ننګرهار ساينس پوهنځی

عالي کلکولس II

$$f(x,y)=\sin x+e^{y}+xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x+y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{y}+x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\sin x \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=e^{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos x+y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=1$$

پوهندوی نظر محمد

۱۳۹۴ خرڅول منع دي

عالي کلکولس II

Advanced Calculus II

پوهندوی نظر محمد

۱۳۹۴

Nangarhar Science Faculty

Afghanic

Prof Nazar Mohammad

Advanced Calculus II

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Not For Sale 2015

عالي کلکولس II

پوهندوی نظر محمد

Afghani

Pashto PDF
2015

Nangarhar Science Faculty
ننګرهار ساینس پوهنځی

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Advanced Calculus II

Prof Nazar Mohammad

بسم الله الرحمن الرحيم

عالي كلكولس II

لومړی چاپ

پوهندوی نظر محمد

دغه کتاب په پی دی اف فورمت کی په مله سی دی کی هم لوستلی شی:

د کتاب نوم	عالی کلکولس II
ژباړونکی	پوهندوی نظر محمد
خپرندوی	ننگرهار ساینس پوهنځی
ویب پاڼه	www.nu.edu.af
چاپ شمېر	۱۰۰۰
د چاپ کال	۱۳۹۴، لومړی چاپ
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org
د چاپ ځای	سهر مطبعه، کابل، افغانستان

د اکتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې پــه آلمان کې د افغانیک مـوسسې لخوا ترسره شوې دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسؤلیت د کتاب په لیکوال او اړونده پــوهنځی پورې اړه لري مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک دلوړو زده کړو وزارت کابل
تیلیفون 0756014640
ایمیل textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان: ISBN: 978 9936 6200 18

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کې ډیر مهم رول لوبولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې دوامداره زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانگو کې درسی کتابونه تألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کړی دی او د پوهې موتور یې په حرکت راوستی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مواد برابر او چاپ کړی، چې له چاپ وروسته د گرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کړو د کیفیت په لوړولو او د علمي پروسې په پرمختگ کې یې نیک گام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د گرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسی مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کی د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې له رئیس ډاکتر ایروس او زموږ همکار ډاکتر یحیی وردگ څخه مننه کوم چې د کتابونو د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چی نوموړې گټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څو په نیږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو وزیره

کابل، ۱۳۹۴

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلينو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لويو ستونزو څخه ګڼل کېږي. يو زيات شمير استادان او محصلين نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه ميتود تدريس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټيټ کيفيت فوتوکاپي کېږي.

تراوسه پورې مونږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپيسا د طب پوهنځيو او کابل طبي پوهنتون لپاره ۱۷٦عنوانه مختلف طبي تدريسي کتابونه چاپ کړي دي، چې د هغوی له جملې څخه ۹۵ د DAAD او ۸۰ نور د kinderhilfe-Afghanistan په مالي مرسته چاپ شوي دي. د ننګرهار پوهنتون لپاره د ۲۰ نورو غيرطبي کتابونو د چاپ چارې روانې دي. د يادونې وړ ده چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هيواد ټولو طب پوهنځيو ته په وړيا توګه ويشل شوي دي.

هر څوک کولای شي ټول چاپ شوی طبي او غير طبي کتابونه

د www.afghanistan-ecampus.org ويب پاڼې څخه ډاونلوډ کړي.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ - ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتيژيک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کيفيت او زده کوونکو ته د نويو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړينه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د ليکلو فرصت برابر شي د تعليمي نصاب د ريفورم لپاره له انګريزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړين دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلين او استادان نشي کولای عصري، نويو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پيدا کړي".

د لوړو زده کړو وزارت، پوهنتونونو، استادانو او محصلينو د غوښتنې په اساس مونږ دا پروګرام غير طبي برخو ته لکه ساينس، انجنيري، کرهنې او نورو پوهنځيو ته هم وغځاوه، تر څو د مختلفو پوهنتونونو او پوهنځيو د اړتيا وړ کتابونه چاپ شي.

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هيواد له پوهنتونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړينه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هيله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه وليکي، وژباړي او يا هم خپل پخواني ليکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او

چېټرونه ایډیټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوندې پوهنځۍ استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د یادونې وړ ده چې د مولفینو او خپروونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مولف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکټر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی. دوی په تیرو کلونو کې هم د ننګرهار د طب پوهنځي د ۸۰ عنوانه طبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه درلود.

په ځانګړي توګه د جي آی زیت (GIZ) له دفتر او Center for International Migration & Development (CIM) چې زما لپاره یې په تېرو پنځو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړی دي، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو وزیره پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنوال محمد عثمان بابري، مالي او اداري معین پوهنوال ډاکتر ګل حسن ولیزي، د ننګرهار پوهنتون سرپرست رییس پوهنوال ډاکتر محمد طاهر عنایت، د ننګرهار پوهنتون پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مولف څخه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبي او فضل الرحیم څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردګ، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار

کابل، جون ۲۰۱۵

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰

ایمیل: textbooks@afghanic.org

مخکینی خبرې

د رياضاتو علم د نورو علو مو په شان د انسانانو د ژوندانه په دوران کې د ضرورت له مخې رامنځته شوه او په بشري ژوند کې د ورځنی مدنيت د عمده څانګو په لړکې د يوی ساينسی عنصر په حيث وپيژندل شو.او همزمان د بشر د تکامل،پرمختګ او طبعي پديدود ژوري پيژندنی تر څنګ وده وموندد.

په اوسيني عصر کې چې علمي تخنيکي انقلاب خپل اوج ته رسيلی او نورهم دانکشاف په حالت کې دی، ددی پرمختګونوسره سم د رياضياتو علم په سريع ډول رشد او انکشاف موندلی او د تخنيکيې علو مو د ترقي ستر عامل ګرځيدلی دی .

څرنګه چې زمونږ ګران هيوادد انکشاف په حالت کې دی نو په دې مرحله کې د پوهنتونونو داستادانو دنده ده چې د هيواد د انکشاف په لاره کې د نورو منابعو څخه په استفاده د کتابونو اوعلمي اثاروپه ليکنه او ترجمه کې فعاله ونډه واخلي تر څونوی ځون نسل و کولای شي ددوی د اثارو په مطالعه کولو ځان د نړی د اکتشافاتو څخه باخبر او د هيواد په بيا رغونه کې فعاله ونده واخلي .

له همدی امله د انجينری پوهنځي،ساينس پوهنځي، کمپيوترساينس پوهنځي او اقتصاد پوهنځي د رياضياتو د پروګرام په نظرکې نيولو سره د عمومي مضامينو دډيپارتمنت له خوا ماته د کلکولس II په نو م کتاب چې د امريکا د سينډياګو ايالا ت پوهنتون د انجينری رشتی له پاره ليکل شوي د انجينری پوهنځي ددوهم او دريم سيمسترونوله پروګرام سره مطابقت کوي ،د ژباړی دنده وسپارل شوه تر څووکولای شم ستونزه چې د انجينري پوهنځي او نورو پوهنځيوومحصلين يې د کتابونو دنه موجوديت له امله لري تر يو حده رفع کړم .البته نوموړي موضوع د انجينری پوهنځي د علمي شورا په غونډه کې تر غور وروسته تائيد او د وروستی تائيد له پاره د لوړوزدکړو وزارت د اکاډيميکوچارو د انسجام رياست ته راجع او د هغوی د تائيد وړ ګرځيدلی ده.

ددی کتاب په شپږم فصل کې د انتيګرال نيولو طريقې يا متودونه، لومړی برخه غير واقعی يا غير عادی انتيګرالونه او دويمه برخه غيرعادی انتيګرالونه . په اوم فصل کې د انتيګرال تطبيقات ، دقطع په طريقه ديو جسم حجم محاسبه ، دتابع دګراف طول اود دورانی سطحی مساحت. په اتم فصل کې تفاضلي معادلې ، لومړيترتيب خطي تفاضلي معادلې، دلومړی ترتيب تفاضلي معادلو تطبيقات، د جلاکيدلووړ متحولينو تفاضلي معادلې، په جلا کيدونکو متخولينو د تفاضلي معادلو تطبيقات . په نهم

فصل کې نامتناهی سلسلې ، دتیلور پولینوم، جذری یا نسبتی مشخصه ،د طاقت سلسله، فوریه سلسله ، د تیلور دباقی پاتی فورمول او قطبی مختصات سیستم موضوع گانی په پام کې نیول شوي دي.

نو موړی کتاب د نظری اوعملي معلوماتو په درلودلو سره یو مکمل او عالی درسي مواد شمیرل کیږي .او هم د استادانو څیړونکو او محصلینو ته په راتلونکی کې د استفادی وړوګرځوم.ښکاره ده چې د یو علمی اثر ژباړه ستونځی لري خو ستراود یادونی ویاړهم دی له دی امله ده چې ددغی ژباړنی څخه که څه هم نیمګړتیاوی به هم ولري خوښی احساسوم ځکه چې په دی برخه کې ما دخپل توان سره سم هاند او هڅه کړیده کیدای شي له ما څخه د ژباړې په وخت کې کومي غلطیی شوې وي چې له کبله یې د کتاب د لوستونکو اوپه خاص ډول له مؤلف څخه ښننه غواړم ..که څه هم په دغه ژباړه کې له ستونزوسره مخامخ شوم هغه دا چې د ریاضی علمی اصطلاحاتو له پاره په پښتو کې انډول اصطلاحات پیدا کول په خپله اسانه کار نه دې او هغه اصطلاحات چې کارول کیږي نا اشنا معلومیږی ځکه چې تر اوسه پوری یې زیات رواج موندلی ندې.باید ووایم چې زه د خپل لارښود استاد د ښاغلي پوهاند عبدالحق (ایمل) د کابل پوهنتون دساینس پوهنځي د ریاضیاتو ددیپارتمنت استاد څخه چې ماته یې په دغه ژباړه کې خپلې علمی لارښوني کړیدې د زړه که کومي مننه کوم او د هغي نیکی لارښونی به د هر وخت له پاره په پام کې ونیسم اوهم ددی تر څنګ دهر یو پوهاند سید قیوم شاه (باور) د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځي درياضیاتو د دیپارتمنت استاد،پوهندوي محبالرحمن (جنتي) او پوهندوي حمیدالله (یار) د ننګرهار پوهنتون استادانو دمرستې د قدر دانی او یادونې وړ بولم او له هر یو څخه د زړه له کومی مننه کوم.

په پای کې هیله مند یم چې د ژباړل شوې کتاب څخه ددرسي موادو په توګه د افغاني بشري سر چینو د وړتیا او په هیواد کې د پر مختګ سره سم د هو ساینې لا مل و ګرځئ .

په درنښت

پـــو هنمــــــل نظـــرمحـــمـــــد

د ساینس پوهنځي استاد

تقریظ

څرنگه چې زموږ گران هیواد خصوصاً په لوړو تحصیلي موسسو او پو هنتونو کې د علمي کتابونو او اثارو کمبود د پاملرنې وړدی نو ددی د رفع کولو له پاره د لوړو تحصیلاتو وزارت یو مهم گام پورته کړی او د پوهنتون استادانوته دنده ورکوي چې ددی کمبودی د رفع کولو له پاره کتابونه تالیف یا ترجمه کړی.په ژباړه کی هغو کتابونو ته ډیر اهمیت ورکول کیږی چې د نړی په پوهنتونوکی په مستقیمه توگه تدریس کیږی په دې ډول له یوی خوا په تدریس کی سهولت راځی او له بلی خوا د درسی کتابونوکمبنت له منځه ځی .په دی لړ کي محترم پوهنمل نظرمحمد ته هم دنده ورکړ شوه تر څو د CalculusII په نوم کتاب چې مولف یې Professor Tunc Geveci دی او په 2008 کال کي دامریکا د سینډیاگوپه ایالات کی طبع او په لوړو تحصیلي موسسوکي په مستقیمه توگه تدریس کیږي نوموړی کتاب چې 240 مخه کیږي او دننگرهار پوهنتون د انجینری د پوهنځی د لومړی او دویم تعلیمی کال ددویم او دریم سیمسترونو د مفرداتو سره سمون خوری، وژباړی. دادی محترم پوهنمل نظر محمد دا دنده په بشپړ توگه سرته رسولی ده.په دی برخه کی څلورفصلونه شامل دی چې د شپږم فصل څخه پیل او تر نهم فصل پوری رسیږی نوموړی دا فصلونه د متن سر سم په پوره امانت داری او روانه پښتو ژبه ژباړلی دی. ده په دی ژباړه کی هڅه کړی ده چې علمی اصطلاحات هم په هیواد کي د مروجو اصطلاحاتو په شکل و ژباړی .

محترم پوهنمل نظر محمد نوموړی کتاب ژباړلی چې په شپږم فصل کي د انتیگرال نیولو طریقي یا متودونو،د انتیگرال نیولو قسمي طریقه ،د نسبتي توابعو انتیگرال، د خینو مثلثاتی توابعو انتیگرال عددی انتیگرال نیول غیر واقعی یا غیرعادی انتیگرالونه . په اووم فصل کي د انتیگرال تطبیقات ،دانتیگرال په واسطه د حجمونو محاسبه ، د یوی تابع د گراف طول او دورانی سطحو مساحت.په اتم فصل کي تفاضلي معادلي ، لومړی ترتیب خطی تفاضلي معادلي او د هغوي تطبیقات ،د جلا کیدووړمتحولینو تفاضلي معادلي او د هغوي تطبیقات.په نهم فصل کي نامتناهي سلسلي، لومړی برخه دتیلور پولینوم، دویمه برخه د تیلور پولینوم ، جذری او نسبتي مشخصه (ازموینه)، لومړی برخه د طاقت سلسله ، دویمه برخه د طاقت سلسله ، انتیگرالی او مقایسوی ازمایښت ، شرطی تقارب ، د فوریه سلسلي او قطبی مختصات په هکله معلومات شامل دی.

زه دمحترم پوهنمل نظرمحمد دا علمی کارستایم پوهندویی علمی رتبی لپاره یی کافی بولم او لورومقاماتوته یی پیشنهاد کوم. هغه ته د لانورو بریالیتوبونو غوستونکی یم .

پوهاند عبدالحق " ایمل "

دکابل پوهنتون دریاضیاتو استاد

تقریظ

کتاب " Calculusll" که توسط پوهنمل نظرمحمد اززبان انگلیسی به زبان پشتو ترجمه شده مطالعه نمودم. درعصر حاضر که کشور عزیزم ما خصوصاً درپوهنتون ها وموسسات تحصیلات عالی کشور کمبود **آثار وکتب درسی ، بطور چشم گیرقابل ملاحظه است ووزارت تحصیلات عالی همواره غرض رفع** این نقیصه برای استادان وظیفه داده تا کتب را که درپوهنتون های جهان مستقیم تدریس میگردد ترجمه نماید.

کتاب ترجمه دارای مباحث عمده ومهم چون طریقه های انتیگرال گیری ، تطبیقات انتیگرال ها ، معادلات تفاضلی و سلسله های متناهی را دربرمیگیرد. درین اثرقضیا ، تعریفات ، جداول واشکال به طور معیاری ومنظم ترتیب وتنظیم شده است. محتویات اثر مباحث عمده ریاضیات عالی بوده که برای انجنیران و رشته های ریاضی ، فزیک و کیمیا همه پوهنتون ها مفید واقع ودر311 صفحه تدوین گردیده است.

مترجم درانتقال مفاهیم وموضوعات مسلکی ازامانت داری کامل بدون تحریف کارگرفته ترجمه کتاب خیلی روان و برای خواننده قابل فهم میباشد. موصوف به دولسان یعنی لسان انگلیسی و لسان ترجمه حاکمیت داشته ودرترجمه طرز نگارش را بطور معیاری درنظرگرفته است.

من این کتاب را که به لسان ملی پشتو ترجمه شده برای ترفیع علمی برتبه پوهندویی کاملاً کافی دانسته وموفقیت بیشتر ی استاد نظرمحمد را ازخداوند متعال خواهانم.

پوهنوال محمد همایون " ناصری "

استاد ریاضیات تطبیقی پوهنتون کابل

تقريظ

په اوسنی وخت کې درسی کتابونو ته نه یوازی د ننګرهار په پوهنتون بلکه د وطن په تولوپوهنتونو کی زیاته اړتیا ده نوځکه تحصیلی موسسی پوهنتونونه او دعالی تحصیلاتو وزارت د درسی کتابونو تالیف او ژباړی ته زیاته پاملرنه کوی . په دې توګه په علمی ترفیعاتو کی استادانوته د درسی کتابونو تالیف او ژباړی ته خپل مقام ورکړشوی دی. په همدی اساس دننګرهارپوهنتون دانجنیری پوهنځی دعمومی مضامینو څانګه استاد نظرمحمد ته وظیفه ورکړی ده چی د Professor Tunc Geveci لیکل شوی کتاب CalculusII چی په 200~~4~~8 کال کی چاپ شوی ، د انګلیسی ژبی څخه پښتوژبی ته وژباړی .

دنوموړی کتاب محتویات دانتیګرال نیولو طریقې ، دانتیګرال تطبیقات ، تفاضلي معادلې او نامتناهي سلسلې جوړوی چی دانجنیری پوهنځی د دوهم سمستر دریاضی مضمون سره سمون خوری او د ساینس پوهنځی د ریاضی – فزیک څانګی دانالیز مضمون د دریم سمستر لپاره هم یو درسی کتاب کیدلی شی.

نوموړی د پورته فیصلی سره سم دا کتاب ژباړلی دی چی په هغی کی د ژباړی ټول نورمونه په پام کې نیولی دی . په دی ژباړه کی عبارتونه ، قضیې ، جدولونه او شکلونه په منظم ډول ځای پرځای شوی او په ترجمه کې دپوره امانت داری څخه کاراخستل شوي دی . هڅه یې کړی چی علمی اصطلاحات په هیواد کی دمروجو اصطلاحاتو په شکل وژباړی .

زه نوموری اثر د پوهندوی علمی رتبی لپاره کافی بولم او استاد نظرمحمد لپاره د لوی خدا(ج) څخه لانوربریالیتوبونه غوارم.

پوهاند دوکتور سید قیوم شاه " باور"

دکابل پوهنتون دریاضیاتو استاد

لړ لیک

نهم فصل

نامتناهی سلسلې

شپږم فصل

د انتیګرال نیولو طریقې یا متودونه

په دې فصل کې مونږ قسمي انتیګرال معرفي کوو ، او د نسبتي توابعو انتیګرال نیول تر بحث اوهمدارنګه هغه نتیګرالونه چې په مثلثاتي او هایپربولیکې توابعو پورې اړه لري تر مطالعی لاندی نیسو.د انتیګرال نیولو د حد ونوپه توسعه ور کولو سره،غیرعادی (غیرواقعی) انتیګرالونه چې په یو نا محدود انټروال پورې تړلې او یا داچې تابع په کې غیر متمادې نقطی ولري ، مطا لعه کوو .

(1.6) د انتیګرال نیولو قسمي طریقه .

په معین اوغیرمعین انتیګرال کې دقسمي انتیګرال نیولو قاعده چې دمشتق دحاصل دقاعدې سره سمون لري، د تعویض قاعدې په شان د chine یا ځنځیري قاعدې دیوې برخې په ډول دي.

(1.1.6) په غیرمعینو انتیګرالونوکې د انتیګرال نیولو قسمي طریقه.

فرضوو چې fاو g د ل په انټروال د ا شتقاق وړتوابع دي.یا د هر $x \in J$ له پاره دضرب دقاعدې له مخې

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$$

دا معنی لري چې دهر $x \in J$ له پاره $f'g + g'f$ د g fاولیه تابع ده، په دې توګه لیکوچې:

$$f(x)g(x) = \int \Big(\frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}\Big)dx$$

د غیرمعین انتیګرالونو د خطي خا صیت له مخې لروچې :

$$f(x)g(x) = \int \frac{df}{dx}g(x)dx + \int f(x)\frac{dg}{dx})dx$$

په دې توګه fg دهر $x \in J$ له پاره

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx$$

دی.چې دې ته غیرمعین انتیګرال له پاره د انتیګرال نیولو قسمي طریقه وایي.

قضیه (*1.1.6*). په غیر معینو انتیګرالونوکې د انتیګرال نیولو قسمي طریقه .

فرضوو چې د J په انټروال کې f او g د ا شتقاق وړ دي. یا د هر $x \in J$ له پاره

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx$$

البته کو لاې شو لاندې مهه لیکنه په کار یوسو.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

مثال (*1.1.6*) . a) تعین کړئ

$$\int xe^{-x}dx$$

b) د مشتق نیولو په واسطه د a برخی د ځواب صحت وازمایې.

حل.a) د $f(x) = x$ او $\frac{dg}{dx} = e^{-x}$ په وضع کولو اود انتیګرال نیولو قسمي طریقې څخه په استفاده کوم چې په (1) قضیه کې معین شوي ، لروچې:

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$ او $\frac{dg}{dx} = e^{-x} \Leftrightarrow g(x) = \int e^{-x}dx$ د $g(x)$ محاسبه کول د اولیه تابع دپیداکولو یومسله ده. که $u = -x$ وضع کړو نو $\frac{du}{dx} = -1$ دی. د تعویضې طریقې له مخې لروچې:

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}(-1)dx = -\int e^{u}\frac{du}{dx}dx = \int -e^{u}\,du$$
$$= -e^{u} + c = e^{-x} + c$$

چې دلته c اختیاری ثابت دی. که د انتیګرال نیولو قسمي طریقه تطبیق کړوپه صورت کې مونږ کولی شو یوه اولیه تابع په لاس راوړو.که $g(x) = -e^{-x}$ وضع کړو ، په دی ډول:

$$\int x\,e^{-x}dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g\ (x)dx$$
$$= x(-e^{-x}) - \int (1)(-e^{-x})dx$$
$$= -xe^{-x} + \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

داسې چې c یواختیاري ثابت دی.

b) د

$$\int -xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

افاده دعددونو د محورپه ټولو نقطو کې صد ق کوي. دا یو حقیقت دي ځکه د مشتق نیولو د خطي خاصیت او د ضرب د قاعدې له مخې د $x \in \mathbb{R}$ له پاره

$$\frac{d}{dx}(-xe^{-x} - e^{-x} + c) = -\frac{d}{dx}(xe^{-x}) - \frac{d}{dx}e^{-x} + \frac{d}{dx}(c)$$
$$= -\left(\frac{d}{dx}(x)\right)e^{-x} - x\left(\frac{d}{dx}e^{-x}\right) + e^{-x}$$

$$= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

دی.

د ضرب د قاعدي کارول د حيرانتيا خبره نه ده ،ځکه چې د انتيګرال نيولو قسمي طريقه د ضرب د قاعدي له مخې ترلاسه شوي ده.

$$du = \frac{du}{dx}dx$$

افاده د تعويض په طريقه له مونږ سره پوره مرسته کوي . همدارنګه دغه افاده د انتيګرال نيولو د قسمي طريقې په بشپړولوکې هم مرسته کوي که د

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx$$

په افاده کې $f(x)$ په u او $g(x)$ په v تعويض کړو نولرو

$$\int u\frac{du}{dx}dx = uv - v\frac{du}{dx}dx$$

همدارنګه که $\frac{du}{dx}dx$ په du او $\frac{dv}{dx}dx$ په dv وښيو انتيګرال نيولو د قسمي طريقې فورمول په لاندې ډول ښودلای شو.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

بايد ووايو چې $v = \int \frac{dv}{dx}dx = \int dv$ دی.

مثال (2.1.6) . $\int xsin(4x)dx$ محاسبه کړئ.

حل . دانتيګرال نيونې قسمي طريقه په لاندې ډول په کاروړو .

$$\int udv = uv - \int vdu$$

کله چې $u = x$ او $dv = sin(4x)dx$ وي . له دې ځايه

$$du = \frac{du}{dx}dx = dx$$

او $v=\int dv=\int xsin(4x)dx = 1/4cos(4x)$ دی. بنأ پر دې

$$\int xsin(4x)dx = \int vdu$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= x\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) - \int\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right)d\,x$$
$$= -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{4}\int\cos(4x)$$
$$= -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sin(4x)\right) + c$$
$$= -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + c,$$

داسې چې c يو اختيا ري ثابت دي .پورتنئ افاده د عد دونو د محورپه ټولو نقطو کې صدق کوي.

د $\int x^n \cos(ax)\,dx$ يا $\int x^n \sin(ax)\,dx$ ډول غيرمعين انتيګرالونه چې په هغې کې n يو مثبت تام عد د او a يو ثابت دی د پرلپسې انتيګرال نيونې په حالت کې، د x توان په ترتيب سره په هره مرحله کې کميږي . که $u = x^n$ او $dv = \cos(ax)\,dx$ يا $dv = \sin(ax)\,dx$ قبول کړو نو د تعويض د طريقې له مخې به ولروچې:

$$du = \frac{du}{dx}dx = nx^{n-1}dx$$

مثال (3.1.6) . $\int x^2 \cos(4x)\,dx$ محاسبه کړئ.

حل. قبولو چې $dv = \cos(4x)dx$ او $u=x^2$ دی ځرنګه چې $du = 2xdx$ او $v = \int cos4xdx = \frac{1}{4}\sin(4x)$ دی.

بنأ پردې

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(4x)\,dx &= \int udv\\ &= uv - vdu\\ &= x^2\left(\tfrac{1}{4}\sin(4x)\right) - \int \left(\tfrac{1}{4}\sin(4x)\right)2xdx\\ &= \frac{1}{4}x^2\sin(4x) - \frac{1}{2}\int xsin(4x)dx.\end{aligned}$$

په (2.1.6) مثال کې د بنيې خواغيرمعين انتيګرال دانتيګرال نيونې د قسمې طريقې په مرسته محاسبه کړئ

$$\int xsin(4x)dx. = -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{16}\,sin(4x) + c$$

په دې توګه

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(4x)\,dx &= \tfrac{1}{4}x^2\sin(4x) - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4}x\cos(4x) + \tfrac{1}{16}\,sin(4x) + c)\\ &= \frac{1}{4}x^2\sin(4x) + \frac{1}{8}x\cos(4x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + c\end{aligned}$$

ځرنګه چې C يو اختياري ثابت دی نو $-C/2$ هم اختياري ثابت دی. په دې توګه که $-C/2$ په C سره تعويض کړونو . حاصلوو:

$$\int x^2\cos(4x)\,dx = \tfrac{1}{4}x^2\sin(4x) - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4}x\cos(4x) + \tfrac{1}{16}\,sin(4x) + c$$

تبصره (1.1.6) .په لاندې مثالونو کې د اختياری ثابت په نه ليکلوسره په منځني مرحله کې کوم ستونزه نه رامنځته کوي.

د $\int x^n e^{ax}dx$ ډوله غیرمعین انتیګرال داسې چې n یو مثبت تام عدد او a یو ثابت دي کولای شو په غیرمعین انتیګرالونو کې د قسمي طریقې په مرسته محاسبه کړو چې په نتیجه کې د x توان په ترتیب سره په هره مرحله کې کمیږي . کله چې $u = x^n$ او $dv = e^{ax}dx$ وضع کړو .

مثال (4.1.6). a) د $\int x^2 e^{-x}dx$ محاسبه کړئ.

b) د $\int_0^4 x^2 e^{-x}dx$ انتیګرال عددي قیمت محاسبه کړئ .

حل. a)که $u = x^2$ او $du = e^{-x}dx$ وضع کړو لروچې $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$ او $du\frac{du}{dx}dx = 2xdx$ دی بنأ پردې

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}dx &= \int udv = uv - \int vdu\\ &= x^2(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})2xdx\\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx\end{aligned}$$

په (1.1.6) مثال کې مونږ عین تګلاره په کاروړی ده چې داوښیو

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= xe^{-x} - e^{-x}\\ \int x^2e^{-x}dx &= x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c\end{aligned}$$

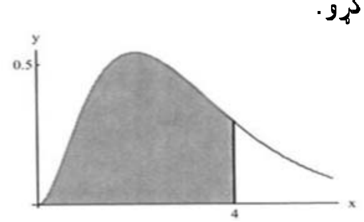
b) د a برخې د نتیجې او هم د کلکولس د اساسي قضیې څخه په ګټه اخستلو سره

$$\int_0^4 x^2e^{-x}dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2)\Big|_0^4 = 26e^{-4} + 2 \cong 2.47621$$

دی.

په دې توګه د G ناحیې مساحت چې د $y = e^x \cdot e^{-x}$ ګراف او د $[0,4]$ انټروال په منځ کې واقع دی، د $26e^{-4}+2$ سره مساوي دي په(1) شکل کې د G نا حیه ښودل شوي ده.

همدارنګه د انتیګرال نیوټې د قسمي طریقې په مرسته مونږ کولای شو د طبعي لوګاریتم غیرمعین انتیګرال محاسبه کړو .



(1) شکل

مثال (5.1.6) . د $\int ln(x)\,dx$ محاسبه کړئ

حل. فرضووچې $u = \ln(x)$ او $dv = dx$ دی. څرنګه چې $v = \int dx = x$ او $du = \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{x}dx$ دی .په لاس راځي چې

$$\int \ln(x)\,dx = \int udv = uv - \int vdu$$
$$= \ln(x)\,x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= x\ln(x) - \int dx$$
$$= \ln(x)\,x - x + c$$

یادونه کوو چې پورته افاده د $x > 0$ له پاره صحیح د ه.

د

$$\int x^r \ln(x)dx$$

غیرمعین انتیګرال دهغې طریقې له مخې چې د $ln(x)$ اولیه تا بع د معلومولو له پاره په کار وړل شوي ده کولای شو محا سبه کړو، کله چې $r \neq -1$ وي. فرضووچې $u = ln(x)$ او $dv = x^r dx$ (که $r = -1$ وي نو $u = \ln(x)$ وضع کوو) .

مثال (6.1.6) . د $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ محاسبه کړئ.

حل. لروچې

$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\,ln(x)\,dx = \int ln(x)x^{\ 1/2}\,dx\ .$$

فرضووچې $u = \ln(x)$ او $dv = x^{-1/2}dx$ دی، له دې څخه= $v = \int dv = \int x^{-1/2}\,dx$ $2x^{-1/2}$

$v = \int dv = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{-1/2}$ او $du = \frac{1}{x}dx$ دی .

په دې توګه

$$\int ln(x)x^{-1/2}\,dx = \int udv$$
$$= uv - \int vdu$$
$$= ln(x)(2x^{1/2}) - \int 2x^{1/2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 2\sqrt{x}\,ln(x) - 2\int x^{-1/2}\,dx$$
$$= 2\sqrt{x}\,ln(x) - 2\left(2\,x^{-\frac{1}{2}}\right) + c$$

$= 2\sqrt{x}\, ln(x) - 4\sqrt{x} + c,$

داسې چې c یو اختیاري ثابت دی .

څرنګه چې طبیعی لو ګاریتم د طاقت نما تابع معکوسه تابع ده کولای شو هغه قاعده چې د طاقت نما تابع غیرمعین انتیګرال د محاسبی له پاره په کار وړل شوي د نورو معکوسوتوابعو لکه د $\arcsin(x)$ ، $\arcosn(x)$ او $\arctan(x)$ غیرمعین انتیګرال د محاسبی له پاره هم په کاریوړل شي.

مثال (7.1.6) . د $\int \arctan(x)\, dx$ **محاسبه کړئ**

حل. فرضووچې $u = \arctan(x)$ **او** $dv = dx$ **دی، له دې ځایه**

$u = \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{1+x^2}dx$ **او** $v = x$

دی .په دی توګه

$$\int \arctan(x)\, dx = \int udv$$

$$= uv - \int vdu$$

$$arctan(x)(x) - \int x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$xarctan(x) - \int \left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx.$$

په همدی ډول د ښيي خوا غير معين انتيګرال د محاسبه کولو له پاره د تعويض طريقې له مخې $w = 1 + x^2$ **وضع کوونو** $dw = 2xdx$ **کيږي.**

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)dx = \int \frac{1}{w}dw$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|w|) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1).$$

بنأ پردې

$$\int \arctan(x)\, dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$$

د $\int e^{ax}\cos(bx)\, dx$ **يا** $\int e^{ax}\, sin(bx)\, dx$ **ډول انتيګرالونه چې په هغه کې** a **او** b **ثابت عد دونه دي کولالي شو په دوراني شکل په انتيګرالونو کی د قسمي طريقې له مخې دلاندی مثال په شان انتيګرال ونيسو :**

مثال(8.1.6) . a) د $\int e^{-x/2}\cos(x)\,dx$ محاسبه کړئ

b) د G ناحیې ګراف چې د $y=e^{-x/2}\cos(x)$ تابع ګراف $[0,\pi]$ انټروال په منځ کې واقع دی، رسم او د ترسیم شوي ګراف په مرسته د G ساحې مساحت محاسبه کړئ.

حل. a) فرضوو چې $u=e^{-x/2}$ او $dv=\cos(x)dx$ له دې ځایه

$du=\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx$ او $v=\int\cos(x)\,dx=\sin(x)$. دی.

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int udv &= uv-\int vdu\\ &=\frac{1}{2}e^{-x/2}\sin(x)-\int\sin(x)\,(\tfrac{1}{2}e^{-x/2})dx\\ &=e^{-x/2}\sin(x)+\frac{1}{2}\int e^{-x/2}\sin(x)\,dx\end{aligned}$$

څرګنده ده چې په انټیګرال نیونه کې دقسمي طریقې د استعمالولو په صورت کې د انټیګرال ترعلا می لاندې یوازې $\cos(x)$ په $\sin(x)$ تعویض شوي. د $u=e^{-x/2}$ او $dv=\sin(x)$ په وضع کولو سره په انټیګرال نیولو کې د قسمي طریقې ددویم ځل په استعمالولوسره مونږ لــومــړنــی حالــت لاســته راوړو. نــو پــه دې ډول $v=\int\sin(x)\,dx=-\cos(x)$, او $du=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$ او هم

$$\begin{aligned}\int e^{-x/2}\sin(x)\,dx=\int udv &= uv-\int vdu\\ &=e^{-\frac{x}{2}}\big(-\cos(x)\big)-\int\big(-\cos(x)\big)(-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})\,dx\\ &=-e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)-\tfrac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx\end{aligned}$$

دی .

له دې ځایه

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx &=\int e^{-x/2}\sin(x)+\tfrac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)dx\\ &=e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)+\tfrac{1}{2}(-e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)-\tfrac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx)\\ &=e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)-\frac{1}{4}\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx\end{aligned}$$

دی .

څرنګه چې

$$\frac{5}{4}\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx=e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)$$

دی .

له دې ځایه

$$\int e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx = \frac{4}{5}e^{-\frac{x}{2}}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x) + c$$

دی.

b) د 2 شکل د G ناحیه مشخص کوي. که $e^{-\frac{x}{2}}\cos(x) = 0$ وي .شکل دا راښيي چې د $0 \le x \le \pi$ له پاره $f(\pi) = 0$ ، د $f(x)$ او دا یو حقیقت دی چې د $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$ له پاره $f(x) < 0$ دي

$$e^{-\frac{x}{2}}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0,$$

څرنګه چې دهر $x \in \mathbb{R}$ له پاره $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ دی لروچې او د $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\cos(x) = 0$ او د $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$ له پاره $\cos(x) < 0$ دي نو له دي ځایه د G د ساحی مساحت عبارت دی له

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx - \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx.$$

د a) د برخې له مخې

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx &= \frac{4}{5}e^{-\frac{x}{2}}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)\Big|_0^{\pi/2}\\ &= \left(\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{4}{5}e^{0}\sin(0) - \frac{2}{5}e^{0}\cos(0)\\ &= \frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

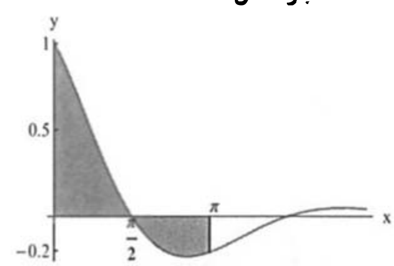
او

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)dx = \frac{4}{5}e^{-\frac{x}{2}}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(\pi) - \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(\pi)\right) - \left(\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

سره مساوي دی .

نو په دې ډول د G ساحې مساحت عبارت دی له:



(2) شکل

$$\left(\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\cong 1.04635$$

(2.1.6) د معینو انتیګرالونو له پاره د انتیګرال نیولو قسمي طریقه .

د انتیګرال نیولو قسمي طریقې په مرسته مونږ و کولای شو چې د غیر معین انتیګرال د استعمالولو په حالت کې د معین انتیګرال محاسبه لکه د (8.1.6) مثال په شان لاسته راوړو. که په دې برخه کې د انتیګرال نیولو د قسمي طریقې هغه شکل په پام کې و نیسو کوم چې په مستقیم ډول د معین انتیګرالونو په محاسبه کې په کار وړل کیږي.

قضیه (2.1.6) .(د معین انتیګرالونو له پاره د انتیګرال نیونې قسمي طریقه)

فرضووچې f' او g' د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي دي په دې صورت کې ،

$$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}dx=[f(b)g(b)-f(a)g(a)]-\int_a^b g(x)\frac{df}{dx}dx$$

دی.

ثبوت. په غیر معینو انتیګرالونو کې د انتیګرال نیولو قسمي طریقې د ثبوت په شان په لومړي مرحله کې د مشتق نیولو له پاره د حاصل ضرب قاعده په کا روړو .

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx=\frac{df}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg}{dx}$$

څرنګه چې f' او g' د $[a,b]$ پرمخ متمادي دي نو $f\ g$, $f'\ g$ او $f\ g'$ هم پر نوموړي انټروال متمادي دي . پس د $[a,b]$ پر انټروال د انتیګرال نیولووړدي .د تفاضلي او انتیګرال اساسی قضیې له مخې .

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

نو په دې ډول

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b\left(\frac{df}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg}{dx}\right)dx$$
$$=\int_a^b\frac{df}{dx}g(x)dx+\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}dx.$$

په دې ډول

$$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}dx=[f(b)g(b)-f(a)g(a)]-\int_a^b g(x)\frac{df}{dx}dx$$

د غیرمعینو انتیگرالونوپه شان مونږ په معینو انتیگرالونو هم قسمي انتیگرا ل نیولو د مفهوم د څرګندولو له پاره د لاندې سمبول کارولی شو .

$$du=\frac{du}{dx}dx.$$

په رېښتیا سره که $f(x)$ په u او $g(x)$ په v عوض کړو وبه لرو چې

$$\int_a^b udv=[u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b vdu$$
$$=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

مثال(9.1.6). په غیرمعینو انتیگرالونو کې د انتیگرال نیولو قسمي طریقې د کارولوپه صورت کې د $\int_0^{1/2}\arcsin(x)\,dx$ قیمت محاسبه کړئ.

حل .فرضوو چې $u=\arcsin(x)$ $dv=dx$ دې پس

$du=\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ او $v=\int dx=x.$ په لاس راځي په دې توګه

$$\int_0^{1/2}\arcsin(x)\,dx=\int_0^{1/2}udv$$
$$=uv\Big|_0^{1/2}-\int_0^{1/2}udv$$
$$=\arcsin(x)\,x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{1/2}x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi}{12} - \int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

دساده تعویض په صورت کې کولای شو دښي خوا انتیګرال محاسبه کړو که چیرې $w = 1 - x^2$ وضع کړو و به لرو چې $dw = -2xdx$ او

$$\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_{w(0)}^{w(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{w^2}} dw$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{0}^{3/4} w^{-1/2} dw$$

$$= -\frac{1}{2} (2w^{1/2} \Big|_{1}^{3/4})$$

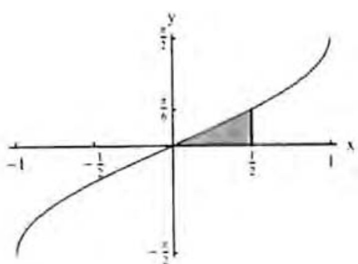
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} + 1.$$

بنأ پر د ې

$$\int_{0}^{1/2} \arcsin(x)\, dx = \frac{\pi}{12} - \int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 1$$

په نتیجه کې دهغې ناحیې مساحت چې د $f(x) = \arcsin(x)$ تابع ګراف او د $[0,1/2]$ د انټروال په منځ کې واقع دي، عبارت دی له.

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 \cong 0.127825.$$



شکل (3)

(3) شکل نوموړې ناحیه مشخص کوي .په معینو انتیګرالونو کې د انتیګرال نیولو قسمي طریقې په مرسته دځینې مشخص موضوعات د عمومی حالت له اثبات څخه په استفاده په لاس راوړلې شو .

مثال(10.1.6) . فرضاً f'' او g'' د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي، او

$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$

وي.

ښيو چې

$$\int_a^b f''(x)\, g(x)dx = \int_a^b f(x)\; g''(x)dx.$$

حل . په انتیګرال نیولو کې د قسمي طریقې له مخې

$$\int_a^b f''(x)\; g(x)dx = \int_a^b (f')'(x)\; g(x)dx$$

$$= f'(b)\, g(b) - f'(a)g(a)) \;\; - \int_a^b f'(x)\; g'(x)dx$$

$$= -\int_a^b f'(x)\; g'(x)dx$$

ځرنګه چې $g(a) = g(b) = 0$ **دي.** $u = g'(x)$ **او** $dv = f'(x)dx$ **په تعویض او په انتیګرال نیولو کې د قسمي طریقې ددویم ځل د تطبیق په نتیجه کې په لاس راوړو.**

$v = f(x)$ او $du = g''(x)dx$ **دي**

بناً پردې

$$\int_a^b f'(x)\; g'(x)dx = \int_a^b udv$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu$$

$$= g'(b)f(b) - g'(a)f(a) - \int_a^b f(x)\; g''(x)dx$$

$$= -\int_a^b f(x)\; g''(x)dx,$$

ځکه چې $g(a) = g(b) = 0$ **دي نود پورته په شان لیکلای شوچې**

$f(a) = f(b) = 0.$

$$\int_a^b f''(x)\, g(x)dx = \int_a^b f'(x)\ g'(x)dx = -\left(-\int_a^b f\ (x)\ g''(x)dx\right)\ ,$$
$$= \int_a^b f\ (x)\ g''(x)dx$$

(2.6) دنسبتي توابعو انتيگرال.

په دې برخه کې دهغو توابعوغیرمعینو انتیگرالونو انتیگرال چې په نسبتي ډول ، طبعي لوگارتم او تانجنت د معکوس ترکیب په شکل ورکړل شوي وي . توضیح کوو . دا مطلب د الجبري قواعدوله مخې دنسبتي کسرونو د تجزیې په مرسته تر سره کیږي.

خصوصي حالات (1.2.6). د لاندې نسبتي توابعو غیر معین انتیگرالونه ترکتنې لاندې نیسو

$$\int \frac{1}{x^n}dx = \int x^{-n}\, dx = \frac{x^{-n+1}}{x^{-n+1}} + c, n \neq 1,$$
$$\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + c$$
$$\int \frac{1}{x^2\ +1}dx = arctag(x) + c$$

(د تل په شان c یو اختیاری ثابت دې)

د (6.6)په برخه کې به دا اړتیا ولروچې د پورتنیو فورمولونوپه شان مطلب د تعویضی طریقې په مرسته لکه دلاندې مثال په شان تشریح کوو .

مثال (1.2.6) . د $\int \frac{x}{(x^2+9)^2}dx$ انتیگرال محاسبه کړئ.

حل . فرضوو چې $u = x^2\ +9$ له دې څخه $\frac{du}{dx} = 2x$ په دې توگه لروچې

$$\int \frac{x}{(x^2\ +9)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2\ +9)^2}(2x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2\ +9)^2}\frac{du}{dx}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{-2}\, du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-1}\right) + c = -\frac{1}{2u} + c = -\frac{1}{2(x^2\ +9)^2} + c$$

مثال (2.2.6) a) د $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx,$ غیرمعین انتیگرال محاسبه کړئ.

b) د $\int_{-4}^{-2} \frac{x^2}{x^3+1}dx$ انتیگرال قیمت محاسبه کړئ.

حل . a) فرضوو چې $u = x^3 + 1$ او $\frac{du}{dx} = 3x^2$ دی په دې ډول ليکلای شو:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{x^3+1}(3x^2)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{x^3+1}\left(\frac{du}{dx}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln(|u|) + c = \frac{1}{3}\ln(|x^3+1|) + c.$$

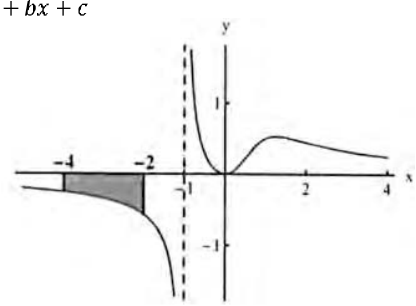
د يادونې وړده چې دغيرمعين انتيګرال له پاره پورتنی افاده په ټولو هغو انټروالونوکې صحت لري کوم چې د $(-1,\infty)$ او يا $(-\infty,-1)$ په انټروالونوکې شامل دي .

b) د a د برخې او د معين انتيګرالونو د محاسبې د فورمول له مخې لروچې:

$$\int_{-4}^{-2} \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}ln(|x^3+1|)\Big|_{-4}^{-2}$$
$$= \frac{1}{3}ln(|-7|) - \frac{1}{3}ln(|-63|)$$
$$= \frac{1}{3}ln(7) - \frac{1}{3}\ln(63) = -\frac{1}{3}ln\left(\frac{63}{7}\right) = -\frac{1}{3}ln(9)$$

(1) شکل هغه ناحيه مشخص کوي چې د $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ ګراف او د$[-4,-2]$انټروال تر منځ واقع ده . د په نښه شوې ناحيې مساحت عبارت دی له$ln(9)/3$ –او د G ناحيې مساحت عبارت دی له $ln(9)/3$ –.که چيرې دax^2+bx+c يوه دويمه درجه افاده ولرو داسې چې په هغو خطي فکتورونود تجزيې وړنه وي کوم چې ضريبونه يې حقيقي عددونه وي .لکه چې مو په 1.1.A او د1 په ضميمه کې مو وليد ل دا هغه حالت دی چې يوازې قاسمه b^2-4ac يې کو چنی تر صفر وي . که چيرې ax^2+bx+c د تجزيې وړنه وي، کولا ی شود

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$



(1) شکل

د تکمیل مربع کولو په واسطه غیرمعین انتیگرال محاسبه د

$$\int \frac{1}{u^2+1}du = arctan(u) + c$$

فورمول په مرسته د لاندي مثال په شان په لاس راوړو .

مثال (3.2.6) . د $\int \frac{1}{4x^2-8x-13}dx$ انتیگرال معلوم کړئ.

حل. څرنگه چې د $4x^2 - 8x + 13$ افاده قاسمه منفي ده نو په ساده فکتورونونه تجزيه کيږي .

$$(-8)^2 - 4(4)(13) = -144$$

که تکمیل مربع یې کړو لروچې

$$4x^2 - 8x + 13 = 4(x^2 - 2x) + 13 = 4(x-1)^2 - 4 + 13 = 4(x-1)^2 + 9$$

له دې ځایه

$$\int \frac{1}{4x^2 - 8x + 13}dx = \int \frac{1}{4(x-1)^2 + 9}dx$$

$$= \int \frac{1}{9\left(\frac{4(x-1)^2}{9} + 1\right)}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^2 + 1}dx$$

که په وروستني انتیگرال کې $u = \frac{2(x-1)}{3}$ وضع کړو د $\frac{du}{dx} = \frac{2}{3}$ له مخې حاصلوو:

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^2 + 1}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\left(\frac{3}{2}\right)\frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \frac{1}{6}arctan(u) + C$$

$$= \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(x-1)}{3}\right) + C\,,$$

دلته C یو اختیاري ثابت دي .

که چیرې $ax^2 + bx + c$ په خطي فکتورونود تجزيي وړ نه وي نود

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}dx$$

غیرمعین انتیگرال کولای شو د مکملې مربع او د تعویض په مرسته په لاندې ډول و لیکو کله چې n یو تام اوخلاف د 1عدد وي .

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

قضیه (1.2.6). که چیرې n یو تام عدد او $n > 1$ وي نو

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \left(\frac{2n-3}{2(n-1)}\right)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

پورتنۍ افاده کمونی فورمول په نوم یادوي . که چیرې n یو طبعیي عدد د وي نوهغه نوع انتیګرال چې د n توان لرونکی وي په $n-1$ توان بدلیږی .

ثبوت. لاندی مطابقت په پام کې نیسو :

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}.$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$$

که د قسمي طریقي میتود په غیرمعین انتیګرال باندی د $dv = \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$ او $u = x$ سره تطبیق کړو په لاس راوړو. $v = \int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx$ او $du = dx$ د $w = x^2+1$ د تعویض په واسطه لاس ته راوړو. څرنګه چې $\frac{dw}{dx} = 2x$ دي له دې ځایه حاصلوو :

$$v = \int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx = 1/2\int \frac{1}{w^n}\frac{dw}{dx}dx = 1/2\int w^{-n}dw$$

$$= 1/2\left(\frac{w^{-n+1}}{-n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)w^{n-1}} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

دی.

په دې توګه

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int udv = uv\int vdu$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}dx$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx.$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx$$

$$= \left(\frac{2n-3}{2(n-1)}\right)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

لاندی مثال د (1.2.6) دقضیي دکموالی فورمول تشریح کوي.

مثال (4.2.6) . د$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ انتیګرال تعین کړئ .

حل.د (1.2.6) دعوي د کموالی په فورمول کې$n = 3$ په پام کې نیسو .

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{x}{4(x^2+1)^2} = 3/4\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

اوس په بنې خوا انتیګرال کې د کمښت فورمول د $n = 2$ لپا ره تطبیقوو

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

څرنګه چې

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2arctan(x)}$$

دی نو لرو چې

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2arctan(x)} + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

له دې ځایه

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} = 3/4\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx\\ &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + 3/4\left(arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + C\\ &= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}arctan(x) + C\end{aligned}$$

(2.2.6) اختیاري نسبتي توابع. د یوې نسبتي تابع ا نتیګرال کولای شو دهغه طریقې په واسطه ترسره کړو چې دقسمي کسرونودتجزیې په نوم دیږی . که چیرې f ، $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$یوه نسبتي تابع دی.

دلته $p(x)$ او $Q(x)$ دوه پولینومونه دي .که د صورت پولینوم $p(x)$ درجه د مخرج د پولینوم$Q(x)$ له درجې څخه لویه یا مساوي وي کولای شو د تقسیم د عملیې په واسطه د $f(x)$افاده داسې ولیکو:

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

دلته $p(x)$ او $r(x)$ دواړه پولینومونه دي داسې چې د $r(x)$ درجه د $Q(x)$ له درجې څخه کوچنې ده د $\frac{r(x)}{Q(x)}$ افاده په پام کې نیولو سره په قسمی کسرونوباندې د $f(x)$ تجزیه د لاندي افادود حاصل جمع په توګه لاس ته راځي. $\frac{A}{(x-d)^k}$ او $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^l}$ چې دلته $(x-d)^k$ او $(ax^2 + bx + c)^l$ د مخرج$Q(x)$ ضربی عاملونه او $ax^2 + bx + c$ په حقیقی جذرونو د تجزیی وړنه قسمي کسرونه له د

$$\frac{A_1}{x-d}+\frac{A_2}{(x-d)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-d)^m}$$

حاصل جمع شکل ولري. داسې چې د $Q(x)$ په تجز يه کې m د $x-d$ تر ټولو لوړ توان دي. که چیرې m په $Q(x)$ کې د ax^2+bx+c نه تجزیه کیدونکې فکتورتر ټولو لوړتوان وي نو په قسمي کسرونود هغې تجزیه به د لاندی حاصل جمع په شکل ولري.دلته ځینې مثالونوته پاملرنه کوو.

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

مثال (2.5.6). که $f(x)=\frac{x^2-x-5}{x^2-x-2}$ وي نو .

a)$f(x)$ په قسمي کسر تجزیه یی کړئ.

b) د $\int f(x)\,dx$ معلوم کړئ

حل.a) څرنگه چې د صورت توان د مخرج له توان څخه لوي دی نو صورت په مخرج تقسیموو. (د تقسیم اوږده عملیه اجرا کوو)په لاس راوړو

$$f(x)=x+1+\frac{2x-3}{x^2-x-2}$$

په بله مرحله کې د امکان په صورت کې مخرج په خطي فکتورونو تجزیه کوو د $A.1.1$ د برخې اود (1) ضمیمی مطابق ، ددويمی درجې فورمول په واسطه د $x^2-x-2=0$ ددويمی درجې معادلې د حـــل څـــخه لاسته راځي. څرنگه چې$x=-1$یا $x=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$دی. لـــرو

چې$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ (داډول تجزیه کولای شوود هغو مشخصو طریقو په مرسته چې د تفا ضلی حساب په امادگی کورسونوکې مو پیژ ندلی، لاسته راوړو.په دی مشخص حالت کې د تکمیل مربع طریقه یوبله طریقه ده د کومې په مرسته چې کیدای شي غیرنسبتي فکتورونه هم په لاس شی).

اوس A او B عد دونه داسې تر لاسه کوو. چې د هر $x\neq 2$ او $x\neq -1$ له پاره معینه وي:

$$\frac{2x-3}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

په دې حالت کې لروچې :

$$\frac{2x-3}{x^2-x-2}=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

په دې معنې، د هر x له پاره چې $x\neq 2$ او $x\neq -1$ وي.

$$2x-3=A(x+1)+B(x-2)$$

باید ووایو چې پورته مساوات د$x=-1$ یا $x=2$ له پاره هم صدق کوی او دا یوحقیقت دی د متمادي توابعو له پاره چې د پورتنی افادې په دواړوخواو کې موجودې دي لروچې.

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=\lim_{x\to 2}((Ax+1)+B(x-2))$$

څرنګه چې

$$2x-3|_{x=2}=A(x+1)+B(x-2)|_{x=2}$$

په مشابه ډول

$$2x-3|_{x=-1}=A(x+1)+B(x-2)|_{x=-1}$$

پــه لاندی مثالونــوکې د محاسباتو د تکــرارڅخه صرف نــظر کــوو پــه نتیجه کې لــروچې $B=5/3$ او $A=\frac{1}{3}$ $-5=-3B\rightarrow$ او $3A=1$که$x\neq 2$ او$x\neq -1$ وي نو په دی صورت کې

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{5}{3(x+1)}$$

په نتیجه کې

$$f(x)=x+1+\frac{2x-3}{x^2-x-2}=x+1+\frac{1}{3(x-2)}+\frac{5}{3(x+1)}$$

b) د a د برخې د نتیجې، اودانتیګرال د خطي خاصیت له مخې لرو

$$\int f(x)\,dx=\int\left(x+1+\frac{1}{3(x-2)}+\frac{5}{3(x+1)}\right)dx$$
$$=\int x\,dx\int 1\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3}ln(|x-2|)+\frac{5}{3}ln(|x+1|)+C,$$

داسې چې C یو اختیاری ثابت دی.

مثال (6.2.6). که $f(x)=\frac{2x^2+6x-26}{(x-2)(x+1)(x-4)}$ وي.

a)$f(x)$ په قسمي کسر تجزیه کړئ.

b) د $f(x)$ انتیګرال معلوم کړئ.

حل. څرنګه چې دصورت درجه 2 او دمخرج درجه3 دی نو دتقسیم عملیې ته ضرورت نه لیدل کیږی لازم دی A، B او C لاسته راوړو.داسې چې

$$\frac{2x^2+6x-26}{(x-2)(x+1)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-4}$$

دا هغه وخت امکان لري چې د هر $x\neq 2$، $x\neq -1$ او $x\neq 4$ له پاره لاندی مطابقت صدق وکړئ

$$2x^2+6x-26\equiv A(x+1)(x-4)+B(x-2)(x-4)+C(x-2)(x+1)$$

د (5) مثال په شان، کولایشو x په 2 ، -1 او 4 تعویض کړو .څرنګه چې دا توابع د پورتنۍ افادې ددواړه افادو په واسطه معرفی کیږي متمادي دي.نو

$30 = 10C$ ، $-30 = -15B$ او $-6 = -6A$ له دې ځایه $C = 3$. ، $B = -2$ او $A = 1$ ددی.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x - 26}{(x-2)(x+1)(x-4)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-4}$$

b) د a برخې له مخې

$$\int \frac{2x^2 + 6x - 26}{(x-2)(x+1)(x-4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-4}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x-2} dx - 2\int \frac{1}{x+1} dx + 3\int \frac{1}{x-4} dx$$
$$= \ln(|x-2|) - 2\ln(|x+1|) + 3\ln(|x-4|) + C,$$

C یو اختیارب ثابت دی

تبصره (1.2.6). د (د ګاوس د افنا یا حذ ف طریقه) د **(6.2.6)** مثال په پام کې نیولو سره د A ، B او C د لاسته راوړلو له پاره مختلفی لارې او طریقی پــه پــام کې نیولای شو.داسې چې

$$2x^2 + 6x - 26 = A(x+1)(x-4) + B(x-2)(x-4) + C(x-2)(x+1)$$

د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره دښیی خوا جملو د انکشاف څخه وروسته د x د لوړ توان له مخې نوموړې جملې ترتیبوو.

$$2x^2 + 6x - 26 = (A+B+C)x^2 + (-3A - 6B - C)x + (-4A + 8B - 2C)$$

دا حالت ممکن دی که اویوازې که د ورته توانونو ضریبونه مساوي وي.په دې ډول:

$$A + B + C = 2$$
$$-3A - 6B - C = 6$$
$$-4A + 8B - 2C = -26$$

دا د A ، B او C دمجهولونو د معادلو یو سیستم دی.دا سیستم یو خطي سیستم دي ځکه چې د مجهولونو لوړ توان یو دي.دا ډول سیستمونه د تفا ضلي حساب په امادګی کورسونوکې د افنا او د تعویض طریقو په مرسته حل شوي دي په دی ځای کې ددی ډول سیستمونو د حل له پاره د مشهور ریاضی پوه ګاوس طریقه په پام کې نیسونوموړې نظریه ډیره ساده ده ،هغه چې مونږ په یوعد د کې دیوې معادلې په ضربولواوهغه دسیستم دبلې معادلې سره د جمع کولوپه صورت کې د سیستم د معادلو ترتیب ته تغیر ورکووبی له دې چې د سیستم حل تغیر وکړئ.ددی ډول عملیوپه نتیجه کې مونږ په ترتیب سره ورکړل شوي سیستم په یوداسې سیستم بدلووچې حلول یې ساده دي.دی طریقې ته د ګاوس دافنا طریقه ویل کیږي.ددی له پاره چې د ګاوس دافنا طریقه دپورته سیستم له پاره واضیح کړو .مونږ لومړني معادله په پام کې

نیسو.که چیرې په نوموړی معادله کې د A لومړني مجهول موجود نه وي نومونږهغه معادله پیدا کووچې نوموړی مجهول په هغه کې موجوداو هغه مو د لومړۍ معادلې په شان په پام کې نیولې وي په دې ډول سیستم ته تغیرورکوو.مونږ د A مجهول له دویمو او دریمو معادلو څخه داسې له منځه وړوچې لومړۍ معادله په 3 کې ضربووواو ددویمې معادلی سره یې جمع کواو بیا لومړی معادله په4 کې ضربوواو د دریمی معادلې سره یې جمع کوو.لاسته راغلی سیستم داسې لیکو.

$$\begin{gathered} A+B+C=2 \\ -3B+2C=-4 \\ 12B+2C=-18 \end{gathered}$$

که چیرې دویمه معادله په $\frac{1}{3}$کې ضرب کړو د B ضریب1 کیږي (دا کار وروستی محاسبه ساده کوي) او سیستم لاندی شکل غوره کوي:

$$\begin{gathered} A+B+C=2 \\ B-\frac{2}{3}C=-4 \\ 12B+2C=-18 \end{gathered}$$

اوس دویم مجهول B افنا کوو.ددې منظور له پاره ددویمی معادلې 12چنده د دریمی معادلې څخه منفی کوو په نتیجه کې لاندی سیسیتم لاسته راځي.

$$\begin{gathered} A+B+C=2 \\ B-\frac{2}{3}C=-4 \\ 10C=30 \end{gathered}$$

دا دافنا کولو وروستۍ مرحله ده. اوس کولای شومجهولونویوپه یوو ټاکوکه دورستۍ معادلې څخه ورستۍ مجهول پیل کړو داسې چې لومړی دوروستی معا دلې څخه په ترتیب تر لومړی معادلې پورې محاسبې تر سره کوو.دې مرحلې ته یو دبل پسې تعویض مرحله وایي. د وروستۍ معادلې څخه د C قیمت لاسته راځي

$$10C=30\Rightarrow c=\frac{30}{10}=3.$$

د C قیمت په وضع کولو سرهB قیمت ددویمې معادلې څخه لاسته راځی

$$B-\frac{2}{3}C=-4\Rightarrow B-2=-4\Rightarrow B=-2$$

د B او C د قیمتونو په وضع کولو سره د لومړۍ معادلې څخه د A قیمت لاسته راځي

$$A-2+3=2\Rightarrow A=1.$$

مثال (7.2.6) . که

$$f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x-2)}.$$

وي .

a) $f(x)$ په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

b) د $\int f(x)\,dx$ معلوم کړئ.

c) $\int_3^4 f(x)dx$ محاسبه کړئ .

حل. باید A، Bاو C معلوم کړو. داسې چې

$$\frac{4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2},$$

یعنې.

$$4x^2 - 7x + 1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2.$$

اوله طریقه (د x له پاره د مناسبو قیمتونو د وضع کولومتود): که چیرې $x = 1$ وضع کړولاسته راوړوچې

$$-2 = -B$$
$$B = 2$$

که چیرې $x = 2$ وضع کړو $C = 3$لاسته راوړو. په پای کې x ته د یو قیمت په ورکولو څرګنده ده چې د A قیمت ټاکل کیږي . د A د قیمت د ټاکلو له پاره x ته د مخکینیو قیمتونو څخه پرته قیمت ورکووچې د 0 عدد مناسب قیمت دی. که $x = 0$ وضع کړو .لاندې معادله لاسته راوړو.

$$1 = 2A - 2B + C.$$

څرنګه چې $B = 2$ او $C = 3$ دی ، لروچې:

$$1 = 2A - 2(2) + 3 = 2A - 1.$$

له دې ځایه $A = 1$ دی.

په نتیجه کې

$$\frac{4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2}$$

دویمه طریقه: د ګاوس د افنا طریقه (*Gaussian elimination*)

لروچې

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x + 1 &= A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2. \\ &= (A+C)x^2 + (-3A + B - 2C)x + (2A - 2B + C) \end{aligned}$$

د x دعین توانونو ضریبونه مساوي وضع کوو:

$$A + C = 4$$

$$-3A + B - 2C = -7$$
$$2A - 2B + C = 1$$

په دویمه او دریمه معادله کې د A د له منځه وړلولپاره،لومړی معادله په 3کې ضربوو اوددویمی معادلې سره یې طرف په طرف جمع کووااو بیا یې په $2-$کې ضرب اوددریمی معادلې سره یې جمع کوو:

$$A + C = 4$$
$$B + C = 5$$
$$-2B - C = -7$$

په دریمه معادله کې د B له منځه وړلو له پاره دویمه معادله په 2 کې ضرب او ددریمی معادلې سره یې جمع کوو:

$$A + C = 4$$
$$B + C = 5$$
$$C = 3$$

اوس لکه د مخ کې په شان د پرله پسې تعویض څخه کاراخلو

$$C = 3$$
$$B = 5 - C = 2,$$
$$A = 4 - C = 1,$$

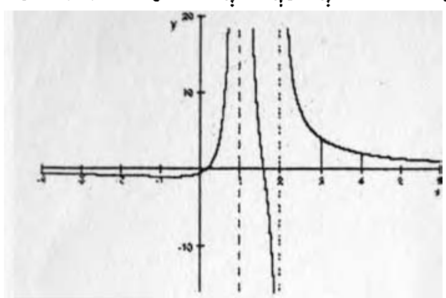
b) د(a برخې له مخې

$$\int \frac{4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x-2)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + 3\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= ln(|x-1|) - \frac{2}{x-1} + 3\,ln(|x-2|) + C$$

(C

$$\int_3^4 \frac{4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x-2)}dx = ln(|x-1|) - \frac{2}{x-1} + 3\ln(|x-2|)\Big|_3^4$$
$$= ln(3) - \frac{2}{3} + 3\,ln(2) - ln(2) + 1$$
$$= \ln(3) + 1/3 + 2\ln(2) \cong 2.8$$

دی 2.8 ډول تقریبي په مساحت ساحې شوې ټاکلې د مطابق شکل (2) د ډول دې په 1824



(2) شکل

مثال (8.2.6). که $f(x)=\frac{3x^2-7x+7}{(x-3)\,(x^2+4)}$ وي.

a) $f(x)$ په قسمي کسر تجزیه کړئ.

b) د $\int f(x)\,dx$ معلوم کړئ.

c) $\int_0^2 f(x)dx.$ محاسبه کړئ .

حل. څرنګه چې x^2+4 په ساده فکتورونو نه تجزیه کیږي، نو $f(x)$ په لاندې ډول په قسمي کسرونو تجزیه کوو

$$\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

له دې ځایه باید ولرو:

$$\frac{3x^2-7x+7}{(x-3)\,(x^2+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4},$$

یعنې

$$3x^2-7x+7=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-3).$$

دلته د x له پاره یوازې یو واضح انتخابي قیمت $x=3$ وجود لري.مونږ A ، Bاو C د قیمتونو له پاره د معادلو سیستم د حل له پاره د ګاوس د افناکولوله متود څخه کاراخلو.په دې توګه.

$$\begin{aligned}3x^2-7x+7 &= A(x^2+4)+(Bx+C)(x-3).\\ &=(A+B)x^2+(-3B+C)x+(4A-3C)\end{aligned}$$

په دې حالت کې:

$$\begin{aligned}A+B&=3\\ -3B+C&=-7\end{aligned}$$

$$4A - 3C = 7$$

د A مجهول په دویمه معادله کې موجود نه دی ددریمی معادلې څخه د A د لمنځه وړلو له پاره د لومړۍ معادلې دواړه خواوې په -4 کې ضربوو اوددریمې معادلې سره یې جمع کوو.

$$A + B = 3$$
$$-3B + C = -7$$
$$-4B - 3C = -5$$

دویمه معادله په $-\frac{1}{3}$ کې ضربووپه نتیجه کې یې د B ضریب 1په لاس راځي یعنې:

$$A + B = 3$$
$$B - \frac{1}{3}C = \frac{7}{3}$$
$$-4B - 3C = -5$$

د دریمی معادلې څخه د B دافنا کولو له پاره د دویمی معادلې اطراف په 4 کې ضرب او ددریمی معادلې سره یې حد په حد جمع کوو.

$$A + B = 3$$
$$B - \frac{1}{3}C = \frac{7}{3}$$
$$-\frac{13}{3}C = \frac{13}{3}$$

اوس که دعقبی تعویض مرحلی وکارو

$$C = -1$$
$$B = \frac{1}{3}C + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = 2$$
$$A = 3 - B = 1$$

$b)$ د برخی له مخې

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{1}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2+4}.$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \ln(|x-3|) + \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$$

اوس

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = 2\int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$$

که چیرې $u = x^2 + 4$ تعویض کړولرو $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1du}{udx}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(|u|)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|)$$

په همدې ترتیب د دویمې برخې د انتیګرال لپاره.

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}dx = 1/4\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx$$

له دې ځایه که چیرې $u = \frac{x}{2}$ وضع کړو وبه لرو چې $\frac{du}{dx} = 12$ او

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2\ +1}dx = 1/2\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^{\ 2}+1}\left(\frac{1}{2}\right)dx$$
$$= 1/2\int \frac{1}{u^2+1}\frac{du}{dx}\ dx = 1/2\int \frac{1}{u^2+1}du = 1/2arctan(u) = 1/2arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

بناً پردې

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = 2\int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx = \ln(|x^2+4|) + 1/2arctan(x/2)$$

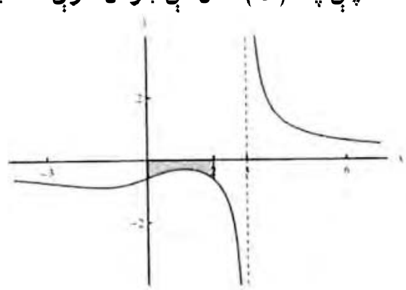
په نتیجه کې

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \ln(|x-3|) + \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$$
$$= \ln(|x-3|) + \ln(|x^2+4|) + 1/2arctan(x/2) + C$$

داسې چې C یو اختیاري ثابت دي.

$$\int_0^2 \frac{3x^2-7x+7}{(x-3)(x^2+4)}dx = \ln(|x-3|) + \ln(|x^2+4|) + 1/2\arctan\ (x/2)\Big|_0^2 (C$$
$$= \ln(1) + \ln(8) - \frac{1}{2\arctan\ (1)} - \ln(3) - \ln(4)$$
$$+1/2arctan(0)$$
$$= \ln(2) - \ln(3) - \frac{\pi}{8} \cong -0.798164$$

په نتیجه کې دهغې ناحیې مساحت چې په (3) شکل کې بنودل شوې ده عبارت دی له 0. 8



(3) شکل

(3.6) د ځینو مثلثاتي او هایپربولیکي توابعو انتیګرال:

په دې برخه کې د $sin\ (x)$ ، $cos\ (x)$ اویا $sinh\ (x)$ او $cosh\ (x)$ توان لرونکې اودضرب په حالت کې توابعو انتیګرال تر مطالعې لاندې نیسو .همدارنګه ددې ډول افادو کسري حالت هم په پام کې نیسو .(1.3.6) د $sin\ (x)$ ، $cos\ (x)$ اویا $sinh\ (x)$ او $cosh\ (x)$ د حاصل ضرب مونږ دلته دلاندې ډول توابعوغیرمعین انتیګرال په پام کې و نیسو

$$\int sin^m(x)cos^n(x)dx or = \int sinh^m(x)cosh^n(x)dx,$$

چې دلته m او n تام عددونه دي.

مثال (1.3.6) . د $\int sin^5(x)cos^2(x)dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل . ځرنګه چې د $sin\ (x)$ توان تاق دي نو $sin^5(x)$ افاده به د $sin^4(x)\ sin\ (x)$ په شکل اود $sin^2(x)+cos^2(x) = 1$ مطابقت له مخې د $sin^4(x)$ افاده د $cos^2(x)$ جملې په شکل ارایه کوو.

$$\begin{aligned}\int sin^5(x)cos^2(x)dx &= \int sin^4(x)cos^2(x)sin\ (x)dx\\ &= \int (sin^2(x))^2cos^2(x)sin\ (x)dx\\ &= \int (1-cos^2(x))^2\ cos^2(x)sin\ (x)dx\end{aligned}$$

په پورتنۍ افاده کې د $u = cos\ (x)$ له تعویض ځخه استفاده کوو نو $\frac{du}{dx} = -sin\ (x)$ لاسته راوړو چې:

$$\begin{aligned}\int sin^5(x)cos^2(x)dx &= \int (1-cos^2(x))^2\ cos^2(x)sin\ (x)dx\\ &= -\int (1-u^2)^2\ u^2\frac{du}{dx}dx\\ &= -\int (1-u^2)^2\ u^2du\\ &= -\int (u^2-2u^4+u^6)\ du\\ &= -\frac{1}{3}u^3+\frac{2}{5}u^5+\ \frac{1}{7}u^7\\ &= -\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{2}{5}\cos^5(x)++\frac{1}{7}cos^7(x)+C\end{aligned}$$

مثال (2.3.6) . د $\int sin^2(x)cos^3(x)dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل . ځرنګه چې د $cos\ (x)$ توان تاق دي نو $cos^3(x)$ افاده د $cos\ (x)\ cos^2(x)$ په شکل او $sin^2(x)+cos^2 = 1$ مطابقت له مخې د $cos^2(x)$ افاده د $sin^2(x)$ له مخې لیکو .

$$\int sin^2(x)cos^3(x)dx = \int sin^2(x)cos^2(x)cos\,(x)dx$$
$$= \int sin^2(x)(1 - sin^2(x))cos\,(x)dx$$

که $u = sin\,(x)$ **تعویض کړو،** $\frac{du}{dx} = cos\,(x)$ **په لاس راځي او**

$$\int sin^2(x)(1 - sin^2(x))cos\,(x)dx = -\int u^2(1 - u^2)\ \frac{du}{dx}dx$$
$$= \int (u^2 - u^4)\ du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{2}{5}\sin\ ^5(x) + C,$$

داسې چې C **یو اختیاري ثابت دی.**

$$\int sinh^m(x)cosh^n(x)dx,$$

ډوله غیر معین انتیګرال په پام کې نیسو چې دلته m **او** n **تاق عددونه دي،نود دمخکینی طریقې په شان عمل کوو نود** $sin^2(x){+}cos^2(x) = 1$ **مطابقت په ځای** $cosh^2(x){-}sinh^2(x) = 1$ **له مطابقت څخه کار اخلو .**

مثال (3.3.6) . د $\int sinh^4(x)cosh^5(x)dx$ **انتیګرال محاسبه کړئ**

حل . $cosh\,(x)$ **توان تاق دي** $cosh^5(x)$ **افاده** $cosh^4(x)cosh\,(x)$ **په ډول لیکو. اود** $cosh^2(x){-}sinh^2(x) = 1$ **د مطابقت له مخې د** $cosh^2(x)$ **افاده د** $sinh^2(x)$ **له جنسه لیکو :**

$$\int sinh^4(x)cosh^5(x)dx = \int sinh^4(x)cosh^4(x)cosh\,(x)dx$$
$$= \int sinh^4(x)(1 + sinh^2(x))^2cosh\,(x)dx$$

د پورتنۍ افادې له پاره د $u = sinh\,(x)$ **له تعویض څخه کار اخلو نو** $\frac{du}{dx} = cosh\,(x)$ **کیږي بنأ**

$$\int sinh^4(x)cosh^5(x)dx = \int sinh^4(x)(1 + sinh^2(x))^2cosh\,(x)dx$$
$$= \int u^4(1 + u^2)^2\ \frac{du}{dx}dx$$
$$= \int u^4(1 + u^2)^2du$$
$$= \int u^4(1 + 2u^2 + u^4)\ du$$
$$= \int (u^4 + 2u^6 + u^8)du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{7}u^7 + + \frac{1}{9}u^9 + C$$
$$\frac{1}{5}sinh^5(x) + \frac{2}{7}sinh^7(x) + + \frac{1}{9}sinh^9(x) + C$$

داسې چې C یو اختیاري ثابت دی.

که چیرې m او n جفت تام عددونه وي. نو د

$$\int sin^m(x)cos^n(x)dxor = \int sinh^m(x)cosh^n(x)dx,$$

انتیگرالونو د محاسبې له پاره مختلفې طریقې پکار وو .تر ټولو ساده حالت په پام کې نیسو.

مثال (4.3.6) .د $\int sin^2(x)dx$ انتیگرال محاسبه کړئ

حل . د لاندې مطابقت څخه کار اخلو کوم چې د A ضمیمې د $6A$په برخه کې ذ کر شوې دی .

$$sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

په دې ډول

$$\int sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

البته د C اختیاری ثابت په علاوه کولو سره لروچې.

$$\int sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

همدارنگه په مشابه ډول کولې شو د

$$\int cos^2(x)dx$$

انتیگرال د

$$cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

مطابقت په استعمالولو محاسبه کړو چې په نتیجه کې

$$\int cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

دی.

د

$cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ او $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ مطابقتونه کولای شو د انتیګرالونو د محاسبه کولو له پاره پکار یوسو. د مثال په ډول:

$$\int sin^n(x)cos^n(x)dx$$

مثال (5.3.6) . د $\int cos^4(x)dx$ انتیګرال محاسبه کړئ

حل. لرو چې

$$\begin{aligned}
\int cos^4(x)dx &= \int (cos^2(x))^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx,
\end{aligned}$$

که چیرې $u = 2x$ وضع کړو نو

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(2x)dx &= \frac{1}{2}\int \cos^2(u)du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin(2u)\right) \\
&= \frac{u}{4} + \frac{1}{8}\sin(2u) \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin(4x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int cos^4(x)dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin(4x)\right) \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)
\end{aligned}$$

البته د C اختیاري ثابت په علاوه کولو سره لروچې.

د $sin\ (x)$ او $cos\ (x)$ دجفتو توانونو د حاصل ضرب انتیګرال کولای شو د $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ مطابقت له مخې د $sin\ (x)$ او یا $cos\ (x)$ د توانونو په انتیګرال نیولو هم تبدیل کړو.

مثال (6.3.6). د $\int sin^2(x)cos^2(x)dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل . تر انتیګرال لاندې تابع د $cos\ (x)$ د توان له جنسه ټاکو .

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \int (1 - cos^2(x))cos^2(x)dx$$
$$= \int cos^2(x)dx - \int cos^4(x)dx$$

پو هیږوچې

$$\int cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

د (5.3.6) مثال څخه

$$\int cos^4(x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$$

افاده ترلاسه شوې په دې توگه:

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \int cos^2(x)dx - \int cos^4(x)dx$$
$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right) - \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)\right)$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)$$

کله کله دا ډول نا معین انتیگرالونه د $\sin(x)$ او $\cos(x)$ د مختلفو سوالونو پواسطه په مناسب ډول لیکود مثال په ډول .

$$\int sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}(2\sin(x)\cos(x))$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\sin(x))$$

په همدې ډول

$$\int cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x))$$

د (6.3.6) مثال دنتیجی په شان لرو چې.

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{2}{32}\sin(2x)\cos(2x)$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}(2\sin(x)\cos(x))(cos^2(x) - sin^2(x) \cdot$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin(x)\ \ cos^3(x) + \frac{1}{8}sin^3(x)\cos(x)$$

د $\sin(x)$ او $\cos(x)$ طاقت لرونکوجملوغیر معین انتیگرال د کموالی فورمولونو په مرسته کولای شو په مستقیم ډول هم محاسبه کړو.

د $k \geq 2$ د هر تام عدد د له پاره لرو .

$$\int sin^k(x)dx = \frac{1}{k}sin^{k-1}(x)cos\,(x) + \frac{k-1}{k}\int sin^{k-2}(x)dx,$$
$$\int cos^k(x)dx = \frac{1}{k}cos^{k-1}(x)sin(x) + \frac{k-1}{k}\int cos^{k-2}(x)dx,$$

د (2.6) د برخې په شان،د کموالی د فورمول د تطبیق په صورت کې ترانتیګرال لاندې د $sin(x)$ او $cos\,(x)$ توانونه کمیږی چې ترانتیګرال سمبول کې نیول شوي دی .د $sin(x)$ دتوانونو له پاره د کموالی فورمول لاسته راولو . د $cos\,(x)$ دتوانونو له پاره د کموالی فورمول مشابه شکل لري او هغه د تمرین په ډول پریږدو .

د فورمول دلاسته راوړلو اساس قسمي انتیګرال نیول تشکیلوي فرضووچې.$u = sin^{k-1}(x)$

او $dv = sin\,(x)dx$ **په دې ډول** $du = \frac{du}{dx}dx = (k-1)sin^{k-1}(x)cos\,(x)dx$ **او**

$v = \int sin\,(x)dx = -\cos(x)$ **دی.**

له دې ځایه

$$\begin{aligned}\int sin^k(x)dx &= \int sin^{k-1}(x)\sin(x)\,dx\\ &= \int udv\\ &= uv - \int vdu\\ &= sin^{k-1}(x)(-cos\,(x)) - \int (-cos(x)(k-1)sin^{k-2}(x)cos(x)dx\\ &= -sin^{k-1}(x)cos\,(x) + (k-1)\int sin^{k-2}(x)cos^2(x)dx\\ &= -sin^{k-1}(x)cos\,(x) + (k-1)\int sin^{k-2}(x)(1-sin^2(x))dx\\ &= -sin^{k-1}(x)cos\,(x) + (k-1)\int sin^{k-2}(x)dx - (k-1)\int sin^k(x)dx.\end{aligned}$$

څرنګه چې

$$k\int sin^k(x)dx = -cos\,(x)sin^{k-1}(x) + (k-1)\int sin^{k-2}(x)dx$$
$$\int sin^k(x)dx = -\frac{1}{k}sin^{k-1}(x)cos\,(x) + \frac{k-1}{k}\int sin^{k-2}(x)dx.$$

مثال (7.3.6) . د کموالی فورمول پواسطه د $\int sin^4(x)dx$. **انتیګرال محاسبه کړئ.**

حل. د کموالی فورمول کارو داسې چې د ساین توان $k = 4$ **وي**

$$\int sin^4(x)dx = -\frac{1}{4}sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\int sin^2(x)dx.$$

تر ټولو د مخه مو ولیدل چې

$$\int sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}sin\,(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x$$

پورتنۍ افاده د $k = 2$ له پاره د کمونی د فورمول څخه داسې په لاس راوړو.

$$\int sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}sin\,(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int sin\,(x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}sin\,(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1dx$$
$$= -\frac{1}{2}sin\,(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x.$$

په دې توګه

$$\int sin^4(x)dx = -\frac{1}{4}sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\int sin^2(x)dx.$$
$$= -\frac{1}{4}sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}sin\,(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= -\frac{1}{4}sin^3(x)\cos(x) - \frac{3}{8}sin\,(x)\cos(x) + \frac{3}{8}x$$

البته د اختیاری ثابت علاوه کول ضروري بریښي،د

$$\int sinh^m(x)cosh^n(x)dx$$

ډول غیرمعین انتیګرال محاسبه کول کله چې m او n دواړه غیرمنفی جفت عددونه وي ،د پورتني حالت سره په مشابه کوم چې د $sin\,(x)$ او $\cos(x)$ د موجودیت په صورت کې تر سره شوي صورت نیسی.په دې ځای کې یوازې د کموالی فورمول تر مطالعې لاندې نیسو،داهم ممکن دی چې په دوه چنده زاویوفورمول له پاره یې تطبیق کړو.

دکموالی فورمول د$sinh\,(x)$او $cosh\,(x)$ د هر $k \geq 2$ تام عد د لپا ره له پاره عبارت دی له

$$\int sinh^k(x)dx = \frac{1}{k}sinh^{k-1}(x)cosh\,(x) - \frac{k-1}{k}\int sinh^{k-2}(x)dx$$
$$\int cosh^k(x)dx = \frac{1}{k}cosh^{k-1}(x)sinh\,(x) - \frac{k-1}{k}\int cosh^{k-2}(x)dx$$

د $sinh\,(x)$ له پاره فورمول لاسته راوړو . بل فورمول په مشابه ډول تر سره کیږي .د $sin\,(x)$ دحالت په شان د قسمي انتیګرال نیولوطریقه هم یو اساس جوړوي همدارنګه

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

مطابقت د $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$ مطابقت په ځای استعمالوو . که مونږ

$du = sinh\,(x)dx$ ،$u = sinh^{k-1}(x)$

وضع کړو نو

$$du = \frac{du}{dx}dx = (k-1)sinh^{k-2}(x)cos\,h(x)dx,$$

$v = \int sinh\,(x)\,dx = \cos\mathrm{h}(x)$ او کیږي.

په دې ډول

$$\int sinh^k(x)dx = \int \; sinh^{k-1}(x)sinh\,(x)dx$$
$$= \int udv = uv - \int vdu$$
$$= sinh^{k-1}(x)cosh\,(x) - \int cosh(x)(k-1)sinh^{k-2}(x)cosh(x)dx$$
$$= sinh^{k-1}(x)cosh\,(x) - (k-1)\int sinh^{k-2}(x)cosh^2(x)dx.$$

څرنګه چې $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$ دي $cosh^2(x) = sinh^2(x) + 1$ له دې ځایه

$$\int sinh^k(x)dx = sin^{k-1}(x)cosh\,(x) - (k-1)\int sinh^{k-2}(x)(sinh^2(x)+1)dx$$
$$= sin^{k-1}(x)cosh\,(x) - (k-1)\int sinh^k(x)dx - (k-1)\int sinh^{k-2}(x)dx$$

بناً پر دی

$$k\int sinh^k(x)dx = sin^{k-1}(x)cosh\,(x) - (k-1)\int sinh^{k-2}(x)dx$$

په نتیجه کې.

$$\int sinh^k(x)dx = \frac{1}{k}sin^{k-1}(x)cosh\,(x) - \frac{(k-1)}{k}\int sinh^{k-2}(x)dx.$$

دی.

مثال (8.3.6) . د $\int sinh^k(x)dx$ **انتیګرال محاسبه کړئ.**

حل. د کموالی فورمول له مخې د $sinh\,(x)$ **له پاره د** $k = 2$ **له پاره تطبیقوو:**

$$\int sin^k(x)dx = -\frac{1}{2}sinh\,(x)\cosh(x) - \frac{1}{2}\int sinh\,(x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}sinh\,(x)\cosh(x) - \frac{1}{2}\int 1dx$$
$$= -\frac{1}{2}sinh\,(x)\cosh(x) - \frac{1}{2}x + c.$$

مثال (9.3.6). د $\int cosh^4(x)dx$ **انتیګرال محاسبه کړئ.**

حل. دا فورمول د $cosh\,(x)$ **لپاره کله چې** $k = 2$ **وي، تطبیقوو**

$$\int cosh^2(x)dx = -\frac{1}{2}cosh\,(x)\sinh(x) + \frac{1}{2}\int cosh\,(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}cosh\,(x)\sinh(x) - \frac{1}{2}\int 1dx$$

$$= \frac{1}{2} cosh\,(x) \sinh(x) - \frac{1}{2} x + c.$$

مثال (10 .3.6). د $\int cosh^4(x)dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل. د کمونې فورمول د $cosh\,(x)$ له پاره کله چې$k = 4$ وي تطبیقوو

$$\int cosh^4(x)dx$$

$$\int cosh^4(x)dx = \frac{1}{4} cosh^3(x)\sinh(x) + \frac{3}{4}\int cosh^2(x)dx.$$

د(9.3.6) مثال کې مولاندی فورمول ترلاسه کړې وو.

$$\int cosh^2(x)dx = \frac{1}{2} sinh\,(x)\cosh(x) + \frac{1}{2}x.$$

په دې توګه

$$\int cosh^4(x)dx = \frac{1}{4} cosh^3(x)\sinh(x) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} sinh\,(x)\cosh(x) + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \frac{1}{4} cosh^3(x)\sinh(x) + \frac{3}{8} sinh\,(x)\cosh(x) + \frac{3}{8}x$$

(اختیاری ثابت کولی شو ولیکو)

(2.3.6) ځینې عادی انتیګرالونه چې د $\sin(mx)$ او $\cos(nx)$ په شکل وي.

د $\sin(mx)$ او $\cos(nx)$ پورې مربوط انتیګرالونه،چیرې چې m او n غیر منفی عد دونه وي ، عادی اهمیت لري چې په 9.10 برخه کې به یې وګورئ .د محاسبې لــه پاره مونږلاندې مثلثاتی مطابقتونه لرو

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B)$$
$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

پورتني مطابقتونه د ساین اوکوساین د حاصل جمع او حاصل تفریق دفورمولونوڅخه لاسته راځی . چې و به کړای شودتمرین په شکل یې ځوابونه لاسته راوړو .

قضیه (1.3.6) . فرضوو چې چې m او n دواړه غیرمنفی تام عد دونه دي پدی صورت کې.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$ که $m \neq n$ وي

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$ که $m \neq n$ وي

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \pi$ او $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi$ $m \neq n$ وي

که $n \geq 1$ وي

ثبوت . که $m = 0$ وي $\sin(mx) = \sin(0) = 0$ نو انتیګرال یې صفر دی دلته فرضوو چې

که $m \geq 1$ وي .لروچې.

$$sin(mx)\, cos(nx) = \frac{1}{2} sin(mx + nx) + \frac{1}{2} sin(mx - nx)$$

په دې توګه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n))\, xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n))\, xdx$$

که چیرې $u = (m+n)x$ وضع کړو نو لروچې $\frac{du}{dx} = m + n$ له دی ځای

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((m+n)\big)\, xdx = \frac{1}{m+n}\int_{-(m+n)\pi}^{(m+n)\pi} \sin(u)\, dx$$

$$= \frac{1}{m+n}\left(-\cos\big((m+n)\pi\big) + \cos(-(m+n)\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{m+n}\left(-\cos\big((m+n)\pi\big) + \cos\big((m+n)\pi\big)\right) = 0$$

(دلته هغه حقیقت چې د کوساین تابع یوه جفته تابع ده په کار وړل شوي دی)

په مشابه ډول

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((m-n)x\big)\, dx = 0$$

کله چې $m \neq n$ وي.په دې ډول لروچې

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx = 0$$

کله چې $m \neq n$ وي.

که چیرې $m = n$ وي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{4n}\int_{-2n\pi}^{2n\pi} \sin(u)\, du = 0$$

$$= \frac{1}{4n}\left(-\cos(u)\Big|_{-2n\pi}^{2n\pi}\right) = 0$$

b) او c) فرضاً $m \neq n$ وي، لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx$$

لیدل کیږي چې د بنیی خو انتیګرال د صفر سره مساوي دی .د a) دبرخی دثبوت په اساس لرو.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m+n)x)dx = 0$$

d) که .... $n = 1,2,3$ وي .

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi}\sin^2(u)\,du$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\cos(u)\sin(u)\Big|_{-n\pi}^{n\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) = \pi$$

په هم ډول توګه

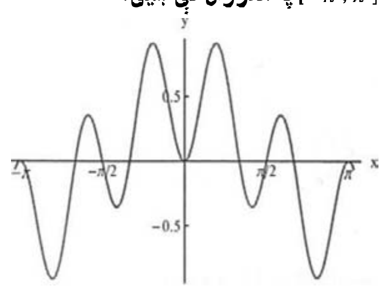
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \pi$$

که چیرې ... $n = 1,2,3$ سره وي .

مثال (11 .3.6).که $f(x) = \sin(2x)\ \sin(3x)$ **وي د(1.3.6) قضیې په اساس لرو چې**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(3x)\ \sin(2x)\,dx = 0$$

لومړی شکل f ګراف د $[-\pi, \pi]$ په انتروال کې بنیی.



(1) شکل

(3.3.6). د $sin\ (x)$ ا$cos(x)$او یا $sinh\ (x)$ او $cosh(x)$ نسبتي توابع (د لخوایا انتخابی)

که $p(x)$ او $q(x)$ د $sin^m(x)$ او $cos^n(x)$ افادو خطي فکتورونه وي ،داسې چې m او n مثبت تام عد ددونه دي. که چیرې

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

وي

$f(x)$ ته د $sin\,(x)$ او $cos(x)$ دنسبتي تابع نسبت ورکول کیږي . په ورته ډول که $p(x)$ او $q(x)$ د $sinh^{m}(x)$ ، $cosh^{n}(x)$ افادو خطي فکتورونه وي نو $f(x)$ ته هم د $sin\,h(x)$ او $cosh\,(x)$ نسبتي تابع ویل کیږي . دمثال په توګه

$$\frac{1}{sin\,(x)+cos(x)}$$

ته د $sin\,(x)$ او $cos(x)$ نسبتي تابع او

$$\frac{1}{sin\,h(x)\ +\ cosh(x)}$$

ته $sin\,h(x)$ او $cosh\,(x)$ نسبتي تابع وایې. دا به وڅیړوچې څنګه کولی شو د تعویض له مخې داډول توابع دهغې په معمولی نسبتي توابعو تبدیل او بشپړ یې کړو .

قضیه (2.3.6). که وي $t = tan(\left(\frac{x}{2}\right)$. نو $dx = \frac{2}{1+t^2}$ او $sin\,(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ دي.

ثبوت. څرنګه چې:

$$t = tan(\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = arctan(t) \pm n\pi = arctan(t) \pm \frac{n}{2}\pi$$

داسې چې $n = 1.2.3 \ldots$ وي څرنګه چې تابع د π په پریود یو پریودیک تابع ده. بنأ پردي

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \left(2\frac{d}{dt}arctan(t)\right)dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

په هم دې ډول د t له جنسه $sin\,(x)$ او $\cos(x)$ د لاسته راوړلو له پاره د مثلثاتو د مشهورو مطابقتونو څخه په استفاده حاصلوو .یعني.

$$sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

که د مطابقت دواړه خواوې په $cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ تقسم کړو حاصلوو:

$$1 + tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$$

بنأ پردی

$$sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

په دې توګه

$$sin\,(x) = 2sin\,\left(\frac{x}{2}\right)cos\,\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{sin\,\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\,\left(\frac{x}{2}\right)}cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2tag(\left(\frac{x}{2}\right)cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2t\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

لروچې :

$$\cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

پورتنې تعويض د(*2.3.6* **) قضيې پواسطه توضيح شوي او مونږ ته دا توان ورکوي چې د** $sin\,(x)$ **او** $\cos(x)$ **نسبتي توابع په بشپړډول په معمولی یا(ساده) نسبتي توابعو تبد یلې او انتیکرال یې پیدا کړو . کوم چې په** *2.6* **برخه کې موپرې بحث وکړ .**

مثال (*12.3.6*). د $\int sec(x)dx$ **انتیگرال محاسبه کړئ .**

حل . ځرنګه چې *secant* **تابع د** *sine* **او** *cosine* **نسبتي تابع ده او**

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

د $t = tan(\left(\frac{x}{2}\right)$ **د تعويض له مخې چې د** *(2.3.6)* **په قضيې کې واضيح شوي دي.**

په دې ډول لروچې:

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt = \int \left(\frac{2}{1-t^2}\right)dt.$$

$$\frac{2}{1-t^2} = -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}$$

بناً پردي

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{cos(x)}dx &= \frac{2}{1-t^2}dt = -\int \frac{1}{t-1}dt + \int \frac{1}{t+1}dt\\ &= -\ln(|t-1|) + \ln(|t+1|)\\ &= ln\left(\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\\ &= ln\left(\left|\frac{tan(\left(\frac{x}{2}\right)+1}{tan(\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|\right)\end{aligned}$$

(د c **ثابت قیمت په علاوه کولوسره)**

تبصره (*1.3.6*) . ځرنګه چې د دوو اوليه توابعوغیرمعین انتیګرال د یو ثابت قیمت په اندازه توپیرلري .دورکړل شوي تابع غیرمعین انتیګرال د مختلفو الجبري طریقو په واسطه په مختلفو لارو کیدای شی تر سره شي.د مثال په ډول دا ځرګندونه ددوالجبري سیستمونو د محاسبوځواب ویونکی دي.(د مطلقه قیمت د علامی د موجودیت موضوع کوم مزاحمت نه پیښوي ،چې دا په طبعی لوګاریتم کې د استفادي وړدي تاسي کولی شی دا ډول ځواب د مشتق نیولو پواسطه وازمایې

$$\int \frac{1}{cos(x)}dx = ln(|sec(x) + \ tan(x)|),$$

$\int \frac{1}{cos(x)} dx = -\ln(|\cos(x/2) - \ sin(x/2)|) + \ln(|\cos(x/2) + \ sin(x/2)|)$

مثال (13.3.6). $\int \frac{1}{sin\,(x)+cos(x)} dx$ **انتیگرال محاسبه کړئ**

حل . د $t = tan(\left(\frac{x}{2}\right)$ **له تعويض څخه استفاده کووچې په** (1) **قضيي کې واضيح شوي دی.**

$$\int \frac{1}{sin\,(x)+cos(x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt.$$

د $t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2},$ **له مخې لروچې.**

$$t^2 - 2t - 1 = \left(t - (1 + \sqrt{2})\right)\left(t - (1 - \sqrt{2})\right).$$

بناً پردی $\frac{1}{t^2-2t-1}$ **کسرپه لاندی ډول په قسمي کسر تجزيه کوو.**

$$\frac{A}{t - (1 + \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 - \sqrt{2})}.$$

په دې توګه کولای شو ازمايښت يې هم کړو، داسې چې:

$$\frac{1}{t^2 - 2t - 1} = \frac{\sqrt{2}}{4(t - (1 + \sqrt{2}))} - \frac{\sqrt{2}}{4(t - (1 - \sqrt{2}))}.$$

بناً پردې

$$-2\int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt = -2\int \frac{\sqrt{2}}{4(t - (1 + \sqrt{2}))} dt + 2\int \frac{\sqrt{2}}{4(t - (1 - \sqrt{2}))} dt$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|t - 1 - \sqrt{2}|) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|t - 1 + \sqrt{2}|).$$

په دې ډول

$$\int \frac{1}{sin\,(x)+cos(x)} dx = -2\int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|t - 1 - \sqrt{2}|) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(|t - 1 + \sqrt{2}|).$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|\tan(\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}\right|\right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|tan(\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}\right|\right).$$

(د c **ثابت قيمت په علاوه کولوسره)**

په پورته مثال کې مو وليدل چې د $sin\,(x)$ **او** $cos(x)$ **نسبتي توابعوغيرمعين انتيګرال تر يوحده ستونزمند دی ،نو له همدی امله دالجبری طريقې د محاسبی په وسيله يې ترسره کول د**

ازمايښت ورېدي. سره له دې چې په دې ډول عمليو کې کولی شو دساده نسبتي توابعو له پاره په کې يو ډول بدلون راوړو داد ډاډ وړده چې د غيرمعينو انتيګرالونو په محاسبه کې را منځته کيږي، کولی شو $sin\,h(x)$ او $cosh\,(x)$ نسبتی توابعوانتيګرال دساده نسبتي تابع په انتيګرال د $u = e^x$ تعويض په مرسته تبديل کړو و پورته مطلب د لاندی قضيې پواسطه روښانه کولای شو.

قضيه (3.3.6). كه $u = e^x$ وي نو

$$sinh(x) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2u}، \; cosh(x) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2u}$$

او $dx = \frac{1}{u}\, du$ دي

ثبوت. د ساين هايپربوليکي او کوساين هايپربوليکي توابعو د تعريف له مخې و د هر $u > 0$ له پاره چې

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^x}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2u},$$

او

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^x}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2u}.$$

دی . بنأ پردې

$$u = e^x \Leftrightarrow x = \ln(u).$$

$dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{u}\, du$ دی.

مثال (*14.3.6*) . د $\int \frac{1}{sinh\,(x)+cosh(x)}dx$ قيمت معلوم کړئ.

حل. د ($2.3.6$) دقضيې د بيانولو او $u = e^x$ تعويض له مخې لروچې

$$\int \frac{1}{sinh\,(x)+cosh(x)}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2u}\right) + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2u}\right)}\frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{e^x} + C.$$

(4.6) مثلثاتی او هايپربوليکي تعويض .

په دی برخه کې د ځينو توابعو انتيګرال څيړو کوم چې د$\sqrt{a^2 - x^2}$، $\sqrt{x^2 + a^2}$ يا $\sqrt{x^2 - a^2}$ افادو په ډول ورکړل شوي وي .داسې چې a يو مثبت تام عد د وي . همدارنګه د مثلثاتی يا هايپرليکې تعويض په مرسته په ترتيب سره د هغوي اصلي شکل ته تغير ور کوو چې په پايله کې $cos(x)$او $sin\,(x)$ يا $cosh(x)$او $sinh\,(x)$ ډول ناطقه توابع چې انتيګرال نيونی په هغه تخنيک حل کولای شو چې (3.7) سکشن کې مو مطالعه کړی دی.

(1.4.6) د $x = asin\,(u)$ **تعویض** . که چیرې د $\sqrt{a^2-x^2}$ په شان افاده ور کړ شوې وي په دې حالت کې $x = asin\,(u)$ له تعویض څخه استفاده کوو ، داسې چې a یو مثبت ثابت عد د وي .دلاندې قضیې پواسطه هغه حقیقت چې دورکړل شوي تعویض له مخې بشپړېږي کوم ته چې مونږ ضرورت لرو .

قضیه(1.4.6). که a یو مثبت ثابت عدد وي.

$$x = asin\,(u) \Leftrightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

دي.

(څرنګه چې $-a \le x \le a$ او $-\pi/2 \le u \le \pi/2$ دی) نو $dx = a\cos(u)\,du$ او $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos(u)$ کېږي .

ثبوت. پوهېږوچې :

$$dx = \frac{dx}{du}du = \left(\frac{d}{du}\left((a\sin(u))\right)\right)du = a\cos(u)\,du$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = a\sqrt{1-sin^2(u)} = a\sqrt{cos^2(u)} = a|\cos(u)|.$$

څرنګه چې $u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ دی، نو د هر $-\pi/2 \le u \le \pi/2$ لپاره $\cos(u) \ge 0$ دی.

او $\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos(u)| = a\cos(u)$ دی.

مثال (1.4.6) . د $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ معلوم کړئ.داسې چې a یو ثابت عدد وي.

حل. د $x = asin\,(u)$ له تعویض څخه په استفاده لکه چې په (*1.4.6*) قضیې کې وو

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos(u)\,a\cos(u)\,du = a^2\int cos^2(u)du\ .$$

په (*3.6*) کې مو بیان کړی وو چې

$$\int cos^2(u)du = \frac{1}{2}\cos(u)\ \sin(u) + \frac{1}{2}u.$$

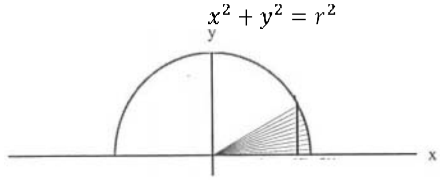
$$\begin{aligned}
\int\sqrt{a^2-x^2}dx &= a^2\int cos^2(u)du \\
&= a^2\left(\frac{1}{2}\cos(u)\sin(u) + \frac{1}{2}u\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\cos(u)\sin(u) + \frac{a^2}{2}u \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \\
&= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}arcsin\left(\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}$$

(کولی شویواختیاری ثابت قیمت ورزیات کړو)

مثال (*2.4.6*) . کــه د یــوي دایــری شعاع r **وي ثبوت کړئ چــې مساحــت یې** πr^2 **دی .**

حل. که د دایری مرکز د xy مستوي د قایمومختصاتو په مبدأ کې واقع وي، احاطه شوي سطحه ددایری په نوم یادوي چې معادله یې عبارت ده له.

$$x^2+y^2=r^2$$



(1) شکل

ځرنګه چې ددایرې د پورتنۍ برخې ګراف د $y=\sqrt{r^2-x^2}$ پواسطه ښودل شوي دي ددایری مساحت داسې په لاس راوړو .

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx.$$

ځرنګه چې په (*3.4.6*) مثال کې مو د $\sqrt{r^2-x^2}$ لومړنۍ تابع پیدا کړی وه نو د

$$\int\sqrt{r^2-x^2}dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{r^2}{2}arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

له مخې لروچې :

$$2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{r^2}{2}arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_{-r}^{r}\right).$$

$$=2\left(\frac{r^2}{2}arcsin(1)-\frac{r^2}{2}arcsin(-1)\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2})\right)=\pi r^2$$

مثال (3.4.6) . د$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx.$ **محاسبه کړئ .**

حل. مونږ $x=asin\,(u)$ **او** $u=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ **تعویض ځخه کاراخلو د** $-2\le x\le 2$ **او** $-\pi/2\le u\le\pi/2$ **دی د (*1.4.6*) قضیې له مخې لرو**

$$dx=2\cos(u)\,du.\,dx=2\cos(u)\,du.$$

$\sqrt{4-x^2}=2\cos(u)$ **او** $dx=2\cos(u)\,du.$ **دی نوپه معین انتیګرال کې د تعویض طریقې ځخه په ګټه اخستنې لروچې .**

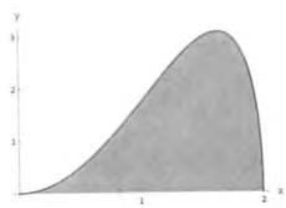
$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_{u(0)}^{u(2)} (2\sin(u))^2(2\cos(u))\,2\cos(u)\,du$$
$$= 16\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} sin^2(u)cos^2(u)du$$
$$= 16\int_0^{\pi/2} sin^2(u)cos^2(u)du$$

د (3.6) برخی په 6 مثال کې مو په لاس راوړی وؤ

$$\int sin^2(u)cos^2(u)du = \frac{1}{8}u - \frac{1}{8}\sin(u)\,cos^3(u) + \frac{1}{8}sin^3(u)cos\,(u).$$
$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = 16\int_0^{\pi/2} sin^2(u)cos^2(u)du$$

بنأ پردې

$$= 16\left(\frac{1}{8}u - \frac{1}{8}\sin(u)\cos(u)^3 + \frac{1}{8}sin^3(u)cos\,(u)\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi$$



شکل *(2)*

په دې ډول هغه ساحه چې $y = x^2\sqrt{x^2+a^2}$ گراف او $[0,2]$ انتروال په منځ کې واقع ده د π سره برابره ده.

د (2.4.6) $x = asin\,h(u)$ تعویض .

که چیرې افاده د $\sqrt{x^2+a^2}$ په شکل ورکړل شوې وي په دې حالت کې د $x = asin\,h(u)$ لــه تعویض څخه استفاده کوو داسې چې a یو مثبت ثابت عدد وي. دلاندې قضیې پواســطه هــغه حقیقت دورکړل شوي حقیقت چې دورکړل شوي تعویض له مخې زمونږضرورت رفع کوي.

قضیه (*2.4.6*) . که a یو مثبت ثابت عد دوي او فرض کړو چې

$$x = asin\,h(u) \Leftrightarrow u = \arcsin h\left(\frac{x}{a}\right)$$

وي نو

$$dx = a\cos h(u)\,du \; and \; \sqrt{x^2+a^2} = a\cosh(u)$$

دی.

ثبوت . پوهېږو چې

$$dx = \frac{dx}{du}du = \left(\frac{d}{du}(\mathrm{asin\,h}(u))\right)du = \mathrm{acos}\,h(u)\,du\ .$$
$$x^2 + a^2 = a^2sinh^2(u) + a^2 = a^2(sinh^2(u) + 1)$$
$$= a^2cosh^2(u),$$

ځـــرنـــگه چـــې $cosh^2(u) - (sinh^2(u) = 1$ **دي نـــودهـــر** $sina > 0$ **پـــاره لـــه** $u \in \mathbb{R}$ **او** $cosh(u) > 0$ **دی لروچې .**

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2cosh^2(u)} = \mathrm{acos}\,h(u\,) = a|\cos h(u\,)|$$
$$= |a||\cos h(u\,)| = \mathrm{acos}\,h(u\,)$$

مثال (*4.4.6*). د $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ **مـــحاســـبه کـــړی** . داســـې چـــې a **یـــو مثبـــت تام عدد وي .**

حل. د $x = a\sin\mathrm{h}(u)$ **لـــه تعویـــض نـــه پـــه استفاده د (** *2.4.6* **) قضیې په ځـــېرلـــروچـــې**

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \int \mathrm{acosh}(u\,)\,\mathrm{acos}\,h(u\,)\,du = a^2\int cosh^2(u)du\ \ .$$

د (*3.6*) **برخی د** *9*) **مثال ځخه په استفاده لروچې**:

$$\int cosh^2(u)du = \frac{1}{2}\cos h(u\,)\sinh(u\,) + \frac{1}{2}u.$$

بنأ پردي

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = a^2\left(\frac{1}{2}\cos h(u\,)\sinh(u\,) + \frac{1}{2}u\right)$$
$$= \frac{a^2}{2}\cos h(u\,)\sinh(u\,) + \frac{a^2}{2}u$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

(کولی شو یواختیاري ثابت ورزیات کړو) .

د (*4.4.6* **) مثال غیر معین انتیکرال د طبعی لوګاریتم له مخې هم په لاس راوړلای شو دا سې چې**

$$arcsinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right).$$

په دې ډول

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right) + \frac{a^2}{2}arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right)$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln(a).$$

څرنګه چې د افادې وروستی حد ثابت دې کولی شو غیرمعین انتیګرال په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

مثال (5.4.6) . $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **محاسبه کړئ .**

حل. د لته د $x = asin\, h(u) \Leftrightarrow u = \operatorname{arcsin h}(x)$ **تعویض کاروو**

څرنګه چې $\sqrt{x^2+1} = \cosh(u)$ **او** $dx = \cos h(u)\, du$ **دی لکه چې**(*2.4.6*) **قضیه کې وولرو**

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\sin h^2(x)}{\cos h(x)}\cos h(x)\, dx = \int \sin h^2(x)\, dx.$$

د *3.6* **برخې د** *8* **مثال له مخې لروچې**

$$\int sinh^2(u)du = \frac{1}{2}\cos h(u)\sinh(u) - \frac{1}{2}u.$$

بناً پردې

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\cos h(u)\sinh(u) - \frac{1}{2}u$$
$$= \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}arcsinh(x).$$

مونږ کولای شو دطبعی لوګاریتم له جنسه انتیګرال محاسبه کړو .

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}arcsinh(x)$$
$$= \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

مثال (6 4.6) . $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ **محاسبه کړئ .**

داسې چې a **یو مثبت تام عدد وي**

حل. دلته د $x = a\sinh(u)$ **له تعویض څخه استفاده کوواو د** (*2.4.6*) **قضیې له مخې لروچې**

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int a^2\sinh^2(u)(a\cos h(u))\, a\cosh(u)\, du$$

$$= a^4 \int \sinh^2(u)\ \cosh^2(u)\, du.$$

څرنګه چې

$$cosh^2(u) - sinh^2(u) = 1 \Longrightarrow sinh^2(u) = cosh^2(u) - 1$$

دی نو

$$\int \sinh^2(u)\ \cosh^2(u)\, du\ = \int (\cosh^2(u) - 1)\ \cosh^2(u)\, du$$
$$= \int \cosh^4(u)\, du - \int \cosh^2(u)\, du$$

لکه د (3.6) سکشن په 10 مثال کې مو دا افاده ترلاسه کړی وه

$$\int \cosh^4(u)\, du = \frac{1}{4}\cosh^3(\mathrm{u})\ sinh\,(u) + \frac{3}{8} sinh\,(u) cosh\,(u) + \frac{3}{8}(u)$$

د (3.6) برخی په (9) مثال کې مو ترلاسه کړل بنأ پر دی

$$\int \cosh^2(u)\, du = \frac{1}{2}\cos h(u)\sinh(u) + \frac{1}{2}u$$
$$\int \sinh^2(u)\ \cosh^2(u)\, du. = \int \cosh^4(u)\, du - \int \cosh^2(u)\, d\,u.$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cosh^3(\mathrm{u})\ sinh\,(u) + \frac{3}{8} sinh\,(u) cosh\,(u) + \frac{3}{8}u\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2}\cos h(u)\sinh(u) + \frac{1}{2}u\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cosh^3(\mathrm{u})\ sinh\,(u) - \frac{3}{8} sinh\,(u) cosh\,(u) - \frac{3}{8}u$$

په دې ډول

$$\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\, dx = a^4 \int \sinh^2(u)\ \cosh^2(u)\, du$$
$$= \frac{a^4}{4}\cosh^3(\mathrm{u})\ sinh\,(u) - \frac{a^4}{8} sinh\,(u) cosh\,(u) - \frac{a^4}{8}(u)$$
$$= \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a^4}{8}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) - \frac{a^4}{8} arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} x - \frac{1}{8}\ a^2 x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8} arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

دی.

په غیر معین انتیکرال کې دلازیاتو الجبری محاسبو لپارد طبعي لوګاریتم د قاعدې څخه کار اخستل کیږي. په ربنتیاد

$$\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{4}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} x - \frac{1}{8}\ a^2 x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}x - \frac{1}{8}\ a^2x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{a^4}{8}\ln(a)$$

اخری افاده یو ثابت دی کوم چې دالجبری کمپوتری سیستم په لاس راغلی افادوکې نه ښکاره کیږي.

د(*4.4.6*) مثال د اوږدې محاسبې په خاطر باید دهغو خلکود کارقدردانی وکړو چې دالجبری محاسبو د عملیو په رامنځته کولو سره یې تر سره کړئ دي دیوې عملي تمرین له پاره په اکثره مسایلو کې کمپوتری او الجبری سیستم څخه کاروانحستل شی کومه چې دانتیګرال لاندی تابع افاده کې جذری علامې شامله وي.

(3.4.6) $x = acosh(u)$ **تعویض.**

که چیرې د $\sqrt{x^2 - a^2}$ په شکل افاده ورکړل شوې وي ، په دې حالت کې د$x = acosh(u)$ له تعویض څخه استفاده کوو، داسې چې a یوثابت مثبت عد دوي .

دا قضیه د پورتني حقیقت وضاحت کوې د کوم لـــه پاره چې نـــومـــوړې تعویض پـــه کاروي.

قضیه (3.4.6) . که a یو مثبت ثابت عد د وي او $x \geq a$ وي نو د

$x = asin\,h(u) \Leftrightarrow u = \mathrm{arcsin\,h}(x/a)$

له تعویض څخه استفاده کوو چې$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh(u)$ او $x = a\ \mathrm{sins}\,h(u\,)\,du$دی.

ثبوت . لروچې

$$x = dx\frac{dx}{du}\mathrm{du} = \left(\frac{d}{du}(\mathrm{acosh(u)})\right) = a\ \sin h(u\,)\,du.$$

څرنګه چې $-1 =$ $\cosh^2(u) - \sinh^2(u)$ دی نو لرو .

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2(u) - a^2} = a\sqrt{\cosh^2(u) - 1} = a\sqrt{\cosh^2(u)}$$

څرنګه چې$a \geq o$ او$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = -1$ او $u = \mathrm{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) \geq o$ دی نولرو

$\sinh(u) \geq o$

بنأپردی

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \mathrm{asinh}(u)$$

دی.

مثال (7.4.6) . $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$ معلوم کړئ .داسې چې، که a یو مثبت ثابت عد د وي او $x \geq a$ وي.

حل. د $x = acosh(u)$ له تعویض څخه په استفاده د (*3.4.6*) قضیې له مخې لرو چې

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int a\sin h(u\,)\ \mathrm{asinh}(u\,)\,du = a^2\int \sinh^2(u)\,du$$

بنأً پردی د (3.6) برخې په (8) مثال کې موحاصل کړل چې :

$$\int \sinh^2(u)\,dx = \frac{1}{2}\cos h(u)\sinh(u) - \frac{1}{2}u$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\cos h(u)\sinh(u) - \frac{a^2}{2}u$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) - \frac{a^2}{2}arcosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}arcosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

دی .لاندی غیرمعین انتیګرال له طبعي لوګاریتم څخه په استفاده هم په لاس راوړلای شو داسې چې :

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}arcosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln(a)$$

د $\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ ثابت قیمت د حذفولو په صورت کې لیکو چې:

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) x > 0$$

(د معمول په شان یو اختیاری ثابت ور زیاتولای شو).

کولی شو لاندی افاده د $(-\infty, -a)$ او $(a, +\infty)$ په انټروالونوکې ازمایښت کړو

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)$$

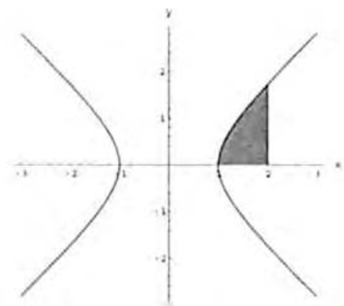
مثال (8.4.6) . د G ساحه چې د $x^2-y^2 = 1$ هایپربولا ، $x = 2$ مستقیم خط او د ox محور پواسطه احاطه شوې ده .

a) ګراف یې رسم کړئ.

b) د G ساحې مساحت پیدا کړئ.

حل. د a حل د(3) شکل ګراف رابنیي .

b) که چیرې د $A(x,y)$ نقطه د هایپربولا یوه نقطه وي نو د G دساحې مساحت د (7.4.6) مثال غیرمعین انتیګرال په پام کې نیولو سره داسې لاسته راوړو.



شکل (3)

$$y^2 = x^2 - 1 \iff y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$
$$\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

په نتیجه کې د طبعي لوګاریتم د تطبیق په پام کې نیولوسره لرو.

$$\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}arcosh(x)\Big|_1^2$$
$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}arcosh(2) - \frac{1}{2}arcosh(1)$$
$$\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\,dx = \sqrt{3} - \frac{1}{2}ln(2 + \sqrt{3}) \cong 1.07357$$

(5.6)عددي انتیګرال نیول (NUMERICAL INTEGRATION). دا به امکان ونه لري چې دیو لړ خاصوو توابعو له ترکیب انتیګرال ونیسوحتی دالجبری کمپیوتری سیستم په مرسته یې لاس ته راوړو مونږ کولی شوپه زیاتو انتیګرالونو کې خپله محاسبه په تقریبی محاسبو متکی کړو، په دی سکشن کې به مونږ خپله اساسی بحث دتقریبی طرزالعمل په شکل د خاص انتیګرالی شیماپه اساس پرمخ یوسو.

(1.5.6) دریمان مجموعه(*Riemann Sums*). راځی چې د ریمان خاص مجموعې په تکرار ولوو کومه چې د انتیګرالونوپه تقریبي محاسبه کې په کاروړل کیږي، پیل وکړو .ددي منظور له پاره $[a,b]$انټـــروال د $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ پـــه اوږدوالـــي، په n فـــرعـــي انټروالـــونـــو ویشو اود

$k = 0,1,2, \dots ,n$ له پاره $x_k = a + k\Delta x$ په پام کې نیسو . پس x_{k-1} د k ام فرعي انټروال $[x_{k-1} \ , x_k]$ کیڼې خوا انجامي نقطه او x_k د $[x_{k-1} \, , x_k]$ فرعي انټروال د ښئ خوا انجامي نقطه ده .

د f تابع دکیڼې خوا انجامي نقطي مجموعه $l(f, a, b \, ,n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k - 1)\Delta x$ او د f تابع د ښئ خوا انجامي نقطي مجموعه $r(f, a, b \, ,n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ په پام کې نیسو چې د تابع دوسطي نقطي مجموعه $m(f, a, b \, ,n) = \sum_{k=1}^{n} f(\, c_k \,)\Delta x$ داسې چې .

$$c_k = \frac{x_{k-1} \ + x_k}{2}$$

د $[\, x_{k-1} \, , x_k \,]$ ، k ام فرعي انټروال تصنیف نقطه ده . د تصنیف نقطو د مجموعو له مخې د انتیګرالونودتخمینولو میتود ته د تصنیف نقطو طریقه هم وایو. په عمومي ډول د انتیګرالونود تخمینولوعمل ته عددي انتیګرال نیول هم وایو. په عمومي ډول د انتیګرال نیولو له پاره تقریبی طریقه د تقریبی انتیګرال نیولوطریقه هم وایې .

د یوورکړل شوي انتیګرال دوسطی نقطومجموعه کیڼې خواانجامي نقطومجموعه اودښی خواد انجامي نقطو په نسبت ډیره دقیقه ده کوم چې د f تابع په کافی اندازه هموار ه ده .

قضیه (1.5.6). فرضووچې f' پر $[a,b]$ متمادي ده $c_1 = (\, |f'(x)| \colon x \in [a,b])$ او $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ وضع کوو نو

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}\,)\Delta x - \int_{a}^{b} f(x)dx \, \right| \le \, c_1(a-b)\Delta x,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x - \int_{a}^{b} f(x)dx \, \right| \le \, c_1(a-b)\Delta x.$$

همدارنګه که f'' د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او $c_2 = \max(\, |f''(x)| \colon x \in [a,b])$ وي‌نو

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x - \int_{a}^{b} f(x)dx \, \right| \le \frac{c_2(b-a)}{24} \, (\Delta x)^2.$$

ددي قضیي ثبوت دعددي انالیز په کورس کې مطالعه کوو.

مثال(1.5.6). که $f(x) = \sin(x)$ وي د $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ تقریب د $[a,b]$ په انټروال په 16,32,64 او 128 برخو وویشي چې د فرعي انټروالونواوږدوالی مساوي وي ، د کیڼې خوا انجامي نقطو مجموعه، ښیي خوا انجامي نقطو مجموعه او دوسطي نقطو مجموعه په پام کې نیولو سره. مطلقه خطأ (اشتباه) محاسبه کړئ او هم یې د قت مقایسه کړئ.

حل. لروچې

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = \cos(0) = 1$$

قبلووچې، $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ **دی. د (1) جدول د** $n = 16,32,64,128$ **له پاره د کیڼې لورې د انجامي نقطو پورې اړوند ارقام مشخص کوي.**

n	$l(f,o,\pi/2,n)$	$\lvert l(f,o,\pi/2,n)-1\rvert$
16	0.950109	$5.0\,x\,10^{-2}$
32	0.975256	$2.5\,x\,10^{-2}$
64	0.987678	$1.2\,x\,10^{-2}$
128	0.993852	$6.1\,x\,10^{-3}$

(1) جدول

(2) **جدول د ښئ لورې د انجامي نقطواړوند ارقام مشخص کوي.**

n	$r(f,o,\pi/2,n)$	$\lvert r(f,o,\pi/2,n)-1\rvert$
16	1.04828	$4.8\,x\,10^{-2}$
32	1.02434	$2.4\,x\,10^{-2}$
64	1.01222	$1.2\,x\,10^{-2}$
128	1.00612	$6.1\,x\,10^{-3}$

(2) جدول

*(3)***جدول دوسطې نقطواړوند ارقام مشخص کوي.**

n	$m(f,o,\pi/2,n)$	$\lvert m(f,o,\pi/2,n)-1\rvert$
16	1.0004	$4.0\,x\,10^{-4}$
32	1.0001	$1.0\,x\,10^{-4}$
64	1.00003	$2.5\,x\,10^{-5}$
128	1.00001	$1.3\,x\,10^{-6}$

(3) جدول

که چیرې د فرعي انټروالونو شمیر تزاید وکړئ په دې صورت کې دفرعي انټروالونواوږدوالی کمیږي چې په ټولوحالاتو کې مطلقه خطأیا غلطی کمیږي .کله چې ښی خوا د نقطومجموعه اویا د کیڼې لوري د نقطو مجموعه څخه استفاده کوو،د مطلقه خطأ یا غلطی کموالی تقریبآ سره مساوي دي .چې دا د (1.5.6) قضیې سره سمون لري. څرنګه چې:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x - \int_a^b f(x)dx\right| \le c_1(a-b)\Delta x,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x - \int_a^b f(x)dx\right| \le c_1(a-b)\Delta x.$$

دی. د بلې خوأد وسطي نقطی مجموعې د استعمال په صورت کې خطأ (اشتباه)په سریع ډول کمیږي چې داهم د(1.5.6) قضیې مطابق دی، په دې توګه

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x - \int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{c_2(b-a)}{24}(\Delta x)^2$$

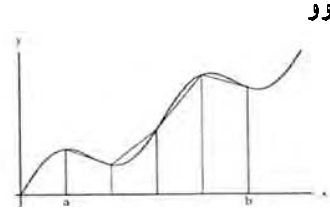
دی او $(\Delta x)^2$ نسبت Δx ته ډیر کوچنی دی که Δx هم کوچنی وي.

د کیڼې خوا انجامي نقطی مجموعه، ښئ خوا انجامي نقطی مجموعه او دوسطي نقطی مجموعه چې اساس یې په مساوي اوږدوالې د ورکړل شوي انټروال تجزیه د هغې په فرعي انټروالو چې عمده مقصد یې د محاسباتو اسانتیا ده څیړل کیږي .کیدای شی د فرعي انټروالونو اوږدوالی مختلف وي .دابه ډیره مؤ ثره وي چې د یری نقطی د انټروال په هره برخه کې ځای کړو، داسې چې د تابع قیمتونه په زیاته اندازه منظم وي.

(2.5.6) د وذنقې طریقه (*The trapezoid Rule*) .اوس د انتیګرال له پاره تخمیني طرحه دکومې بنسټ چې د ریمان انتیګرالی مجموعه نده تر کتنی لاندی نیسو ، د ذوذنقه اې قاعدې په اساس د یوې تابع تقرب د ټوټه یې خطي توابعو په شکل چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دی، پیدا کوو .د$[a,b]$ انټروال یعنی $p=\{x_0,x_1x_2,\dots,x_n\}$ په دی ډول تجزیه کوو چې

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b.$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ وضع کوو

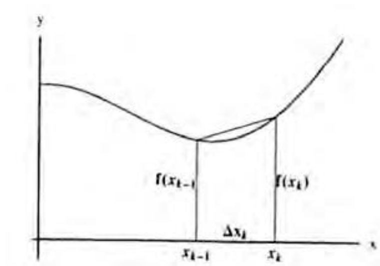


(1) شکل

په وډونقه د f تابع په k تعداد $[x_{k-1}\ , x_k]$ فرعي انټروالونو اړ وي چې د f خطي تابع په x_{k-1} او x_k عين قيمتونه لري. په دې توګه د خطي تابع ګراف لکه چې په (2) شکل کې ښودل شوي دي .يوه قطعه خط دی چې مستقيماً له $(x_k\ , f(x_k))$ او $(x_{k-1} - f(x_{k-1}))$ نقطو څخه تيريږي.د ذوذونقې مساحت چې د $(x_k\ , f(x_k))$ او $(x_{k-1}, 0), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k\ , 0)$ له نقطو څخه تشکيل شوي عبارت دی له .

$$\left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right)(x_k - x_{k-1}) = \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right)\Delta x_k.$$

په حقيقت کې د l_k خطي تابع عين قيمت لری کوم چې f يې په x_{k-1} او x_k کې لري او د لاندې افاده پواسطه ښودل شوې ده.



شکل (2)

$$l_k(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{x - x_{k-1}}(x - x_{k-1})$$

$$= f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{\Delta x_k}(x - x_{k-1}).$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} l_k(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{\Delta x_k}(x - x_{k-1})\right)dx$$

$$= f(x_{k-1})\Delta x_k + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{\Delta x_k}\left(\frac{(x - x_{k-1})^2}{2}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\right)$$

$$= f(x_{k-1})\Delta x_k + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{\Delta x_k}\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2}$$

$$= f(x_{k-1})\Delta x_k + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x_k}\frac{(\Delta x_k)^2}{2}$$

$$= f(x_{k-1})\Delta x_k + \tfrac{1}{2}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k$$

$$= \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\Delta x_k.$$

پورتنۍ نتيجه د هرې متحول العلامه تابع له پاره صدق کوي.

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\cong\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} l_k(x)dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x_k$$

په لنډه توګه د ذوذنقه اي قاعدې تخمين $\int_a^b f(x)dx$ د لاندې مجموعې پواسطه ښودل شوي دي

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x_k$$

که چیرې د $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ هر فرعې انټـــروال مساوي اوږدوالـــې ولـــرې ،داســـې چـــې د هـــر $k=0,1,2,\dots\dots,n$

$x_k=a+k\Delta x$ وې نودذوذنقه ای قاعدي او دوسطې نقطو قاعدي ترمنځ توپیر په لاندې افادو کې څرګند یږي.

$$T(f,a,b,n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x$$
$$=\Delta x\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$$
$$m(f,a,b,n)=\Delta x\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+\ x_k}{2}\right)$$

څرنګه چې دوسطې نقطو قاعده د ریمان مجموعې یو خاصه نمونه ده، چې قیمت یې د انتګرال لاندې تابع دوسطې نقطې هر فرعې انټروال د انتیګرال لاندې تابع څخه عبارت دی حال داچې دذوذنقه اي قاعده د انتیګرال لاندې توابعو دهر فرعی انترووال دانجامی نقطو اوسط دی.

دذوذنقه ای قاعدې دقت یا صحیح والې دوسطې نقطې دقاعدې دسمون سره د مقایسې وړدې.

قضیه (2.5.6). که چیرې f'' د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او

$C_2=\max(|f''(x)|):x\in[a,b]$

دا سې چې $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ وې نو, $\left|T(f,a,b,n)-\int_a^b f(C_k)\Delta x\ \right|\le\frac{C_2(b-a)}{12}(\Delta x)^2$

دی . پورتنۍ غلطی یا (اشتباه) د تخمین ثبوت د عددی انالیز کورس کې ترسره کیږي.

مثال (2.5.6). که $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ وي. د ذوذنقه اي قاعدې په مرسته د $\int_0^1 f(x)dx$ تخمین د $[0,1]$په انټروال کې داسې چې نوموړې انټروال په $n=10,20,40,\dots,80$ مساوي برخوتجزیه (تقسیم)شي د تخمین مطلقه خطأ (اشتباه) محاسبه کړئ.

حل. لرو چې :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctan(x) \Big|_0^1 = \pi/4 \cong 0{,}785398$$

د(*2.5.6*) قضيي په پام کې نيولوسره ، دهر $k = 0,1,2,\dots,n$ له پاره داسې چې $x_k = k\Delta x = \frac{k}{n}$ وي په *4* جدول کې $n = 10,20,40,\dots,80$ انټروالونو له پاره د $T(f,0,1,n)$ او $\left|T(f,0,1,n) - \frac{\pi}{4}\right|$ قيمتونه د لاندې فورمول پواسطه لاسته راغلي دي.

$$T(f,0,1,n) = \Delta x \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = 1/n \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

دتمرين په ډول د پورتنيو انټروالونو په پام کې نيولو سره د وسطي نقطې د مجموعو مطابق دواړوقاعدودتقريبي دقت طرحه مقايسه کړئ.

n	$T(f,o,1,n)$	$\lvert T(f,o,1,n) - \pi/4\rvert$
10	0.784981	4.2×10^{-4}
20	0.785294	1.0×10^{-4}
40	0.785372	2.6×10^{-5}
80	0.785392	6.5×10^{-6}

(*4*) جدول

(*3.5.6*) د سيمسون طريقه (*Sampson's rule*)

د سيمسون قاعده په انتيګرال نيولوکې يو تقريبي طرحه ده چې بنسټ يې د ټوټه کړل شوي دويمه درجه تابع پواسطه د يوي تابع د تقريباتو پيداکول دي که يوه ويشنه (*partition*) په $[a,b]$ په پام کې ونيسو ، يعنې.

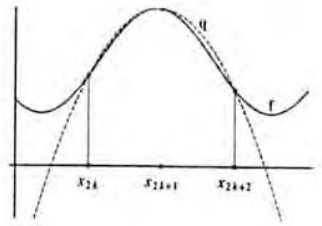
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k-2} < x_{2k+1} < x_{2k} < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b, \quad k = 0.1.2.3 \dots n-1$$

داسې چې x_{2k+1} د$[x_{2k} - x_{2k+2}]$ انټروال منځنی (وسطی) نقطه وي .

قبلوچې : $\Delta x_k = x_{2k+1} - x_{2k-2} = x_{2k} - x_{2k+1}$ وي. که q دويمه درجه تابع وي نو مونږ $\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$ په $\int_{x_{2k}}^{x_{2k-2}} q_k(x)dx$ بدلو،داسې چې: $q_k(x_{2k}) = f(x_{2k}), q_k(x_{2k+1}) = f(x_{2k+1})$ او $q_k(x_{2k+2}) = f(x_{2k+2})$ لکه چې په (*3*) شکل کې ښودل شوي دي، لروچې :

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(x)dx = \big(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+1})\big)\frac{\Delta x_k}{3}$$

(کولی شی د پورتنی افادې مشتق ددې برخی په اخر کې مشاهده کړئ)



شکل (3)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\cong \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(x)dx\\ &= \int_0^{x_2} q_0(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} q_1(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} q_{n-1}(x)dx\\ &= \left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)\frac{\Delta x_0}{3} + \left(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)\frac{\Delta x_1}{3}+\cdots\\ &\qquad +\left(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right)\frac{\Delta x_{n-1}}{3}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})}{3}\right)\Delta x_k\end{aligned}$$

پدې ډول د سیمسون دقاعدې تقریبات د f د انتیګرال له پاره د $[a,b]$ په انټروال کې چې دفرعې انټروال اوږدوالی يې $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$ وي او د هر $k = 0.1.2.3 \dots 2n$ له پاره $x_k = k\Delta x$ وي ، د لاندې مجموعې څخه عبارت دی.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})}{3}\right)\Delta x_k$$

$$\begin{aligned}T(f,a,b,n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})}{3}\right)\Delta x_k\\ &= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})}{3}\right)\Delta x_k\end{aligned}$$

قضیه (3.5.6) : فرضوو چې د f څلورم مشتق د $[a,b]$ پر انټروال متمادي تابع وي قبلووچې

$$C_4 = max\left\{\left|\frac{d^4}{dx^4}f(x)\right| : x \in [a,b]\right\}.$$

وي. په دې ډول كه $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$ وي نو

$$\left|S(f,a,b\,,n)-\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{C_4(b-a)}{180}(\Delta x)^4,$$

دی.

ددي قضي ثبوت به دعددی انا لیز کورس کې مشاهده کړو .څرنگه چې $(\Delta x)^4$نسبت $(\Delta x)^2$ ته ډیر کوچنی دی که Δx هم کوچنی وي. د سیمسون قاعدی په بشپړ ډول نسبت ذوذنقه اي قاعدي او د منحٔنی (وسطی) نقطی قاعدي ته ډیره دقیقه ده په دي شرط چې تر انټیگرال لاندي تابع په کافي اندازه همواره وي.

مثال (3.5.6). د $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx$ تــقــرب کــه $n = 1,2,4$ د سیــمــسون قــاعــدی یعنی $S(f,a,b\,,n)$ په طریقه په پام کې ونیسي تخمیني مطلقه خطأ (اشتباه) محاسبه کړئ.

حل. که $u = 2x$ وضع کړو څرنگه چې $du = 2\,dx$ دي .نولیکلي شو چې :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}}\,dx$$
$$= 1/2\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
$$= 1/2(arctag(u)\Big|_0^2)$$
$$= 1/2(arcsinh(2) = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) \cong .721818.$$

که چیرې د هر $k = 0.1.2 \ldots 2n$ له پاره $\Delta x = \frac{1}{2n}$ او $x_k = k\Delta x = \frac{k}{2n}$ که $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ وضع شي ،لروچې .

$$S(f,0,1\,,n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k}\,) + 4f(x_{2k+1}\,) + f(x_{2k+2}\,)}{3}\right)\Delta x_k$$
$$= \frac{\Delta x}{3}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{2k}\,) + 4f(x_{2k+1}\,) + f(x_{2k+2}\,))$$
$$= \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{2k}\,) + 4f(x_{2k+1}\,) + f(x_{2k+2}\,))$$

(5) جدول د ضرورت وړ معلومات څرګندوي . وینو چې مطلقه خطأ (اشتباه)ډیره کوچنې ده

N	$S(f,o,1,n)$	$\left\vert S(f,o,1,n) - \int_0^1 f(x)dx \right\vert$
1	0.712607	9.2×10^{-3}
2	0.721495	3.2×10^{-4}
4	0.721816	1.6×10^{-6}

(5) جدول

حتی په فرعي انټروال کې . د تمرین په ډول د منځني (وسطی) نقطو دمجموعی او دذوذنقه ای قاعدو مطلق تخمین محاسبه او هم ددریو واړو قاعدو د تقریباتو ددقت طرحه مقایسه کړئ.

په دي برخه کې د منځني (وسطی) نقطي قاعده ، ذوذنقه اي قاعدی او د سیمسون قاعدی په باب څه ناڅه معلومات ترلاسه شوه ددي اساسی قاعدو بنسټ د ځینوعادی وعددی انتیګرال نیولو د طریقې پواسطه صورت وموند . لکه څنګه چې په عادی ډول د محاسباتو د ترسره کولو له پاره ډیر ګټوردي سره له دي چې نظرموجوده مثالونو ته ډیر پیچلی هم دي . چې اساس یې د فرعې انټروالونوویشنه په مساوي طول ده.چې مخکې پری تبصره شوې ده ، د وسطی نقطي موقعیت چې نظردانټروال د نورو برخو څخه یوبل ته ډیرنږدی واقع دي چې پدی صورت کې د تابع تغیرات پکی په ډیری چټکئ ترسره کیږي.

($4.5.6$) د مشتق نیولو په مرسته دسیمسون قاعده(*The Derivation of Sampson's*)

په$[a,b]$ کې یوه ویشنه په پام کې ونیسو، داسې چې .

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k-2} < x_{2k+1} < x_{2k} < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

په دې ډول چې د هر $k = 0.1.2.3 \ldots n-1$ له پاره x_{2k+1} د $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ انټروال منځني (وسطی) نقطه وي . قبلووچې$\Delta x_k = x_{2k+1} - x_{2k-2} = x_{2k} - x_{2k+1}$ وي .په دې ډول که $q(x)$ دویمه درجه تابع وي او د هر $k = 0.1.2.3 \ldots n-1$ له پاره $q_k(x_{2k}) = f(x_{2k}), q_k(x_{2k+1}) = f(x_{2k+1})$ او $q_k(x_{2k+2}) = f(x_{2k+2})$وي.کولای شوولیکوچې :

$$q_k(x) = f(x_{2k}) + \frac{f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})}{\Delta x_k}(x - x_{2k}) + \frac{f(x_{2k+2}) - 2f(x_{2k+1}) + f(x_{2k})}{(\Delta x_k)^2}\left(\frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{2}\right)$$

په حقیقت کې

$$\begin{aligned}
q(x_{2k}) &= f(x_{2k}) \\
q(x_{2k+1}) &= f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})) = f(x_{2k+1}), \\
q(x_{2k+2}) &= f(x_{2k}) + 2\big(f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})\big) + \big(f(x_{2k+2})\big). \\
&\quad -2f(x_{2k+1}) + f(x_{2k}) \\
&= f(x_{2k+2})
\end{aligned}$$

سره دي.

بنأ پر دې

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(x)dx &= f(x_{2k})\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} dx + \frac{f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})}{\Delta x_k}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}}(x - x_{2k})dx \\
&\quad + \frac{f(x_{2k+2}) - 2f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{(\Delta x_k)^2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}}\frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{2}dx \\
&= 2\Delta x_k f(x_{2k}) + 2\Delta x_k f(x_{2k+1}) - f(x_{2k}) \\
&\quad + \frac{f(x_{2k+2}) - 2f(x_{2k+1}) + f(x_{2k})}{(\Delta x_k)^2}\left(\frac{1}{3}(\Delta x_k)^3\right) \\
&= \left(\frac{f(x_{2k+2}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k})}{3}\right)\Delta x_k.
\end{aligned}$$

په دې ډول

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_{2k+2}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k})}{3}\right)\Delta x_k$$

دی.

(*6.6*) غیر واقعی یا غیر عادی انتیگرالونه (IMPROPER INTEGRALS)

په دې برخه کې غواړو د انتیگرال مفهوم ته په ځینو حالتو کې لکه په غیر محد ود انټروالونو کې یا د تابع په غیر متمادي نقطو کې ، انکشاف ور کړو (*1.6.6*) **غیر واقعی انتیگرالونه په غیر محد ود انټروالونو کې** راځئ چې د یو خاص حالت څخه یې پیل کړو .

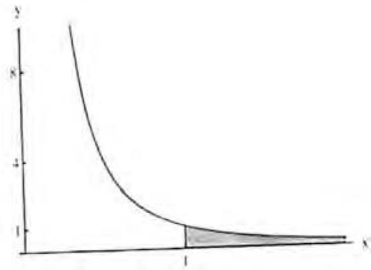
مثال (1.6.6). قبلو و چې $f(x) = \frac{1}{x^2}$ یوه تابع ده غواړو د f تابع انتیگرال د [1,b] تابع انټروال کې محاسبه کړو .لرو چې:

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_0^2 = -\frac{1}{b} + 1.$$

بناً بر دې

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) \quad =1$$

کولای شود f تابع انتیگرال له 1 څخه تر b پورې په هغه ساحه کې چې د f د گراف او $[1,b]$ انترووال تر منځ واقع دی تعبیر کړو .دا منا سبه ده ، ووایو چې د f تابع گراف $[1,\infty)$ انټروال کې واقع وې 1 دی . د G ساحه په(1) شکل کې ښودل شوې ده.



(1) شکل

تعریف(1.6.6): فرضووچې f د $[a,b]$ په یو انټروال کې متمادی وې داسې چې $x>a$ وي د $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ غیر عادی انتیگرال متقارب دی که

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

موجود وې (لیمیت یې معین وې). په دې حالت کې د غیر عادی انتیگرال قیمت لکه پورتنی لیمت تعریفوو او په عین سمبول یې دا رنگه ښیو .

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

وایو چې د $\int_a^{+\infty}f(x)dx.$ غیر عادی انتیگرال متباعد دی که $lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ شتون ونه لري.

د متقاربیت په حالت کې غیر عادی انتیگرال داسې تعبیرولکه دهغې ښنه شوې ساحې مساحت چې د f تابع د گراف او $[1,\infty)$ انټروال تر منځ واقع دی ، لکه د یو محد ود انټروال په حالت کې.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to-\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=1.$$

مثال (2.6.6) . معلوم کړې چې $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$ غیر عادی انتیگرال متقارب دي که متباعد،او که متقارب وې قیمت یې معلوم کړئ.

حل. د هر $b > 1$ له پاره لروچې

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = ln(b).$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} = +\infty.$$

دا فقط په هغه حالت کې په لنډ ول ليکو چې د $ln(b)$ حد په اختياري ډول لوي دی که b په کافي اندازه لوي کميت وي .په دې ډول د $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ غير عادی انتيگرال متباعد . د ($1.6.6$) او ($2.6.6$) مثالونود $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ په شکل غير عادی انتيگرالونه دي. راځئ چې د دغې غير عادی انتيگرال عمومي حالت وڅيړو .

قضيه (1.6.6): فرضوو چې p يو اختياري حقيقي عدد او $a > 0$ وي د $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ غير معين انتيگرال متقارب دی که $p > 1$ وي او متباعد دی که $p \le 1$ وي .

ثبوت. قبلو وچې $p = 1$ لرو $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(a)$ په دی ډول لرو :

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\ln(b) - \ln(a) = \infty.$$

بناً پر دې $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ غير عادی انتيگرال متباعد دی. اوس فرضوو چې $p \neq 1$ وي

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx \;=\int_a^b x^{-p}\,dx \;= \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b = \frac{x^{-p+1}}{-p-1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}$$

د $p > 1$ له پار ه لرو چې

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}\right)$$
$$= \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{(p-1)a^{p-1}},$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{(p-1)b^{p-1}}$$

څرنگه چې$\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} = 0$ دی نو بناًپردې $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ دغير عادی انتيگرال متقارب دی

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$$

اوس فرضوو چې $p < 1$ دی لرو چې

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx \;= \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

څرنگه چې $0 < 1-p$ دی.نو $\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = +\infty$ کیږي. په پایله کې $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ د $p < 1$ له پاره متباعد دی.

مثال (3.6.6). د $\int_0^{\infty} \sin(x)\,dx$ غیر عادی هغه حالت معلوم کړئ چې په کې متقارب یا متباعد وي، که متقارب وي قیمت یې پیدا کړئ.

حل: څرنگه‌چې

$$\int_0^{\infty} \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

دهر b له پاره

$$\int_0^{b} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^b = -\cos(b) + 1$$

$-\cos(b)+1$ لیمت د $b \to +\infty$ له پاره شتون نه لري.ځکه چې د $n = 1,2,3,\ldots$ لــه پــاره $-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) + 1 = 1$ او $-\cos(2n\pi) + 1 = 0$ بنأ پردې $\int_0^{\infty} \sin(x)\,dx$ غیر عادی انتیگرال متباعد دی. با ید په گوته کړوچې دهر $b>0$ له پاره $0 \le \int_0^{\infty} \sin(x)\,dx \le 2$ دی ځکه چې $0 \le -\cos(b) + 1 \le 2$ نوموړی مثال څرگندوی چې‌د $\int_u^{\infty} f(x)\,dx$ یوغیر عادی انتیگرال کیدای شي متباعد وي، ددې برسیره چې $b \to \infty$ له پاره $\int_u^{b} f(x)\,dx$ بی نهایت ته تباعد نه کوي.

مثال (*3.6.6*) . معلوم کړي چې $\int_0^{\infty} e^{-x/2}\cos(x)\,dx$ غیر عادی انتیگرال متقارب دي که متباعد، که متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل. د (*1.6*) برخې په *(8)* مثال کې د انتیگرال نیونې د قسمي طریقې په پام کې نیولو سره ترلاسه شوي و چې .

$$\int e^{-x/2}\cos(x)\,dx = \frac{4}{5}e^{-x/2}\sin(x) - \frac{2}{5}\, e^{-x/2}\cos(x)$$

بنأ پردي د هر $b > 0$ له پاره لرو چې.

$$\int_0^{b} e^{-x/2}\cos(x)\,dx = \frac{4}{5}e^{-x/2}\sin(x) - \frac{2}{5}\, e^{-x/2}\cos(x)\Big|_0^b$$
$$= \frac{4}{5}e^{-b/2}\sin(b) - \frac{2}{5}e^{-b/2}\cos(b) + \frac{2}{5}$$

یادونه باید وکړوچې $\lim_{b\to+\infty} e^{-b/2}\cos(b) = 0$ او $\lim_{b\to+\infty} e^{-b/2}\sin(b) = 0$

ځرنګه چې د هر حقیقي عدد b لپاره $1 \le |\sin(b)|$ او $1 \le |\cos(b)|$ او $\lim_{b\to+\infty} e^{-b/2} = 0$
دی بنأ پر دي

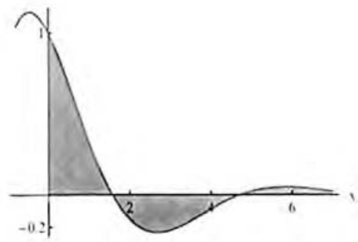
$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x/2}\cos(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left((\frac{4}{5}e^{-b/2}\sin(b) - \frac{2}{5}e^{-b/2}\cos(b) + \frac{2}{5})\right) = \frac{2}{5}.$$

دی.

په نتیجه کې ور کړل شوي غیرعادي انټیګرال متقارب دي او قیمت یې $\frac{2}{5}$ دی.

په پایله کې کولای شو د هغه ساحې مساحت داسې تعبیر کړو چې $f(x) = e^{-x/2}\cos(x)$ تابع ګراف او $[0,\infty)$ انټروال تر منځ واقع ده دغه ساحه په (2) شکل کې خط خط شوي برخه رابښيي د f تابع مختلف الا شاره ده.

$$\int_0^\infty e^{-x/2}\cos(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x/2}\cos(x)\,dx = \frac{2}{5}$$



(2) شکل

تعریف (2.6.6). فرضوو چې f $(-\infty,a]$ انټروال کې متمادي ده .وایو چې د $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ غیرعادي انټیګرال متقارب دي که چیرې $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$ موجود وي (لیمټ معین وي).

په دې حالت کې مو نږ دغیر عادي انټیګرال قیمت معلوم مولو له پاره هغه په عین سمبول ښیو .
په دې ډول

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

که پورتنی لیمټ شتون ونه لري، وایـو چې $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ غیـــرعـــادي انټیګرال متباعد دی.

مثال (5.6.6). معلوم کړي چې $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx$ غیر عادي انټیګرال متقارب دي که متباعد، که متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ .

حل. لرو چې.

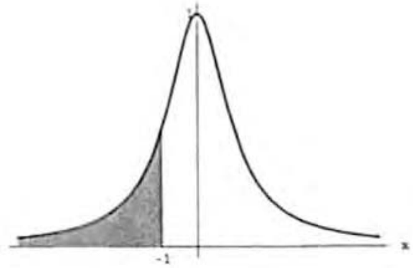
$$\int_b^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)\Big|_b^{-1} = \arctan(-1) - \arctan(b) = \frac{\pi}{4} - \arctan(b).$$

بناً پردي :

$$\lim_{b \to -\infty} \int_b^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b \to -\infty} \left(-\frac{\pi}{4} - arctan\,(b)\right) = -\frac{\pi}{4} - \lim_{b \to -\infty} arctan\,(b)$$
$$= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

په نتیجه کې ور کړل شوي غیر عادي انتیګرال متقارب دي لرو چې .

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^{-1} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$$



(3) شکل

د ګراف(3) شکل رابښيي . داسې چې $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ **ده هغه مساحت چې د** f **تابع ګراف او** $(-\infty, -1]$ **انټروال تر منځ واقع دی** $\frac{\pi}{4}$ **دی. اوس دوه اړخیز غیرعادي انتیګرالونه معرفي کوو:**

تعريف (3.6.6) **.فرضوو چې** f **پر** $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ **کې متمادي ده. وایو چې د** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **غیر عادي انتیګرال متقارب دي که چیرې** $a \in \mathbb{R}$ **داسې شتون ولري.**

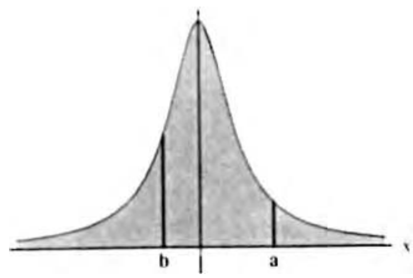
چې $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **او** $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ **انتیګرالونه متقارب وي که چیرې داسې یو حالت وي چې په کې بــه دغیر عادي انتیګرال قیمت د یواړخیزوغیرعــادي انتیګرالونوله مجمــوعې څخــه حاصلوو نو په پام کې نیسو:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

د $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **غیر عادي انتیګرال نه متباعد وایي که چیرې** $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ **یا** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **متباعد وي.**

تبصره (1.6.6). **د** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **غیر عادي انتیګرال تقار ب یا تباعد اودهغې قیمت د تقارب په حالت کې، د "** a **" په منځني نقطې" پورې اړه نه لري دغه ادعا به یوازې د انتیګرال د هندسي تعبیر له مخې د منلو وړ وي.**

(4) شکل کې هغه مساحت ښيي چې د f ترګراف لاندې دی a او b په ټاکلو ولو پورې لکه منتصفه نقطې اړه نلرې .



(4) شکل

مثال (6.6.6.). معلوم کړي چې $\int \frac{1}{4x^2-8x+13}dx$ غير عادی انتیګرال متقارب دي که متباعد،او که متقارب وي قیمت يې معلوم کړئ.

حل . په 6.2 برخی په 3 مثال کې و ښودل شوچې

$$\int \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)+C$$

د انتیګرال شکل رابنيي چې1 يو ه مناسبه منحٌنی نقطه ده

$$\int_1^b \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)\Big|_1^b$$
$$= \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(b-1)}{3}\right)-\frac{1}{6}arctan(0)$$
$$= \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(b-1)}{3}\right)$$

بناً پردې

$$\int_1^\infty \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{4x^2-8x+13}dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(b-1)}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$$

په مشابه ډول:

$$\int_b^1 \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)\Big|_b^1$$
$$= -\frac{1}{6}arctan\left(\frac{2(b-1)}{3}\right)$$

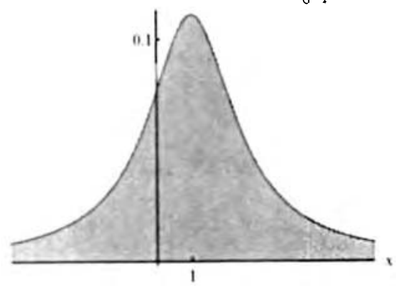
له دې ځايه:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{1} \frac{1}{4x^2-8x+13}dx$$
$$= \lim_{b\to-\infty}\left(-\frac{1}{6}arcta\left(\frac{2(b-1)}{3}\right)\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{12}$$

بنأ پردې ورکړل شوي غیرعادی انتیگرال متقارب او

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{4x^2-8x+13}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{4x^2-8x+13}dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

دی. (5) شکل $f(x) = \frac{1}{4x^2-8x+13}$ تابع گراف او دهغه ساحې مساحت رابنیي چې د f تابع گراف د oxمحور تر منځ واقع دی او قیمت یې$\frac{\pi}{6}$ دی.



(5) شکل

تبصره (2.6.6). مونږ باید چې د $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ غیر عادی انتیگرال د

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

په شان تعریف نه کړو .راځې د $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ غیر عادی انتیگرال په پام کې ونیسو ، څرنگه چې د

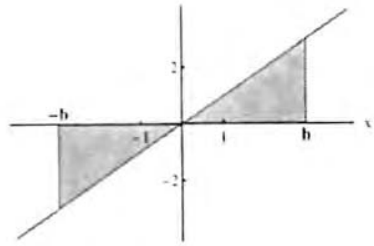
$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{2} = +\infty,$$

غیر عادی انتیگرال متباعد دی ، او د بلې خوا لروچې :

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} x\,dx = \lim_{b\to-\infty}(0) = 0$$

په گوته باید کړو چې $f(x) = x$ یوه تاقه تابع ده چې گراف یې نظر مبدأ ته متناظر دی دا بــه حیرانونکې نه وي چې $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$ دی د تقارب تعریف د $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ له پاره تقریباًد $\int_{b}^{c} f(x)\,dx$ څخه مطلب دی کله چې $b\to-\infty$ او $c\to+\infty$ ته تقرب وکړي ، پرته

د مخنیوي نــه چــې $b \to -\infty$ وي.



شکل (6)

مثال (7.6.6). معلوم کړي چې $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ غیر عادي انتیګرال متقارب دي که متباعد،او که متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل. مونږ به 0 منځنئ نقطه و ټاکو .د $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ او $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ دواړه غیرعــادي نتیګرالونه به متقارب وي د دواړو (دواړوخواو) غیرعادي انتیګرال ور کړشوو انتیګرالونــو تقارب له پاره په پام کې نیسو .

$$\int_0^b \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{x}{x^2+1}\frac{du}{dx}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2+1} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(b^2+1),$$

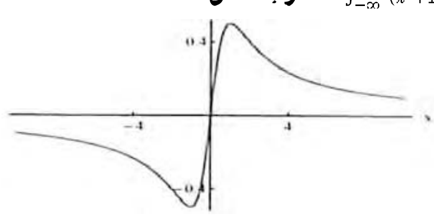
بناً پر دې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(b^2+1)\right) = +\infty$$

په لاس راځي په دې ډول $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ غیر عــادي انتیګرال متباعد دی بــایدپه ګــوته کړو چې $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ تابع یو تا قــه تابع تعریف شوي ده او ګــراف یې نظر مبدأ ته متناظردی کوم چې په (7) شکل کې ښودل شوي دی ،دهر $b \in \mathbb{R}$ له پاره لرو ځکه چې

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0$$

دی. سره له دې چې $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)}$ متقارب نه دی.



شکل (7)

(2.6.6) هغه غیر عادي انتیګرالونه چې دانتیګرال لاندې توابع یې غیرمتمادي وي .

د f یوې تابع ته پر $[a,b]$ انتروال باندې متمادي وایې که چیرې f په $[a,b]$ کې لږترلږه یې ځایه کیدونکې یا خیزوهونکې غیر متمادي نقطه ولري. په دې ډول f په دې غیر متمادي نقطو کې تابع یو اړخیزه لیمټونه لري.په داسې حالت کې f پر$[a,b]$ باندې انټروال په فرعي انټروالونوکې انتیګرالی مجموعې لري چې یوله بل څخه دf دغیرمتمادي نقطې پواسطه جلا کېږي.اوس په دې غیرمتمادي او خیزوهونکونقطوکې دانتیګرال د تعریف له مخې ځینې حالتو نه معرفي کوو. راځئ چې په یو خاص حالت پیل وکړو.

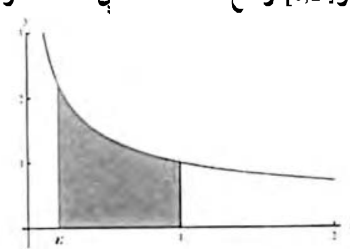
مثال (8.6.6). قبلوو چې د$x > 0$ له پاره $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ یو تابع ور کړل شوې ده. لروچې:
$\lim_{e\to 0+} f(x) = +\infty$ څرنګه چې $0 < \varepsilon < 1$ له پاره f د $[\varepsilon, 1]$ په ډول انټروال کې متمادي ده ، نو د f له پاره انتیګرال داسې یوانټروال موجوداومربوط په هغه مساحت دی چې د fد ګراف او $[\varepsilon, 1]$ انټروال ترمنځ واقع دی. لکه په (8) شکل کې چې ښودل شوې دی .

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx = x^{-1/2}dx = \frac{x^{-1/2}}{1/2}\Big|_{e}^{1} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}\,.$$

طبعي ده چې په دې حالت کې په $[0,1]$ انټروال کې د$\varepsilon > 0$ قیمتونه اخلې اولروچې غیر عادي انتیګرال لیمټ عبارت دی له

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx = \lim_{e\to 0-} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

نوموړې پایله د f د ګراف او$[0,1]$ترمنځ مساحت له مخې مشاهده کولای شو .



(8) شکل

تعریف (4.6.6). فرضوو چې f د $]a,b[$ په انټروال کې متمادي او $\lim_{x\to 0+} f(x)$ شتون نه لري. وایې چې د

$\int_a^b f(x)dx$ غیر عادی انتیگرال متقارب دی که $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ موجود وي په دی حالت کې د غیر عادی انتیگرال قیمت لکه د پورتنی لیمټ په شان معلوموواوپه لاندې سمبول یې ښیو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)dx$$

که $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ شتون ونه لري وایو چې $\int_a^b f(x)dx$ غیر عادی انتیگرال متباعد دی.

تعریف (6.6.4) څخه په استفاده کولای شو $c = a + \varepsilon$ په پام کې ونیسو داسې چې که c ته a نژدې شی ε له ښې خواڅخه صفرته نژدې کیږي بنأ پردې لروچې:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{c\to a+}\int_c^\varepsilon f(x)dx$$

دغه غیرعادی انتیگرال متباعد دی که $\lim_{c\to 0+}\int_c^d f(x)dx$ شتون ولري.

مثال (*9.6.6.*) . د $\int_0^1 ln(x)dx$ په پام کې ونیسئ اوواضح کړئ چې .

a) ولې دغه انتیگرال غیرعادی انتیگرال دی.

b) معلوم کړئ چې دغه غیر عادی انتیگرال متقارب دی ، که متباعد او که متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل.

a) ورکړل شوي انتیگرال غیر عادی انتیگرال دی ځکه چې $\lim_{x\to 0+} ln(x) = -\infty$ دی.

b) قبلووچې $0 < \varepsilon < 1$ دی لروچې:

$$\int_\varepsilon^1 ln(x)dx = xln(x) - x\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon ln(\varepsilon) + \varepsilon\,.$$

(د *5.6* برخې او یاد لوپیټال دقاعدې *(L'Hopital's rule)* له مخې $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon ln(\varepsilon) = 0$ دی) بنأ پردې

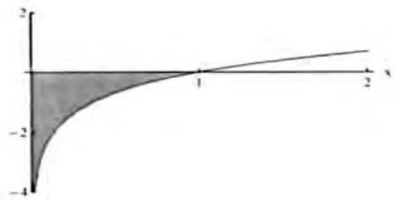
$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 ln(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-1 - \varepsilon ln(\varepsilon) + \varepsilon) = -1$$

په دې ډول ورکړل شوي غیرعادی انتیگرال متقارب دی او لرو چې:

$$\int_\varepsilon^1 ln(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 ln(x)dx = -1$$

کولای شودغیر عادی انتیگرال قیمت د G هغې ساحې مساحت په پام کې ونیسو کوم چې د طبعي لوګاریتم د ګراف او [0,1] انټروال تر منځ واقع دی . د G ساحه په *(9)* شکل ښودل شوې

ده.



شکل (9)

په مثال کې مو وښودل چې $\int_a^b \frac{1}{x^{1/2}}dx$ متقارب دی راځئ چې لاندې تقسيم شوي حالت ته په راتلونکې کې مراجعه وکړو.

قضيه (2.6.6). د $p > 0$ او $a > 0$ لپاره $\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ متقارب دی که $p < 1$ وي او متباعد دی که $p \geq 1$ وي.

ثبوت. راځي چې د $p = 1$ حالت له پاره پيل کړو قبلوو چې $0 < \varepsilon < a$ دی.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln(a)-\ln(\varepsilon)) = +\infty$$

ځکه چې $\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln(\varepsilon) = -\infty$ بنأپر دې د $\int_\varepsilon^a \frac{1}{x}dx$ متقارب دی.

فرضوو چې $p \neq 0$ او $0 < \varepsilon < a$ دی لرو چې :

$$\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^p}dx = \int_\varepsilon^a x^{-p}dx = \frac{x^{-p+1}}{x^{-p+1}}\Big|_\varepsilon^a = \frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1}$$

که $0 < p < 1$ وي نو $1-p > 0$ او $\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^{-p+1} = 0$ دی بنأ پر دې:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{a^{1-p}}{1-p}$$

په دې ډول د $\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ متقارب او قيمت يې $\frac{a^{1-p}}{1-p}$ دی.

که $p > 0$ وي نو $1 - p < 0$ او $\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^{-p+1} = +\infty$ دی بنأ پر دې

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = +\infty$$

په دې ډول د $\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ غير عادی انتيګرال متباعد دی.

که f پر $[a, b]$ باندی متمادي او $\lim_{x\to b-} f(x)$ شتون ونه لري ، نو $\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ غيرعادی دی.

تعريف (5.6.6) . فرضوو چې f پر $[a, b]$ باندی متمادي او $lim_{x\to b-} f(x)$ شتون ونه لري وايي چې د $\int_0^a \frac{1}{x^p}dx$ غير عادی انتيګرال متقارب دی که:

$$\lim_{\varepsilon\to 0-}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

شتون و لري . په دې ډول د حالت کې د غیر عادی انتیگرال قیمت عبارت دی له :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

که $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ شتون ونه لري . په دې حالت کې $\int_0^a f(x)\ dx$ دغیر عادی انتیگرال متباعد دی . (**5.6.6**) تعر یف ته مراجعه کولاي شو $c = b - \varepsilon$ په پام کې ونیسوداسې چې که c د کینې خوا څخه b ته نږدې شي ε صفر ته تقرب کوي او ټول مثبت قیمتونه اخلي بنأپر دې.

$$\int_0^b f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$$

غیرعادی انتیگرال متباعد دی که $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$ شتون ونه لري.

مثال(10.6.6) . $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx$ محاسبه کړئ او معلوم کړئ چې:

a) ولې دا انتیگرال غیر عادی انتیگرال دی.

b) معلوم کړئ چې دا غیر عادی انتیگرال متقارب دی ، که متباعد یا متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل. a) ورکړل شوي انتیگرال غیر عادی انتیگرال دی ځکه چې $\lim_{x\to 2-}\frac{1}{(x-2)^{1/3}} = -\infty$ دی

b)که $0<\varepsilon<1$ وي لرو چې :

$$\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}dx = \int_1^{\varepsilon}\frac{1}{(u)^{\frac{1}{3}}}du = \frac{3(u)^{\frac{2}{3}}}{2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{3(\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{3}{2}$$

بنأ پردې :

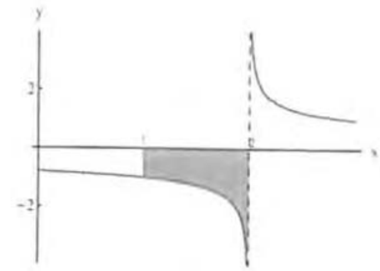
$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{3(\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

په دې ډول ، ورکړل شوي غیرعادی انتیگرال متقارب دی او لرو چې :

$$\int_1^2\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}dx - \frac{3}{2}$$

کولای شو په پایله کې د هغې ساحې مسا حت داسې تصور کړو چې $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}$ تابع گراف او $[1,2]$ انټروال په منځ واقع ده دغه ساحه په (11) شکل کې خط خط شوې بر خه رابنیي .

يوه تابع کیدا ي شي د یو ور کړشوي انټروال په داخل کې غیر متمادي نقطې ولري .



(10) شکل

تعریف (6.6.6) . فرضوو چې f پر $[a,b]$ انټروال باندی په هره نقطه کې بی له c څخه متمادي وي سربیره پردې فرضوو چې کم تر کمه دلیمتی نقطو په یوه نقطه کې په یو د لیمتې نقطو کې $\lim_{\varepsilon\to0+} f(x)$ یا $\lim_{\varepsilon\to0+} f(x)$ شتون ونه لري.

په دې حالت کې د $\int_a^b f(x)\,dx$ متقارب دی یوازې په هغه حالت کې $\int_c^b f(x)dx$ یا $\int_a^c f(x)\,dx$ شتون و لري. که انتیګرال متقارب وي قیمت یې په لاندې توګه معلوموو .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ + \int_c^b f(x)dx$$

د $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد دی که له $\int_c^b f(x)dx$ یا $\int_a^c f(x)\,dx$ انتیګرالونو څخه یو هم متباعد دی .د(6.6.6) تعریف شتون په ډیروعمومي حالتونوکې مشاهده شوي دی.

مونږ باید دغیرعادی انتیګرالو نو په محاسبه کې دترانتیګرال لاندې تابع ټولې غیرمتمادي نقطې په پام کې ونیسواو پرټولوهغو انټروالونو کې چې د دی غیر متمادي نقطو پواسطه جلا کیږي ، غیر عادی انتیګرالونه بیل بیل امتحان کړو .

مثال (11.6.6). د $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ په پام کې ونیسی او واضح کړئ چې .

a) ولې دا انتیګرال غیرعادی انتیګرال دی.

b) معلوم کړئ چې دا غیرعادی انتیګرال متقارب دی ، که متباعد اویا متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل. a) ورکړل شوي انتیګرال غیرعادی انتیګرال دی ځکه چې

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^{2/3}}dx = +\infty$$

دی. یعنې تر انتیګرال لاندې تابع $0 \in [-1,2]$ غیرمتمادي ده.

b) مونږ باید لاندې غیرعادی انتیګرال امتحان کړو:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}}dx \quad \text{یا} \quad \int_{0}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}dx$$

لرو چې:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1}^{\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(x^{-\frac{1}{3}} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-3\varepsilon^{-\frac{1}{3}} + 3 \right) = 3$$

او

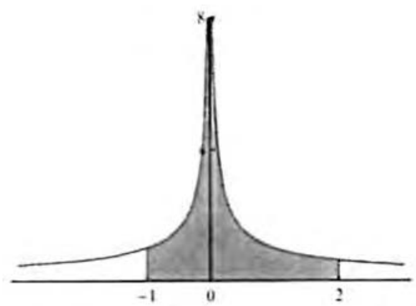
$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{2} x^{-2/3}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(3\, 2^{\frac{1}{3}} \Big|_{\varepsilon}^{2} \right) - 3\varepsilon^{1/3}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(3\left(2^{\frac{1}{3}}\right) - 3\varepsilon^{1/3} \right) = 3\left(2^{\frac{1}{3}}\right).$$

بناً پردې، ورکړل شوې غیر عادی انتیګرال متقارب دی او لروچې:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}dx = 3 + 3\left(2^{\frac{1}{3}}\right)$$

کولای شود دې پایله تعبیرکړو لکه چې په (11) شکل واضح شوې . او دادهغې ساحې مساحت ښیي کومه چې د $y = x^{-2/3}$ دتابع دګراف او$[-1,2]$ انټروال ترمنځ توره شوې برخې کې واقع ده.



(11) شکل

تبصره (3.6.6). پر $[a,b]$ انټروال د غیرعادی انتیګرال له تقارب څخه مقصد پر $[a,c]$ او $[c,b]$ انټروالونوباندی د غیرعادی انتیګرالونو له تقارب معلومول دي . مونږ باید $\int_a^b f(x)dx$) لکه په لاندې ډول معرفی کړو:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx)\right)$$

د معرفی څخه زمونږ مقصد د $\int_a^b f(x)dx)$د تقارب له پاره د لاندې ليميټونو

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx)$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx=\int_{c}^{b} f(x)dx)$$

شتون ضرورت دی،بې له دې چې د ε اوδ تر منځ د هر ارتبا ط .(داسې چې$\delta=\varepsilon$ وي) له مخې حا صليږي د مثال په ډول د $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ غيرعادي انتيګرال متقارب نه دی ځکه چې$\int_0^1\frac{1}{x}dx$ متباعد دی دبلې خوا، د $\frac{1}{x}$ تابع تاقه تعريف شوې لروچې :

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=0$$

په نتيجه کې:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx\right)=0$$

دی.

(7.6) دويمه برخه: غيرعادي انتيګرالونه .*(Improper integrals: part 2)*

په *(6.6)* برخه کې مود غيرعادي انتيګرالونود مختلفو ډولونوپه هکله بحث وکړل . په هر حالت کې مو ددی وړتيادرلودله چې دورکړل شوي غيرعادي انتيګرالونو تقارب اوياتباعد په عادي ډول د مربوطه انتيګرال په واسطه محاسبه او ليمت يې مقايسه کړو. که چيرې ددی ډول محاسبوسرته رسول غيرعملي اويا ناممکن وي نوممکن د مقايسوي ازمايښت څخه استفاده وکړو.

(*1.7.6*) دنا محدودو انټروالونو غيرعادي انتيګرالونه .

راځي چې په پيل کې دغير منفی (مثبت) توابعو غيرعادي انتيګرالونوپه پام کې ونيسو.

قضيه(1.7.6).فرضوو چې f پر $(a,+\infty$] باندې متمادي ده اود هر $x\geq a$ له پاره$f(x)\geq 0$وي .که چيرې$M\geq 0$ داسې شتون ولري چې $b\geq a$ له پاره $\int_a^b f(x)\,dx\leq M$ وي د $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ غيرعادي انتيګرال متقارب ، او د هر $b\geq a$ له پاره :

$$\int_a^b f(x)\,dx\;\leq\;\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

دی د بلې خوا $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx=+\infty$ دی.نو $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$متباعد دی .

(1.7.6) قضيې ثبوت مو دعالی ریا ضیاتو په کورس کې ترسره کړی. او **(1.7.6)** قضیه د مقایسوي ازمایښت له پاره د استفادې وړ ده.

قضیه(2.7.6) . (مقایسوي ازمایښت) .فرضوو چې f او g پر $[a,+\infty)$ باندی متمادي دي.

a) د تقارب برخه (یا شرط) .که $0 \le f(x) \le g(x)$ وي د هر $x \ge a$ له پاره او $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ متقارب وي، پس د $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ غیر عادی انتیگرال هم متقارب دی او لرو چې:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

b) د متباعدیت شرط که $f(x) \ge g(x) \ge 0$ او دهر $x \ge a$ له پاره $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متباعد وي،نو $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ هم متباعد دی او لرو چې:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \ge \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

ثبوت. a) قبلوچې $b \ge a$ دی. څرنګه د هر $x \ge a$ له پاره $0 \le f(x) \le g(x)$ دی لرو چې

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \le \int_a^{b} g(x)\,dx \le \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

(1.7.6) قضیې په کارود $M = \int_a^{-\infty} g(x)\,dx$ له مخې وایو چې $\int_a^{b} f(x)\,dx$ غیرعادی انتیگرال هم متقارب دی ، او $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{\infty} g(x)\,dx$ دی.

b) څرنګه چې دهر $g(x) \ge 0$ پاره له $x \ge a$ دی او $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ متباعد دی .لروچې د(1.7.6) قضیې له مخې

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx = +\infty$$

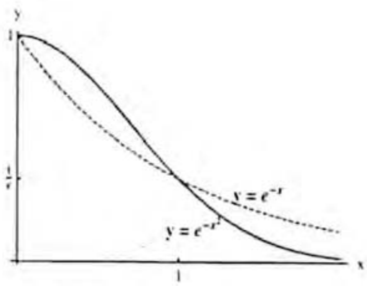
څرنګه چې $f(x) \ge g(x)$ دی دهر $x \ge a$ له پاره او د هر $b \ge a$ له پاره

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \ge \int_a^{b} g(x)\,dx$$

دی.

بناً پردې $\lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx = +\infty$ دی. په دې ډول د $\int_a^{-\infty} f(x)\,dx$ غیر عادی انتیگرال هم متباعده ده .

مثال (1.7.6) . وښيئ چې د $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ غير عادی انتيګرال متقارب دی .



شکل (1) $y = e^{-x^2}$

حل . که $x \ge 1$ وي نو $x^2 \ge x$ او $-x^2 \le -x$ دی. څرنګه چې ox پر ټول محورباندی د اکسپونینشل تابع متزايده ده، لروچې که $x \ge 1$ نو $e^{-x^2} \le e^{-x}$ د $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ غير عادی انتيګرال د مستقيمې محاسبې له مخې متقارب دی.

په حقيقت کې $\int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^b = -e^{-b} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}$ دی.

په نتيجه کې

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}\right) = \frac{1}{e}$$

د مقايسوي تقارب امتحان(2.7.6)) دقضيې له مخې د $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ غير عادی انتيګرال هم متقارب دی.

تعريف(1.7.6) وايو چې د$\int_a^\infty f(x)\,dx$ غير عادی انتيګرال هم مطلق متقارب دی که چیرې $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ متقارب (د مطلق تقارب دتقارب مستلزم دی).

قضيه (3.7.6). فرضوو چې f پر $[a,+\infty)$ باندی متمادی وي$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ متقارب دی نو $\int_a^\infty f(x)\,dx$ متقارب دی.

ثبوت. بايد په ګوته کړو چې$|f|$ پر $[a,+\infty)$ باندي متمادي او $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ متقارب دی. نو$\int_a^\infty f(x)\,dx$ متقارب دی.

قضيې ثبوت مودعالی ريا ضياتو په کورس کې ترسره کړو .

مثال (2.7.6). وښيئ چې د $\int_1^\infty e^{-x^2}\cos(3x)\,dx$غيرعادی انتيګرال متقارب دی.

حل. لرو چې:

$$\left|e^{-x^2}\cos(3x)\right| = e^{-x^2}|\cos(3x)| \le e^{-x^2}$$

ځکه چې د هر $u \in \mathbb{R}$ لپاره1 $\le |\cos(u)|$دی . په (1.7.6) مثال کې مو وښو دل چې
$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ dx$
متقارب دی. بنأ پردې $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\cos(3x\ dx$ د (2.7.6) قضیې له مخې
$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\cos(3x\ dx$متقارب دی .

مثال (3.7.6) . وښیئ چې د $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ dx$ د دریشلت انتیګرال متقارب دی.

حل. څرنګه چې1 $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ دی . ویلای شو چې تر انتیګرال لاندې تابع په [0,1] انتروال کې یو ډول متداوم متمادیت لری ده. بنأ پردې کافي ده وښیو چې دdx $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ غیرعادی انتیګرال متقارب دی.د محاسبې له پاره یې د قسمي فورمول څخه په استفاده په پام کې نیسو:

$$u = \frac{1}{x} \qquad du = \sin(x)\,dx$$

بنأ پردې: $v = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$ او $du = \frac{1}{x^2}dx$

$$\int_1^b \sin(x)\frac{1}{\mathrm{x}}dx = \int_1^b \mathrm{udu} = uv\Big|_1^b - \int_1^b \mathrm{vdu}$$

$$= -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{\cos(b)}{b} + \cos(1) - \int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$$

لروچې .

$$\left|\frac{\cos(b)}{b}\right| = \frac{|\cos(b)|}{b} \le \frac{1}{b}$$

او

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{b} = 0$$

دی

بنأ پردې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(b)}{b} = 0$$

په دې ډول :

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{cos(b)}{b} + cos(1)\right) = cos(1)$$

لکه دdx $\int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}$له پاره مونږ ادعاکو چې د$\infty$ $\to b$ دپاره لیمت شتون لري نو dx $\int_1^{\infty} \cos(x)\frac{1}{x^2}$ غیرعادی انتیګرال متقارب دی. په حقیقت کې :

$$\left|\cos(x)\frac{1}{x^2}\right| = |\cos(x)|\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

ځکه چې د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره$1 \leq |\cos(x)|$ دی. څرنګه چې $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ متقارب دی دمقایسوي ازما ېښت له مخې د

$$\int_1^\infty \left|\cos(x)\frac{1}{x^2}\right|\, dx$$

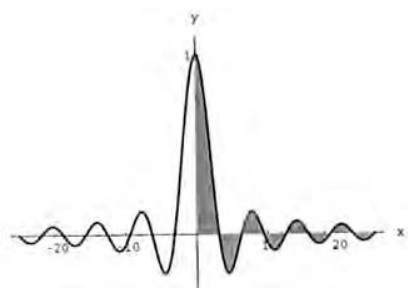
غیرعادی انتیګرال متقارب دی. بناً پر دې د(3.7.6) قضیې له مخې $\int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$ هم متقارب دی.

په دې ډول:

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\, sin(x)\ \ dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{cos(b)}{b^2} - cos(1)\right) + \lim_{x\to\infty}\int_1^b\ cos(x)\frac{1}{x^2}\, dx$$
$$= \cos(1) + \int_1^b\ \cos(x)\frac{1}{x^2}\, dx$$

دی بناً پر دې $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$متقارب دی.

په دې پوهیږو چې$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ دی. کولای شو تصور کړو دا قیمت د هغې ساحې مساحت په پام



(2) شکل

کې ونیسو چې د (2)شکل د توري شوې برخې او د $y = \frac{\sin(x)}{x}$ ګراف تابع او$[0,\infty)$انټروال تر منځ واقع د ه .دبلې خوا $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\, dx$ غیر عادی انتیګرال متباعد دی.د نوموړي حقیقت ثبوت دعالې ریاضیاتو کورس پوري مربوط دی.

تعریف (2.7.6) . د$\int_0^\infty f(x)\, dx$ غیر عادی انتیګرال شرطاً متقارب دی که هغه متقارب خو $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ متباعد وي؛په دې ډول $\int_a^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ د دریچلیت انتیګرال شرطاً متقارب دی ،مونږ د پورتنیو تعریفونو اومسلو له پاره دغیر عادی انتیګرالونو لا ندې ډولونه لرو.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{او} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

(2.7.6) دغیر متمادي توابعوغیرخاص انتیگرالونه

اوس هغه غیرعادي انتیگرالونه په پام کې نیسو چې پر محدودو انټروالونوباندې د غیر متمادي توابع و لري لاندې مقا یسوی ازموینه د (2.7.6) قضیې بیلگه ده.

(*6.7.4*) قضیه (پر محدودو انټروالونو مقایسوي ازمایینت) فرضوو چې f او g پر (a,b) متمادي دي.

a) فــرضـــوو چـــې دهـــر $x \in (a,b)$ له پاره $f(x) \geq g(x) \geq 0$ او g پر $[a,b]$ انتیگرال منونکې وي یا د $\int_a^b g(x)\,dx$ غیر عــادي انتیگرال متــقارب وي نو د $\int_a^b f(x)\,dx$ غیــر عادي انتیگرال هم متقارب دی او لرو چې:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

b) که دهر $x \in (a,b)$ له پاره $f(x) \geq g(x) \geq 0$ او g او د $\int_a^b g(x)\,dx$ غیــر عــادي انتیگرال متباعد وي. نو د $\int_a^b f(x)\,dx$ غیر عادي انتیگرال هم متباعد د ي .

د (*4*.7.6) قضیې ثبوت د عالي ریاضیاتو کورس پوري مربوط دی.

مثال *(4.7.6)*. د $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}}dx$ په پام کې ونیسی .

a) ولې دا انتیگرال غیر عادي انتیگرال دی.

b) معلوم کړئ چې دغه غیر عادي انتیگرال متقارب دی ، که متباعد.

حل. a) د انتیگرال لاندې تابع په $x \in [0,1)$ کې متمادي ده (ازمایینت یې کړئ) $x < 1$ او $x \cong 1$ سره وي ،نو

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-\frac{1}{2}x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(2)(\frac{1}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$$

بنأ پردې:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} = +\infty$$

په دې ډول ،

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}}dx$$

یو غیر عادي انتیګرال دی.

b) که $x\in(0,1)$ وي لرو چې :

$$(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)=(1-x)(1+x)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\geq(1-x)(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-x),$$

په پایله کې $0<\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}}=\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$ دی.

د $\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}dx$ غیر عادي انتیګرال هم متقارب د ي. په حقیقت کې

$$\int\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}dx=-2\sqrt{2}\sqrt{1-x}$$

دی (ازمایښت یې کړئ) .او په نتیجه کې د $0<\varepsilon<1$ له پاره

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}dx=-2\sqrt{2}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}$$
$$=-2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{2},$$

دی.

بناً پر دې

$$\int_0^1\sqrt{\frac{2}{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_1^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$$

ځکه چې $\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)}}>0$ دی. همدارنګه د *(4.7.6)* د قضیې له مخې هم ورکړل شوې غیر عادي انتیګرال متقارب د ي.

تعریف(3.7.6) . فرضوو چې f پر (a,b) متمادي ده. وایو چې $\int_a^b f(x)\,dx$ غیر عادي انتیګرال هم مطلقاًمتقارب دی که د $\int_a^b|f(x)|\,dx$ غیر عادي انتیګرال متقارب وي فقط لکه په غیر محدود انترووالونوکې د غیرعادي انتیګرالونوپه حالت کې، هغه وخت یو غیر عادي انتیګرال مطلقاً متقارب د ی چې هغه متقارب وي.

قضیه *(5.7.6)*. فرضوو چې f پر (a,b)باندې متمادي او $\int_a^b|f(x)|\,dx$متقارب وي که د $\int_a^b f(x)\,dx$غیر عادي انتیګرال هم متقارب د ی. د *(5.7.6)* قضیې ثبوت دعالې ریاضیاتو کورس پورې مربوط دی.

مثال (5.7.6). $\int_0^1\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ په پام کې ونیسئ اومعلوم کړې چې:

a) ولې دغه انتیګرال غیر عادي انتیګرال دی.

b) معلوم کړئ چې دغه غیر عادي انتیګرال مطلقاً متقارب دی.

حل. وضع کوو چې $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ نو د $\lim_{x\to 0+} f(x)$ شتون نه لري. په رښتيا چې د $n = 0,1,2,3,..$ له پاره د $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ په ګوته کو چې $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ دی ، لرو چې

$$f(x_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\, sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

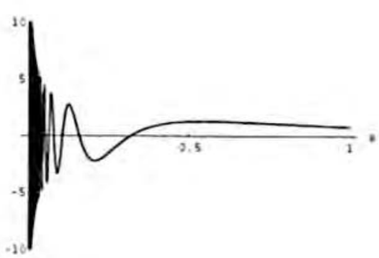
بناً پردې $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = +\infty$ دی. بلې خوا ، که د $n = 0,1,2,3, \ldots,$ له پاره $z_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$ وي نو $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ دی.او

$$f(z_n) = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}\, sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$$

په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}\right) = -\infty$$

بناً پردې ، f په (0) کې د ښي خوا ليمټ نه لري. په (3) شکل کې دې ته هڅه شوې ده چې د f د ګراف په باب يې يو نظر وړاندې کړي.دا انتيګرال دتعريف له مخې غيرعادی دی.څرنګه چې $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ له پاره $x > 0$ دی نود هر $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ دی . او د $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ غير عادی انتيګرال متقارب د ی. لکه څنګه چې مخکې مو په (6.6) دبرخې په (8) مثال کې بحث کړئ اوبناً پردې را کړ شوی غيرعادی انتيګرال د مقايسوي ازما يښت له مخې مطلقاً متقارب دی.



(3) شکل

تعريف (4.7.6). فرضوو چې f پر (a,b) متمادي ده. وايو چې $\int_a^b f(x)\,dx$ غيرعادی انتيګرال شرطاً متقارب د ي که چيرې هغه متقارب خو $\int_a^b |f(x)|\, dx$ متباعد دي .

مثال (4.7.6). وښيئ چې د $\int_0^1 \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right) d\,x$ غيرعادی انتيګرال متقارب دی.

حل . $f(x) = \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right)$ په پام کې نيسو . نوموړی انتيګرال غيرعادی دی ځکه چې.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

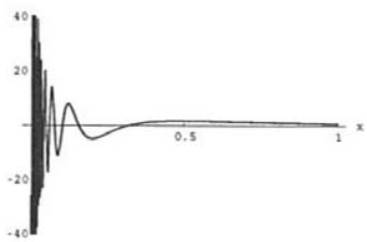
شتون نه لري . (لکه په7 مثال کې) 4 مثال هغه شوې چې د f ګراف بیان کړو .

مونږ نوموړي غیر عادي انتیګرال به داسې یوغیرعادي انتیګرال بدلوو چې د هغې په باب موبحث کړې دی .

که $u = \frac{1}{x}$ قبول کړولروچې $du = \frac{1}{x^2}dx,$ په نتیجه کې:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right) d\,x = -\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) d\,x$$
$$= -\int_{1/\varepsilon}^{1} \frac{1}{u} sin(u) d\,u$$
$$= -\int_{1/\varepsilon}^{1} \frac{sin(u)}{u} d\,u$$
$$= -\int_{1}^{1/\varepsilon} \frac{sin(u)}{u} d\,u$$

په دې ډول



(4) شکل

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right) d\,x \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{1}^{1/\varepsilon} \frac{sin(u)}{u} d\,u \Leftrightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{sin(u)}{u} du$$

متقارب دی.په (3.7.6) مثال کې مو وښودل چې $\int_1^{\infty} \frac{sin(u)}{u} d\,u$ متقارب دی. بنأ پردې $\int_0^1 \frac{1}{x} sin\left(\frac{1}{x}\right) d\,x$ متقارب دی. کولای شو هغه داسې وښیو چې نو موړی انتیګرال مطلقاً تقارب نه لرې. په دې ډول نوموړی انتیګرال شرطاً متقارب دی.

اوم فصل

د انتیگرال تطبیقات

په دی فصل کې دیو جسم حجم د قطع کولو په طریقه به محاسبه کړو، چې دا د یو جسم حجم دمحاسبه کولو خاص حالت دی کوم چې د تابع د گراف ددوران څخه د افقی محور په شاوخوا لاسته راځي .په همدی ډول دیو جسم حجم به لاسته راوړو په هغه صورت کې چې دتابع گراف په عمودي محور دوران وکړي . ددی فصل په دویم سکشن کې مونږ د تابع منحنی طول او دسطحی مساحت محاسبه کوو کوم چې د تابع گراف ددوران څخه د افقی یا عمودي محور په شاوخوا حاصلیږي .

(1.7) ترازې (قطع کولو) په واسطه د کاسې استونه ای حجمونو محاسبه.

په ځینو حالتونو کې کولی شو د یو جسم حجم د انتیگرال په پام کې نیولو سره معلوم کړو په هغه صورت کې چې دجسم سطحه په موازی تو گه قطع شوې وي .په خاص حالت کې که یو دورانی جسم په یو مستوي کې د یوی ناحیی ددوران په واسطه د یو محور په شاوخوا له دوران څخه حاصل شوي وي چې مقطو یې دایره وي . د جسم حجم د محاسبی دا طریقه عیناً د قطع شوي ساحی د انتیگرال په شان دی.چې ددایروی طریقی په برخه کې به یې مطالعه کړو. پرته له دي ددورانی جسم حجم د محاسبی له پاره کولی شو استوانه اي کاسو طریقه په کاریوسو .

(1.1.7) دقطع کولو په طریقه دیو جسم د حجم محاسبه کول.

د $[a, b]$ انټروال په ترتیب سره د $\{x_0, x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k \;, \dots x_{n-1}, x_n\}$ په نقطو ویشوداسې چې

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k \;, \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

او قبلوو چې $x^*_k \in |x_{k-1}, x_k|$ دی.

(1) شکل

د (1) شکل مطابق قبلووچې $A(x^*_k)$ د یو جسم د عمودی عرضی مقطع مساحت وي کوم چې $x = x^*_k$ پوری اړه لري.که چیرې $\Delta x_k = x_{k-1}, x_k$ ډیر کوچنی او $A(x)$ متمادي وي، په دې صورت کې د هغې استوانی حجم تخمین کړی چې دعرضی مقطع مساحت یې $A(x^*_k)$ ، پنډوالی یې Δx_k د قطع شوي جسم حجم چې د $x = x_k$ او $x = x_{k-1}$ عمودی مستوی گانوترمنځ واقع دی.داسې چې د استوانی حجم $A(x^*_k)\,\Delta x_k$ دی. نو په تقریبی ډول د استونه اي جسم جحم د لاندی مجموعی څخه لاسته راوړو.

$$Volume \cong \sum_{k=1}^{n} A(x^*_k)\,\Delta x_k$$

پورتنی مجموعه د ریمان مجموعه او د انتیگرال تقریب دی.

$$\int_a^b A(x)dx.$$

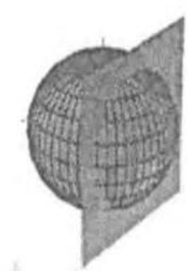
په دې ډول مونږ به دجسم حجم د لاندی فورمول پواسطه محاسبه کړو.

$$\int_a^b A(x)dx$$

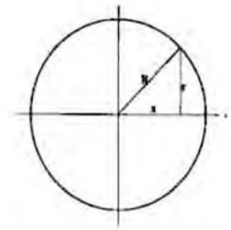
$A(x)dx$ د استوانی حجم په توگه تصور کوو چې $A(x)$ ته د جسم دعرضي مقطع مساحت او dx بی نهایت کوچني پنډوالی دي. پورته فورمول دعمودي قطع د طریقې له مخې لاس ته راغلی دی .

مثال(*1.1.7*) .د عمودي قطعې په طریقه دهغې کروی توپ حجم چې شعاع یې R وي معلوم کړئ.

حل. د(2) او (3) شکل په شان



(2)شکل



(3) شکل

که عمودي قطعې د x پوري اړه ولري نوددايرې شعاع عبارت د $r(x)$ څخه دي.داسې چې د$A(x)$ مساحت $\pi\left(r(x)\right)^2$ دی. د فيثاغورث د قضيې په شان $R^2 = x^2 + \left(r(x)\right)^2$ دی، داسې چې $\left(r(x)\right)^2 = R^2 - x^2$ دی نوپه دې ډول

$$Volume = \int_{-R}^{R} A(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi\left(r(x)\right)^2 dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

لروچې.

$$\int (R^2 - x^2)\, dx \int R^2\, dx - \int x^2 dx = R^2 x - \frac{1}{3}x^3$$

دی.

نوپه دې ډول

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi\left((R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-R}^{R} \right)$$

$$= \pi\left(\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \left(-R^3 + \frac{1}{3}R^3\right)\right)$$

$$= \pi\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$$

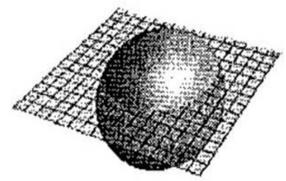
دی.

بناً پردې د يو کروی توپ حجم چې شعاع يې R وي عبارت دی له

$$\frac{4\pi}{3}R^3$$

په ځينې حالتونوکې کولای شو د يو جسم حجم د افقی قطعې په طريقه هم پيدا کړو.

د (*4*) شکل شان قبلوو چې جسم د z پوری مربوط ، $A(z)$ ته د جسم دافقی قطع مساحت وایي،نو دعمودي قطع د حالت په شان لرو چې.



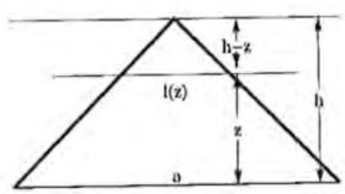
(4) شکل

$$volume = \int_a^b A(z)dz.$$

دی.

مثال (*2.1.7*). یو هرم چې افقی مقطع یې مربع گانی وي په پام کې نیسو .دهرم قاعده عبارت له هغې مربع څخه دی چې اوږدوالی یې a او ارتفاع یې h ده. د هرم حجم د افقی قطع په طریقه معلوم کړئ.

حل. د (*5*) شکل شان د هرم افقی قطع چېz پوری اړه لري یوه مربع ده چې اوږدوالې یې$l(z)$ دی، د مثلثونو تشابه څخه لیکو چې .



(*5*) شکل

$$\frac{l(z)}{a} = \frac{h-z}{h} = 1 - \frac{1}{h}z,$$

داسې چې

$$l(z) = a - \frac{a}{h}z.$$

دی.

په دې ډول د افقی عرضي مقطع مساحت نظر z ته د

$$A(z) = \left(l(z)\right)^2 = (a - \frac{a}{h}z)^2$$

څخه عبارت دی.

د هرم حجم عبارت ده له

$$\int_0^h A(z)dz = \int_0^h (a - \frac{a}{h}z)^2 dz.$$

که چیرې $u = a - \frac{a}{h}z$ سره عوض کړو ،دا چې $\frac{du}{dz} = -\frac{a}{h}$ دی .نو

$$\int_0^h \left(a - \frac{a}{h}z\right)^2 dz = -\frac{h}{a}\int_0^h u^2 \frac{du}{dz} dz = -\frac{h}{a}\int_{u(0)}^{u(h)} u^2 du$$

$$= -\frac{h}{a}\int_a^0 u^2 du = \frac{h}{a}\int_0^a u^2 du = \frac{h}{a}\left(\frac{u^3}{3}\Big|_0^a\right)^2 = \frac{1}{3}a^2 h.$$

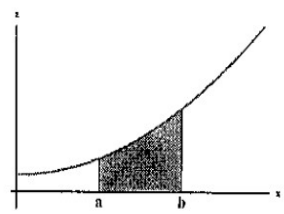
دی.

بناً پردې د هرم حجم عبارت دی له.

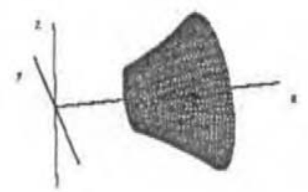
$$\frac{1}{3} \times (\text{مساحت دقاعدی}) \times \text{ارتفاع}$$

(2.1.7) دایروي یا د(چورلید لو) طریقه. *The method of Disks*

د(6) شکل په شان قبلوو چې دG ناحیه د$z = f(x)$ تابع گراف ،$[a,b]$ قعطه خط او د ox محور په واسطه احاطه شوې ده. که چیرې د G ناحیه د ox محور په شاوخوأ دوران وکړي نومړی جسم د (7) شکل په شان تصور کیږي.



(6) شکل



(7) شکل

دا ډول دوراني جسم چې د x محور په شاوخوأ دوران کوي د $f(x)$ په شعاع عمودي عرضي قطع يې دايره ده.په دې ډول د $A(x)$ دعرضي قطع مساحت عبارت ده له $\pi(f(x))^2$ بنأ پردې د جسم حجم عبارت ده له .

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \quad .$$

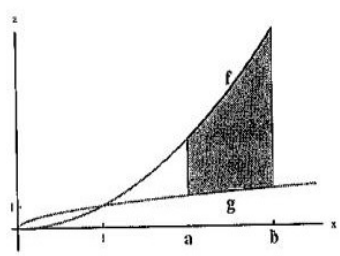
پوهيږوچې$\pi(f(x))^2 \; dx$ فورمول د استوانې د حجم د فورمول په شان دی کوم چې شعاع يې $f(x)$ او dx يې بی نهايت کوچنی ضخامت دی.د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره ددورنی جسم دحجم د محاسبې لپاره دايروی طريقی کاروو.

مثال (*3.1.7*) .د دايردی طريقی د کارولو په صورت کې دجسم حجم معلوم کړئ .که چيرې تشکيله شوي ناحيه د$f(x) = x^2 + 1$ تابع گراف د$[1,2]$ انټروال په منځ کې واقع او نوموړې ناحيه د ox په شاوخوأ دوران وکړې.

حل . د (6) شکل په شان د G ناحيه د f تابع گراف او د $[1,2]$ انټروال په منځ کې واقع ده. د G ناحيه چې د ox محور په شاوخوأ دوران کوي د (7) شکل په شان دي .او د نوموړې جسم حجم عبارت ده له:

$$\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = \pi\int_a^b (x^2+1\ )^2 dx = \pi\left(\frac{178}{15}\right) \cong 37.2820$$

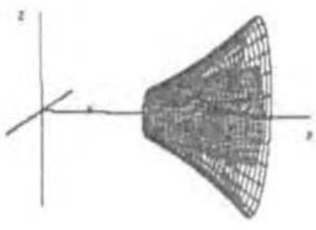
فرضوو چې د G ناحيه د f او g په منځ کې داسې واقع ده چې د $x = a$ او $x = b$ خطوطو په واسطه محدوده شوې وي چې په (8) شکل ښودل شوې ده.



(8) شکل

غواړو دهغه جسم حجم معلوم کړو چې د G دناحيې ددوران په واسطه د ox محور په شاوخوأ تشکليږي . چې په (9) شکل ښودل شوې ده.

په دې ترتیب کولی شو د جسم حجم د باندینی خوادحجم او ددننی خوا حجم دتفاضل څخه په



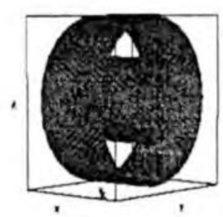
(9) شکل

لاس راوړو. بنأ پردې نوموړی حجم عبارت ده له:

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx - \pi\int_a^b g^2(x)dx = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)^2 dx.$$

د جسم دحجم د لاسته راوړلو له پاره پورته افاده دا رنګه هم لاسته راوړلی شو:

ور کړل شوي انټروال د $[x_{k-1}, x_k]$ په فرعي انټروالونو ویشوو داسې چې $k = 1,2,3,\cdots n$ وي د جسم قطع چې د$[x_{k-1}, x_k]$ انټروال پورې اړه لري د (*washer*) تقریب دی چې ددوو استوانو په واسطه احاطه شوي د باندی برخې شعاع یې $f(x^*_k)$ او دننه برخې شعاع یې$g(x^*_k)$ دی.چې په (10) شکل کی ښودل شوي دی. دلته x^*_k د یو اختیاری نقطي په توګه د x_{k-1} او x_k په منځ کې واقع دی.



(10) شکل

د (*washer*) حجم د استوانی د باندنی خوا دحجم او د استوانی د ننه خوا د حجم دتفاضل څخه عبارت دی. یعنې

$$\pi f^2(x^*_k)\Delta x_k - \pi g^2(x^*_k)\Delta x_k = \pi\left(\left(f^2(x^*_k) - g^2(x^*_k)\right)\right)\Delta x_k$$

کولی شو د قطع شوی جسم حجم چې د $x = x_{k-1}$ او $x = x_k$ تر منځ واقع ده د (washer) پوری مربوط حجم په واسطه تخمین کړو. او د جسم حجم د (washer) د حجمونو د مجموعی په واسطه عبارت دي له .

$$\sum_{k-1}^{n} \pi\left(\left(f^2(x^*_k)\ - g^2(x^*_k)\right)\right) \Delta x_k = \pi \sum_{k-1}^{n} \left(\left(f^2(x^*_k)\ - g^2(x^*_k)\right)\right) \Delta x_k$$

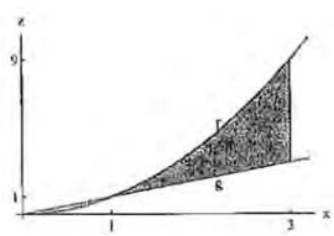
دا ډول مجموعه د ریمان دانتیګرالی مجموعی په نوم یادیږي او عبارت دی له.

$$\pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx.$$

تصور کو چې $\pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$ د (washer) د حجم په شان دی.کوم چې د باندنی برخي شعاع یې $f(x)$ او دننه برخي شعاع یې $g(x)$ او dx یې بی نهایت کوچنی ضخامت وي.د پورته فورمول په پام کې نیـــولوســره ددورانی جسم دحـــجم دمعلومــولوله پاره (washer) طریقه په کاروو.

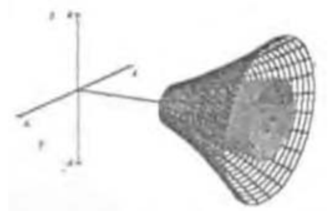
مثال (*4.1.7*). د (washer) طریقې پــه کارولو سره د جسم حجــم معلوم کړئ چــې د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x$ گرافونو د $x = 1$ او $x = 3$ خطوطوتر منځ واقع او د ox محور په شاوخوا دوران کوي.

حل. (11) شکل د G ناحیه بنیېي چې د $f(x)$ او $g(x)$ گرافونـــواود $x = 1$ ، $x = 3$ خطـــوطـــو تر منځ واقع دی.



(11) شکل

(12) شکل ښيي چې د G ناحیه د ox محور په شاوخوا دوران له مخې تشکلیږی.



(12) شکل

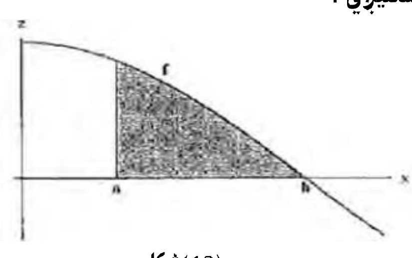
او د جسم حجم عبارت ده له:

$$\pi\int_{1}^{2}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx=\pi\int_{1}^{2}\left((x)^2-(x)^2\right)dx=\pi\int_{1}^{2}\left(x^4-x^2\right)dx=\frac{58}{15}\pi$$

تبصره(*1.1.7*). د دایروی او(*washer*) د طریقو د تطبیقولو په صورت کې کولی شو د هغه جسم حجم محاسبه کړو کوم چې د xy په مستوی کې واقع او د y په محورشاوخوأ دوارن و کړي. ددی سکشن په اخیر کې د ځینو مسایلو په پام کې نیولو سره یوازی د x او y تګ لاره بدلولی شوو .په حقیقت کې کولی شو دا طریقه په اسانی سره تطبیق کړوکه چیرې ددورانی محور اختیاری کربنه د مختصاتو د محور سره موازی وي.

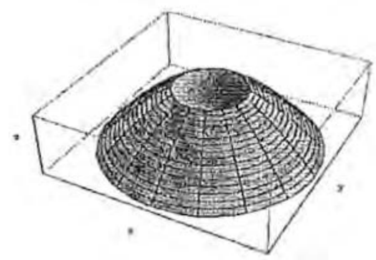
(*3.1.7*) داستونه اې کاسو طریقه . (*The method of cylindrical shell*)

اوس یوه طریقه توضیح کوو چې د هغې په واسطه د یو دورانی جسم حجم محاسبه کیږي ، په هغه صورت کې چې ناحیه دxz په مستوی کې دoz محورپه شاوخوأ دوران وکړئ .ددی طریقې له مخې جسم په وړو وړو ساحو نه قطع کیږي او نه ددایروي طریقې سره کوم شباهت لري فرضوو چې د G ناحیه د $z=f(x)$ او$[a,b]$ انتروال په مینځ کې واقع وي چې په 13او 14 شکلونو کې ښودل شوي دی. نوموړي جسم د f تابع د ګراف له دوران څخه دoy محور شاوخوأ تشکلیږي .



(13)شکل

د معمول په شان د$[a,b]$ قطعه خط د$[x_{k-1},x_k]$ په فرعی انترووالو نو ویشوو داسې چې



(14) شکل

$k = 1,2,\dots,n.$ وي.د جسم قطع کړل شوي ناحیې چې د x_{k-1} او x_k په منځ کې واقع دی د استوانه اي کاسو د یوي برخي تخمين دی.د استوانه اي کاسي د ننه برخي شعاع x_{k-1} او د باندی برخي شعاع د x_k څخه عبارت دی . که چیرې $x^*{}_k$ د $[x_{k-1},x_k]$ انټروال یوه اختیاری نقطه وي که د استوانه اي کاسي جیګوالی په $f(x^*{}_k)$ سره وښیو په دی صورت کې د د استوانه اي کاسي حجم عبارت دی له.

$$\begin{aligned}
\pi x^2{}_k f(x^*{}_k) - \pi x^2{}_{k-1} f(x^*{}_k) &= \pi(x^2{}_k - x^2{}_{k-1}) f(x^*{}_k) \\
&= \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) f(x^*{}_k) \\
&\quad \pi(x_k + x_{k-1}) f(x^*{}_k)\Delta x_k \\
&= 2\pi\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) f(x^*{}_k)\Delta x_k
\end{aligned}$$

بناً پردې

$2\pi \times$(پنډوالی$\times$جیګوالی) $\times$ (د شعاع ګانو اوسط)

دی.

په دې توګه د حجمونومجموعه عبارت ده له .

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) f(x^*{}_k)\Delta x_k$$

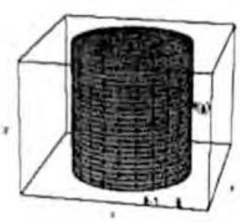
چې دا تقریباً د ریمان مجموعه ده چې د

$$\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

انتیګرال پوری اړه لري .

که چیرې x_kاو x_{k-1} په x^*_k سره تعویض کړو مونږ به د ریمان مجموعه د پورته انتیګرال له پاره ولرو . که چیرې Δx_k کوچنې وي او x_{k-1}, x_k ، x^*_k یو بل ته ډیر نږدې واقع وي. د اټکل له مخې پورته مجموعه په تقریبی توګه د انتیګرال محاسبه ده . حقیقتآ که f په $[a,b]$ کې متمادي وي. نو په دې صورت کې د جسم حجم د لاندي فورمول په واسطه محاسبه کیږي .

$$\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$



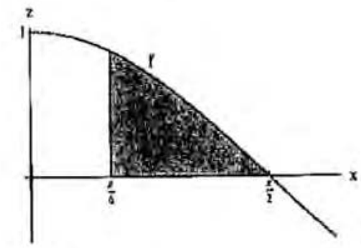
(15) شکل

پوهیږو چې $2\pi x f(x) dx$ د استوانه اي کاسي حجم دی چې x د شعاع ګانو اوسط $f(x)$ جیګوالی او dx کوچنی پنډوالی دی.پورته فورمول ددورانی جسم دحجم د محاسبی له پاره کارول کیږي او د استوانه اي کاسي طریقی پوری اړه لري.

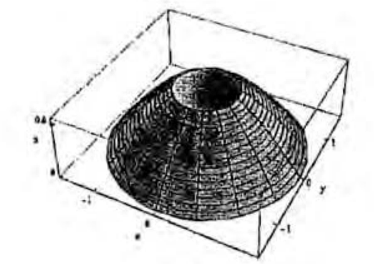
مثال(*5.1.7*). د استوانه اي کاسې طریقی په کارولو سره د جسم حجم معلوم کړي که چیرې نوموړې جسم د$z = cosx$ تابع ګراف د$[\pi/6, \pi/2,]$ انټروال په منځ کې واقع او د z محور په دور دوران وکړئ.

حل. (*16*) شکل د G ناحیه ښیې چې دf تابع ګراف او د $[\pi/6, \pi/2,]$ انټروال په منځ کې واقع دی.د G ناحیه z د محورپه شا وخوا له دوران څخه په لاس راځي چې په (*17*) شکل ښودل شوې دی.

د جسم حجم عبارت ده له:



(16) شکل



(17) شکل

$$2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} xf(x)\,dx = 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} xcos(x)\,dx$$

د (*1.7*) سکشن په شان قسمي انتیګرال نیونه تطبیقوو که $u = x$ او $dv = cosxdx$ وضع کړو.

داسې چې $du = dx$ او $v(x) = \int cos(x)\,dx = sin\,(x)$ دی.

بنأ پر دې

$$\int xcos(x)\,dx = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$= xsin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

$$= xsin(x) + \cos(x)$$

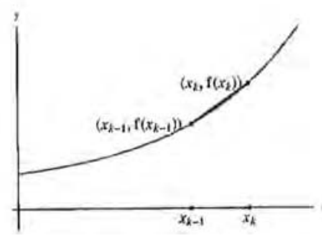
دی.

په دې ډول

$$2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = 2\pi \left(x\sin(x) + \cos(x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(\frac{\pi}{6})\right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{5}{6}\pi^2 - \sqrt{3}\pi.$$

(2.7) دتابع د گراف طول او ددورانی سطحی مساحت .

کولی شو د یوی تابع دگراف طول او سطحی مساحت چې د تابع دگراف په واسطه د محورونو په شاوخوأ دوران کوی د انتیگرال په واسطه معلوم کړو. **(1.2.7) د یوی تابع د گراف طول.** دمعمول په شان د$y = f(x)$ تابع گراف طول تخمین د $[a,b]$ پر انټروال کې لاسته راوړو. د $[a,b]$ انټروال د $[x_{k-1}, x_k]$ په فرعي انټروالونوویشو که $k = 1,2,3, \dots$ وي ،داسې چې $x_0 = a$ او $x_n = b$ وي. او $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ ډیر کوچنی وي.مونږ به د f تابع گراف طول تخمین کړو کوم چې د$[x_{k-1}, x_k]$ انټروال پوری اړه لري. اودیو قعطه خط د طول په واسطه چې د$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ او$(x_k, f(x_k))$ انجامی نقطو په واسطه وصل شوې دي. چې په (1) شکل کې ښودل شوي دی.



(1) شکل

د قعطه خط طول عبارت ده له.

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

لکه څنگه چې په (2.6) سکشن کې پرې بحث وشو. فرضوو که چیرې f د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ، د منځنی قیمت د قضیي له مخې .

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x^{\hat{}}_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(x^*_k)\Delta x_k.$$

دی.

داسې چې x^*_k د $[x_{k-1}, x_k]$ انټروال اختیاري نقطه وي.په دې توګه د قعطه خط طول عبارت ده له

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x^*_k))^2 (\Delta x_k)^2}$$
$$= \sqrt{1 + (f'(x^*_k)^2)}\,\Delta x_k.$$

مو نږ به د f تابع ګراف طول د $[ab]$ پر انټروال د قعطه خطونو د مجموعی طول له مخې تخمین کړو . بناً پردې د f تابع د ګراف طول د $[a,b]$ په انټروال کې دلاند ې مجموعې په واسطه تخمین کیږي.

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x^*_k)^2)}\,\Delta x_k.$$

چې دا د ریمان مجموعه ده

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}\ dx$$

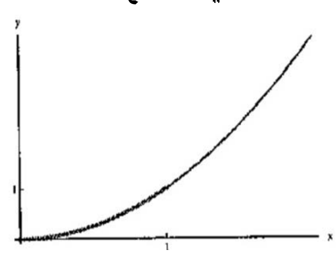
او د پورتنی انتیګرال تخمین دی که چیرې f' په $[a,b]$ کې متمادي وي. په دې توګه د پورتنی فورمول په واسطه به وکولی شو د f تابع ګراف طول د $[a,b]$ په انټروال کې معلوم کړو .

تعریف (*1.2.7*).د$y = f(x)$ تابع ګراف طول د$[a,b]$ پر انټروال په لاندې ډول تعریف شوي دی .

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x)^2)}\ dx,$$

که چیرې f' د $[a,b]$ پر انټروال متمادي وي.مونږ په پام کې نیسو چې پورتنی انتیګرال د غیر واقعی انتیګرال په شان ډیرمهم دی ، شرط داچې غیرواقعي انتیګرال متقارب وي.

مثال (*1.2.7*). که چیرې $f(x) = x^2$ وي د f تابع طول د $[0,1]$ پر انټروال محاسبه کړئ.



(2)**شکل**

حل.د f تابع د ګراف طول د $[0,1]$ پر انټروال عبارت دی له.

$$\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x)^2)}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+(\frac{d}{dx}\ (x^2))^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+(\ 2x\ )^2}\ dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

کولای شو و لیکو چې .

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \int \sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)dx} = 2\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2dx}$$

د (*4.6*) سکشن په (*4*) مثال کې مونږ لاندې نتیجه تر لاسه کړ

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx + \frac{a^2}{2}\ln\ (x+\sqrt{x^2+a^2}\ )$$

د $x = \operatorname{asinh}(u)$ تعویض په مرسته د $a = \frac{1}{2}$ په پام کې نیولو سره د پورتنۍ فورمول په کارولو سره لرو

$$\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2dx} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\ + \frac{1}{8}\ln\left(\ x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{4x^2+1}\ + \frac{1}{8}\ln\left(\ x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}\right)$$

په دې ډول

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2}dx = \frac{x}{4}\sqrt{4x^2+1}\ + \frac{1}{4}\ln\left(\ x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}\right)$$

دی.

بناً پردې f تابع د ګراف اوږدوالی د $[0,1]$ په انټروال کې عبارت دی له.

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+1}\ + \frac{1}{4}\ln\left(\ x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong 1.47894.$$

تبصره (*1.2.7*). که $y = f(x)$ وي د f تابع د ګراف طول د $[a,x]$ پر انټروال کولی شوو دا شان وښیو

$$s(x) = \int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

چې دا قوس د تابع د طول ده. د کلکولس د اساسي قضيي له مخې

$$\frac{ds}{dx} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

دی.

کیدای شی تاسو دلاندی تګ لاری غوښتنه وکړئ: قبولو چې

$$ds\frac{ds}{dx}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

او

$$dy\frac{dy}{dx}dx, 1 + (dy)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ (dx)^2,$$

و.

بناً پردې کولی شو دارنګه وښیو چې

$$\sqrt{(d\,x)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(d\,x)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ (d\,x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = dx$$

دی.

کولی شو د f تابع ګراف طول د $[a, b]$پر انټروال کې دا شان وښیو.

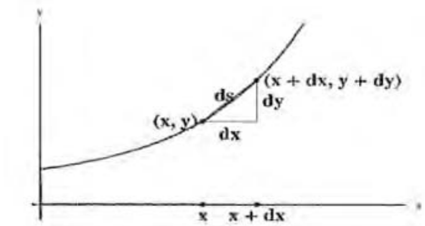
$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(d\,x)^2 + (dy)^2}\ dx$$

د پورتني فورمول څخه په عملی توګه ګټه نه اخیستل کیږي مګر ددی امکان موجود دی چې د اصل فورمول څخه د یوی تابع د ګراف طول د فورمول په توګه کارو اخستل شي.کیدای شي فکر وکړو چې څنګه دیوی تابع دګراف طول چې د $|x, x + dx|$ بی نهایت کو چنی انټروال د پاسه واقع دی د

$$ds = \sqrt{(d\,x)^2 + (dy)^2}$$

پــه واسطه تخمین کــړو پــه هغــه صــورت کــې چــې د قعــطه خــط انجامــونــه د (x, y)او $(x + dx, y + dy)$نقطوو په واسطه وصل شوي وي.

چې په (3) شکل کې ښودل شوې دی.

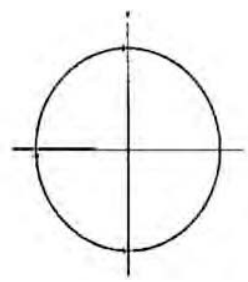


(3) شکل

مثال ($2.2.7$).په هندسی ډول موددایری د مرکزی زاویی مقابل قوس اندازه کول معرفی کړی.داسې چې ددایری د څلورمی برخي اوږدوالی $\frac{\pi}{2}$ دی د تابع دګراف دطول په مرسته یې تصدیق کړئ.

حل. هـغه دایـره چـې مـرکز یې قایمـو وضعیه کمیاتو پـه مبدأ کې واقع وي معادله یې د $x^2 + y^2 = 1$ څخه عبارت دی بنأ پردې د واحدی دایری د پاسنی نیمایې برخي پر مخ د (x,y) نقطوو له پاره لروچې.

$$y = \sqrt{1 - x^2}، \ -1 \le x \le 1$$



(4) شکل

د غوښتل شوي قوس د اوږدوالی معادلې عبارت دی له

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2}\right)^2}\ dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\ dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}\, dx$$

داسې چې

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1- x^2}} = +\infty,$$

دی .تصورکوو چې پورته انتیګرال یوغیر واقعي انتیګرال دی.که$1 > \varepsilon > 0$ وي لرو چې

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}\, dx = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(0) = \arcsin(1-\varepsilon)$$

په دې ډول

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}\, dx = \lim_{x\to 1-} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1- x^2}}\, dx = \lim_{x\to 1-} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin(1) = \pi/2$$

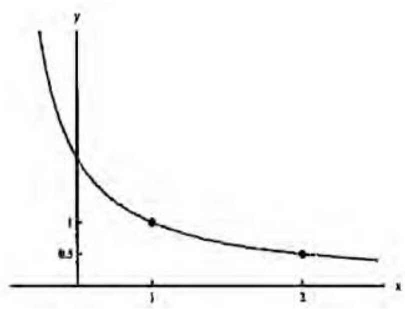
دی.

په عمومي ډول د یوي تابع د ګراف طول محاسبه کولوله پاره د لاندی مثال په شان عددي انتیګرال نیونه اړینه بولو.

مثال (*3.2.7*). که $f(x) = 1/x$ وي.

a) د f تابع ګراف طول د$[1,2]$پر انټروال معلوم کړئ.

b) دعددی انتیګرال د محاسباتو څخه په ګټه اخیستلو د f تابع د ګراف طول تخمین د $[1,2]$پر انټروال کې محاسبه کړئ.



(5) شکل

حل.a) د f تابع ګراف اوږدوالی د$[1,2]$پرانټروال عبارت ده له

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{1}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx = \int_{1}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

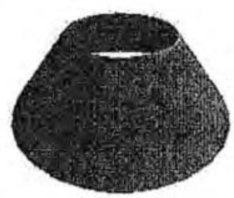
b) بنأ پردې

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \cong 1.13209$$

دی.

بنأ پردې د$y = 1/x$ هایپربول دقوس د هغې برخې طول تخمین کړې چې[1,2] انټروال پورې اړه لري عبارت دی 1.13209 دی. د (*3.2.7*) مثال په شان افادې کولی شو دکمپیوټري پروګرام په واسطه محاسبه کړو.حال دا چې ددی ډول افادو تخمین دعددی انتیګرال نیونی په واسطه ګټوره نه ده نو ځکه عددی انتیګرال نیونه نه پیشنهادیږي.

(*2.2.7*) ددوراني سطحی مساحت. په پیل کې دناقص مخروط مساحت محاسبه کووچې دقایمو دایرولرونکي وي چې په *(6)* شکل کې د قایمودایرو یوه برخه ښودل شوې ده.چې د څراغ تت شیشی پوښ(*Lampshade*) ته ورته ده.د ناقص مخروط دانحنایې برخی ارتفاع په لاندې توګه اندازه کیږي: ناقص مخروط د یوی مستوی په واسطه داسې قطع کوو چې مستوی مستقیماً د ناقص مخروط د قاعدو له مرکز څخه تیرشي په دې صورت کې دمخروط د انحنایې برخې ارتفاع د مستقیم کرښې د ارتفاع دطول څخه عبارت دی.



(*6*) **شکل**

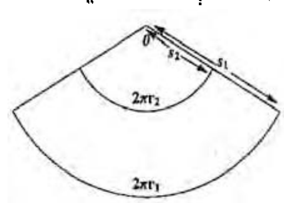
لیما(1.2.7). (*Lemma*) که Sداسې ناقص مخروط وي چې د قایمو دایرو د ښکتنی دایری شعاع یې r_1 ، د پورتنی دایری شعاع r_2 اود انحنایې برخې ارتفاع یې s وي د ناقص مخروط د S مساحت عبارت دی له.

$$2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)s.$$

که $\frac{r_1+r_2}{2}$ دشعاع ګانو اوسط وي نو د S مساحت عبارت دی له.

$2\pi\ \times$ د شعاع ګانو اوسط $\times$ د انحنایې برخې ارتفاع

د ليما ($1.2.7$) ثبوت . تصور کوو چې ناقص مخروط د يوی داسې مستوی په واسطه قطع شوی چې مستوی د ناقص مخروط د قاعد و له مرکزڅخه تيريږي .او د يوی هموارې سطحې په شکل واقع شي. چې پايله يې په (7) شکل کې ښودل شوې ده.



(7) شکل

(7) شکل د s_1 په شعاع او دθ د مقابل قوس په زاويه (چې زاويه په راديان اندازه کيږي) ددايرې د قطاع مساحت عبارت ده له.

$$\frac{1}{2}s_1{}^2\theta$$

اوهمدا شان د s_2 په شعاع او دθ د مقابل قوس په زاويه د بلې دايرې د قطاع مساحت عبارت ده له.

$$\frac{1}{2}s_2{}^2\theta.$$

په دې توګه دθ زاويه مقابل قوس د طول او دشعاع ګانوله نسبت څخه عبارت ده يعنې.

$$\theta=\frac{2\pi r_1}{s_1}=\frac{2\pi r_2}{s_2}$$

بناً پر دې دسطحې مساحت عبارت دی له

$$\frac{1}{2}s_1{}^2\theta-\frac{1}{2}s_2{}^2\theta=\frac{1}{2}s_1{}^2\left(\frac{2\pi r_1}{s_1}\right)-\frac{1}{2}s_2{}^2\left(\frac{2\pi r_2}{s_2}\right)=\ \pi r_1s_1-\ \pi r_2s_2.$$

داسې چې

$$\theta=\frac{2\pi r_1}{s_1}=\frac{2\pi r_2}{s_2}$$

دی.

نو لروچې $r_1s_2\ =\ r_2s_1.$ په دی توګه دناقص مخروط مساحت په دې ډول ښودلې شو.

$$\pi r_1s_1-\ \pi r_2s_{2}-\pi(r_1+\ r_2)(s_1-s_2)=2\,\pi\left(\frac{(r_1+\ r_2)}{2}\right)(s_1-s_2).$$

اوس ددې څرګندونې پايله ددورانی سطحې د مساحت د معلومولو پاره په کاراچوو .فرضوو چې دf تابع د$[a,b]$ پرقعطه خط متمادي او f' د$[a,b]$ د قعطه خط په اوږدومتمادي دي، دS سطحه په پام کې نيسو چې د $z=f(x)$ ګراف $[a,b]$ پر انټروال د z محور په شاوخوا دوران څخه

تشکیل شوی ده. د$[a,b]$ قطعه خط د (x_{k-1}, x_k) په فرعی نټروالو نو ویشو داسې چې$k=$ $1,2,\dots,n.$ وي،په تخمینی توګه مونږ به دسطحی د یوی برخی مساحت کـــوم چې $x=x_k$ او$x=x_{k-1}$ تـر مـنځ واقـع،د یـو قعـطـه خـــط پـه واسطه چې انجـــامي نقطـي یې $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$،$(x_k, f(x_k))$ اوx محور په شاوخوا دوران کوي لاسته راوړو.دد ې ډول ناقص مخروط د سطحود شعاع ګانو تقریبي اوسط عبارت دی له

$$(x_k, f(x_k))$$

$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$$

اود انحنایی کـــړوپې برخـــي دارتفاع طـــول عبارت دهـــغه قعطه خط له طول څخه دی چـــې $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ او$(x_k, f(x_k))$

نقطوپه واسطه وصل شوي وي. یعنې

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2)+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

د (1) لیما په واسطه د ساحی مساحت عبارت دی له

$$2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)\sqrt{(\Delta x_k)^2)+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

په دې ډول د منځنی قیمت د قضیې له مخې د هر $x^*_k \in (x_k - x_{k-1})$ له پاره

$$f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(x^*_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(x^*_k)\Delta x_k,$$

دی.

په دې ډول

$$2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)\sqrt{(\Delta x_k)^2)+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

$$2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)\sqrt{1+(f'(x^*_k)^2)}\,\Delta x_k.$$

دی.

د ټولې سطحی تخمینی مساحت د مساحتونود تقریبی مجموعی په واسطه تخمینولای شو:

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right)\sqrt{1+(f'(x^*_k)^2)}\,\Delta x_k$$

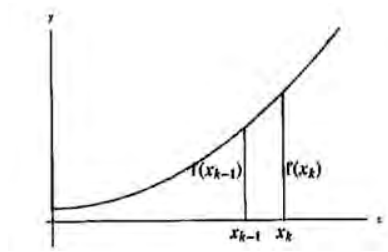
که چیرې Δx_k کوچنی وي.یعنې

$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} \cong f(x_k)$$

او

$$f'(x^*{}_k) \cong f(x_k)$$

وي.



شکل (8)

داسې چې.

$$\sum_{k-1}^{n} 2\pi \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) \sqrt{1 + (f'(x^*{}_k)^2)}\,\Delta x_k$$
$$\cong \sum_{k=1}^{n} 2\pi \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\right) \sqrt{1 + (f'(x_k)^2)}\,\Delta x_k =$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k)^2)}\,\Delta x_k.$$

وي.

وروستنی مجموعه د ریمان مجموعه د

$$\int_a^b 2\pi f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k)^2)}\,\Delta x_k.$$

له پاره ده.د پورتني فورمول په واسطه کولی شو د هغې ساحې مساحت محاسبه کړو چې د f تابع $[a,b]$ په قعطه خط کې د ox محور په شاوخودوران وکړي .

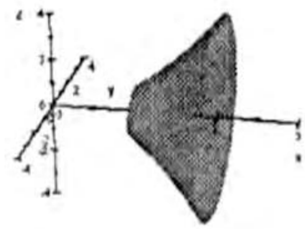
تعریف ($2.2.7$). که د $z = f(x)$ تابع گراف د $[a,b]$قعطه خط په واسطه ه محدوداو د ox محور په شاوخوا دوران وکړي که f' په $[a,b]$ کې متمادي وي نو دوراني سطحي مساحت په لاندې ډول تعریفوو.

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x)^2)}\,dx$$

مثال ($4.2.7$).که $f(x) = x^2$ وي S هغه ساحه ده چې$[1,2]$ پر قعطه خط د $z = f(x)$ تابع گراف د ox محور په شاوخوا ددوران څخه تشکیله شوې ده .(9) شکل د S ساحه ښیې .

a) د انتیگرال په واسطه د S ساحه معلوم کړئ

b) دعددی انتیګرال د محاسبی څخه په ګټې اخیستلو د a د برخي انتیګرال تخمین کړئ.



شکل (9)

حل . a) د لاندی فورمول په واسطه د S د ساحې مساحت لاسته راوړو.

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x)^2)}\,dx$$

بناً پر دې د S سطحی مساحت د $f(x)=x^2$ له پاره عبارت دی له

$$\int_1^2 2\pi x^2 \sqrt{1+\left(1+\frac{d}{dx}(x)^2\right)^2}\,dx = \int_1^2 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

(b

$$\int_1^2 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx \cong 49.4162$$

د یادولو وړ ده چې پورته انتیګرال باید په صحیح ډول محاسبه کړو. دا یو حقیقت دی. د $2x=\sinh(u)$ په تعویضولو سره د فورمول له مخې نتیجه کیږي چې.

$$\int 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{16}x\,(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}x\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(2x)\right).$$

دی.

بناً پر دې

$$\int 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{33}{8}\pi\sqrt{17}+\frac{1}{32}\pi\ln\left(-4+\sqrt{17}\right)-\frac{9}{16}\pi\sqrt{5}+\frac{1}{32}\pi\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$
$$\cong 49.416$$

دی.

تبصره (*2.2.7*).که $z=f(x)$ وضع کړو کولای شو د

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x)^2)}\,dx$$

لاندی فورمول لاسته راوړو

$$\int_a^b 2\pi\, z \sqrt{\; 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\; dx$$

په دې حالت کې دیوي تابع د گراف طول له پاره ، کولای شو لاندی تنگ لاره وکاروو .

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx, (dz)^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 (dx)^2$$

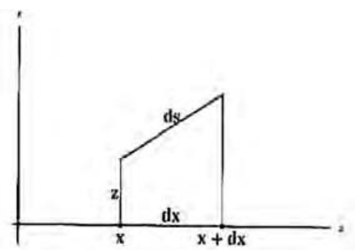
او

$$ds = \sqrt{\,(dx)^2 + (dz)^2}$$

او دسطحی مساحت په دې شان لاسته راځي.

$$\int_a^b 2\pi\, z \sqrt{\,(dx)^2 + (dz)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi\, zds$$

د پورتنۍ افادی څخه په عملی ډول گټه نه اخستل کیږي برسیره پر دې د مخکینی افادی څخه د سطحی مساحت د معلومولو له پاره گټه اخستل کیږي .په استثنایی توگه باید په یادولرو چې څنگه د سطحی مساحت د تخمینولو طریقه سرته ورسوو.نو په دی ډول د ساحې د بی نهایت کوچني قطع چې د x او $x + ds$ پر منځ واقع دی د ناقص مخروط د سطحی د انحنایي(کږوالي) برخی د ارتفاع ds تخمین دی .چې په (10) شکل کې ښودل شوي ده.د $2\pi z ds$ دا ساحه یو تخمینی ساحه ده چې ds پکی ډیره کوچنی ساحه وي . سربیره پردې کولی شو z د شعاع گانو د اوسط په توگه په پام کې و نیسو .



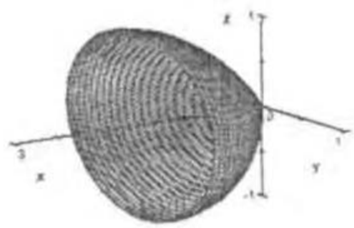
(10) شکل

مثال(*5.2.7*) . که $f(x) = \sin(x)$ وي، S هغه ساحه ده چې د $z = f(x)$ تابع گراف په کې د $[0.\frac{\pi}{2}]$ پر قطعه خط د ox محور په شاوخو دوران څخه حاصل شوي دی .(11) شکل د S ساحه ښیي . د S ساحې مساحت معلوم کړئ.

حل . (11) شکل د S ساحه ښیي.

که $z = \sin(x)$ وضع کړو په دې ډول لرو

$$dz = \frac{dz}{dx}dx = cos^2(x)(dx)^2 \Longrightarrow (dz)^2 = cos^2(x)(dx)^2$$



شکل (11)

بناً پر دې

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(dx)^2 + cos^2(x)(dx)^2} = \sqrt{1 + cos^2(x)}\, dx$$

دی.

په دې دول د S د ساحې مساحت عبارت دی له

$$\int_0^{\pi/2} 2\pi\, z ds = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin(x)\sqrt{1 + cos^2(x)}\, dx$$

که $u = \cos(x)$ وضع کړو په دې ډول $du = -\sin(x)dx$ کیږي . بناً پر دې

$$\int_0^{\pi/2} 2\pi \sin(x)\sqrt{1 + cos^2(x)}\, dx = -2\pi \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1 + u^2}\, du$$
$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

دی.

دا ډول انتیګرالونه په (*4*) مثال د(*4.7*) سکشن کې محاسبه کړی :

په دې ډول

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(u)$$

دی.

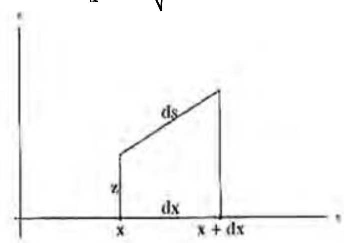
د S مساحت عبارت ده له

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du = 2\pi \left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(u) \Big|_0^1 \right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\text{arcsinh}(1)\right)$$
$$= \sqrt{2}\,\pi + \pi\ln(1+\sqrt{2})$$

په ورته ډول که د S سطحه چې د $z = f(x)$ تابع گراف د $[a,b]$ پر قطعه خط د oz محور په شاوخو ددوران څخه حاصل شوي مساحت يې د لاندې فورمول په واسطه محاسبه کولای شو.

$$\int_a^b 2\pi x ds = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

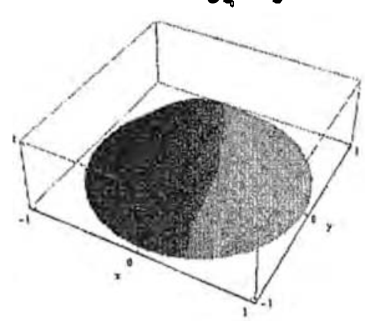


(12) شکل

پو هيږو چې $2\pi x ds$ افاده د يو ناقص مخروط مساحت دی چې x د شعاع ګانو اوسط او ds ته انحنايې کږوږې جيګوالی وايي(که ds ډېر کوچنی وي).

مثال (*6.2.7*). فرضوو چې د S ساحه د $z = e^{-x^2}$ تابع گراف د $[0.1]$ پر انټروال د oz محور په شاوخوا ددوران څخه حاصل شوي دی .(13) شکل د S ساحه رابښيي.

a) د انتيگرال په واسطه د S ساحه معلومه کړئ.



(13) شکل

b) دعددی انتيگرال د محاسبی څخه په ګټه اخستلو د نو موړې سطحی تقريبی مساحت تخمين کړي.

حل . a) د سطحي مساحت عبارت دی له

$$\int_1^2 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{de^{-x^2}}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(-2xe^{-x^2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\ 4x^2e^{-x^2}}\ dx$$

b) د پورتني انتیگرال قیمت نه شو کولای د ځینو خاصو مشهورو توابعو د انتیگرال نیونې له مخې محاسبه کړو . خود کمپیوتري پروگرامونوپه واسطه په تقریبي ډول کولای شو قیمت یې لاسته راوړو. وروسته د6 رقمي عددونود رونډواف څخه لروچې

$$\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\ 4x^2e^{-x^2}}\ dx\ \cong 3.96025$$

اتم فصل

تفاضلي معادلې

په دې برخه کې د لومړي ترتیب تفاضلي معادلو حل د انتیګرال نیولو د عامل (*factor*) په واسطه او هم دجلا کیدو ړمتحولینو د طریقې په واسطه لاسته راوړو .ددې طریقو تطبیقي ساحه په پام کې نیسو .

(1.8) .لومړي ترتیب خطي تفاضلي معادلې

په دې برخه کې د

$$\frac{dy}{dt} = p(t)y + q(t)$$

ډول تفاضلي معادلې په پام کې نیسو چې $p(t)$او $q(t)$ ورکړل شوي توابع او $y = y(t)$ داسې تابع ده چې باید معلومه شي.دې ډول تفاضلي معادلې ته لومړي ترتیب خطي تفاضلي معادلې وایي. که چیرې

$$f(t, y) = p(t)y + q(t)$$

وضع کړو، تفاضلي معادله داسې لیکلای شو .

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

تفاضلي معادله کې (خطي) کلمه ددې حقیقت څرګندوي ده چې $f(t, y)$ تابع نظر د t متحول ته یوه خطي تابع او د لومړی ترتیب مفهوم د نا مـعـلومـي تابع د لـومـړی ترتیب مشتق ښیي.

د $\frac{dy}{dt} = ky$ خـاص حـالـت پـه پـام کـې نیـسوچـیرتـه چـې په (*5.6*) سـکشن کـې ($p(t) = k$، $q(t) = 0$) وی.لیدل کیږي چې ددې معادلې عمومی حل د ثابت ضریب او د e^{kt} د حاصل ضرب شکل لري او د $y(t_0) = y_0$ اولیه شرط مطابق د معادلې یوازینی حل دی.

د

$$\frac{dy}{dt} = q(t)$$

خاص حالت په (*6.7*) د ($p(t) = 0$) کې لرودی.عمومی حل د $q(t) = 0$ عمـومـی حل د $q(t)$ د انتیګرال نیولوڅخه په اسانی سره لاسته راځي.

$$y(t) = \int q(t)\, dt.$$

په پورتنۍ افاده کې داختياري ثابت له زياتولو څخه صرف نظرکوو.هغه قسمي حل چې د $y(t_0) = y_0$ اوليه شرط پوري تړلی يوازينی دی .

په دې برخه کې به وپوهيږوچې څنګه کولی شو د يوی لومړي ترتيب تفاضلي معادلې عمومی حل لاسته راوړواو همدارنګه د اوليه شرط له مخې د

$$\frac{dy}{dt} = p(t)y + q(t), y(t_0) = y_0$$

تفاضلي معادلې حل پيدا کړوداسې چې y_0 او t_0 ورکړل شوي عددونه دي .

(*1.1.8*) هغه حالت چې د y ضريب ثابت وی .

هغه لومړي ترتيب خطي تفاضلي معادله په پام کې نيسوچې د y ضريب يې ثابت وي که

$$\frac{dy}{dt} = ky + q(t)$$

وی.داسې چې k ثابت وی پورتنۍ معادله داسې ليکو .

$$\frac{dy}{dt} - ky = q(t)$$

که چيرې $q(t)$ مطابقتاً مساوی په صفر وی .نو e^{kt} به د تفاضلي معادلې حل وی .که چيرې د معادلې دواړه خواوی په e^{kt} تقسيم او يا e^{-kt} کې ضرب کړووبه لرو چې :

$$e^{-kt}\frac{dy}{dt} - e^{-kt}ky = e^{-kt}q(t)$$

وينو چې د رابطی کيڼه خوا د $y.e^{-kt}$ له مشتق څخه عبارت ده د زنځيري (*chain*) قاعدې له مخې ليکوچې .

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = e^{-kt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{d}{dt}\, e^{-kt}\right)y = \frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = e^{-kt}\,\frac{dy}{dt} + (-k\, e^{-kt})y$$
$$= e^{-kt}\,\frac{dy}{dt} - k\, e^{-kt}y.$$

بنأ پر دي

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = e^{-kt}\, q(t).$$

دی.

په دې معنی چې د $e^{-kt}\, y$ تابع د $e^{-kt}\, q(t)$ د انتيګرال څخه عبارت دی.يعنې

$$e^{-kt}\, y = \int e^{-kt}\, q(t)\, dt.$$

په نتيجه کې

$$y(t) = e^{kt}\left(\int e^{-kt}\, q(t)\, dt\right)$$

په لاس راځي.

پــه دې ځــای کــې غــیرمــعین انتیگرال یــو اختیاري ثــابت لــري. پــورتنی افــاده د

$$y'(t) = ky(t) + q(t)q(t)$$

تفاضلي معادلې عمومی حل دی. د $y(t_0) = y_0$ اولیه شرط له مخې اختیاري ثابت قیمت په یوازینی ډول لاسته راځی $y' = ky + q(t)$ تفاضلي معادلې له پاره اولیه شرط د مسلې یوازینی حل دی .کوم میتود چې د پورتنی افادې د حل لپاره په کار وړل کیږي .د انتیگرال نیولو عامل په کې د e^{-kt} دانتیگرال نیولوعامل په حیث په کاروړل شوې دی.

مثال (*1.1.8*). د

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}y + 3$$

a) تفاضلي معادلې عمومی حل پیدا کړئ.

b) د ور کړل شوی اولیه شرط له مخې قسمي حل معلوم کړئ.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}y + 3 \text{ ، } y(2) = 24$$

حل.

a) که د پورتنی معادلې دواړه خواوې د ($k=1/4$) د e^{kt} د انتیگرال نیولو عامل کې ضرب کړو و به لرو چې :

$$e^{-t/4}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{4}e^{-t/4}y = 3e^{-t/4}$$

له دې ځایه

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{4}}y\right) = 3e^{-t/4}$$

دی.

بنأ پر دی

$$e^{-\frac{t}{4}}y = \int 3e^{-\frac{t}{4}}\,dt$$

دی.

د پورتنی انتیگرال د محاسبې له پاره $w = -\frac{t}{4}$ په وضع کولو د $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{4}$ له مخې په لاس راځي .

په دې توگه

$$\int 3e^{-\frac{t}{4}}\,dt = -12\int e^{-\frac{t}{4}}\frac{dw}{dt}dt = -12\int e^{w}\,dw = -12\,e^{w} + c = -12e^{-\frac{t}{4}} + C,$$

دی.

دلته C یو اختیاری ثابت دی . بناً پردې

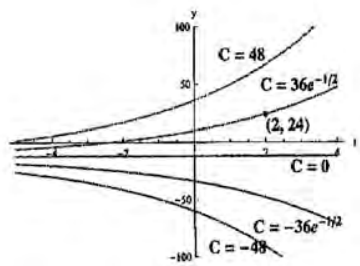
$$e^{-\frac{t}{4}}y = -12e^{-\frac{t}{4}} + C$$
$$y\,(t) = -12 + C^{e^{\frac{t}{4}}}$$

په دې ډول.

داسې چې C یو حقیقی عددی نو د $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}y + 3$ تفاضلې معادله د بې نهایت حلونو لرونکی ده

(1) شکل ښيې چې په $c = 0$ ، $0, \pm 36e^{-1/2}$ او ± 48 مطابق دی.

یادونه کووچې د $c = 0$ له پاره مربوطه حل هغه ثابته تابع ده چې قیمت یې -12 دی.



(1) شکل

b). داسې چې $y(t) = -12 + Ce^{\frac{t}{4}}$ تفاضلې معادلې عمومی حل دی، د C قیمت هسې معلوم

کړئ چې $y(2) = 24$ وي. بناً پردې .

$$24 = -12 + C\ e^{\frac{2}{4}} \Leftrightarrow 36 = Ce^{\,1/2}e^{\frac{t}{4}} \Leftrightarrow C = 36e^{-1/2}$$

په نتیجه کې د ور کړل شوی اولیه شرط مطابق دمعادلې حل عبارت دی له:

$$y(t) = -12 + 36e^{-1/2}e^{\frac{t}{4}}$$

دا حل د

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{4}y(t) + 3$$

د تفاضلې معادلې یوازینی حل دی چې گراف یې د $(2,24)$ له نقطې څخه تیریږي او په (1) شکل

کې ښودل شوی دی.

مثال (*2.1.8*) د

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\frac{1}{10}y(t) + 2.\, y(0) = y_0$$

تفاضلې معادله په پام کې نیسو

a). عمومي حل لاسته راوړی.

b). د ور کړل شوی اوليه شرط له مخې قسمي حل معلوم کړئ،کله چې $y_0 = 0,20 \pm 40$ حل.

a).ور کړل شوی تفاضلي معادله داسې ليکو

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{10}y(t) = 2,$$

دمعادلې دواړه خواوی د$e^{\frac{t}{10}}$ د انتيګرال نيولوپه عامل کې کې ضربو

$$e^{\frac{t}{10}}\frac{d}{dt}y(t) + e^{\frac{t}{10}}\frac{1}{10}y(t) = 2e^{\frac{t}{10}}$$

بناً پردی

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{10}}y(t)\right) = 2e^{\frac{t}{10}},$$

دی.

داسې چې

$$e^{\frac{t}{10}}y(t) = \int 2e^{\frac{t}{10}}dt = 20e^{\frac{t}{10}} + C$$

دی.

په نتيجه کې $y(t) = e^{\frac{-1}{10}}\left(20e^{\frac{t}{10}} + C\right) = 20 + C\,e^{\frac{-t}{10}}$ دی.

b). د$y(0) = y_0$ د اوليه شرط په پام کې نيولو سره لرو

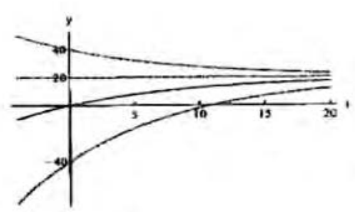
$$y_0 = 20 + C \Leftrightarrow C = y_0 - 20$$

داسې چې

$$y(t) = 20 + (y_0 - 20)e^{-\frac{t}{10}}$$

دی نو له دې ځايه د $y_0 = 0,20,40$ مطابق لاندی حلونه لاسته راځي

$$20 - 20e^{-\frac{t}{10}}, 20, 20 + 20e^{-\frac{t}{10}} \text{ او } 20 - 60e^{-\frac{t}{10}},$$



(2) شکل

تعریف (*1.1.8*). د یوې تفاضلي معادلې ثابت حل ته دهمدغه تفاضلي معادلې د منظم حالت(یا دتوازن حل) حل وایي.

مثال (*3.1.8*). د (*1.1.8*) په مثال کې مو ولیدل چې -12 د

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{4}y(t) + 3$$

د تفاضلي معادلې ثابت حل دی ،نو په دې ډول -12 د پورتنی د تفاضلي معادلې یوخاص حل هم دی.په حقیقت کې دپورتنی تفاضلي معادلې یوازینی حل دی . که چیرې د C ثابت د ورکړل شوي د تفاضلي معادلې حل وي . نو

$$0 = \frac{dc}{dt} = \frac{1}{4}c + 3 \Leftrightarrow C = -12$$

دی.د (*2.1.8*) په مثال کې مو ویل چې 20 د

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\frac{1}{10}y(t) + 2$$

د تفاضلي معادلې حل دی. دا یو حقیقت دی که د c ثابت هم د پورتنی تفاضلي معادلې حل وي نو

$$0 = \frac{dc}{dt} = -\frac{1}{10}c + 2 \Leftrightarrow c = 20.$$

دی.

تعریف (*2.1.8*). فرضوو چې c د $y'(t) = f(y(t))$ ډول تفاضلي معادلې د منظم حالت حل دی د منظم حالت حل تغیرنه منونکی حل وایي که چیرې J یو خلاص انتروال موجود شی چې C په کې شامل او $\lim_{t\to\infty} y(t) = C$ دهر $y(t)$ حل له پاره چیرته $y(t) = y_0$ وی او t_0 د y یو اختیاری عنصروی. دقسمي حل ته تغیرمنونکی (*unstable*) حل وایي که د J یو خلاص انتروال موجود شي کوم چې C په هغې کې شامل او $y_0 \in J$ له پاره چې $y(t_0) = y_0$ شرط صدق وکړي ،$y(t)$ حل داسي وجود ولري چې که t بې نهایت ته تقرب وکړي نونوموړي حل C خواته تقرب و نه کړي.

مثال (*4.1.8*). د

$$y'^{(t)} = -\frac{1}{10}y(t) + 2$$

تفاضلي معادله لکه چې په (*2.1.8*) مثال کې ذکر شوي ،په پام کې ونیسي چې 20 د تفاضلي معادلې قسمي حل ته تغیرنه منونکی وي .

کولای شونوموړې تفاضلي معاد له د $y'(t) = f(y(t))$ په ډول و لیکو.کله چې:

$$f(y) = -\frac{1}{10}y + 2.$$

وي.د(2.1.8) مثال مطابق تفاضلي معادلې عمومي حل عبارت دی له.

$$y(t) = 20 + Ce^{-\frac{t}{10}}$$

له دې ځایه

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow 20 + Ce^{-\frac{t_0}{10}} = y_0 \Leftrightarrow C = (y_0 - 20)e^{\frac{t_0}{10}}$$

دی . په دې ډول $y(t_0) = y_0$ داولیه شرط په تطبیق سره مربوطه حل عبارت دی له

$$y(t) = 20 + (y_0 - 20)e^{\frac{t_0}{10}}e^{-\frac{t_0}{10}} = 20 + (y_0 - 20)e^{\frac{-(t-t_0)}{10}}.$$

له دې ځایه

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(20 + (y_0 - 20)e^{\frac{-(t-t_0)}{10}}\right)$$
$$= 20 + (y_0 - 20)\lim_{t\to\infty} e^{\frac{-(t-t_0)}{10}} = 20.$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 20 + C\lim_{t\to\infty} e^{-t/10} = 20$$

دی .په دې ډول20 خاص حل تغیرنه منونکی حل دی .داځکه چې

$$|y(t) - 20| = \left|(y_0 - 20)\lim_{t\to\infty} e^{\frac{-(t-t_0)}{10}}\right| = |y - y_0|\left|e^{\frac{-(t-t_0)}{10}}\right|$$

داسې چې د $t \to +\infty$ لپاره $|y(t) - 20|$ په طاقت نما ډول تناقص کوي.په دې معنی چې د$t \to +\infty$ لپاره ټول هغه حلونه چې خاص حل ته متقارب وي،دتفاضلي معاد لې حل دی او د تفاضلي معادلې خاص حل ته د طاقت نما په ډول تقرب کوي.

مثال (*5.1.8*). د

$$y'(t) = -\frac{1}{4}y(t) + 3$$

تفاضلي معادله لکه چې په (*1.1.8*) مثال کې ذکر شوي ،په پام کې نیسو .و ښایا ست چې-12 د تفاضلي معادلې خاص حل او تغیرمنونکی دی.

حل. کولای شونوموړې تفاضلي معادله د $y'(t) = f\big(y(t)\big)$ په ډول ولیکو .کله چې:

$$f(x) = -\frac{1}{4}y + 3$$

وي.

د(*1.1.8*) مثال مطابق تفاضلي معادلې عمومي حل عبارت دی له.

$$y'(t) = -\frac{1}{4}y(t) + 3$$
$$y(t) = -12 + Ce^{\frac{t}{4}}$$

له دې ځایه $y(t_0) = y_0$ دی او یوازې په هغه حالت کې چې :

$$-12 + Ce^{\frac{t_0}{4}} = y_0 \Leftrightarrow Ce^{\frac{t_0}{4}} = y_0 + 12 \Leftrightarrow C = (y_0 + 12)e^{\frac{-t_0}{4}}$$

وي.نو د اوليه شرط په تطبيق سره تفاضلي معادلې حل عبارت دی له.

$$y\,(t) \;= -12 + (y_0 + 12)e^{\frac{-t_0}{4}}e^{\frac{t_0}{4}} = -12 + (y_0 + 12)e^{\frac{t-t_0}{4}}$$

كه $y_0 = -12$ وي نو -12 د تفاضلي معادلې خاص حل دی.د بلی خوا

$$\lim_{t\to\infty}|y(t) - (-12\,)| = \lim_{t\to\infty}\left|(y_0 + 12)\;\; e^{\frac{-(t-t_0)}{4}}\right| = \left|y_0\; + 12\right|e^{\frac{-(t-t_0)}{4}} = +\infty$$

دی.

پــه دې حالت كې دا داهميت وړنــه ده چــې y_0 ، -12 ته پــه كــوم ډول تقرب كوي كلــه چــې $y_0 \neq -12$ وي.لــه دې امله -12 د تفاضلي مــعادلې خــاص حــل اوتغيرمنونــكی دی.د يادولووړده چې د $t \to \infty$ لپاره $|y(t) - (-12)\,|$ د طاقت نما په ډول تزايد كوي. كله چې $y_0\; \neq 12$ وي.

مثال (*6.1.8*). د

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y(t) + \cos(t).$$

a) تفاضلي معادلې عمومي حل پيدا كړې.

b) د ور كړل شوي اوليه شرط له مخې د

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y(t) + \cos(t)\,, y(\pi) = 3$$

قسمي حل پيدا كړې .

حل.

a) ور كړل شوي تفاضلي معادله دا ډول

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = \cos(t)$$

د معادلې دواړه خواوي دانتيگرال نيونې په $e^{t/2}$ عامل كې ضربوو.

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y(t) = e^{t/2}\cos(t),$$

داسې چې:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}y(t)\right) = e^{\frac{t}{2}}\cos(t),$$

دی.

له دې ځايه

$$e^{t/2}y(t) = \int e^{t/2}\cos(t)dt,$$

دی.

د (*1.7*) برخی مطابق د بنې خواغیر معین انتیګرال دانتیګرال نیونې عامل د قسمې طریقې په مرسته لاسته راوړو.

$$e^{t/2}\int e^{t/2}\cos(t)dt = \frac{2}{5}e^{t/2}\cos(t) + \frac{4}{5}e^{t/2}\sin(t) + C$$

(ویی ازمایې) له دی ځایه

$$y(t) = e^{-t/2}\,(\frac{2}{5}e^{t/2}\cos(t) + \frac{4}{5}e^{t/2}\sin(t) + C)$$
$$= \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t) + Ce^{-\frac{t}{2}}$$

b) لروچې

$$y(\pi) = 3 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} + Ce^{-\frac{\pi}{2}} = 3 \Leftrightarrow C = \frac{17}{5}e^{\frac{\pi}{2}}$$

نوله دی ځایه داولیه قیمت په پام کې نیولو سره قسمي حل عبارت دی له

$$y(t) = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t) + \frac{17}{5}e^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$$

دا په ګوته کوو د (*6.1.8*) په مثال کې تفاضلي معادله لرونکی دخصوصی حل نه دی.که $y(t)$ د C ثابت سره مساوي اود تفاضلي معادلې حل وي مونږ باید ولرو:

$$0 = \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y(t) + \cos(t) \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2}c + \cos(t) \Leftrightarrow \cos(t)$$
$$= \frac{1}{2}c,$$

خو $\cos(t)$ ثابت نه دی. د بلی خواعمومی حل عبارت دی له:

$$y(t) = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t) + Ce^{-\frac{t}{2}},$$

په دی ډول

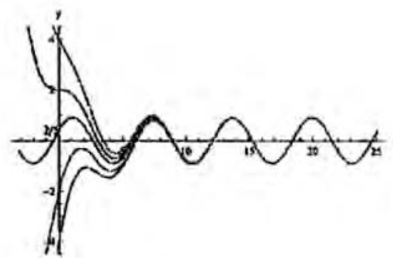
$$\lim_{t\to\infty}\Big(y(t) - (\frac{2}{5}cos(t) + \frac{4}{5}sin(t))\Big) = \lim_{t\to\infty}Ce^{-\frac{t}{2}} = 0.$$

دی.

بناً پردی اختیاری تفاضلي معادلې حل اود $\frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t)$ حل ترمنځ فرق دادی چې که t د بی نهایت خواته تقرب کوی $Ce^{-\frac{t}{2}}$ د صفر خواته نږدی کیږي.د $Ce^{-\frac{t}{2}}$ افادې ته د حل غیرالجبری برخه وایې چې د $t \to \infty$ لپاره په ډیرچټکی سره ښکته خواته لویږي (3) شکل د تفاضلي معادلود ځینوحلونو ګراف راښیې.ټول ګرافونه د

$$y = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t)$$

گراف ته نږدې کېږي كه چېرې t بې نهايت ته تقرب وكړي.



(3) شکل

پورتنې مثالونو کې په دې و توانیدوچې مربوطه غیرمعین انتیګرال محاسبه کړو .دانتیګرال نیونې عامل پواسطه کولای شود پام وړ انتیګرال حل کړوحتی که ور کړل شوی توابعو دانتیګرال د محاسبې لپاره عاجزهم اوسوچې دا زمونږ هد ف دی.د

$$\frac{dy}{dt} = ky(t) + q(t)$$

تفاضلي معادلې عمومي حل د لاسته راوړ لوله پاره په هغه صورت کې چې دانتیګرال نیونې تحول په ω سره وضع کړولروچې:

$$\frac{dy}{dt} - ky(\omega) = q(\omega)$$

د معادلې دواړه خواوې دانتیګرال نیونې په $e^{-k\omega}$ عامل کې ضربوو:

$$e^{-k\omega}\frac{dy}{d\omega} - ke^{-k\omega}y(\omega) = e^{-k\omega}q(\omega)$$

داسې چې

$$\frac{d}{dw}\left(e^{-kw}y(\omega)\right)d\omega = e^{-k\omega}q(\omega)$$

دی

دt_0 څخه تر t پورې د انتیګرال نیولوپه صورت کې

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\omega}\left(e^{-k\omega}y(\omega)\right)d\omega = \int_{t_0}^{t}e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega$$

په دې ډول د حسابې او تمامې اساسې قضیې په مرسته

$$e^{-k\omega}y(\omega)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega.$$

په دې توګه

$$e^{-kt}\,y(t) - e^{-kt_0}y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega$$

دی.

په دې توګه

$$y(t) = e^{\,kt}\,e^{-kt_0}\,y(t_0) + e^{kt}\,\int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega.$$

دی.

که $C = e^{-kt_0}\,y(t_0)$ وضع کړو $y'(t) = ky(t) + q(t)$ تفاضلي معادلې عمومي حل داسې لیکو.

$$y(t) = Ce^{kt} + e^{\,kt}\,\int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega$$

نو له دې ځایه د $y(t_0) = y_0$ اولیه قیمت په پام کې نیولو سره قسمي حل عبارت دی له:

$$y(t) = e^{\,kt}\,e^{-kt_0}\,y(t_0) + e^{\,kt}\,\int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega$$
$$= e^{\,k(t-t_0)}\;\; y(0) \;+ e^{\,kt}\,\int_{t_0}^{t} e^{-k\omega}q(\omega)\,d\omega$$

دا ضرورنه ده چې پورتنی افاده حفظ کړود لته هدف دادی چې څنګه کولای شو ددی افادو دلاربنونی څخه د لاندي مثال په څیرګته واخلو ممکن په هرخاص حالت کې پورتنی مطلب به په کاریوسو.

مثال (7.1.8).

a) د انتیګرال په مرسته د

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{4e^{-k\omega}}\,y(t) + \frac{1}{1+t^2}$$

تفاضلي معادلې عمومي حل پیدا کړې.

b) د انتیګرال په مرسته داولیه شرط په پام کې نیولو سره تفاضلي معادلې قسمي حل پیدا کړې.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{4}\,y(t) + \frac{1}{1+t^2}, y(1) = 2$$

حل.

a) د b د برخې مطابق داولیه شرط په پام کې نیولو سره عمومي حل دلاسته راوړلو له پاره لازم دی دانتیګرال حدودله 1 څخه تر t وټاکو،که د ω نوی متحول معرفی کړو په دی صورت کې لرو:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{4}y(\omega) + \frac{1}{1+\omega^2},$$

د معادلې دواړه خواوې دانتیګرال نیونې $e^{w/4}$ عامل کې ضربوو

$$e^{\omega/4}\,\frac{dy}{d\omega} + \frac{1}{4}e^{\omega/4}\,y(\omega) + \frac{e^{\omega/4}}{1+\omega^2},$$

داسې چې:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\omega}{4}}y(\omega)\right) = \frac{e^{\omega/4}}{1+\omega^2}$$

دی.

په دی توګه

$$\int_1^t \frac{d}{dw}\left(e^{\frac{\omega}{4}}y(\omega)\right)d\omega = \int_1^t \frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}\,d\omega.$$

دی.

په دې توګه د حسابی او تمامی اساسی قضیې له مخې لرو:

$$e^{t/4}y(t) - e^{-1/4}y(1) = \int_1^t \frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}\,d\omega$$

په دې ډول

$$y(t) = e^{-t/4}e^{1/4}y(1) + e^{-t/4}\int_1^t \frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}\,d\omega.$$

دی.

کولای شو $C = e^{1/4}y(1)$ په وضع کولوسره عمومي حل داسې لاسته راوړو:

$$y(t) = Ce^{-t/4}e^{1/4} + e^{-t/4}\int_1^t \frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}\,d\omega$$

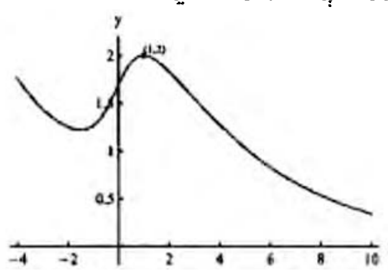
b) څرنګه چې $y(1) = 2$ دی داولیه شرط په پام کې نیولو سره تفاضلي معادلې قسمي حل عبارت دی له:

$$y(t)=e^{-\frac{t}{4}}e^{\frac{1}{4}}y(1)+e^{-\frac{t}{4}}\int_1^t\frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}d\omega$$
$$=e^{-t/4}e^{-1/4}(2)+e^{-\frac{t}{4}}\int_1^t\frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}d\omega$$
$$=2e^{-(t-1)/4}+e^{-t/4}\int_1^t\frac{e^{\frac{\omega}{4}}}{1+\omega^2}d\omega$$

دا انتیگرال چې په ښې خوا کې نه شو کولی د خاصو پیژندل شوو توابعو دعملیو پواسطه بشپړ کړو. په هر حال امکان لري د عددي انتیګرال نیونې پواسطه دحل قیمتونه په تخمینی ډول محاسبه کړو د مثال په توګه .

$$y(t)=2e^{-\frac{2-1}{4}}+e^{-\frac{2}{4}}\int_1^2\frac{e^{\frac{w}{4}}}{1+w^2}dw\cong 1.8369$$

(*4*) شکل د $[0,4]$ په انټروال کې $y(t)$ ګراف ښیي.



(*4*) شکل

(*2.1.8*) عمومی حالت . د

$$\frac{dy}{dt}=p(t)y(t)+q(t),$$

لومړی ترتیب خطي تفاضلي معادله په پام کې نیسو داسې چې p او q د J په انټروال کې متمادي دي اوضرور نه ده چې p ثابت وي. ددې سره به هم داولیه شرط مسلې حل ددې ډول معـادلو لــه پاره د $y(t_0)=y_0$ داولیه شرط په پام کې نیولو سره پیدا کوو. په دې حالت کې که چیرې $p(t)$ ثابت وي ، پورتنی معادله داډول لیکو .

$$\frac{dy}{dt}-p(t)y(t)=q(t),$$

که چیرې $P(t)$ د $p(t)$اولیه تابع وي، لروچې :

$$p(t)=\int p(t)dt$$

(د هر p لپاره اولیه تابع پیدا کوو .په دې برخه کې دا ضرور نه ده چې اختیاري ثابت ور زیات کړو).په دې توګه د $e^{-p(t)}$ دانتیګرال نیونې عامل په پام کې نیسو.که $p(t) = k$ وي کولې شو $P(t)$لاسته راوړو چې د kt - څخه عبارت دی داسې چې k ثابت دې ،څرنګه چې :

$$p(t) = \int kdt = kt$$

دی.

(دلته دانتیګرال ثابت مو صفر وضع کړ).

د معادلې دواړه خواوې $e^{-p(t)}$ کې ضربوو:

$$e^{-p(t)} - e^{-p(t)}p(t)y(t) = e^{-p(t)}q(t).$$

د پورتنۍ معادلې کیڼه خوداسې لیکو.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-p(t)}\, y(t)\right)$$

د ضرب د زنځیري (chain) قاعدې له مخې لیکوچې:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-p(t)}\, y(t)\right) = e^{-p(t)}\frac{dy}{dt} + \left(-\frac{dp}{dt}e^{-p(t)}\right)y(t).$$

لروچې:

$$P(t) = \int p(t)dt \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = pt$$

په دې ډول

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-p(t)}\, y(t)\right) = e^{-p(t)}\frac{dy}{dt} + \left(-\frac{dP}{dt}e^{-P(t)}\right)y(t).$$
$$= e^{-P(t)}\frac{dy}{dt} - p(t)e^{-P(t)}\, y(t)$$

دی.

بناً پردی لیکو چې :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-P(t)}\, y(t)\right) = e^{-P(t)}q(t)$$

په نتیجه کې لاسته راځي چې :

$$e^{-P(t)}\, y(t) = \int e^{-P(t)}q(t)dt$$

په هغه حالت کې چې k د$y(t)$ ثابت ضریب وي دا ضروري نه ده چې پورتنۍ څرګندونې په یاد ولرو.هدف دادی چې پورتنۍ طریقې څخه څنګه کولای شو د لاندې مثالونو په حل کې کارواخلو.

مثال (*8.1.8*). د

$$y'(t) = -ty(t) + t$$

تفاضلي معادلې عمومي حل دانتیګرال نیونې عامل په پام کې نیولو سره پیدا کړې.

a) د $y_0 = 10$ او $y_0 = -10$ اولیه شرط په پام کې نیولو سره دلاندې تفاضلي معادلې قسمي حل پیدا کړئ.

$$y'(t) = -ty(t) + t, y(0) = y_0$$

حل.

a) پورتنۍ تفاضلي معادله په دې توګه لیکو

$$\frac{dy(t)}{dt} + ty(t) = t$$

د $e^{\int t dt}$ دانتیګرال نیونې عامل په پام کې نیولوسره

$$\frac{dy(t)}{dt} + ty(t) = t.$$

$$\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C,$$

داسې چې C اختیاري ثابت وي که $C = 0$ وي په دې حالت کې به

$$e^{\int t dt} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

دانتیګرال نیونې عامل څخه په ګټه اخستلو .د تفاضلي معادلې دواړه خواوې $e^{t^2/2}$ کې ضربوو:

$$e^{t^2/2}\frac{dy(t)}{dt} + te^{t^2/2}y(t) = te^{t^2/2}$$

(ویې ازمایې) په دې توګه

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/2}\, y(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/2}\, y(t)\right) = te^{t^2/2},$$

دی.

څرنګه چې

$$e^{t^2/2}\, y(t) = \int te^{t^2/2}dt = e^{t^2/2} + C,$$

دی.

داسې چې C اختیاري ثابت وي . په نتیجه کې

$$y(t) = 1 + C\, e^{-t^2/2}$$

تفاضلي معادلې عمومي حل دی.

b) مونږ $y(0) = 0$ لروکه اویوازې که

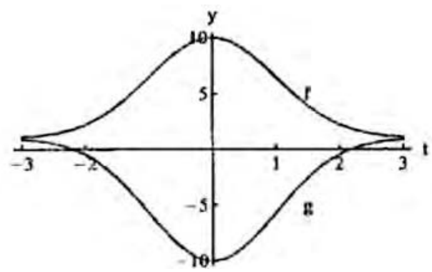
$$1 + C = -10 \Leftrightarrow C = -11$$

وي بناً په دې $g(t) = 1 - 11\, e^{-t^2/2}$ ته د

$$y'(t) = -ty(t) + t, y(0) = -10$$

تفاضلي معادلې قسمي حل وايې.

(5) شکل د g او f ګراف ښيي.



(5) شکل

په (8.1.8) مثال کې په دې و توانیدو چې د پام وړ توابعو په پام کې نیولو سره انتیګرال معلوم کړو.

فقط یوازې په هغه حالت چې د y ضریب ثابت وي .مونږ کولی شو د

$$\frac{dy}{dt} = p(t)y(t) + q(t),$$

تفاضلي معادلې حل دانتيګرال په پام کې نيولوسره په لاس راوړو کله چې دانتيګرال نيونې عامل معلوم وي.

مثال (9.1.8).

a) د

$$\frac{dy}{dt} = -2ty(t) + \frac{1}{1 + t^2}$$

تفاضلي معادلې عمومي حل دانتيګرال په پام کې نيولوسره معلوم کړې.

b) داولیه شرط له مخې دانتيګرال په پام کې نیولو سره د تفاضلي معادلې قسمي حل لاسته راوړئ.

$$\frac{dy}{dt} = -2ty(t) + \frac{1}{1 + t^2}, y(0) = y_0$$

حل.

a) پورتنی تفاضلي معادله داسې لیکو

$$\frac{dy}{d\omega}+2\omega y(\omega)+\frac{1}{1+\omega^2}$$

د $e^{\int 2\omega d\omega}=e^{\omega^2}$ انتیګرال نیونې عامل په پام کې نیولو سره دمعادلې دواړه خواوي په e^{ω^2} کې ضربوو

$$e^{\omega^2}\frac{dy}{d\omega}+2\omega e^{\omega^2}y(\omega)=\frac{e^{\omega^2}}{1+\omega^2}$$

په دې توګه لیکو چې

$$\frac{d}{d\omega}\left(e^{\omega^2}y(\omega)\right)=\frac{e^{\omega^2}}{1+\omega^2}$$

د 0 څخه تر t پورې د انتیګرال نیولوپه صورت کې

$$\int_0^t\frac{d}{d\omega}\left(e^{\omega^2}y(\omega)\right)d\omega=\int_0^t\frac{e^{\omega^2}}{1+\omega^2}d\omega.$$

د حسابې او تمامې اساسي قضیې له مخې لروچې:

$$e^{t^2}y(t)-y(0)=\int_0^t\frac{e^{u^2}}{1+u^2}du$$

$$y(t)=e^{-t^2}y(0)+e^{-t^2}\int_0^t\frac{e^{\omega^2}}{1+\omega^2}d\omega.$$

که چیرې $y(0)=C$ وضع کړو نو C یواختیاري ثابت دی. په نتیجه کې

$$y(t)=Ce^{-t^2}+e^{-t^2}\int_0^t\frac{e^{\omega^2}}{1+\omega^2}d\omega.$$

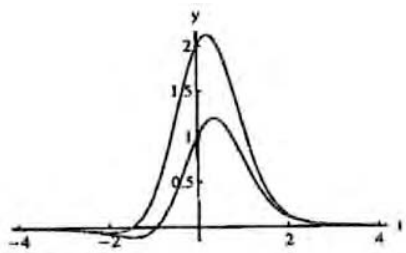
تفاضلي معادلې عمومي حل ورکوي.

b) د a) د برخي مطابق دمسألی د اولیه قیمت حل عبارت دی له.

$$y'(t)=-2ty(t)+\frac{1}{1+t^2},y(0)=y_0$$

نوموړي انتګرال نشو کولای د نظروړخاص پیژندل شوي توابعو په پام کې نیولو سره پیدا کړو.(البته پورتنی حل لږڅه د پام وړدی) .چې کولای شو په تخمینی ډول دعددی انتیګرال نیونې له لارې یې حل ترلاسه کړو .

(6) شکل د $y_0 = 1$ او $y_0 = 2$ پورې مربوط د حل ګرافونه دي .



(6) شکل

په راتلونکې کې به د ځينی رياضيکی نمونو (موډلونو) په باب بحث وکړو چې هدف يې د لومړۍ ترتيب خطي تفاضلي معادلوته رهنمائي کوي .

(2.8) دلومړی ترتيب تفاضلي معادلو تطبيقات .

په تفاضلي معادلوکې درياضيکي موډلونو(*models*) ډول ډول مفاهيم شامل دي په دی برخه کې هغه مثالونه چې د لومړی ترتيب تفاضلي معادلو پوری اړه نيسی مطالعه کړو .

(*1.2.8*) په ازاد سقوط کې د خيزوهنې په حالت کې د توقف حالت ته د يوجسم راګرځيدل .

فرضوو چې يوجسم د m کيلو ګرامه کتله لری اود يوی لوړې ارتفاع څخه سقوط کوي ، داسې چې اوليه سرعت يې صفر $v_0 = 0$ دی. که په نوموړی جسم باندی mg نيوټنه قوه عمل کوي داسې چې g د ځمکی د جاذبې تعجيل (واحد يې m/sec^2) دی. اويوثابت کميت دی.د هوا مقاومت د يوې اضافی قوې په شان په جسم عمل کوي چې دجسم دسرعت د کميدو سبب ګرځي .مقاومه قوه د$\gamma v(t)$ څخه عبارت ده داسې چې $v(t)$ د په موده کې سرعت او $\gamma > 0$ دی . دی ډول قوې ته د خيزوهنې مقاومه قوه او γ ته د مقاومې قوې ثابت ويل کيږي. په ازاد سقوط کې د جسم راګرځيدل له خيزوهنې څخه د توقف حالت ته دهيت کثافت پوری اړه لري . د مثال په ډول دواوری ټوټې او يا هغه جسم چې په هوا کې لاهو وي.د ورته نمونو په هکله به د(*4.9*) برخه کې به بحث وکړو. هغه قوه چې دt په لحظه کې په جسم عمل کوي $mg - \gamma v(t)$ څخه عبارت ده. په حرکت کې د نيوټن ددويم قانون له مخې ،هغه کششی قوه چې په يو جسم عمل کوي مساوی دی په $m\,.\,a(t)$ داسې چې د t په لحظه کې لحظوي تعجيل دی او په m/sec^2

اندازه کیږي داچې دسرعت اووخت نسبت ته تعجیل وايي نو $a(t) = v'(t)$ دي بنأ پردی لاندی مساوات لیکلي شو .

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v(t)$$

په نتیجه کې $v(t)$ هغه لومړی ترتیب خطي تفاضلي معادله صد ق کوي .په کـومې چې مـو په (1.9) برخه کې بحث وکړ .فرضوو چې جسم د سکون $t=0$ په حالت کې سقوط کوي نوداولیه شرط له مخې $v_0=0$ دی. د انتیګرال نیولودعامل په کاررولو، پورتنۍ معادله داسې لیکو

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) + g$$

د معادلې دواړه خواوي د $e^{\gamma t/m}$ انتیګرال نیـولو په عامل کې ضربوو.

$$e^{\gamma t/m}\, v'(t) + e^{\gamma t/m}\frac{\gamma}{m}v(t) = e^{\gamma t/m}\, g,$$

له دې ځایه

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\gamma t}{m}}\, v(t)\right) = e^{\gamma t/m}\, g$$

په لاس راځي .

په دې ډول

$$e^{\frac{\gamma t}{m}}\, v(t)\int ge^{\frac{\gamma t}{m}}dt = \frac{mg}{\gamma}\; e^{\frac{\gamma t}{m}} + C$$

دی.

داسې چې C ثابت وي .څرنګه چې $v(0) = 0$ دی نوخصوصي حل عبارت دی له

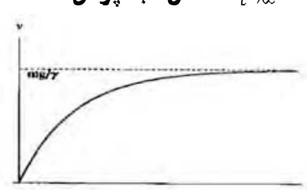
$$\frac{mg}{\gamma} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{\gamma}$$

په دې ډول

$$v(t) = e^{-\gamma\frac{t}{m}}\left(\frac{mg}{\gamma}\; e^{\gamma\frac{t}{m}} - \frac{mg}{\gamma}\right) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma\frac{t}{m}}\right)$$

دی.

داسې چې $\gamma > 0$ او $\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma\frac{t}{m}} = 0$ دی ، بنأ پردی



(1) شکل

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma}$$

د $t \to \infty$ پــه حــالت کې د $v(t)$ لیمت تــه د جسم وروستنی ســرعت وایې . ځــکه چــې

$$v(t) - \frac{mg}{\gamma} = \frac{mg}{\gamma}\ e^{-\gamma\frac{t}{m}}$$

دی.د $t \to \infty$ وروستنی سرعت د طاقت نما تابع په ډول تقرب کوي ، په حقیقت کې جسم په ډیره کمه لحظه کې په وروستنی سرعت سقوط کوي ،د سرعت تابع د ګراف د(1) په شکل کې ښودل شوی دی. د یاد ولووړده چې د$\frac{mg}{\gamma}$ وروستنی سرعت

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{m}v(t) + g$$

تفاضلي معادلې خاص حل دی.ځکه چې د تفاضلي معادلې د $v(t)$ هرحل لپاره

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma}$$

په لاس راځي.

مثال (*1.2.8*) . فرضوو چې د یو بادي توپ په غورځولوکې له خیز وهنې څخه د توقف ته په راګرزیدو کــې یــو ډول قوه عمل کوي د تیرمعلومــات څخه پــه استفاده فــرضــوو چــې $g = 9.8\,m/sec^2$ ، $\gamma = 0.1$ او $m = 200g$ بادي توپ سرعت نظر وخت ته، او هم د توپ وروستنی سرعت معلوم کړئ **حل**. لرو چې

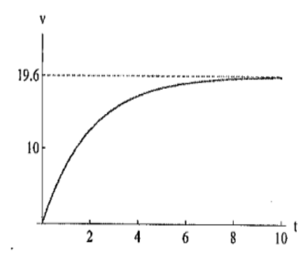
$$\frac{dv}{dt} = \frac{0.1}{0.2}v(t) + 9.8 = -\frac{1}{2}v(t) + 9.8$$

داسې چې

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \ e^{-\gamma\frac{t}{m}}\right) = \frac{0.2 \times 9.8}{0.1}\left(1 - \ e^{-\gamma\frac{t}{m}}\right) = 19.6\left(1 - \ e^{t/2}\right)$$

دی.

په خاص ډول د توپ وروستنی سرعت عبارت دی له $19.6\ m/sec$ (*2*) شکل د سرعت د تابع ګراف ښیي .



(*2*) شکل

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} 19.6\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) = 19.6\ m/\sec$$

با يد ووايو چې د توپ سرعت د 8 ثانيو څخه وروسته د توپ وروستنی سرعت ته ډير نږدې دی.

(2.2.8) د يخيدلو په باب د نيوټن قانون.

فرضوو چې يو ګرم جسم د عادي اوبو په ذخيره کې غوټه شوې دی. مونږ به فرض کړو چې د جسم د شاوخوا محيط په کافی اندازه پراخه او د ټيټ حرارت لرونکې دی اود حرارت درجه يې ثابته ده،بيانووچې(C^0) T_m دی. فرضووچې t په لحظه کې د ګرم جسم د حرارت درجه په T_t ښودل شوې ده (يوه دقيقه) ښودل شوې ، د سړيد و له پاره د نيوټن قانون په پام کې نيسو: يوګرم جسم دحرارت درجه ثابته اودنوموړي جسم دحرارت ددرجې اود احاطه شوي محيط د حرارت ددرجې له تفاضل سره مستقيماً متناسبه ده. په دې ځای کې د k ثابت عدد وجود لري داسې چې د t د هرې لحظې لپاره $k > 0$ ثابت عدد له پاره

$$\frac{d}{dt}T(t) = -k(T(t) - T_m)$$

د(-) علامه دهغې جسم د حرارت درجې پوری اړه لري چې په تدريجی ډول سړيږی يعنې (T_t تناقص کوي) په ابتدا کې د جسم حرارت $T_0 > T_m$ دی. غواړو T_tداسې و ټاکو چې پورتنی معادله په لاندی توګه صدق کړئ.

$$\frac{d}{dt}T(t) + kT(t) = kT_m$$

چې داد لومړی ترتيب خطي تفاضلي معادله ده. د معادلې دواړه خواوې د $e^{k(t)}$ انتيګرال نيولو په عامل کې ضربوو.

$$e^{k(t)}\frac{d}{dt}T(t) + k\ e^{k(t)}T(t) = k\ e^{k(t)}T_m,$$

داسې چې

$$\frac{d}{dt}\left(e^{k(t)}T(t)\right) = k\ e^{k(t)}T_m$$

دی.

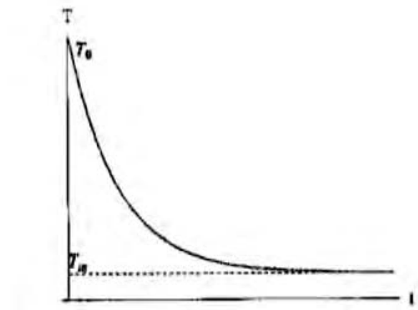
له دې ځايه

$$\begin{aligned} e^{k(t)}T(t) &= \int k\ e^{k(t)}T_m dt = kT_m\int e^{k(t)}\,dt \\ &= kT_m\left(\frac{1}{k}\ e^{k(t)} + C\right) \\ &= T_m\ e^{k(t)} + CkT_m, \end{aligned}$$

دی.

داسې چې C ثابت دی ، داسې چې C په مشخص ډول یو ثابت دی . کیدای شی ورکړل شوو اولیه شرطونو له مخې لاسته راشی . همدارنګه دکوم زیان سره نه مخ کیږو چې که CkT_m په C عوض کړو .په دې توګه لیکو چې.

$$e^{k(t)}T(t) = T_m\ e^{k(t)} + C \Rightarrow T(t) = T_m + C\ e^{-k(t)}$$



شکل (3)

دا چې $T_{(0)} = T_0$ دی، لروچې

$$T_m + C = T_0 \Leftrightarrow C = T_0 - T_m$$
$$T_t = T_m + (T_0 - T_m)\ e^{-k(t)}$$

لیدل کیږي چې $T(t)$ حرارت په یوې ټاکلې موده کې د احاطه شوي عادي محیط پواسطه دیوې طاقت نما تابع په شان مخ په کمیدو (تناقص) دی . یعنی .

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left(T_m + (T_0 - T_m)\ e^{-k(t)}\right) = T_m + (T - T_0)\lim_{t\to\infty} e^{-kt} = T_m$$

داسې $k > 0$ وي په (3) شکل کې د T ګراف ښودل شوی .

مثال(2.2.8). په تیر بحث کې مود نیوټن سړیدو قانون له مخې فرض کړل چې که یو ګرم جسم د اوبو په یوی ټانکۍ کې چې داوبو د حرارت درجه یې 20 ده، غوټه کړو . او وروسته له دوه ساعتو څخه جسم د 20 درجو څخه 40 درجو پوری سوړ شي د حرارت درجه T د t په هره لحظه کې تعین کړئ.

حل.د ورکړل شوي معلوماتو له مخې $T_2 = 40$ اولومړني حرارت یې $T_0 = 20$ ور کړل شوی ، او د k قیمت معلوم نه دی ، پوهیږو چې $T(t)$ لاندی شکل ولري

$$T(t) = T_m + (T_{(0)} - T_m)e^{-kt} = 20 + (200 - 20)e^{-kt}$$
$$= 20 + 180e^{-kt}$$

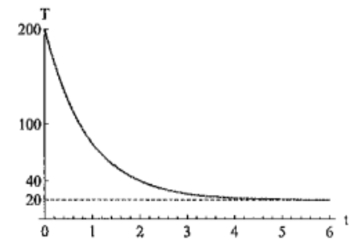
د k قیمت د $T_2 = 40$ قیمت له مخې دارنګه ټاکو

$$40 = T(2) = 20 + 180e^{-kt}$$

په دې توګه

$$e^{-kt} = \frac{20}{40} \Leftrightarrow -2k = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow -2k = -\ln(9) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\ln(9)$$

دی.



شکل (4)

بنأ پردی

$$T(t) = 20 = 180e^{-\frac{\ln(9)t}{2}} = 20 + 180(e^{-\ln\left(\frac{1}{9}\right)})^{\frac{t}{2}} = 20 + 180\left(\frac{1}{9}\right)^{t/2}$$

دی.

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}\left(20 + 180\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{t}{2}}\right) = 20$$

په دې معنی د $t \to \infty$ په حالت کې دګرم جسم د حرارت درجه د احاطه شوی متوسط محیط د حرارت درجی ته راټیټیږی . دګرم جسم د حرارت درجه وروسته د 5 ساعتوڅخه تقریباً د اوبو دحرارت درجی سره مساوی کیږي.

(3.2.8) مختلف مسایل (*Mixing problem*).

د لاندې مثال په شان ځینی مختلف مسایل مونږ د لومړي ترتیب خطي تفاضلي معادلاتو خواته راجع کوي .

مثال(*3.2.8*) . د پاکو اوبو یوه ذخیره په پام کې نیسو ،په ذخیره کې داوبوظرفیت $150m^3$ اوداوبو جریان په ذخیر کې په هر ساعت کې$200m^3$ دی. د اضافی موادو غلظت په هرمترمکعب اوبو کې $0.2gr$ دی.همدارنګه په ذخیره کې د اوبو خروجي او د خولې جریان سره مساوی دي په ذخیره کې د اضافي موادو مقداردوخت په تیرید و معلوم کړئ.

حل. که $y(t)$ د t په موده کې اضافي موادو په ذخیره کې رابښي دt په لحظه کې د اضافی موادو غلظت عبارت دی له

$$\frac{y(t)}{10^5}\left(\frac{gr}{meter^3}\right) = \frac{\text{د اضافي موادومقدار}}{\text{د اوبو مجموعی مقدار}}$$

دهغه اضافی موادو نسبت چې له ذ خیرې څخه خارجیږي عبارت دی له

$$\frac{y(t)}{10^5}\left(\frac{gr}{m^{\ 3}}\right) \times 200\left(\frac{m^{\ 3}}{h}\right) = 2 \times 10^{-3}y(t)\left(\frac{gr}{h}\right)$$

دهغه اضافي موادو نسبت چې په ذخیره کې پاتی کیږي عبارت دی له

$$0{,}2\left(\frac{gr}{m^{\ 3}}\right) \times 200\left(\frac{m^{\ 3}}{h}\right) = 40\left(\frac{gr}{h}\right) = 40 - 2x10^3y(t)\left(\frac{gr}{h}\right)$$

بنآ هغه نسبت چې په هغې کې y د t په لحظه کې تغیرکوي عبارت دی له

$$\frac{dy}{dt} = rate\ in - rate\ out = 40 - 2x10^4y(t)\left(\frac{gr}{h}\right)$$

بنأ پرې

$$\frac{dy}{dt} + 2x10^{-3}y(t) = 40$$

دی.

د معادلې دواړه خواوی د انتیگرال نیولو په $e^{\,2\times10-3t}$ عامل کې ضربوو.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\,2\times10-3t}\,y(t)\right) = 40\,e^{\,2x10-3t}$$

له دې ځایه

$$e^{2\times10-3t}y(t) = \int 40e^{2x10-3}\,dt = \frac{40}{2x10^{-3}}\,e^{2x10-3t} + c$$
$$= 2x10^{4\,e^{2x10-3t}} + c$$

دی.

بنأ پردې

$$y(t) = 2x10^4 + ce^{-2x10-3t}$$

دی.

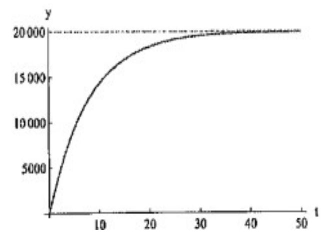
د $y(0) = 0$ اولیه شرط له مخې لروچې:

$$0 = 2x10^4 + c \Longrightarrow c - 2x10^4$$

بنأ پردې لیکو چې

$$y(t) = 2x10^4(1 - e^{-2x10-3t})$$

(5) شکل د حل گراف ښيي.



(5) شکل

په نتيجه کې

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 2x10^4$$

دي.

په ذخيره کې د $2x10^4$ اړونده اضافي موادو مجموعي غلظت عبارت دی له .

$\frac{2x10^4}{10^5} = 0.2\ gr/m^3$

چې دا په داخلی جريان کې د اضافی موادو غلظت راښيي .ددی نتيجی وړاندیز کیدای شي دارنګه هم شوي وي . دداخلی جريان په نتيجه کې د وخت په تيريدو سره په ذخيره کې اضافي مواد يوبل ته سره نږدي کيږي .(5) شکل دا راښيي چې ددوو ورځو په موده کې په ذخيره کې د فاضله موادو غلظت تقريباً سره مساوی دي.

(*4.2.8*) ساده برقی دوری (سرکيتونه) *Simple Electrical Circuits*

هغه ساده برقی دوره په پام کې نيسوچې مقاومت R اوکويل L دی . فرضووچې د برقی محرکه قوه د E ثابت ولتيج لري .همدارنګه د I جريان د t مودې تابع دی. د برقی دوری په باب د معلوماتو له مخې به دا وښيو چې ، I لاندی فرض کړل شوی اختصاصي تفاضلي معادله صدق کوي.

$$\frac{LdI}{dt} + RIt = E$$

$$\frac{LdI}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)It = \frac{E}{L}$$

که چيرې $q = \frac{E}{L}$ او $\frac{R}{L} = k$ وضع کړو نو تفاضلي معادله کولای شو په لاندی ډول وليکو

$$\frac{dI}{dt} + kI(t) = q$$

د e^{kt} انتيګرال نيوني عامل په ضربولوسره ليکو چې:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}I(t)\right) = e^{kt}q$$

په دې ډول

$$e^{kt}I(t) = \int e^{kt}q dt = \frac{q}{k}e^{kt} + C$$

دی.

دا ډول چې C ثابت وي.

بنأ پردی

$$I(t) = e^{-kt}\left(\frac{q}{k}e^{kt} + C\right) = \frac{q}{k} + Ce^{-kt}$$

دی.

که چیرې $I(0) = I_0$ وي لروچې

$$I_0 = \frac{q}{k} + C \to C = I_0 - \frac{q}{k}$$

په دې توګه

$$I(t) = \frac{q}{k} + (I_0 - \frac{q}{k})e^{-kt}$$

دی.

داسې چې $q = \frac{E}{L}$ او $k = \frac{R}{L}$ دي.لروچې $\frac{q}{k} = \frac{E}{R}$ په دې توګه

$$I(t) = \frac{q}{k} + (I_0 - \frac{q}{k})e^{-kt} = \frac{E}{R} + (I_0 - \frac{E}{R})e^{-Rt/L}$$

دی.

داسې چې $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{Rt}{L}} = 0$ دي نو $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{E}{R}$ دی او $\frac{E}{R}$ مقدار د

$$\frac{LdI}{dt} + RIt = E$$

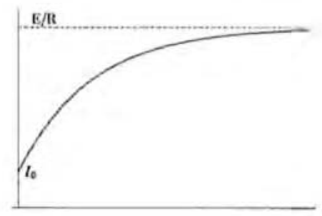
لپاره خاص حل دی.

دا یو حقیقت دی.که چیرې د I جریان ثابت وی. لروچې $I'(t) = 0$ دی. او $I = \frac{E}{R}$ ته $RI = E$ معادلې حل وایې.د

$$\left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

حد ته د حــل غــیر الجبری برخــه یا (*transient part*) وایې . دا حد $exp\left(\left(-\frac{R}{L}\right)t\right)$ په لرلوسره سرعت کموي ، په خاص حالت کې د یوې کمې مودی لپاره د جریان فرق په شکل کې لیدل کیږي .

اوس فرضوو چې ولتيج سينوسايډال (sinusoidal) وی. بنأ پردی يوه ساده برقی سرکيټ د



شکل (6)

R مقاومت او L دکويل (ګوټک)او E د په ولتيج د $E_0\sin(\omega t)$ شکل په لرلو E_0 مقدارته د ولتيج امپليتود(لمن)او $2\pi/\omega$ ته فريکوينسی وايې .د I جريان لاندی تفاضلي معـادله صـدق کـوي.

$$\frac{LdI}{dt}+RI(t)=E_0\sin(\omega t)\rightarrow\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I(t)=\frac{E_0}{R}\sin(\omega t)$$

که چيرې $k=\frac{R}{L}$ د يو ثابت ولتيج په حالت کې په $q=\frac{E_0}{R}$ وضع کړو لروچې:

$$\frac{dI}{dt}+kI(t)=q\sin(\omega t)$$

له دې ځايه

$$\frac{dI}{dt}\left(e^{kt}I(t)\right)=qe^{kt}\sin(\omega t)$$

دی.

په دې توګه

$$e^{kt}I(t)=\int qe^{kt}\sin(\omega t)\,dt=q\left(\frac{\omega}{k^2+\omega^2}e^{kt}\cos(\omega t)+\frac{k}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)\right)+C$$

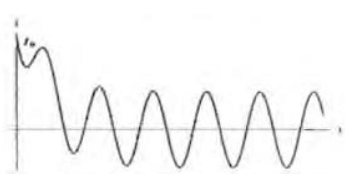
دی.داسې چې C يو اختياری ثابت دي.

$$I(t)=q\left(\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t)+\frac{k}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)\right)+Ce^{-kt}$$

که چيرې $I(0)=I_0$ وي نو په دې صورت کې لروچې:

$$-\frac{q\omega}{k^2+\omega^2}+C=I_0\Leftrightarrow C=I_0+\frac{q\omega}{k^2+\omega^2}$$

په دې ډول



شکل (7)

$$I(t) = q\left(\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{k}{k^2+\omega^2}\sin(\omega t)\right) + \left(I_0 + \frac{q\omega}{k^2+\omega^2}\right)e^{-kt}$$
$$= \frac{E_0}{L\left((\frac{R}{L})^2+\omega^2\right)}\left(-\omega\cos(\omega t) - \frac{R}{L}\sin(\omega t)\right) + e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \frac{E_0}{L}\frac{\omega}{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}\right)$$

دی.

ددویم حد حل یوه غیرالجبری برخه جوړوي.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \frac{E_0}{L}\frac{\omega}{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}\right) = 0.$$

لومړی برخه یو نوسانی برخه ده چې د پخوانی ولتیج په شان دعین فریکوینسی لرونکې ده دا چې د حل الجبری برخه د یوی طاقت نما تابع په شان تناقص کوي نو د لږې مودی وروسته ځخه جریان د سینوسایدال اساسی شکل لری.

(3.8) د جلاکیدلوو ړ متحولینو تفاضلي معادلې.

په (1.8) او (2.8) برخوکې مودلومړي ترتیب خطي تفاضلي معادلې و څیړلې .اود انتیګرال نیونې دعامل په واسطه مو دهغوي حلونه ترلاسه کړل. پدی بـــرخه کې غواړو لـــومړي ترتیب خطي تفاضلي معادلو حل د جلاکیدلوو ړ متحولینو په قاعده و څیړو .د

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}y^2$$

تفاضلي معادله یوه لومړي ترتیب تفاضلي معادله ده چې د $y(t)$ نامعلومې تابع مشتق دی.که چیرې .

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

سره وضع کړو ،پورتنۍ معادله لاندی شکل غوره کوي.

$$f(t,y) = \frac{t}{t^2+1}y^2$$

څرګنده ده چې $f(t,y)$ د t او y لپاره یوه غیرخطي تابع ده ،بناً په دي نوموړي تفاضلي معادله خطي تفاضلي معادله نه ده.په دی ډول تفاضلي معادلې د حل لپاره د انتیګرال نیونې عامل نشو تطبیقولای .د بلی خوا دا چې $f(t,y)$ د$\frac{t}{t^2+1}$ او y^2 د حاصل ضرب سره مساوی ده . لومړي افاده د t پوری مربوط او دویمه افاده یوازی د y پوری اړه لري.دې ډول تفاضلي معادلو ته د جلاکیدلوو ړ متحولینو تفاضلي معادلې وایې.

تعریف (*1.3.8*). د

$$\frac{dy}{dt}=g(t)h(t)$$

تفاضلي معادله داسې چې که $y=y(t)$ دجلاکیدلوو ړ متحولینو تفاضلي معاد لې وي. همدارنګه د

$$\frac{dy}{dt}=g(t)y$$

ډول لــومــړي ترتيب خطــي تفــاضلي معــادله د جلاکیدلوو ړ ده.په همــدی تــوګه کولای شو د $y'=g(y)h(y)$ تــفــاضــلي معــادلــې حــل کړو، کــه چیرې $h(y)=y$ دي دبــلی خــواد $\frac{dy}{dt}=p(t)y+q(t)$ په خطي تفاضلي معادله داسې چې $q(t)\equiv 0$ نــه وي اوهــم په مــتحولینو جلاکیدلوو ړ نــه وي.د جلاکیدلوو ړ مــتحولینودمیــتود لــه مخــې بــه وکــولای شو دجلاکیدلوو ړ متحولینو غیر خــطی تــفاضلي معــادلــه حــل کــړ و . فــرضــوو چې $y(t)$ د $y'=g(y)h(y)$ دجلاکیدلوو ړ تفاضلي معادلې حل دی. دمعادلې دواړه خواوې په $h(y)$ ویشوو داسې چې د t لپاره $h(y(t))=0$ صفروي.

بناً پر دي

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dt}=g(t)$$

دی.

دپورتني رابطی انتیګرال عبارت دی له

$$\int\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dt}dt=\int g(t)\,dt$$

د تعویضی قاعدی له مخې لرو چې

$$\int\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dt}dt=\int\frac{1}{h(y)}dt$$

په دې ډول

$$\int\frac{1}{h(y)}dy=\int\ g(t)\,dt$$

دی.

برعکس که یو مشتق منوونکې تابع پورتنی شرطونه صدق کړئ هغه د $y'=g(y)h(y)$ تفاضلي معادله هم صدق کوي ، قبلوو چې .

$$H(y)=\int\frac{1}{h(y)}dy\Leftrightarrow\frac{dH}{dy}=\frac{1}{h(y)}$$

او

$$G(t) = \int g(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{dG}{dy} = g(t).$$

بناً پردي

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t)\,dt \Leftrightarrow H(y) = G(t)$$

دی.

داسې چې‌د $y(t)$ د $H(y) = G(t)$ له رابطې څخه په ضمنی ډول لاسته راغلی نودهر t لپاره دا په انټروال کې لرو $H(y(t)) = G(t)$ د زنځیری قاعدي له مخې د هر $t \in J$ لپاره دارنګه ليکوچې:

$$\left(\frac{dH}{dy}|_{y=y(t)}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{dG}{dy} \Longrightarrow \frac{1}{h(y(t))}\frac{dy}{dt} = g(t) \;\Longrightarrow \frac{dy}{dt} = g(t)h(y(t))$$

بناً پردي $y(t)$ د ته $y' = g(y)h(y)$ تفاضلي په متحولينو جلاکيدلوو ړتفاضلي حل وايې په عمل کې که

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y)$$

د جلاکيدلوو ړ تفاضلي معادله وی ، کولای شود $\frac{dy}{dt}$ په کسرداسې عمليه اجرا کړوچې په واقعی ډول يې متحولين سره جلا شي او ليکو چې.

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(t)dt \Longrightarrow \int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t)\,dt$$

دلته کوم سحروجود نلری ، بلکې په حقه يوچې دپخوانيوڅيړونوڅخه ګټه واخلوچې بنسټ يې تعويضی طريقه ده .د غيرمعين انتيګرال د محاسبی څخه وروسته کولي شواختياری ثابت په دواړو خواوکې ورزيات کړو.

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t)\,dt$$

ضروری ده چې ثابت ښې لوری ته ورزيات کړو. نو په دی ډول د پورتنۍ افادی حل د y لپاره اختياری ثابت لري.داسې چـــې د $y' = g(y)h(y)$ تفاضلي معـــادلې عمـــومي حـــل معلوموی شو.د $y(t_0) = y0$ اوليه شرط له مخې د

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y), y(t_0) = y0$$

تفاضلي معادلې هغه حل چې داوليه شرايطو له مخې په لاس راځی ، په پام کې نيسو.

مثال (1.3.9). a) د

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{t^2+1}y^2$$

تفاضلي معادلې عمومي حل معلوم کړئ.

a) داولیه شرط له مخې دانتیګرال په پام کې نیولو سره د تفاضلي معادلې قسمي حل لاسته راوړئ.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{t^2+1}y^2\ y(0)\ =\ \frac{1}{2}$$

حل.

a) د معادلې دواړه خواوې په y^2 تقسیموو

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}=\frac{t}{t^2+1}$$

په دې ډول

$$\int\ 1/y^2\ \frac{dy}{dt}dt=\int\ \frac{t}{t^2+1}dt$$

دې .

دتعویضي قاعدې له مخې

$$\int\ 1/y^2\ \frac{dy}{dt}dt=\int\ 1/y^2\,dy=-\frac{1}{y}.$$

که چیرې په ښۍ خوا کې $u=t^2+1$ وضع کړونو $\frac{dy}{dt}=2t$ کیږي.

$$\int\frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2+1}\frac{dy}{dt}\ dt$$
$$=\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln(u)+C=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C$$

داسې چې C اختیاري ثابت وي.

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C$$

پورتنۍ رابطه د y لپاره حلوو

$$y(t)=\frac{1}{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C}$$

د تفاضلي معادلې حل موپه پورتنۍ ډول مطالعه کړ. برعکس که چیرې $y(t)$ د پورتنۍ افادې څخه ورکړل شوې وي ، تفاضلي معادله د $y(t)$ لپاره حلوو.(او تائید وویې) پــه دې تــوګه د تفاضلي معادلې عمومي حل عبارت دي له.

$$y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C}$$

b) د $y(0) = \frac{1}{2}$ لپاره C داسې لاسته راوړو.

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\ln(1) + C} = -\frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -2$$

په پایله کې

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}y^2, y(0) = \frac{1}{2}$$

تفاضلي معادلې لپاره د اولیه شرط له مخې یوازنئي حل دی.او عبارت دی له.

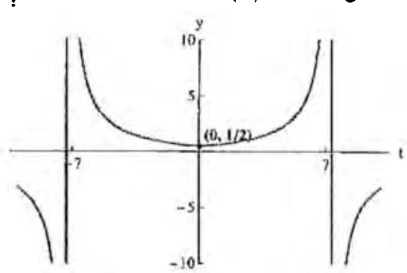
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2} = \frac{2}{4 - \ln(t^2+1)}$$

د پاملرنی وړده چې.

$$4 - \ln(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(t^2+1) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 1 = e^4 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{e^4 - 1}.$$

دی.

داسې چې.$\pm\sqrt{e^4-1}$ لپاره معین نه دی. (1) شکل د $y(t)$ گراف ښئې



(1) شکل

$$\lim_{t\to\sqrt{e^4-1}-} y(t) = -\infty \quad \text{او} \quad \lim_{t\to\sqrt{e^4-1}+} y(t) = +\infty$$

(ویې ازمایی) دا حل د($\sqrt{e^4-1}$، $-\sqrt{e^4-1}$) په خلاص انټروال کې متمادي دی.

$$(-\sqrt{e^4-1}, \sqrt{e^4-1}) \cong (-7.32108, 7.32108)$$

مثال (*2.3.8*).

a) د

$$\frac{dy}{dt} = y^2(t)$$

تفاضلي معادلې عمومی حل معلوم کړئ.

b) داولیه شرط سره مساله حل کړئ.

$$\frac{dy}{dt} = y^2(t), y(0) = 1$$

د 1 په تر ټولو لوی انټروال معلوم کړئ. داسې چې $0 \in J$ او $y(t)$ دهر $t \in J$ لپاره معین وي.

c) د $y(0) = -1$ داولیه شرط له مخې $\frac{dy}{dt} = y^2(t)$ خاص حل لاسته راوړئ.

حل.

a) تفاضلي معادله د متحولینو جلاکیدوور ده نوموړی معادله دارنگه حل کیږي.

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow 1/y^2 \frac{dy}{dt} = 1$$

په دې ډول

$$\int 1/y^2 \frac{dy}{dt} dt = \int 1\, dt \Rightarrow \int 1/y^2\, dy = t + C$$

دی.

داسې چې C اختیاري ثابت دی.

داسې چې

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2}\, dy = -y^{-1} = -\frac{1}{y},$$

دی.

نو $-\frac{1}{y} = t + C$ د رابطې په پام کې نیولو سره $y(t) = -\frac{1}{t+C}$ ته د $y'(t) = y^2(t)$ د تفاضلي معادلې عمومي حل وایي.

b) د $y(0) = -1$ داولیه شرط له مخې $y'(t) = y^2(t)$ قسمي حل دا رنگه لاسته راوړو.

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{t+C}|_{t=0} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{C} = 1 \Leftrightarrow C = 1\ .$$

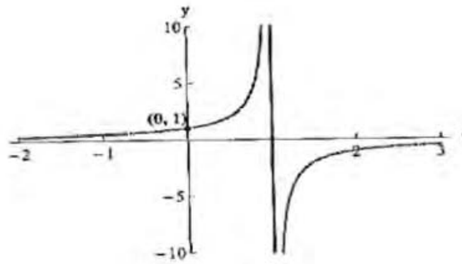
$$y(t) = -\frac{1}{t+1}$$

(2) شکل د $y(t)$ گراف ښیي . داسې چې 0 تر ټولو لوی انټروال کې شامل دی نو $y(t)$ د هر t لپاره د $(-\infty, 1]$ په انټروال کې تعریف شوې د سره له دې چې $y(t)$ د t لپاره تعریف شوې مگر د $y(t)$ قیمت د t لپاره صدق نه کوی که د t وخت په پام کې نیسونو د$y(t)$ اولیه قیمت ورکړل شوی چې د$t = 0$ څخه عبارت دی.او $y(t)$ په تدریجې توگه زیاتیږي . لکه د t په څیر چې د (1) خواته تزاید کوی.

لروچې.

$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{t+1} = +\infty,$$

د مثال په ډول کله چې t د کیڼې خوا څخه 1 ته تقرب وکړئ، $y(t)$ په اختیاري توګه کمیږي .



شکل(2)

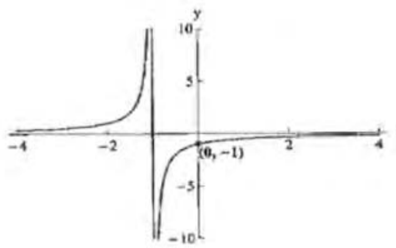
C) بناً پردې داولیه شرط په وضع کولو قسمي حل عبارت دی له

$$y(0) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{t+C}|_{t=0} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{C} = -1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$y'(t) = y^2(t)\,, y(0) = -1$$

$$y(t) = -\frac{1}{t+1}$$

0 تر ټولو لوی انټروال کې شامل دی نو $y(t)$ د هر t لپاره په $(+1, -\infty)$ انټروال کې تعریف شوې (3) شکل د حل ګراف رابښي .په پایله کې



شکل (3)

$$\lim_{t\to 1+} y(t) = -\infty$$

دی.

مثال (3.3.8) . د

$$\frac{dy}{dt} = y(t) - \frac{1}{10}\, y^2(t).$$

تفاضلي معادلې په پام کې ونیسئ .

a) تفاضلي معادلې خصوصی یا ځانګړی حل معلوم کړئ.

b) تفاضلي معادلې عمومی حل معلوم کړئ.

c) د $y(0) = y_0$ داولیه شرط له مخې $\frac{dy}{dt} = y(t) - \frac{1}{10} y^2(t)$ قسمي حل لاسته راوړئ. داسې چې دهرحل لپاره 10 -1، $y0 =$ او 20 وي ،معلوم کړي چې 0 تر ټولو لـوی انټروال کـې شامل او حل یې په نوموړوی انتروال کې معین وي.

حل.

a) که چیرې یوازی د y ثابت په حالت کې دتفاضلي معادلې حل وی نو په دي حالت کې 0 او 10 له خاص حل څخه عبارت دی.

$$0 = \frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{10} y^2 \Leftrightarrow 10y(10 - y) = 0$$

b) داسې چې ورکړل شوي تفاضلي معـادلـه جلاکیدووړمعـادله ده نولـه همـدی طریقې څخه په ګټه اخستلوتفاضلي معادله په دی ډول لیکو.

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{10} y^2$$

په دې توګه

$$\frac{1}{y - \frac{1}{10} y^2}\frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{y - \frac{1}{10} y^2}\frac{dy}{dt}dt = \int 1\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{y - \frac{1}{10} y^2}dy = t + C$$

د بنې خوا ترانتیګرال لاندی تابع نسبتي تابع دي چې په قسمي کسرداسې تجزیه کیږي.

$$\frac{1}{y - \frac{1}{10}y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y - 10}$$

(ویې ازمایې) په دې ډول

$$\int \frac{1}{y - \frac{1}{10} y^2} dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 10}\right) dy = \ln(|y|) - \ln(|y - 10|)$$
$$= \ln\left(\left|\frac{y}{y-10}\right|\right) = t + C$$

دی.

د y دلاسته راوړلو له پاره د طاقت قانون څخه ګټه اخلولروچې:

$$\left(\left|\frac{y}{y - 10}\right|\right) = e^{t+c} = e^t e^c$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{y - 10} = \pm e^t e^c$$

داسې چې C اختیاري ثابت وي، د که مونږ $\pm e^{t}$ لکه C فرض کړونو د y او t ترمنځ رابطه په لاندې توګه لاسته راوړو.د

$$\frac{y}{y-10}=Ce^{t}$$

د y حل عبارت دی له

$$y=yCe^{t}-10Ce^{t}\Leftrightarrow(1-Ce^{t})y=-10Ce^{t}$$

$$\Rightarrow y=\frac{10Ce^{t}}{Ce^{t}-1}$$

په دې توګه د تفاضلي معادلې عمومي حل په لاندې توګه ترلاسته کيږي.

$$y=\frac{10Ce^{t}}{Ce^{t}-1}$$

داسې چې C اختیاري ثابت دی.

C) یوازې په هغه حالت کې چې $y(0)=1$ وي لرو چې :

$$\frac{10Ce^{t}}{Ce^{t}-1}\Big|_{t=0}=1\Leftrightarrow-\frac{10C}{C-1}=1\Leftrightarrow C=-\frac{1}{9}$$

په دې توګه داولیه شرط له مخې د خصوصي حل مسله عبارت ده له.

$$\frac{dy}{dt}=y(t)-\frac{1}{10}\,y^{2}(t),y(0)=1$$

$$y(t)=\frac{10\left(\frac{-1}{9}\right)e^{t}}{\left(\frac{-1}{9}\right)e^{t}-1}=\frac{10\,e^{t}}{e^{t}+9}$$

په دې ډول موخاص حل پیدا کړ چې.

$$y(t)=\frac{10\,e^{t}}{e^{t}\left(1+\frac{9}{e^{t}}\right)}=\frac{10}{1+9e^{-t}}$$

داسې چې دهر $t\in\mathbb{R}$ لپاره $0<e^{-t}$ دی نو $1<9e^{-t}+1$ دی. بناً پردې $y(t)$ دهر $t\in\mathbb{R}$ لپاره معینه ده.

داچې :

$$0<\frac{10}{1+9e^{-t}}<\frac{10}{1}=10$$

دی.بناً پردې د هر $t\in\mathbb{R}$ لپاره خاص قیمتونه د 0 او 10 ترمنځ واقع دی.او لروچې.

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{10}{1+9e^{-t}}=0$$

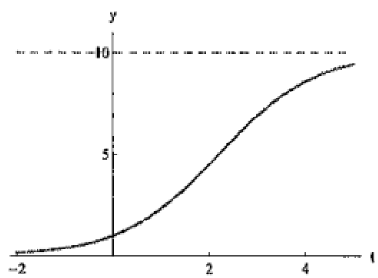
داسې چې $\lim_{t\to-\infty}e^{-t}=0$ دي نو د t تقرب بې نهایت ته $y(t)$ چې خاص حل دی ، 10 ته تقرب کوئ دا یو حقیقت دی. چې t به ډیر لوی نه وي کله چې $y(t)$ ته ډیر نږدی شي په دې توګه

د t په پاتیدوسره e^{-t} په ډېر چټکی سره 0 ته تقرب کوی.که t ،$-\infty$ خواته تقرب وکړي نو د $y(t)$ لیمت عبارت دی له.

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{10e^t}{e^t + 9} = 0,$$

ځکه چې $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ دی.

(4) شکل د حل ګراف ښيي.



(4) شکل

اوس دلاندی اولیه شرط پــه پــام کې نیولوسره داولیه شرط مسله پــه پــام کــې نــیسو

$$y'(t) = y(t) - \frac{1}{10} y^2(t), y(0) = -10$$

په دې توګه د

$$y(t) = \frac{10Ce^t}{Ce^t - 1},$$

عمومي حل له مخې د$y(0) = -10$ اولیه شرط په پام کې نیولوسره دC قیمت داسې لاس ته راوړو.

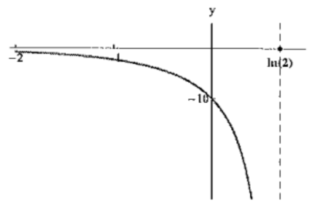
$$-10 \frac{10Ce^t}{Ce^t - 1}|_{t=0} = \frac{10C}{C-1} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

بناً پردې

$$y(t) = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right) e^t}{\frac{1}{2}e^t - 1} = \frac{10\, e^t}{e^t - 2}$$

هغه حل دی چې د$y(0) = -10$ اولیه شرط پوری اړه لری د$y(t)$ قیمت یوازی د$e^t - 2 = 0$ لپاره یعنی د $t \neq \ln(2)$ لپاره معین دی $(-\infty, \ln(2))$ انټروال صفر پــه بر کې لري او تــر ټولو هغه لوی انټروال دی په کوم کې چې حل یې تعریف شوی دی.

(5) شکل د $(-2, \ln 2)$ په انټروال کې د حل ګراف ښيي .



شکل (5)

په شکل کې ښــودل کــيږي چــې $\lim_{t \to \ln(2)-} y(t) = -\infty$ دی کلــه چــې $y(t) \cong \ln(2)$ وي .

بناً پر دې

$$y(t) = \frac{10\, e^{t}}{e^{t} - 2} \cong \frac{10\, e^{\ln(2)}}{e^{t} - 2} \cong \frac{20}{e^{t} - 2}$$

که چېرې $t < \ln(2)$ وي نو $(e^{t} - 2) < 0$ او $\lim_{t \to \ln(2)} e^{t} - 2 = 0$ دی.

په دې توګه

$$\lim_{t \to \ln(2)-} y(t) = \lim_{t \to \ln(2)-} \frac{20}{e^{t} - 2} = -\infty$$

دی.

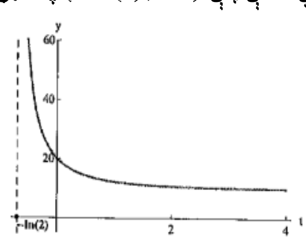
په پای کې د $y(0) = 20$ اولیه شرط په پام کې نیولو سره

$$y(t)|_{t=0} = \frac{10Ce^{t}}{Ce^{t} - 1}|_{t=0} = \frac{10C}{C - 1} = 20$$

دا چې $C = 2$ دی په دې توګه

$$y(t) = \frac{20Ce^{t}}{2e^{t} - 1}$$

دا حــل د t لپاره تعریف شــوي دی کــه او یــوازې که پــه هــغه حــالت کې چې $2e^{t} - 1 \neq 0$ یــا $t \neq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ وي داسې چې $(-\ln(2), +\infty)$ په انټروال کې صفر شتون لري نو دا



شکل (6)

تر ټولو لوی هغه انټروال دی چې حــل یکې تعــریــف شــوي دی.(6) شکل د $(-\ln(2), 4]$په انټروال کې د حل ګراف ښيي . تاسې کولای شی ځواب کړی چې$\lim_{t\to \ln(2)-} y(t) = +\infty$ دی.چې په شکل کې ښودل شوی دی.

مثال (4.3.8) (a.) د

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{9}\ y^2(t)$$

تفاضلي معادلې خاص حل معلوم کړئ.

b) د

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{9}\ y^2(t)$$

تفاضلي معادلې عمومي حل معلوم کړئ.

c) د $y(0) = 0$ داولیه شرط له مخې $y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{9}\ y^2(t), y(0) = 0$$

قسمي حل په لاس راوړئ. ا یاکیدای شی چې $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ دخصوصی حل پوری اړین شی ؟

حل.

a) د y ثابت تفاضلي معادلې حل دی که او یوازی که $1 - \frac{1}{9}\ y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ یا $y = -3$ وي. بنأ پردې 3 او -3 تفاضلي معادلې خصوصی حل دی.

b) داسې چې تفاضلي معادله په متحولینوله د جلاکیدلووړ ده نو جلاکیدلووړ متحولینوله طریقې څخه په استفاده لیکلای شوچې:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{9}\ y^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{9}\ y^2}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 - \frac{1}{9}\ y^2}\frac{dy}{dt}dt = \int\ 1\, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 - \frac{1}{9}\ y^2}\ dy\ = t + C$$

داسې چې C یو اختیاری ثابت دی . لروچې

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{9}\ y^2} = \frac{3}{2(y-3)} + \frac{3}{2(y+3)}$$

(ویی ازما یې) په دې ډول

$$\int \frac{1}{1-\frac{1}{9}\ y^2}\,dy = -\frac{3}{2}\ln(|y-3|)+\frac{3}{2}\ln(|y+3|)=\frac{3}{2}\ln\left(\left|\frac{y+3}{y-3}\right|\right).$$

دی.

بنأ پردی

$$\frac{3}{2}\ln\left(\left|\frac{y+3}{y-3}\right|\right)=t+C$$

دی.

نو

$$\ln\left(\left|\frac{y+3}{y-3}\right|\right)=\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}C$$

دی.

که $C\left(\frac{2}{3}\right)$ په C عوض کړو، لرو چې:

$$\ln\left(\left|\frac{y+3}{y-3}\right|\right)=\frac{2}{3}t+C.$$

بنأ پردی

$$\left|\frac{y+3}{y-3}\right|=e^{C}e^{\frac{2t}{3}}$$

دی.

په دې ډول

$$\frac{y+3}{y-3}=\pm e^{C}e^{\frac{2t}{3}}$$

دی.

که $\pm e^{C}$ په C عوض کړولرو چې:

$$\frac{y+3}{y-3}=\ Ce^{\frac{2t}{3}}$$

پورتنۍ رابطه د y لپاره حلوو:

$$y+3=Ce^{\frac{2t}{3}}y-3Ce^{\frac{2t}{3}}\Rightarrow\left(-Ce^{\frac{2t}{3}}+1\right)y=-3\left(\ Ce^{\frac{2t}{3}}+1\right)\Rightarrow y(t)\frac{-3\left(\ Ce^{\frac{2t}{3}}+1\right)}{-Ce^{\frac{2t}{3}}+1}$$

په دې توګه د ورکړل شوي تفاضلي معادلې عمومی حل عبارت دی له

$$y(t)\frac{3\left(\ Ce^{\frac{2t}{3}}+1\right)}{Ce^{\frac{2t}{3}}-1}$$

C) بنأ پر دی $y(0) = 0$ اولیه شرط په پام کې نیولوسره قسمي حل عبارت دی له

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\left(Ce^{\frac{2t}{3}}+1\right)}{Ce^{\frac{2t}{3}}-1}\Big|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(C+1)}{C-1} = 0 \Leftrightarrow C = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{9}\ y^2(t), y(0) = 0$$

$$y(t)\frac{3\left(-e^{\frac{2t}{3}}+1\right)}{-e^{\frac{2t}{3}}-1} = \frac{3\left(e^{\frac{2t}{3}}-1\right)}{e^{\frac{2t}{3}}+1}$$

(7) شکل د f گراف ښیې.

لروچې.

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{3\left(e^{\frac{2t}{3}}-1\right)}{e^{\frac{2t}{3}}+1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{3\left(1-e^{\frac{-2t}{3}}\right)}{1+e^{-\frac{2t}{3}}} = 3$$

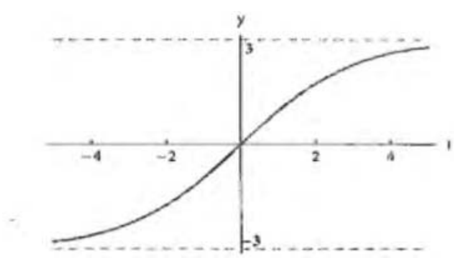
داسې چې $\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{2t}{3}} = 0$ او

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{3\left(e^{\frac{2t}{3}}-1\right)}{e^{-\frac{2t}{3}}+1} = -3$$

او همدارنگه $\lim_{t\to-\infty} e^{\frac{2t}{3}} = 0$ دی.

د $t \to +\infty$ په حالت کې $y(t)$ خصوصی حل یعنی 3 ته تقرب کوی. د بلی خواد

$t \to -\infty$ په حالت



(7) شکل

$y(t)$ خصوصی حل یعنی -3 ته تقرب کوی.

$$tanh(u) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$$

په دې ډول

$$y(t) = 3\left(\frac{e^{\frac{2t}{3}} - 1}{e^{\frac{2t}{3}} + 1} \right) = \ 3tanh\left(\frac{t}{3}\right)$$

دی.

په دې مثال کې دجلاکیدلوونکو متحولینو د طریقې دلاربښونې د له مخې ،د یوې رابطې په توګه چې تراوسه په واضیح ډول د نا معلومې تابع حل نه دی ترلاسه شوی، لاس ته راوړو .

مثال (5.3.8) د

$$\frac{dy}{dt} = - \ \frac{y(t)}{y(t) + 2}$$

دجلاکیدلوونکو متحولینو تفاضلي معادله په پام کې نیسو.

a) دجلاکیدلوونکو متحولینو طریقې په استعمالو په ضمني ډول تفاضلي معادلې د حل روابط مشخص کړئ.

b) د خپلې محاسبې ګراف ترتیب او دګراف څخه په ګټه اخیستلو د y او t ترمنځ رابطه د $y(0) = 1$ اولیه شرط په پام کې نیولو سره مشخصه کړئ.

حل.

a) دجلاکیدلوونکو متحولینو طریقې په تطبیقولو لیکلای شو چې.

$$\frac{y+2}{y}\frac{dy}{dt} = -1 \Rightarrow \int \frac{y+2}{y}\frac{dy}{dt}dt \ = -\int \ 1\,dt$$
$$\Rightarrow \int \left(1 + \frac{2}{y}\right)dy \ = -t + C,$$

داسې چې C یو اختیاري ثابت وي.

په دې توګه

$$y + 2\ln(|y|) = \ -t + C \Rightarrow y + ln(y^2) = -t + C$$
$$\Rightarrow e^{y+ln(y^2)} = e^{-t+c} \Rightarrow e^y\, y^2 = Ce^{-t}$$

بنأ پردی د هر C لپاره د y او t تر منځ رابطه عبارت ده له. $e^y\, y^2 = Ce^{-t}$ پورتنۍ رابط په صریح ډول

$$\frac{dy}{dt} = - \ \frac{y(t)}{y(t) + 2}$$

تفاضلي معادلې حل مشخص کوي .

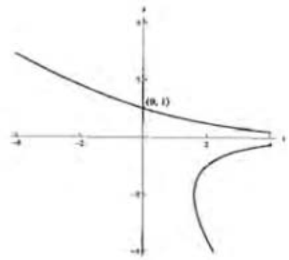
b) $y(0) = 1$ دی که او یوازې که.

$$e^y\, y^2 = Ce^{-t}\,|_{t=0,y=1} \Leftrightarrow e = C.$$

په دې توګه د $e^y y^2 = Ce^{-t}$ رابطه د اولیه شرط مساله تعینوي.د لاندې رابطې لپاره په ضمني ډول مشخص کوي.

$$\frac{dy}{dt} = -\ \frac{y(t)}{y(t)+2}, y(0) = 1$$

(8) شکل دپورتنی رابطې ګراف راښیي.



(8) شکل

په شکل کې ښودل شوی چې د$y(t)$ یوحل وجود لري داسې چې د$1 = y(0)$ شرط له مخې رابطه صریحاً $e^y y^2 = Ce^{-t}$ رابطې په واسطه تعین کیږي . دا ډول چې $y(0) = 1$ وي په ضمني ډول مشخص شوی دی . په (8) شکل کې د ګراف هغه برخه ښودل شوې چې د t دمحور د پاسه واقع اودحل ګراف راښيي). سره ددې چې مونږ ونه کړای شو $y(t)$ تقریبی حل د t مطلوبو قیمتونولپاره محاسبه کړو .

په راتلونکې برخه کې به دغیرخطي جلاکیدلوونکو متحولینو د تفاضلي معادلې اودهغوی ځینی په زړه پوری تطبیقات وڅیړو.

(4.8) په دجلاکیدلوونکو متحولینو د تفاضلي معادلو تطبیقات.

($1.4.8$) د نیوټن خیزوهنې . (The Newton's Damping)

په (2.8) برخه کې مو دچسپناک نوساني اجسامو د سقوط په هکله معلومات ترلاسه کړل ، چې تفاضلي معادله یې عبارت دی له.

$$mv' = mg - \gamma v(t)$$

دلته m ته دسقوطي جسم کتله v سرعت او g ته د ځمکې جاذبوی تعجیل دیγ یوثابت مثبت عدد دی.(واحد یې په متریک سیستم کې ټاکل کیږي) د$\gamma v(t)$ مقدار ته د هوا مقاومت او معادلې ته یې لومړی ترتیب خطي تفاضلي معادله وایې .تجربو ښودلې، چې داد سقوطی اجسامو د ټیټ

کثافت پوری اړه لري. د مثال په توګه د واوری ټوټې ، بڼکه یا داسې نه ښکاری چې د جسم جوړښت متراکم وي لکه د باران قطری یا هغه اجسام چې په هوا کې لامبووهي.

که چیرې مثبت جهت ښکته خواته وي ، نود چسبناکو نوساني اجسامو په شان دعین مفهوم لري هغه قوه چې د t په لحظه کې په جسم باندی عمل کوي د $mg - \delta v^2(t)$ سره مساوي ده.د لته δ یومثبت عددی.د حرکت په برخه کې د نیوټن ددویم قانون له مخې د خارجی قوې (*Net force*)مقدار د کتلې او تعجیل د حاصل ضرب سره مساوی دی.په دې توګه

$$mg - \delta v^2(t) = ma(t) = m\frac{dv}{dt}$$

دی او د $v\ (t)$ سرعت لاندې تفاضلي معادله صدق کوی.

$$\frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{\delta}{m}\right)v^2(t)$$

که چیرې $k = \frac{\delta}{m}$ وضع کړواود k مثبت عدد له g څخه ډیرکوچنی وي ،کولای شو معادله په دې ډول ولیکو

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2(t)$$

فرضوو چې جسم د $t = 0$ په لحظه کې ، $v(0) = 0$ اولیه شرط لرونکې دی.دا معادله د لومړی ترتیب یوه غیرخطي تفاضلي معادله ده، کولای شودجلاکیدلوو ړ متحولینود تفاضلي معادلوقاعده پری تطبیق کړو.په پایله کې معادله د

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \ \Rightarrow \frac{1}{g - kv^2}\frac{dv}{dt} = 1$$

په شکل ، اولیه تابع اوانتیګرال یې داسې ولیکو.

$$\int \frac{1}{g - kv^2}\frac{dv}{dt}dt = \int 1dt \Rightarrow \int \frac{1}{g - kv^2}dv = t + C,$$

داسې چې C ثابت دی او د $v(0) = 0$ اولیه شرط په پام کې نیولوسره تعینېږي.

داسې چې :

$$g - kv^2 = -k\left(v^2 - \frac{g}{k}\right) = -k\left(v - \sqrt{\frac{g}{k}}\right)\left(v + \sqrt{\frac{g}{k}}\right),$$

دی.

په انتیګرال نیولوکې د قسمي کسرونود تجزیې له مخې لیکو چې.

$$\frac{1}{g - kv^2} \equiv \frac{A}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} + \frac{B}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}},$$

داسې چې A او B دواړه ثوابت (د k او g پوری تړلی پارامترونه دي)(کولی شو ویې ازمایو)دي

$$\frac{1}{g-kv^2} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(\frac{1}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(\frac{1}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}\right).$$

په دې ډول

$$\int \frac{1}{g-kv^2}dv = -\frac{1}{2\sqrt{gk}}\int \frac{1}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}dv + \frac{1}{2\sqrt{gk}}\int \frac{1}{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}dv$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left(\left|v-\sqrt{\frac{g}{k}}\right|\right)+\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left(\left|v+\sqrt{\frac{g}{k}}\right|\right) = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left(\left|\frac{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right|\right)$$

دی.

بنأ پردې

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\left(\left|\frac{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right|\right) = t + C \Longrightarrow \ln\left(\left|\frac{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right|\right) = \left(2\sqrt{gk}\right)t + \left(2\sqrt{gk}\right) + C.$$

دی.

که C $\left(2\sqrt{gk}\right)$ په C وضع کړونو دطاقت نما دخواصو له مخې لیکو.

$$\left|\frac{v+\sqrt{\frac{g}{k}}}{v-\sqrt{\frac{g}{k}}}\right| = e^c\, e^{2\sqrt{gk}t} \;.$$

په دې ډول

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v} = \pm e^c\, e^{2\sqrt{gk}t}$$

دی.

که $\pm e^c$ په C وضع کړو لروچې:

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}= C\, e^{2\sqrt{gk}t}$$

د $v(0) = 0$ اولیه شرط له مخې لرو چې:

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\sqrt{\frac{g}{k}}}= C \Leftrightarrow C = 1$$

په دې توګه

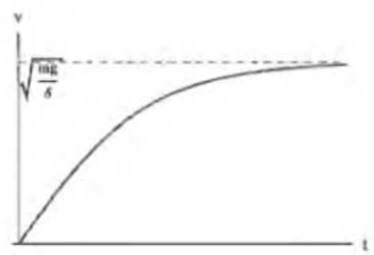
$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v}= e^{2\sqrt{gk}t}$$

دي.

د v لپاره په لاندې حل ترلاسه کړو.

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{1-e^{2\sqrt{gk}t}}{1+e^{2\sqrt{gk}t}}\right) = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{2\sqrt{gk}t}\ -1}{e^{2\sqrt{gk}t}\ +1}\right) = \sqrt{\frac{g}{k}}tagh\left(\sqrt{gk}t\right)$$

(ویی ازمایې). ځکه



شکل(1)

$$0 < \frac{1-e^{2\sqrt{gk}t}}{1+e^{2\sqrt{gk}t}} < 1$$

دی .

که $t > 0$ وي لرو چې:

$$0 < v(t) < \sqrt{\frac{g}{k}}$$

د (1) شکل د $[0, +\infty)$ په فرعي انټروال کې د v ګراف ښيي.

مثال(1.4.8). د پاملرنی وړ ده چې:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{1-e^{-2\sqrt{gk}t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}t}}\right) = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{\delta}{m}}} = \sqrt{\frac{mg}{\delta}}$$

دی .

د $\sqrt{\frac{mg}{\delta}}$ فورمول د وروستني سرعت دپيداکو لپاره پکاروړل کيږي.فرضووچې $g=9.81m/\sec^2$ ښکته تلوونکی پانزولي هوااودهغـی مربوطه تجهيزاتـو کتله چـې $110kg$ او دنيــوټن دنوساناتوثابت ضريب يې $\delta=0.1$ وي دښکته تلونکو پانزولي هوا وروستنی سرعت عبارت دی له.

$$\sqrt{\frac{mg}{\delta}} = \sqrt{\frac{110\times 9.8}{0.18}} \cong 77.4$$

(2.4.8) لوجستيکی معادله (*The logistic equation*)

که فرض کړوچې $b > 0$ ، $c > 0$ او b له c څخه ډير کوچنی وی نو

$$\frac{dy}{dt} = cy - by^2(t)$$

په ډول معادله لوجستيکی معادله رابنيي .نوموړی معادله د $y' = cy$ معادلې څخه د $-by^2$ په اندازه فرق لري.قبلو چې نظر t ته د y تغير د $y\,(t)$ سره متناسب دی. که b د c څخه ډير کوچنی هم وي د $b^2 - y^2$ حد داهميت وړ دی کله چې y لوی وی.نوموړی حد په مستقيم ډول د y د رشد (تکامل) مانع ګرځي (هغه معادله چې دنفوسو دزياتيدو شمير ارايه کوي د نفوسو د شمير مشخص کولوفکتور د نفوسو د زياتيدو مانع دي). که وغواړو ددی ډول تفاضلي معادلو خصوصی حل معلوم کړو،د y ثابت ته چې د $y' = cy - by^2(t)$ تفاضلې معادلې حل دی که او يوازی که .

$$0 = y' = cy - by^2 = y(c - by)$$

وي، له دی ځايه 0 او $\frac{c}{b}$ ته د تفاضلي معادلې يو نواخت ډول حلونه دي .د $y0 = y(0)$ اوليه شرط په پام کې نيولوسره تفاضلې معادلې حل لاسته راوړو.داسې چې $0 < y0 < \frac{c}{b}$ وي.داسې چې نوموړې تفاضلې معادله په متحولينودجلاکيدلووړده نو دجلاکيدلوو متحولينود قاعدي له مخې :

$$\frac{dy}{dt} = cy - by^2 \Rightarrow \frac{1}{cy - by^2}\frac{dy}{dt} = 1$$

داسې چې

$$\int \frac{1}{cy-by^2}\frac{dy}{dt}dt = \int 1dt \Rightarrow \int \frac{1}{cy-by^2}dy = t + C$$

دی.

داسې چې C ثابت دی. دېنځ لوری د انتیګرال د محاسبې لپاره د قسمي کسرونود تجزیې څخه ګټه اخلو داسې چې :

$$\frac{1}{cy-by^2} = \frac{1}{cy} - \frac{1}{c\left(y-\frac{c}{b}\right)}$$

وي.

په دې ډول

$$\int \frac{1}{cy-by^2}\,dy = \frac{1}{c}\ln(|y|) - \frac{1}{c}\ln\left(\left|y-\frac{c}{b}\right|\right) = \frac{1}{c}\ln\left(\left|\frac{y}{y-\frac{c}{b}}\right|\right)$$

دی.

بناً پردی

$$\frac{1}{c}\ln\left(\left|\frac{y}{y-\frac{c}{b}}\right|\right) = t + C,$$

دی.

داسې چې

$$\ln\left(\left|\frac{y}{y-\frac{c}{b}}\right|\right) = ct + cC$$

دی.

که cC په C تعویض کړولرو چې .

$$\ln\left(\left|\frac{y}{y-\frac{c}{b}}\right|\right) = ct + C$$

د طاقت د قانون له مخې لیکو چې .

$$\left|\frac{y}{y-\frac{c}{b}}\right| = e^c e^{ct} \Rightarrow \frac{y}{y-\frac{c}{b}} = Ce^{ct}$$

په دې توکه که $\pm e^{ct}$ په C وضع کړود $y0 = y(0)$ اولیه شرط له مخې لیکلای شوچې .

$$\frac{y_0}{y_0 - \frac{c}{b}} = C$$

په دې ډول د y لپاره حل عبارت دی له.

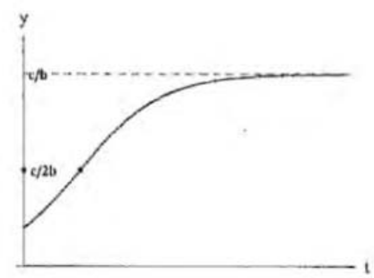
$$\frac{y}{y - \frac{c}{b}} = \frac{y_0}{y_0 - \frac{c}{b}} e^{ct}$$

دی.

کولای شو د y لپاره حل پیدا او دارنګه نتیجه ترلاسه کړو.

$$y(t) = \frac{c}{b + e^{-ct}\left(\frac{c - b\,y_0}{y_0}\right)}$$

(وبيي ازمايې) (2) شکل ددې ډول خاص حل ګراف رابښيي.



(2) شکل

لرو چې $0 < y_0 < c/b$

$$\frac{c - b\,y_0}{y_0} > 0$$

داچې هر t لپاره $0 < y(t) < c/b$ دی نو د لاسته راوړو .

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{c}{e^{-ct}\left(\frac{c - b\,y_0}{y_0}\right) + b} = \frac{c}{b}$$

که چیرې $y(t)$ د t په وخت کې د وګړوشمیر(د وګړوشمیرپه ملی پارک کې ښې) دابتدائې نفوس y_0 څخه پــرتــه د نفوســو زیاتوالی $\frac{c}{b}$ خصـوصــی حل تــه تقــرب کــوي .کله چــې $0 < y_0 < c/b$ وي.لروچې

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(cy(t) - by^2(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}(cy - by^2)|_{y=y(t)}\right)\frac{dy}{dt}$$
$$= \left(c - 2by(t)\right)\left(cy(t) - by^2(t)\right),$$

سره له دی لروچې .

$$cy(t) - by^2(t) = y(t)\big(c - 2by(t)\big) = by\,(t)\left(\frac{c}{b} - y(t)\right) > 0$$

داسې چې

$$0 < y(t) < \frac{c}{b}$$

دی.

نوبنأپردې د $y''(t) > 0$ که $y(t) > \frac{c}{2b}$ او $y''(t) < 0$ که $y(t) < \frac{c}{2b}$ دي.

د مقعریت لپاره ددویم مشتق ازمایښت مونږ ته دا رابښیي چې د انعطاف نقطه د حل پر ګراف واقع ده.د انعطاف دعمودی نقطې مختصه $\frac{c}{2b}$ ده.دا قیمت د $y(t)$ نهایي خاص حل دی کوم چې $y(t)$ د$t \to +\infty$ لپاره هغې ته تقرب کوي .که چیرې t_0 مربوطه وخت وي ،د نفوسو د زیاتوالی نسبت د($0, t_0$) په انټروال کې تزاید کوي اود($t_0, +\infty$) په انټروال کې کمیږي.نو په دی صورت کې د نفوسو زیاتوالی$t = t_0$ اعظمیی قیمت ته رسیږي . بنأ پردې د حل پر ګراف د انعطاف نقطه خاص اهمیت لري .

مثال(*2.4.8*). په *1993* کال کې د یو مملکت د یوې ساحی د وګړوشمیر *3* میلونه وو،که چیرې د کلونوشمیر په t سره وښودل شي ، نو په *1993* کال کې $t = 0$ دی.که $y'(t)$ د t په موده کې د وګړوشمیر ښیي اوفرض کړو چې لاندی نمونه (موډل)صحیح دي.

$$y'(t) = 3 \times 10^{-2} y(t) - 3 \times 10^{-9} y^2(t)$$

د تیری برخې د یادونو او بحث له مخې په دې مثال کې $c = 3 \times 10^{-2}$ او $b = 3 \times 10^{-9}$ دی بنأ پردی د نفوسو د زیاتیدو د خاص حالت نمونه(موډل)

$$\frac{c}{b} = \frac{3 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-9}} = 10^7$$

په تقریبی ډول لس 10 میلونه دی.که دنفوسو د زیاتیدوثابت نسبت3×10^{-2} وي نو په دی صورت کې

$$y' = 3 \times 10^{-2}\, y$$

خطي موډل لرو.کولی شوله کومی ستونزې د نفوسو دتکامل په هکله وړاندوینه وکړو،کله چې $y\ (0) = 3 \times 10^{6}$ وي . د تفاضلي معادلې حل عبارت دی له.

$$y\ (t) = \frac{c}{e^{-ct}\left(\dfrac{c - b\,y_0}{y_0}\right) + b}$$

$$= \frac{3 \times 10^{-2}}{\exp(3 \times 10^{-2} t)\left(\dfrac{3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-9} 3 \times 10^{6}}{3 \times 10^{6}}\right) + 3 \times 10^{-9}}$$

$$= \frac{3 \times 10^{-2}}{\exp(3 \times 10^{-2}t)(7 \times 10^{-9}) + 3 \times 10^{-9}}$$
$$= \frac{3 \times 10^{7}}{7\exp(-3 \times 10^{-2}t) + 3}$$

د t_p پــه کال کې د نفــوسو تکامل د اوج مــرحلې تــه رسیږي .داسې چــې = $y\left(t_p\right) = \frac{c}{2b}$ $\frac{10^7}{2}$نو لروچې$t_p \cong 28.24$ دا یو حقیقت دی.

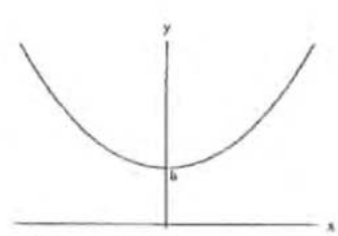
$$\frac{3 \times 10^{7}}{7\exp(-3 \times 10^{-2}t) + 3} = \frac{10^7}{2} \Leftrightarrow 6 = 7\exp(-3 \times 10^{-2}t) + 3$$
$$\Leftrightarrow \exp(-3 \times 10^{-2}t) = \frac{3}{7}$$
$$\Leftrightarrow -3 \times 10^{-2}t = \ln\left(\frac{3}{7}\right)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{7}\right)}{3 \times 10^{-2}} \cong 28.24.$$

(3.4.8) ځوړند شوي کیبل(*The hanging Cable*).

د (3) شکل مطابق په ازاد ډول یو ځوړند مزی په پام کې نیسو ،چې د کتلې کثافت یې m(متر/ کیلوګرام) او وزن یې mg(متر/ نیوټن) دی.په دې ځای کې g د جاذبې تعجیل (g=9.81 m/sec) دی فرضوو چې د کیبل کشش ترټولوټیټه نقطهT_0 وي ، که چیرې $f(x)$د کیبل ارتفاع نظر x محورته راوښیې په دې صورت کې

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{mg}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}$$

دی.داسې چې مزي نظر عمودي محورته متناظر دی نو f یوجفته تابع ده ،اود مزي میل د$x = 0$ په نقطه کې $f'(x) = 0$ دی .



(3) شکل

که چیرې$\omega(x) = f'(x)$ وي نو $\omega(x)$ د مزي میل د$(x, f(x))$ په نقطه کې دی.نولرو چې:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{mg}{T_0}\sqrt{1+(\omega)^2(x)}$$

او$\omega(0) = f'(0) = 0$ پورتنۍ رابطه غیر خطي دمتحولینو جلاکیدلوور تفاضلې معادله ده لرو چې.

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega)^2(x)}}\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{mg}{T_0}$$

داسې چې

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+(\omega)^2(x)}}\frac{d\omega(x)}{dx}dx = \int \frac{mg}{T_0}dx \Longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+(\omega)^2}}\,d\omega = \frac{mg}{T_0} + C$$

دی.

نو په دې توګه

$$arcsinh(\omega) = \frac{mg}{T_0}x + C + \Leftrightarrow \omega(x) = \ sinh\left(\frac{mg}{T_0}x + C\right)$$

سره دی.

لروچې.

$$\omega(0) = 0 \Leftrightarrow \sinh(C) = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

نو په دې ډول

$$\omega(x) = \sinh\left(\frac{mg}{T_0}x\right)$$

دی.

داسې چې $\omega(x) = f'(x)$ دی لروچې

$$f(x) = \int \omega(x)\,dx = \int \sinh\left(\frac{mg}{T_0}x\right)dx = \frac{T_0}{mg}\cosh\left(\frac{mg}{T_0}x\right) + C$$

د $x = 0$ لپاره د h ارتفاع عبارت ده له

$$h = \frac{T_0}{mg}cosh(0) + C$$

داسې چې $\cosh(0) = 1$ دی ، بنأ پردی لروچې.

$$\mathrm{h} = \frac{T_0}{mg} + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{h} - \frac{T_0}{mg}$$

$$f(x) = \frac{T_0}{mg}\cosh\left(\frac{mg}{T_0}x\right) + h - \frac{T_0}{mg}$$
$$= \frac{T_0}{mg}\left(\cosh\left(\frac{mg}{T_0}x\right) - 1\right) + h$$

(5.8) تقريبي حلونه او نشيبي ساحې .

د تل لپاره دا ممکن نه ده چې د تفاضلي معادلې حل په صريح او غير صريح شکل لاسته راوړو . په دې برخه کې يو ځل بيا د حل کيدونکي تفاضلي معادلو تقريبي حل ته چې خاص محاسبوي اهميت لري، پام را اړوو.په دې برخه کې ساده محاسبوي تخنيک چې د ايلر د متود په نوم يادېږي په پام کې نيسوکيداى شي د عددي انايز او يا د تفاضلي معادلوپه عالى کورس کې دا ډ ول پيچلې او مغلق تقريبي محاسبات مطالعه کړو. دتفاضلي معادلې پورې د نشيبي ساحې د تفاضلي معادلو د حل په برخه کې ګټوره ثابتيږي.

(1.5.8) د ايلر متود (Euler 's Method).

فرضووچې $y\ (t)$ د ورکړل شوي اوليه شرط له مخې

$$\frac{dy}{dt} = f\big(t, y\ (t)\big), y(0) = yo.$$

د تفاضلي معادلې حل دى.قبلو و چې دوخت تزايد Δt يو مثبت کوچنى مقدار دى.داسې چې

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \cong \frac{dy}{dt},$$

دى.نو لرو چې .

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \cong f\big(t, y\ (t)\big)$$

د ايلر په متود کې مشتق د تفاضل له نسبت سره او تفاضلي معادله د معادلو د تفاضل له سيستم سره تعويض کوي که چيرې

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{\Delta t} = f\big(j\Delta t,\ Y_j\big)$$

وي نو... $Y_j\,, j = 0{,}1{,}2$ کولى شو وټاکوکله چې $Y_0 = yo$ وي .ليدل کيږي $(Y_j \cong y(j, \Delta t)$ ،کله چې Δt کوچنې کميت وي.

مثال (1.5.8). د

$$\frac{d}{dt} y(t) = -y(t) + 2, y(0) = 4$$

تفاضلي معادلې خصوصى حل عبارت دى له .

$$y(t) = 2 + 2e^{-t}$$

(پورتنى نتيجه د انتيګرال نيوني عامل پواسطه ترلاسه شوي ده).

a) د ایلر په طریقې سره دمعادلو دتفاضل سیستم تقریبی حل وټاکئ.

b) د تیر بحث څخه په ګټه اخستلو د $[0,4]$ په انټروال کې د $y(t) = 2 + 2e^{-t}$ د ګراف پرمخ د $(j\Delta t,\ Y_j)$ نقطه و ټاکئ کله چې $\Delta t = 0,1$ او $j = 0.1,2 \ldots \ldots 40$ وي.

c) د $\Delta t = 0.1,0.05$ او 0.01 لپاره $Y_{\frac{1}{\Delta t}}$ محاسبه کړئ. ایا

$$\lim_{\Delta t \to 0} Y_{\frac{1}{\Delta t}} = y(1)$$

دی؟

حل.

a) لروچې

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

داسې چې $f(y) = -y + 2$ وي.

د ایلر په طریقه کې د معادلو تفاضل لیکو کله چې $Y_0 = 4$ وي.

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{\Delta t} = f(Y_j) = -Y_j +, j = 1.2.3 \ldots$$

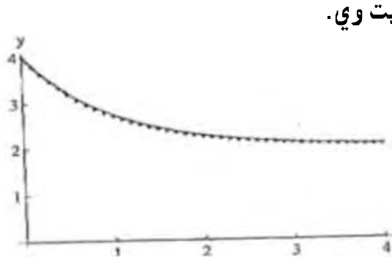
$$Y_{j+1} = Y_j + \Delta t(-Y_j + 2) = (1 - \Delta t)\ Y_j + 2\Delta t,$$

دی.

b) که $\Delta t = 0.1$ او 40 $j = 0.1,2 \ldots \ldots 40$ وي نو

$$Y_{j+1} = (1 - 0.1)\ Y_j + 0.2 = 0.9\ Y_j + 0.2\,.$$

که $F(Y) = 0.9 + 0.2$ سره تعویض کړو او دهر $j = 0,1,2 \ldots$ لپاره $Y_0 = 4$ وي نو $Y_{j+1} = F(Y_j)$ دی. په دې ډول $\{Y_j\}_{j=0}^{\infty}$ ترادف ترلاسه شو.(1) شکل مطابق د$[0,4]$ په انټروال کې $y(t) = 2 + 2e^{-t}$ تابع د ګراف پرمخ د$(j\Delta t,\ Y_j)$ نقطې ښې کله چې $\Delta t = 0.1$ او $j = 0,1,2 \ldots 40$.. وي. دنوموړي شکل په مشاهده کولوسره ویلای شو چې Y_j د$y(j\Delta t)$ تقرب کوی که Δt کو چنی کمیت وي.



(1) شکل

د $j = 0,1,2 \ldots$ له پاره

$$\frac{Y_{j+1} - Y_j}{\Delta t} = f(Y_j, j\Delta t)$$

د معادلاتو د تفاضل سیستم دی داسې چې $Y_0 = yo$ دي. Δt د وخت د تغیر پوری اړه لري. د لته Y_j په $Y_{\Delta t,j}$ تعویضواو په دې ډول لرو چې.

$$\frac{Y_{\Delta t,j+1} - Y_{\Delta t j}}{\Delta t} = f(j\Delta t \ , Y_{\Delta t,j})$$

د اولیه شرط په پام کې نیولو سره $y(t)$ د

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), y(0) = yo$$

حل دی.قبلو چې $Y_{\Delta tj} \cong Y(j\Delta t)$ دی کله چې Δt ډیرکو چنی وي.همدارنگه که $t = j\Delta t$ وي نو$j = t/\Delta t$ سره وي. مو نږ اټکل کووچې مطلوب تقریب دقیق دی، که Δt په کافی اندازه کوچنی وي.په دی ډول قبلوو چې .

$$\lim_{\Delta t \to 0} Y_{\Delta t, t/\Delta t} \cong y(t)$$

کله چې t ثابت وي.

مثال(2.5.8). داولیه شرط په پام کې نیولوسره

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{10} y^2 , y(0) = 1$$

د معادلې خصوصی حل عبارت دی له.

$$y(t) = \frac{10}{1 + 9e^{-t}}$$

a) د ایلر په طریقې دمعادلو د تفاضل سیستم تقریبی حل وټاکئ.

b) که چیرې دمعادلو دتفاضل سیستم حل د$\{Y_j\}$ ترادف پواسطه دa برخې څخه لاسته راغلې وي داسې چې د$[0,6]$ په انټروال کې$y(t) = \frac{10}{1+9e^{-t}}$ د گراف پرمخ د$(j\Delta t, y)$نقطه وټاکئ ، کله چې$\Delta t = 0.1$او $j = 0,1,2 \ldots 60$ وي . ایا نوموړې عددونو څخه ددی توقع کیږي چې .

$$\lim_{\Delta t \to 0} Y_{\Delta t, \frac{2}{\Delta t}} = y(2)$$

وي.

حل.

a) د ایلر دتفاضل سیستم د ورکړل شوې تفاضلي معادلې لپاره مونږ د لاندی معادلو دتفاضل سیستم ته لاربنونه کوی: که $yo = 1$ او دهر $j = 0,1,2 \ldots$ له پاره

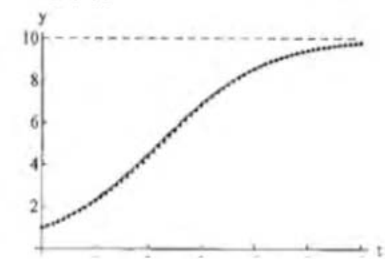
$$Y_{j+1} = Y_j + \Delta t f(Y_j, j\Delta t) = Y_j + \Delta t\left(Y_j - \frac{1}{10} Y_j^{\,2}\right)$$

دی.

b) د (2) شکل مطابق د $y(t)$ ګراف پرمخ د ($j\Delta t, Y_j$) نقطی ښيي کله چې $\Delta t = 0.1$ او $j = 0,1,2 \ldots 60$ وي.د نوموړي شکل په مشاهده کولو سره ويلای شو چې Y_j د $y(j, \Delta t)$ تهتقرب کوی که Δt کو چنی کميت وي.

C) وړاندوينه کيږي چې $Y_{\Delta t, \frac{2}{\Delta t}} \cong t(2)$ وي مونږ به $Y_{\Delta t, 2/\Delta t}$ ، $\left| Y_{\Delta t, \frac{2}{\Delta t}} - y(2) \right|$ په $\Delta t = 0.1, 0.005$ او 0.025 او همدارنګه $Y_{0.01,80}$ $Y_{0.05,40}$ $Y_{0.1,20}$ محاسبه کوو لرو چې

$$y(2) = \frac{10}{1 + 9e^{-t}} \,|_{t=2} \cong 4.50853$$



(2) شکل

د (1) جدول مربوطه معلومات مشخص کوي . د يا دولو وړ ده چې که مطلقه قيمت دوه ټوکه شوي وي نو په هغې صورت کې د اندازه کولوسايزهم دوه ټوکه کيږي دا يو حقيقت دی.

$$\left| Y_{\Delta t, t/\Delta t} - y(t) \right| \cong C\Delta t$$

داسې چې c ثابت او f د t پوری مربوط دی. بنأ پردی د ايلر د تفاضل سيستم ته دلومړی ترتيب دقت وايې .بنه به دا وي چې په تقريبي محاسبو کې له ډير دقت څخه کار واخستل شی . د مثال په توګه ددويم ترتيب دقيقی طرحی له پاره اشتباه د Δt^2 سره د مقايسی وړدی کله چې د اندازه کولوسايز يې Δt وي.

Δt	$Y_{\Delta t, 2/\Delta t}$	$\left\| Y_{\Delta t, 2} - y(2) \right\|$
0.1	4.38414	0.12
0.05	4.44609	0.062
0.0025	4.47726	0.031

(1) جدول

مثال(3.5.8). (د انتقال سره لوجستيکې معادله) .که د

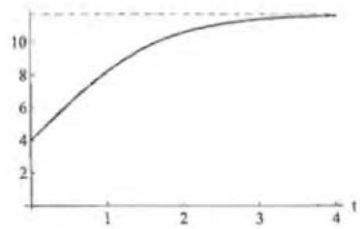
$$\frac{dy}{dt} = cy - by^2 + s,$$

معادله په پام کې و نیسو داسې چې $0 < b, \ c > 0, \ s > 0$ او b له څخه cډېر کوچنې وي . که $y(t)$ د t په موده کې د وګړوشمیر وښې د s حد دیو کال په موده کې د لیږد ونو شمیردی کله چې t په کلونواندازه ګیری شوي وي. د مثال په ډول د اولیه کمیت په پام کې لرولوسره لرو:

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{10} y^2 + 2, y(0) = 4$$

د معادلې خصوصی حل کولې شو داسې معلوم کړو.

$$y(t) = 3\sqrt{5}\, tanh\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}t + \frac{3}{10}arctanh\left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)\right)$$



(3) شکل

(کولې شو په متحولینو د جلاکیدلووړطریقو په واسطه وروسته د ډیر پیچلی اومغلقو محاسبو څخه حل تر لاسه کړو).(3) شکل د حل ګراف ښیې.که

$$f(y) = y - \frac{1}{10} y^2 + 2$$

سره وضع کړوداولیه شرط مسلی عبارت دی. له

$$\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = 4$$

د ایلر په طریقې دمعادلو دتفاضل سیستم تقریبی حل له مخې لیکلای شو چې،

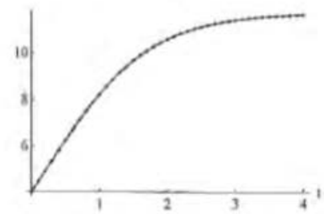
$$Y_{j+1} = f(Y_j)\Delta t + Y_j = \left(Y_j - \frac{1}{10} {Y_j}^2 + 2\right)\Delta t + Y_j,$$

داسې چې $Y_0 = 4$ وي. (4) شکل مطابق د $y(t)$ ګراف په مخ د $(j\Delta t, Y_j)$ نقطې ښیې کله چې $\Delta t = 0.1$ او $j = 0,1,2 \dots 40$ وي. دنوموړی شکل په مشاهده ویلای شوچې $Y_j \cong y(j\Delta t)$

که Δt کوچنې کميت وي . دويم جدول د $\Delta t = 0.1,0.05$ او 0.025 لپاره د $Y_{\Delta t,1}$

او $\left| Y_{\Delta t,\frac{1}{\Delta t}} - y(2) \right|$ قيمتونه ښيې .لرو چې

$$y(1) = 3\sqrt{5}arctanh\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}t + \frac{3}{10}arctanh\left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)\right)|_{t=2} \cong 8.20777$$



(4) شکل

دويم جدول ارقام Δt $Y_{\Delta t,\frac{1}{\Delta t}}$ $y(1)\Delta t$ تصديق کوی او د $y(1)$ تقريبی دقت زياتيدل ښيی کله چې Δt کوچنې کيږي.

Δt	$Y_{\Delta t,1}$	$\left\| Y_{\Delta t,1} - y(1) \right\|$
0.1	8.24792	0.04
0.05	8 .22811	0.02
0.0025	8.218	0.01

(2) جدول

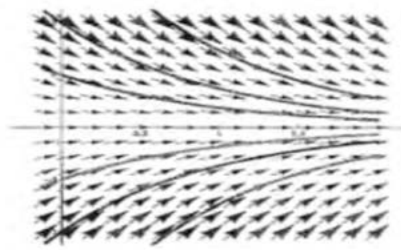
مثال (5.5.8) . د دنشيبې ساحې (جهت).

فرضوو چې د $y' = f(y,t)$ تفاضلي معادلې د حل گراف وله (y,t) له نقطی څخه تيريږی. د (t,y) په نقطه کې پر منحنی . دمماس ميل $f(y,t)$ دی. قبول شوي چې يوه کوچنې کرښه چې له (t,y) څخه تير شوي او ميل يې $f(y,t)$ دی. نو ټولې هغه کرښې چې له (t,y) څخه تير شوي وي د $f(y,t)$ ميل لرونکی دی اود $y' = f(y,t)$ تفاضلي معادله د نوموړوکرښو جهت د ساحو ټولگه ښيې . ليدل کيږي چې دا ميلان منظم دی. که چيرې و کولای شو داسې يو مسير په پام کې ونيسو کوم چې د ترسيم شوي وکتورونومبدأ د نوموړی مسير پرمخ واقع وي . که چيرې د مسير د نقطو تر منځ فاصله خورا کو چنې وي ، نو ترسيم شوی مسيرد تفاضلي معادلې د حل گراف په هکله يوه نظريه وړاندی کوی.

مثال(4.5.8) . د

$$\frac{dy}{dt} = = -y$$

تفاضلي معادلې عمومی حل د Ce^{-t}څخه عبارت دی.بنأ پردی نظر یوه پارامترته د حلونوګراف د منحنیاتو یوه ټولګه په (5) شکل ددی ډول منحنیاتو ځینی ډولونه او وکتورونه د تفاضلي معادلو د نشیبې ساحې ښودل شوي دي .



شکل (5)

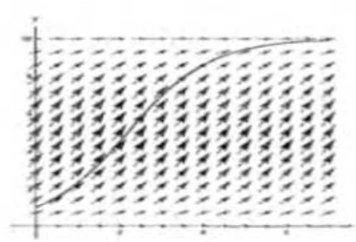
مثال (5.5.8). د (6) شکل مطابق د

$$\frac{dy}{dt} = = y - \frac{1}{10}y^2,$$

معادله د اولیه شرط په پام کې نیولو سره

$$\frac{dy}{dt} = = y - \frac{1}{10}y^2, y(0) = 1$$

د تفاضلي معاد لې د جهتونومیل ښيي .دنشیبې ساحې پیدا کول پخوا ډیرمشهورووځکه چې ټولې محاسبې یې په لاس تر سره کید لي ، مګرنن ورځ کولې شو د خورا ډیرو تقریبي محاسبو طرحې په لار و اچوو چې کولې شو د ډیرومغلق او لوړترتیب تفاضلي معادلو دقیق حلونه د کمپیوتری پروګرامونوله لاری لاسته راوړو نو ننیو ورځوکې د نشیبې ساحې استعمال دومره د اهمیت وړ نه ده.



شکل(6)

نهم فصل

نامتناهي سلسلې

په دې برخه کې د پولينومونوپواسطه د توابعو تقرب تر څېړنې لاندې نيسو دنا متناهې سلسلو مفهوم له عادي مباحثو کې نشأت اخلي مونږبه دلته هغه ازموينې معرفي کړوچې دهغې له مخې وپوهيږواياد؛ سلسلې معينه حاصل جمع لري او که نه.

(1.9) لومړي برخه د تيلور پولينوم.

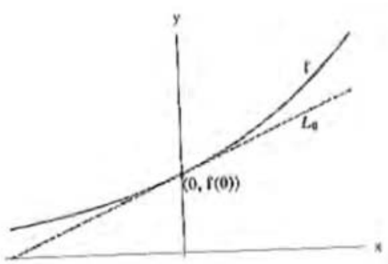
ددې فصل په لومړيو او دويمو برخوکې د پولينومونوپواسطه د توابعو تقرب په پام کې نيسو . دا ډول تقارب ډېر اهميت ورډی ځکه چې دپولينومونو قيمتونه په اسانۍ سره محاسبه کيږي.فرضوو چې د ورکړل شوې توابع ټول غوښتل شوي مشتقات په بشپړ ډول نشو ترسره کولی .

د (0) په قاعده د تيلورپولينوم

دلته به ځينې اصطلاحات په ياد را وړو دا پولينوم

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

د n ام ترتيب يو پولينوم دی.د $P(x)$ پولينوم درجه $k \le n$ ده که چيرې $a_k \neq 0$ وي يا $a_{k+1} = a_{k+12} = \cdots = a_n = 0$ وي. د مثال په ډول که



(1) شکل

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

وي نو د پولينوم ترتيب اودرجــه سره مساوي او له 4 عبــارت څخه دی .لــه بلــې خوا د

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + (0)x^5$$

دپولینوم ترتیب5 خو د$Q(x)$ درجه 4 ده.د یادولو وړده چې د f له پاره د 0 په قاعده خطي تخمین له

$$L_0f(x) = f(0) + f'(0)x,$$

څخه عبارت دی.

دلته f په 0 کې د مشتق نیولووړ ده د$y = L_0f(x)$ تابع گراف د$(0,f(0))$ په نقطه کې د $y = f(x)$تابع گراف د مماس خط ښیی. او $L_0f(x)$ لومړی ترتیب پولینوم دی. او

$$L_0f(0) = f(0), L_0f(0)' = f'(0)$$

دی.

مونږ ولیدل چې $L_0f(x)$ د $f(x)$ له پاره مناسب تخمین دی که چیرې x د 0 پیل نقطي ته نږدې وي . ممکن 0 ته نږدی ښه دقت اټکل کړو ، که چیرې مونږ د f تخمین د $P(x)$ پولیـــنوم په واسطـــه د $n > 1$ ترتیب لـــه پـــاره دا ډول چـــې $P(0) = f(0)$ وي، ا و د هـــر $k = 1,2,3, ...$ له پاره $p^k(0) = f^k(0)$ وي، لاسته راوړ.(دیا دولو وړده چې f^k د f له پاره k ام مشتق ښیي). په لاندې افاده کې به وښـــودل شي چې څنگه د n ترتیب پولینوم له پاره دا ډول پولینوم تشکیلیږی.

قضیه (1.1.9) . فرضـــو و چـــې $P(x)$ n ام ترتیب لـــه یـــو پولینوم څـــخـــه عـــبارت وی .

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{1}{2}P''(0)x^2 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(0)x^2 +, \frac{1}{n!}P^{(n)}(0)x^n +$$

نو د $n = 4$ له پاره د (1.1.9) قضیې د څرگندونی د تائید له مخې په پام کې نیسو .(دا ممکنه دی چې د ریاضی د استقرأپواسطه یې ثبوت تر لاسه کړو). د څلورم ترتیب پولینوم کولی شوپـــه لاندی ډول وښیو.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4;$$

په دې ډول

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$
$$P''(x) = 2a_2 + (2)(3)a_3x + (3)(4)a_4x^2$$
$$P^{(3)}(x) = (2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4x$$
$$P^{(4)}(x) = (2)(3)(4)a_4$$

دی.

بنأ پردې

$$P(x) = a_0,$$
$$P'(x) = a_1,$$
$$P''(x) = 2a_2,$$
$$P^{(3)}(x) = (2)(3)a_3 = 3!\,a_3$$

$$P^{(4)}(x) = (2)(3)(4)a_4 = 4!\, a_4$$

دی.

په دې ډول

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$
$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{1}{2}P''(0)x^2 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(0)x^3 + \frac{1}{4!}P^{(4)}(0)x^4$$

دی.

دعوی(1.1.9). فرضوو چې f د 0 نه تر n پورې د اشتقاق وړده که د n ترتیب به $P(x)$ یو پولینوم شتون ولري.داسې چې

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), P''(0) = f''(0) \cdots P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

کولای شو د $P(x)$ پولینوم په دې ډول ولیکو .

$$f(0) + f'^{(0)}x + \frac{1}{2!}f''^{(0)x^2} + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n.$$

(1.1.9) مسأله له (1.1.9) قضیې څخه تر لاسه کیږي.څرنګه چې n ترتیب $P(x)$ د ترتیب پولینوم کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$P(0) + P'(0)x + \frac{1}{2}P''(0)x^2 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(0)x^2 + \cdots \frac{1}{n!}P^{(n)}(0)x^n$$

لروچې

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), P''(0) = f''(0) \cdots P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

که او یوازې که

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

وی.

تعریف (1.1.9) . دتایلور 2 ترتیب پولینوم عبارت دی له

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

د صفر په قاعده د f تابع له پاره د تیلور دnام ترتیب پولینوم په P_n سره ښیو . دحاصل جمع د علامې په استعمالولوسره کولای شو $P_n(x)$داسې ولیکو .

$$\sum_{k=o}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

(دیا دولو وړده چې$0! = 1$ او $f^{(0)} = f$ دی) د صفر په قاعده د f تابع له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم د مایکلورن د nام ترتیب پولینوم په نوم هم یاد یږي.

تبصره (1.1.9) .تیلور چې د نیوټن شاګرد وو د یوې تابع تخمین په هکله ئې خپل تحقیقات د یو خاصې طریقې له مخې تر سره کړل په دې سکشن کې به تیلور پولینوم تربحث لاندې ونیسو چې قاعده یې بې له صفر څخه نور عددونه وي . د صفر په قاعده د د تیلور پولینوم د مایکلورن پولینوم په نوم یا دیږي. مایکلورن د یو کتاب لیکوونکی وو چې په دې کتاب کې دپولینوم پواسطه یې د اختیاری تابع تقرب په هکله بحث شوي ده .

د یادولووړ ده چې د f له پاره د مایکلورن دلومړی ترتیب پولینوم خطي تخمین په شان د0 په قاعده د f له پاره دی . له دې ځایه څخه

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = l_0 f(x)$$

د f له پاره د مایکلورن د 2 ترتیب پولینوم عبارت دی.

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

امکان لری چې دf تابع له پاره د صفر(0) په قاعده مربعی تخمین دP_2 په شان ارایه شی.

مثال (1.1.9) . فرضوو چې

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

تابع ورکړل شوي دی دf له پاره دمایکلورن پولینوم تشکیل کړئ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = (1-x)^{-2}$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(1-x)^{-2} = 2(1-x)^{-3}$$
$$f'''(x) = \frac{d}{dx}((1-x)^{-3}) = 3!\,(1-x)^{-4}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$$

په دې ډول

$$f(0) = 1 + f'(0) = 1.\, f''(0) = 2, \cdots, f^{(n)}(0) = n!$$

دی.

بناً پر دی

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=o}^{n} x^k$$

دی.

په خاص ډول د 0 په قاعده د f له پاره خطی تخمین عبارت دی له

$P_1(x) = 1 + x,$

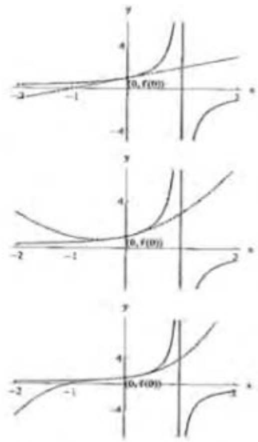
د 0 په قاعدد د f له پاره دویمه درجه تخمین عبارت دی له

$P_2(x) = 1 + x + x^2,$

دf له پاره دمایکلورن دریمه درجه تخمین عبارت دی له

$P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$

(2)شکل د f, P_1, P_2 او P_3 گــــــــرافونه ښــــــــــيي(خط خط شوي منحنی گانی د پولینومونوگرافونه ښيي) شکل د $P_n(x)$ تخمین $f(x)$ ته په ډیره ښه توگه ښیی ، که چیري x ؛ د 0 پیل نقطی ته ډیرنږدی دی .اودتخمین دقت د n په زیـــــــاتیدوســــــره زیاتــــــــیږي.



(2) شکل

مثال (2.1.9) . فرضووچې

$$f(x) = e^x$$

وي.

a) ور کړل شوي تابع د f له پاره دمایکلورن پولینوم صفرپه قاعده تشکیل کړئ.

b) دP_1 ، P_2 او P_n گرافونو څخه په گټه اخیستو نوموړي گرافونه [-1,1] په انټروال کې د f گراف سره مقایسه کړی . ایا په شکل کې ښودل کیږي چې $P_n(x)$ تخمین د e^x له پاره د قیق دی کله چې n په تزاید سره x د 0 مبدأ ته ډیرنږدی وي .

حل . لرو چې $f^{(n)}(x) = e^x$ دیداسې چې دهر $n = 0.1.2 \cdots$ له پاره $f^n(0) = 1$ دی .نو په دې ډول د مایکلون د n ترتیب پولینوم د طبعي طاقت نما تابع له پاره عبارت دی له .

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

b) په خاص ډول د (0) په قاعده د f له پاره خطی تخمین عبارت دی.له

$$P_1(x) = 1 + x,$$

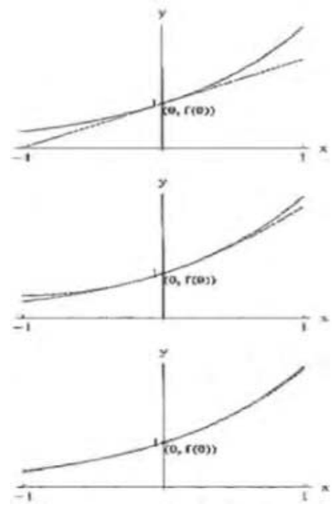
د 0 په قاعده د f له پاره دویمه درجه تخمین عبارت دی . له

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

د f له پاره دمایکلورن دریمه درجه تخمین عبارت دی. له

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

(3) شکل د P_1, P_3 او P_5 گرافونه د[-1 1] په انټروال کې د طبعی اکسپونانشیل تابع سره مقایسه کوی (خط خط شوې منحنی گانی د پولینومونوگرافونه ښیي) دا به ډیره مشکله وي چې د تابع د گراف او P_n د گراف تر منځ تو پیرورکړای شو کله چې P_n مبدأ ته نږدې وي.اياشکل راښیي چې (x) P_n د n په تزاید سره باید e^x ته تقرب وکړي کله چې x مبدأ ته ډیر نږدې وي.



(3) شکل

مثال (3.1.9). فرضوو چې

$$f(x) = sin(x)$$

وي.

a) د مایکلورن پولینوم f له پاره تشکیل کړئ.

b) د P_1 ، P_3 او P_5 گرافونه څخه په گټه اخیستو نوموړی گرافونه $[-\pi,\pi]$ په انټروال کې د f گراف سره مقایسه کړی. ایا شکل ددی ښودونکی دی چې ممکن $P_n(x)$ د $sin(x)$ د قیق تخمین دی کله چې n تزاید په صورت x د 0 مبدأ ته ډیر نږدی وي .

حل .

a). لرو چې

$$f'^{(x)} = \frac{d}{dx}sin(x) = cos(x),$$
$$f''^{(x)} = \frac{d^2}{dx^2}sin(x) = -sin(x),$$
$$f^3(x) = \frac{d^3}{dx^3}sin(x) = -cos(x),$$
$$f^4(x) = \frac{d^4}{dx^4}sin(x) = sin(x),$$
$$f^5(x) = \frac{d^5}{dx^5}sin(x) = cos(x),$$
$$\vdots$$

عمومي بڼه یې په لاندې ډول ښودل شوي ده :

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k sin(x), k = 0,1,2,3\cdots,$$
$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k cos(x), k = 0,1,2,3\cdots,$$

په دې توگه

$$f^{(2k)}(0) = 0, k = 0,1,2,3\cdots,$$
$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, k = 0,1,2,3\cdots,$$

دی.

بنأ پردی

$$P_{2k+2}(x) = P_{2k+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - +\frac{1}{7!}x^7 \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

b) د $P_1(x) = x$ خطی تخمین د $sin(x)$ له پاره د (0) په قاعده او $P_2(x) = P_1(x)$ د 0 په قاعده د مایکلورن ددریم ترتیب پولینوم څخه عبارت دی.

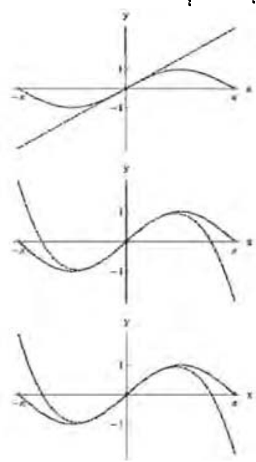
$$P_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

دتیلور ددریم ترتیب پولینوم دڅلورم ترتیب پولینوم په څیر دی.او د 0 په قاعده د تیلور پنځم ترتیب پولینوم عبارت دی له.

$$P_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = 1 - x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

او $P_6(x) = P_5(x)$ دی.

(4) شکل د $sin(x)$ د گراف مقایسه د P_1 ، P_3 او P_5 سره په $[-\pi,\pi]$ انټروال کې ښیې (خط خط شوي منحنی گانی د پولینومونوگرافونه ښیې) دا به ډیر ه گرانه وي چې د تابع د گرافونو او sin e او P_nتر منځ تو پیر د 0 مبدأ ته نږدی وي کلـــه چې n تزاید وکړی. $P_n(x)$ ښیـــې چې د $sin(x)$تخمین ډ یر د قیق وي کله چې n تزاید کوی، که چیرې x د 0 مبدأ ته ډیر نږدی وي.



(4) شکل

مثال(4.1.9). که $f(x) = cos(x)$ وي د (0) په قاعده f له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم لاسته راوړی.

$$p_{2n} = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2x)!} x^{2k}$$

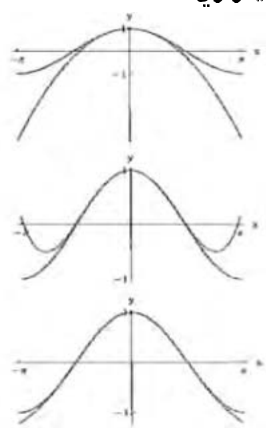
(تمرین)

په خاص ډول

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

(5) شکل د $\cos(x)$، $P_2(x)$ او $P_4(x)$ گرافونه ښیې په شکل کې ښودل کیږی چې د $P_n(x)$ تخمینونه د $cos(x)$ له پاره ډیر دقیق دی کله چې x د 0 مبدأ ته ډیرنږدی وي او د n په

زیاتیدو سره یې دقت مخ په زیاتیدو وي .



شکل (5)

(2.1.9) داختیاري نقطي په قاعده د تیلور پولینوم.

د ورکړل شوي تابع څخه د تیلور پولینوم پرته له دې چې قاعده یې 0 نه وي ،لاسته راوړو.

تعریف (2.1.9). د c په قاعده د f له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم له $P_{c,n}(x)$ څخــه عبارت دی دا ډول چې ترتیب یېn وی . یعنې :

$$P_{c,n}(c) = f(c), P'_{c,n}(c) = f'^{(c)}, P^{(n)}{}_{c,n}(c) = f''(c) \ldots P^{(n)}{}_{c,n}(c) = f^{(n)}(c).$$

که $P_{0,n}(x)$ د P_n سره همزمان مساوي وي د f له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم لاسته راځي کولای شو د n ترتیب پولینوم د $x-c$ د طاقت په پام کې نیولو سره څرګند کړو .

قضیه (2.1.9).که

$$P(x) = P(c) + P'(c)(x-c) + \frac{1}{2}P''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(c)(x-c)^3 + \cdots \frac{1}{n!}P^{(n)}(c)(x-c)^n$$

وي. د (2.1.9) قضیه چې د(1.1.9) قضیې څخه ترلاسه کیږي که $X = x - c$ وضع کړو داسې چې $x = 0$ دی نو $x = c$ کیږي ،د (1.1.9) له مخې($Q(x) = P(x + c$ دی . (تمرین) د (2.1.9) قضیې له مخې د تیلور پولینوم تشکیلولی شو.

قضیه (2.1.9). د c په قاعده د تیلور د n ترتیب پولینوم د f له پاره عبارت دی له:

$$P_{c,n}(x) = f(c) + f'^{(c)}(x-c) + \frac{1}{2!}f''^{(c)(x-c)^n} + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{k}(c)(x-c)^{k}$$

مثال (5.1.9) . که $f(x) = ln(x)$ وي 1 په قاعده د f له پاره د تیلور پولینوم معلوم کړئ.

حل . لروچې :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} ln(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = -x^{-2}$$
$$f^{3}(x) = \frac{d}{dx} (-x^{-2}) = 2x^{-3},$$
$$f^{4}(x) = \frac{d}{dx} (2x^{-3}) = -3!\, x^{-4},$$
$$f^{5}(x) = -5!\, x^{6} .$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)x^{-n}$$

په دې ډول

$$f(1) = ln(1) = 0$$
$$f'(1) = 1,$$
$$f''(x) = -1,$$
$$f^{(3)}(1) = 2,$$
$$f^{(4)}(1) = -3!$$
$$f^{(5)}(1) = 4!$$
$$f^{(6)}(1) = -5!$$

دي. په حقیقت کې دهر ... $n = 1,2,3$ پاره له $f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)$ او $f(1) = 0$ دی.

(دیا دولو وړده چې$0! = 1$) په دې ډول د 1 په قاعده د $f(x) = ln(x)$ له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم عبارت دی له:

$$P_{1,n}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x-1)^{2} + \frac{1}{3!} f'''(1)(x-1)^{3}$$
$$\cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(x-1)^{n}$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^{2} + \frac{2}{3!}(x-1)^{3} - \frac{3!}{4!}(x-1)^{4} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{(n-1)}{n!}(x-1)^{n}$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^{2} + \frac{1}{3}(x-1)^{3} - \frac{1}{4}(x-1)^{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 1/k\, (x-1)^{k}$$

په خاص ډول د 1 په قاعده د f خطي تخمین عبارت دی له :

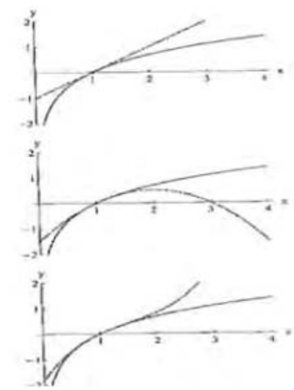
$$P_{1,1}(x) = x - 1$$

د 0 په قاعدد دf له پاره دویمه درجه تخمین عبارت دی له

$$P_{1,2}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

دf له پاره دمایکلورن دریمه درجه تخمین عبارت دی له

$$P_{1,3}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$



شکل (6)

(6) شکل د f ، $P_{1,1}$ ، $P_{1,2}$ او $P_{1,3}$ د گراف ښيي.په شکل کې د $P_{1,n}(x)$ تخمین د $f(x)$ له پاره ډیردقیق دی کله چې د (1) مبدأ ته ډیر نږدی وي.او د تقریب دقت د n په زیا تیدو سره زیاتیږي.

(2.9) دویمه برخه د تیلور پولینوم .

(1.2.9) د تیلور پولینوم په واسطه دتقرب د خطأ پیدا کول .

که د f تابع له پاره د مایکلورن د n ترتیب پولینوم په P_n سره وښیو نو $f(x) - P_n(x)$ تر منځ فرق د $R_n(x)$ په شان دی $R_n(x)$ ته $f(x)$ د باقی مانده یا د تخمین خطأ وایې . چې د $P_n(x)$ په واسطه لاسته راځي غواړو چې $|R_n(x)|$ د $|x|^n$ سره مقایسه کړو که x د 0 مبدأ ته نږدی وي.

مثال (1.2.9) .که $f(x) = \frac{1}{1-x}$تابع او $P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ پولینوم

ورکړل شوي وي. د (**1.9**) سکشن د(1) مثال په څير که $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ وي ، $|R_n(x)|$ د $|x|^n$ سره مقايسه کړئ که x د 0 مبدأ ته نږدی وي.

حل. لروچي :

$$
\begin{aligned}
f(x) - P_n(x) &= \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \\
&= \frac{1 - (1-x)1 + x + x^2 + \cdots + x^n}{1-x} \\
&= \frac{1 - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) + (x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1})}{1-x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

بناً پردې

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

دی.

داسې چې

$$P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

وي.

که x مبدأیعنې(0)ته ډیر نږدی وي نو $|R_n(x)|$د$|x|^{n+1}$ سره مقایسه وړدی که.په خاص ډول $|R_n(x)|$ د $|x|$ څخه ډیرکوچنی دی کله چې x صفرته نږدی وي.دمثال په توګه که د= $|x|$ 10^{-1} وی نو $|R_2(x)| \cong (10^{-1})^{-3} = 10^{-3}$ او $|R_3(x)| \cong)(10^{-1})^{-4} = 10^{-1}$ سره کیږي بناً پردې $f(x)$تخمين دقت د $P_n(x)$ په واسطه د n په زیاتیدو سره، زیاتیږی . په ډیرو حالاتو کې دا ممکن نه دی چې د یوی افادی د باقی پاتی قیمت مستقیماً د پورته مثال په څیر حاصل کړو. په دې حالت کې دلاندی قضیي په مرسته د باقې پاتی قیمت اهمیت څیړو .

قضیه (1.2.9). (د تیلور د باقی پاتی فورمول) . فرضوو چې د f تابع د n + 1 ترتیب له پا ره متمادي او د مشتق وړوي او 0 د J په خلاص انټروال کې شامل وي که د هرJ لـــه $x \in$ پاره داسې یوه نقطه شتون ولري چې $c_n(x)$ د 0 او x ترمنځ واقع وي نو په دې ډول لــروچـــې

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + R_n(x) \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_n(x)
\end{aligned}
$$

داسې چې

$$P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n(x))x^{n+1}$$

وي. کولای شي د تیلوردباقی پاتې فورمول ثبوت د E په ضمیمه کې تر لاسه کړی. د ($c_n(x)$) د نښې په کارولوسره n او x د $c_n(x)$ پورې مربوط ګڼو.

تبصره (1.2.9). د (1.2.9) دقضیې له مخې که x نږدې 0 ته نه وي نو لیکو چې.

$$|P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c_n(x))\right||x|^{n+1} \cong \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(0)\right||x|^{n+1}$$

په دې ډول $|P_n(x)|$ د $|x|^{n+1}$ سره د مقایسې وړدی که x، 0 ته نږدې وي. بناً پردې د $f(x)$ تخمین دقت د $P_n(x)$ پواسطه د n په زیاتیدو سره دقیق ثابتیږی. په خاص ډول که x مساوی یو سره وضع کړو. لرو چې:

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c_1(x))x^2$$

داسې چې $c_n(x)$ د 0 او x تر منځ کې واقع وي نو په دې شان د $f(x)$ د خطأ (اشتباه)دتخمین اهمیت د 0 په قاعده د خطی تخمین پواسطه د x^2 سره د مقایسه کیدو وړ ده کله چې x نږدې 0 ته وي.

مثال (2.2.9). که

$$f(x) = e^x$$

وي.د (1.9) سکشن د (1) مثال په شان

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

وي

که $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ وي $|R_n(x)|$ د $|x|^{n+1}$ سره مقایسه کړی که x د 0 مبدأ ته نږدې وي.

حل. لرو چې:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{c_n(x)}x^{n+1}$$

که چیرې $c_n(x)$ د 0 او x تر منځ کې واقع وي. په دې ډول که x نږدې 0 وي نو

$$|R_n(x)| \cong \frac{1}{(n+1)!}e^0|x|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

سره دی. بناً پردې $|R_n(x)|$ د $|x|$ څخه ډیر کوچنې دی په هغه صورت کې چې x نږدې 0 وي. او د e^x دتخمین دقت د $P_n(x)$ پواسطه د n تزأیدپه صورت کې تزأ ید کوی.

مثال (3.2.9). که $f(x) = sin(x)$ وي د (1.9) سکشن د (3) مثال په شان لروچې.

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x), k = 0,1,2, \ldots.$$
$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x), k = 0,1,2, \ldots.$$

او

$$P_{2k+2}(x) = P_{2k+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \frac{1}{7!}x^7 \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

دی.

په دې ډول

$$\sin(x) - P_{2k+1}(x) = \sin(x) - P_{2k+2}(x) = R_{2k-2}(x)$$

دی.

دارنګه چې

$$P_{2k+2}(x) = \frac{1}{(2k+3)!} f^{(2k-3)}\left(c_{2k+3}(x)\right)x^{2k+3}$$
$$= \frac{1}{(2k+3)!}(-1)^{k+1}\cos(c_{2k+3}(x))x^{2k+3}$$

دی.

بناً پردی

$$|R_n(x)| \cong |\cos(0)|\frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!} = \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

دی.

که $|x|$ کوچنی وي $|P_{2k+2}(x)|$ له $|x|$ څخه به ډیر کوچنی وي په هغه صورت کې چې x صفرته نږدی وي او د e^x د تخمین دقت د $P_{2k}(x)$ ته نږدی ده کله چې k متزأیـد وي . د تیلورد باقی پاتی فورمول مونږ ته ددی وړتیا ورکوي چې د $\frac{0}{0}$ مبهم لیمټونه پرته د لوپیټال (l'Hopital's) د قضیي څخه معلوم کړو .او ددی په اساس دا ډول نور لیمټونه محاسبه کړو.

مثال (4.2.9). د

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

د لوپیټال قاعدی څخه پرته پورتنی لیمټ محاسبه کړئ.

د L مطلقه قیمت د تخمین خطأ د $\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$ په واسطه و څیړي

حل. د (2.2.9) مثال په شان

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$$

دی.

داسې چې

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} e^{c_2(x)} x^3$$

وي . او $c_n(x)$ د 0 او x تر منځ کې واقع وي.په دې ډول

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{3!} e^{c_2(x)}) = \frac{1}{3!} e^0 = 1/6$$

دې.

تائیدوچې په تکراری ډول د لوپیټال دقاعدی د تطبیق په صورت کې به عین نتیجه تر لاسه شې .سر بیره پر دی لروچې

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + R_3(x)$$

داسې چې که x د 0 مبدأ ته نږدی وي .

$$R_3(x) = \frac{1}{3!} f^{(4)}(c_4(x))x^4 = \frac{1}{24}(c_4(x))x^4 \cong \frac{1}{24} x^4$$

په دې ډول

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} - \frac{1}{6} = \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{R_3(x)}{x^3} \cong \frac{1}{24} x$$

که x د 0 مبدأ ته نږدی وي.

مثال(2.5.9).که

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

د لوپیټال قاعده د کارولو څخه پرته پورتنی لیمټ محاسبه کړئ.

د L مطلقه قیمت د تخمین خطأ د $\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$ په واسطه و څیړي

حل.(3.2.9) د مثال په شان لروچې:

$$\sin(x) - P_3(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) = \sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3 = R_4(x)$$

په (3.2.9) مثال کې مو وښودل چې:

$$R_{2k+2}(x) = \frac{1}{(2k+3)!}(-1)^{k+1}\cos(c_{2k+2}(x))(x)^{2k+3}$$

که $k = 1$ وضع کړو لروچې

$$R_4(x) = \frac{1}{5!}\cos(c_4(x))\,x^5$$

په دې ډول

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{R_4\,(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5!}\cos\big(c_4(x)\big)\,x^5}{x^5}$$
$$=\frac{1}{5!}\lim_{x\to 0}\cos(c_4(x))x^5$$
$$=\ \frac{1}{5!}\lim_{x\to 0}\cos(0)\,x^5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$$

دی.

که x د 0 مبدأ ته نږدی وي

$$\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}-\frac{1}{5!}=\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{5!}x^5}{x^5}\ \cong-\frac{1}{7!}x^2$$

وي .

بنأ پردې که $|x|$ کوچنی وي

$$\left|\frac{\sin(x)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}-\frac{1}{5!}\right|\cong\frac{1}{7!}\ |x|^2=\frac{1}{5040}|x|^2$$

د تیلور د باقی پاتی فورمول د اختیاري مبدأ له پاره په عمومی ډول نتیجه ګیری کوو .

قضیه (2.2.9) . (د تیلور د باقی پاتی فورمول عمومی حالت) فرضوو چې د f تابع د $n+1$ ترتیب لپا ره متمادي او د مشتق وړوي او c د J په خلاص انټروال کې شامل وي که د هر $x\in J$ له پاره داسې یــوه نقطه شتون ولــري چې $c_n(x)$ د c او x تــرمنځ واقع وي نو پــه دی ډول لروچې:

$$f\,(x)-P_{c,n}\,(x)=R_{c,n}\,(x)$$
$$=\ f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2$$
$$+\ \cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n+R_{c,n}\,(x)$$

داسې چې

$$R_{c,n}\,(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n(x))(x-c)^{n+1}$$

وي. کولای شي د (4.2.9) قضیي ثبوت د E په ضمیمه کې پیدا کړئ.

مثال(6.2.9) . که $f(x) = ln(x)$ او

$$R_{1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}1}{k}(x-1)^k$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n$$

وي.د(1.9) سکشن د 5 مثال په شان $|R_{1,n}(x)|$ د $(x-1)^{n+1}$ سره مقایسه کړئ که x د 1 مبدأ ته نږدې وي .

حل. د تیلور د باقی پاتی فورمول په واسطه

$$R_{1,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n(x))(x-1)^{n+1}$$

دی. داسې چې $c_n(x)$ د x اودپیل نقطی1 په منځ کې واقع وي. لکه څنګه چې د (1.9) سکشن په 5 مثال کې مو ښودلې وو .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(x-1)!\ x^{-n}$$

په دې ډول

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(x-1)!\ x^{-(n+1)}$$

دی.

بنأ پر دې

$$R_{1,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^n n!\,(c_n(x))^{-(n+1)}(x-1)^{n+1}(x)$$
$$= (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(c_n(x))^{(n+1)}}$$

دی.

که x نږدې1 ته وي نو $c_n(x) \cong 1$ دی . داسې چې$c_n(x)$ د x او 1 په منځ کې واقع دی نو په دې ډول

$$|R_{1,n}(x)| \cong \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)}$$

دی. که x نږدې1 ته و ي نوپه خاص ډول د باقی پاتی اهمیت ډیر کوچنی دی د$|x-c|^{n+1}$ که $|x-1|$ هم کوچنی وي . او$ln(x)$ د تخمین دقت د $R_{1,n}(x)$ په واسطه چې د n په زیاتیدو سره زیاتیږی دقیق دی.

(2.2.9) د پولینومل تزاید د ترتیب په شان لیمټ .

تر اوسه پوری مود $f(x)$ د تخمین خطأد $P_{c,n}(x)$ په واسطه وڅیړل . داسې چې $P_{c,n}$ د c په قاعده د f له پاره د تیلور د n ترتیب پولینوم وي . مونږ و لید چې دخطأ اهمیت د $|x-c|^{n+1}$ سره د مقایسی وړدی که x د c مبدأ ته نږدی وي .اوس به دامونږ تربحث لاندی ونیسو چې ایا دا خطأ (اشتباه) په هماغه اندازه کوچنی ده چې د x له پاره ده کله چې n په کافی اندازه لوی دی پرته له دی چې د x فاصله د پیل له نقطی څخه په پام ونیول شي .

قضیه (1.2.9).که

$$\lim_{x\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n) = \frac{1}{1-x}$$

سره وي . که او یوازی که $-1<x<1$ وي

ثبوت . قبلوو چې $f(x)=\frac{1}{1-x}$ او $P_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ وي .

لروچې

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n) - \frac{1}{1-x} = f(x) - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

په دې ډول د (1.9) سکشن د(1)مثال په شان لروچې:

$$|f(x)-P_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}$$

که $-1<x<1$ وي بنأ پردې

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)-P_n(x)| = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \frac{1}{|1-x|}\lim_{x\to\infty}|x|^{n+1} = 0$$

دی.

په دې ډول که $-1<x<1$ وي نو

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}P_n(x) &= \lim_{x\to\infty}\big(P_n(x)-f(x)+f(x)\big)\\ &= \lim_{x\to\infty}\big(P_n(x)-f(x)\big)+f(x) = f(x)\end{aligned}$$

دی.

که $|x|>1$ وي نو په دې صورت $P_n(x)$ د $f(x)$ له پاره متقاربه نه ده یعنې:

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)-P_n(x)| = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \infty$$

که $x=1$ له پاره $f(1)$ شتون ونه لري نو $P_n(x)$ تقارب د $f(1)$ دپوښتنې پوری مربوط نه دی.په هرحال د یادولو وړده چې .

$$P_n(1) = 1+1+1+\cdots+1 = n+1$$

دی.

داسې چې د $n+1$ جملې لرو نو په دې ډول

$$\lim_{x\to\infty} P_n\,(1) = \lim_{x\to\infty} n+1 = \infty$$

دی.

که $x=-1$ وي.

$$P_n\,(-1) = 1-\ 1+\ 1-1\ldots+\ (1)^n\ = \begin{cases} 1 & \text{که } n=1,2,4\ldots \\ 0 & \text{که } n=1,3,5\ldots \end{cases}$$

دی.

نو د ... 1,0,1,0,1.0 ترادف لیمټ نه لري.

مثال (7.2.9) . د(1.2.9) د قضیې له مخې د$n = 2,4,6,10$ له پاره او $P_n\ \left(\frac{1}{2}\right)$ او $\left|P_n\ \left(\frac{1}{2}\right) - f\ (1/2)\right|$ محاسبه کړئ.ایا نوموړې عددونه د لاندې حقیقت له مخې شتون لري ؟

$$\lim_{x\to\infty} P_n\ \left(\frac{1}{2}\right) = f\ \left(\frac{1}{2}\right)$$

یعنې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

دی.

حل . د (1) جدول ورکړل شوي معلومات مشخص کوي .د (1) په جدول کې عددونه $\lim_{x\to\infty} P_n\ \left(\frac{1}{2}\right) = f\ \left(\frac{1}{2}\right)$ حقیقت له مخې ترتیب شوي.

n	$P_n\,(1/2)$	$\lvert P_n\,(1/2) - f\,(1/2)\rvert$
4	1.9375	6.3×10^{-2}
6	1.98438	1.6×10^{-2}
8	1.99600	3.9×10^{-3}
10	1.99902	9.8×10^{-4}

(1)جدول

د تیلور د باقې پاتې فورمول مونږ ته ددې توان ور کوي چې د e^x ، $\sin(x)$ او $\cos(x)$ تخمین دقت د $x \in \mathbb{R}$ لــه پــاره د تــیلور پــولینوم پــو اسطه محاسبه کړو .داســې چې

$$f\ (x) = P_{c,n}\ (x) + R_{c,n}\ (x)$$

نو لرو چې

$$\lim_{x\to\infty} P_{c,n}(x) = f(x)$$

که او یوازې که

$$\lim_{x\to\infty} P_{c,n}(x) = 0$$

وي. د پورته حقیقت له مخې لاندې لاندې قضیه په پام کې نیسو.

قضیه (2.2.9). د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره لرو چې:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

د یادولو وړ ده چې د(2.2.9) په هکله مخکې وضاحت ورکړ شوي دی. که $1 < |x|$ وي.

$$\lim_{x\to\infty}|x^n| = \lim_{x\to\infty}|x|^n = +\infty$$

او $\lim_{x\to\infty} n! = \infty$ دی داسې چې $n! > n$ دی بې له کوم دقت څخه د لیمټ $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل په اساس د خارج قسمت قاعدې لــه مخې نو مــوږ ی لیمټ محاسبه کــو و. تاسی کولی شې ددی قضیې ثبوت د لاندې برخی پــه پای کې وګورئ.

قضیه (3.2.9). د x د هر حقیقی عدد له پاره لروچې :

$$\lim_{x\to\infty}(P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n) = e^x$$

ثبوت. که دهر $x \in \mathbb{R}$ له پاره د $c_n(x)$ د x او 0 په منځ شتون ولری نو په دې ډول لروچې:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{c_n(x)} x^{n+1}$$

د (2.2.9) مثال په شان ، که $x > 0$ وي لرو چې $0 \le c_n(x) \le x$ دی . داسې چې طبعي طاقت نمأ د عددونو په کرښه متزایده تابع ده .نو لروچې

$$0 < R_n(x) \le \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

که چیرې $x < 0$ وي نو $x \le c_n(x) \le 0$ دی .داسې چې :

$$|R_n(x)| = \frac{\exp(c_n(x))}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{\exp(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

دی.

بنأ پردې

$$|R_n(x)| \le \begin{cases} \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1} \text{ ، که } x\ge 0 \\ \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \text{ ، که } x\le 0 \end{cases}$$

دی.

د (2.2.9) قضیې له مخې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

دی.

د پورتنی غیر مساواتو له مخې لیکو چې:

$$\lim_{x\to\infty}R_n(x)=0$$

په دې ډول

$$\lim_{x\to\infty}p_n(x)=e^x$$

دی.

یعنې د هر $x\in\mathbb{R}$ له پاره لروچې :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e^x$$

دی.

مثال (8.2.9). که $x=1$ وضع کړو د (2.3.9) د څرګندونې له مخې حاصلوو چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$$

دی.

پورتنی افاده د e له پاره د لیمټ اټکل کولو یو موثر میتود دی چې د هغې په واسطه د e د مطلوب تخمین دقت محاسبه کولی شو. (3.2.9) قضیې ثبوت په شان . لروچې

$$\left|\, e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\,\right|=|R_n(x)|\le\frac{e^1}{(n+1)!}1^{n+1}<\frac{3}{(n+1)!}$$

کله چې n تزاید وکړي نو $(n+1)!$ په ډېر چټکی سره زیاتیږي . کولای شو د c د تخمین دقت که n په اوسط ډول لوی وی حاصل کړو . د مثال په ډول که د c د مطلوب تخمین مطلقه خطأ د 10^{-4} څخه کوچنی وي کافی ده چې ولرو .

$$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$$

(کولی شو وبېې ازمایې) چې

$$\frac{3}{8!}<10^{-4}$$

دی.

په دې ډول کافی ده چې $n=1$ وضع کړو . دا یو حقیقت دی، لروچې :

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} \cong 2.71825$$

او

$$\left|e - \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!}\right| \cong 2.8 \times 10^{-5} < 10^{-4}$$

دی.

قضیه (4.2.9) . که $x \in \mathbb{R}$ وي لروچې:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right) = \sin(x)$$

ثبوت. د (3.2.9) مثال په شان

$$sin(x) = P_{2n+1}(x) = sin(x) - P_{2n+2}(x) = P_{2n+2}(x) = \frac{1}{(2n+3)!} cos\big(c_{2n+2}(x)\big) x^{2n+3}$$

داشان که $f(x) = sin(x)$ او $c_{2n+2}(x)$ د 0 او x په منځ کې یوه نقطه وي. په دې ډول

$$|R_{2n+2}(x)| = \frac{1}{(2n+3)!} |cos(c_{2n+2}(x))| \, |x|^{2n+3}$$

دی.

داسې چې د هر $0 \in \mathbb{R}$ له پاره $|cos(0)| \leq 1$ دی نو

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3}$$

څخه دی.

په نتیجه کې د(2.2.9) قضیې له مخې

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} = 0$$

دی.

په دې ډول $\lim_{x\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ دی.په دې ډول د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره

$$\lim_{x\to\infty} R_{2n+1}(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right) = sin(x)$$

دی.

مثال(9.2.9). د (2.4.9) قضیي لــه مــخې د اعشاري د لسو رقمونــو پــورې $P_{2n+1}\ (\pi/6)$ او $|P_{2n+1}\ (\pi/6) - \sin(\pi/6)|$ د اعشارې د دوو رقمونوپورې د $n = 1.2.3$ له پاره محاسبه کړئ. ایا دلاندې حقیقت په پام کې نیولوسره دا عددونه ثابت دي.

$$\lim_{x\to\infty} P_{2n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \ ..+(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}?$$

حل. که

$$S_n = P_{2n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \ \ldots.. + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}$$

وي.

(2) جدول د S_n او $|S_n - 1/2|$ قیمتونه ښیي په هغه صورت کې چې $n = 1,2,3$ وي. د (2) جدول ارقام راښیي چې S_n په ډېرې چټکې سره $1/2$ ته تقرب کوي کله چې n زیا تیږي . د یا دولو وړ ده چې وروسته د 10 رقمی عدد د رونډاف Round off څخه $S_4 \cong 0.5 = \sin(\pi/6)$

n	S_n	$\|S_n - 1/2\|$
1	0.4996741794	3.3×10^{-4}
2	0.5000021326	2.1×10^{-6}
3	0.4999999919	8.1×10^{-9}
4	0.5	2×10^{-11}

(2) جدول

قضیه(5.2.9). د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره لرو چې.

$$\lim_{x\to\infty}(P_n\ (x) = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}) = \cos(x)$$

د(6.2.9) دقضې ثبوت په مشابه ډول د (4.2.9) قضیي د ثبوت په شان دی .(تمرین په توګه دې ترسره شی).

قضیه (6.2.9) . که $x \in [1,2]$ وی لروچې.

$$\lim_{x\to\infty}\left((x-1) - \frac{1}{2}\ (x-1)^2 + \frac{1}{3}\ (x-1)^3 - \frac{1}{4}\ (x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n\right)$$
$$= \ln(x)$$

ثبوت. د (6.2.9) مثال په شان دتیلور فورمول د n ترتیب د $f(x) = ln(x)$ له پاره د(1) په قاعدې عبارت دی له .

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n$$

او

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n c^{-(n+1)} n!}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)c^{(n+1)}},$$

داسې چېc د x او 1 ترمنځ واقع وي .په دې ډول

$$|R_n(x)| = \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)|c|^{n-1}}$$

که $2 \le x \le 1$ وي نو $1 \le |x-1|$ او $2 \le c \le 1$ دی داسې چې $1 \le \frac{1}{|c|}$ دي.

بناً پر دې

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)}$$

دی.

په دې توګه

$$\lim_{x\to\infty} R_n(x) = 0 \ \le x \le 2$$

تبصره (2.2.9). په (6.9) سکشن له پاره $x \in (0,2]$ له پاره داسې ښیو چې.

$$\lim_{x\to\infty}\left((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n\right) = ln(x)$$

دی.

مثال (10.2.9).که $x \le 2$ وضع کړو د(6.2.9) قضیې د څرګندونی له مخې لاندی حقیقت په پام کې نیسو .

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = ln(2).$$

(3.2.9) د (2.2.9) قضیې ثبوت.څرنګه چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$$

دی. داسې چې د ثابت ترادف (0) لیمت له (0) څخه عبارت ده . نو دهر $r > 0$ له پاره کافی دی وښیو چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$$

دی. که $r > 0$ ورکړل شوې وي او د N مثبت تام عـد د داسـې شتون ولـري چـې د هـر $N > 2r$ وي . مهمه نه ده چې r څومره لـوی دی. کـه $n \geq N$ نـو $n > 2r$ دی.داسـې چـې

$$\frac{r}{n} \leq \frac{1}{2}$$

که $n \geq N$ وي په دې ډول

$$\frac{r^n}{n!}=\frac{r^N r^{n-N}}{N!\,(N+1)(N+2)\dots(n)}=\frac{r^N}{N!}\Big(\frac{r}{N+1}\Big)\Big(\frac{r}{N+2}\Big)\dots\Big(\frac{r}{n}\Big)$$
$$\leq\frac{r^N}{N!}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)\dots\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{r^N}{N!}\Big(\frac{1}{2^{n-N}}\Big)=\frac{(2r)^N}{N!}\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

دی.

بنأ پر دی

$$0 \leq \frac{r^n}{n!} \leq \frac{(2r)^N}{N!}\Big(\frac{1}{2^n}\Big)$$

دی.

که$n \geq N$ وي ، مونږ په خاص ډول N په پام کې نیسو. چې یو ځلی انتخاب شی . څرنګه چې$N > 2r$ او $n\to\infty$ له بلې خوا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

پورته غیر مساوات دا هم ښیې چې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$$

(3.9) د نامتناهی سلسلې مفهوم.

راځي چې د یو لړ واقعیتونو یادونې بیان کړو چې په (2.9) سکشن کې مولاسته راوړې وو په لاندې ډول بیان کړو.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)=2$ (د 2.9 سکشن په 7 مثال کې)

$\lim_{n\to\infty} = (1+\ 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!})=e$ (د 2.9 سکشن په 8 مثال کې)

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=ln(2)$(د 2.9 سکشن په 9 مثال کې)

دی.

په پورتنی مثالونوکې دا موضوع عامه ده :د خاصې قاعدې له مخې که دیو ترادف په شکل نوری

جملی ورزیاتی کړو نــو ترادف معین لیمت لــري. د نامتناهي سلسلې د مــفهوم مــوضـــوع د پورتني متن لـــه مخې حاصل شوې دی.

$$S_1 = c_1$$
$$S_1 = c_1 + c_2$$
$$S_1 = c_1 + c_2 + c_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$
$$\vdots$$

که $(n = 1,2,3)$ له پاره د S_n تراد ف د لیمټ لرونکی وي نو S ته د S_n لیمټ وایي ، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n) = S,$$

نو و به لرو

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = S.$$

دمثال په توګه

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2,$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e,$$

دی.

په پورته مثالونو کې د

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots$$

افادی له پاره کوم الهام نه لیدل کیږي . په دی معنې چې

$$\lim_{n\to\infty} (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n) = S$$

دی.

اوس پورتنی افاده په دې ډول تعبیروو چې

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

حتی که

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)$$

لیمټ شتون هم ونه لري

تعریف(1.3.9).که د c_1 ، c_2 ، c_3 ... c_n ترادف ورکړل شوی وي. اړونده نا متناهی سلسله د یوې ټاکلې افادې په شان داسې لیکو

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots$$

تراوسه په دې اسرار نه کوو چې د ټاکلی افادی

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)$$

لیمټ شتون لري که نه ؟. که څه هم چې د$\cdots +$ $c_n + \cdots + c_1 + c_2 + c_3$ نا متناهي سلسلې په هکله خبری وکړو . دمثال په توګه

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

سلسلې ته مراجعه کوو .سره له دې چې

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$$

لیمټ شتون نه لری، دا یو حقیقت دی، د$x \neq 1$ له پاره لروچې

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

د (1) قضیې د (2.9) سکشن له مخې داسې چې

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

نو په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2}\right) = \lim_{n\to\infty}(2^n - 1) = \infty$$

دی.

په حقیقت کې د S_n مخ په زیاتیدوترادف د هریو ور کړل شوي عدد له پاره په لنډ ه توګه لیکو په هــغه صورت کې چې n په کافی اندازه لوی وي.بنأ پردې

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

ترداف معین لیمټ نه لري.

تعریف (2.3.9). د $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ نامتناهې سلسله متقاربــه ده که چیــرې د

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)$$

لیمټ شتون و لری . په دې حالت کې د$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ نامتناهې سلسلې حاصل جمع به $\lim_{n\to\infty} S_n$ وي .

علمي یا فني اصطلاحات اوښودنې :

د$S_1, S_2 \ldots S_n$ تراد ف د ورکړل شوی نامتناهې سلسلو د ترادف د قسمي حاصل جمع په شان ښودلی شو. بنأ پردی یوه سلسله متقارب ده که او یوازی که د دغه سلسلې قسمي حاصل جمع لیمټ ولري. که چیرې دS حاصل جمع د $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ د نامتناهې متقاربی سلسلې د اړونده قسمي حاصل جمع د ترادف لیمټ وی. لیکو

$$S = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots$$

که چیرې $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ د سلسلې د قسمي حاصل جمع لیمټ ونه لري نو موږ ئ سلسلې دمتباعدی سلسلې په نوم یادیری نوممکن مونږ به دې ته اشاره وکړو چې نامتناهې

سلسله په ساده ډول یو سلسله ده . که چیرې د

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

ور کړل شوې سلسله د n ام جملی په شان ښودل شوې هم وي.

تبصره(1.3.9).(توجه). د $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ افاده دوه ګونی رول لوبوی :

څرګندوی چې نوموړی سلسله ممکن متقاربه نه وي،اودا هم څرګندوي چې دنوموړی سلسلې مجموعه متقاربه اټکل شوي دي.مونږ به د ریاضی ددی دوګونی څرګندونې پــه هکله نورو زده کړوته مراجعه وکړو.

مثال (1.3.9). د

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \cdots$$

سلسله او حاصل جمع یی د e عد د سره مساوی ده

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

د سلسلی n امه جمله عبارت ده له

$$\frac{1}{(n-1)!}$$

او n امه قسمي حاصل جمع یی عبارت دی له

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

مثال (2. 3.9) . د

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

سلسله متباعده ده . ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = +\infty$$

دی . ممکن مو نږ د یو سلسلې د لنډې لیکنې له پاره د حاصل جمع یا سیګما ($\sum$) له سمبول څخه کار واخلو لکه $c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_n$ د سلسله په لنډ ډول د $\sum_{k=1}^{n} c_k$ په شکل لیکو. د مجموعی انډکس د حاصل جمع د جملی پوری اړه لري چې په خپله خوښه یی تعینولی شوچې کیدای شی اساس یی د هری متناسبی جملی له پاره عوض شی. بناً پر دی

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

(د یاد ولووړده چې $0! = 1$ دی).

د مجموعه اندکس لومړی قیمت کیدای شی هر تا م عدد وي . د مثال په توګه کیدای شی سلسلې دا سې و ښیو چې:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

تعریف (3.3.9). د

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

سلسلې ته هندسی سلسله وایی که چیرې $x \in \mathbb{R}$ او x^{n-1} ته د سلسلې n امه جمله وایی چې د $x = 0$ له پاره د اهمیت وړ نه ده لکه

$$1 + 0 + 0 + \cdots$$

که $x \neq 0$ وي نو د نسبت پر له پسی جملې ثابت او د x مساوی دی په

$$\frac{x^n}{x^{n-1}} = x \qquad , \quad n = 1,2,3$$

په (2.9) سکشن کې د (1) په قضیه کې پری بحث شوي دی.

قضیه (1.3.9) . د

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

سلسله متقاربه ده که $|x| < 1$ وي یعنی د$-1 < x < 1$ په حالت کې د سلسلې حاصل جمع $\frac{1}{1-x}$ ده . او سلسله متباعده ده که چیرې $|x| \geq 1$ یعنی$x \leq -1$ یا $x \geq 1$ وي. په ګوته کوو چې د

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n \ldots$$

هندسي سلسلې قسمي مجموعه عبارت دی له

$$P_{n-1}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

که $x \neq 1$ وي د (2.9) سکشن د (1) قضي له مخې $P_{n-1}(x)$ ته $n - 1$ ترتیب ما یکلون پولینوم $f(x) = \frac{1}{1-x}$ له پاره دی.نه غواړو د (2.9) سکشن د (1) برخې قضیې له ثبوت څخه بیا یادونه وکړو،څرنګه چې $\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x)$ لیمټ شتون لري .که او یوازی که $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ موجود او $\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ وي کــه $x = 1$ وي هندسي سلسله عبارت دی له :

$$1 + 1 + 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

په دې ډول د سلسلې دnامو حدونو قسمي مجموعي عبارت ده له.

له $n = S_n(1)$ او $\lim_{n\to\infty} S_n(1) = \infty$ دی د $x = 1$ له پاره هندسي سلسله عبارت دی له
$1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$
په دې ډول د سلسلی د n اموحدونو قسمي حاصل جمع عبارت ده له

$$S_n(-1) = \begin{cases} 0 & \text{که } n \text{ جفت وي} \\ 1 & \text{که } n \text{ وي تاق} \end{cases}$$

د .... 1,0,1,0 ترادف لیمټ شتون نه لري . په دې توگه $|S_n(-1)|$ نا محدود نه ده هر څومره چې n لوی شي .

مثال (3.3.9) . د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

هندسي سلسله متقاربه او د

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

مجموعي لرونکی دی .د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots$$

سلسله متباعده ده . ځکه چې $1 < \frac{4}{3}$ دی.

تعریف(4.3.9) . که د c یو ثابت عدد په یوې سلسلې کې ضرب شی د هغې هر حد په هماغه عدد کې ضربیږي.

$$c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots ca_n + \cdots$$

قضیه (2.3.9) . فرضوو چې $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$ یو متقاربه سلسله ده اوسربیره پردې $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ ورکړل شوي وي لرو چې :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

داسي چې د سگما سمبول د سلسلې د حاصل جمع په شان لیکلی شو .

ثبوت . که

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

د nاومو جملو قسمي حاصل جمع د $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ له پاره وی نو

$$cS_n = c\,a_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

د nاومو جملو قسمي حاصل جمع د $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ له پاره دی. په لیمټ کې دثابت عدد د ضرب د قاعدی له مخې لرو چې :

$$\lim_{n\to\infty} cS_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

په دې ډول د $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ سلسه متقاربه ده او لرو چې.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

د سګماسمبول د حاصل جمعی د سمبول پرځای کارولی شو .

تعریف(5.3.9) . د سلسلو حاصل جمع په دی ډول تعریفوو . که د $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ او $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دوه یا څو سلسلې ولرو د هغوی حاصل جمع عبارت دی له.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

بناً پردی

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots)+(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots)\\ = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) + \cdots\end{aligned}$$

دی.

قضیه (5.3.9) . فرضوو چې $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ او $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلې متقاربې دي حاصل جمع یې هم متقاربه ده .

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ثبوت. لروچې

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)\\ = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)+(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

دی.

$$\lim_{n\to\infty} \quad (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

په دې توګه

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \left((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)+(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\right)\\ &\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= \sum_{n-1}^{\infty} a_n + \sum_{n-1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

دي.

بناً پردې $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متقاربه ده او لرو چې

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

داسې چې سيګما $\sum$ (summation) سمبول د سلسلې د حاصل جمع پر ځای ليکلې شو چې.

مثال(4.3.9) . د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$$

سلسله په پام کې نيسو. د (2.9) سکشن د (8) مثال په شان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)=e\,.$$

د (2.9) سکشن د (10) مثال په شان

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln(2)\,.$$

په لاس راوړو. چې دا ديوې نا متناهې سلسلې د تقارب لازمي شرط دې.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=e+\ln(2)$$

قضيه (1.3.9) . که $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ سلسله متقاربه وي ، بايد

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

وي.بناً پردې د سلسلو د تقارب له مخې بايد د سلسلود n اومو حدونومجموعه صفر ته متقاربه وي کله چې $n\to\infty$ وکړي.

ثبوت. فرضوو چې د $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ سلسله متقاربه ده . په دې معنې چې د $\{ca_n\}$ترادف د قسمي حاصل جمع ليمټ شتون لري داسې چې ورکړل شوي سلسله د لاندې مجموعې لرونکې وي .

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n)$$

لروچې

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n+1})=S,$$

داسې چې يوازنی توپير S_1,S_2,S_3 او S_2,S_2,S_4 تر منځ يوازې د اندکس تغير دي. نو په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0$$

دی.په داسې حال کې چې $(S_{n+1} - S_n) = c_{n+1}$ دی.

بنأ پر دی

$$\lim_{n\to\infty} c_{n+1} = 0$$

دی.

تبصره (2.3.9) .سره له دې چې د لازمی شرط له مخې

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

دی . د نا متناهې سلسلې دغه حالت د سلسلې د تقارب له پاره کافي نه دی .

$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$

قضیه (4.3.9) . د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

د نا متناهې سلسلې ته متباعده سلسله وايې حتی که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

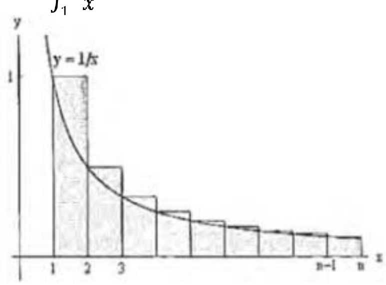
وي .

ثبوت. د(1) شکل نه په کار اخستلوسره، هغه ساحه چې د $y = \frac{1}{x}$ گراف او د[$[1, n]$ انټروال ترمنځ واقع ده د مستطیلونو د مجموعی ساحو څخه کوچنی ده.

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx < (1)(1) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + (1)^n \left(\frac{1}{n-1}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

لروچې

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n)$$



(1) شکل

په دې ډول

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}>ln(n), n=2,3\ldots$$

دی.پورتنۍ نا مساوات ښيي چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=+\infty$$

دی.

داسې چې $\lim_{n\to\infty} ln(n)=+\infty$ دی. بناً پر دی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ سلسله متباعده ده . د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

نا متناهې سلسلې ته په کتوسره دا يوه هارمونيکی سلسله ده . هارمونيکی سلسله د نا متناهې سلسلې يو مثال دی چې متباعده سلسله ده . سره له دې چې د n ام حد ليمټ يې صفر دی کله چې $n\to\infty$ بې نهايت ته تقرب وکړی . په هر حال د ترادف قسمي حاصل جمع چې هارمونيکی سلسلې پوری اړه لري په ورورو زيا توالی مومی . دا به ډيره گرانه وي چې د هارمونيکی سلسلې تباعد په عددی ډول لاسته راوړو .

تبصره (3.3.9) . ديوې نا متناهې سلسلې تقارب تغير نه کوي که چيرې په محدود ډول د سلسلې حدونه تغير وکړی دا يوحقيقت دی.که چيرې $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_N+c_{N+2}+\cdots+c_{N+k}+$سلسله ولرو او دهغې N لومړيو جملو ته تغير ورکړو د

$$d_1+d_2+d_3+\cdots+d_N+c_{N+1}+c_{N+2}+\cdots+c_{N+k}+\cdots$$

يوه سلسله لاسته راځي چې يا به دواړه سلسلې متقاربې او يا به دواړه سلسلې متباعدې وي.که چيرې د لومړنی سلسلې قسمي حاصل جمع په لاندې ډول مشخصی کړو نو ليکو چې :

$$S_{N-k}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_N+c_{N+1}+c_{N+2}+\cdots+c_{N+k}, k=1,2,3\ldots,$$

ددويمې سلسلې قسمي حاصل جمع په لاندې ډول ده.

$$T_{N+k}=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_N+c_{N+1}+c_{N-2}+\cdots+c_{N-k}, k=1,2,3\ldots,$$

لروچې .

$$\begin{aligned}T_{N+k}&=(T_{N+k}-S_{N+k})+S_{N+k}\\&=((d_1-c_1)+(d_2-c_2)+\cdots+(d_N-c_N))+S_{N+k}\end{aligned}$$

په دې توگه $\lim_{n\to\infty}S_{N+k}$ شتون لري يوازې په هغه حالت کې چې$\lim_{n\to\infty}T_{N+k}$ شتون ولري .د تقارب دحالت له پاره لروچې:

$$\begin{aligned}&d_1+d_2+\cdots+d_N+c_{N+1}+c_{N+2}+\cdots+c_{N+k}\\&=((d_1-c_1)+(d_2-c_2)+\cdots+(d_N-c_N))\end{aligned}$$

$$+(c_1 + c_2 + \cdots + c_N + c_{N+1} + c_{N+2} + \cdots + c_{N+k} + \cdots$$

لیدل کیږي چې د N لومړی حدونو مجموعه د سلسلې د نورو مجموعو څخه متفاوته ده .

او د n له پاره د اولیه قیمت اندکس د اهمیت وړنه دی نوپه دې صورت کې ، مو نږ ممکن سلسله مشخص کړو،داسې چې $\sum_{n=4}^{\infty} c_n$ له ده عبارت $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ اویا په ساده ډول د $\sum c_n$ په شان وي .

(4.9) جذري یا نسبتي مشخصه . (ازموینه)

په دې برخه کې د مطلق تقارب له مفهوم څخه بحث وکړو او دوه مشخصې به په پرله پسې ډول استعمالوو چې د مطلق تقارب تصدیق کوی کومې چې د نسبتي او جذری مشخصو په نوم یادیږي .

(1.4.9)د یونواخت تقارب او مطلق تقارب قاعدې.

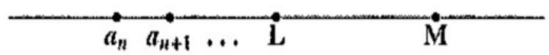
په پیل کې په ځینو علمی مفاهیم معرفی کوو چې : د$\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ ترادف ته متزاید ترادف وایې که چیرې د هر n له پاره $a_{n+1 \geq a_n}$ وي (دابه گرانه وي چې ووایو ترادف نا متناقص دی مگردابه اسانه وي چې ووایو ترادف متزایددی $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ ترادف ته د پورته خوا څخه محدود وایې که چیرې د M یوعدد داسې موجود وي چې د هر n له پاره $M \geq a_n$ وي.د M عدد ددی ښودونکی دی چې د.$\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ ترادف ته له پورته خوا څخه محدودی.

لاندی حقیقت د متزاید ترادف په هکله دسلسلې د غیر منفی جملو له پاره زمونږپه بحث کې مهم رول لوبوی .

دعوی(1.4.9) .د یونواخت تقارب قاعده.

فرضووچې $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ متزاید ترادف دی . یا دا چې نوموړی ترادف له پورته خوا څخه محدود او هم په دې حالت کې به $\lim_{n\to\infty} a_n$ شتون ولري. او دهر k له پاره $a_k \leq \lim_{n\to\infty} a_n$ او یا به هر یوددې ترادفونوڅخه له پورته خوا څخه نا محدود او په دې حالت کې به $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ وي د یونواخت تقارب د قضیې ثبوت به د عالی ریاضیاتو په کورس کې تر کتنی لاندی ونیسو . دا قاعده په مستقیم ډول هم درک کولای شو چې په (1) شکل کې وضاحت ورکړل شوي دی که چیرې دهر M له پاره $a_n < M$ $\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}$ متزاید وي .ترادف باید L ($L < M$)ته متقارب وي ،یا په بل عبارت دحدونو په شاوخوا کې متقارب دی یعنې $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ وي.

د یـــو نواخت تقارب نظریـــه دمثبتوعلامو سره دسلسلې له پاره مونږ لـــه یو ډیر مهم معیار خواته ر هنمائې کوو.



(1) شکل

دعوی (2.4.9) . که چیرې د هر... $n = 1.2.3$ له پاره $c_n > 0$ وي د $\sum c_n$ نا متناهې سلسله متقاربه ده که چیرې د اړونده ترادف قسمي حاصل جمع پورته خوا څخه محدوده وي. په دې حالت کې دهر n له پاره لروچې :

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

که چیرې ترادف قسمي حاصل جمع له پورته خوا څخه نا محدوده وي د$\sum c_n$ نا متناهې سلسله متباعده ده .او لروچې .

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) = +\infty$$

ثبوت .قبلو و چې

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

د $\sum c_n$ سلسلې‌د n حدونوقسمي حاصل جمع وي . داسې چې $c_{n+1} > 0$ دی نو لروچې.

$$S_{n+1} = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + c_{n+1} \geq c_1 + c_2 + \cdots + c_n = S_n$$

بناً پر دې د $\{S_n\}_{n-1}^{\infty}$ د ترادف قسمي حاصل جمع د $\sum c_n$ سلسلې پوری اړه لری ،متزاید تراد ف دی.د مونوتون د یو نواخت تقارب د قاعدې له مخې که چیرې د$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ترادف له پورته خوا څخه محدود وي او $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ شتون ولري یعنې د$\sum c_n$ سلسلې متقاربه وي .د هر n له پاره لروچې $S_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_k$ داسې چې $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$ د سلسلې حاصل جمع ده کولی شو لاندی حقیقت ولیکو :

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

که چیرې دمونوتون متزاید ترادف حاصل جمع د پورته خوا څخه نا محدود وي. لروچې :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) = +\infty$$

په دې ډول د $\sum c_n$سلسله متباعده ده .

د (2.4.9) قضیې د لاربنوونی له مخې حقیقتاً که یوه سلسله د حدونو د مطلقه قیمت په حال کې متقاربه وې هغه سلسله متقاربه ده .ددی له پاره چې دا حقیقت ثبوت کړو لاندی مسئله په پام کې نیسو :

مسئله (1.4.9). د c د ورکړل شوي حقیقي عدد له پاره

$$c = \frac{|c| + c}{2} - \frac{|c| - c}{2}$$

دی.

لروچې

$$\frac{|c| + c}{2} = \begin{cases} |c|, & c \geq 0 \text{ که} \\ 0, & c \leq 0 \text{ که} \end{cases}$$

او

$$\frac{|c| - c}{2} = \begin{cases} 0, & c \leq 0 \text{ که} \\ |c|, & c \geq 0 \text{ که} \end{cases}$$

وي نو په خاص ډول $|c| \leq \frac{|c|-c}{2} \leq 0$ او $|c| \leq \frac{|c|+c}{2} \leq 0$ دی

ثبوت. نو موړی نا مساوات د ساده الجبری عملیی پواسطه ثبوت شوي دي .اوس ثبوتوچې .

$$\frac{|c| + c}{2} = \begin{cases} |c|, & c \geq 0 \text{ که} \\ 0, & c \leq 0 \text{ که} \end{cases}$$

وي ،دا يو حقيقت دی. که $c \geq 0$ وي نو لرو چې $|c| = c$ دي او

$$\frac{|c| + c}{2} = \frac{-c + c}{2} = 0$$

ددی له مخې په پام کې نیسو چې .

$$\frac{|c| - c}{2} = \begin{cases} 0, & c \leq 0 \text{ که} \\ |c|, & c \geq 0 \text{ که} \end{cases}$$

وي ، که $c \geq 0$ وي لرو چې $|c| = -c$ دی فلهذا

$$\frac{|c| - c}{2} = \frac{|c| + |c|}{2} = |c|$$

دی.

قضيه(3.4.9) . که $\sum |c_n|$ سلسله متقاربه وي نو $\sum c_n$ سلسله هم متقاربه ده.

ثبوت. د (1.4.9) ليما له مخې لروچې .

$$c_n = \frac{|c| + c_n}{2} - \frac{|c| + c_n}{2}$$

بنأ پردې لازم دی وليکو چې $\sum c_n$ متقاربه ده نو د کافی شرط له مخې ليکو چې $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n| - c_n}{2}$

او $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n| + c_n}{2}$ متقاربې دي.داسې چې

$$\frac{|c_n| + c_n}{2} \le |c_n|$$

دی لروچې

$$\frac{|c_1| + c_1}{2} + \frac{|c_2| + c_2}{2} + \cdots + \frac{|c_n| + c_n}{2} \le |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|$$

دی.

داسې چې $|c_n|$ $\sum$ متقاربه ده نو دM یو عدد شتون لري چې د هر n له پاره $|c_1| + |c_2| +$
$M \le |c_n| + \cdots$ په لاس راځی . د پورتنی نا مساوات په پام کې نیولو سره د هر n له پاره

$$\frac{|c_1| + c_1}{2} + \frac{|c_2| + c_2}{2} + \cdots + \frac{|c_n| + c_n}{2} \le M$$

دی.

بنأ پردې د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n| + c_n}{2}$$

ترادف قسمي حاصل جمع له پورته خوا څخه محدود ده . د هر n له پاره لروچې :

$$\frac{|c_n| + c_n}{2} \ge 0$$

په دې ډول د(2.4.9) قضیه د تطبیق وړده . اولاندې پایله ترلاسه کیږي چې

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n| + c_n}{2}$$

متقاربه ده.

په ورته شان د n له پاره

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n| - c_n}{2}$$

سلسله هم متقاربه ده . دا چې د هر n له پاره

$$0 \le \frac{|c_n| - c_n}{2} \le |c_n|$$

دی. په دې توګه

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|c_n| + c_n}{2} - \frac{|c_n| - c_n}{2}\right)$$

د یوې سلسلې د قسمي حاصل جمع په شان متقاربه ده.

تعریف (1.4.9) .د $\sum a_n$ سلسلې ته مطلق متقاربه وايي که چیرې $\sum|a_n|$ سلسله متقاربه وي د(3.4.9) قضې له مخې که يو سلسله مطلقاً متقا ربه وي نو نوموړی سلسله متقاربه ده . د بلې خوا کيدای شي يوه سلسله متقاربه وي خومطلقاً متقاربه نه وي .

مثال (1.4.9) .د 2 سکشن د 10 مثال په شان د

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

سلسله متقاربه (اوحاصل جمع $\ln(2)$) ده دورکړل شوې سلسلې د هری جملې د مطلقه قیمت په نیولو سره لاندی هارمونیکي سلسله لاسته راځي .

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

او مونږ ښودلې چې هارمونیکي سلسله متباعده ده (د 3.9سکشن د 4 قضې له مخې)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

سلسله متقاربه ده مګر سلسله مطلقاً متقاربه نه ده

تعریف(2.4.9). د $\sum a_n$ سلسلې ته شرطاً متقاربه وايي که چیرې د $\sum a_n$ سلسله متقاربه وي. مګر $\sum a_n$ سلسله مطلقاً متقاربه نه ده.یعنې $\sum|a_n|$ متباعده ده بناً پردې د (1.4.9) مثال په شان

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

سلسله شرطاً متقاربه ده. ددې برخې په پام کې نیولو سره به د يو مهم مطلب په شان دمطلقاً متقارب په هکله بحث وکړو څرنګه چې مطلق متقارب د تقارب ښودونکی دی ددغو مشخصو له مخې به و کړای شو د ډیرو سلسلو تقارب وازمايو. مونږ به شرطاً تقارب مسلئه په (8.9) برخې کې و څیړو .

(2.4.9) نسبتی ازموینه. په پیل کې هندسي سلسله مشاهده کوو او دهغې په باب يو له دی دواړو حالتو څخه چې يا به مطلق متقارب او يا به متباعده وي، تر څیړنې لاندې نیسو .

قضیه (1.4.9) . د $\sum x^{n-1}$ هنـــدسي سلسلې تـــه مطلق متقارب وايـــې کـــه $|x|\le 1$ يعنې که $-1<x<1$ وي په دې توګه ښودلې شو چې $\sum x^{n-1}$ مطلقاً متقاربه ده . که $|x|\ge 1$ يعنې $x\ge 1$ او $x\le -1$ وي په دې توګه سلسله متباعده ده.

ثبوت. د(3.9)(د 3.9سکشن د 1 قضیي له مخې) مونږ بنودلې وو چې $\sum x^{n-1}$ سلسله د $1 \le |x|$ له پاره سلسله متقاربه اود$1 \ge |x|$ له پاره سلسله متباعده ده . په دې توګه بنیو$\sum x^{n-1}$ د$1 \le |x|$ له پاره مطلقاً متقاربه ده . د 2.9سکشن د 1 قضیي له مخې لروچې .

$$1 + |x| + |x|^2 + |x|^3 + \cdots + |x|^{n-1} = \frac{1}{1-|x|} - \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}(1 + |x| + |x|^2 + |x|^3 + \cdots + |x|^{n-1}) = \frac{1}{1-|x|} - \frac{1}{1-|x|}\lim_{n\to\infty}|x|^n = \frac{1}{1-|x|}$$

دی.

د$1 \le |x|$ په حالت کې$\lim_{n\to\infty}|x|^n = 0$ دی.

د یا دولووړده چې $\sum x^{n-1}$ هندسي سلسلې دپر له پسې جملو مطلقه قیمت د هر n د پاره له $|x|$څخه عبارت دی . یعنې د هر n له پاره

$$\frac{|x|^n}{|x^{n-1}|} = |x|$$

دی.

نسبتي ازموینی له تګلاری له مخې هغه سلسله چې متقاربه ده د هندسي سلسلې سره د مقایسه کولو وړ ده.

قضیه (4.4.9) . (نسبتي ازموینه) فرضوو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L$$

یا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = +\infty$$

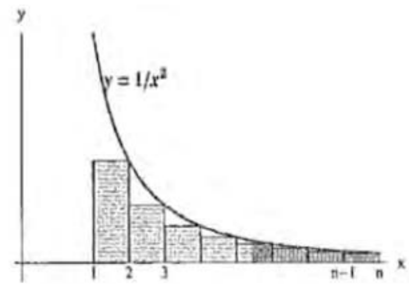
a) که$L < 1$ وي$\sum c_n$سلسله مطلقاً متقاربه ده.

b)که$L > 1$ وي $\lim_{n\to\infty}|c_{n+1}|/|c_n| = +\infty$ نو په دې صورت کې سلسله متباعده ده. تاسی کولای شی دنسبتی ازموینې ثبوت ددی برخی په پای کې ووینئ .

تبصره(1.4.9) . نسبتی ازموینې بی نتیجه ده که چیرې

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=1$$

وي . يعنې $\sum c_n$ سلسله ممکن متقاربه او يا متباعد وي . د مثال په توګه . مو نږ و ښودل چې $\sum\frac{1}{n}$ سلسله متباعده ده(د 4 قضيې د 3.9سکشن له مخې)د عين طريقې په کارولوسره مونږ کو لای شو $\sum\frac{1}{n^2}$ و ښيو چې سلسله متقاربه ده . قبلوو چې $f(x)=\frac{1}{x^2}$ دی داسې چې $\sum\frac{1}{n^2}=f(n)$ دی . (2) شکل ته په کتنې سره د مستطيلونو مجموعی مساحت د ټولې هغه ساحې څخه چې د f تا بع اود [1,1−] دانټروال په منځ کې واقع ده ،کو چنی دی .



(2) شکل

په دې ډول

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n\frac{1}{x^2}dx=1-\frac{1}{n}<1$$

بنأ پر دې د هر n له پاره

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$$

دی او دا راښيي چې د ترادف قسمي حاصل جمع د $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلې پورې مربوط دی او د پاسه خوا څخه محدوده ده .د ېلی خوا د هر n له پاره لروچې $0<\frac{1}{n^2}$ دي، پـه دې ډول د (2.4.9) قضيې لـه مخې $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسله متقاربه ده.اوس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

او

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1$$

دی.

بنأپردې په دواړو حالاتو کې د نسبتي شرط له مخې په متوالی توګه لیمټ 1دی.سره له دې چې $\sum\frac{1}{n}$ هارمونیک سلسله متباعده ده .او د $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسله متقاربه ده .

مثال (2.4.9) . د نسبتي ازموینې له مخې معلوم کړئ چې ایا د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\quad\frac{3^{2n-2}}{n!}$$

سلسله مطلقاً متقاربه ده که متباعده ده.

حل. د نسبتي ازموینې له مخې محاسبه کوو:

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{\left|(-1)^n\quad\frac{3^{2(n+1)-2}}{(n+1)!}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{3^{2n-2}}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{2n+2-2}}{(n+1)!}}{\frac{3^{2n-2}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{2n}}{3^{2n-2}}\frac{n!}{(n+1)!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0<1$$

په دې ډول نوموړې سلسله مطلقاً متقاربه ده.

مثال (3.4.9) . د نسبتي ازموینې له مخې معلوم کړئ چې ایا د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\quad\frac{n!}{10^n}$$

سلسله مطلقاً متقاربه ده که متباعده ده.

حل. لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{\left|(-1)^n\quad\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{n!}{10^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\frac{10^n}{10^{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{10}\right)=+\infty$$

په دې ډول د نسبتي ازموینې د وړاندیز له مخې سلسله متباعده ده.

لیدل کیږی چې د ور کړل شوي سلسلې د n اومو جملو لیمټ 0 نه دی نو وایو چې سلسله متباعده ده ، دا یو حقیقت دی .

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{n!}{10^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n}=+\infty$$

داسې چې $0<\frac{n!}{10^n}$ دی د (2.9) سکشن د 2 قضیې له مخې لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$$

دی.

(3.4.9) جذري ازموينه.جذري ازموينه چې اساس يې هندسي سلسله تشكيلوي كټ مټ د نسبتي سلسلې په شان دی . كه د $\sum x^{n-1}$ هندسي سلسله وركړل شوي وي. نو دهر n له پاره لروچې :

$$|x^n|^{1/n} = |x|^{n/n} = |x|$$

$1 > |x|$ له پاره سلسله متقاربه ده اود $1 < |x|$ له پاره سلسله متباعده ده.

په مشابې ډول د يوې سلسلې د تقارب له پاره د جذري معيار وړاندوينه هم كولای شو.

قضيه (5.4.9) . (جذري ازموينه) فرضوو چې :

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = L$$

يا

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = +\infty$$

وي.

a) د $L < 1$ له پاره سلسله متقاربه ده.

b) كه $L > 1$ يا $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = +\infty$ وي. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سلسله متباعده ده.

تاسې كولای شی د جذري معيارثبوت ددې برخې په پای كې وګورئ .

تبصره(2.4.9).كه $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 1$ وي ممكن د $\sum c_n$ سلسله يا متقاربه او يا متباعده وي . دا يو حقيقت دی.د $\sum \frac{1}{n}$ سلسله متباعده ده .او د $\sum \frac{1}{n^2}$ سلسله متقاربه ده .چې په دواړو حالتونوكې مربوطه ليمټ 1 دی.اودا هم يو حقيقت دی.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n^{1/n}} = 1$$

او

$$\lim_{n\to\infty} (1/n^2)^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n^{2/n}} = 1$$

دی.

داسې چې $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ (د 5.9 سكشن په 10 مثال كې د لو پيتال د قاعدې له مخې)

تبصره(3.4.9) .كولای شو وښيو چې

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = L$$

دی.

بنأ پردې که چیرې نسبتی ازموینې د تطبیق وړوی ، همدارنګه جذری ازموینه هم دتطبیق وړده په عمومی ډول د نسبتی ازموینې کاروړل ډیر اسانه ده خو په بعضې حالا تو کې ډیر مناسبه ده چې جذری ازموینې په کاریوړل شی .

مثال(4.4.9). جذری ازموینې له مخې معلوم کړئ چې ایا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$$

سلسله مطلقآ متقاربه ده که متباعده ده.

حل. لروچې:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/n}}{2^{1-1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lim_{n\to\infty}n^{1/n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

دی.

د جذري ازموينې له مخې سلسله متقاربه(مطلقآ متقاربه) ده ځکه چې ټول حدونه يې مثبت دي.

مثال(5.4.9). د جذری ازموینې د کارولو له مخې معلوم کړئ چې ایا

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\quad\frac{2^{2n-1}}{2n-1}$$

سلسله مطلقآ متقاربه ده که متباعده ده.

حل. لروچې:

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\right|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2-1/n}}{(2n-1)^{1/n}}$$
$$=\frac{4}{\lim_{n\to\infty}(2n-1)^{1/n}}$$

اوس

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}exp\left(\frac{1}{n}ln(2n-1)\right)=exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{ln(2n-1)}{n}\right)$$
$$=exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{2n-1}}{1}\right)=exp(0)=1$$

دی.

په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\right|^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{1}>1,$$

دی.

همدارنگه د جذري ازموينې د وړاندوينې له مخې سلسله متباعد ه ده .

د يادولووړده چې د سلسلې د n اومو جملو ليمټ 0 نه دی . ددې وړاند وينه کوو چې

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\quad\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(2n-1)\,ln(2)}}{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\,ln(2)}}{x} = +\infty$$

دا شان چې $ln(2) > 0$ وي.

(4.4.9) د نسبتي او جذري ازموينو ثبوت.

د نسبتي ازموينې ثبوت.

a) لروچې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L < 1$$

د ترادف ليمټ دتعريف له مخې $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ په اختياري ډول $r < 1$ ته نږدې وي په هغه صورت کې چې n په کافي اندازه لوی وي .په دې ډول د r يو حقيقي عدد شتون لري داسې چې $-1 < r < 1$ او N يو مثبت تام عدد وي .

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < r < 1$$

که $n \geq N$ وي بناً پردی

$$|c_{n+1}| < r|c_n| \qquad , n = N, N+1, N+2, \ldots$$

دی.

په دې ډول

$$\begin{aligned}
|c_{n+1}| &\leq r|c_N| \\
|c_{n+2}| &\leq r|c_{N+1}| \leq r(r|c_N|) = r^2|c_N|, \\
|c_{n+3}| &\leq r|c_{N+2}| \leq r(r^2|c_N|) = r^3|c_N|, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

دی.

داسې چې

$$|c_{n+j}| \leq r^j|c_N|, j = 0,1,2,3, \ldots$$

دی.

په دې ډول

$$|c_N| + |c_{N+1}| + |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+k}| \leq |c_N| + r|c_N| + r^2|c_N| + \cdots + r^k|c_N|$$

$$= |c_N|\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^k\right)$$

دی.

د ... $k = 0,1,2,3,$ له پاره داسې چې $0 < r < 1$ دی. نو $1 + r + r^2 + \cdots + r^k$ هندسي سلسله متقاربه ده لرو چې

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k < 1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

په دې ډول

$$|c_N| + |c_{N+1}| + |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+k}| \le |c_N|(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) \le |c_N|\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

دی.

داسې چې

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_N| + |c_{N+1}| + \cdots |c_{N+k}|$$
$$\le |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_N|\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

دی.

د هر ... $k = 0,1,2,3,$ له پاره قبلوو چې :

$$M = |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_N|\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

دهر k پاره له‌لرو چې

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_N| + |c_{N+1}| + \cdots |c_{N+k}| \le M$$

بنأ پر دې د ترادف قسمي حاصل جمع چې د $\sum|c_n|$ نا متناهې سلسلې پورې اړه لري له پورته خوأ څخه محدوده ده . د (2.4.9) قضيې له مخې د $\sum|c_n|$ سلسله متقاربــه ده یعــنې $\sum|c_n|$ سلسله مطلقاً متقاربه ده .

b) اوس (متباعد جز) د نسبتي ازموینې له پاره په اثبات رسوو بنأ پردې فرضوو چې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L > 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = +\infty$$

وي .

په دې حالت کې $r > 1$ شتون لري داسې چې N مثبت تام عددله پاره که $n \ge N$ وي نو

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \ge r$$

دی.

په دې ډول

$$|c_{N+1}| \ge r|c_N|$$

$$|c_{n+2}| \geq r|c_{N+1}| \geq r^2|c_N|,$$
$$\vdots$$
$$|c_{N+k}| \geq r^2|c_N|.$$

په دې توګه که $n \geq N$ وي لروچې :

$$|c_n| \geq r^{n-N}|c_N|.$$

دی.

څرنګه چې $r > 1$ دی نو $\lim_{n\to\infty} r^{n-N}|c_N| = +\infty$ دی د پورتني نا مساواتو له مخې $\lim_{n\to\infty} |c_N| = +\infty$. پرته له دې دا په دې دلالت کوي چې $\sum|c_n|$ سلسله متباعده ده دسلسلې د تقارب د لازمی شرط له مخې

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

دی.

د جذري ازموینې ثبوت.

a) که

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = L < 1$$

وي .

$|c_n|^{\frac{1}{n}}$ په اختیاری ډول که L ته نږدې وي او n په کافی اندازه لوی وي .په دې ډول د r یو عدد داسې شتون لری چې د$0 < r < 1$ او N مثبت تام عدد له پاره

$$0 \leq |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq r$$

وي، که$n \geq N$ وي. بناً پردې

$$|c_n| \leq r^n, n = N, N+1, N+2, \dots.$$

په دې ډول

$$\begin{aligned}|c_N| + |c_{N+1}| + |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n-k}| &\leq r^N + r^{N+1} + r^{N+2} \dots + r^{N+k} \\ &= r^N(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) \\ &\leq r^N(1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots) \\ &= r^N\left(\frac{1}{1-r}\right)\end{aligned}$$

دی.

بناً پردې دهر $k = 0,1,2,3, \dots$ له پاره

$$\begin{aligned}&|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_N| + |c_{N+1}| + \cdots |c_{N+k}| \\ &\leq |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + \frac{r^N}{1-r}\end{aligned}$$

دی.

دا په دې دلالت کوي چې د ترادف قسمي حاصل جمع د $\sum|c_n|$ سلسلې له پاره له پورته خوا شخه محدوده ده د (2) قضیې له مخې $\sum|c_n|$ متقاربه ده او پــه پایله کې $\sum c_n$ مطلقآ متقاربه ده
.b) که

$$\lim_{n\to\infty}| c_n |^{\frac{1}{n}} = L > 1 \text{ یا } \lim_{n\to\infty}| c_n |^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

د $r > 1$ له پاره د N یو تام عدد داسې شتون لري چې

$$| c_n |^{\frac{1}{n}} \geq r \quad n = N, N+1, N+2, \dots$$

وي.

په دې ډول

$$| c_n | \geq r^n, n = N, N+1, N+2, \dots.$$

دی داســې چــې $r > 1$ او د $\lim_{n\to\infty} r^N = +\infty$ د پــورتنی نــا مســاواتــو لــه مخــې $\lim_{n\to\infty}| c_n | = +\infty$ دی.په دې ډول $\sum c_n$ متقاربه نه ده.

(5.9) لومړی برخه.

د طاقت سلسله

تعریف (1.5.9). په (1.9) او (2.9) برخو کې مونږ د تیلور دپولینوم په هکله بحث وکړ . د c په قاعده د f تابع له پاره د تیلور N ترتیب پولینوم عبارت دی له .

$$\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{n!}f^{(k)}(c)(x-c)^k$$
$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

په دی شان د f او x مثالونه مونږ مشاهده کړي دي.یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\left(c + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n\right)$$
$$= f(x)$$

د نامتناهې سلسلې مثالونه په لاندې شکل ښودل شوي دي.

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \cdots$$

د دا ډول سلسلې حاصل جمع د x د ځینو قیمتونو له پاره عبارت ده له.

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$$+\cdots = f(x)$$

تعریف (1.5.9). د c په قاعده د f تابع له پاره دتیلورسلسله دنامتناهي سلسلې په نوم یادیږي.

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \cdots$$

دیادولو وړده چې (n+1)st د تیلورسلسلې حاصل جمع د c په قاعده د f تابع له پاره د تیلور د n ترتیب د تیلور د پولینوم څخه عبارت دی د c په قاعده د f تابع له پاره دتیلور پولینوم په حالت کې تقریباً مونږ به دتیلورټوله سلسله په پام کې ونیسو چې د هغوی قاعدې (0)وي، د تیلورسلسله د (0) په قاعده دمایکلورن سلسله د f تابع له پاره نومول کیږي.

$$f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x)^n + \cdots$$

مثال (1.5.9) .لکه څنګه چې د (1.9) سکشن په(2) مثال کې مو ولیدل چې د مایکلورن پولینوم د طبعي توان لرونکی تابع له پاره عبارت دی له.

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$p_n(x)$ ته د(n+1) د مایکلورن سلسلې قسمي مجموعه د طبعي توان لرونکی تابع له پاره عبارت دی له.

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

د(2.9) په سکشن کې مونږ دتیلور دباقي پاتې فورمول د ((9. 2) سکشن په 3 قضیه کې) هر $x\epsilon\mathbb{R}$ له پاره مو په لاندې ډول کارولی وو

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right) = e^x$$

بناً پردې د هر$xc\mathbb{R}$ له پاره لروچې

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = e^x$$

مثال (2.5.9) . لکه څنګه چې د (1.9) سکشن په(10) مثال کې مو ولیدل چې د تیلورد n ترتیب پولینوم د (1) په قاعده لو ګاریتمی تابع عبارت ده له.

$$(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n$$

د (2.9) سکشن د(6)قضېې له مخې لرو.

$$\lim_{n\to\infty}\left((x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n\right)=ln(x)$$

که $2 \le x \le 1$وي په (6.9) **سکشن کې به ګورو چې پورتنی څرګندونې د هر**$x\epsilon(0,2]$ **له پاره صحیح دی. بناً پردې د طاقت لرونکي سلسلې حاصل جمع عبارت ده له.**

$$(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$$

که $a_n=\frac{1}{n!}f^c(c), n=0,1,2,3,\ldots$ **سره وضع کړودتیلورسلسله د** c **په قاعده د** f **له پاره پــه لاندې ډول لیکو.**

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

تعریف (2.5.9). د طاقت سلسله د $(x-c)$ **په طاقت د**

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

په شکل ښودل کیږي.داسې چې $a_0, a_1, a_2 \ldots$ **ثابتونه او** a_n **ته د** $(x-c)^n$**ضریب وایې بناً پردې د تیلور سلسله د** c **پــه قاعده د طاقــت سلسله د** $(x-c)$ **طاقت دی.په دې سکشن او پــه (**6.9**) سکشن کې به د طاقت سلسلې خواص امتحان کړو، او هغه توابع چې د طاقت سلسلې په واسطه تعریف شوی وي دکلکولس په کورس کې به یې وګورو،د ریاضیاتو ډیرې خاصې توابع به د طاقت لرونکي سلسلې په واسطه تعریف کړو.**

(2.5.9)د طاقت سلسلې د تقارب خواص .

په پیل کې د یوی قضیې په هکله بحث کوو چې د هغې په مرسته به وکولی شود طاقت سلسلی د حدونوتقارب پیش بینی کړو.

قضیه(1.5.9). د$\sum\ a_n(x-C)^n$**طاقت سلسله ورکړل شــوې ده د لاندې حالتونو څخه یــو حالت صدق کوی.**

(1**) د** $r>0$ **یو عددوجود لري داسې چې د** $\sum\ a_n(x-C)^n$ **سلسله مطلق متقاربه دی که چیرې** $|x-c|<r$ **وي یعنې** $c-r<x<c+r$ **او متباعده ده که چیرې د** $|x-c|>r$**یعنې** $x>c+r$ **او یا**$x<c-r$ **وي.**

2) د $\sum a_n(x-C)^n$ سلسله د ټولو $x\epsilon$ r له پاره متقاربه ده.
3) د $\sum a_n(x-C)^n$ سلسله متقارب ده که او یوازې که $x=c$ وي په کوم حالت کې چې سلسله a_0 یوازېنی شکل ته راشي.

د (1) قضیې ثبوت د عالي ریاضیاتوکلکولس په کورس کې به ترسره کړو.

تبصره(1.5.9).د (1)قضیې د(1) حالت ته په کتو سره کـه د $\sum a_n(x-C)^n$ سلسله د $(c-r,c+r)$په خلاص انټروال کې متقاربه وي نو په دې صورت کې د r عددته د سلسلې د تقارب شعاع وایې. دطاقت سلسله کیدای شي متقاربه او یا متباعده وي.که x تقارب د یو خلاص انټروال انجامي نقطه وي.که و غواړوچې طاقت دسلسلې دتقارب انټروال معلوم کړو.نوضروري ده چې خلاص انټروال انجامي نقطو کې د سلسلې تقارب وڅیړو.کـه د (1)قضیې (2) حالت په پام کې ونیسونو$(-\infty,+\infty)$ ته دتقارب انټروال وایې ،$(+\infty)$ ته دسلسلې دتقارب شعاع وایې.په (3)حالت کې تقارب انټروال منحط (degenerated)یا د$\{c\}$ په څیریوازې یو (یکتا) دی نو په دې صورت کې دتقارب شعاع(0) ده.چې په مثالونو کې به توضیح شي.کولی شو طاقت سلسلې د تقارب خلاص انټروال د نسبتي او یا جذري ازمایښت په واسطه لاسته راوړو.مونږ به نورو ازموینو ته له سره کتنه وکړوچې ددې سکشن په مخکینو برخو کې پرې بحث شوی،که وغواړي چې دیوی سلسلې دتقارب وضعیت د انټروال په انجامي نقطو کې معلوم کړئ.

مثال (3.5.9).د

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

هندسي سلسله د x په طاقت د طاقت له سلسلې څخه عبارت دی، د طاقت د سلسلې دا سلسله ته (0) په قاعده د $\frac{1}{1-x}$ تابع له پاره د تیلور سلسله وایې. د (4.9) سکشن(1) قضیې په شان نوموړی سلسله د $-1<x<1$ له پاره مطلق متقارب او د $x\le-1$ یا $x\ge1$ له پاره متباعده ده. بنأ پردې دهندسي سلسلې دتقارب خلاص انټروال (1 ,1-) دی او د تقارب شعاع یې (1) ده.د نوموړی سلسله دتقارب د خلاص انټروال په انجامي نقطو1او1- کې متباعده ده.

مثال (4.5.9) . د طبعي عدد په توان تابع له پاره د تیلور پولینوم یعنې .

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

د هر $x\in\mathbb{R}$ له پاره مطلق متقاربه سلسله ده .دا یو حقیقت دی.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n!}x^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\,|x^{n+1}|}{(n+1)|x^{n}|}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\,|x|\right) = |x|\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

په دې ډول د نسبتي ازموينې له مخې د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره سلسله مطلق متقاربه ده. بنأ پر دې دتقارب انټروال$(\infty\ +\ ،\ \infty-)$ دی. او دتقارب شعاع يې$\infty+$ ده.

مثال (5.5.9) . د

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^{n} = x + 2!\,x^{2} + 3!\,x^{3} + \cdots$$

دطاقت سلسله ده که او يوازې که $x = 0$ کې متقاربه وي . دا يوحقيقت دی.مونږ کولی شو نسبتي (خارج قسمت) ازموينه تطبيق کړو .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!\,x^{n+1}|}{|n!\,x^{n}|} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = +\infty$$

که $x \neq 0$ وي.نوپه دې ډول سلسله متباعده ده . که $x = 0$ وي نو سلسله د $0 + 0 + 0 + \cdots$ شکل غوره کوي چې تقارب يې واضح دی. دنو موړی طاقت لړونکي سلسلې دتقارب شعاع (0) ده.

مثال (6.5.9) . د

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{n} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^{2} + \frac{1}{7}x^{3} + \cdots$$

طاقت سلسله په پام کې نيسو .ددې طاقت سلسلې دتقارب شعاع او د تقارب انټروال پيدا کړئ .

حل. د نسبتی ازموينې له مخې .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{2n+3}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{2n+1}x^{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+3}\,|x|\right) = |x|\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+3} = |x|$$

دی.

په دې ډول ورکړل شوي دطاقت سلسله د $|x| < 1$ له پاره مطلق متقاربه ده .او د $|x| > 1$له پاره متباعده ده. بنأ پر دې د تقا رب شعاع $(-1, 1)$ ده.

مثال (7.5.9) . د

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}(x-2)^{n}$$

دطاقت سلسله په پام کې نيسو .ددی طاقت سلسلې دتقارب شعاع او د تقارب انټروال پيدا کړئ.

حل. دجذري ازموينې له مخې .

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2}(x-2)^n\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2/n}}|x-2| = |x-2| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^{1/n})^2} = |x-2|$$

ده.

په دې ډول د طاقت سلسله د $|x-2| < 1$ له پاره متقاربه ده . اود $|x-2| > 1$ له پاره متباعده ده. بناً پردې د تقارب خلاص انټروال يې عبارت ده له .

$$\{x: |x-2| < 1\} = (1,3)$$

(3.5.9) د هغو توابعو مشتق چې د طاقت سلسلو په واسطه تعريف شوي وي.

د طاقت سلسله د تقارب په خلاص انټروال د نامتناهی ځلی مشتق نيولو وړ وي .

قضيه (2.5.9) . فرضوو چې:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

د طاقت لرونکې سلسله دJ تقارب په غير خالی خلاص انټروال ولري . او دهر $x \in J$ له پاره

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 a_4(x-c)^4 + \cdots \\ &+ a_n(x-c)^n + \cdots \end{aligned}$$

وي.نو د تابع د J په انټروال کې د هر ترتيب مشتق لري .او نوموړی مشتقات د طاقت سلسله د حدپه حد مشتق نيولو په واسطه لاسته راوړلې شو .

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 \\ &\quad + \cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \ldots \\ f''(x) &= 2a_2 + (2)(3)a_3(x-c) + (3)(4)a_4(x-c)^2 + \cdots \\ &\quad + (n-1)na_n(x-c)^{n-2} + \cdots \\ f^{(3)}(x) &= (2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4(x-c) \\ &\quad + \cdots + (n-2)(n-1)na_n(x-c)^{n-2} + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

طاقت هغه سلسله چې دf تابع پوری اړه لري . د f تابع د مختلفو ترتيبونو مشتقاتو پوری اړوند سلسلې دعين تقارب انټروال لري کوم چې د f تابع دطــاقت سلسلی پـــوری اړه لـــري.

د (2.5.9) قضيې ثبوت به په راتلونکې کې د عالی رياضياتوکلکولس په کورس کې ترسره کړو .

مثال (8.5.9). که $-1 < x < 1$ وي.پوهيږوچې

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

دی.

a) معلوم کړئ چې د x په طاقت د

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

f تابع د حد په حد مشتق نیولو په واسطه لاسته راځي.قبلو و چې طاقت سلسله د هندسی سلسلې په شان د$(-1,1)$عین خلاص انټروال ولري.

b) طاقت سلسله د x په طاقت معلومه کړئ.

$$f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

حل. a) د (9. 2.5) قضیې له مخې

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + \cdots)$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots nx^{n-1} + \cdots$$

د(9. 2.5) قضیې له مخې د پورتنۍ سلسلې د تقارب انټروال د اصلی سلسلې د تقارب انټروال دی. یعنې$(-1,1)$ دی. د نسبتی ازموینې له مخې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)x^n|}{|n\,x^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)|x| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x|(1) = |x|$$

په دې ډول $|x| < 1$ سلسله مطلقاً متقاربه ده او$1 < |x|$ له پاره سلسله متباعده ده .

b) بیا هم د (9. 2.5) قضیې له مخې.

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots nx^{n-1} + \cdots)$$
$$= 2 + (2)(3)x + \cdots + (n-1)(n)\,x^{n-2} + \cdots, x \in (-1,1).$$

د نسبتی ازموینې له مخې لیکو چې.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\,|x^{n+1}|}{(n-1)n|x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1} = |x|$$

په دې ډول د(2) قضیې له مخې سلسله د $(-1,1)$ په خلاص انټروال کې متقاربه ده .

مثال (9. 9.5).پوهیږو چې.

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

دی. طاقت هغه سلسله چې د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره یې مجموعه $\cos(x)$ وي د پورتنۍ سلسلې د حد په حد مشتق نیولو په واسطه تعین کړئ .

حل. داسې چې د تیلور سلسله دمجموعه د هر x له پاره د $(-\infty, +\infty)$ انټروال کې $sin(x)$ دی. نوکولی شو د (2.5 .9) قضیې له مخې ولیکو چې.

$$cos(x) = \frac{d}{dx}sin(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

د لاندی قضیې له مخې ویلی شو چې که یوه تابع دطاقت سلسلې د $(x-c)$ په طاقت تعریف شوي وي ،د نوموړې دطاقت سلسله د یوی تابع له پاره د c په قاعده د تیلور سلسله ده .

قضیه (3.5.9) . فرضوو چې د $x \in J$ له پاره

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

وي.په داسې حال کې چې J دطاقت سلسلې له پاره یو غیر خالی د تقارب خلاص انټروال دی .نو

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c), n = 0,1,2,3, \ldots$$

دی.

ثبوت. د (2.5.9) قضیې له مخې د f تابع د J په انټروال کې د اختیاری ترتیب مشتقات لري او

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + 5a_5(x-c)^4 + \cdots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + (2)(3)a_3(x-c) + (3)(4)a_4(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots,$$
$$f^{(3)}(x) = (2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4(x-c) + (3)(4)(5)a_5(x-c)^2 + \cdots,$$
$$f^{(4)}(x) = (2)(3)a_4 + (2)(3)(4)(5)a_4(x-c) + \cdots,$$
$$\vdots$$

دی.

په دې توګه

$$f(c) = a_0$$
$$f'(c) = a_1,$$
$$f''(c) = 2a_2,$$
$$f^{(3)}(c) = (2)(3)a_3,$$
$$f^{(4)}(c) = (2)(3)(4)a_4,$$
$$\vdots$$

واضحه ده چې

$$f^{(n)}(c), = n!\,a_n, n = 0,1,2,3, \ldots$$

دی .

بناً پردې

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c), \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

دی.

په نتیجه کې

$$f\ (x) = f\ (c) + f'(c)\ (x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(c)(x-c)^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

دی.

په دې ډول دطاقت هغه سلسله چې د f تابع له پاره تعریف شوي، f تابع د تیلور سلسله ده.

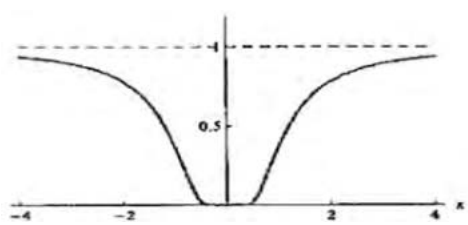
سره له دې چې کومه تابع چې د طاقت په سلسلو تعریف شوي وي ، نا متناهي مرتبی د مشتق نیولوور ډی . خوتوپې هغه توابع چې ، نا متناهی مرتبی د مشتق نیولوور ډی نه شو کولی دطاقت سلسلوپه واسطه تعریف کړو. داسې چې د انټروال په یوه مشخصه نقطه کې دعین قیمت لرونکی وي .

مثال(10.5.9). که چیرې

$$f\ (x) = f(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \text{ که} \\ 0, & x = 0 \text{ که} \end{cases}$$

د f تابع د(1) شکل گراف بنیې.

د شکل له مخې



(1) شکل

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = \lim_{x\to 0} exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

دی.

دا یو حقیقت دی . که چیرې $z = \frac{1}{x^2}$ وضع کړو لروچې د $x \to 0$ په صورت کې $z \to +\infty$ په دې ډول

$$\lim_{x\to 0} exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} exp(-z) = 0$$

بناْ پردې د f تابع په (0) کې متمادی ده. په رښتيا دf تابع د هــر ترتيب مشتق لــري. او د هــر

$$f^{\,n}\ (0) = 0$$

$n = 0,1,2, \dots$ له پاره دی.د يادولو وړ ده چې دf تابع گراف مبدأ ته په نږدې ساحه کې ډيره هموارده.مونږ يوازې دا ښيو چې . $f''\ (0) = 0$او $f\ (0) = 0$ او ثبوت يې په تخنيکی توگه ستونزمن دی د تمرين په شکل يې پريږدو .ددی له پاره چــې وښيــو $f'\ (0) = 0$ نــو بايــد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\ (h) - f\ (0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0$$

وي.

دا يو حقيقت دی که چيرې $z = \frac{1}{h^2}$ وي ، کله چې $h \to 0$ وي نو $z \to +\infty$ دی، په دې صورت کــې $h = \pm\frac{1}{\sqrt{z}}$ سره کيږي . په دې ډول لروچې .

$$\lim_{h\to 0}\frac{exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{z\to 0} exp(-z)/\frac{1}{\sqrt{z}} = \lim_{z\to\infty}\sqrt{z}e^{-z} = 0$$

په مشابې ډول

$$\lim_{h\to 0-}\frac{exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0,$$

دی.

دپورتنۍ ادعا له مخې

$$\lim_{h\to 0}\frac{exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0,$$

دی.

اوس ښيو چې $f''\ (0) = 0$ دی لروچې .

$$\frac{f\ (h) - f'\ (0)}{h} = \frac{f'\ (h)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{d}{dh}exp(-h^{-2})\right) = \frac{1}{h}(2h^{-3}\,exp(-h^{-2}))$$
$$= 2\frac{exp(-h^{-2})}{h^4}$$

که چيرې $z = \frac{1}{h^2}$ وضع کړو نو

$$\lim_{h\to 0}(2\frac{exp(-h^{-2})}{h^4}) = 2$$
$$\lim_{z\to 0}(z^2 exp(-z)) = 2(0) = 0$$

دی.په دې ډول $f''\ (0) = 0$ دی.د تيلور سلسله د f تابع له پاره ډيره ساده ده:

$$0 + (0)x + (0)x^2 + \cdots + xx^n + \cdots$$

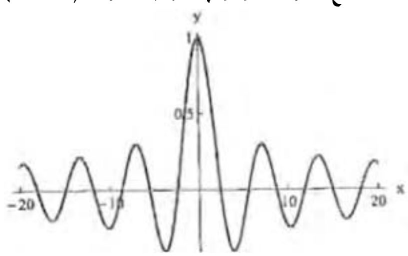
له هغه ځایه چې $x \neq 0$دی نو $f\ (x) \neq 0$ دی یوازنی نقطه کومه چې پورتنی سلسله عین قیمت لري دf تابع په شان د(0) څخه عبارت دی. ممکن مونږ په دی به تعجب وکړو چې ولې په عمومی ډول د طاقت سلسلې مفهوم نظر تیلور سلسلې ته ډیره تربحث لاندی نیسو په داسې حال کې چې د هر طاقت سلسلې یوې تابع له پاره د تیلورسلسله ده دلیل یې دا دی چې کولې شو د نظرووړنوی توابع د طاقت سلسلې په واسطه تعریف کړو. لاندی مثال په پام کې نیسو.

مثال (*11.5.9*) .که چیرې د J_0 تابع دلاندی افادې په واسطه تعریف شوې وي.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)2^{2n}} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{(2!)^2 2^4} x^4 + \frac{1}{(3!)^2 2^6} x^5 + \cdots$$

د تمرین په توګه کولی شو د طاقت سلسلې تقارب په کې د نسبتي ازموینې له مخې وازمایو.په دې ډولJ_0 په R کې نا متناهې مرتبه د مشتق وړوي. حتی که د طاقت لرونکی سلسله په J کې معین او یا ممکن نا پیژندل شوي (نامعین) وي، J_0 د استعمال او ډیر د اهمیت وړتابع دی. نو موړی تابع د (0) ترتیب *Bessel* تابع لومړۍ نوعی ته ورته ده او هم د یوی مهمی تفاضلي معادلې حل ښيي . په حقیقت کې J_0 تابع د کمپیوټر په الجبری سیستمونولکه *Maple* یا *Mathematical* پروګرامونو له پاره دتابع په جوړولو کې مشخص عملي اهمیت لري .(*2*) شکل د J_0 ګراف د *[-10,10]*په انټروال کې ښيي.

لاندی قضیه د طاقت په سلسله د تابع د ارائه کولو په یوازی توب (یګانګی) چې په عملي ساحه



(*2*) شکل

کې د تیلور د نوی سلسله په تشکیل کې اهمیت لری ګټورثابتیږی.

قضیه (*4.5.9*). د طاقت سلسلې د یوازې والی ارائه .

فرضوو چې c د J په خلاص انټروال کې شامل او د x د ټولو قیمتونوله پاره

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$
$$= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n + \cdots$$

وي .

نو په دې صورت کې

$a_n = b_n \quad ، n = 0,1,2, \ldots$

وي.

ثبوت. پو هيږو چې د طاقت هغه سلسله کومه چې د J د تقارب په خلاص انټروال کې يو تابع ارائه کوي د تيلور سلسله ده يعنې:

$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots x \in J$

دي.

نو

$$a_0 = f(c), a_1 = f'(c), a_2 = \frac{1}{2!}f''(c), \ldots a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)$$

دي.

داسې چې

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \\ &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n + \cdots \end{aligned}$$

دي.

لرو چې.

$$b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c), n = 0,1,2,3, \ldots$$

په دې ډول د پورتنۍ ادعا په شان لرو چې.

$a_n = b_n, n = 0,1,2,3, \ldots$

مثال(12.5.9) .د f تابع له پاره د تيلورسلسله وټاکئ .

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)}, x \neq -1$$

حل. له هغه څه چې د هندسي سلسلې په هکله مخکې ذکر شوي ليکلې شو .

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x^2) + (-x^3) + \cdots + (-x^n) + \cdots$$
$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

که $1 > | x | = | -x|$ وي دا چې د طاقت سلسله د ورکړل شوې تابع له پاره يوازې توب ده نو د x تابع له پاره د تيلور سلسله د x په طاقت محاسبه شوې ده.

مثال (13.5.9) . که

$$f(x) = e^{-x^2}$$

a) .د fتابع له پاره د تيلور سلسله تعين کړئ.

b) که چیرې $P_{12}(x)$ د f تابع له پاره د 8 ترتیب د تیلور پولینوم وی.د خپل محاسبی څخه په استفاده د P_8 گراف د f د گراف سره مقایسه کړی. ایا شکل دا ښیی چې د P_8 د e^{-x^2} له پاره یو دقیق تخمین دی کله چې x ډیر لوی نه وي؟

حل. a) پوهیږو چې د هر $u\epsilon\mathbb{R}$ له پاره

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \cdots \frac{1}{n!}u^n + \cdots$$

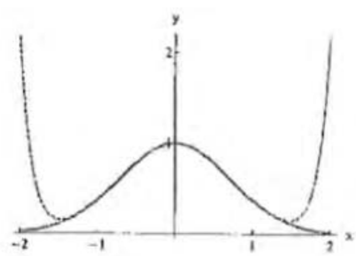
دی.که $u = -x^2$ تعویض کړو په دې ډول حاصلووچې.

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \cdots \frac{1}{n!}(-x^2)^n + \cdots$$
$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}x^{2n} + \cdots$$

a) د برخې په شان لروچې.

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{5!}x^{10} + \frac{1}{6!}x^{12}$$

(3) شکل د x او $P_{12}(x)$ گراف ښیې (د$P_{12}(x)$ گراف دخط خط شوې منحنی په شکل دی) په شکل کې ښودل شوي $P_{12}(x)$ د e^{-x^2} د قیق تخمین دی که $x\epsilon[-1.14,1.14]$ وي . د د طاقت لړونکی سلسلې د حدپه حد حدونومشتق د قضیی او د طاقت سلسلې د یگانگی له مخې کولی شو د تفاضلي معادلې حل چې دطاقت سلسلې په واسطه ارائه شوې دی . د لاندی مثال په شان لاسته راوړو.



(3) شکل

مثال(*14.5.9*).د

$$y''(x) = -y(x)$$

تفا ضلي معادله په پام کې نیسو او د

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$
$$+ a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

حل پلټو.

لروچې

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$
$$+na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \cdots$$

دی.

او

$$y''(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + \dots$$
$$+(n-1)(n)a_n x^{n-2} + (n)(n+1)a_{n+1}x^{n-1} + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots$$

دي .

د طاقت سلسلې د يگانگي له مخې او د $y''(x) = -y(x)$ معادلې د لاربنونې له مخې لاندې مساوات د $a_1,\ a_2,\ \ a_3,\ a_4 \dots$ ضریبونه مشخص کوي.

$$2a_2 = a_0$$
$$-(2)\ (3)a_3 = a_1,$$
$$-(3)\ (4)a_4 = a_2,$$
$$\vdots$$
$$-(n+1)(n+2)a_{n+2} = a_n,$$
$$\vdots$$

د a_0 په پام کې نیولو سره a_2 او a_4 لاسته راوړو.

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$
$$a_4 = -\frac{1}{(3)\ (4)}a_2 = \frac{1}{(2)\ (3)\ (4)}a_0 = \frac{1}{4!}a_0.$$

دا یو نتیجوی فرضیه پیشنهادوی داسې چې

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_n, k = 0,1,2,3, \dots$$

وي.

(که تاسو ته په زړه پوري وي لري چې a_6 او a_8 محاسبه کړی، زیات ضرورت لرو تر څو خپله توجه دی خواته را واړو).کولای شو a_{2k-2} له پاره افاده دارنگه تر لاسه کړو.

$$a_{2k+2} = \frac{-1}{(2k+1)(2k+2)}a_{2k} = \frac{-1}{(2k+1)(2k+2)}\left(\frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0\right)$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0$$

په همدې ډول

$$a_3 = -\frac{1}{(2)(3)}a_1 = = \frac{1}{3!}a_1.$$

او

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, k = 0,1,2,3, \dots$$

دي.

د

$$y''(x) = -y(x)$$

تفاضلي معادلې د اوليه شرط په پام کې نيولو سره داسې چې د x_0 له پاره $y(x_0)$ او $y'(x_0)$ په کې شامل وي ،فرضوو چې $y(0) = 1$ او $y'(0) = 0$ دي.

داسې چې

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$$

نو لروچې

$y(0) = a_0$ او $y'(0) = a_1$ دي.په دې توګه لروچې $a_1 = 0$ او $a_0 = 1$ دي.

بنأپردې

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0 = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, k = 0,1,2,3, \dots$$

او

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_1 = 0, k = 0,1,2,3, \dots$$

دي.

په دې ډول لروچې

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned}$$

دي.

پو هيږو چې پورتنی سلسله د cosine له پاره د x په طاقتونو د تيلور سلسله ده ، که چيرې د cosine په هکله معلومات ونه لرو مو نږبه يو ځل بيا يو خاصه تابع ولرو دا سې چې د اوليه قيمت دمسئلی په نظر کي نيولوسره د تفاضلی معادلې حل وي.

$$y'' = -y \quad , \quad y(0) = 1 \quad , y'(0) = 1$$

په همدې ډول د طاقت سلسلې حل د اولیه قیمت د مسئلې په پام کې نیولوسره

$y''(0) = -y \quad , \quad y(0) = 0 \ , y'(0) = 1$

د طاقت سلسلې حل خواته مو لارښونه کوی .

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(په بشپړ ډول) د x په توان دا د sine له پاره دتیلور سلسله ده .

تبصره(2.5.9). دا ممکنه ده چې sine او cosine **توابع د طاقت سلسلې په واسطه معلوم کړواو** دهغوی ټول خواص په ډیر دقت سره لاسته راوړو .یادونه کووچې دغه توابع په هندسی شکل معرفی او قبول شوي دي چې د مقابل قوس طول یې د واحدې دایرې پرمخ د اندازه کولو وړدي.دا یوحقیقت ته نږدی ده . ځکه چې د طاقت سلسلې د ځینولوڅخه مخکې مونږ ددی مهمو توابعو د معرفي په هکله یادونه نه دی کړې د هغه هدف له مخې چې د مثلثاتی توابعو د تعویض کولو په هکله یې لرو ، دا ممکن دی هغه لاسته راوړو .

(6.9) دویمه برخه.

دطاقت سلسله

په(5.9) سکشن کې تیلور سلسلې څخه مو د حد په حد مشتق نیولوپه واسطه ،د تیلور نوی سلسله لاسته راوړی وه . په دې سکشن کې د تیلور نوی سلسله د حد په حد انتگرال نیولو، حاصل ضرب او تقسیم په واسطه لاسته راوړو همدارنگه د بینومیل په سلسله باندی به بحث وکړو .

(1.6.9) د طاقت سلسلې د حد په حد انتگرال نیول.

کولای شو د طاقت لرونکی سلسلې حد په حد انتگرال ونیسو .

قضیه(1.6.9) . فرضووچې .

$$f(t) = a_0 + a_1(t-c) + a_2(t-c)^2 + \cdots + a_n(t-c)^n + \cdots$$

د I په خلاص انټروال کې دهر t له پاره او هم

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

وي. نو د هر $x \in I$ له پاره

$$F(x) = \int_c^x (a_0 + a_1(t-c) + a_2(t-c)^2 + \cdots + a_n(t-c)^n + \cdots)dt$$
$$= a_0(x-c) + a_1\frac{(t-c)^2}{2} + a_2\frac{(t-c)^3}{3} + \cdots + a_n\frac{(t-c)^n}{n} + \cdots$$

دی .

د(6.9) قضیيي ثبوت به دعالی ریاضیاتو په کورس کې تر سره کړو .

مثال(1.6.9) .که $t > -1$ وي نو د $\frac{d}{dt}\ln(1+t) = \frac{1}{1+t}$ حقیقت په پام کې نیولو سره د $\ln(1+x)$ له پاره د مایکلورن سلسله تعین کړئ.

حل.د کلکولس د اساسی تیوری له مخې لرو چې.

$$ln(1+x) = ln(1+x) - ln(1) = \int_0^x \frac{d}{dt}ln(1+t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt, x > -1$$

په دې ډول که $|t| < 1$ وی ،د (5.9) سکشن د(12) مثال په شان

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \cdots$$

دی.د (1.6.9) قضیيي له مخې د $-1 < x < 1$ له پاره لروچې .

$$ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$
$$= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \cdots)dt$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

مثال(2.6.9) . د $\frac{d}{dt}arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}dt$ حقیقت په پام کې نیولو سره د $arctan(x)$ له پاره د مایکلورن سلسله تعین کړئ.

حل.د کلکولس د اساسی تیوری له مخې لرو چې.

$$arctan(x) = arctan(x) - arctan(0) = \int_c^x \frac{d}{dt}arctan(t)\,dt = \int_c^x \frac{1}{1+t^2}dt, x \in \mathbb{R}$$

د هندسي سلسلې د تیرې تجربې په نتیجه کې

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-t^2}$$
$$= 1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + (-t^2)^3 + \cdots + (-t^2)^n$$

$$= 1 - t^2 + t^4 + t^6 + \cdots + (-1)^n\ t^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ t^{2n}$$

که $|-t^2| = t^2 < 1$ وي.یعنې. $-1 < t < 1$ په دې ډول که $-1 < x < 1$ وي . نو د (1.6.9) قضیې نه په نتیجه.

$$\arctan(x) = \int_c^x (1 - t^2 + t^4 + t^6 + \cdots + (-1)^n\ t^{2n} + \cdots)dt$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

د(1) قضیه نشی کولای د(1 ,1-)په انټروال کې د 1- او 1 په انجامی نقطو کې معلومات ارائه کړی ، مګردا بنودلی شی چې پورته مساوات د 1 او 1 - له پاره هم صدق کوي.

مثال(3.6.9). د یادولو وړده چې د تابع خطأ (erf) ددې افادی په واسطه ښودل شوې ده

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^x e^{-t^2}\ dt$$

a) دطبعي طاقت نما تابع د تیلورسلسلې څخه په ګټه اخستلو د erf له پاره د مایکلورن سلسله لاسته راوړئ . د (1) قضیې په مرسته لاسته راغلی سلسلې له پاره د تقارب خلاص انټروال لاسته راوړی.

b) که P_{2n-1} د erf تابع له پاره د $2n + 1$ ترتیب مایکلورن سلسله لاسته راوړی. د محاسباتو په نتیجه کې د P_{11} اود erf ګرافونه سره مقایسه کړئ. که چیرې د (0) مبدأ څخه ډیر لیرې واقع نه وي.

c) د $n = 3, 4,5 ,6,$ له پاره $P_{2n+1}(1)$ او $|erf(1) - P_{2n+1}(1)|$ محاسبه کړئ . دمحاسباتو د کارولوسره erf(1) لاسته راوړی ځکه چې که erf مخکې تعریف شوې تابع وي د erf(1) تخمینی قیمت د انتیګرال دعددی قیمت سره مقایسه، او تر بحث لاندې یې ونیسئ .

ایا دا عددونه ښیې چې په کافی اندازه دلوی ترتیب تیلور پولینوم د حل په واسطه erf(1) په تخمینی ډول تر یو مشخص دقت لاندی محاسبه کړئ .

حل. a) لرو چې

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + (-1)^n\ \frac{1}{n!}t^{2n} + \cdots$$

د هر $x\epsilon\mathbb{R}$ له پاره د (5.9) سکشن د13 مثال په شان . په دې ډول

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 - \frac{1}{3!}\ t^6 + \cdots + \ (-1)^n\ \frac{1}{n!}t^{2n} + \cdots\right)\ dt$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{1}{3!}\ x^3\ + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}\ x^7 + \cdots + \ \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)$$

دی.

د هر $x\epsilon\mathbb{R}$ له پاره د (1.6.9.) قضیي له مخې د لاسته راغلې سلسلې د تقارب خـــلاص انتـــروال $(-\infty,\infty)$ دي.

b) د a برخې مطابق

$$P_{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{1}{3}\ x^3\ + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{7}\ x^7 + \frac{1}{4!}\ \frac{1}{9}\ x^9 \ldots + \ \frac{1}{5!}\frac{1}{11}x^{11}\ \right)$$

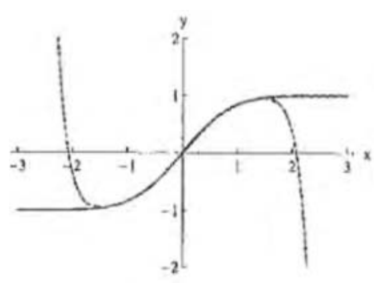
په خاص ډول

$$P_{11}(x)\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{1}{3}\ x^3\ + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{7}\ x^7 + \frac{1}{4!}\ \frac{1}{9}\ x^9 \ldots + \ \frac{1}{5!}\frac{1}{11}x^{11}\right)$$

(1) شکل د P_{11} گراف مقایسه د تابع خطأ (erf) سره ښیي(د P_{11} گراف دخط خط شوي منحنی په شکل دی) په شکل کې ښودل شوي $P_{11}(x)$د f(x) د تابع خطأ $erf(x)$ډیردقیق تخمین دی که $x\epsilon|-1.5,1.5|$ وي .

c) د (1) جدول د $n = 3, 4, 5, 6,$ له پاره $P_{2n+1}(1)$ او $|erf(1) - P_{2n+1}(1)|$ د تابع تخمین په (1) کې ځرگندوي چې $erf(1) \cong 0.8427011$ د تخمین خطأ اندازه د $P_{2n+1}(1)$ په واسطه په چټکی سره کمیږي کله چې n زیاتیږي.

د جدول عددونه ددې ښودونکي دي چې ایا ممکن دی چې د تابع خطأ په (1) کې erf(1) د مطلوب



(1) شکل

تخمین دقت وي چې مخکې له مخکې ترتیب شوي د تیلور پولینوم د ترتیب له مخې په کافی اندازه لوی وي.

N	$P_{2+1}(1)$	$\lvert erf(1) - P_{2n+1}(1)\rvert$
3	0.838225	4.5×10^{-3}
4	0.843449	7.5×10^{-4}
5	0.842594	1.1×10^{-4}
6	0.842714	1.3×10^{-5}
7	0.842699	1.5×10^{-4}

(1) جدول

که چیرې د کمپوتر اسانتیا نه لرئ چې الجبری سیستم محاسبه کړئ .کولی شی د پورتنی تخمینونو نتایج د تابع دتخمین erf د عددی انتیګرال نیونی په واسطه په خپل کمپوتر کې محاسبه او مقایسه یې کړی.

(2.6.9) د تیلور په سلسله باندی حسابی عملیې .

په دې برخه کې ځینی حسابی عملیې د تیلور په سلسله باندی چې خاص حالت یې د مایکلورن سلسله جوړوي بحث وکړو .ذکرشوي هر یوه عملیه کولی شو د 0 له مرکزی نقطې څخه پرته نورونقطو ته توسعه ورکړو.

(2.6.9) قضیه (د مایکلورن سلسلی حاصل جمع او حاصل تفریق).

فرضوو چې د I په انټروال کې د هر x له پاره

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

او

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

وي . نو په دې صورت کې$x\epsilon I$ د له پاره

$$f(x) \pm g(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n$$

دی.

د2 قضیې ثبوت د تمرین په توګه پریږدو ، دا ځکه چې د نامتناهې سلسلو د حاصل جمع عمومی حالت نتیجه ده .

مثال (4.6.9) . د $ln(1+x)$ له پاره د مـــايكلورن سلسلې پـــه كارولو د $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ له پاره د مايكلورن سلسله لاسته راوړئ . د لاسته راغلې تقارب خلاص انټروال لاسته راوړی.

حل.په (1.6.9) مثال کې مو و ښودل چې

$$ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

که $|x| < 1$ ، x په $-x$ تعويض کړو حاصلووچې

$$\begin{aligned} ln(1-x) &= (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(-x)^n + \cdots \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots - \frac{1}{n}x^n - \cdots \end{aligned}$$

داسې چې $1 > |x|$ = $|-x|$ دی. په دی توګه که $|x| < 1$ وي . لرو

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= ln(1+x) - ln(1-x) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x)^n + \cdots\right) \\ &- \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + \cdots\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x)^n + \cdots\right) \\ &+ \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots\right) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots\right) \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} \end{aligned}$$

بنأ پردې

$$\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}, |x| < 1$$

دی.

د يادولو وړده چې

$$arctanh(x) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$

بنأ پردی، مونږد$arctanh$ له پاره د تيلورسلسله د x په توانونو محاسبه کوو.کولی شو د تيلورسلسله د توابعو په حاصل ضرب د ضرب د عمليی پـــه واسطه لاسته راوړوکـــه چيرې دتيلورسلسله دپولينومونو په شان وي.

قضيه (3.6.9). (د مايکلورن د حاصل ضرب سلسله).فرضوو چې د J په انټروال کې د هر x له پاره

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

د $x\epsilon J$ له پاره

$$f(x)g(x) = a_0\, b_0 + (a_0\, b_1 + a_1 + b_1)x$$
$$+(a_0\, b_2 + a_1b_1 + a_0\, b_1)x^2$$
$$+(a_0\, b_3 + a_1b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0)x^3$$

وي، د (3.6.9) قضيې ثبوت د عالی رياضياتو کــورس کې تــر ســـره کيږي.د (2.6.9) او (3.6.9) قضيې په واضيح ډول کولی شو د $(x - c)$ په توانونو عموميت ورکړو ځکه چې c اختـــياري ثابت وي.

مثال (5.6.9) . که $F(x) = e^{-x}sin(x)$ وي.

د طبعي توان او sine توابعو د مايکلورن سلسلو په مرسته د f تابع له پاره 5 ترتيب مايکلورن پولينومل لاسته راوړئ.

حل.د هر $u \in \mathbb{R}$ له پاره لرو .

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3!}\, u^3 + \frac{1}{4!}\, u^4 + \frac{1}{5!}\, u^5 + \cdots$$

د هر $x \epsilon \mathbb{R}$ له پاره لرو .

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}\, x^5 + \cdots$$
$$sin(x) = x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}\, x^7 + \cdots$$

د(3.6.9) قضيې له مخې

$$e^{-x}\, sin(x) = x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)x^4$$
$$+ \left(\frac{1}{4!} + \left(\frac{1}{2!}\right)\left(-\frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{5!}\right)x^5$$
$$+ \cdots \quad x + x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{30}x^5$$

دی.

د هر $x \epsilon \mathbb{R}$ له پاره د مايکلورن په سلسله باندی د تقسيم د عمليی په تر سره کولو کولی شو د مايکلورن سلسلو د تقسم نتيجه لاسته راوړو .

قضيه (4.6.9).(مايکلورن سلسله حاصل تقسيم) فرضوو چې د هر x له پاره د J په انټروال کې داسې چې $g(x) \neq 0$ وي.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

که $x\epsilon J$ وي.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots$$

په دې ډول د .... d_0, d_1, d_2 .... ضرایب کولی شو په لاندې ډول محاسبه کړو :

د ضرورت له مخې لرو .

$$f(x) = g(x)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots)$$

یعنې

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots)(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \cdots) \\ &= b_0\,d_0 + (b_1\,d_0 + b_o\,d_1)x + (b_2\,d_0 + b_1\,d_1 + b_0\,d_2)x^2 \end{aligned}$$

د طاقت سلسلې دیوازې والي له مخې باید د اړوند سلسلې د x ضرایب مساوي قبول کړو :

$$\begin{gathered} b_0\,d_0 = a_0, \\ b_o\,d_1 + b_1\,d_0 = a_1, \\ b_o\,d_2 + b_1\,d_1 + b_2\,d_0 = a_2, \\ \vdots \end{gathered}$$

د یادولو وړ ده چې $b_0 = g_0 \neq 0$ وي داسې چې.

$$\begin{gathered} d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \\ d_1 = \frac{a_0 - b_1\,d_0}{b_0} \\ d_2 = \frac{a_0 - b_2\,d_0 - b_1\,d_1}{b_0} \\ \vdots \end{gathered}$$

وي.

مثال (6.6.9) . د $sin(x)$ او $cos(x)$ د سلسلو په مرسته د $tan(x)$ دتابع له پاره د مایکلورن 5 ترتیب پولینوم لاسته راوړئ ، او د (4) قضیې په مرسته د لاسته راغلې سلسلې د تقارب خــلاص انټروال تعین کړئ.

حل. داسې چې $cos(x) \neq 0$ دی. که $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ وي قبلو چې .

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots}$$

دی.

اټکل کوو چې:

$$tan(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + + d_4 x^4 + d_5 x^5 + \cdots, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

داسې چې .

$$d_0 = tan(0) = 0$$

دی.

نو لرو.

$$\frac{x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots}{1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots} = d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + + d_4 x^4 + d_5 x^5 + \cdots$$

داسې چې .

$$x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots \right)(d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + + d_4 x^4 + d_5 x^5 + \cdots)$$
$$= d_1 x + d_2 x^2 + \left(d_3 - \frac{1}{2} d_1\right) x^3 + \left(d_4 - \frac{1}{2} d_2\right) x^4 + \left(d_5 - \frac{1}{2} d_3 + \frac{1}{4!} d_1\right) x^5 + \cdots$$

دی.

په دې ډول

$$d_1 = 1$$
$$d_2 = 0$$
$$d_3 - \frac{1}{2} d_1 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow d_3 = \frac{1}{3!} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$
$$d_4 - \frac{1}{2} d_2 = 0 \Rightarrow d_4 = 0,$$
$$d_5 - \frac{1}{2} d_3 + \frac{1}{4!} d_1 = \frac{1}{5!} \Rightarrow d_5 = \frac{1}{5!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4!} = \frac{2}{15},$$

دی.

بنأ پردی د مایکلورن د 5 ترتیب پولینوم د $tan(x)$ له پاره عبارت دی له .

$$x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5$$

د لاندې مثال په شان د تیلور سلسلې په واسطه د ځینو مشهور لیمټونو محاسبه ترسره کوو .

مثال (7.6.9) . پوهیږو چې .

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

قبلوو چې.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} & \text{که } x \neq 0 \text{ وي} \\ 1 & \text{که } x = 0 \text{ وي} \end{cases}$$

دی.

a) وښيي چې f تابع د حقيقی عددونو د محور پرمخ نامتناهي ځلی د مشتق نيولو وړدی او هم د f تابع له پاره د مکلورن سلسله لاسته راوړی.

b) د a) د برخي په پام کې نيولو سره که $\frac{sin(x)}{x}$ په 1 سره تعويض کړو نو د $|x|$ د ډير کوچنی قيمتونو له پاره مطلقه تخمينی خطأ و ښيړئ.

حل. a) پو هيږو چې

$$sin(x) = x - \frac{1}{3}\, x^3 \ + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \ \ \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + \cdots$$

وي

که $x \in \mathbb{R}$ وي د ټولو قيمتونو له پاره د (4) قضيي له مخې لرو.

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{3!}\, x^2 \ + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}\, x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} + \cdots$$

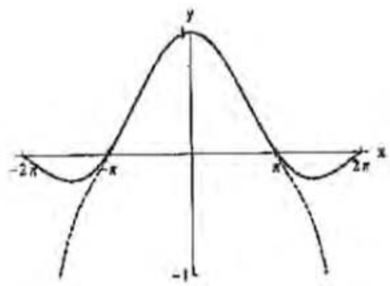
که $x \neq 0$ وي.قبلو چې .

$$g(x) = 1 - \frac{1}{3!}\, x^2 \ + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}\, x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} + \cdots$$

وي، د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره د طاقت سلسله متقاربه ده. (د نسبتی ازموينې له مخې وګوری) .په دې تو ګه د (7.10) سکشن او د 2 قضيې له مخې g تابع نامتناهي ځلی د مشتق وړ ده نو د هر $x \neq 0$ له پاره $f(x) = g(x)$ دی.همدارنګه وايو چې $f(0) = 1$ او $g(0) = 1$ دی سربيره پردی $f(0) = g(0)$ دی.په دې ډول f د ټولو عددونوله پاره د $x = 0$ د نامتناهي مشتق لرونکې دی .(2) شکل د f او

$$p_6(x) = 1 - \frac{1}{3!}\, x^2 \ + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}\, x^6$$

ګرافونه ښيي.



(2) شکل

(د p_6 گراف د ټکی په ټکی رسم شوي منحنی گراف ښيې).که چیرې $x \epsilon [-3,3]$ وي نو د شکل له مخې $p_6(x)$ د$\frac{\sin(x)}{x}$ یو ښه مناسب تخمین دی.

b) د a) برخي مطابق

$$\left|\frac{sin(x)}{x}-1\right| = \left|-\frac{1}{3!}\ x^2\ +\frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}\ x^6+\cdots+\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\ +\cdots\right|$$
$$= x^2\left|-\frac{1}{3!}\ \ +\frac{1}{5!}x^2 - \frac{1}{7!}\ x^4+\cdots+\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-2}\ +\cdots\right|$$
$$= x^2h(x)$$

وي.

داسې چې $|x|$ ډیر کوچنی وي.

$$h(x) = \left|-\frac{1}{3!}\ \ +\frac{1}{5!}x^2 - \frac{1}{7!}\ x^4+\cdots+\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-2}\ +\cdots\right| \cong \frac{1}{6}$$

په دې ډول که $|x|$ کو چنی وي نو

$$\left|\frac{sin(x)}{x}-1\right| = x^2h(x) \cong \frac{1}{6}x^2$$

دی.که $|x|$ ډیر کوچنی وی د پورته تخمینی مساواتو له مخې $\frac{sin(x)}{x}$ په تخمینی ډول د (1) سره مساوي او د هغې مطلقه خطأ د $\frac{1}{6}x^2$ سره د مقایسه کیدو وړ ده.

(3.6.9) د بینو مل سلسله . د بینومل سلسلی څخه پرته د طاقت سلسلو مطالعه کول نا مکمله دي.

قضیه (5.6.9) . (د بینومل سلسله). قبلوو چې $f(x) = (1+x)^r$ وي داسې چې r یو اختیاری توان وي . د مکلورن سلسله د f له پاره عبارت ده له.

$$1+rx+\frac{(r-1)r}{2!}x^2+\frac{(r-2)(r-1)r}{3!}x^3+\cdots+\frac{(r-n+1)\ldots(r-1)r}{n!}x^n+\cdots$$

ثبوت. لرو چې :

$$f(x) = (1+x)^r,$$
$$f'^{(x)} = r(1+x)^{r-1},$$
$$f''^{(x)} = (r-1)r(1+x)^{r-2},$$
$$f^{(3)}(x) = (r-2)(r-1)r(1+x)^{r-3},$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (r-n+1)\ldots(r-1)r(1+x)^{r-n}$$
$$\vdots$$

په دې ډول

$$f(0) = 1,$$
$$f'(0) = r,$$
$$f''(x) = (r-1)r\,,$$
$$f^{(3)}(0) = (r-2)(r-1)r\,,$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = (r-n+1)\ldots(r-1)r$$

دي.

بنأ پردې د مکلورن سلسله د f له پاره عبارت ده له.

$$f(0) + f'(0)\ x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots$$
$$1 + rx + \frac{(r-1)r}{2!}x^2 + \frac{(r-2)(r-1)r}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(r-n+1)\ldots(r-1)r}{n!}x^n + \cdots$$

تبصره (1.6.9) . کله چې r يو مثبت تام عدد وي نو د بينومل سلسله بينومل په عادی افاده بدليږی.

تبصره (2.6.9) .فرضوو چې r يو غير منفی تام عدد وي . نو د بينومل سلسله په يو معينه مجموعه بدليدلای شی.کولای شو د تقارب خلاص انټروال د نسبتي ازموينې له مخې لاسته راوړو .

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\left|\frac{(r-n)(r-n+1)\ldots(r-1)r}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{(r-n+1)\ldots(r-1)r}{n!}x^{n}\right|} = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{r-n}{n+1}\right||x| = |x|$$

په دې توګه د سلسلې د تقارب خلاص انټروال د $(-1\,,1)$ څخه عبارت دی.

د هر $x\,\epsilon\,(-1\,,1)$ له پاره کولای شو وښيو . ثبوت به د عالی رياضياتو په کورس کې تر سره کړو.

$$f(x) = 1 + rx + \frac{(r-1)r}{2!}x^2 + \frac{(r-2)(r-1)r}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(r-n+1)\ldots(r-1)r}{n!}x^n + \cdots$$

مثال (8.6.9) .په (5.6.9) قضیه کې که $r = 1/2$ وضع کړو دمکلورن سلسله د $\sqrt{1+x}$ له پاره حاصل کړئ:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{3!}x^3 +$$
$$\dots + \frac{\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + + \frac{1}{128}x^4 + \cdots$$

مثال (9.6.9) . که $r = -1/2$ وضع کړو دمکلورن سلسله د $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ له پاره حاصل کړئ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 +$$
$$\dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \cdots$$

مثال (10.6.9). **a)** د $arcsine$ له پاره د دمکلورن د 5 ترتیب پولینومیل $p_5(x)$ لاسته راوړئ.

b) د p_5 گرا ف د $arcsine$ گراف سره مقایسه کړئ ایا گراف دا ښیي چې $p_5(x)$ د $arcsin(x)$ تخمین دی که x د (0) ته نږدې وي .

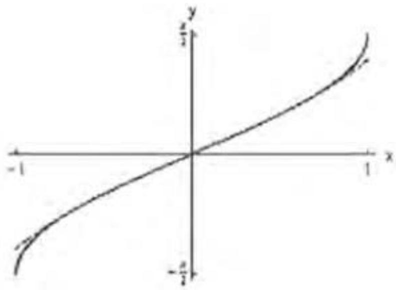
حل. a) د کلکولس د اساسی قضیې له مخې .

$$arcsin(x) = arcsin(x) - arcsin(0) = \int_0^x \frac{d}{dt} arcsin(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

که د (9.6.9) په مثال کې x په $-t^2$ سره تعویض کړو . په نتیجه کې لاسته راځي .

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-t^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-t^2)^2 +$$

$$\dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{n!}(-t^2)^n + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{16}t^6 + \cdots$$



شکل (3)

په دې ډول

$$arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \cdots\right)dt$$
$$= x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{x^5}{3}\right) + \cdots$$

دی.

دمکلورن د 5 ترتیب پولینومیل $arcsin(x)$ عبارت دی له .

$$p_5(x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 .$$

b) (3) شکل د $arcsin(x)$ او $p_5(x)$ گرافونه ښیې ، په گراف کې ښودل کیږي چې که $x \epsilon [-0.9,0.9]$ وي نو د شکل له مخې $p_5(x)$ د $arcsin(\ x)$ یوښه مناسب تخمین دی.

(7.9) انتیگرالی او مقایسوی ازمایښت

په دې سکشن کې به د انتیگرالي ازموینې او مقایسوي ازموینې دمطلق تقارب په هکله بحث وکړو . البته د مقایسوي شرط د مقایسه کولو له پاره به هغه سلسلې په پام کې ونیسو کومې چې د هغوی د تقارب او تباعد په هکله پوهیږو ،تر څو د ورکړل شوې سلسلې سره د مقایسه کیدو وړ وي .

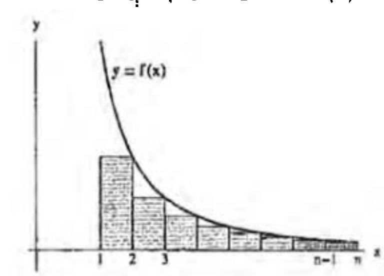
(1.7.9) انتیگرالی ازموینه.مونږ په (6.6) او (6.7) برخو کې غیر واقع انتیگرالونو په هکله څیړنې کړي دي. انتیگرالی ازموینه د نا متناهي سلسلې د تقارب د څیړلو له پاره د نا متناهي سلسلې او غیر خاص انتیگرال تر منځ یو ارتباط پیدا کوي .په دې برخه کې لاندې ټکو ته پاملرنه کوو. که $1 \le x_1 \le x_2$ او $f(x_1) \le f(x_2)$ وي.نو وبه وایو چې f د $[0,+\infty)$ پر انټروال کې متناقصه ده .سره له دې چې که نا متزاید ه تابع ډیره دقیق هم وي.

قضیه (1.7.9). (انتیګرالی ازموینه). فرضوو چې f یو متمادي تابع ده او د$[1,+\infty)$ پرانټروال کې یو شان او $f(x)\geq 0$ وي. د $x\geq 1$ له پاره .

a) $\sum c_n$ ته مطلقاً متقاربه وایې که د هر n له پاره $|c_n|=f(n)$ او $\int_1^\infty f(x)\,dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب وي .

b) که د هر n له پاره $c_n=f(n)$ او $\int_0^\infty f(x)\,dx$ غیر خاص انتیګرال متباعد وي. سربیره پر دې $\sum c_n$ متباعده ده .

ثبوت. a). فرضوو چې $\int_0^\infty f(x)\,dx$ متقاربه ده. د (1) شکل ته په کتنې سره هغه ساحه چې د f تابع ګراف او د $[1,n]$ انټروال تر منځ واقع ده د مستطیلونو د مجموعی ساحې څخه لویه ده .او د هر مستطیل د قاعدې طول له (1) څخه عبارت دی. په دې ډول



(1)شکل

$$\int_1^n f(x)\,dx \geq f(2)+f(3)+\cdots f(n)=|c_2|+|c_3|+\cdots+|c_n|$$

دی.

بناً پر دې

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+\cdots+|c_n|\leq |c_1|+\int_1^n f(x)\,dx$$

دی.

داسې چې $\int_0^\infty f(x)\,dx$ متقارب او دهر $x\geq 1$ له پاره $f(x)\geq 0$ دی، لروچې.

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \int_1^\infty f(x)\,dx$$

په دې تو ګه د هر n له پاره لرو.

$$|c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_n| \le |c_1| + \int_1^n f(x)\,dx \le c_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

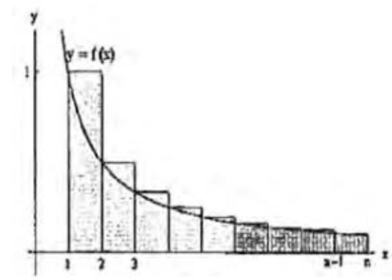
بناً پردی د ترادف قسمي حاصل جمع د $\sum c_n$ د نا متناهي سلسلې له پاره د پورته خواً څخه محدوده ده. د(4.9) سکشن د (2) قضيې له مخې د$\sum c_n$ سلسله متقاربه ده .

b) فرضوو چې د$\int_0^\infty f(x)\,dx$ غیرخاص انتیګرال متباعددی. داسې چې د هر $x \ge 1$ له پاره $f(x) \ge 0$ دی په دی معنې چې :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx = +\infty$$

لکه څنګه چې (6.7) سکشن کې پری بحث وکړ .

(2) شکل ته په کتنې د مستطیلونومجموعی مساحتونه د هغې ساحې د مساحت څخه لوی دی کوم چې د f تابع ګراف او $[1, n+1]$ انټروال تر منځ واقع دی.



(2) شکل

په دې تو ګه

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = f(1) + f(1) + \cdots + f(n) \ge \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

دی.

داسې چې.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = +\infty$$

وی.

سر بیره پردې لرو .

$$\lim_{n\to\infty} (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n) = +\infty$$

دی. بناً پر دې $\sum c_n$ سلسله متباعده ده.

تبصره (1.7.9) . لکه څنګه چې مو مخکې یادونه وکړه چې د نا متناهې سلسلې په تقارب او یا تباعد کې د حدونوجمع کول او یا لمنځه وړل کوم اثر نه لري . په دې ډول انتیګرالی ازموینې صحیح او د منلو وړده. که چیرې فرض کړو چې f یو متمادی تابع ، غیر منفی او د $[n,+\infty)$ پـه انټروال کـې متناقصه ده داسـې چـې N یـو مثبت تـام عـدد وي او د a بـرخې له پاره $|c_n| = f(n)$ دهر $n = \mathrm{N}, \mathrm{N}+1, \mathrm{N}+2, \dots$ له پاره وي.همدارنګه د b د برخې له پاره $c_n = f(n)$ د هر $n = \mathrm{N}, \mathrm{N}+1, \mathrm{N}+2, \dots$ له پاره وي.

مثال (1.7.9) . د

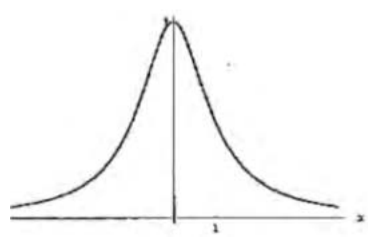
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$$

سلسله په پام کې نیسو . د انتیګرالی ازموینی د کارولو په صورت کې معلوم کړی چې ایا نو موړې سلسله مطلقاً متقاربه ده که نه .

حل.قبلو و چې .

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

دی .



(3) شکل

(3) شکل د f ګراف ښیې.

داسې چې د f تابع متمادي او $[1,+\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده. په دې توګه انتیګرالی ازموینې د تطبیق وړ ده.

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{x^2+1} = arctan(x)\Big|_1^A = arctan(A) - arctan(1) = arctan(A) - \frac{\pi}{4}$$

په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{A} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(arctan(A)\ -\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\ \frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

دی.

بنأ پردې

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

غیر خاص انتیګرال متقارب (او د $\frac{\pi}{4}$ قیمت لرونکی) دی په دې ډول

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{n^2+1}\ =\sum_{n=1}^{\infty}\ f(n)$$

سلسله هم متقاربه ده.

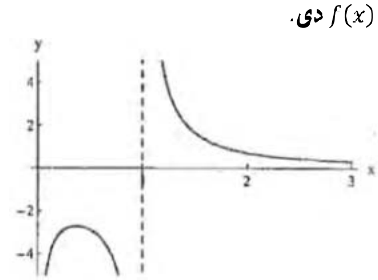
دی.

مثال (2.7.9) ..د

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{1}{nln(n)}=\frac{1}{2ln(2)}+\frac{1}{3ln(3)}+\frac{1}{4ln(4)}+\cdots$$

په پام کې نیسو، د انتیګرالی ازموینی د کارولوپه صورت کې معلوم کړی چې ایا نو موړی سلسله مطلقاً متقاربه ده او یامتباعده ده .

حل. قبلوو چې $f(x)=\frac{1}{xln(x)}$ دی.



(4) شکل

(4) شکل د f ګراف ښیې .داسې چې د f تابع متمادي او $[2,+\infty)$ په انترووال کې متناقصه ده.بنأ پردې کولی شوانتګرالی ازموینه پکار یوسو .(د پیل نقطي څخه پرته د (1) هم کارولی شو). د(1.7.9) تبصری له مخې نا معمول انتیګرال عبارت دی له.

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{xln(x)}dx$$

که $u=ln(x)$ وضع کړو نو $du=\left(\frac{1}{x}\right)dx$ سره کیږي له دی امله

$$\int \frac{1}{ln(x)} 1/x\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = ln(u) = l\,n(l\,n(x))$$

دی.

بنأ پردې

$$\int_2^A \frac{1}{xln(x)} dx = ln(ln(A)) - ln(ln(2))$$

دی.

په دې ترتیب

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^A \frac{1}{xln(x)} dx = \lim_{n\to\infty}(ln(ln(A)) - ln(ln(2))) = +\infty$$

کیږي.

په دې صورت کې د$\int_2^{\infty} \frac{1}{xln(x)} dx$ غیر خاص انتیګرال متبا عد دی.د انتیګرال ازموینې له مخې ورکړل شوې سلسله هم متباعده ده.د$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ په شکل سلسلې ته د p سلسله (p–series)وایي د $p = 1$ خاص حالت له پاره له هارمونیکې سلسلې څخه عبارت ده.

قضیه (1.7.9) .د p سلسله (p–series) کې که $p > 1$ وي سلسله متقاربه او که $p < 1$ وي سلسله متباعده ده.

ثبوت. په پیل کې هغه حالت په پام کې نیسو کوم چې $p \leq 0$ وي په دی حالت کې سلسله متباعده ده، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^p \neq 0$$

دی.

که $p > 0$ وي ، قبلوو چې .

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

نو ، f د$[1, +\infty)$ پر انټروال متمادي ، مثبته او متناقصه ده ، فلهذا انتیګرالی ازموینه دکارولو وړده.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

پوهیږوچې د

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

غیر خاص انتیگرال د $p > 1$ له پاره متقارب او د $p < 1$ له پاره متباعد دی . د (6.6) سکشن د (1) قضیي لــه مخې دا پــه دې دلالــت کــوي چــې $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ نا متناهې سلسله کــه $p > 1$ وي متقارب اوکــه $0 < p \leq 1$ وي متباعده ده.

(2.7.9)د هغه خطأ تخمین چې دانتیگرالی ازموینی سره اړیکی لري.

هغه طریقه چې دانتیگرالی ازموینی په استعمال کې ایجاد شوي د نا متناهې سلسلې د مجموعي د تخمینی خطأله پاره یو ګټور تخمین دی چې د یوي قسمي مجموعی پــه واسطه لاسته راځي ،د انتیگرالی ازموینې د یوحالت په توګه منل شوي دی.

قضیه (2.7.9) . فرضوو چې دf تابع په$[0,+\infty)$ انټروال کې متمادي اومتناقصه ده.او د $x \geq 1$ له پاره $f(x) \geq 0$ وي . نو د

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

غیر خاص انتیگرال ته متقارب وایې .

$$S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

S_n ته دn اومو جملو قسمي حاصل جمع او

$$S = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

د$\sum f(n) = \sum c_n$ نا متناهي سلسلې مجموعه وایې.لرو چې

$$0 \leq S - S_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

او

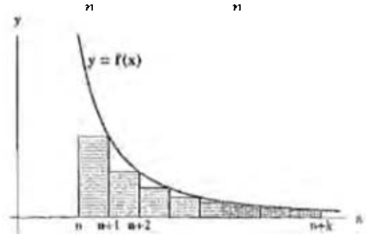
$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq s \leq S_n + \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

دی.

ثبوت .(5) شکل ته په کتو ، هغه ساحه چې دf تابع ګراف او$[n, n+k]$انټروال تر منځ واقع ده د مستطیلو نومجموعی ساحی له مساحتونو څخه لویه او یا ورسره مساوي ده.

په دې ډول

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k} \leq \int_{n}^{n+k} f(x)\,dx \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$



(5) شکل

دی.

داسې چې پورتنۍ غیر مساوات د هر k له پاره د تطبیق وړ دی. لرو

$$\lim_{n \to \infty} (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n+k}) \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

یعنې

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k+} \leq \int_{n}^{n+k} f(x)\,dx$$

دی.

خو د

$$\begin{aligned} S - S_n &= (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots c_{n+k} + \cdots) \\ &\quad -(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n) \\ &= c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots c_{n+k} + \cdots \geq 0 \end{aligned}$$

دی.

په دې توګه

$$0 \leq S - S_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

دی.

بناً پردې

$$S \leq S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

دی.

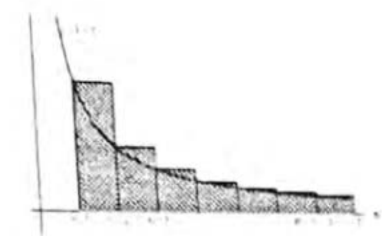
په پای کې ښيو چې.

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le S$$

دی.

(6) شکل ته په کتو ، هغه ساحه چې د f تابع ګراف او[n+1,n+k+1] انټروال ترمنځ واقع ده د مستطیلونومجموعی ساحی له مساحتونو څخه کوچنی او یا ورسره مساوي ده.

بناً پردې



(6) شکل

$$\int_{n+1}^{n+k+1} f(x)\,dx \le \quad c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k}$$

دی.

په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n+1}^{n+k+1} f(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} \left(c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k} \right)$$

یعنې

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+k} = S - S_n$$

دی.

په دې ډول د پورتنی ادعاپه شان

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le S$$

دی.

د (2.7.9) قضیي د نا مساواتوله مخې ددی ورتیالرو داسې اختیاري کوچنی انترروالونه پیدا کړو هغه چې د ورکړل شوي سلسلې په مجموعه کې شتون ولري . حتی که مونږ ددی ورتیا و نلروچې مجموعه په کلی توگه محاسبه کړو .

مثال(3.7.9) . که S د

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

نامتناهې سلسلې مجموعه او S_n د n اومو جملوقسمې حاصل جمع وي.

a) معلوم کړئ که چیرې

$$0 \le S - S_n \le 10^{-2}$$

وي.

b) که n د a برخې په شان وي) د (2) قضیي د دویمی برخي څخه په گټه اخستلو هغه انترروال پیداکړئ چې S_n په کې شتون ولري.

حل.a) د (2.7.9) قضیه کاروو چې .

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

دی .

بنأ پردې

$$0 \le S - S_n \le \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n}$$

دی .

په دی توگه کولی شو n مساوی 100غوره کړو .

$$0 \le S - S_n \le \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

b) د (2.7.9) قضیه ددویمی برخي له مخې

$$S_{100} + \int_{101}^{\infty} 1/x^2\,dx \le S \le S_{100} + \int_{100}^{\infty} 1/x^2\,dx$$

دی .

لروچې .

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2} \cong 1.63498, \int_{100}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{101}$$

او

$$\int_{100}^{\infty} 1/x^2\, dx = \frac{1}{100} = 0.01.$$

دی.

په دې ډول

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{101} \le S \le \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{100}$$

دی.

داسې چې.

$$1.64488 \le S \le 1.64498$$

دی.

روښانه ده چې.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cong 1.64493$$

دی.

(3.7.9) مقایسوي ازموینه (شرط).

هغه ازموینې موتربحث لاندې نیولې دې .دډیرو سلسلو د مطلق تقارب او تباعد د بحث له پاره چې تاسو به په دې کورس کې ورسره مخامخ شئ څه ناڅه کا فی وي . سره له دې کیدای شی مونږ به د یو لړ داسې حالتونوسره مخامخ شو چې اسانه به نه وي چې موجوده ازموینې پرې تطبیق کړو دابه مناسب وي چې هغه د یوه داسې پیژندل شوي (مشهورې) سلسلې سره چې متقاربه یا متباعده وي مقایسه کړو .

قضیه (2.7.9) .

1) (مقایسوی ازموینه).که چیرې د N یو مثبت تام عدد داسې شتون ولري چې د... ,$n = N, N+1, N+2$ له پاره $|c_n| \le d_n$ وي که $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ سلسله متقاربه وي په دې صورت کې $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سلسله هم متقاربه ده.

2) که چیرې د N یو مثبت تام عدد داسې شتون ولري چې د ... ,$n = N, N+1, N+2$ له پاره $|c_n| \ge d_n$ وي که $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ سلسله متباعده وي په دې صورت کې $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سلسله هم متباعده ده.

ثبوت . د لومړی شرط په پام کې نیولو فرضوو چې.

$$|c_N| + |c_{N+1}| + |c_{N+2}| + \cdots + |c_{N+3}| + |c_{n+k}| \le d_N + d_{N+1} + d_{N+2} + \cdots d_{N+k}$$
$$\le d_N + d_{N+1} + d_{N+2} + \cdots + d_{N+k} + + d_{N+k+1} + \cdots$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

دی .

داسې چې $\sum d_n$ سلسله متقاربه دی په دې توګه د هر k له پاره

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + |c_{N+1}| + |c_{N+2}| + \cdots + |c_{N+3}| + \cdots + |c_{n+k}|$$
$$\le |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

دی.

د عددي ترادف قسمي حاصل جمع اړوندنامتناهي $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ سلسله له پاره دپورته خوا څخه محدوده ده، د (2) قضيي د (4.10) سکشن مطابق د $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ سلسله متقارب ده په نتيجه کې $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ مطلقاً متقاربه ده.

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{N-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

2) ددويم شرط له مخې ، فرضوو چې .

$$c_N + c_{N+1} + c_{N+2} + \cdots + c_{N+k} \ge d_N + d_{N+1} + d_{N+2} + \cdots + d_{N+k}$$

د هر $k=0,1,2$ له پاره د$\{d_N + d_{N+1} + d_{N+2} + \cdots + d_{N+k}\}_{k=0}^{\infty}$ ترادف د پورته خوا څخه نا محدود دی. د بلی خوا د $\sum_{k=0}^{\infty} d_{n+k}$ نامتناهي سلسلې څخه وروسته د $\sum_{k=0}^{\infty} d_n$ سلسله متقاربه ده . د پورتنې غيرمساواتو له مخې $\{|c_N| + |c_{N+1}| + |c_{N+2}| + \cdots + |c_{n+k}|\}_{k=0}^{\infty}$ ترادف د پورته خوا څخه محدودنه دی.په دې توګه د $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k}$نامتناهي سلسلې په نتيجه کې $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ سلسله متباعده ده.

مثال (4.7.9). وښيې چې $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$ سلسله مطلقاً متقاربه ده .

حل. د هر $n = 1,2,3 \ldots$ له پاره لروچې $\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ دی.

داسې چې د x د هر حقيقي عدد له پاره $|cos(x)| \le 1$ دی . له بلی خوأ پوهيږوچې $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$د مقايسوی ازموينې له مخې متقاربه ده . نو ور کړل شوې سلسله مطلقاً متقاربه ده.

مثال (5.7.9). وښيې چې ايا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{\sqrt{n^2-1}}$ سلسله متقاربه ده يا متباعده .

حل. داسې چې $n \ge 3 > e$ وي له پاره $\ln(n) > 1$ دی . لرو چې

$$\frac{ln(n)}{\sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \quad ,n = 3,4,5$$

دی.

سره له دې هم لرو چې

$$\sqrt{n^2-1} \le \frac{1}{n} = n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{n}$$

دی.

په دې تو ګه که $n > 3$ نو $\frac{ln(n)}{\sqrt{n^2-1}} > \frac{1}{n}$ دی.

داسې چې د $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ هارمونيکی سلسله متقاربه ده په دې صورت کې د تباعد د فقرې د مقايسوی ازموينی له پاره دتطبيق وړ ده.په نتيجه کې ورکړل شوې سلسله متباعده ده .

کله کله ډيره مناسب وي چې د مقايسوی ازموينی ليمټ د مقايسوی ازموينی په ځای وکاروو .

قضيه (3.7.9) . (د مقايسوی ازموينی ليمټ).

1) فرضووچې .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{d_n}$$

شتون لري ،که چيرې د هر $n = 1.2.3, \ldots$ له پاره $d_n > 0$ وي او $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ متقاربه وي نو د $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ سلسله مطلق متقاربه دی.

2) که چيرې د هر $n = 1.2.3, \ldots$ له پاره $d_n > 0$ وي او $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ متباعده او $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} = L$ شتون ولري او هم $L > 0$ يا$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} = +\infty$ وي، نو په نتيجه کې د$\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ سلسله متباعده ده .

ثبوت. که قبول کړو چې.

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{d_n}$$

د N دهر تام عدد له پاره شتون لري دا سې چې دهر $n \ge N$ له پاره

$$\frac{|c_n|}{d_n} \le L + 1$$

وي.

په دې ډول

$$|c_n| \le (L+1)d_n$$

دی.

څرنګه چې $\sum_{n=N}^{\infty} d_n$متقاربه ده نو $\sum_{n=N}^{\infty}(L+1)\,d_n$ هم متقاربه ده . په دې ډول$\sum_{n=N}^{\infty}|c_n|$ سلسله د مقايسوی ازموينی له مخې متقاربه ده .دا په دی دلالت کوی چې د $\sum_{n=N}^{\infty}|c_n|$ سلسله متقاربه ده . او په پايله کې د $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ سلسله متقاربه ده.

2) اوس د تباعد د برخې شرط له پاره د لیمت د مقایسوی ازموینې له مخې فرضوو چې که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=L>0$$

شتون ولري او د N د هر تام عدد له پاره داسې چې .

$$\frac{c_n}{d_n}\geq\frac{L}{2}$$

وي نو د هر $n\geq N$ له پاره

$$c_n\geq\left(\frac{L}{2}\right)d_n, n=N,N+1,N+2,\dots$$

دی.

په دې ډول

$$c_N+c_{N+1}+\cdots+c_{N+k}\geq\frac{L}{2}(d_N+d_{N+1}+\cdots+d_{N+k})$$

دی.

دا چې د هر $k=0,1.2.3,\dots$ له پاره $\sum_{n=N}^{\infty}d_n$ متباعده ده او دهر n له پاره $d_n>0$ دی.

لروچې .

$$\lim_{n\to\infty}(d_N+d_{N+1}+\cdots+d_{N+k})=+\infty$$

د پورته غیر مساوات په پام کې نیولوسره لرو چې .

$$\lim_{n\to\infty}(c_N+c_{N+1}+\cdots+c_{N+k})=+\infty$$

داسې چې $L>0$دی. په دې ډول $\sum_{n=N}^{\infty}c_n$ سلسله هم متباعده ده.اوس که فرض کړو چې .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=+\infty$$

دی .

او د N مثبت تام عدد داسې شتون ولري . چې دهر$n\geq N$ له پاره $\frac{c_n}{d_n}\geq 1$ وي.په دې ډول که $c_n>d_n$، $n\geq N$ وي او د $\sum d_n$ سلسله متباعده وي په نتیجه کې $\sum c_n$ سلسله دمقایسوی ازموینی له مخې متباعده ده .

تبصره(2.7.9). دلیمټ دمقایسوی ازموینی له مخې که چیرې $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ تحقیق کړو ، که نوموړی لیمټ مثبت یا $(+\infty)$خواته تقرب کوی په دې حالت کې سلسله د لازمی شرط له مخې متباعده ده .دمثال په توګه لرو .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

داسې چې $\sum\frac{1}{n}$ سلسله متباعده ده ، مګر $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسله متقاربه ده.

مثال (6.7.9) . معلو م کړی چې ایادا

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln(n)}{n^{3/2}}$$

سلسله متباعده ده که متقاربه.

حل. داسې چې $ln(n)$ نظر د n توان ته ډیر ورو ورو تکامل کوی نو ورکړل شوې سلسله د

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{1/4}}{n^{6/4}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$$

سلسلې سره مقایسه کوو .دا چې $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$ سلسله نظر د p-series له پاره سلسلې ته $p=\frac{5}{4}>1$ متقاربه ده لروچې

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}=0$$

په دې صورت کې ورکړل شوې سلسله متقاربه ده .

مثال (7.7.9) . معلو م کړئ چې ایادا

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$$

سلسله متباعده ده که متقاربه.

حل. داسې چې .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}\cong\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}$$

دی.

نو که چیرې n لوی وي هارمونیکی سلسله به یوه غوره انتخاب وي تر څو سلسله ورسره مقایسه کړو . لروچې

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}=1>0$$

دی.د لیمټ دا مقایسوی ازموینه په دې دلالت کوي چې ورکړل شوي سلسله متباعده ده ځکه چې $\sum\frac{1}{n}$ متباعده ده.

(8.9) شرطي تقارب

په دې برخه کې به د متناوب العلامه سلسلې د يوې قضيې په هکله بحث وکړو، البته مونږ به په دې ونتوانيږو چې و ښيو ورکړل شوي سلسله شرطاً متقارب ده. اويا وښيو چې موجوده سلسه مطلقاًمتقاربه ده.سربيره پردې ددې قضيې د وضاحت له مخې د متناوب العلامه سلسلې د قسمي حاصل جمع څخه د تخميني خطأ له مخې په ښه ډول اټكل وكړو. البته د مطلق اوشرطي تقارب په پام کې نيولو سره چې متناوب العلامه سلسله به يې نهايي ضميمه وي.د سلسلو د تقارب د ازموينو له پاره ، ددې سکشن په نيمايي کې به مونږ نوموړې هدف په لنډ ډول ددې ازموينې له پاره بيان کړو .

(1.8.9) متناوب العلامه سلسله. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

يا

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$$

په شان سلسله داسې چې د هر n له پاره $a_n \geq 0$ وي له متناوب العلامه سلسلې څخه عبارت ده. داسې چې

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n ,$$

وي.

که (-1) په سلسله کې ضرب کړو دسلسلې په تقارب يا تباعد کې کوم تغير نه راځي .مونږ به په دې برخه کې عمومي پايله د $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, سلسلې په پام كي نيولوسره بيان کړو .

لاندې قضيه د متناوب العلامه سلسلې تقارب د يو لړ خاصو شرايطو له مخې وړاندې کوي.

قضيه (1.8.9).(د متناوب العلامه سلسلې قضيه).فرضوو چې$a_n \geq 0$ او$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ترادف متناقص دی.يعنې دهر n له پاره $a_n \geq a_{n+1}$ وي كه چيرې $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ وي نو

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

نو متناوب العلامه سلسله متقاربه ده .که S د سلسلې مجموعه او

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} a_k$$

د سلسلې قسمي حاصل جمع وي ، او دهر ... ,$k = 1,2,3$ له پاره ولروچې

$S_{2k} \le S \le S_{2k-1},$
$S_{2k-2} \le S \le S_{2k+1},$

او بنأ پردې دهر ... ,$n = 1,2,3$ له پاره $|S - S_n| \le a_{n+1}$ دی.

د سلسلې مجموعه مطلق تخمینی خطأ چې د سلسلې د n اوموحدونودقسمي حاصل جمع څخه لاسته را ځي په کافی اندازه نږدی دی نظر د اولی جملی مطلقه خطأ ته چې کينهی لوری (دباندی) خواته واقع دی.

د يادولو وړده چې د متناوب العلامه سلسلې د قضيې له مخې د $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ سلسلې تقارب وړاندوينه کولی شو . که چيرې سلسلې دمتقارب د لازمی شرط له مخې $lim_{n\to\infty} a_n = 0$وي اويا nام حد متناقص يا 0 خواته مخ په کميدو وي .همدارنګه که $n \to \infty$ سره a_n صفر خواته تقرب ونه کړي نو په دې صورت کې سلسله متباعده ده.

د (1) قضيې ثبوت .

د ... ,$k = 1,2,3$ له پاره د S_{2k} قسمي حاصل جمع په پام کې نيسو داسې چې S_{2k} د

$$\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

سلسلې د جفتو جملو مجموعې پورې اړه لري ، زمونږ د ادعا مطابق د ... ,$k = 1,2,3$ له پاره د S_{2k} ترادف متزايد دی:

$$S_2 \le S_4 \le S_0 \dots S_2 \le S_{2k} \le S_{2k+2} \le \cdots$$

داسې چې $a_{2k+1} \ge a_{2k+2}$ دی . دا يو حقيقت دی.

$$S_{2k+2} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + S_{2k} + S_{2k+1} - S_{2k+2}$$
$$= S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \ge S_{2k}$$

دبلی خوا د ... ,$k = 1,2,3$ له پاره S_{2k} ترادف د طاقو جملو د مجموعې پورې اړه لري او متناقص دی:

$$S_1 \ge S_3 \ge S_5 \ge \cdots \ge S_{2k+2} \ge S_{2k+3} \ge \cdots$$

داسې چې $a_{2k+2} \ge a_{2k+3}$ دی. دا يو حقيقت دی.

$$S_{2k+3} = a_1 - a_2 + \cdots + a_{2k+1} - a_{2k+2} + a_{2k+3}$$
$$= S_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \le S_{2k+1}$$

لاندی ثرگندونې هم صحیح دي : د قسمي حاصل جمع د جفتو اعدادو هيڅ يو عدد دطاقو اعدادو د جملو د قسمي حاصل جمع څخه تجاوز نه کوي:

$$S_{2k} \le S_{2m+1},$$

کله چې k يو اختياري مثبت تام عدد او m يو اختياري غير منفی تام عدد وي .فرضوو چې $k < m$ وي ،نو

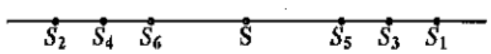
$$S_{2m+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2m} + a_{2m+1}$$
$$= S_{2m} + a_{2m+1} \ge S_{2m} \ge S_{2k}$$

که $k \ge m+1$ وي ، لروچې $2k-1 \ge 2m+1$ بنأ پر دې

$$S_{2k} + S_{2k-1} - a_{2k} \le S_{2k-1} \le S_{2m+1},$$

دی.

د (1) شکل په شان د سلسلې د ترادف قسمي حاصل جمع د اعدادو دمحور پر مخ يو په بل پسی واقع ده .



شکل(1)

داسې چې $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ ترادف متزايد ترادف دی او دهر k له پاره $S_{2k} < S = a_1$ دی.د يو نواخت تقارب د قاعدی له مخې د (*4.9*) سکشن د (1) قضيبی په شان $L = \lim_{n\to\infty} S_{2k}$ شتون لري .د هر k له پاره $S_{2k} = L_1$ د يونواخت تقارب د قاعــدی لــه مخې دمتناقص ترادف لــه پاره يــوپــه بل پسی دی. کــه $c_n \ge c_{n+1}$ شتون و لري او m د ښکته خوأ څخه محدودوي . څرنګه چې د هر m له پاره $c_n \ge m$ دی، نو $\{c_n\}_{k=1}^{\infty}$ ترادف د ليمټ لرونکی دی، اود هر n له پاره $c_n \ge \lim_{n\to\infty} c_k$ دی.(تاسی کولای شی دا ډول نتايج د يو نواخت متقارب قاعده د متزايد ترادف له پاره د $\{-c_n\}_{k=1}^{\infty}$يونواخت تزايد ترادف په پام کې نيولو سره لاسته راوړی).داسې چې $\{S_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ يو متناقص ترادف او دهر m له پاره $S_{2k} \le S_{2m-1}$ دی او $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = L_2$ شتون لري او د هر m له پاره $L_2 \le S_{2m+1}$ دی . څرنګه د هرk او m له پاره $S_{2k} \le S_{2m+1}$ دی. نو د هر m له پاره لرو چې.

$$L_1 = \lim_{k\to\infty} S_{2k} \le S_{2m+1}$$

په دې ډول

$$L_1 \le \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = L_2$$

دی.

زمونږ د ادعا له مخې $L_1 = L_2$ دی. حقیقتاً د هر k له پاره

$$S_{2k} \le L_1 \le L_2 \le S_{2k+1}$$

دی.

په دې ډول

$$0 \le L_2 - L_1 \le S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}$$

دی.

داسې چې $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1} = 0$ او $L_2 - L_1$ یو غیر منفی حقیقی عدد او په اختیاری ډول کوچنی وي . دا یو حالت دی که او یوازی که دا عدد 0 وي. بناً پردې $L_2 - L_1 = 0$ یعنې $L_2 = L_1 = s$ وي.په دې ډول د ترادف قسمي حاصل جمع چې د $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ متناهې سلسله په S کې متقاربه ده ، د $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ سلسله متقاربه او د S مجموعه ده.

لرو چې

$$S_{2k} \le L_1 = S = L_2 \le S_{2k+1},$$

د ادعا په شان داسې چې دهر k له پاره

$$S_{2k} \le S \le S_{2k+1}$$

دی.

په دې شان د هر k له پاره

$$S_{2k+2} \le S \le S_{2k-1}$$

دی.

اوس راځې چې د قسمي حاصل جمع په واسطه د مجموعی تخمینی خطاً تخمینه کړو .داسې چې

$$S_{2k} \le S \le S_{2k+1},$$

دی.

لرو چې.

$$0 \le S - S_{2k} \le S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k+1}$$

دی.

داسې چې.

$$S_{2k+2} \le S \le S_{2k+1}$$

دی.

په همدی ډول لرو چې .

$$0 \le S_{2k+1} - S \le S_{2k+1} - S_{2k+2} = a_{2k+2}$$

دی.

په دی ډول دهر $n = 1,2,3,\dots$ له پاره

$$|S - S_n| = \left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \right| \le a_{n+1}$$

دی.

مثال (1.8.9) . د $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 1/\sqrt{n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ سلسله په پام کې نیسو.

a) ایا دا سلسله مطلقاً متقاربه دی که شرطاً؟

b) که سلسله متقاربه وي، n معلوم کړئ داسې چې $|S - S_n| \le 10^{-2}$ او S_n د n اومو مجموعی قسمي حاصل جمع او S د سلسلې مجموعه وي ،او د انټروال اوږدوالی د 10^{-2} نه کوچنی ، او په S کې شتون ولري.

حل . a) نوموړی سلسله مطلقاً متقاربه نه ده

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} 1/\sqrt{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

ځکه چې دا د p-series سلسله ده او $p = \frac{1}{2} < 1$ دی، له بلی خوأ د متناوب العلامه سلسلې د متقاربیت له پاره قضیه پکاروو داسې چې $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ او $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ دی.

نو متناوب العلامه سلسله متقاربه او ورکړل شوي سلسله شرطاً متقاربه ده.

b) دمتناوب العلامه سلسلې د قضې له مخې دخطأ (اشتباه) د تخمینولو له پاره لروچې.

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} 1/\sqrt{k} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

په دې توګه د $|S - S_n| \le 10^{-2}$ په پام کې نیولوسره کافی ده په پام کې ونیسو چې.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \ge 10^{-2} \Leftrightarrow n+1 \ge 10^4$$

بناً پردې کافی ده چې $n = 10^4$ وي.د (1) قضیې له مخې

$$S_{10^4} \le S \le S_{10^4+1}$$

داسې چې $[S_{10^4}, S_{10^4+1}]$ په انټروال کې موجود دی د $[S_{10^4}, S_{10^4+1}]$ انټروال اوږدوالی کوچنی تر 10^{-2} څخه دی.دا یو حقیقت دی.

$$0 \le S_{10^4+1} - S_{10^4} = \frac{1}{\sqrt{10^4+1}} < 10^{-2}$$

لروچې

$S_{10^4+1} \cong 0.609896$ او $S_{10^4} \cong 0.599899$ دی.

په دې ډول

$$0.599899 \leq S \leq 0.609896$$

دی.

د S د (6) رقمی قیمت له رونډاف(round off) څخه وروسته عبارت دی له 0.604899د یوې سلسلې د شرطآ تقارب له پاره په یو سلسله باندی کولی شو دمتناوب العلامه سلسلې قضیې وکاروو.

مثال (2.8.9) . مثال (1.8.9) . د$\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}\right|$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ سلسله په پام کې نیسو.

a) وښیې چې سلسله مطلقآ متقاربه ده.

b) د متناوب العلامه سلسلې له کارولو څخه داسې معلوم کړئ چې $|S - S_n| \leq 10^{-3}$ د انټروال اوږدوالی د 10^{-3} څخه کوچنی وي ،او S په نوموړی انټروال کې شامل وي.

حل.) مونږ به نسبتي ازموینې وکاروو،په دې ډول

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}<1$$

سلسله مطلقآ متقاربه ده.

b) کولی شومتناوب العلامه سلسلې قضیه په نوموړی سلسله باندی وکاروو. دا یو حقیقت دی چې

$$(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=(-1)^{n-1}f(n)$$

سره دی.

داسې چې

$$f(x)=\frac{x}{2^x}$$

وي.

د تابع د $[2,+\infty)$ په انټروال متناقصه ده (د مشتق له مخې معلوموو چې تابع یو نواخت دی).

او هم

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=0$$

دی.

(د لوپیټال د قاعدې له مخې).د (1) قضیې په واسطه

$$|S - S_n| \leq f(n+1)$$

دی.

لروچې

$f(14) \cong 8.54492 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ او $f(13) \cong 1.558691 \times 10^{-3}$ دی.

بنأ پر دې کافی ده چې د S تقرب د S_{13} په واسطه حاصل کړو، لروچې

$$|S - S_n| \leq f(14) < 10^{-3}$$

بنأ پردې د (1.8.9) قضیې له مخې

$$\leq S \leq S_{13}$$

او

$$0 \leq S_{13} - S_{14} = f(14) < 10^{-3}$$

دی.

بنأ پر دې S په $[S_{14}, S_{13}]$ کې شتون لري او اوږدوالی یې تر 10^{-3} کوچنی دی.لرورد

$$S(13) \cong 0.222778$$

او

$$S(14) \cong 0.221924$$

دی.

په دې توګه

$$0.221924 \leq S \leq 0.222778$$

دی.

چې په دې ترتیب واقعی قیمت د S له پاره

$$\frac{2}{9} \cong 0.222 ....$$

دی.

(2.8.9) دنامتناهي سلسلې د تقارب اويا تباعد ازموينې تګ لاره .

راځي چې هغه تګلاره طرحه کړو چې دهغې واسطه د نا متناهې سلسلې تقارب او تباعد ازمايښت کيږي. چې اساس يې ټول هغه ازموينې دي کومې چې مخکې مو پرې بحث کړی‌ووفرضوو چې د $\sum c_n$ سلسله ورکړل شوې وي.

* که $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ وي په دې حالت کې د $\sum c_n$ سلسله متباعده ده. که د سلسلې د n ام جملو لیمټ $n \to \infty$ په حالت کې 0 وي په دې حالت کې سلسله د لازمي شرط له مخې متقاربه ده.

* که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$وي کولی شو $\sum c_n$ سلسله دمطلق تقارب له پاره و ازمایو . که چیرې مو داسې نتیجه تر لاسه کړه چې سلسله دمطلق متقاربه ده ، دا مو مخکې سرته رسولې ده، ځکه چې مطلق تقارب دلالت په تقارب کوي. معمولاًنسبتي ازموینې تر ټولو اسانه ازموینه ده . چې د هغې دکارولو په صورت کې نتیجه ترلاسه کیږي .په ځینو حالاتو کې جذری ازموینه کیدای شی ډیر مناسبه وي . کیدای شی انتیګرالی ازموینی ته هم لاس رسی ولرو .مونږ به زیار وباسو تر څومقایسوی ازموینه یا دلیمټ مقایسوي ازموینه هم په کاریوسو.که چیرې و پوهیږو چې دمقایسوي شرط له مخې د سلسلې تقارب او یا تباعد څیړل ګران وي نو په دې صورت کې نسبت نورو مقایسوي ازموینو ته به دا ډیره اسانه وي چې د لیمټ مقایسوي ازموینه وکاروو.

* که چیرې مو داسې نتیجه ترلاسه کړه چې سلسله دمطلق متقاربه نه ده کولی شو د سلسلې شرطاً تقارب تحقیق کړو . په دې صورت کې یوازی متناوب العلامه سلسلې د قضیې په مرسته د سلسلې شرطاً تقارب څیړو . امکان لري نورې ازموینې هم د شرطاً تقارب له پاره د عالی ریاضیاتو په کورس کې وڅیړو .

د پورتنی وړاندې شوو تګ لارود تطبیق او وضاحت له پاره لاندی مثالونه په پام کې نیسو .

مثال (3.8.9).معلوم کړئ چې ایا

$$\sum_{n-1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{10^n}{(n!)^2}\right|$$

سلسله مطلقاً متقاربه، شرطاً متقاربه او یا متباعده ده.

حل. که د فکتوریل علامه د سلسلوپه جملو کې شتون ولري بهتره ده نسبتي ازموینه وکاروو.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\dfrac{10^{n+1}}{\left((n+1)!\right)^2}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\dfrac{10^n}{(n!)^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{10^{n+1}}{10^n}\right)\left(\frac{n\,!}{(n+1)!}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(10\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= 10\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)^2 = 10(0) = 0 < 1$$

په دې توګه سلسله مطلقاً متقاربه ده.

مثال (4.8.9).معلوم کړئ چې ایا دا

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)\ \frac{1}{\mathrm{n}\ln^2(\mathrm{n})}\right|$$

سلسله مطلق متقاربه، شرطآ متقاربه او یا متباعده ده.

حل.دلته د نسبتي او جذری ازموینې تطبیق بی پایله دی .ځکه چې لیمټ 1 دی په دې برخه کې زیار باسو چې انتیگرالی ازموینې د مطلق تقارب له پاره تطبیق کړو . په دې صورت کې

$f(x) = \frac{1}{xln^2(x)}$

تعویضوو .

داسې چې

$$\left|(-1)\ \frac{1}{nln^2(n)}\right| = \frac{1}{nln^2(n)} = f(n)$$

دی.

د f تابع مثبت او متمادي ده . او د $[2, +\infty)$ په انټروال متناقصه ده . په دې توگه انتیگرالی ازموینه کاروو . که $u = ln(x)$ وضع کړو لرو:

$$\int \frac{1}{xln^2(x)} 1/\ xdx = \int \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}dx$$
$$= \int \frac{1}{u^2}\ du = \int\ u^2du = -\,u^{-1}$$
$$= -\frac{1}{u} = -\frac{1}{ln(x)}.$$

په دې توگه

$$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^b \frac{1}{xln^2(x)}dx$$
$$= -\frac{1}{ln\,x}\Big|_2^b = -\frac{1}{ln\,b} + \frac{1}{ln\,2}$$

دی.

بنأ پردې

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{ln\,b} + \frac{1}{ln\,2}\right) = \frac{1}{ln\,2}$$

دی.

په دې توگه غیر خاص انتیگرال متقارب دی.

$$\int_2^b f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{xln^2(x)}dx$$

په نتیجه کې

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)\frac{1}{n\ln^2(n)}$$

سلسله مطلقاً متقاربه ده.

مثال (5.8.9) . معلوم کړی چې ایا دا

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}$$

سلسله مطلقاً متقاربه، شرطاً متقاربه او یا متباعده ده.

حل.په دې مثال کې د نسبتي او جذري ازموینی تطبیق بی پایله دی . ځکه چې دمحاسبی په پایله کې لیمټ مساوي په 1 دی دانتیګرالی ازموینی د پایلو له مخې وروسته د ډیرو مغلقو انتیګرالی محاسبوڅخه نشو ویلای چې ورکړل شوي سلسله مطلق متقاربه ده. په دې صورت کې د لیمټ د مقایسوي ازموینې تطبیقوو .داسې چې.

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}} \cong \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} \cong \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

دی.

د n په زیاتیدو سره هارمونیکی سلسله د مقایسوي سلسلې له پاره غوره ټاکنه دی.دلیمټ مقایسوي ازموینې په مرسته :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} = 1 \neq 0,$$

دی.

لکه څنګه چې هارمونیکی سلسله متباعده ده. نو

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}$$

سلسله متباعده ده.

نو په دې ډول

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}$$

سلسله مطلق متقاربه نه ده.

نو په دې صورت کې د متناوب العلامه سلسلې قضیې د ورکړل شوي متناوب العلامه سلسلې له پاره په واضیح توګه د تطبیق وړ ده.نو په واضیح ډول دا ترادف متناقص دی .

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

په دې ډول سلسله متقاربه ده. اولروچې

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}} = 0$$

بناً پر دې سلسله متقاربه نه ده نو په پایله کې سلسله شرطاً متقاربه ده.

(9.9) فوریه سلسله.

(1.9.9) د 2π پیریود سره د فوریې توابع.

د طاقت سلسلې اساسي جوړښت د $(x-c)$ توانونوسره دي داسې چې c پیل نقطه ده. مونږ به دلته د هغه فوریه سلسلې په باب بحث او څیړنه وکړوچې اساس یې$sin(n\,x)$او $cos(n\,x)$ مثلثاتی توابع تشکیلوي، داسې چې یو n غیر منفی تام عدد وي.مونږ د توابعو تخمین د مثلثاتی پولینوم په واسطه داسې په پام کې ونیسو

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\, cos(kx) + b_k\, sin(kx))$$
$$= a_0 + (a_1\, cos(x) + b_1\, sin(x)) + \cdots + (a_n\, cos(n\,x) + b_n\, sin(nx)).$$

n ته د مثلثاتی پولینوم ترتیب وایې. د یادولو وړده چې مثلثاتی پولینوم د 2π پیریوسره پیریودیک توابع دي داسې چې $sin(kx)$ او $cos(k\,x)$ دواړه د 2π په پیریود پیریودیک توابع دي.که چیرې k تام عدد. د a_0 ثابت حد ، a_k ته د $sin(kx)$ ضریب او b_k ته $cos(k\,x)$ ضریب وایې.

مثال(1.9.9). که

$$F(x) = \frac{\pi}{4}\left(sin(x) + \frac{1}{3} sin(3x) + \frac{1}{5} sin(5x)\right)$$

وي .نو $F(x)$ د 5 ترتیب مثلثاتي پولینوم دی. ثابت حد ، $sin(2x)$ او $sin(4x)$ ضریبونه ،او د $cos(k\,x)$ ضریبونه د $k = 1,2,3 \dots n$ له پاره 0 دی. د$sin(5x)$ ضریب د $\frac{4}{5\pi}$ څخه عبارت دی. دمثلثاتي پولینوم په واسطه لاندی افادي د ثابت حد او د $sin(kx)$ او $cos(k\,x)$ ضریبونو له پاره 2π په پیریودسره توابعوتخمینول تعینوي.د مثلثاتي پولینومونوپه واسطه د توابعو تخمینول دی.

قضیه (1.9.9).قبلووچې

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\, cos(k\,x) + b_k\, sin(kx)\right)$$

د n ترتیب یومثلثاتي پولینوم دی نو

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, cos(kx)\, dx, k = 1,2,3 \dots n,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, sin(kx)\, dx, k = 1,2,3 \dots n,$$

دی. په خاص ډول a_0 د $[a,b]$ په انټروال کې د f اوسط قیمت وي ، نوموړی انتیګرالونه کولی شو د 2π په اوږدوالی په هر انټروال کې د 2π په پیریودسره توابعو له پاره محاسبه کړو.

ثبوت .د (1.9.9) قضیی اساس د$sin(kx)$ او $cos(k\,x)$ د لاندی خاصیتونو له مخې اینښودل شویدی. فرضوو چې k او l غیر منفی تام عددونه وي .نو

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)\, cos(lx)\, dx = 0 \ \ , k \neq l$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)\, sin(lx)\, dx = 0 \ \ , k \neq l$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)\, sin(lx)\, dx = 0 \ ,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(kx)\, dx = \pi \ \ (k \neq 0),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^2(kx)\, dx = \pi \ \ (k \neq 0),$$

(3.6) سکشن او د (1) قضیې له مخې لرو چې.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(kx))\right)dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} 1dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\,x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\,x)\,dx,$$
$$= 2\pi a_0$$

داسې چې.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\,x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\,x)\,dx = 0, k = 1,2,3$$

دی.

بناً پردې

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

دی.

قبلورچې $k = 1,2,3 \ldots n,$ وي ، لروچې

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(k\,x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{l=1}^{n} (a_l\cos(l\,x) + b_l\sin(lx))\right)\cos(k\,x)\,dx$$
$$= a_0\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\,x)\,dx + \sum_{l=1}^{n} a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx)\cos(kx)\,dx$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} b_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin(lx)\cos(kx)\,dx$$

دی.

څرنګه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx)\cos(kx)\,dx = 0$$

که $l \neq k$ وي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx = \pi$$

او

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx\,,$$

دی.

بنأ پر دې

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(kx)\,dx$$

همدا شان

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(kx)\,dx, k = 1.2.3, \dots n.$$

دی. فرضووچې د $f(x)$ تابع د 2π پیریودسره د انتیګرال نیولووړ دی(د مثال په توګه $f(x)$ متمادي تابع دی) که چیرې f د n ترتیب یو مثلثاتي پولینوم وي. لروچې.

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(kx)$$

داسې چې

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, k = 1,2,3 \dots n,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, k = 1,2,3 \dots n,$$

د (1.9.9) قضیې له مخې دا ډیر مناسب ښکاری چې د $f(x)$ تخمین د لاندی مثلثاتي پولینوم له مخې لاسته راوړو.

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(kx),$$

داسې چې a_0 ثابت حد اود $\sin(kx)$ او $\cos(k\,x)$ ضرایب په پورتنۍ افاده کې ورکړل شوي دی.دا ډول مثلثاتي پولینوم یوغوره تخمین د n ترتیب سره د f دټولو مثلثاتي پولینومونوله پاره دی په دې معنې چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F_n(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - G(x))^2\,dx\,,$$

کله چې G د n اومو ترتیبونو یو اختیاری مثلثاتي پولینوم وي. ددی حقیقت ثبوت دعالی ریاضیاتو په کورس کې به ترسره کړو.ددی په امید چې $F_n(x)$د $f(x)$ د تخمین مطلوب تخمین وي ،که چیرې n په کافی اندازه لوی وي .اویا په تیره بیا که چیرې f په ډیرغیر معمول ډول x ته نږدې نه وي . په دې ډول لرو.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$
$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = f(x).$$

تعریف (1.9.9). قبلوو که د f تابع د 2π په پیریوسره د د انتیګرال نیونی وړ وي. د

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx),$$

نامتناهي سلسله ده داسې چې

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\ ,k = 1,2,3\ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, k = 1,2,3\ldots,$$

د f تابع لــه پاره د فوريې پــه سلسله کې د a_0 او a_k ، b_k ضــريبونه دي داســې چــې د هــر $k = 1,2,3\ldots,$ عددونه چې د پورتنۍ افادې په واسطه حاصل شوي د f له پاره دفوريه سلسلې ضرايب دي.

فوريه يو فرانسوی رياضی پوه وو چې دا ډول سلسلې يې معرفی کړې ،نوموړې دغه سلسلې د رياضيکی نمونو(موډلونو) په واسطه حاصل کړې او دحرارت رسونی موضوعاتو سره يې ارتباط ورکړ، همدارنګه د فوريه سلسلې مهم او ضروری معلومات د موجونو(څپو)د انتشاراو مخابراتی سګنالونواو دوسايلود پکاراچولواو دهغوي د تغيراتو په هکله ستر برياليتوبونه را منځته کړي دي.

مثال (2.9.9) .قبلوو چې f پيريوديک تابع د 2π په پيريود په لاندی توګه تعريف شوي وي

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{که } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{که } 0 < x < \pi \end{cases}$$

او

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

وي .

که k يو تام عدد اوداسې چې$x + 2k\pi \in (-\pi,\pi)$ وي د مثال په ډول که $x \in (\pi, 3\pi)$ وي نو

$$f(x) = f(x-2\pi) = \begin{cases} -1\ , & \pi < x < 2\pi \\ 1\ \ \ , & 2\pi < x < 3\pi \end{cases}$$

دی. که وي $x \in (-3\pi, -\pi)$ نو

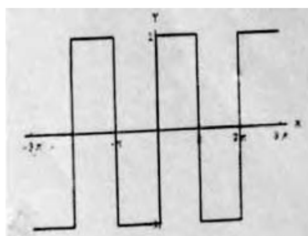
$$f(x) = f(x+2k\pi) == \begin{cases} -1\ , -3\pi < x < -2\pi \\ 1\ , \quad -2\pi < x < -\pi \end{cases}$$

دا ډول تابع د 2π په پیریود د f توسعه یا پرخوالی بنیېي.داسې چې

$$F(x) = \begin{cases} -1\ , -\pi < x < 0 \\ 1 \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

وي. دواړه F او د هغې 2π پیریود یکې f تابع نه تعریفیږي که چیرې x یو اختیاری ضریب د π وي د (1) شکل د گراف د $[-3\pi, 3\pi]$ په انټروال د گراف په واسطه بنودل شوې ده .د ترتیب شوي گراف له مخې عمودي قعطه خطونه د f تابع غیر متمادیت نقطې معرفي کوي .

a) د فوریه سلسله د f له پاره لاسته راوړی.



(1) شکل

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \quad a_k\, cos(k\, x) + b_k\, sin(kx)$$

b) که

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \quad a_k\, cos(k\, x) + b_k\, sin(kx),$$

وي د F_5 او F_{11} گرافونه د f گراف سره د $(-3\pi, 3\pi)$ پــه انټروال کې مقایسه کــړی. د f قیمتونو له مخې د فوریې سلسلې دمجموعې په شکل کې څه بنیېي.

حلa). لروچې د

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)dx \ + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}(-\pi) + \frac{1}{2\pi}(\ \pi) = 0$$

په ربنتیا سره داسې چې f یو تاقه تابع ده او $cos(kx)$ یوه جفت تابع تعریف شوی ده نو $f(x)\,cos(kx)$ د هر k تام قیمت له پاره یوه تابع تعریفیږي داسې چې .

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \ , k = 1,2,3 \dots ,$$

وی، د $sin(kx)$ د ضریب لــه پــاره $f(x)\,sin(kx)$ جفت تابع تــعریف شوي او لــرو چې .

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\,\Big|_{0}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

داسې چې $cos(kx) = 1$ ، کــه k جفت وي او $cos(kx) = -1$ ، که k تــاق وي، لرو چې

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{که k جفت وي} \\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{که k تاق وي} \end{cases}$$

په دې توګه د فوریې سلسله د f له پاره عبارت دی له.

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots + \frac{1}{(2j+1)}\sin(2j+1)x + \dots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}\sin((2k+1)x)$$

b) قبلو چې

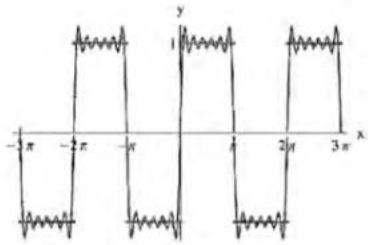
$$F_{2n+1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)}\sin((2k+1)x)$$

وي ، بناً پردې د فوریې سلسلې مجموعه په x کې له $f(x)$ څخه عبارت ده که چیرې

$$\lim_{n\to\infty} F_{2n+1}(x) = f(x)$$

وي . (2) شکل $[-3\pi, 3\pi]$ په انټروال کې د f او F_{11} ګرافونه ښیې (خط خط شوي منحنی د مثلثاتی پولینوم دګراف څخه عبارت ده). دشکل له مخې ممکن ددې امکان موجود وي چې د $f(x)$ تخمین $F_{2n+1}(x)$ په واسطه ،که چیرې $x \notin \{n\pi : n = 0, \pm1 \pm 2, \dots\}$ او n په کافی اندازه لوی وي ،لاسته راوړو .

بناً پردې لروچې :



شکل (2)

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} sin\big((2k+1)x\big) = f(x),$$

د فوريې سلسلې د تقارب په هکله به د يو لړمشخصو توابعو له پاره په لاندې توګه يو قضيه معرفي کړو .

تعريف (2 .9.9). د f يــوه تابع ټوټه ټوټه همــوراه ده ، کــه چيرې f او f' په پرلپسی ډول [a, b] په اختياری انټروال کې ټوټه په ټوټه متمادي وي . بناً پردې f او f' د [a, b] په هر انټروال کې پرته له يو شمير مشخصو نقطوڅخه که C د f او f' غير متمادي نقطه وي، د يو اړخيز ليمتونو

$$\lim_{x\to c^-}(x),\ \lim_{x\to c^+} f(x)\ ,\ \lim_{x\to c^-} f'(x)$$

او $\lim_{x\to c^-} f'(x)$ **شتون لري.**

مثال (3. 9.9) . د (2. 9.9) **په مثال کې f ټوټه په ټوټه همو راه يوه تابع ده ،په حقيقت کې د f يوه تابع يوازې د** nπ **غيرمتمادي نقطې لري داسې چې وي** $n = 0, \pm 1 \pm 2, ...$ **که C داسې يوه نقطه وي چې د f تابع يواړخيز ليمتونه په نو موړې نقطه کې +1 او−1 وي. داسې چې** $f'(x) = 0$ **ده که**$x \notin \{n\pi: n = 0, \pm 1 \pm 2, ...\}$ **وي لرو.** $\lim_{x\to c^-} f'(x) = \lim_{x\to c^-} f'(x) = 0$ **اوکه**

$$C \in \{n\pi: n = 0, \pm 1 \pm 2, ...\}$$

وي . بناً پردې f' په پرله پسې توګه متمادي دی.په حقيقت کې f'تابع د رفع کولو وړغيرمتمادي نقطولرونکې ده.

قضيه (1.9.9). فرضوو چې f د 2π **پيريود سره يو پيريوديکه تابع اوټوټه ټوټه همو راه ده. قبلووچې**

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \quad a_k\, cos(k\, x) + b_k\, sin(kx)$$

د f تابع له پاره د فوريې سلسله ده نو

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(kx) = f(x)$$

که f په x کې متمادي . او c د f له پاره يوه غير متمادي نقطه وي ،نو د f تابع له پاره په c کې د فوريه سلسله د يو اړخيز ليمتونواوسط ته متقاربه ده.بنأ پر دې

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\,c) + b_k \sin(kc) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to c^-} f(x) + \lim_{x\to c^+} f(x)\right)$$

دی.

مثال(4.9.9). که f د (2.9.9) او (3.9.9) مثالونو تابع وې، f له پاره د فوريې سلسله عبارت ده له:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

داسې چې f تابع ټوټه ټوټه همو راه ده او f يوازې په $n\pi, n = 0, \pm1 \pm 2, \ldots$ غيرمتمادي ده. نولرو

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)x) = f(x)$$

که $x \notin \{n\pi : n = 0, \pm1 \pm 2, \ldots\}$ وي د (1) قضيې له مخې لروچې .

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)x) \Big|_{x = n\pi} = 0$$

څرنګه چې0 د f په تابع کې د... $n\pi, n = 0, \pm1 \pm 2,$ په نقطه کې د يواړخيز ليمټونواوسط دی.

د (1) قضيې د وړاندوينې له مخې تأ يدوداسې چې f په همدې نقطو کې غير متمادي دي .

مثال (5.9.9). قبلووچې .

$$F(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

او f د 2π پيريودسره د F توسعه وي. بنأ پردې

$$f(x) = |x + 2k\pi|$$

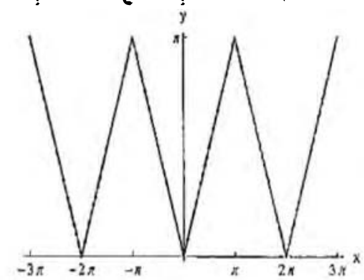
دی.که k تام عدد وي داسې چې $x + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ وي.

a) د f ګراف د[$-2\pi, 2\pi$] په انټروال کې رسم کړئ.

b) د f له پاره د فوريې سلسلې معلوم کړئ.

c) و ښيې چې د $x \in \mathbb{R}$ حقیقی عدد له پاره په x کې د فوریه سلسلې مجموعه عبارت له $f(x)$ څخه ده.

حل.a) (3) شکل د [$-2\pi, 2\pi$] په انټروال کې fتابع ګراف ښيې.



(3) شکل

b) قبلووچې

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(kx)$$

د fتابع له پاره د فوریې سلسله ده ، داسې چې $f(x)\sin(kx)$ د هر k له پاره یوه تاقه تابع تعریف شوې ده نولیکو چې .

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0, k = 1,2,3\ldots$$

دی.

لرو چې.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

داسې چې $f(x)\cos(kx)$ د هر k له پاره یوه جفته تابع تعریف شوي . نولیکو چې.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(kx)-1}{k^2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{که} k \text{ جفت وي} \\ \dfrac{-4}{\pi k^2} & \text{که} k \text{ تاق وي} \end{cases}$$

بنأ پردې د f له پاره د فوریې سلسله عبارت ده له.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos\ (5x)\ + \cdots\right)$$

c) . د f تابع په R کې متمادي دی. لرو

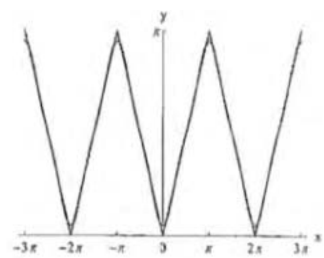
$$f'(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0 \text{ که} \\ -1\ , & 0<x<\pi \text{ که}\end{cases}$$

د f' تابع د 2π په پیریود [$-\pi,\pi$] په انټروال کې محدوددی. په دې توګه نوموړی تابع یوازې د π په تامومضربونوغیر متمادي ده.په داسې یوه نقطه کې د f' یوازخیزلیمټونو 1 یا -1 دي.بناً پردې f' په پرلپسی ډول متمادي ده. بناً پردې f ټوټه ټوټه هموار ده. په نتیجه کې (1) قضیې د صدق وړدی.داسې چې f د عددی محور پرټولو داخلی نقطو کې متمادي ده .

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(cos(x)+\frac{1}{3^2}cos(3x)+\frac{1}{5^2}cos\ (5x)\ +\cdots\right)$$

د هر $x\in\mathbb{R}$ له پاره قبلووچې

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ \frac{1}{(2k+1)^2}cos((2k+1)x).$$



(4)شکل

دی.

(4) شکل د[$-2\pi,2\pi$] په انټروال کې fتابع ګرافونه ښیې.د f_3 ګراف (خط خط شوي منحنی) دی.چې په ډیرسختنی سره د f تابع ګراف سره مقایسه کولی شو.بې له هغو نقطو څخه چې $0,2\pi$او $2\pi-$ته نږدې وي. په کوموکې چې f' غیر متمادي ده.

تبصره (1.9.9) .ددی فصل په لوموړي برخه کې (5) مثال د فوریه سلسلې تقاربیت د کمپیوتر په مرسته کولی شو وښیو ، په حقیقت کې داسې چې د هر $\theta\in\mathbb{R}$ له پاره $|\cos(\theta)|\le 1$ دی.نو

$$\left|\frac{1}{(2k+1)^2}cos((2k+1)x)\right|=\frac{|cos((2k+1)x)|}{(2k+1)^2}\le\frac{1}{(2k+1)^2}$$

دی.

د

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

سلسله متقاربه ده(کولی شو انتیگرالی ازموینه وکاروو او یا نورو موړی سلسله دمقایسوي ازموينې له مخې د $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ سره مقایسه کړې. د هر $x \in \mathbb{R}$ له پاره دفوریه سلسله مطلق متقاربه ده .

(2.9.9) دفوريې سلسلې چې پيريود يې د 2π خلاف وي.

هغه پيريوديک توابع چې پيريود يې 2π نه وي د فوريې سلسلې نظريې ته يې داسې انکشاف ورکړو. فرضووچې $L > 0$ او fتابع د 2π پيريودسره پيريوديکه تابع ده .په دی حالت کې اساسی توابع عبارت دی له.

$$sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right), cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right), k = 1,2,3 \dots, n$$

دغوتابع گانو ته د $2L$ پیریودسره پیریودیکی تابع گانی وایې.(ازمایینت یې کړی).مونږد $2L$ پیریودسره f تابع تخمینول دمثلثاتی پولینوم په شان د

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k-1}^{n} a_k . cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) + b_k \, sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)$$

په شکل په پام کې نیسو. د $L = \pi$ د خاص حالت له مخې لرو

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} F_n(x)dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} F_n(x) . cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) dx \; k = 1,2 \dots . n$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} F_n(x) . sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right) dx \; k = 1,2 \dots . n$$

بنأ پردې د فوریه سلسلې دfتابع له پاره د $2L$ په پیریود په لاندې توگه تعریفوو

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k . cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) + b_k \, sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)\right)$$

داسې چې

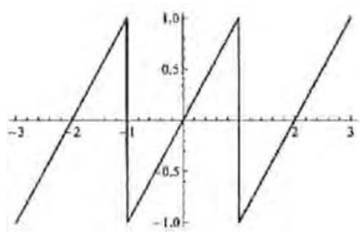
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\,.\cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx ,k = 1,2 \ldots . n$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\,.\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx, k = 1,2 \ldots . n$$

وی ، د $L = \pi$ د خاص حالت له مخې که د fتابع په ټوټه ټوټه ډول هموار ه وي، د فوريې سلسلې مجموعه د f له پاره په x کې له $f(x)$ څخه عبارت ده. که چيرې د f تابع په x کې متمادي وي، که c د fله پاره يوه غيرمتمادي نقطه وي ،نو د f تابع له پاره په c کې د فوريې سلسله د يو اړخيز ليمتونواوسط ته متقاربه ده:يعنې.

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k\,.\cos\left(\frac{\pi kc}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi kc}{L}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to c^-} f(x) + \lim_{x\to c^+} f(x)\right)$$

مثال (6.9. 9).قبلوو چې د $x = F(x)$, $-1 < x < 1$ او f د F له پاره د 2 پيريودسره يوه پيريوديکې انکشافی تابع ده بنأ پر دې k که يو تام عددوي داسې چې $n + 2k \in (-1,1)$ وي. بنأ پر دې $f(x) = F(x + 2k) = x + 2k$ د f تابع ټوټه ټوټه هموار ه او په $\pm(2n + 1)$, n = 1,2 ,3 ... کې خيزوهونکی غير متمادي نقطو لرونکي ده.(5) شکل د [-3,3] په انټروال کې د f ګراف ښيې د ګراف څخه په استفاده (5) شکل نا منظم عمودي قطعه خطونه د f په متمادي نقطو کې ښيې.



(5) شکل

د f له پاره د فوريې سلسله په لاندې بڼه ده.

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\pi k\, x) + b_k \sin(\pi kx)\right)$$

لروچې.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = 0,$$

او

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,.\,cos(\pi k\,x)\,dx \;\; = \int_{-1}^{1} x\,.\,cos(\,\pi kx)\,dx \;\; k = 1,2\,,3\,...$$

دی.

$x\,.\,cos(\,\pi kx)$ یو تاق تابع وي) د$sin(\pi kx)$ ضریبونو له پاره

$$b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} xsin\;(\,\pi kx)\,dx = 2\int_{0}^{1} xsin\;(\,\pi kx)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{-\,cos(\pi k\,x)}{\pi k}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi k} & \text{که k تاق وي} \\ -\dfrac{2}{\pi k} & \text{که k وي جفت} \end{cases}$$

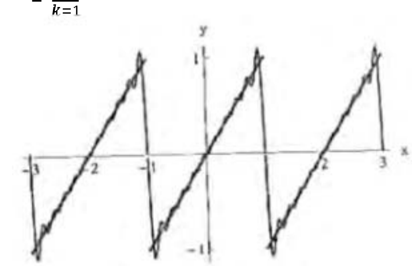
دی.

په دې توګه د f له پاره د فوریې سلسله عبارت ده له

$$\frac{\pi}{2}\left(sin(\pi x) - \frac{1}{2}sin(2\pi x) + \frac{1}{3}sin\;(3\pi x)\; - \frac{1}{4}sin\;(4\pi x) + \;...\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\;\;(-1)^{k+1}1/k\;\;sin(\pi kx\,)$$

که

$$F_n(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\;\;(-1)^{k+1}1/k\;\;sin(\pi kx\,)$$



(6) شکل

وضع کړو د ګراف (6) شکل ښیي(او نا منظم قطعه خطونه دي). او د F_{10} (ټکی ټکی منحنی) ګراف ښیي. د یادولووړ ده چې f دغیر متمادی نقطو څخه پرته د F_{10} ګراف دf ګراف ته ډیر نږدی ده. دا یو حقیقت دی څکه چې ټوټه ټوټه هموار دی او f دهر

$x \notin \{\pm(2n+1), n = 0,1,2,3, ...\}$

کله پاره متمادي دی .د عمومي تیوری د وړاند وینی له مخې لرو چې:

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\;\;(-1)^{k+1}\frac{1}{k}sin(\pi kx\,) = f(x)\,,$$

په عمومي توګه په غير متمادي نقطو کې د فوريې سلسلې د f دکينې او ښي خوا ليميټونو د منځنی قيمت ته متقاربه ده.او دا قيمت 0 دی. دا يو حقيقت دی.کله چې

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}sin(\pi kx)$$

وي.

که $x=\pm(2n+1), n=0,1,2,3,\dots$ وي نو دسلسلې له مخې لرو چې.

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}sin(\pm\pi k\,(2n+1))=0+0+\cdots=0$$

که تاسو(6) شکل ته ځير شئ تاسو به $F_{10}(x)$ او $f(x)$ د ګرافونو په منځ کې د ملاحظی وړ توپيروګوری ، که چيرې x د f غيرمتمادي نقطوته ډيرنژدي وي.نوموړی توپير د ليدلو وړدی کله چې f په تخميني ډول د F_n سره تعويض کړو داسې چې n ډير لوی هم وي.(د n ديوی لوی قيمت له پاره وګوری).دا يو حقيقت دی، لاندی ليکنه صحيح ده:

که چيرې $0<\varepsilon$ وي نو x داسې شتون لري چې $|F_n(x)-f(x)|>\varepsilon$ وي. په دې ځای کې مهمه نه ده چې n څومره لوی وي.

د x د ټولو قيمتونوله پاره چې په هغه کې f معين وي دا ممکن نه دی چې n داسې و ټاکو ترڅو$0<\varepsilon$له پاره داسې يو مناسبه خطأ ارايه کړي چې د نوموړې مناسب خطأ له پاره$f(x)$ د$F_n(x)$ په واسطه تخمين شي.

دا د Gibbs phenomenon دطرحی يو نمونی مثال دی.

د A ضمیمه

د باقی پاتې له پاره د تیلور فورمول

(1.A)د باقی پاتې له پاره د تیلور فورمول

(1.1.A) د انتیګرال په شکله د منځنې قیمت عمومي قضیه

فرضوو چې f او g د $[a,b]$ پرخط متمادي او دهر $x \in [a,b]$ له پاره $g(x) \geq 0$ یا دهر $x \in [a,b]$ له پاره $g(x) \leq 0$ وي نو $C \in [a,b]$ داسې شتون لري چــې د هغــې لــه پاره

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = f(c \int_a^b g(x)dx$$

وي.

ثبوت.داسې چې f اوg د $[a,b]$ پر انټروال متمادي دي په نتیجه کې $f \cdot g$ د $[a,b]$ پرانټروال د انتیګرال نیونی وړده. که چیرې د هر $x \in [a,b]$ له پــاره $g(x) = 0$ وي نــو

$$\int_a^b g(x)dx \ = 0$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \ = f(c \int_a^b g(x)dx$$

مساوات صحت لري .او دهر $c \in [a,b]$ ، $(0 = 0)$ صدق کوي. اوس فرضووچې د هر $x_0 \in [a,b]$ له پاره $g(x_0) > 0$ دی نو

$$\int_a^b g(x)dx \ > 0$$

دي. دو g د متمادیت په نتیجه کې به مونږ دهر $x_0 \in [a,b]$ له پاره هغه تا ئید کړوچې (تاسې کولای شې د ارګومنټ بدلون تصدیق کړی. که x_0 انجامي نقطه وي .) په دي صورت کې $\delta > 0$ داسې شتون لری چې

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2} g(x_0)$$
$$\Rightarrow g(x) - g(x_0) > \frac{1}{2} g(x_0)$$
$$\Rightarrow g(x) > \frac{1}{2} g(x_0).$$

بناً پردې

$$\int_a^b g(x)dx \ \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx \ > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2} g(x_0)dx \ = \ g(x_0), \delta > 0$$

دی.

قبلوو چې M د $|a,\mathrm{b}|$ په قعطه خط باندی د f له پاره اعظمي نقطه وي او یا m د $|a,\mathrm{b}|$ په قعطه خط باندی د f له پاره اصغري وي. لروچې .

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

. که چیرې د هر $x \in |a,b|$ له پاره $g(x) \ge 0$ دی او $\int_a^b g(x)dx > 0$ دی. په پایله کې

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

دی.

داسې چې f په $[a,b]$ کې متمادي دی نو $c \in [a,b]$ شتون لري داسې چې .

$$f(c = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

د منځني قیمت د قضیې څخه لیکلوچې .

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c\int_a^b g(x)dx$$

قضیه(A-1-1). د تیلور د باقي پاتې فورمول .

فرضووچې د f تابع د $\mathrm{n}+1$ ترتیب له پاره متمادي او دمشتق وړ ده که c د J په خلاص انټروال کې شامل وي داسې چې دهر $x \in J$ له پاره د $c_n(x)$ یوه نقطه د x او c تر منځ شتون لري داسې چې .

$$\begin{aligned} f(x) &= p_{c,n}(x) + R_{c,n}(x) \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \tfrac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + R_{c,n}(x) \end{aligned}$$

وي.

همدارنګه د

$$R_{c,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(c_n(x)\big)\,(x-c)^{n+1}$$

او

$$\begin{aligned} R_{c,n}(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n \end{aligned}$$

افاده دتیلور پولینوم د f تابع له پاره د c په اساس ایښودل شویدی بنأ پردی د c په قاعده د f تابع لــه پـــاره د تیلور پـــولینوم تـــه د تیـــلور سلسلې $(n+1)st$ قسمي حاصل جمع وایې. د

$$R_{c,n}(x) = f(x) - p_{c,n}(x)$$

افاده د $f(x)$ د خطأ تخمین د $p_{c,n}(x)$ پواسطه ارایه کیږي.او دا ددې ډول باقې پاتې تخمینې ښودنه هم ده .

معمولاً په ټولو مثالونوکې مونږ د مایکلورن په سلسله کې $c \equiv 0$ فرضوو په دې حالت کې لاندې کړنلاره کاروو.

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$
$$R_n(x) = f(x) - R_n(x),$$

د (A.1.1) **قضیې ثبوت**. د کلکولس د اساسی قضیې له مخې

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\,dt$$

د قسمي انټیګرالو په کارولو سره ، معمولاً $v = t$ ، $u = f'(x)$ او $dv = dt$ وضع کوی ، په دې حالت کې که په غیر مستقیم ډول $v = t - x$ د یونا معلوم قیمت سره وضع کوو تراوسه مونږ درلودل .

$$dv = \frac{dv}{dt}dt = \left(\frac{d}{dt}(t-x)\right)dt = dt$$

بنأ پردې

$$\begin{aligned}
f(x) - f(c) &= \int_c^x f'(t)\,dt \\
&= \int_c^x u\,dv \\
&= \left(uv\Big|_c^x\right) - \int_c^x u\,dv \\
&= (f'(x)(x-t) = \big(f'(c)(c-x)\big) \\
&\quad - \int_c^x (t-x)f''(t)dt \\
&= f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(t-x)dt
\end{aligned}$$

په دې ډول

$$f(x) = f(c) + f'(c)(c-x) + \int_c^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$= p_{c,1}(x) + \int_c^x f''(t)(x-t)dt.$$

دی.

دلته که خپل پام انتیګرال ته راو ګرځوو او قسمي انتیګرال نیونه په کاریوسوو، $u = f''(x)$ او $dv = (x-t)\, dt$ وضع کوو نو

$$v = \int dv = \int (x-t)dt = -\frac{1}{2}(x-t)^2$$

پناٌ پردې

$$\begin{aligned}
\int_c^x f''(t)(x-t)dt &= \int_c^x u\, dv \\
&= \left(uv\Big|_c^x\right) - \int_c^x v\, du \\
&= \left(-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_c^x\right) - \int_c^x -\frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \\
&= \left(-\frac{1}{2}f''(x)(x-x)^2 + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2\right) \\
&+ \int_c^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}f''c(x-c)^2 + \int_c^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

دی.

په دې ډول

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(c) + f'(c)(c-x) + \int_c^x f''(t)(x-t)\, dt \\
&= f(c) + f'(c)(c-x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 \\
&+ \int_c^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \\
&= p_{c,2}(x) + \int_c^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

دی.

په تکراری ډول قسمي انتیګرال پـــه کـــاروړو او وضـــع کـــووچـــې .که$dv = \frac{1}{2}(x-t)^2 dt$ او $u = f^{(3)}(t)$ وی بنآ پردی

$$v=\int \frac{1}{2}(x-t)^2\ dt=\frac{1}{(2)(3)}(x-t)^3=\frac{1}{3!}(x-t)^3$$

دی.

. په دې ډول

$$\begin{aligned}\int_c^x f^{(3)}(t)\frac{1}{2}\ (x-t)^2dt &= \int_c^x u\, dv \\ &= \left(uv\Big|_c^x\right)-\int_c^x v\, du \\ &= \left(-\frac{1}{3!}f'''(t)(x-t)^3\Big|_c^x\right) \\ &\quad -\int_c^x -\frac{1}{3!}(x-t)^3 f^{(4)}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{3!}f'''c(x-c)^3+\int_c^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f^{(4)}(t)\, dt.\end{aligned}$$

بنأ پر دې

$$\begin{aligned}f(x) &= f(c)+f'(c)(c-x)+\tfrac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\textstyle\int_c^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \\ &= f(c)+f'(c)(c-x)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 \pm \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(x-t)^3 \\ &\quad +\int_c^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f^{(4)}(t)\, dt. \\ &= p_{c,3}(x)+\int_c^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f^{(4)}(t)\, dt.\end{aligned}$$

دی.

دعمومی حالت په قبلولو لرو :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n+R_{c,n}(x) \\ &= p_{c,n}(x)+R_{c,n}(x)\end{aligned}$$

داسې چې

$$R_{c,n}(x)=\int_c^x \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

دا ستونزمنه نده چې درياضی په استقرأ يې ثبوت کړو .فرضوو چې دا بيانيه د n له پاره صحيح ده .قبلوو چې $dv=\frac{1}{n!}(x-t)^n dt$ او $u=f^{(n+1)}(t)$ دی.

بنأ پردې

$$v = \int \frac{1}{n!}(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!\,(n+1)}(x-t)^{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

داسې چې

$$\begin{aligned}\int_c^x f^{(n+1)}(t)\frac{1}{n!}(x-t)^n dt &= \int_c^x u\,dv \\ &= \left(uv\Big|_c^x\right) - \int_c^x v\,du \\ &= \left(-\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_c^x\right) \\ &\quad - \int_c^x \frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1} \\ &\quad + \int_c^x \frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt.\end{aligned}$$

دی.

په دې ډول

$$\begin{aligned}f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n \\ &\quad + \int_c^x f^{(n+1)}(t)\frac{1}{n!}(x-t)^n dt \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1} \\ &\quad + \int_c^x \frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt \\ &= p_{c,n+1}(x) + R_{c,n+1}(x),\end{aligned}$$

دی.

په مکمله توګه داسې ښودلی شو چې.

$$R_{c,n+1}(x) = \int_c^x \frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt$$

دی.

مونږ ښودلی وو چې $f(x) = p_{c,n}(x) + R_{c,n}(x)$,. دی.

دا ډول چې.

$$R_{c,n}(x) = \int_c^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

پورتنۍ افاده د $f(x)$ دباقی پاتی تخمین د c په قاعده د n ترتیب پولینوم له پاره ښودلې شو ، f په انتیګرالی شکل د باقی پاتی څخــه عبارت دی.مونږ کولای شو د باقــی پاتی انتیګرالی شکل دوسطی قیمت دعمومی قضییي له مخې چې مخکې واضیح شوي دی حاصل کړو. که $x > c$ وي ,او دهر $t \in [c, x]$ له پاره $(x-t)^n \geq 0$ وي .په دې ډول $c_x \in [c, x]$ شتون لري داسې چې .

$$\begin{aligned}
\int_c^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c_x) \int_c^x (x-t)^n dt. \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c_x) \left(\frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)(x-c)^{n+1}
\end{aligned}$$

په مشابې ډول $(x-t)^n = (-1)^n = (x-t)^n$ $x < c,$ وي, نو نشو کولای د $[x, c]$ په انټروال کي علامی ته تغیر ورکړو،د ځینی c_x له پاره د $[c, x]$ کې دارنګه چې.

$$\begin{aligned}
\int_c^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= -\int_x^c \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c_x) \int_x^c (x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c_x) \left(-\frac{1}{n+1} (x-c)^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)\,(x-c)^{n+1}
\end{aligned}$$

د B ضمیمه

قــطــبی مختصــات

(1.B) د قطبی مختصاتو سیستم.

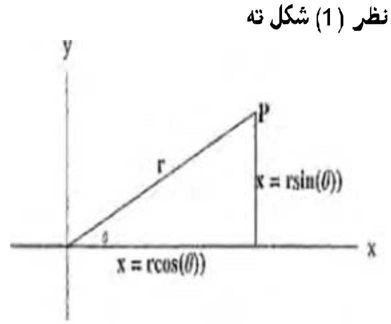
(1.1.B) د قطبی مختصاتو د سیستم تعریف

تر اوسه مو دقایمو مختصاتوسیستم په مستوی کې په کاروړل ، اوس قطبی مختصاتو سیستم معرفی کوو کوم چې د موجوده حالت له پاره ډیر مناسب دی. په خاص ډول دستورو د حرکت دمدارونوڅیړل.

د معمول په شان که د قایمو مختصاتو په سیستم کې که عمودی محور په x او افقی محور په y وښیو نو که مبدأ (0,0) O ، $P = (x, y)$ پرته له مبدأ څخه یوه بله نقطه او r له مبدأ څخه تر P پورې فاصله وي نو لیکلي شوچې.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r ته له مبدأ څخه تر P پورې دقطبی مختصاتوشعاع وایې ، او θ له هغه زاویې څخه عبارت ده چې د op قطعه خط په واسطه چې د ox د محور له مثبت جهت سره جــوړ یږي او پــه رادیان اندازه کیــږي . بناً پردی نظر (1) شکل ته



(1) شکل

$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$او $cos(\theta) = \frac{x}{r}$دی. θ ته قطبی زاویه وایې . کولی شو په په عین نقطه کې نــامتناهی شمیر قطــبی زاویې تعین کړو . فــرضــوو چــې که θ د قطبی زاویــه وي نــود $n = 0, \pm1 \pm ,2, \pm3, \ldots$ له پاره $\theta + 2n\pi$ هم د P له پاره قطبی زاویه ده.

(r,θ) د P قطبی مختصاتو له پاره یوه مرتبه جوړه ده. د$(0,0)$ O مبدأ ته د قطبی مختصاتو خاص حالت وایې د θ هره زاویه د قطبی زاویې په مبدأ (O) کې دی. نو وایو چې د θ هره زاویه کولی شو له مبدأ څخه قطبی زاویې په شان په پام کې ونیسو .

مثال (B. 1.1) . که P دقایمو مختصاتو سیستم کې ورکړل شوي وي r او θ قطبی مختصاتوکې معلوم کړئ .

$a)\ P_1 = (2,0)\ \ b)\ P_2 = (-2,0)c)P_3 = (1,\sqrt{3})\ d)P_4 = (-1,\sqrt{3})$

حل.

$$a)\ \ r = 2\ ,\theta = \pm 2n\pi, n = 0,1,2,3, \ldots$$
$$b)\ \ r = 2, \theta = \pi \pm 2n\pi, n = 0,1,2,3, \ldots$$
$$c)\ \ r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

د θ زاویه د P_3 له پاره قطبی زاویه ده که او یوازی که

$$cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

او

$$sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

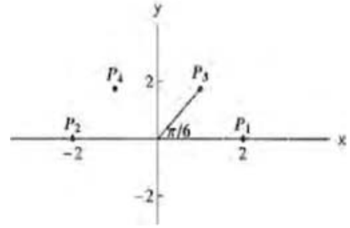
وي، د $\frac{\pi}{6}$ رادیان زاویه دی غوښتنې ته ځواب وایې . په دې توګه θ د P له پاره ورکړل شوي قطبی زاویې ده.که او یوازی که

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \pm 2n\pi$$

وی،داسې چې . $n = 0,1,2,3, \ldots$ دي.

d) دc دبرخې مطابق $r = 2$ ده او دی ته ضرورت لروچې، $sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ وي.
د $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ رادیان زاویه دې غوښتنی ته ځواب وایې. په دی ډول θ د P_4 قطبی زاویه ده.که او یوازی که

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \pm 2n\pi$$



(2) شکل

وي، داسې چې ... $n = 0,1,2,3,$ وي. په ځینو حالاتو کې کولای شو قطبي زاویه د ورکړل شوې نقطې څخه لاسته راوړو ، په عمومي حالت کې البته د (1.1.B) مثال مشاهده کولای شو ، او د قطبي زاویې د محاسبې له پاره چې $[-\pi, \pi]$ انټروال کې ورکړل شوې ده یوه تګلاره غوره کړو .

قضیه (B. 1.1) د $P = (x, y) \neq (0,0)$ له پاره. که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ او

$$\theta = \begin{cases} arccos\left(\frac{x}{r}\right) ، y \geq 0 & \text{که} \\ -arccos\left(\frac{x}{r}\right) ، y < 0 & \text{که} \end{cases}$$

وي .

نو په دې صورت کې θ ته د P قطبي زاویه وایې داسې چې $-\pi < \theta \leq \pi$ ده. بنأ پرد ې که زاویه د 0 او π تر منځ واقع وي ، په دې صورت کې نقطه دمستوي په پاسنی نیمائې برخه کې واقع ده . یعنې $y > 0$ دی. که زاویه د 0 او $-\pi$ تر منځ واقع وي په هغه حالت کې نقطه د مستوي په ښکتنی نیمایې برخه کې واقع ده یعنې $y < 0$ وي همدارنګه د π قطبي زاویې د$(x, 0)$ نقطې له پاره د $x < 0$ په حالت کې تګلاره تعینولای شو .

د **(B .1.1)قضیې ثبوت.** د $y \geq 0$ په حالت کې $\theta = arccos\left(\frac{x}{r}\right)$ وي . د $arccosine$ د تعریف په اساس لروچې . $0 \leq \theta \leq \pi$ او $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ ضرورت لروچې و ازمایو .

$$sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

دی.

نو لروچې.

$$sin^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta) \Rightarrow sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

دی.

داسې چې

$$0 \leq \theta \leq \pi, sin(\theta) \geq 0$$

دی.

په دې توګه

$$sin(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{|y|}{r}$$

دی.

داسې چې $|y| = y$ ، $y \geq 0$ دی.نو

$$sin(\theta) = \frac{|y|}{r} = \frac{y}{r}$$

دی.

اوس فرضوو چې $y < 0$ وي په دې حالت کې قبلوو چې

$$\theta = -arccos\left(\frac{x}{r}\right) \Leftrightarrow -\theta = arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

دی.

داسې چې $0 \leq -\theta \leq \pi$ او $0 \leq -\theta \leq -\pi$ او $cos(-\theta) = \left(\frac{x}{r}\right)$ وي. بناً پر دې $cos(\theta) = \frac{x}{r}$

دی. داسې چې cosine جفت تابع ده . لروچې

$$sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\theta)}$$

داسې چې $-\pi \leq -\theta \leq 0$ ، $\sin(\theta) \leq 0$ دی. په دې ډول

$$sin(\theta) = -\sqrt{1 - cos^2(\theta)} = -\frac{|y|}{r}$$

دی.

له بلې خوا $|y| = y$ ، $y < 0$ بناً پر دې

$$sin(\theta) = -\frac{|y|}{r} = \frac{y}{r},$$

دی.

مثال (B. 1.2). که

$a) P_1 = (2,1)$ $b) P_2 = (-2,1)$ $c) P_3 = (-2,-1)$ $d) P_4 = (2,-1)$

وي .د θ قطبي زاويه معلومه کړی داسې چې $-\pi \leq -\theta \leq \pi$ وي

حل. په اکثرو حالاتو کې

$$r = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

دی.

a) دا نقطه د مستوی په پورتنې نیمایې برخه کې واقع ده .داسې چې .

$$\theta = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cong 0.463648$$

وي.

b) دا نقطه د مستوی په پورتنې نیمایې برخه کې واقع ده .داسې چې .

$$\theta = arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cong 2.67795$$

c) دا نقطه د مستوی په نمایي بنکتنی خوا کې واقع ده. داسې چې

$$\theta = -arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cong -2.67795$$

وي.

d) دا نقطه د مستوی بنکتنی نیمایې خوا کې واقع ده .داسې چې

$$\theta = -\, arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cong -0.463648$$

وی.

د قایمو مختصاتو په سیستم کې یوه نقطه په ډېره اسانی سره محاسبه کولای شو . که چیرې قطبی مختصــات یې ورکړل شــوي وي. که(r ، θ)د P مــرتبی جــوړی قطبي مختصــات وی نــولروچــې $x = rcos(\theta)$ او $y = r\,sin(\theta)$ دی.

مثال (.3 . 1 .B). فرضووچې د Pد$(3,\pi/3)$ د قطبي مختصات مرتبه جوړه وی.P په قایمو مختصاتو کې تعین کړئ .

a) فرضووچې د Pد$(3,\pi/3)$ د قطبي مختصات مرتبه جوړه وی .د قایمو مختصاتو په سیستم کې P معلوم کړئ.

b) فرضووچې د Pد$(3,1)$ د قطبي مختصات مرتبی جوړه وی، دP تخمین دقایمو مختصاتو په سیستم کې معلوم کړئ.

حل.

(a

$$x = 3\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$
$$y = 3\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

دی.

(b

$$x = 3\,cos(1) \cong 3(0.540302) \cong 1.62091$$
$$y = 3\,sin(3) \cong 3(0.841471) \cong 2.52441$$

(B. 1.2)په قطبی مختصاتو کې د یوې معادلې گراف.

په دې برخه کې بــه د xoy پرمستوی د $F = (r, \theta)$ مــعــادلې گــراف وڅــیړو داســې چې $F = (r, \theta)$ افاده د قطبی مختصاتو په سیستم کې ورکړل شوې او $y = r\,sin(\theta)$ ، $x =$ $rcos(\theta)$ وي ددی ډول گرافونو رسمول به په راتلونکی کې د یوې ټاکلی تګلاری له مخې رسم

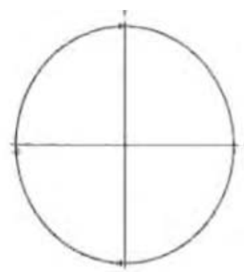
کېږو . که $r < 0$ او $F(r,\theta) = 0$ وي هغه نقطه چې $(-r, \theta + \pi)$ قطبي مختصاتو په مرتبې جوړې پورې اړه لري . د منحنی د پاسه واقع ده . دا اندازه له یوې مرحلې څخه وروسته پــه یوې معینې فاصلې سره $-r$ په شعاع د θ زاویــې پــواسطه د $r < 0$ په حالت کې په خپل استقامت بیرته شاته را ګرځي . چې ځینې مثالونه یې په لاندې ډول مشاهده کوو .

مثال (B. 1.4). د $r = 2$ معادلې ګراف رسم کړئ او معادله یې د قایمو مختصاتو په سیستم کې لاسته راوړې .

حل. څرنګه چې r له مبدأ څخه تر 2 واحده پورې فاصله ښيي نو د $r = 2$ معادلې ګراف د 2 واحده په شعاع له دایرې څخه عبارت ده . چې مر کز یې په مبدأ کې واقع دی. او معادله یې د قایمو مختصاتو په سیستم کې عبارت دی له

$$r = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

(3) شکل ددایرې ګراف ښيي.



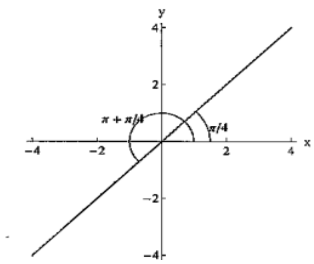
(3) شکل

مثال (B. 1.5). د $\theta = \frac{\pi}{4}$ معادلې ګراف رسم کړې او معادله یې د قایمو مختصاتو په سیستم کې پیدا کړئ .

حل. که $r > 0$ وي نو $(r, \frac{\pi}{4})$ هره نقطه د قطبي مختصاتو د منحنی د پاسه واقع ده.دا برخه د هغې منحنی د شعاع څخه عبارت وو چې له مبدأ څخه پیل او د ox د مثبت جهت سره د $\frac{\pi}{4}$ رادیانه زاویه جوړوي.که $r < 0$ وي.

$(r, \frac{\pi}{4})$ مرتبه جوړه د قطبي مختصاتو پورې مربوط ګڼو چې $-r$ او $(\pi + \frac{\pi}{4})$ د قطــبي مختصاتونقطې دي په دې تو ګه $\theta = \frac{\pi}{4}$ ګراف د هغه خط څخه عبارت دی چې له مبدأ څخه تیریږي او میل یې *(1)* دی چې په (4) شکل کې ښودل شوي دی .

که د $r = f(\theta)$ ډول معادله په پام کې ونیسو ، داسې چې f ورکړل شوي تابع او $\theta \in |a,b|$ وي. داسې



شکل *(4)*

چې

$x = rcos(\theta)$ او $y = r\,sin(\theta)$ دی کولی شو x او y د θ تابع څخه لاسته راوړو .

$$x\,(\theta) = r(\theta)\,cos(\theta) = f(\theta)\,cos(\theta)$$

او

$$y\,\theta) = r(\theta)\,sin(\theta) = f(\theta)\,sin(\theta)$$

داسې چې $\theta \in |a,b]$ وي مونږ به هغه منحنی ته رجوع وکړو چې د $x\,(\theta) = f(\theta)\,cos(\theta)$ او $y\,(\,\theta) = f(\theta)\,\sin(\theta)$ توابعوکوردینات په واسطه شودل شوي دی، د قطبی منحنی په څیر د $r = f(\theta)\;\;(\theta \in |a,b)\,]$ د معادلې په واسطه مشخص شوي وي.

مثال (B. 1.6) .که $f(\theta) = 3\sin(\theta)$ وي داسې چې $\theta \in [0,2\pi]$ وي.

a) د $r = f(\theta)$ معادله په پام کې نیولو سره د x او y کوردینات پیدا کړئ.

b) د $r = f(\theta)$ گراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې $r\theta$ په مستوی کې رسم کړئ.

که $0 \le -\theta \le 2\pi$ وي.

c) د قطبی منحنی گراف د $r = f(\theta)$ معادله په پام کې نیولو سره رسم کړئ.

d) د b د برخې گراف د xoy قایمو مختصاتو په سیستم کې څرگنده او منحنی مشخص کړئ که چیرې هغه د مخروطي برخې په شان وي.

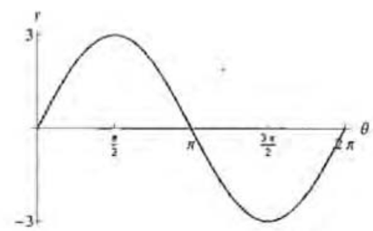
حل. a)

$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) = 3\sin(\theta)\cos(\theta)$$

او

$$y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) = 3\sin^2(\theta)$$

داسې چې $\theta \in [0,2\pi]$ وي.

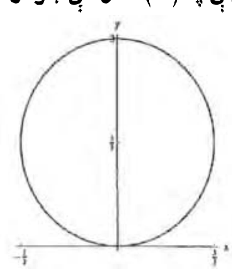


(5) شکل

b) (5) **شکل** $\theta \in [0,2\pi]$ **کې د** $r = f(\theta) = 3\sin(\theta)$ **گراف قایمو مختصاتو په سیستم کې د** $r\,\theta$ **په مستوی کې ښيي.**

C) **کله چې θ د 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي په دې صورت کې $3\sin(\theta)$ له 0 څخه تر 3 پورې تزاید کوي .او کله چې θ د $\frac{\pi}{2}$ نه تر π پورې تزاید وکړي $3\sin(\theta)$ د 3 څخه تر 0 پورې تناقص کوي.په دې توګه هغه نقطه چې په قطبی مختصاتو پورې اړه لري د ($3\sin\theta$،θ) مرتبې جوړې څخه عبارت ده.چې منحنی يې په (6) شکل کې ښودل شوي دي.**

کله چې θ د π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي په دې صورت کې $3\sin(\theta)$ له 0 څخه تر 3 پورې تناقص کوي .او کله چې θ د $\frac{3\pi}{2}$ نه تر 2π پورې تزاید وکړي $3\sin(\theta)$ د 3 – څخه تر 0 پورې تزاید کوي. د وروستی مرحلی د تګلاری له مخې د مبدأ څخه د $-r$ فاصله د شعاع په مبدأ او د θ پواسطه ښودل شوي که $r < 0$ وي . د ($3\sin\theta$،θ) مرتبه جوړه قطبی مختصاتو پورې مربوطه نقطه ده چې په (6) شکل کې ښودل شوي.



(6) شکل

d) ځرنګه چې $r = \sqrt{x^2+y^2}$ او $sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ دی.نو

$$r = 3\,sin(\theta) \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow x^2+y^2 = 3y.$$

دی.

د x او y تر منځ رابطه دویمه درجه معادله ده . پرته د هغه جملی چې د xy حاصل ضرب پکې موجود وي . د(A.1.5) سکشن د (1) ضمیمه په مطابق . کو لای شو ددی ډول معادلې ګراف د مکملی مربع د تکمیلولو څخه وروسته رسم کړو.

$$x^2+y^2 = 3y \Longrightarrow x^2+y^2-3y = 0$$
$$\Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} = 0$$
$$\Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

وروستی معادله ښیې چې منحنی له دایری څخه عبارت ده. چې مرکز یې د($0,\frac{3}{2}$) اوشعاع یې $\frac{3}{2}$ واحده ده. په مشابې ډول که و غواړو د ګراف څخه استفاده منحنی رسم کړو کیدای شي منحنی مو بیضوی وي نه دایره ، چې د مقیاس اندازه یې نظر افقی او عمودی محور ته مختلف وي.

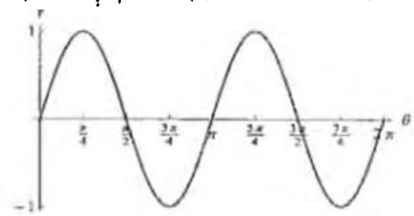
تبصره (B .1.1). د(1.1 B) مثال په شان د $r = f(\theta)$ ګراف $\theta \in [a,b]$ له پاره قایمو مختصاتو په سیستم کې د θr په مستوی کې قطبی مختصاتو منحنی چې د $r = f(\theta)$ معادلې په واسطه ښودلی شوې مو جودیت یې په مستقل ډول د تشخیص وړ دی. د مخه تردی د $(\theta, f(\theta))$ نقطو مجموعه په قایم مختصاتو د θr په مستوی $\theta \in [a,b]$ په حالت کې په پام کې نیول شوي ، وروسته له دی د $f(\theta)cos(\theta)$،$f(\theta)\,sin(\theta)$ نقطو مجموعــه پــه قایم مختصاتو کې د xy په مستوی کــې کــله چــې $\theta \in [a,b]$ په پام کې وي . معمولاً د ګراف د ګټورتیا له پاره یو خاص فهرست لاسته راځي چې د هغې پوری مربوط د قطبی منحنی ګراف $r = f(\theta)$ معادلې له مخې رسمیږی.

مثال(B. 1.7). a) قایمو مختصاتو په سیستم کې د θr په مستوی کې کله چې $0 \le \theta \le 2\pi$ وي $r = \sin(2\theta)$ معادلې ګراف رسم کړئ .

b) قطبی مختصاتو منحنی د $r = \sin(2\theta)$ معادلې له مخې رسم کړئ.

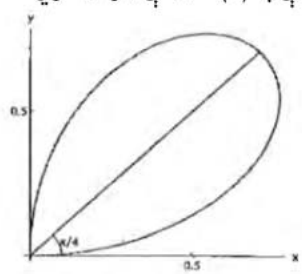
حل.a).

(7) شکل د $r = \sin(2\theta)$ گراف قایمو مختصاتو په سیستم کې د θr په مستوی ښیې .



(7) شکل

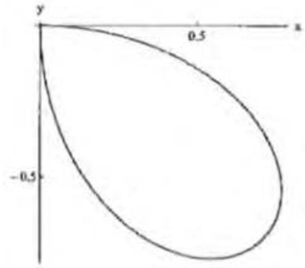
b) د (1.6.B) مثال په شان د a برخې د گراف مطابق ، ددې وړتیا لرو چې د $r = \sin(2\theta)$ معادلې قطبی گراف رسم کړو. کله چې θ د 0 څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې تزاید وکړي په دې صورت کې $\sin(2\theta)$ له *0* څخه تر *1* پورې تزاید کوي .او کله چې θ د $\frac{\pi}{4}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي $\sin(2\theta)$ د 0 څخه تر *1* پورې تزاید کوي. هغه نقطه ($\sin2\theta$،θ) مرتبې جوړې پورې اړه لري . منحنی گراف ښیې چې په (8) شکل کې ښودل شوي .



(8) شکل

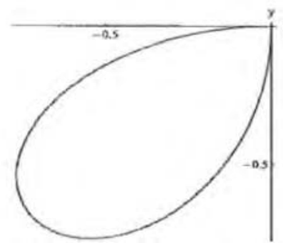
کله چې θ د $\frac{\pi}{2}$ څخه تر $\frac{3\pi}{4}$ پورې تزاید وکړي په دې صورت کې $\sin(2\theta)$ له *0* څخه تر *-1* پورې تناقص کوي .او کله چې θ د $\frac{3\pi}{4}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي $\sin(2\theta)$ د*1* - څخه تر *0* پورې تزاید کوي. وروستی مرحلې ته په کتو سره د ټاکلی تگلارې له مخې $-r$ فاصله مبدأ څخه د شعاع په امتداد د θ په واسطه ښیو که $r < 0$ وي . د قطبی مختصاتو هغه نقطه چې د ($\sin2\theta$ ،θ) مرتبې جوړې پورې اړه لري منحنی یې رسمولی شو چې په *(*9) شکل کې ښودل شوي دی.

دڅرنګه چې θ د π څخه تر $\frac{3\pi}{4}$ پورې تزاید وکړي. دا نقطه چې قطبي مختصات یې



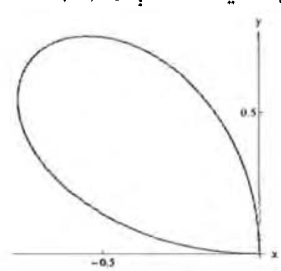
(9) شکل

(θ، $\sin 2\theta$) مرتبې جوړې پورې اړه لري منحنی یې په (10) شکل کې رسم شوي دي.



(10) شکل

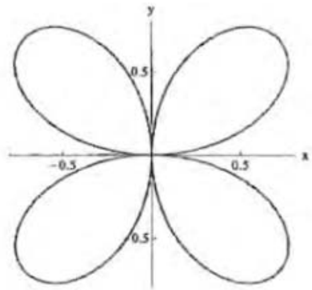
داسې چې θ د $\frac{3\pi}{4}$ څخه تر 2π پورې تزاید کوي. هغه نقطه چې قطبي مختصات یې(θ،
$\sin 2\theta$) مرتبې جوړې پورې اړه لري منحنی یې په (11) شکل کې رسم شوي دي.



(11) شکل

(12) شکل په مکمل توګه د $r = \sin(2\theta)$ معادلې قطبي ګراف ښیې ، چې منحنی ګانې ممکن د
څلور پاڼیز ګلاب په شکل و ښودل شي .

هغه منحنی ګانې چې د $r = 1 + \cos(\theta)$ او $r = 1 + \sin(\theta)$ معادلو پواسطه ورکړل شوي



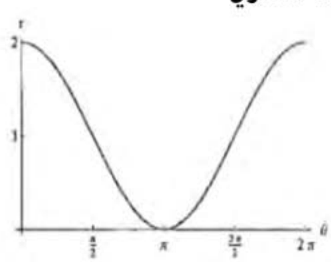
(12) شکل

داسې چې c ثابت وي د (limacons) په نوم یادیږي. لاندې دوه مثالونه ددې منحنی ګانو وضاحت بنیې .

مثال(B. 1.8). a) د $r = 1 + \cos(\theta)$ معادلې ګراف دقایمو مختصاتو په سیستم کې د θr په مستوی کې، کله چې $0 \le \theta \le 2\pi$ وي ، رسم کړئ .

b) د $r = 1 + \cos(\theta)$ معادلې په پام کې نیولو سره د قطبی منحنی ګراف رسم کړئ.

حل. a) (13) شکل دقایمو مختصاتو سیستم د θr په مستوی کې د $r = 1 + \cos(\theta)$ معادلې ګراف بنیې دا شان چې $0 \le \theta \le 2\pi$ وي.

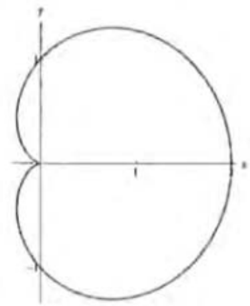


(13) شکل

کله چې θ د 0 څخه تر π پورې تزاید وکړي پــه دې صـــورت کې $1 + \cos(\theta)$ له 2 څخه تر 0 پورې تناقص کوي .او کله چې θ د π څخه تر 2π پورې تزاید وکړي $1 + \cos(\theta)$ د 0 څخه تر 2 پورې تزاید کوي. د یادونې وړده چې .

$$1 + \cos(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}} = 1 + \cos(\theta)\Big|_{\frac{3\pi}{2}} = 1$$

(14) شکل چې د$r = 1 + \cos(\theta)$ معادلې په واسطه مشخص شوې دی کیدای شی د یو کاردیود (cardioid) په شکل وي.

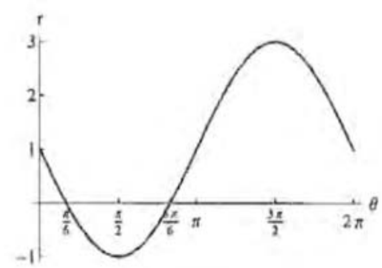


(14) شکل

مثال(B.1.9) .a)د$r = 1 - 2\sin(\theta)$ معادلې‌گراف دقایمو مختصاتو په سیستم کې په θr مستوی کې کله چې $0 \le \theta \le 2\pi$ وي رسم کړئ .

b) د$r = 1 - 2\sin(\theta)$ معادلې په پام کې نیولو سره د قطبی منحنی گراف رسم کړئ.

حل. a) (15) شکل د قایمو مختصاتو په سیستم د θr په مستوی کې د$r = 1 - 2\sin(\theta)$ معادلې گراف ښيي دا شان چې $0 \le \theta \le 2\pi$ وي.



(15) شکل

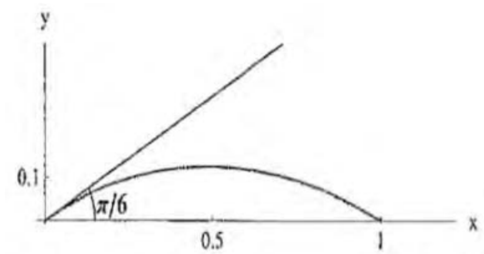
b) د یادونې وړ ده چې

$$1 - 2\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

داسې چې مربوطه قیمت په$[0,2\pi]$ انټروال کې $\frac{\pi}{6}$ او $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ دي.

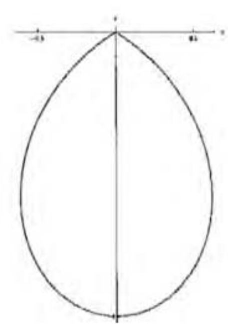
کله چې θ د 0 څخه تر $\frac{\pi}{6}$ پورې تزاید کوي په دې صورت کې $1 - 2\sin(\theta)$ له *1* څخه تر 0 پورې تناقص کوي .

هغه نقطه چې د قطبي مرتبې جوړې پورې اړه لري $(\theta, 1 - 2\sin(\theta))$. دی. (16) شکل ددی منحنی دګراف ښودونکی ده .



(16) شکل

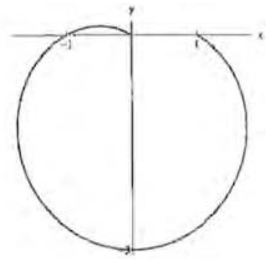
کله چې θ د $\frac{\pi}{6}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړی په دې صورت کې $1 - 2\sin(\theta)$ له 0 څخه تر *1*- پورې تناقص کوي .او کله چې θ د $\frac{\pi}{2}$ څخه تر $\frac{5\pi}{6}$ پورې تزاید وکړي $(1 - 2\sin(\theta))$ د *1* - څخه تر 0 پورې تزاید کوی. د اچې $1 - 2\sin(\theta) < 0$ دی. نودهر $\theta \in |\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}|$ له پاره $(\theta, 1 - 2\sin(\theta))$ نقطه د قطبي مختصاتو مرتبه جوړي پوری اړه لري. وروستی مر حلی ته په کتو د ټاکلی تګلاری له مخې $(1 - 2\sin(\theta))$ - فاصله له مبدأ څخه د شعاع په امتداد داسې چې $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ وي ښودل شوي ده . ددی نقطو په واسطه کولای شو منحنی رسم کړو چې په (17) شکل کې ښودل شوي دی.



(17) شکل

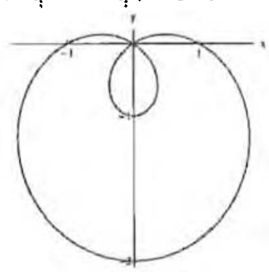
 څرنګه چې θ د $\frac{5\pi}{6}$ څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړی په دې صورت کې $2\sin(\theta)$ -1 له 0 څخه تر *3* پورې تزاید کوي .او دا چې θ د $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې تزاید کوي $(1 -$ $2\sin(\theta))$ د *3* څخه تر *1* پورې تناقص کوي.

نو موړې نقطه د قطبی مختصاتو د $(1 - 2\sin(\theta)$) مرتبې جوړې پورې اړه لري.چې منحنی یې په (18) شکل کې ښودل شوي دی.



(18) شکل

(19) شکل په بشپړ ډول دقطبی منحنی ګراف چې معادله یې $r = 1 - 2\sin(\theta)$ دی ښیې



(19) شکل

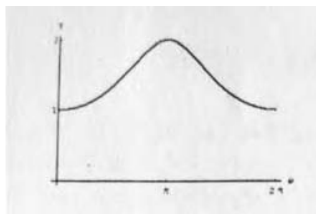
(B. 1. 3) مخروطی مقاطع په قطبی مختصاتو.

د $r = \frac{Ed}{1 \pm E\sin\theta}$ یا $r = \frac{Ed}{1 \pm E\cos\theta}$ ډول معادلې د r او θ مخروطی مقاطعوقطبی مختصات توضیح کـوي. د E عـدد د مـخروطـی مـقاطـع لـه مـرکزڅخـه فـرارا عبارت دی.کـه چـیرې $0 < E < 1$ مخروطی مقاطع بیضوی جوړوي او که $E = 1$ وي پارابولا او همدارنګه که $E > 1$ وي، د مخروطی مقاطع له هایپبربول څخه عبارت دی.

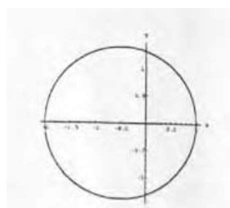
مثال (1.10.B). (بيضوي)

$$r = \frac{4/3}{1 + \frac{1}{3}\cos\theta}$$

(20) شكل د θr په مستوي کې د معادلې ګراف ښيي، او (*21*) شکل د معادلې ګراف د oxy په مستوی وی کې ښودل شوي .



(20) شکل

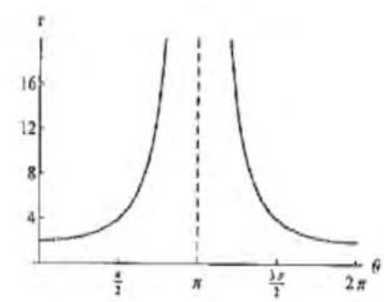


(*21*) شکل

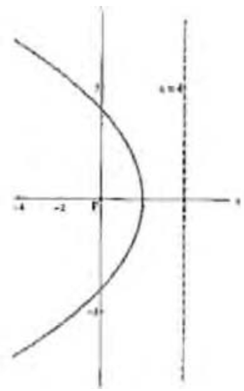
مثال (1.11.B) . (پارابولا)

$$r = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$

(22) شکل د θr په مستوي کې د معادلې ګراف ښيي، او (2 3) شکل د معادلې ګراف د oxy په مستوی وی کې ښودل شوي .



(22) شکل

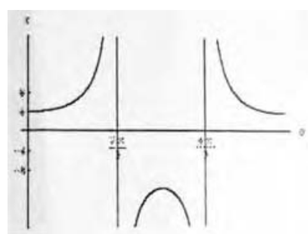


(2 3) شکل

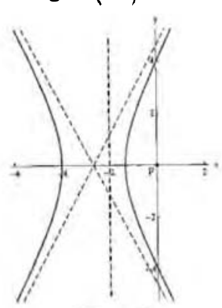
مثال(1-12-B) . هایپربولا)

$$r = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$

(24) شکل د θr په مستوي کې د معادلې گراف ښیې، او (2 5) شکل د معادلې گراف د oxy په مستوی وی کې ښودل شوي.



(24) شکل



(2 5) شکل

ضـــميـــمي

Book Name	Advanced Calculus II
Translator	Prof Nazar Mohammad
Publisher	Nangarhar Science Faculty
Website	www.nu.edu.af
No of Copies	1000
Published	2015, First Edition
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and Technical support by Afghanic organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office 0756014640

Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2015
Sahar Printing Press
ISBN: 978 9936 6200 18

Message from the Ministry of Higher Education

In history,books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science;and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers andauthors and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to the chief of German Committee for Afghan Children, Dr. Eroes, and our colleague Dr. Yahya Wardak who have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,
Prof. Dr. Farida Momand
Minister of Higher Education
Kabul, 2015

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 176 different medical textbooks (95 books funded by DAAD, 80 books funded by kinderhilfe-Afghanistan) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh and Kapisa medical colleges and Kabul Medical University. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost. Currently we are working to publish 20 more non-medical textbooks for Nangarhar University. All published medical & non-medical textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashtu. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state – of – the – art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers and students, we extended this project to the non-medical subjects e.g. Science, Engineering, Agriculture and Economics.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to the Afghan Universities free of charge. I would like the students to

encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) and its director Dr Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 80 other medical textbooks in the past three years which are being used by the students of Nangarhar and other medical colleges of the country. Dr Eroes has made funds available for 20 additional books which are being printed now.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister, Prof M Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, Acting Chancellor of Nangarhar University Prof Dr M Taher Enayat and lectures for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazal Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul/Afghanistan, June, 2015
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Abstract

As we Knew Afghanistan is one of the Poorest Country in the world, and still suffers from ware and Post war conflict .Our young students, especially science , Engineering and others students can't afford buying Mathematic books and all so their level of understanding from English and others language is not good there for I decided to write Calculus II book in Pashto which is in lined with the curriculum of Science, Education, Engineering, Economic and Computer science Faculties.

I have incorporated all the international changes and progresses happened so far, that every scientist and students will be benefited.

I believe my book would better resources for teaching and research for coming several decades.

1- Techniques of Integration.
2- Application of the Integral.
3- Differential Equations.
4- Infinite Series.
5- Taylor's Formula for the Reminder.
6- Polar Coordinates.

د کتاب د لیکوال ژوند ته یوه لنډه کتنه .

زه نظر محمدد خان محمدزوی چې په ۱۳۴۲ لمریزکال د بهسودو دقاسم اباد‌په کلی کې زیږیدلی یم . د ابتدایي زده کړو له پای ته رسولو څخه وروسته په ۱۳۵۹ کال کې د ننګرهارعالی لیسې څخه فارغ شوم .په ۱۳۶۲ لمریز کال د ننګرهار پوهنتون د ښوونې او روزنې په پوهنځي کې شامل او په ۱۳۶۶ کال کې ددی پوهنځي د ریاضي او فزیک له څانګی څخه فارغ شوم . او په ۱۳۶۸ کال کې د انجینری په پوهنځي کې د کادر غړی په حیث مقررشوم او په دې پوهنځي کې مې د ریاضي د مضمون تدریس پر مخ وړلو . په۱۳۸۹ کال کې د تعلیمي سطحې د لوړتیا په منظور ددې پوهنځي له خوا د ماستری زده کړو له پاره د پولیند هیواد ته واستول شوم او په ۱۳۹۱ کال کې مې ددې هیواد دکرکوف د ښار له ساینس او تکنالوژی له پوهنتون څخه په بریالیتوب سره د ماستری سند تر لاسه او دخپل ګران هیواد ننګرهار ولایت ته راستون او د معمول سره سم بیرته د ننګرهار پوهنتون دانجینري پوهنځي د کادرد غړي په حیث مقرراو هلته مې بیا هم د ریاضي مضمون تدریس پر مخ وړلو.او په ۱۳۹۲/۲/۲ کال د ننګرهارپوهنتون د ساینس پوهنځي ته را تبدیل شوم او په انجینری او ساینس پوهنځویو کې د ریاضی مضمون اودکمپیوتري پروګرامونو په واسطه ریاضي محاسباتو د مضمونونو تدریس پرمخ وړم.