شکل د ox پر محوردیوې مستوي پر مخ صورت نیسی. په دې حالت کې دمزي د اهتزاز پروسه د U(x,t) یوا زې یوه تا بع معرفي کوي چې د t په لحظه کې دx د نقطې تغیر ښیي(54شکل).

څرنګه چې مونږ د مزي د نقطو کوچنی تغیر د xou په مستوي کې په نظرکې نیولی دی. نو مونږفرضوو چې دمزي M_1M_2 برخې طول $\ell_{UM1,M2}$ د ox محور پر مخ دهغې دمرتسم سره مساوي دی یعنې د M_1M_2 قوس طول د$x_2 - x_1$ سره مساوي دی.

همدارنګه کولاشو ووایوچې د مزي په ټولو نقطو کې کش کول په یوه اندازه دي اوهغه دTپه واسطه ښیو. د مزيMḾ برخه په پام کې نیسو (55 شکل) .





(54 شکل) (55شکل)

دنوموړې برخې په انجامي نقطو کې دمماس په شکل د Tقوه عمل کوي.فرضووچې مماس د ox محور سره دφ او $\varphi + \Delta\varphi$ زاویې جوړوي نو د ox په محور باندې د هغه قوې مرتسم چې پر $\acute{M}M$ برخه باندې عمل کوي د $T\,sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\,sin\,\varphi$ سره مساوي دی .څرنگه چېφ زاویه کوچنی ده نو

$$T\,sin(\boldsymbol{\varphi}+\Delta\boldsymbol{\varphi}) - T\,sin\,\varphi \approx T\,tan(\boldsymbol{\varphi}+\Delta\boldsymbol{\varphi}) - T\,tan\,\boldsymbol{\varphi} =$$
$$= T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x)$$

$0<\theta<1$,(په دې برخه کې مونږ دلاگرانژفورمول تفاضل چې د قـوس په دا خل کې وا قع دی،پکار وړی دی).

ددې لپاره چې د حرکت معا دله پیداکړو باید هغه خارجي قوه چې په $M\acute{M}$ عنصـر عمـــل کوي دانر شیا یا عطالت قوې سره مساوي ده. فرضووچې ρ دمزي خطي کثافت وي. نـو دنـــوموړي عنصرکتله د $\rho\Delta x$ او تعجیل $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$سره مساوي دي. په نتیجه کې نیوټن ددویم قانون له مخې

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

د Δx په اختصارولو او $\frac{T}{\rho} = a^2$ په تعویض کولو،$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ لاسته راځي .نوموړې معادله دمزي دازاد اهتزاز معادلې په نوم یادیږي او یا په بل عبارت دموج متجانیسه معادله دیوبعدی متجانیسې معادلې په نوم هم یادوي.

3. د حرارتی هدایت دمعادلې استخراج .

فرضوو یو متجانیسه میله چې خارجي سطحه یې د حرارتی عایق په واسطه پوښل شوي (د باندېني. محیط سره د حرارت تبادله نه لري) او په منظم ډول سره نه گرمیږي،د ox محور په امـتداد پــــروت دی.پدې ډول دمیلې دهغې برخې څخه چې ډیره گرمه شوې وهغې برخې ته چـې لږه گــرمــه شویې د حرارت تبادله صورت نیسي. دمثال په توگه که چیرې دوخت په لومړۍ مرحله کې دمــیلې دهغې نقطې حرارت چې قیمت یې x دی کم شي نو د ox محور په مثبت جهت کې د وخت په تیریدو سره د حرارت سیلان تغیرکوي. د$u(x,t)$ په واسطه دx په نقطه کې پهt وخت د میلې د حرارت درجــه ښیو.له دې ځایه ($u'_t(x,t)$ قسمي مشتق دt په وخت کې د حرارت زیاتوالی دمیلې په مشخصه نقطــه کې ښیي .همــدارنگه ($u'_x(x,t)$ په میله کې دحرارت دتغیر سرعت د x په مربوطه نقطه کې ښیي.نوموړې قیمت د حـــرارت ټیټیدل ارایه کـــوي. که چیرې $u'_x(x,t)<0$ وي. دمیلـې دښي خـــوا ډیرې نقطې دډیر

تیټ حـــرارت لرونکې دي. د فزیک د قوانینو له مخې دحرارت سیلان چې دمیلې دمقطـــع څخـــه تیریږي دوخت په انتروال او دمیلې دs مساحت سره متناسب دی کوم چې په هغه کې حرارت راتیټیږي. یا په بل عبارت د Δt په کوچنې وخت کې(هغه وخت چې په هغې کې د حرارت قانون محفوظ دی) دمیلې د مـــقطع څخـــه چې دx فاصلې لرې دحرارت سیلان عبارت دی له:

$$\theta(x) = -ks\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta t \qquad (5)$$

د منفي علامه دا مـــانا لري چې دox محـــور په مثبت جهت کې دحـــرارت د حـــرکت په صورت کې د $u'_x(x,t)$مشتق لکه چې مخکې ذکر شوي ، منفي دی او دحرارت مقدار Q چې دمیلې دمقطع څخه په مثبت جهت تیریږي،مثبت دی . دk عدد دمیلې دحرارتي ضریب څخه عبارت دی . دk مقدار دهغه موادو پورې تړلی دی کوم چې د هغې څخه میله جوړه شوې د ه.

د حرارت مقدار او درجې تغیر دمیلې په هغه برخه کې چې د x او$x+\Delta x$ مقاطعـــوپه منځ کې تغیر کوي تر مطالعې لاند ې نیسو . هغـــه مقدار حرارت چې دx له مقطـــع څخه دΔt په وخت کې د اخلیږي دمیلې د (5) فورمول په واسطه سره محاسبه کیږي. د همدې فورمـــول له مخـــې د حرارت مقداردمیلې $x+\Delta x$ په مقطع کې د Δt په وخت کې خا رجیږي مساوي دی په:

$$Q(x+\Delta x) = -ks\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\Delta t$$

د حرارتي سیلان دداخلیدو او خا رجیدلو د تفاضل څخه دΔQ حرارتي مقدار دمیلې په ټا کل شوې برخه کې دΔt په وخت لاسته راځي.

$$\Delta Q = ks(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x})\Delta t$$

له دې څخه دلاګرانژ د فورمول له مخې(6.8پا راګراف، 3 بند په کتنه) لیکلای شو:

$$\Delta Q = \boldsymbol{ks}\ \ \frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}\ \ \Delta t\ \ \Delta x \qquad (6)$$

په داسې حال کې چې $0 < \theta < 1$ دی.

دمیلې جلا شوې برخه (هغه برخه چې د x او $x + \Delta x$ تر منځ واقع ده)کولای شو هغومره کوچنی په پام کې ونیسو ، داسې چې دهغې په هره نقطه کې د حرارت درجه یو شان قبول کړای شو.

نو د بلې خوا د میلې د جلا شوې برخې د حرارت مقدار دΔt په وخت کې مساوي دی په.

$$\Delta Q = c\,\rho\,s\ \frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t}\Delta x\,\Delta t \qquad (7)$$

په داسې حال کې چې $1 > \theta_2 > 0$دی.

د (6) او (7) فورمولونو څخه په لاس راوړو.

$$c\rho(\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}$$

دلته که دا لمیټ ونیسو او $\Delta x \to 0$ او $\Delta t \to 0$ وکړي په لاس راوړو.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial u}{\partial x^2} \qquad (8)$$

دلته $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ وضع شوی دی.

(8) معادله د میلې د حرارت د انتقال معا دلې په نوم یا دیږي.

4 . په فزیک کې د ریاضي د مسالو تصنیف .

لکه چې څنګه چې په قسمي مشتقاتو تفاضــلي مــعادله دبــې نها یت حلـــــونو لرونکــې ده.بنا پردې په دې حالت کې فزیکې مسآله په قسمي مشتقاتوسره یوه تفاضلي معادلې نه را ښیـــي نو د مشخصې پروسې دیو قیمته حل لپاره باید دمعادلې سره یو لړاضافي شرطونه علا وه کړو .

د هغو مسایلو لپاره چې د (2) او (3) په معادلو بدلیږي،اضافي شرطونه په اولیه او سرحدي شرایطو ویشل کیږي .

په یوه مسآله کې اولیه شرطونه دوخت په یـــومشخص قیمت ورکـــول کیږي داسې چې د نـــو موړو شرطونو په پام کې نیولوسره دفزیکې مسلې مطالعه کول ترسره کیږي. اکثراًداوخت د t=0 لپاره په نظر کې نیسي.د(2)معادلې په حالت کې د مطلوبې تابع او دهغې دمشتق لپاره او د (3) معادلې په حالت کې یو ازې دمطلوبې تابع لپاره اولیه شرط په پام کې نیول کیږي.

ددې ډول مسایلو لپاره سرحدي شرطونه دا ښیی چې د u(x,t) نامعلومه تا بع د انتروال په انجا مې نقطو کې د x په تغیریدو سره کوم ډول قیمتونه اخلي .

که چیري د x مختصات په یوه بې نهایت انتروال کې تغیر وکړي او پر وسه په نوموړي انتروال کې تر سره شي نو په دې صورت کې سرحدي شرطونه خپل اهمیت له لاسه ورکوي او مسآله یوازې اولیه شرطونو پـــوري تړلـــې ده .اکثرا دامسآله د کوشي مسآلې په نوم یادوي.

که چېرې مسأله په يو محد ود قطعه خط باندې مطرح شوې وي نو بايد سرحدي او اوليه شرطونه ورکړشوي وي . نو په دې صورت کې د يوې مختلطې مسألې په هکله بحث صورت نيسي . د مثال په توگه په افقي ډول د هغه مزي اهتزازپه پام کې نيسو کــوم چې انجامــي نقطې يـــې تړلې شوی دي .په دې مسأله کې$u(x,t)$ دمزي انحراف د ox محور څخه ښيي . کــه چېرې دمــزي انجامــي نقطې د$0 \le x \le l$ په انتروال کې تړل شوې وي نو بايد لاندې سرحدي شرط صدق وکړي.

$$u\mid_{x=0} = 0،\ u\mid_{x=l} = 0 \qquad (9)$$

اويا په لنډ ډول :

$$u(0,t)=0 \quad ,u(l,t)=0$$

(9))سرحدي شرط چې ښې خوايي صفر وي د متجانيس سرحدي شرط په نوم يا دېږي.

اما د اهتزاز لپاره پورتني ورکړل شوي سرحدي شرطو نه په يو قيمته ډ ول نه ټا کل کېږي، هغه د مزي لومړني شکل او په هره نقطه کې د مــزي په سر عت پورې هــم تړلی دی. په دې ډ ول د سرحدي شر طونو څخه پرته بايد لاند ی اوليه شرطونه موجود وي

$$U(x,0) = F(x) \text{ او } \quad u'_t\,(x,0) = F(x)$$

په دې ځای کې $f(x)$ او $F(x)$ مخکې ورکړل شوي معلومې توابع دي . ددې توابعو له جملې څخه لومړنی تابع په گرافيکي ډول دمزي شکل د وخت په لومړنۍ مرحله کې ښيي ،دويمه تابع د وخت په لومړنۍ مرحله کې دمزي د هرې نقطې سرعت ښيي .

د فزيک څخه په څرگند ډول پوهيږوچې دمزي د هرې نقطې دلومړني موقعيت اولومړني سرعت په نظر کې نيولوسره او همدارنگه دمزي د خوښې کېدلو په صورت کې دمزي د نقطو د حرکت مکمل تعريف وکړو او په نتيجه کې ورکړل شوي سرحدي او اوليه شرطونه په يو قيمته ډول سره دمزي داهتزاز قانون را منځ ته کوي.داقانون وروسته په لا س راځي) .

ليدل کېږي چې په نومورې معادله کې د t وخت شامل نه دی او دواړه مستقل متحولونه د نقطو مختصات ښيي . د هغو مسايلو لپاره چې په(4) معادله بدليږي ،يوازې سرحدي

شرط په پام کې نيول کېږي.يعنې د نامعلومې تا بع تحــول يوازې د نا حيې په سرحدي منحـــني کـــې تر مطالعې لاندې نيول کېږي.

سربیره پردې باید ووایو چې هره ورکړشوې معادله د حقیقی خاصیت لرونکې ده یعنې هره یوه دیوې مشخصې فزیکې پروسې لپاره یو حقیقی شکل منعکسو ي.هغه معلومات چې په معادله کې ورکول کېږي دهغه اضافي شرطونو په شان د ي، کوم چې په فزیکې مسآلـو کې ورکـول کېږي. نو مـوړي شرطونه د فزیکي تجربو او معلوماتونو په واسطه په تقریبي ډول تا کل کېږي.په د ې ډول باید ووایو هغه حل چې په تقریبي ډول د مسآلو دورکړل شوو شرطونو له مخې لاسته راځي ،هغه حل ته چې په دقیقه توگه د ورکړل شوو شرطونو له مخې لاس ته راځي نژدې دي.په دې ترتیب دا د اهمیت وړده چې د مسآلو په لږو تغیراتو سره دهغې په حل کې هم لږ تغیر راشي یعنې وایي چې دمعادلې حل دورکړل شوو اولیه شرطونو په پام کې نیولو سره تغیر کوي.

وایي چې په فزیک د ریاضي مسآله په دقیقه توگه طرح شوې ، کله چې دمسآلې حل موجود ، یو ازینی ،تغیر منونکې او ټول ورکړل شوي شرطونه صدق کړي.

ټولې هغه مسآلې چې مونږ ته مطالعې لاندې نیسو ،دهغو مسایلو په شان دي چې یوازې یو حل ولري او نظر ورکړل شوو اولیه شرایطو سره تغیر منونکې وي یعنې مسآلې په دقیقه توگه طرح شوې وي.

5. دکوشي مسآله – ددلامبرت طریقه .دیو بې نهایت مزي اهتزاز تر مطالعې لاندې نیسو. کله چې ډیر اوږد وي نواهتزاز د منحني په هغې برخې ډیروي او په انجامونو کې یې اثر کم وي. بنا پردې مونږ ازاد اهتزاز په پام کې نیسو داسې چې دمزي انجامونه محدود نه وي مونږ باید لاندې معادله :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}= a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (10)$$

$$u\,(x,0) = f(x) \qquad (11)$$

$$u'_t(x,0)=F(x) \qquad (12)$$

که د اولیه شرطونو په پام کې نیولو سره یې حل کړو. ضمناً فرضوو چې مزي نا محدود اوهم د(f(x او F(x) توابع د اعدادو په ټول محور کې ورکړ شوي دي .

لکه چې په 4 بند کې ولیدل شو دا ډول مسأله د کوشي دمسألې په نوم او یا هغه مسأله چې په هغه کې اولیه شرط ورکړ شوی وي ،یادیږي. هغه میتود چې دهغې په واسطه نو موړې مسأله مطالعه کوو،د دلامبرت طریقې او یا دخوځیدونکې څپې د طریقې په نو م یاد یږي.

تر ټولو دمخه بنیو چې که p او q مستقل متحولین او د $\varphi(p)$ او (q) ψ تــوابع دوه ځــلي د مشتق نیو لو قابلیت ولري نو د

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at) \quad (13)$$

تابع د(10) معادلې حل دی .

حقیقتاً ،د پر له پسې مشتق نیولو څخه په لاس راوړو.

$$u'_x=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at),u''_{x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)$$

$$u'_t=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at)$$

$$u''_{t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at)$$

په نتیجه کې $u''_{t^2}=a^2u''_{x^2}$.

د (13) حل په دوه مستقلو توابعو پورې اړه لري او ددلامبرت د حل په نو م یا دیږي. د نوموړو توابعو د د ټاکلو لپاره د (11) او (12) اولیه شرطونو څخه کار اخلو ،که په (13) او(14) فورمولو نو کې t=0 وضع کړو په لا س راوړو.

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x) \quad (15)$$

$$-a\varphi'(x)+a\psi'(x)=F(x)$$

د [0,x] په قطعه خط د وروستی معادلې دا نتګرال نیولو څخه لاسته راوړو:

$$-a(\varphi(x)-\varphi(0))+a(\psi(x)-\psi(a))=\int_0^x F(y)dy$$

ا و یا کولای شو په لاندې ډول ولیکو .

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x F(y)dy+c \quad (16)$$

په داسې حال کې چې $C=-\varphi(0)+\psi(0)$ د ه. د(15) او(16) معادلو څخه د $\varphi(x)$او $\psi(x)$ مطلوبې توا بع لاسته راوړو.

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy-\frac{c}{2} \quad (17)$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy+\frac{c}{2} \qquad (18)$$

که په (17) او (18) فورمولونو کې x د x-at او x+at په وضع کولو او هم د(13) په فورمول کې د وضع کولو څخه د کوشي مسألې حل په لاس راوړو:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy \qquad (19)$$

د (19) فورمول د دلامبرت فورمول په نوم یادیږي.کله چې مزي بې نهایت وي سرحدي شرط له منځه ځي او دکوشي مسأله د

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادلې په حل بدلیږي کله چې $-\alpha < x < +\alpha$ ، $t>0$ او د

$$u(x,0)=f(x)$$

شرط صدق کړي.

د 14 بند له مخې نوموړی حل د لاندې شکل لرونکی دی.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{\frac{-(x-5)^2}{4a^2t}}ds$$

وروستی فورمول په 1823کال کې سیمن پوایزون (1781-1840) چې یو فرانسوي فزیک پوه او دریاضي پوه وولاسته راوړو.

6 .د فوریې په طریقه دمختلفو مسألو حل .دمزي د ازاد اهتزاز مسأله چې په 4 بند کې ذکر شوې ، په هغه صورت کې چې دواړه انجامـونه یـې تړل شوي مطالعه کــوو.لکه چې مخکې ولیدل شوه نوموړې مسأله د لاند ې مسألې په حل بدلیږي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (20)$$

کله چې سرحد ي شرط:

$$u(0,t)=0 \quad ,u(l,t)=0 \qquad (21)$$

او اولیه شرط یې د

$$u(x,0)=F(x) ، u'_t(x,0)=F(x) \qquad (22)$$

وي.

د (20) معادلې حل د فوريه په طريقه چې د متحولينو د جلا کېد و طــريقه ده، لاســته راوړو . ددې طريقې مطلب په دې کې دی چې مونږ د (20) معادلې حل ددووتوابعو د حاصل ضرب په شکل لټوو داسې چې هره تابع يوازې ديو متحول پورې تړلې او د(21) سرحدي شرط په لومړې مرحله کې صدق وکړي.

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (23)$$

په دې ځای کې مونږ غير اشکارحلونه لاسته راوړويعنې هغه حلونه چې مطابقتا د صفرسره مساوي نه وي.که (23) تابع په (20) معا دله کې وضع کړو لرو چې .

$$T''(t)\ X(x) = a^2 X''(x) T(t)$$

او يا

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

په نتيجه کې مونږ هغه مساوات لاسته راوړو کوم چې کينه خوا يې x پورې او ښې خوا يې t پورې اړه نه لري.په نتيجه کې دواړه خوا د x او t پورې تړلې نه دي يعنې ثابتې دي .نو موږ ی ثابت د$-\lambda^2$ په واسطه ښييو(ځرنګه چې د$\frac{u''_{t^2}}{u} = \frac{T''}{T}$ نسبت د انحراف تعجيل ښيي نو منفي دی ځکه چې په دې ځای کې د تعجيل و کتور په مثبت جهت کې موجه وي).

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

له د ې ځخه

$$T''(t) + +\lambda^2 a^2 T(t) = 0$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

ددې معادلو ځخه په لاس راوړوچې .

$$T(t) = A\cos\lambda at + B\sin\lambda at$$

$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

په د ې ډول

$$X(x,t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)$$

په د ې ځای کې د x = o په وضع کو لو سره پلاس راوړو:

$u\ (0,t)=(A cos\ at + Bsin\lambda at)C \equiv 0$

دا مانا لري چېc=0 .سر بيره پر دې ،څرنګه چې

$u\ (l,t)=(A cos\ \lambda at + Bsin\lambda at)D\ sin\lambda\ l \equiv 0$

نو λباید داسې وټاکو چې

$sin\lambda = 0$ ، $\lambda l = k\pi$ ، $\lambda = \frac{k\pi}{l}$

دλ قیمتونه دورکړل شوې سرحدي مسألې داختصاصي قیمتونوپه نوم یادیږي همدارنګه دهغې مطابق د

$$X\ (x) = Dsinx\frac{k\pi}{l}x$$

مربوطه توابع داختصاصي توابعو په نو م یادیږي.

په د ي ډول د (1) معادلې قسمي حل چې سرحد ي شرط صدق کړي عبارت د ی له :

$u_k\ (x,t)=(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k sin\frac{k\pi a}{l}\ t) + sin\frac{k\pi}{l}x$

دلته a_k=A D او b_k=B D اختیاري عددونه دي.

باید ووایو چې (20) معادله خطي ا و متجانیسه معادله ده نو دهغه دحلونو جمعي حاصل هم د معادلې حل دی. په د ي ډول د

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\ (x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\frac{k\pi\ at}{l} + b_k sin\frac{k\pi at}{l}\right) sin\frac{k\pi}{l}x$$

تابع د (20) معادلې حل د ی. څرګنده ده چې نوموړې تا بع د (21) سرحدي شرط صدق کوي د اځکه چې د u_k(x,t) هره تابع نوموړی سرحدي شرط صد ق کو ي.

اوس د a_k او b_k عددونه داسې ټاکو تر څو د (20)معادلې د(22)اولیه شرط صدق کړي او :

$u(x,0)=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} sin\frac{k\pi}{l}x$

پورته افاده په ساینونو باندې د f(x)تابع تجزیه دفوریه په سلسله ښیي .په نتیجه کې

$$a_{k=\frac{2}{l}} \int_0^{\ell} f(x) sin\frac{k\pi x}{l}\ dx \text{ ،} k=1,2,\ldots \qquad (24)$$

سربیره پر دې څرنګه چې:

$u'_t(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k\ sin\frac{k\pi}{l} x$

دي نو

$$\frac{k\pi}{l}b_k = \frac{2}{l}\int_0^{\ell} f(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

له دې ځخه

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\mathbf{1}} f(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (25)$$

په د ي ډول لاسته راغلی حل دمزي د اهتزاز معادله ده چې ورکړل شوي اوليه شرط اوسرحدي شرط صدق کوي.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k sin\frac{k\pi a}{l}t\right)sin\frac{k\pi}{l}x$$

دلته a_kاو b_kد(24)او (25) مساوانو په واسطه ټاکل کيږي.

ددايرې لپاره ددريچليت مسأله .

فر ضوو چې د xoy په مستوي يوه دايره چې شعاع يې R اومرکزيې دمختصاتوپه مبدا کې واقع دی ورکړل شوې ده. دنوموړې دايرې په مخ د(φ) fتابع ورکړل شوې ده ، په د ي ځای کېφ قطبي زاويه ده . د $u(r,\varphi)$ تابع پيداکړئ داسې چې ددايرې دمحيط ځخه پرته ددايرې په ټولو نقطوکې متمادي او دداخلي نقطو لپاره دلاپلاس معادله صدق کړي.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (26)$$

دارنگه که ددايرې په سرحد کې لاندې شرط صد ق وکړي.

$$u\Big|_{r=R} = f(\varphi) \qquad (27)$$

(26)معادله داسې ليکلای شو .

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (28)$$

د معادلې حل دمتحولينو ،جلا کېد وپه طريقه لټوو. ددې موخې لپاره:

$$u = \Phi(\varphi)\ R(r) \qquad (29)$$

وضع کوو. که دا افاده په (28) معادله کې وضع کړو په لاس راوړو.

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0$$

اویا

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi''(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r)+r R'(r)}{R(r)} \quad (30)$$

څرنګه چې د (30)معادلې کینه خوا د r پورې اوښي خوا د φ پورې اړه نه لري نو د واړه خواوې د یو ثابت سره مساوي دي .که داثابت په $-k^2$وښودل شي نو دوه معادلې لاسته راوړو. وروسته د ا توضیح کېږي چې ولې نوموړی ثابت k^2+نه نیول کېږي.

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = o \quad (31)$$

$$r^2 R''(r) - r R'(r) - k^2 R(r)=0 \quad (32)$$

د (31) معادلې عمومي حل عبارت دي له :

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi \quad (33)$$

د (32)معادلې حل د $R(r) = r^m$ په شکل کې لټوو.که د $R(r) = r^m$ قیمت په (32) معادلې کې وضع کړو په لاس راوړو

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m=0$$

اویا

$$m^2 - k^2=0$$

په د ي توګه د (32)معادلې د r^k او r^{-k} دوه خطأ مستقل حلونه لري.په نتیجه کې د (32) عمومي حل عبارت د ی له:

$$R(r) = C\, r^k - D\, r^{-k} \quad (34)$$

(33) او (34)افادې په (29)کې وضع کوو:

$$u_{k-(A\,k\,\cos k\varphi + B\,\sin k\varphi)(c_k r^k + D_k r^{-k})} \quad (35)$$

د k دهر اختیاري قیمت لپاره (35)تابع د (28)معادلې لپاره یو غیر صفري حل دی .که چېرې k=0 وي نو د (31)او (32)معادلې لاندې شکل غوره کوي :

$$\Phi''(\varphi) = 0 \qquad r R''(r) + R(r)=0$$

ددې معادلو عمومي حل په ترتیب سره عبارت دی له :

$$\Phi = A_0 - B_0\,\varphi$$

$$R(r) = C_0 + D_0 lnr$$

په نیتجه کې

$$u_{0=}(A_{0+}B_{0\varphi}(C_0 + D_0 lnr) \quad (36)$$

د (28) معادلې پورتنی حل باید نظر φ ته یوه پریود یکي تابع وي .څرنـــګه چې (r) φاو $2\pi+ \varphi$په دایره کې یوه نقطه ښیي نو د نوموړو قیمتونو لپاره باید عین حل و لري.بنا په دې (36) فـــورمول کې باید B_0=0 وي .سربیره پردې مونږ په دایره کې متمادي حلـــونه لټوو.بناً په(35) او (36) معـــادلو کې $D_k = 0$ او $D_0 = 0$ دې.

په د ې ډول د(36)معادلې ښي خوا دC_0 A_0 په حاصل ضرب بدلیږي اوکه هغه د $\frac{A_0}{2}$ سره مساوي فرض کړو په نتیجه کې $u_{0=}\frac{A_0}{2}$ کیږي.

د مطلوبې مسألې حل کولای شود (35) مجموعې په شکل ولیکو د اځکه چې د حلونو دجمعې حاصل بیا هم دمعادلې حل دی . دحلونو مجموعه باید نظر φ ته یو پریودیکي تابع وي.او داهغه وخت امکان لري چې دواړه جمعي اجزاوې پریودیکي وي .ددې منظور لپاره بایدk تام قیمتـــونه واخلي .(باید ووایو چې که چېرې د (30)مساوات یو ه برخه د k^2+ سره مساوي وضع کړو نـــو په د ې صورت کې مـــونږ نه شو کولای چې پریودیکي حل لاسته راوړو دا ځکه چې په د ي حالت کې دΦ په افاده کې او$cosk\varphi$او sinkΦ نه شامليږي ،R(r)په پریودیک ډول تأثیـــرنه لـــري اویا د φ پوړې اړه نه لري).

مـــونږ کـــولای شـــو د ...,k=1,2مثبت قیمتونه په پام کې ونیسو دا ځکه چې د پریو دیکې خواصو له مخې د kپه منفي قیمتونو سره د B, Aاو C ثابتو نو په مرسته نوي قسمي حلونه لاسته راځي .

په د ي ډول

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n sinn\varphi)r^n \quad (37)$$

د C_n ثا بت په A_n او B_n کې شامل دی .اوس د A_n او B_n اختیاري ثابتونه په پام کې نیسو داسې چې د (27) سرحدي شرط صدق کړي .که په (37) معادله کې r=R وضع کړو په لاس راوړو:

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n sinn\varphi)R^n$$

او دا د f(φ) تا بع تجزیه د فوریې په سلسه کې ښيي .په نتیجه کې د 5.10پاراګراف د 2بند له مخې

$$A_0 = \frac{1}{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \qquad (38)$$

په د ې ډول (37) سلسله کله چې ضریبونه یې د (38)فورمولونو په واسطه ټاکل شوي دي د ورکړل شوې مسألې حل دی. (37) معادلې ته تغیر شکل ورکوو.که د A_0 ، A_n او B_nپر ځای هغه افاده چې د(38) فورمول په واسطه افاده شویده وضع کړو ، دمثلثاتي روابطو په مرسته لاسته راوړو.

$$A(r،\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{r}{R})^n cosn(t-\varphi)d\right.$$

څرنګه چې

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n cos\ \ n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\tfrac{r}{R})^n\left(e^{in(i-\varphi)} + e^{-in(i-\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1-(\frac{r}{R})^2}{1-2\left(\frac{r}{R}\right)cos(t-\varphi)+(\frac{r}{R})^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,cos(t-\varphi)+r^2}$$

بنا پر دې

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,cos(t-\varphi)+r^2}\ dt \qquad (39)$$

دنوموړي فورمول تحلیل دابنیي چې که f(φ) تابع متمادي وي نو د$u(r,\varphi)$ تابع د (39)انتګرال په واسطه ټاکل کیږي چې (28)شرط صدق کوي اوهم$r \to$ R-0لپاره$u(r,\varphi) \to f(\varphi)$ دی. یعنې$u(r,\varphi)$ ددریچلې دطرحه شوې مسلې حل په دایره کې بنیي.

(39) فورمول ددریچلیت د مسألې حل په دایره کې بنیي او دپواسون انتګرال په نوم یې یادوي.

تر انتګرال لاندې افاده

$$\Phi(r,R,\varphi) = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\,cos(t-\varphi)}$$

دپواسون هسته نومول کیږي.

دپواسون دهستې خواص په لاندې ډول ذکرکوو.

1. $\Phi(r,t,R,\varphi)>0$

2. $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,cos(t-\varphi)+r^2}\, dt=1$

تمرینو نه

1.د لاندې اسکالري ساحو دسویي سطح څه شی ارایه کوي؟

a) u=$x^2 + y^2 + z^2$ b) u=$x^2 + y^2 - z^2$

2 . د u=xy+yz+1 سکالري ساحې مشتق د $n^{-}(12; -3; -4)$ وکتور پر جهت لاس ته راوړئ.

$[\frac{(8y-3(x-z)}{13}]$

3. دu=xyz د سکالري ساحې مشتق د $n^{-}(1; -2; 2)$ وکتور په جهت د A(1,1,1)په نقطه کې لاس ته راوړئ.

$\left[\frac{1}{3}\right]$

4. د $u=x^2 + y^2 - 3x + 2y$ سکالري ساحې مشتق دمختصاتوپه مبدأ کې په هغه جهت لاس ته راوړئ چې دمبدا څخه د(3,4) p په طرف موجه وي .

$\left|-\frac{1}{5}\right|$

5. grad r په لاس راوړئ کله چې $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ وي.

$\left[\frac{x}{r}\bar{\imath} + \frac{y}{r}\bar{\jmath} + \frac{z}{r}\bar{k}\right]$

6. $u=\sqrt{4 + x^2 + y^2}$ سکالري ساحې ګراد ینت د A (2,1)په نقطه کې لاس ته راوړئ.

$\left[\frac{2}{3}\bar{\imath} + \frac{1}{3}\bar{\jmath}\right]$

7. $u=x^2 + y^2 + 2xy + z^2$ تابع تر ټولو لوي زیاتوالی د A(1;1;0) په نقطه کې په لاس راوړئ.

[د oxمحور مثبت جهت]

8.د $\bar{a} = x\bar{\imath} + (y+z)\bar{\jmath} + (z-y)\bar{k}$ وکتوري ساحې سیلان چې د $x^2 + y^2 + z^2 = 9$کروي سطحې د پورتنۍ برخې څخه چې $z=\frac{3}{2}$ مستوي په واسطه جلاکیږي لاس ته راوړئ.

$[27\pi]$

9. $\bar{a}=\alpha(x\bar{\imath}-y\bar{\jmath}+z\bar{k})$ وکتوري ساحې دایورجنت په لاس راوړئ کله چې α یو ثابت عددوي .

$[3\alpha]$

10 . د $\bar{a}=(xy\bar{\imath}-yz\bar{\jmath}+\bar{k}zx\,\bar{k})$ وکتوري ساحې دایورجنت د(3 ;2 ;1) =A په نقطه کې لا ته راوړئ.

[6]

11.div (grad u) په لاس راوړئ کله چې $u=x^2 + 2y^2 + 3z^2$ وي.

[12]

12. د استروګراداسکي _ګوس فورمول له مخې د ($\bar{a}$=(x$y^2\,\bar{\imath}$+yz$^2\bar{\jmath}$+ zx^2 $\bar{k}$) وکتوري ناحيې سيلان د $x^2+y^2+z^2=R^2$ کروي سطحې د پورتنۍ برخې څخه لاس ته راوړئ . $\left[\frac{4}{5}\pi R^5\right]$

13. داسترډګرادسکې _ ګوس د فورمول له مخې د $\bar{a}$=(y$\bar{\imath}$+$x\bar{\jmath}$+ z $\bar{k}$ وکتوري ساحې سيلان دهغې ترلې سطحې څخه لاسته راوړئ کوم چې د $x^2+y^2+z^2$ مخروط او د z=1مستوي په واسطه محصور شوی وي.

$[\frac{1}{3}\pi]$

14 . rot $\bar{a}$ لاس ته راوړئ کله چې $\bar{a}=y^2\bar{\imath}+x^2\bar{\jmath}+z^2\bar{k}$ وي.

$[-2(x+y)\bar{k}]$

15. rot $\bar{a}$ لاس ته راوړئ کله چې$\bar{a}=\bar{r}/|\bar{r}|$ وي.

$[\bar{0}]$

16.rot(gradu) لاس ته راوړئ کله چې u=$x^2+y^2+z^2$ وي.

$[\bar{0}]$

17. د $\bar{a}$=y$\bar{\imath}$وکتوري ساحې دوران د x=b cos t، y=b+sin t ، $0\le t\le 2\pi$ دايرې پرمخ چې د xoy په مستوي کې واقع ده لاس ته راوړئ.

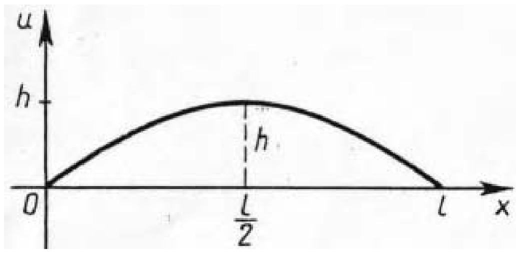
$[-\pi b^2]$

18.په مستقم ياد ستو کس فورمول په دواړو طـــــريقو د ($\bar{a}$=($x^2y^3\,\bar{\imath}$+ $\bar{\jmath}$+ z $\bar{k}$) وکتوري ساحې دوران د $x^2+y^2=R^2$، z=0 دايرې پرمخ محاسبه کړئ. $\left[-\frac{1}{8}\pi R^6\right]$

19. د $\bar{a}$=x$\bar{\imath}+y\bar{\jmath}+z\bar{k}$ وکتوري ساحې دوران په دوه طريقو د $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ،z=0 اليپس پرمخ لاس ته راوړئ. $[\bar{0}]$

20. يو مزی چې انجامونه يې د x=0 او x=l په نقطو کې تړل شوي ، د وخت په لومړنی لحظه کې د u=$\frac{4h}{l^2}x(1-x)$ پارابول شکل لري. دمزي ديوې نقطې تغير مکان نظر د فاصلې محورته په لاس روړی کله چې اوليه سرعت موجود نه وي (56)شکل.

$$[u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)+\pi at}{l}\sin\frac{(2n+)\pi x}{l}]$$



(56شکل)

لاربنونه : هغه سلسله چې دمزي داهتزاز معادلې حل بنيي،ضريبونه يې عبارت دي له :

$$a_k=\frac{8h}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\ ,b_k=0$$

ماخذونه

1.Баврин И.И., Матросов В.Л. Краткий курс теории вероятностей и математическая
статистика.-М: Прометей ,1989.

2. Будак Б. М., Фамин С.В., Кратные интегралы и ряды.-М.: Наука, 1965.

3. Гнеденко. Б. В. Курс теории вероятностей .- М.: Наука , Наука 1988.

4. Ифимов Н.В. . Краткий курс аналитической геометрии. . -М.: Наука, 1975.

5. Ильин В. А . Позняк .Э .Г .Основы математического аналза. -М.: Наука, 1971.

6. Кудрявцев Л . Д . Математический аналз . -М.: Высшая школа,1981.-Т.I, II.

7. Курош А. Г .Курс высшей алгебры . -М.: Физматгиз,

8. Никольский С. М. . Курс математического аналза. -М.: Наука, 1965.Т-I.

9. Понтрягин Л. С.О Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1974.

10. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. -М.: Наука, 1977.

11. Пугачев В. С. Теория вероятностй и математическая статицеска. -М.: наука, 1979.

12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. -М.: Наука, 1974. – Т. I, II.

13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнеий. -М.: Физматгиз, 1958.

14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1977.

15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984 – т. I .

Book Name	Advanced General Mathematics Courses
Translator	Prof Moheburahman Janati
Publisher	Nangarhar Science Faculty
Website	www.nu.edu.af
No of Copies	1000
Published	2015, First Edition
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and Technical support by Afghanic organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul
Office 0756014640
Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2015
Sahar Printing Press
ISBN: 978 9936 6200 25

Message from the Ministry of Higher Education

In history,books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science;and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers andauthors and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to the chief of German Committee for Afghan Children, Dr. Eroes, and our colleague Dr. Yahya Wardak who have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,

Prof. Dr. Farida Momand

Minister of Higher Education

Kabul, 2015

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 176 different medical textbooks (95 books funded by DAAD, 80 books funded by kinderhilfe-Afghanistan) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh and Kapisa medical colleges and Kabul Medical University. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost. Currently we are working to publish 20 more non-medical textbooks for Nangarhar University. All published medical & non-medical textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashtu. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state – of – the – art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers and students, we extended this project to the non-medical subjects e.g. Science, Engineering, Agriculture and Economics.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to the Afghan Universities free of charge. I would like the students to

encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) and its director Dr Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 80 other medical textbooks in the past three years which are being used by the students of Nangarhar and other medical colleges of the country. Dr Eroes has made funds available for 20 additional books which are being printed now.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister, Prof M Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, Acting Chancellor of Nangarhar University Prof Dr M Taher Enayat and lectures for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazal Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul/Afghanistan, June, 2015
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Abstract

As we Knew Afghanistan is one of the Poorest Country in the world, and still suffers from ware and Post war conflict .Our young students, especially science , Engineering and others students can't afford buying Mathematic books and all so their level of understanding from English and others language is not good there for I decided to write General Course of Higher Mathematics in Pashto which is in lined with the curriculum of Science, Education, Engineering, Economic and Computer science Faculties.

I have incorporated all the international changes and progresses happened so far, that every scientist and students will be benefited.

I believe my book would better resources for teaching and research for coming several decades.

1- Number and functional series.
2- Functions of Several variables.
3- Multiple and line Integrals.
4- Differential Equations.
5- Filed theory and Elements of Mathematical physics.

د ژباړونکي لنډه پیژندنه .

زه محب الرحمن (جنتي) د لغمان ولایت د چاردهي په قلعه اخند کلي کې زیږیدلی یم . د مهترلام بابا د منځنې ښوونځي څخه په ۱۳۴۵ کال کې فارغ او دلغمان ولایت په روښان لیسه کې شامل ، په ۱۳۵۴ کال کې ددې لیسې څخحه فارغ اوپه ۱۳۵۵ کال کې د کانکور ازموینې له لارې د کابل پوهنتون دساینس په پوهنځي کې شامل اوپه۱۳۵۸ کال کې ددې پوهنځي د ریاضي له رشتې څخه فارغ التحصیل شوم. په همدې کال کې دننگرهار پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي کې د علمي کادرد غړي په توگه مقرراو د ریاضي د مضمون تدریس مې پر مخ وړلو. په ۱۳۶۶ کال کې مې د اوکراین جمهوریت دادیسې له دولتي پوهنتون میچنیکوف څخه د ماسترۍ سند تر لاسه کړ کوم ته چې د تحصیل له پاره د انجینرۍ پوهنځي له خواورته د لوړوزده کړو دوزارت له لارې معرفي شوی وم.

دانجینرۍ په پوهنځي کې مې د ریاضي د مضمون د مختلفو برخو دتدریس تر څنگه دنور فزیک تدریس هم تر یو وخته پورې پرمخ وړی دی . دتدریس تر څنگه مې د ځانگې د مشرۍ دنده هم پرمخ وړې ده.په دې سر بیره مې ددې دندې تر څنگ د محصلانو د چارومدیرت، د تعلیم اوتربیې مدیریت د انجینرۍ پوهنځي معاونیت اود پوهنتون د محصلانو چارود معاونیت دندې هم ترسره کړي دي، چې د ساینس پوهنځي د تاسیس سره سم په دې پوهنځي کې دپوهنځي دریس په صفت دنده اود ریاضي مضمون تدریس پرمخ وړم.