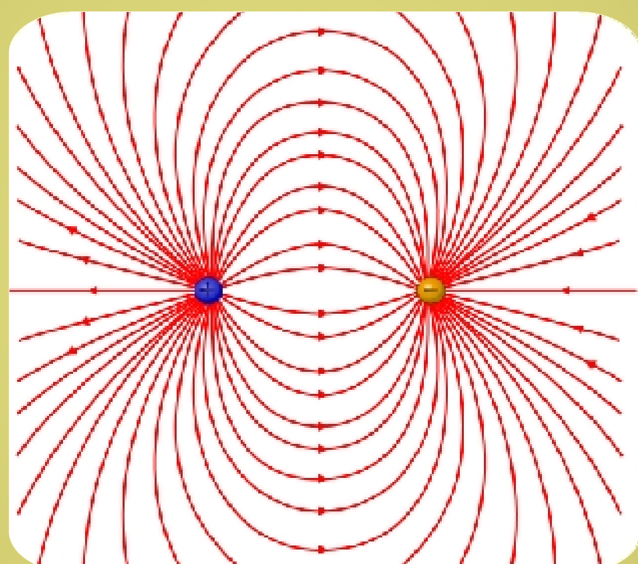
ننګرهـارساینس پـوهنځی

عالي کلکولس I
534 A رياضي



سي ډي سره

پوهندوی حمیدالله یار

۱۳۹۴

خرڅول منع دی

عالي کلکولس I 534 A رياضي Advanced Calculus I Math 534 A
پوهندوی حمیدالله یار ۱۳۹۴

Nangarhar Science Faculty

Afghanic

Prof Hamidullah Yaar

Advanced Calculus I
Math 534 A

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

With CD

ISBN 978-9936-620-00-1

Not For Sale

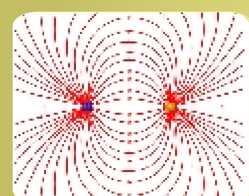
2015

عالي کلکولس I

534 A رياضي

پوهندوی حمیدالله یار

Afghanic



Pashto PDF
2015

Nangarhar Science Faculty
ننګرهار ساینس پوهنځی

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Advanced Calculus I

Math 534 A

Prof Hamidullah Yaar

بسم الله الرحمن الرحیم

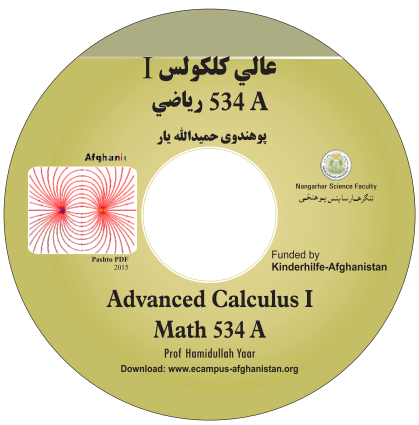
عالي کلکولس I

ریاضي 534 A

لومړی چاپ

پوهندوی حمیدالله یار

دغه کتاب په پی دی اف فورمت کی په مله سی دی کی هم لوستلی شی:



د کتاب نوم	عالی کلکولس I A 534 ریاضي
ژباړونکی	پوهندوی حمید الله یار
خپرندوی	ننگرهار ساینس پوهنځی
ویب پاڼه	www.nu.edu.af
چاپ شمېر	۱۰۰۰
د چاپ کال	۱۳۹۴، لومړی چاپ
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org
د چاپ ځای	سهر مطبعه، کابل، افغانستان

د اکتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداری او تخنیکی چارې یې پــه آلمان کې د افغانیک موسسې لخوا ترسره شوی دي.
د کتاب د محتوا او لیکنې مسؤلیت د کتاب په لیکوال او اړونده پـــوهنځی پورې اړه لری مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤلیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک دلوړو زده کړو وزارت کابل
تیلیفون 0756014640
ایمیل textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان: ISBN: 978 9936 620 001

د لوړو زده کړو وزارت پیغام

د بشر د تاریخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو، ساتلو او خپرولو کې ډېر مهم رول لوبولی دی. درسي کتاب د نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو معیارونو، د وخت د غوښتنو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

له ښاغلو استادانو او لیکوالانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې دوامداره زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانګو کې درسي کتابونه تألیف او ژباړلي دي، خپل ملي پور یې اداء کړی دی او د پوهې موتور یې په حرکت راوستی دی. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او درسي مواد برابر او چاپ کړی، چې له چاپ وروسته د ګرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي او د زده کړو د کیفیت په لوړولو او د علمي پروسې په پرمختګ کې یې نېک ګام اخیستی وي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د ګرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره د علومو په مختلفو رشتو کې معیاري او نوي درسي مواد برابر او چاپ کړي.

په پای کی د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې له رئیس ډاکتر ایروس او زموږ همکار ډاکتر یحیی وردګ څخه مننه کوم چې د کتابونو د خپرولو لپاره یې زمینه برابره کړېده.

هیله منده یم چی نوموړې ګټوره پروسه دوام وکړي او پراختیا ومومي تر څو په نیږدې راتلونکې کې د هر درسي مضمون لپاره لږ تر لږه یو معیاري درسي کتاب ولرو.

په درنښت

پوهنوال دوکتور فریده مومند

د لوړو زده کړو وزیره

کابل، ۱۳۹۴

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمیر استادان او محصلین نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

تراوسه پورې مونږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپیسا د طب پوهنځیو او کابل طبي پوهنتون لپاره ۱۷۶عنوانه مختلف طبي تدریسي کتابونه چاپ کړي دي، چې د هغوی له جملې څخه ۹۵ د DAAD او ۸۰ نور د kinderhilfe-Afghanistan په مالي مرسته چاپ شوي دي. د ننګرهار پوهنتون لپاره د ۲۰ نورو غیرطبي کتابونو د چاپ چارې روانې دي. د یادونې وړ ده چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هیواد ټولو طب پوهنځیو ته په وړیا توګه ویشل شوي دي.

هر څوک کولای شي ټول چاپ شوی طبي او غیر طبي کتابونه

د www.afghanistan-ecampus.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کړي.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰ ـ ۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي د تعلیمي نصاب د ریفورم *لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان نشي کولای عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پیدا کړي".*

د لوړو زده کړو وزارت، پوهنتونونو، استادانو او محصلینو د غوښتنې په اساس موږ دا پروګرام غیر طبي برخو ته لکه ساینس، انجنیري، کرهنې او نورو پوهنځیو ته هم وغځاوه، تر څو د مختلفو پوهنتونونو او پوهنځیو د اړتیا وړ کتابونه چاپ شي.

مونږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هیواد له پوهنتونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړینه ده چې د لوړو زده کړو د موسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او

چېټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوندې پوهنځۍ استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

د یادونې وړ ده چې د مولفینو او خپرووونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي، خو بیا هم کیدای شي د کتاب په محتوی کې ځینې تیروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکې مولف او یا مونږ ته په لیکلې بڼه راولیږي، تر څو په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمیټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لګښت یې ورکړی دی. دوی په تیرو کلونو کې هم د ننګرهار د طب پوهنځي د ۸۰ عنوانه طبي کتابونو د چاپ لګښت پر غاړه درلود.

په ځانګړي توګه د جې آی زیت (GIZ) له دفتر او (CIM) Center for International Migration & Development چې زما لپاره یې په تېرو پنځو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړی دي، هم د زړه له کومې مننه کوم.

د لوړو زده کړو وزیره پوهنوال دوکتور فریده مومند، علمي معین پوهنوال محمد عثمان بابري، مالي او اداري معین پوهنوال ډاکتر ګل حسن ولیزي، د ننګرهار پوهنتون سرپرست رییس پوهنوال ډاکتر محمد طاهر عنایت، د ننګرهار پوهنتون پوهنځیو رییسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له مولف څخه ډېر مننندوی یم او ستاینه یې کوم، چې خپل د کلونو کلونو زیار یې په وړیا توګه ګرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنګه د دفتر له همکارانو هر یو حکمت الله عزیز، احمد فهیم حبیبي او فضل الرحیم څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردګ، د لوړو زده کړو وزارت سلاکار
کابل، جون ۲۰۱۵
د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵٦۰۱۴٦۴۰
ایمیل: textbooks@afghanic.org

تقریظ

زموږ په هیواد کې په ملی ژبو د علمی کتابونو تالیفونو او ترجموته یوه ستره اړتیا ده، ځکه چې هم له تیر وخت څخه په ملی ژبو علمي کتابونه نه دي راپاتې شوي او هم په روان وخت کې د علمي کتابونو لیکنې او ژباړنو ته ځوک زړه نه ښه کوي.

د درسي کتابونو تالیف او ترجمه بیاد ډیرو قوي اړتیاو څخه شمېرل کیږي او دا نیګړتیا زمونږ په ګران هیواد کې په دوام داره تو ګه موجوده ده، نو ځکه د درسي کتابونو تالیف او ژباړلوته، په علمي ترفیعاتو کې هم امتیاز ورکړل شوی دی تر څو په دې توګه درسي پروسه چټکه، پیاوړي او مؤثره کړي او هم استادان ورڅخه په علمي تر فیعاتو کې د اصلی اثارو په توګه استفاده وکړي.

په دې لړ کې پوهنمل حمیدالله یار د بایزید روښان پوهنتون د انجینری پوهنځي د ریاضي څانګې استاد ته دنده وسپارل شوه چې زما تر راهنمائی لاندې یو درسي کتاب Advance Calculus 1 چې د سنتیاګو San Diego ایالت پوهنتون پروفیسور Professor Tunc Geveci لیکنه ده او په 2008 م کال کې د San Diego state University san Diego California له خوا د Montez uma publishing په نامه د چاپولو په خونه کې چاپ او نشر شوی دی، د ژباړې لپاره وسپارل شو، ترڅو له یوي خوا یو درسی کتاب وژباړل شي اوله بلي خوا نوموړي استاد دا ژباړه د پوهندویی علمي رتبی ته د اصلی اثر په توګه و کاروي.

دا کتاب د بایزید روښان پوهنتون د انجینری پوهنځي د (لومړی) سمستر د ریاضی مفرداتو سره سمون لري.

په دي کتاب کې ځلورو فصلونه دی، چې د ترادفونو لېمېټ، د تابعګانو لېمېټ او متمادیت، مشتقات او انتګرالونه شامل دي.

نوموړي د ا کتاب په ښه امانت داری او روانه ژبه ژباړلی دی او هڅه یې کړي ده چې د ژباړي نورمونه پکښې وساتي.

زه د پوهنمل حمیدالله یار دا علمي کار، پوهندوی علمي رتبي ته د ترفیع لپاره د اصلي اثر په توګه کافي ګڼم او په دې لاره کې ورته زیات بریالیتوبونه غواړم

د بریالیتوبونو په هیله

پوهاند دکتور سید قیوام شاه باور

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تقریظ

ټولو ته ځرګنده ده چې په لوړو تحصیلی موسسو په خاصه توګه په پوهنتونونو کې په ملي ژبو ددرسي کتابونو تألیف او ژباړې ته ډیره اړتیا لیدل کیږي. په دې لړ کې دننګرهار د پوهنتون د انجنیرۍ د پوهنځي استاد محترم پوهنمل حمیدالله یار هم یو مثبت ګام پورته کړی دی چې د امریکا د سانتیاګو د پوهنتون د استاد Prof. Tunc Geveci د Advance calculus 1 په نوم کتاب یې په پښتو ملي ژبه ژباړلی دی ترڅو د ننګرهار پوهنتون د انجنیرۍ د پوهنځي اړتیا رفع کړي.

نوموړي دا کتاب په پښتو ملي ژبه په ډیره ساده او روانه توګه په پوره امانت دارۍ سره د متن مطابق ژباړلی دی. زه دده دا علمي کار تاییدوم او د ترفیع له پاره یې د پوهندویي رتبې ته کافي بولم او لوړومقاماتو ته یې سپارښتنه کوم. د پوهنمل یار صاحب له پاره د لا نورو بریالیتوبونو هیله مند یم.

پوهاند عبدالحق ایمل

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تاییدی تقرظ

په دې پوهیږو چې په ټولو لوړو تحصیلي موسسو او بیا په خاصه توګه په پوهنتونونو کی په ملي ژبو ددرسي کتابونو ژباړې او تالیف ته ډیر ضرورت دی ، چې په دې لړ کې د ننګرهار پوهنتون د انجینری پوهنځي د عمومي مضامینو د دیپارټمنت استاد پوهنمل حمید الله (یار) هم یو مثبت ګام اخیستی او Advanced Calculus 1 Math 534A په نوم درسي کتاب یې چې د San Diego ایالت پوهنتون Professor Tunc Geveci لخوا لیکل شوی ، د پوهاند دکتور سید قیوم شاه (باور) تر رهنمایی لاندی د انګلیسي له بین المللی ژبې څخه د پښتو په ملي ژبه ژباړلی دی ، ترڅو له یوې خوا د انجینری پوهنځی د اړوندې څانګې او له بلې خوا د محصیلینو اړتیاوې پرې رفع شي.

نوموړې دا کتاب په پښتو ملي ژبه په څلور فصلونو کې په ډیرو ساده او روانو الفاظو اوجملو کې په پوره امانت داری د کتاب د متن مطابق ژباړلی دی. زه د استاد دا علمي کړنه تاییدوم د پوهندوی علمي رتبې ته یې کافی بولم او لوړو مقاماتو ته یې وړاندیز کوم او هم د محترم حمیدالله (یار) لپاره په راتلونکې کې د لا نورو بریالیتوبونو هیله کوم .

پوهنوال محمد اجمل حبیب صافی

د انجینری پوهنځي د تخنیکي مضامینو ددیپارتمنت استاد

د ژباړې د پیل خبرې

دا معلومه ده چې له یوې خوا د ننګرهار پوهنتون د انجنیرۍ په پوهنځي کـــې د مودو راهیسې د پخواني پروګرام مطابق د وخت په مفرداتو کوم چې ډیر پخواني شوي وو، د ریاضي د مضمون تدریس پرمخ تللو . د بلې خوا د لوړو زده کړو د کړنلارې او بیروۍ پر بنسټ د پوهنتون د علمي کادر هرغړی دنده لــري ترڅـــــو یوه څیړنیزه موضوع د رسالې یا ژباړې په توګه بشپړه کړي. د دې تر څنګ د دې جواز هم شته چې د پوهندوي علمي رتبې ته د ارتقأ په خاطر د یوه سمستر لپــاره د یوه درسي کتاب ژباړه ترسره شي.

له همدې امله په دې وروستیو کې دا کوښښ وشو چې په دې پوهنتون کې د یاد پوهنځي د ریاضي درسي مفردات د وخت سره سم بدلون ومومــي. مونږ په دې لړ کې دا کوښښ وکړ چې د امریکا د متحده ایالاتو د سندیاګو سټیټ پوهنتون- کلیفورنیا له مفرداتو څخه استفاده وکړو. له همدې امله د ننګرهار پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي د عمومي مضامینو دیپارتمنت وپتیله ترڅو د نوموړي پوهنتون له درسي مفرداتو او درسي کتابونو څخه استفاده وکړي.

ماته یې دنده راکړه تر څو د (Advanced Calculus I Math 534 A) په نــــوم درسي کتاب چې د انجنیرۍ پوهنځي د لومړي ټولګي لومړی سمستر له درسي پروګــرام سره سمون لري وژباړم. ماهم د پوهنځي د دیپارتمنت د فیصلې او د لوړو زده کړو د انسجام او اکادمیکي چارو ریاست د علمي ترفیعاتو د کمیټې د 06/03/1389 نیټې احکامـــــوته په درناوۍ او د مسلک مطابق د مسلکی غــــړیو او محصلینو د استفادې او د دیپارتمنت لپاره د اړتیـــا او مــــــــــوافقې په پام کې نیولو سره د یو اثر برابرولـــــــو په هیله دا کتاب چې په څلورو څپرکو کې لیکل شوی دی او د تــرادف لیمټ، د تابع لمیټ، مشتق او انتیګرال موضاعات په کې شامل دي ، له شروع څخه تر پایه په 171 صفحو کې په روانه او ساده ژبه وژباړه.

دې مقصد او مطلب ته درسیدو په لـــــــړکې زه خپل لاربنود استاد، د کـــابل پوهنتون د علومو د پوهنځي د ریاضي د دیپارتمنت بناغلي پوهاند سیدقیوم شاه (باور) څخه د زړه له کومې مننه کوم چې زه یې ګام په ګام په خپلو نیکو مشورو او علمي لارښوونو ویاړلی یم. همدارنګه د کابل پوهنتون د علومو پوهنځي له بناغلي استاذ پوهـــاند عبدالحق (ایمل) او دننګرهار پوهنتون د انجینرۍ پوهنځي لــه بناغلي استاذ او ساینس پوهنځي د رئیس پوهنمل محب الرحمن (جنتي) له نیکو پیرزوینو څخه چې لــــه ما سره یې ددې کتاب په ژباړې او نیمګرتیاوکې د ړزه له کوې مرستې کړې دي په درونوالي سره یادونه کوم.

په پای کــــې د خپل گـــــــران شاگــــــرد د انجینرۍ د پوهنځي د دوهم ټولګي محصل احمدفرید(منصف) وردګ څخه چې د دې کتاب په ډیزاین او کمپوز کــې یې هر اړخیزې هلې ځلې دریغ کړې نه دي په کور ودانۍ سره مننه کوم.

له ټولو قدرمنو څخه په مننه
پوهنمل حمیدالله (یار)

لړليک

سريزه **مخ**

لومړی څپرکی

د ترادف لمیټ

1 د حقیقي عددونو ځیني اساسي خواص

د مثبتو موجه تامو (طبیعي) عددونو مجمع د ($\mathbb{N}$) په سمبول ښودل کیږي او د ټولو موجه تاموعددونو مجمع د$\mathbb{Z}$ په سمبول ښیي . نسبتي عددونه هغه عددونه دي چې هغه لکه $\frac{p}{q}$ کسر په شکل ولیکل شي . داسې چې p او q تام عددونه او $q \neq o$ وي . د نسبتي عددونو مجمع د Q په سمبول ښیې .

په همدې ډول پرنسبتي عددونو د لازمو حسابي عملیو په اجراء کولو د نسبتي عددونو (جمع ، ضرب او تقسیم) بیاهم یو نسبتي عدد رابښیي چې په حساب کې داکافي نه دي . په رښتیاهم د ساده هندسې په مسایلو کې هر نسبتي عددنه څرګندیږي یعنې هغه عددونه کوم چې نه شو کولای هغه د تامو عددونو د کسر په شان ولیکو لکه چې پخواني مصریان پر هغه پوهیدل. د بیلګې په ډول د هغې مربع قطر چې هره ضلع یې یو واحد وي $\sqrt{2}$ واحده دی. یا دهغې دایرې محیط چې قطر یې یو واحد دی د π غیر نسبتي عدد دی . مونږ دې ته رجوع کوو چې د ټولو نسبتي او غیر نسبتي عددونو مجمع د حقیقي عددونو مجمع رابښيې او د ($\mathbb{R}$) په سمبول ښودل کیږي . مونږ به دا ومنو چې د حقیقي عددونو مجمع شتون لري او د حساب پیژندل شوې د جمعې ، تفریق ، ضرب او تقسیم عملیې په مکمل ډول قبلوي .

یاداشت . مونږ داکاروو چې د $\Rightarrow$ سمبول رابښيي چې د کینې خوا له بیانیې څخه د ښي خوا د بیانیې نتیجه حاصلیږي . مونږ د $\Leftrightarrow$ سمبول په کارولو وایو چې د ښۍ او کینې خوا دواړه معادلې دي . مونږ اکثراً د (یوازې او یوازې) په کارولو (نو) کاروو .

مثلا که b , a او c حقیقي عددونه وي .

مونږ لرو چې:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$
$$a = b \Leftrightarrow -a = -b$$

1.1.1 نامساواتو نه

که چېرې a او b دوه حقیقي عددونه وي نو به a< b ، a>b یا a = b وي .

دا به فرض کړو چې تاسې د نامساواتونو په اساسي خواصو پوهیږئ. د بیلګې په ډول

$$a > 0 \;\; b > 0 \Rightarrow ab > 0$$
$$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab > 0.$$
$$a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab < 0.$$
$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c.$$
$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$
$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$$
$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$$
$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

د $a \le b$ ښودنې تعبير دادی چې $a < b$ يا $a = b$ دی . مشابه پر دې:

$$a \ge b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

1.1.1 مثال د x ټولو هغو حقيقي عددونو سيټ معلوم کړئ چې د هغــې لپـــاره $\frac{1}{x-4} < \frac{1}{x-2}$ وي

حل

د نامساوات د دواړو خواوو افادې هغه وخت تعريفيــږي چــې $x \neq 4$ او $x \neq 2$ وي. مونږ لرو چې 4-<2- دي پس $x-2 > x-4$ دی يعنې

$$-2 > -4 \Rightarrow x - 2 > x - 4$$

د نامساوات د حل لپاره د پورتني حقيقت په نظر کي نيولو سره لاندې حالتونـــه په پام کي نيسو:

که $x-2 > 0$ او $x-4 > 0$ وي ، حاصلوو چې .

$$x-2 > x-4 \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} > \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 1 > \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-4} > \frac{1}{x-2}$$

پايله د فرضيې خلاف ده .

که $x-2 < 0$ او $x-4 < 0$ وي ، حاصلوو چې :

$$x-2 > x-4 \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} < \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 1 < \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-4} > \frac{1}{x-2}$$

بيا هم پايله د فرضيې خلاف ده .

که $x-2 < 0$ او $x-4 > 0$ وي حاصل به کړو چې :

$$x-2 > x-4 \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} < \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 1 < \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x-2}$$

سره له دې چې په لاس راغلې پايله د فرضيې مطابق ده خو د

$$x - 2 < 0 \wedge x - 4 > 0 \Rightarrow x < 2 \wedge x > 4 \Rightarrow 4 < x < 2$$

ليکنه حقيقت نه لري ځکه چې $4 < 2$ نه دي.

اوس د $x-2 > 0$ او $x-4 < 0$ حالت په پام کي نيولو سره حاصلوو چې .

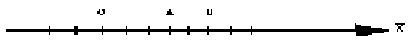
$$x-2 > x-4 \Rightarrow \frac{x-2}{x-2} > \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow 1 > \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x-2}$$

وروستۍ پایله د $x-2>0$ او $x-4<0$ یعنې $x>2$ او $x<4$ یا $2<x<4$ لپاره چې د نامساوات حل رابنیې په لاس راغلې ده. نو وایو چې د نامساوات حل عبارت دی له $S.S=\{x1;2<x<4\}$

2.1.1 د عددونو محور

د عددونو پر محور د حقیقي عددونو او نقطو تر منځ یو په یو مطابقت وجود لري چې دا مطابقت (جوړښت) له مونږ سره د حقیقي عددونو د فرعي سټونو په ښودنه کي مرسته کوي. پر محور ټولې پر تې نقطې په حقیقي عددونو پورې مربوطیږي. لکه په لاندې ډول :

پر محور یوه نقطه د مبداء په نوم نخښه کوي چې د صفر له عدد سره مطابقت کوي .



(1) شکل: عددي محور.

د اوړوالي د یو واحد ټاکلو لپاره له مبدا څخه د یو واحد په اندازه یو ه نقطه ټاکي د کومې چې فاصله یې له مبداء څخه یو واحد ده . مبداء او هغه نقطه چې یو واحد یې ټاکلی دی پر محور مثبت جهت انتخابوي او مخالف جهت یې منفي جهت دی .

معمولاً مونږ محور په افقي ډول رسموو او مثبت جهت پرې ښۍ خواته ټاکو. که x یو مثبت عدد وي هغه نقطه چې له X سره مطابقت کوي فاصله یې له مبداء څخه x ده. که x یو منفي عدد وي ټاکل شوې نقطه د x– په فاصله له مبداء څخه واقع ده . بناپردې مونږ د یو محور او حقیقي عددونو د سیټ تر منځ یو مطابقت جوړوو او دغې محور ته د عددونو محور وایو .

د x عدد د یوې نقطې په واسطه داسې مشخصوو چې له x سره مطابقت وکړي . په دې ډول د 2 د عدد یا د 2 نقطې ټاکلو ته هم مراجعه کولای شو . لرو چې که د عددونو پر محورکه a<b وي نو bدa کینې خواته واقع دی .

(ددې په فرضولو چې مثبت جهت پر محور ښي خواته وي) .

د سټونو د معیاري ښودنې لپاره دارنگه عمل کوو . که A یو سټ (مجمع) وي دا حقیقت چې x د A یو عنصر دی د $x \in A$ په شان لیکل کیږي . د $A \subset B$ تعبیر دادی چې د A سیټ د B په سیټ کې شامل دی یعنې که $x \in A$ وي نو $x \in B$ هم دی .

دا به ومنو چې که A = B وي ليکو چې $A \subset B$ دی . د سټونو اتحاد په U سره ښودل کيږي.

بناپردې :

$$A \bigcup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

د ښي خوا د قوس داخل افاده دارنگه لوستله کيږي : سيټ د x دی داسې چې x شامل د A يا x شامل د B وي يا دا چې x په دواړو سټونو کې شامل وي .

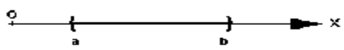
د A او B سټونو تقاطع د x د ټولو هغو قيمتونـــو ســـيټ دی چـــې پـــه A او B دواړو سټونو کې شامل وي بنا پردې :

$$A \bigcap B = \{x; x \in \mathrm{IR} A \wedge x \in B\}$$

انتروالونه د حقيقي عددونو د مجمع فرعي ســـټونه دي چـــې پـــه حســـاب کـــې ډيـــر تکراريږي. که a>b وي نو د (a , b) خلاص انتروال د a او b تر منځ د ټولو هغـــو نقطو سيټ رابنيي چې پخپله a او b په کي شامل نه وي : $(a,b) = \{x \in I : a < x < b\}$

معمولاً خلاص انتروال دارنگه ليکل کيږي. $(a,b) = \{x : a < x < b\}$

داخرگندونه د حقيقي عددونود فرعي سټونو له مخې کولای شو . بايد په ياد ولرو چې په (a , b) خلاص انتروال کې د a او b انجامي نقطې شاملې نه دي . او مـــونږ خـــلاص انتروال په شکل کې هم ښودلای شو



(2) شکل: د(a,b) خلاص انتروال.

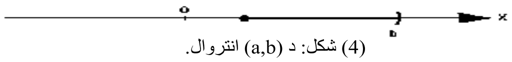
د [a , b] په تړلي (بسته) انتروال کې د a او b په شمول د a او b تـــر مـــنځ ټـــولې نقطې شاملې دي : $[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$

دا تړلی انتروال په شکل کې دارنگه ښيو .

(3) شکل : د[a,b] تړلیانتروال.

په همدې ډول نیم خلاص انټروال په لاندې ډول پام کې نیسو

$$[a,b)=\{x: a\le x<b\}\ \wedge\ (a,b]=\{x: a<x\le b\}$$



(4) شکل: د (a,b) انټروال.

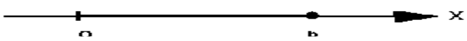
یو غیر محدود انټروال چې د b له یو ورکړ شوي عدد څخه کوچني قیمتونه په کې شامل وي د $(-\infty\ ,\ b)$ په شان ښودل کیږي.

$$(-\infty\ ,\ b)=\{x: x<b\}$$

د $-\infty$ سمبول کومه معنی نه لري. د انټروالونو په مفهوم نوموړی سمبول دا راښيي چې په نوموړي انټروال کې هغه منفي اعداد هم شامل دي چې فاصله يې له مبداء څخه په اختیاري ډول ډیره زیاته ده.

مشابه پر دې :

$$(a\ ,+\infty)=\{x: x>a\}$$
$$[-\infty\ ,\ b]=\{x: x\le b\}$$
$$[a\ ,+\infty\ )=\{x: x\ge a\}$$



(5) شکل: د $(-\infty, \boldsymbol{b}]$

که چیرې $\mathcal{I}$ یو اختیاري انټروال وي د $\mathcal{I}$ داخلي انټروال هغه انټروال دی چې د $\mathcal{I}$ انټروال بې له انجامي نقطو څخه ټولې نقطې په کې شاملې وي د بیلګې په ډول د (a,b) انټروال داخلي انټروال په خپله همدا انټروال او د [a,b) داخلي انټروال د (a,b) انټروال دی .

2.1.1 مثال په 1.1.1 مثال کې مو دا څرګند کړي چې .

$$\frac{1}{x-4}<\frac{1}{x-2}\Leftrightarrow 2<x<4.$$

کولای شو د نامساوات د حلونو سټ x د (4 , 2) انټروال په پام کې ونیسو.

شکل (6)

3.1.1 مثال $P(x)=x^2+x-6$ په پام کې نیسو . د x د ټولو هغو حقیقي عددونو سیټ پیداکړئ د کومو لپاره چې $P(x)\geq 0$ وي او د x د ټولو هغو حقیقي عددونو سیټ معلوم کړئ د کومو لپاره چې $P(x)<0$ وي . او د انټروالونو داخلي انټروالونه پیداکړئ .

حل

لومړی د x هغه حقیقي قیمتونه معلوموو د کومو لپاره چې $P(x)=0$ وي چې هغه د $x^2+x-6=0$ دوهمه درجه معادلې د حل له فورمول څخه عبارت دي له :

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow x=-3\wedge x=2$$

بنا پر دې:

$$P(x)=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$$

کولای شو د $P(x)$ اشاره (علامه) د بنې خوا دواړو فکتورونو له علامې څخه معلومه کړو داسې چې د a او b د حاصل ضرب لپاره، ab>0 دی که چېرې a او b یو شان علامې ولري او ab<0 دی که a او b مخالفې علامې ولري.

په دې ډول: $If\ \ x<-3\Leftrightarrow x+3<0\wedge x<2\Leftrightarrow x-2<0\Rightarrow (x+3)(x-2)>0$

(I جدول) نوموړي مشاهدات خلاصه کوي (داسې چې (+) علامه مثبت اعداد او (−) علامه منفي اعداد په نښه کوي)

X	<-3	-3	3<x<2	2	x>2
x+3	−	0		+	+
x−2	−	−		0	+
P(x)	+	0		0	+

(I) جدول .

بنا پر دې $P(x)\geq 0$ دی که چېرې $x\leq -3$ او $x\geq 2$ وي داسې چې :

$$\{x:p(x)\geq 0\}=(\infty\ ,\ -3]\bigcup[2,+\infty)$$

د $(-\infty,-3]$ داخلي انټروال $(-\infty,-3)$ او د $[2,+\infty)$ داخلي انټروال $(2,+\infty)$ دی.

بناپردې $P(x)<0$ دی که چېرې $-3<x<2$ وي داسې چې :

$$\{x:P(x)<0\}=(-3,2)$$

او د (2 , 3-) داخلي انټروال پخپله د (2 , 3-) انټروال دی .

3.1.1 مطلقه قیمت او مثلثي نامساوات

د مطلقه قیمت د علامې د استعمال لپاره په پام کې نیسو .

3.1.1 تعریف که x یو اختیاري حقیقي عدد وي د x مطلقه قیمت د |x| پــه واسطه ښیي او لرو چې :

$$|x| = \begin{cases} x; If\ x \geq 0; \\ x; If\ x < 0. \end{cases}$$

بنا پردې د x مطلقه قیمت له مبداء څخه تر x پورې فاصله ده . د بیلگې په ډول ،

$$|+3| = 3\ ; |0| = 0 \wedge |-3| = -(-3) = 3$$

د a او b حقیقي عددونو د مطلقه قیمت په باب لرو چې :

$$|a-b| = \begin{cases} a-b; If\ \ a \geq b; \\ b-a; If\ \ a < b. \end{cases}$$

په هندسي تعبیر $|a-b|$ د عددونو پر محور د a او b نقطو تر منځ فاصله ده . د بیلگــې په ډول د 2 او 4 عددنو ترمنځ فاصله عبارت ده له:

$$|2-4| = 1-2 = 2$$

او د 1 او 5 ترمنځ فاصله مساوي ده په: $|1-5| = |5-1| = 4$

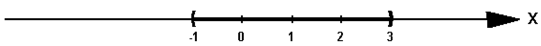
4.1.1 مثال د $A = \{x : |x-1| < 2\}$ سټ لکه د انتر وال په شان وښیئ .

حل

څرنگه چې د A په سټ کې ټول هغه قیمتونه شامل دي چې فاصله یې له1 څخه کمه له 2 ده او دغه سټ هغه خلاص انتروال دی چې د پای نقطې یې د 1 ښي خواته د 2 واحدو په زیاتیدو، او چپې خواته د 2 واحدو په کمیدو په لاس راځي . بنا پردې :

$$A = \{x : |x-1| < 2\} = (1-2, 1+2) = (-1,3)$$

لکه څنگه چې په اووم شکل کې ښودل شوي دي .



(7) شکل : د A= (-1,3) انتروال.

په 4.1.1 مثال کې د a=1 حقیقي عدد او r>0 داسې راکړ شوي چې د $A = \{x : |x-a| < r\}$ په سټ کې ټولې هغه نقطې شاملې دي چې فاصلې یې له a څخه کوچنۍ تر r دي یعنې او هم a=0 وي نو:

$\{x : |x-a| < r\} = (a-r\ ,\ a+r)$
$\{x : |x-a| \le r\} = [a-r\ ,\ a+r]$
$\{x : |x| \le r\} = [r\ ,\ r]$

5.1.1 مثال د $A = \{x : |x-1| \ge 2\}$ سټ لکه د انتروالونو د اتحـــاد پـــه شـــان وښیئ.

حل

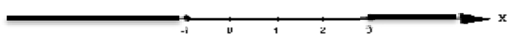
د A په سټ کې ټولې هغه نقطې شاملې دي چې فاصله يې له 1 څخه کوچنۍ تـــر 2 ده .

يعنې : $x-1 \ge 2 \wedge x-1 \le -2 \Rightarrow x \ge 3 \wedge x \le -1$

په پایله کې د A سټ د $(-\infty,-1]$ او $[3,\infty]$ انتر والونو له اتحاد څخه عبارت دی یعنې :

$A = (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

اتم شکل د عددونو پر محور د A سټ تشریح کوي.



(8) شکل: $(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$.

له پورته معلوماتونو څخه په استفاده ، د مطلقه قیمت په باب لاندې حقیقتونه په نظر کې نیسو .

1.1.1 مسئله د یو حاصل ضرب مطلقه قیمت مساوي په حاصل ضرب د مطلقه قیمتونو دی یعنې:

$|ab| = |a||b|.$

ثبوت

لاندې حالتونه په نظر کې نیسو :

1. $a \ge 0 \wedge b \ge 0;$
2. $a \ge 0 \wedge b \le 0;$
3. $a \le 0 \wedge b \ge 0;$
4. $a \le 0 \wedge b \le 0;$

په اول حالت کې چې $a \ge 0$ او $b \ge 0$ دي نو د $|a|=a$ او $|b|=b$ له مخې $ab \ge 0$ دی پس:

$|ab|=ab=|a||b|$

په دوهم حالت کې دا چې $a\geq 0$ او $b\leq 0$ وی نو د $|a|=a$ او $|b|=-b$ له مخې $ab\leq 0$ دی نو: $|ab|=-ab=a(-b)=|a||b|$

په دریم حالت کې چې $a\leq 0$ او $b\geq 0$ راکړشوي دي نو د $|a|=-a$ او $|b|=b$ له مخې چې $ab \leq 0$ حاصلیږي نو: $|ab|=-a= (-a)b=|a||b|$

په څلورم حالت کې چې $a \leq 0$ او $b \leq 0$ راکړل شوي دي نو د $|b|=-b$ او $|a|=-a$ له مخې داچې $ab \geq 0$ حاصلیږي نو: $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a||b|$

په دې ډول کولای شو د $|ab|=|a||b|$ مثلثي نامساوات په کاروا چوو .

1.1.1 قضیه (مثلثي نامساوات)

که a او b اختیاري حقیقي عددونه وي :

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

په دې ډول ، د يوې حاصل جمعې مطلقه قیمت کوچنی یا مساوي پــه مجمــوع د مطلقــه قیمتونو د جمعې اجزاوء دی.

ثبوت

څرنګه چې $a = -|a|$ او $a =|a|$ او هم $b = -|b|$ او هم $b = |b|$ دي لرو

بناپردې: $-|a|\leq a\leq |a| \wedge -|b|\leq b\leq |b|$

یعنې: $-(|a|+|b|\leq a+b\leq |a|+|b|$

اوس که چیرې $a + b \geq 0$ وي ، د $|a+b|=a+b$ له مخې حاصلوو چې :

$|a+b|=a+b\leq |a|+|b|\ i.e|a+b|\leq |a|+|b|$

که $a+b<0$ وي نو د $-(|a|+|b|)\leq a+b$ یا $|a|+|b|\geq -(a+b)$ له مخې حاصلوو:

$|a|+|b|\geq -(a+b)=|a+b|\Rightarrow |a+b|\leq |a|+|b|$

په پایله کې د ټولو حالتونو کې $|a+b|\leq |a|+|b|$ دی .

1.1.1پایله (په مثلثي نامساوات اړوند)

که a او b اختیاري حقیقي اعداد وي نو: $||a|-|b||\leq |a-b|$

ثبوت

د مثلثي نامساوات له مخې لرو چې:

$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b|$

له دې څخه لروچې:

$|a| - |b| \le |a-b|$

مشابه پر دې:

$|b| = |b-a+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a|$

له دې ځایه حاحلوو چې:

$|b| - |a| \le |a-b| \Rightarrow |a| - |b| \ge -|a-b|$

بنا پر دې:

$-|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|$

په دې ډول د پورتني مثلثي نامساوات څخه په استفاده لرو چې: $||a| - |b|| \le |a-b|$

2.1 د یو ترادف لمیټ

1.2.1 د یو ترادف د لمیټ تعریف

1.2.1 تعریف ترادف داسې یوه تابع ده چې دومین (د موجودیت ساحه) یې د $\{N, N+1, N+2, N+3.......\}$ په شان مثبتو تامو عددونو یو فرعـي سـټ دی داسې چې n یو مثبت تام (طبیعي) عدد وي . که دf یوې تابع په شان یـې وښـیو نـو د $n = N, N+1, N+2.......$ لپاره $a_n := f(n)$ تعریفوو.

د a_N, a_{N+1}, a_{N+2} .... , a_n ,..... یا $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ ترادف د $\{a_n\}$ په ساده ډول ښیو که چېرې مونږ د n انډکس د شروع عدد N مشخص کړی نه وي. بنا پر دې د

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}......, \frac{1}{n}, ...$

ترادف د $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \vee \{\frac{1}{n}\}$ په شان ارائه کوو . د n انډکس چې یو گونـګ انـډکس دی کولای شو پرځای یې کوم بل حرف هم وکاروو لکه $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ او $\{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ چې عـین تـرادف رابښيي. د انډکس د پیل قیمت کیدای شي له (1) څخه خلاف یو مثبت تام عدد هم وي.که د

$\frac{5}{1}, \frac{6}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{4}, ...\frac{n}{n-4}......$

ترادف په نظر کې ونیسو دلته د انډکس د پیل قیمت N=5 دی او ترادف د $\{\frac{n}{n-4}\}_{n=5}^{\infty}$ په شان ښیو .

یو ترادف په ساده ډول د $\{a_n\}$ ترادف په شان هم ښیي. په دې حالت کې باید په دې پـوه اوسو چې دانډکس د پیل قیمت ترټولو کوچنی قیمت دی کوم چې a_n افاده کوي.

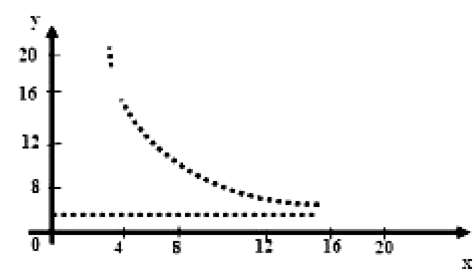
د بیلګې په ډول که د $\left\{\frac{n}{n-4}\right\}$ ترادف ته رجوع وکړو په دې پوهیږو چې د پیل قیمت n=5 دی $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots a_n , \ldots . a_n$ ترادف n ام حد دی . بناپردې $\frac{1}{n}$ د $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ ترادف n ام حد دی . په $\ldots\ldots \frac{5}{1},\frac{6}{2},\frac{7}{3},\ldots\ldots,\frac{n}{n-4},\ldots\ldots$ ترادف کې n ام حد $\frac{n}{n=4}$ نه دی په داسـې یو حالت کې a_n ته د n سره مطابقت ورکوي. که ترادف لکه د تابع په شان ورکړل شـوی وي نو د ترادف رنج (د قیمتونو ساحه) او ګراف یو شان تعریفوي .

2.2.1 تعریف د $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ ترادف ګراف د مختصاتو پر مســتوي د (n , a_n) یو شمیر نقطو له مجمع څخه عبارت دی داسې چې .... , n = N , N+1 , N+2 وي . د $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ ترادف رنج د f = f(n)= a_n تابع له رنج څخه عبارت دی داسې چې n=N وي فقط لکه د هغه حالت په شان چې یوه تابع پر یو انټروال تعریف شوې وي. د یو ترادف ګراف له مونږ سره د یو ترادف په ښودنه کې کومک کوي .

د ترادف پرګراف د مستوي ټولې هغه نقطې شاملې دي چې د یوې تـابع د ګـراف پـه مختلفو برخو کې د یو انټروال په ټولو نقطو کې تعریف شـوې وي . همدارنګـه یـو ترادف په ساده ډول پر عددي محور د هغې د رنج په نقش ښودلای شو .

1.2.1 مثال فرضوو چې $a_n = \frac{n}{n-4} ; n = 5,6,7,\ldots\ldots$ راکړل شوی دی.

د $\{a_n\}_{n=5}^{\infty}$ ترادف ګراف د مختصاتو پر مستوي د $(n,\frac{n}{n-4})$ په شان یو شـمیر نقطـو مجمع ده داسې چې ...... n = 5 , 6 , 7 وي . اول شکل راښیي چې د تـرادف د ګـراف ټولې نقطې د ...... n = 5 , 6 , 7 پورې مربوطې دي . دوهم شکل دا راښـيي چـې د ترادف د رنج ټولې نقطې په ...... n = 5 , 6 , 7 پورې اړه لري .



(1) شکل

(2) شکل.

3.2.1 تعریف د $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ترادف لمیت د L عدد دی کــه چېــرې د هــر $\varepsilon > 0$ حقیقي عدد لپاره د $N_E > 0$ مثبت تام عدد داسې موجود وي چې د ټولو $n \geq N_\varepsilon$ لپاره $|a_n - L| < \varepsilon$ وي یعنې:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N\varepsilon > 0 ; \forall n \geq N\varepsilon ; |a_n - L| < \varepsilon$$

2.2.1 مثال فرضو چې $a_n = \frac{n}{n-4} ; n = 5,6,7.....$ راکړشوی دی .

لکه د 1.2.1 مثال په شان :

a. پیداکړئ : $\lim_{n\to\infty} a_n$ (لکه په ابتدائي حساب کې) .

b. د ترادف د لمیټ له تعریف څخه په استفاده لمیټ تائید کړئ.

حل

a. لرو چې:

$$a_n = \frac{n}{n-4} = \frac{n}{n(1-\frac{4}{n})} = \frac{1}{1-\frac{4}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{4}{n}} = 1$$

b. لروچې:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n-4} - 1\right| = \left|\frac{n-n+4}{n-4}\right| = \frac{4}{n-4}$$

اوس د $N\varepsilon$ د لاس ته راوړلو لپاره د $|a_n - 1| < \varepsilon$ په نظر کې نیولو سره حاصلوو:

$$|a_n - 1| = \frac{4}{n-4} < \varepsilon \Rightarrow n-4 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} + 4 := N\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-4} = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon} + 4 \; ; \forall n > N\varepsilon \; ; \left|\frac{n}{n-4} = 1\right| < \varepsilon$$

د ترادف د لیمټ د تعریف په تائید وایو چې $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-4} = 1$ دی .

3.2.1 مثال فرضو چې $a_n = \frac{n^2 - 2}{2n^2 - n - 1}$ راکړ شوی دی .

a. د ساده حساب له مخې $\lim_{n\to\infty} a_n$ معلوم کړئ .

b. د ترادف د لمیټ له تعریف څخه په استفاده لمیټ تائید کړئ .

حل

a : لرو چې :

$$a_n = \frac{n^2-2}{2n-n-1} = \frac{n^2(1-\frac{2}{n^2})}{n^2(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})} - \frac{1-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b : لروچې :

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2-2}{2n^2-n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-3}{2(2n^2-n-1)}\right| = \left|\frac{n-3}{2\{2(n+\frac{1}{2})(n-1)\}}\right|$$

$$i.e. \quad \left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{n-3}{4(n+\frac{1}{2})(n-1)}$$

که $n \geq 3$ وي ، څرنګه چې $4(n+\frac{1}{2})(n-1) > 4n(n-1)$ دی لرو چې:

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{n-3}{4(n+\frac{1}{2})(n-1)} < \frac{n-3}{4n(n-1)} < \frac{n}{4n(n-1)} = \frac{1}{4(n-1)}.$$

اوس د $\varepsilon > 0$ لپاره په پام کې نیسو : $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4(n-1)} < \varepsilon \Rightarrow 4(n-1) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} + 1 := N\varepsilon$

په پایله کې : $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon} + 1 > 0 \ ; \ \forall n > N\varepsilon ; \left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{4n-1}\right| < \varepsilon$

1.2.1 قانون که a او b دوه حقیقي عددونه وي او د $\varepsilon > 0$ اختیاري عدد لپاره $|a-b| < \varepsilon$ وي نو a=b دی .

ثبوت

د پورتني افادې د مثبتوالي لپاره باید په اثبات ورسوو چې .

که $a \neq b$ وي نو $|a-b| > 0$ دی او لرو چې: $|a-b| > \frac{1}{2}|a-b|$

بنا پردې که چېرې $\varepsilon = \frac{|a-b| > 0}{2}$ قبول کړو و به لرو چې: $|a-b| > \varepsilon$

1.2.1 مسئله د ترادف لمیټ یوازینی دی ، یعنې هر ترادف یوازې یو لمیټ لري .

ثبوت

فرضوو چې کــه $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ او هــم $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ وي لازم دي وښـــیو چـــې $L_1 = L_2$ دی، یعنې که $\varepsilon > 0$ یو اختیاري عدد وي باید وښیو چـــې $[L_1 - L_2] < \varepsilon$ دی او دغه واقعیت د 1.2.1 قانون په پایله کې واضح کیږي چې $L_1 = L_2$ دی .

بناپردې ، که ε یو اختیاري مثبت عدد وي څرنگه چې $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ دی نو د $\varepsilon > 0$ لپاره $N_1(\varepsilon) > 0$ یو طبیعي عدد وجود لري داسې چې : $n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow [a_n - L_1] < \frac{\varepsilon}{2}$

او هم څرنگه چې $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ دی نو د $\varepsilon > 0$ لپاره د $N_2(\varepsilon) > 0$ یو طبیعي عدد داسې شتون لري چې:

$$n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow [a_n - L_2] < \frac{\varepsilon}{2}$$

په دې ډول که $N(\varepsilon) = Max\{N_1(\varepsilon)\}$ وټاکو نو د $[a_n - L_1] < \frac{\varepsilon}{2}$ او $[a_n - L_2] < \frac{\varepsilon}{2}$ په نظر کې نیولو سره له پورته معلومات څخه په گټې اخیستنې وروستۍ لیکنه بیانوي چې $L_1 = L_2$ دی یعنې دا چې هر ترادف یوازې د یو لیمټ لرونکی دی .

2.2.1 د ترادفونو د ترکیب لیمټ

2.2.1 مسئله د {C} ثابت ترادف لیمټ C دی

ثبوت

فرضوو چې د هر $n \in IN$ لپاره a_n=C دی. باید وښیو چې که $\varepsilon > 0$ او $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ راکړ شوی وي ، لروچې د $n \geq 1$ لپاره

$$[a_n - c] = [c - c] = o < \varepsilon$$

په پایله کې $\lim_{n\to\infty} a_n = C$ دی .

3.2.1 مسئله (د ثابت ضربولو قاعده د لمیټونو لپاره) فرضوو چې c یـــو ثابت او $\lim_{n\to\infty} a_n$ شتون لري، پس : $\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$ دی.

ثبوت

که c= 0 وي نو د هر n لپاره c aₙ = 0 په لاس راځي چــــــــې:

$$\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n (0) = 0$$

که $c \neq o$ په پـــــام کې ونیسو او $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ وي. فرضـــوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی دی .

خرنګه چې $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ دی نو شتون لري یو $N_\varepsilon \in N$ داسې چې:

$$n \geq N\varepsilon \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

پس: $|ca_n - cL| = |c(a_n - L)| = |c||a_n - 1| \leq |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$.

بناپردې: $\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c.\lim_{n\to\infty} a_n = cL$.

4.2.1 مسئله متقارب ترادف محدود دی.

ثبوت

فرضوو چې $\lim_{n\to\infty} a_n$ شتون لري . باید وښیو چې د هر $n \in N$ لپاره 0<M داسې شتون لري چې $|a_n| < M$ وي .

د $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ په فرضیه $N_\varepsilon \in IN$ داسې شتون لري چې د $n \geq N\varepsilon \Rightarrow |an - L| \; < 1|$

بنا پر دې که $n \geq N\varepsilon$ وي نو $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$

اوس که $M = \{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n\varepsilon-1}|, 1 + |L|\}$ فرض کړو نو د هر $n\epsilon\mathbb{N}$ لپاره $|a_n| \leq M$ دی یعنې دا چې متقارب ترادف محدود دی.

1.2.1 قضیه فرضوو چې $\lim_{n\to\infty} a_n$ او $\lim_{n\to\infty} b_n$ شتون لري پس :

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(د یو حاصل ضرب لمیټ مساوي په حاصل ضرب د لمیټونو دی)

ثبوت

که $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ او $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ وي باید وښیو چې:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = L_1 L_2$$

لروچې:

$$|a_n b_n - L_1 L_2 = |a_n b_n - L_1 b_n + L_1 b_n - L_1 L_2|| =$$
$$= |(a_n - L_1)b_n + L_1(b_n - L_1(b_n - L_2)| \leq |a_n - L_1||b_n| + |L_1||b_n - L_2|$$

خرنګه چې متقارب ترادف محدود دی نو دهر $n\in\mathbb{N}$ لپاره M>0 داسې شتون لري چې د هغې لپاره $|b_n|\le M$ دی . بنا پردې :

$$|a_nb_n - L_1L_2| \le |a_n - L_1||b_n| + |L_1|\ |b_n - L_2| \le M|a_n - L_1| + |L_1|\ |b_n - L_2|.$$

فرضوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی دی . دا چې $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ او $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ دی نـــو $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ داسې شتون لري چې د :

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(M + |L_1| + 1)}$$

او

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(M + |L_2| + 1)}$$

په دې ډول که $n \ge N_\varepsilon$ وي پس:

$$|a_nb_n - L_1L_2| \le M|a_n - L_1| + L_1|b_n - L_2| < M\left(\frac{\varepsilon}{2(M + |L_1| + 1)}\right) + \left(\frac{|L_1|}{(M + |L_1| + 1)}\right)\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2.2.1 قضیه فرضوو چې $\lim_{n\to\infty} a_n$ او $\lim_{n\to\infty} b_n$ وجود لري او هـــم $\lim_{n\to\infty} b_n \ne 0$ دی پس:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(د یو نسبت لمیټ د لمیټونو له نسبت څخه عبارت دی که نسبت تعریف شوی وي)

ثبوت

د 1.2.1 قضیې له مخې د یو حاصل ضرب د لمیټ په باب ده، دا به کافي وي وښیو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

د دې په فرضولو چې $\lim_{n\to\infty} b_n := L \ne 0$ وي لازم دي وښیو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{L}.$$

لرو چې:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - b_n}{Lb_n}\right| = \frac{|L - b_n|}{|L||b_n|}$$

خرنګـــه چـــې $(\lim_{n\to\infty} b_n = L) \ne 0$ نـــو د $n\in\mathbb{N}$ لپـــاره شـــتون لـــري $N_{1(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ داســـې چې:

$$n \ge N_1(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - L| < \frac{|L|}{2}$$

بنا پر دې:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{L}\right|=\frac{|b_n-L|}{|b_n||L|}<\frac{|b_n-L|^2}{\frac{|L|}{2}.|L|}=\left(\frac{2}{L^2}\right)|b_n-b|$$

فرضوو چې $\varepsilon>0$ راکــړ شــوی دی . دا چــې $(\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L)\neq 0$ دی نوشــتون لــري $N_\varepsilon \ge N_1(\varepsilon)$ داسې چې:

$$|b_n-L|<\left(\frac{L^2}{2}\right)\varepsilon$$

که $n\ge N_\varepsilon$ وي نو:

$$|b_n-L|<\left(\frac{L^2}{2}\right)|b_n-L|<\left(\frac{2}{L^2}\right)\left(\frac{L^2}{2}\right)\varepsilon=\varepsilon$$

2.2.1 قانون که دهر $\varepsilon>0$ لپاره $a<b+\varepsilon$ وي پس $a\le b$ دی.

ثبوت

مونږ به د پورتني بیان پر عکس مثبت حالت په اثبات ورسوو داسې چــې کــه $a>b$ فرض کړو نود $a-b>0$ له مخې $\frac{a-b}{2}>0$ دی او لرو چې :

$$a-b>\frac{a-b}{2}\Rightarrow a>b+\frac{a-b}{2}:=b+\varepsilon \quad i.e. \quad a>b+\varepsilon$$

که چیرې $\varepsilon:=\frac{a-b}{2}$ په پام کې ونیسو.

5.2.1 مسئله فرضوو چې د هر n لپاره $a_n<b_n$ او شــتون لــري $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ او $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$، پس: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ دی.

ثبوت

قبلوو چې $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1$ او $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_2$ دی. لازم دي وښیو چې $L_1<L_2$ دی. دا به په ښودلو $L_1<L_2+\varepsilon$ او $\varepsilon>0$ لپاره په لاس راوړو (2.2.1 قانون له مخې).

په دې ډول د $\varepsilon>0$ اختیاري عدد په قبلولو، څرنګه چې $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1$ او $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_2$ دی نو شتون لري $N_\varepsilon:=N\in IN$ داسې چې د $n\ge N$ لپاره :

$$|a_n-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}\wedge|b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

بنا پردې:

$$L_1-L_2=(L_1-a_N)+(a_N-b_N)+(b_N-L_2)\le$$
$$\le|L_1-a_N|-(b_N-a_N)+|b_N-L_2|<|L_1-a_N|+|b_N-L_2|$$

څرنګه چې $b_N-a_N>0$ دی پس:

$$L_1 - L_2 < |L_1 - a_N| + |b_N - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

په پایله کې $L_1 < L_2 + \varepsilon$ دی.

1.2.1 پایله فرضوو چې د هر n لپاره $a_n < M$ او $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود وي پــس: $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$ دی.

ثبوت

نوموړې نتیجه د 5.2.1 مسَــلې لــه مخــې حاصـــــــلولای شــو د اســې چــې $\lim_{n\to\infty} M = M$ دی.

1.2.1 تبصره د ا صحیح نه ده چې که:

$$a_n \le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < M$$

د بیلگې په ډول ، پوهیږو چې: $1 - \frac{1}{n} < 1$ دی د هر n لپاره. مگر $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1$ دی.

4.2.1 تعریف د $\mathbb{R}$ حقیقي عددونو یو فرعي سټ S تړلی (بسته) دی کــه چیرې د S د هر متقارب ترادف لمیټ په S کې شامل وي.

4.2.1 مثال د [0,1) انتروال تړلی نه دی ځکـــــــه چې که $a_n = \frac{1}{n}$ په پام کې ونیسو لرو چې د هر n لپاره $a_n \in (0,1]$ دی مگر:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in (0,1]$$

6.2.1 مسئله د $[a,b]$ یو تړلی انتروال د $\mathbb{R}$ یو تړلی فرعي سټ دی .

ثبوت

فرضوو چې د هر n لپاره $a_n \in [a,b]$ دی. دا چې د هر n لپاره $a_n \le b$ دی نـــو لرو چې: $L := \lim_{n\to\infty} a_n \le b$ دی .

مشابه پر دې ، دا چې د هر n لپاره $a_n \ge a$ دی پس:

$$L := \lim_{n\to\infty} a_n \ge b$$

په پایله کې $\lim_{n\to\infty} a_n := L \in [a,b]$ دی.

3.2.1 غیر معین لمیټونه

5.2.1 تعریف لروچې $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ دی که چېرې د هر M>0 لپاره یــو N مثبت تام عدد داسې شتون ولري چې د n>N لپاره $a_n > M$ وي.

همدارنګه لروچې $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ دی که چېرې د هر M>0 لپاره یو N مثبــت تــام عــدد داسې شتون ولري چې د n>N لپاره $a_n < -M$ وي.

2.2.1 تبصره د 5.2.1 تعریف هر حالت مربــوط د هغــې د یــو اړخیــز لمیټونو د f دی چې شتون نه لري. په حقیقت کې که چېرې $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ وي نو شــتون لري M>0 او $N \in IN$ داسې چې د هر $n \geq N$ لپاره $|a_n| < M$ وي . مونږ دلته یوه بیلګــه د ریاضیکي غبرګونې وینا لرو چې: مونږ د "**limit**"یعنې حد لغــت او د "lim" ســمبول د معینو لمیټونو او غیر معینو لمیټونو لپاره کاروو. چــې د limit لغــت مــروج او د lim سمبول د غیر معین لمیټ څرګندونه کوي. ددې نظر احساس د 5.2.1 له تعریــف څخــه څرګندیږي.

3.2.1 تبصره یادونه کوو چې:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-a_n) = -\infty$$

5.2.1 مثال وښیئ چې د تعریفونو په د قت:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$$

حل

M>0 داسې راکړشوی چې که $n > M^2$ وی لرو چې $\sqrt{n} > M$ دی. د5.2.1 تعریف له مخې N یو مثبت تام عدد داسې په نظر کې نیسو چې $N > M^2$ وي. په دې ډول: که چیرې $n > N$ وي پس $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ دی.

مشابه پردې : که د N یو مثبت تام عدد داسې وټاکو چې $N > M^2$ وي .پس کــه $n > N$ وي نو $-\sqrt{n} < -\sqrt{N} < -M$ دی . بنا پر دې $\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$ دی.

6.2.1 مثال وښیئ چې د تعریف مطابق $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+4} = +\infty$ دی.

حل

لرو چې.

$$\frac{n^3}{n^2+4} = \frac{n^3}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{n}{1+\frac{4}{n^2}}$$

څرنګه چې د هر $n\in\mathbb{N}$ لپاره :

$$n^2\geq 1\Rightarrow \frac{1}{n^2}\leq 1\Rightarrow \frac{4}{n^2}\leq 4\Rightarrow 1+\frac{4}{n^2}\leq 1+4=5$$

دی. نو د هر $n\geq N\in\mathbb{R}$ لپاره

$$\frac{n^3}{n^2+4}=\frac{n}{1+\frac{4}{n^2}}\geq\frac{n}{5}\geq\frac{N}{5}$$

بنا پر دې د ورکړ شوي M>0 لپاره کولای شو $N\epsilon\mathbb{N}$ هسې وټاکو چې د هغې لپاره $\frac{N}{5}>M\Leftrightarrow N>5M$ وی.پس که $n\geq N$ وي نو $\frac{n^3}{n^2+4}\geq\frac{N}{5}>M$ دی.

بنا پر دی $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+4}=+\infty$ دی.

3.1 د $\mathbb{R}$ تکمیلول

1.3.1 د تر ټولو کوچني (ټيټ)پورتني سرحد خواص او دیو نواخت متقاربیت پر نسیپ(نظریه).

1.3.1 تعریف فرضوو چې $S\subset IR$ ،(S د $\mathbb{R}$ واقعي فرعي سټ دی). د L عدد ته د S تر ټولو کوچنی پورتنی سرحد وایي که چیرې Lد S یو پورتنی سرحد وي یعنې د هر $x\in S$ لپاره $x\leq L$ وي او د S هر پورتنی سرحد لوی یا مساوي په L وي.

دL عدد ته د تر ټولو پورتنی (جګ) کښتنی سرحد د S وایي که چیرې د هر $x\in S$ لپاره $l\leq x$ وي او هر ښکتنی سرحد د S کوچنی یا مساویL وي.

د S سټ د تر ټولو ټیټ پورتني سرحد ته د S سوپریمم هم وایي او په sup S ښـــودل کیږي. همدارنګه د تر ټولو جګ کښتني سرحد ته د S سټ انفــیمم وایـــي او پـــهs inf ښودل کیږي.

1.3.1 تبصره د L عدد ته د S سټ د تر ټولو ټیټ پورتنی سرحد وایي یعنې L=sup s دی که چیرې د هر $\varepsilon>0$ لپاره $x\in S$ شتون ولري داسې چې $L-\varepsilon<x\leq L$ وی.

همدارنګه لرو چې L=inf S دی که چیرې $x\geq L$ او د هر $x\in S$ لپاره $\varepsilon>0$ هسې ورکــړ شوی وي چې د هغې لپاره $x\in S$ داسی شتون ولري چې: $L\leq x<L+\varepsilon$ وي.

دا ضرورنه ده چې دې $\sup S\in S$ وي د بیلګې په ډول که:

$$S=\left\{1-\frac{1}{n}:n=1,2.3,.......\right\}$$

راکړشوی وي supS=1 دی مګر $1\notin S$.

که د S سیټ د تر ټولو ټیټ پورتنی سرحد دS په سټ کې شامل وي لرو چې:
supS=Max S

1.3.1 قانون (د تر ټولو ټیټ پورتني سرحد پرنسیپ). که $S \subset \mathbb{R}$ د پورته خوا څخه محدودوي نو S د تر ټولو ټیټ پورتني سرحد لرونکی دی. پس کـه Mهسـې شـتون ولري د هر $x \in S$ لپاره $x \le M$وي نو Sup S شتون لري.

2.3.1 تعریف د $\{a_n\}$ترادف متزاید دی که د هر n لپـاره $a_n \le a_{n+1}$وي ، او متناقص دی که چیرې د هر n لپاره $a_n \le a_{n+1}$ وي.

1.3.1 قضیه(د یو نواخت متقاربیت پر نسیپ)

که د $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ترادف متزاید او د پورته خوا څخه محدود وي پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ شتون لري او مساوي دی په د ترټولو ټیټ پورتني سرحد د $\{a_n : n = 1,2,3,......\}$سټ سره.
که د $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ترادف متناقص او له کښته خوا څخه محدود وي نو $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ شتون لری او مساوي دی د $\{a_n : n = 1,2,3,......\}$ سټ د تر ټولو جګ کښتني سرحد سره.

ثبوت

د ترادف د تزاید (صعود یت) حالت پـه نظـر کـې نیسـو او قبلـوو چـې $L = \sup\{a_n : n = 1,2,3,......\}$دی ، یعنې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$لپاره یو N مثبت تام عدد داسې شتون لري چې:
$L - \varepsilon < a_N \le L$
څرنګه چې د$\{a_n\}$ ترادف متزاید او L د $\{a_n : n = 1,2,3,......\}$سټ پورتنی سـرحد دی ، نو لرو چې :
$L - \varepsilon < a_n \le a_n < L$
بنا پر دې که $n \ge N$ وي ε $|a_n - L| = L - a_n <$دی. پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$دی.
باید په یادولروچې د هر n لپاره $a_n \le L$دی.

2.3.1 پر له پسې نغښتې

3.3.1 تعریف د I_nانتروالونو یو ترادف $\{I_n\}$ د انتروالونوغنچه یا ځاله بولی که:
$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$

2.3.1 قضیه (د غنچه انتروال خواص) که $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$د غیـر خـالي تړلو او محدود انتروالونو یو غنچه ترادف وي نو تقاطع د $E = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$به خالي نه وي . که د $n \to \infty$ لپاره د I_n طول صفر ته نژدې شي. E په حقیقت کې یو عدد احتواء کوي.

ثبوت

قبلو چې $I_n=[a_n,b_n]$ دی. څرنګه چې $\{I_n\}$ غنچه ترادف دی ، د $\{a_n\}$ ترادف متزاید او له پورته خوا څخه د b_1په واسطه محدود دی. پس $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ شته دی. مشابه پردې $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ هم شته ، او لرو چې :د هر n لپاره $a_n \le a \le b \le b_n$ دی.

که a<b وي لرو چې د هر n لپاره $[a,b]\subset[a_n,b_n]=I_n$ ځکه چې $E=\cap_{n=1}^{\infty} I_n=[a,b]$ که د I_n طول د $n\to\infty$ لپاره صفر ته نژدې شي نو a=b دی او E یو مفرد عدد ارایَه کیږي.

3.3.1 قضیه (دترادفونو لپاره د بولزانو ویرستراس قضیه)

د حقیقي اعدادو هر محدود ترادف د یو متقارب فرعي ترادف لرونکی دی.

ثبوت

قبلو چې $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یو محدود ترادف دی . $[a,b]$ هسې ټاکو چې د هر n لپاره $x_n\in[a,b]=I_0$ وي. I_0 په مساوي اوږدوالي دوه فرعي انټروالونو ویشو. د غیر معین شمیر n لپاره x_n په یو د دې فرعي انټروالونو کې شامل وي د I_1 فرعي انټروال ټاکو او $n_1>1$ داسې انتخابوو چې $x_{n+1}\in I_1$ وي . په یاد باید ولرو چې د I_1 طول $\frac{b-a}{2}$ دی.

پس په مساوي اوږدوالو د I_1 په دوه فرعي انټروالونو تقسیمولو په پایله کې x_n په یو ددې دوه فرعي انټروالونو کې د بې شمیره nلپاره شامل دی.

I_2 فرعي انټروال ټاکو. $n_2>n_1$ داسې انتخابوو $x_{n_2}\in I_2$ وي د I_2 اوږدوالی مساوي دی په $\frac{\frac{b-a}{2}}{2}=\frac{b-a}{2^2}$.

د دې عمل په پایله کې $\{I_k\}$ یو غنچه ترادف چې اوږدوالی یې $\frac{b-a}{2^k}$ دی حاصلوو. او د $\{x_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ ترادف یو فرعي ترادف $\{x_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ داسې حاصلوو چې د هر k لپاره $x_{nk}\in I_k$ وي .

د غنچه انټروال د خواصو په واسطه د I_k انټزوالونو تقاطع داسې چې .....,k=1,2,3 وي د x یوې نقطې سره موافقت کوي . پس:

$$|x_n-x|\le\frac{b-a}{2^k}$$

په پایله کې $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ دی.

3.3.1 د کوشي اصل (پرنسیپ)

5.3.1 تعریف د $\{a_n\}$ ترادف ته د کوشي ترادف وایي که د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره N یو مثبت تام عدد هسې شتون ولري چې د $m \ge N \wedge n \ge N$ لپاره $|a_m - a_n| < \varepsilon$ وي.

5.3.1 قضیه یو ترادف متقارب دی که هغه د کوشي ترادف وي

ثبوت

فرضوو چې $\{x_n\}$ ترادف متقارب او $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ دی . پس د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره N مثبت تام عدد باید داسې شتون ولري چې د $n \ge N$ لپاره $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ وي.پس که $m \ge N \wedge n \ge N$ وي وبه لروچې:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

بنا پر دې د $\{x_n\}$ ترادف د کوشي ترادف دی .

برعکس فرضوو چې $\{x_n\}$ یو د کوشي ترادف دی پس محدود دی.

په حقیقت کې یو مثبت تام عدد د N شتون لري داسې چې که $n \ge N$ وي $|x_N - x_n| < 1$ دی.
پس که $n \ge N$ وی نو:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \le |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|$$

که $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$ په پام کې نیسو پس د هر N لپاره $|x_n| \le M$ دی . په دې ډول د $\{x_n\}$ ترادف محدود دی. چې دا حقیقت مونږ پایلې ته رسوي.

د بولزانو ویرستراش د قضیې له مخې شتون لري د $\{x_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ یو فرعي ترادف کوم چې متقارب دی او وایي چې لمیټ یې a دی .

دې پایلې ته رسیږو چې مکمل ترادف د a عدد ته متقارب دی. په حقیقت کې ، قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی دی څرنګه چې ترادف د کوشي ترادف دی کولای شو N_1 داسې وټاکو چې که $n \ge N_1 \wedge m \ge N_1$ وي نو.

$$\left|x_n - x_m\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ځرنګه چې $a =$ $\lim_{k\to\infty} x_{nk}$ **دی نو شتون لري k داسې چې** $n_k \geq N_1$ **او**

$$\left|x_{nk} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

په دې ډول که $n \geq N_1$ **وي لرو چې:**

$$\left|x_n - x\right| = \left|x_n - x_{nk} + x_{nk} - x\right| \leq \left|x_n - x_{nk}\right| + \left|x_{nk} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنا پر دې $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ **دی.**

دوهم څپرکی

د تابع لمیټ او متمادیت

1.2 متمادیت

1.1.2 د متمادیت تعریف

1.1.2 تعریف (د متمادیت د $\varepsilon-\delta_{\varepsilon}$ تعریف) د $f: D\subset IR\rightarrow \mathbb{R}$ تابع په $x_n\in D$ کې متمادي ده که دهر $\varepsilon>0$ لپاره $\delta_{\varepsilon}>0$ شتون ولري داسې چې:

$$x\in D\wedge|x-x_n|<\delta_{\varepsilon}\Rightarrow|f(x)-f(x_n)|<\varepsilon$$

1.1.2 مثال قبلوو چې د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره $f(x)=x^2$ راکړ شوې او x_n یو اختیاري حقیقي عدد دی، وښیئ چې د f تابع په x_n کې متمادي ده.

حل

لرو چې :

$$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|(x-x_0)(x+x_0)|=|x+x_0||x-x_0|\leq(|x|+|x_0|)|x-x_0|$$

کولای شو x هسې محدود او وټاکو چې $|x-x_0|<1$ وي . پس:

$$|x|=|(x-x_0)+x_0|\leq|x-x_0|+|x_0|\leq1+|x_0|.$$

بنا پر دې:

$$|f(x)-f(x_0)|=(|x|+|x_0|)|x-x_0|<(1+|x_0|+|x_0|)=(1+2|x_0|)|x-x_0|$$

قبلوو چې $\varepsilon>0$ راکړ شوی. د $\delta_{\varepsilon}=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right)$ په ټاکلو که $|x-x_0|<\delta_{\varepsilon}$ وي پس:

$$|f(x)-f(x_0)|<(1+2|x_0|)|x-x_0|<1+2|x_0|\left(\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right)=\varepsilon$$

بنا پر دې لکه چې مو غوښتل f په x_0 کې متمادي ده.

2.1.2 تبصره د $x=x_0+h$ په نظر کې نیولو سره کولای شو د تابع متمادیت په لاندې ډول په پام کې ونیسو:

د $f: D\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ تابع په $x_0\in D$ کې متمادي ده که ، د هر $\varepsilon>0$ لپاره شتون ولري $\delta_{\varepsilon}>0$ داسې چې:

$$x_0\in D, x_0+h\in D\wedge|h|<\delta_{\varepsilon}\Rightarrow|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

2.1.2 مثال قبلوو چې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره $f(x)=x^3$ راکړ شوي، وښيئ چې د f تابع د هر $x_0 \in \mathbb{R}$ لپاره متمادي ده.

حل: لرو چې.

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| = |(x_0+h)^3 - x_0^{\ 3}| = |x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2}h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^{\ 3}|$$
$$= |h||3x_0^{\ 2} + 3x_0h \ \ + h^2| \le |h||3x_0^{\ 2} + 3|x_0||h| \ \ |+h^2|$$

که h هسې محدود کړو چې |h|<1 وي پس:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < |h|(3x_0^{\ 2} + 3|x_0| + h^2)$$

د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta_\varepsilon = \min(1, \dfrac{\varepsilon}{3x_0^2 + 3|x| + 1})$ په ټاکلو که $|h| < \delta_\varepsilon$ وي پس:

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < |h|(3x_0^2+3|x|+1) < \delta_\varepsilon(3x_0^2+3|x|+1) < \left(\frac{\varepsilon}{(3x_0^2+3|x|+1)}\right)(3x_0^2+3|x|+1) = \varepsilon$$

بنا پر دې f په x_0 کې متمادي ده.

1.1.2 قضيه (د متماديت تراد في تعريف) فرضـوو چـې $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ او $x_0 \in D$ ده. د f تابع په x_0 کې متمادي ده که چيرې:

$$\forall n \in IN,\ x_n \in D \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

ثبوت

فرضوو چې د هر $x_n \in D,\ n \in \mathbb{N}$ لپاره f تابع په x_0 کې متمادي ده او $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ دی . قبلوو چې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره شتون لري $\delta_\varepsilon > 0$ داسـې چـې کـه $x \in D$ او $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$ وي، $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ په لاس راشي.

څرنګه چې $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ دی نو $N \in \mathbb{N}$ داسې شتون لري چې :

$$n \ge N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon$$

پس:

$$n \ge N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

بنا پر دې له غوښتنې سره سم ، د f تابع په x_0 کې متمادي ده.

بر عکس ، فرضوو چې: $\forall n \in IN,\ x_n \in D \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in D \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

مشابه پر دې کولای شو ، په x_0 کې د f متماديت په نا مستقيم ډول هم په اثبـات ورسـوو يعنې فرضوو چې د f تابع په x_0 کې متمادي نه ده . بايد وښيو چې پورتنی ليکنه صحيح

نه ده . څرنګه چې f په x_0 کې متمادي نه ده نو $\varepsilon_0 > 0$ هسې شتون لري چې د ټاکل شوي $\delta > 0$ لپاره د لاندې خاصيت په درلودلو $x \in D$ هسې شتون لري چې:

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

بنا پر دې د $n \in \mathbb{N}$ لپاره $x_n \in D$ شتون لري هسې چې:

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

په پايله کې $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ دی، مګر دا درسته نه ده چې $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ دی .

2.1.2 تبصره د 1.1.2 قضيې له مخې چې که f په x_0 کې متمادي او $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ د f پر دومين يوه تابع وي داسې چې $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ وي پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

3.1.2 مثال قبلوو چې:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{که } x<0 \text{ وي} \\ 1 & \text{که } x \geq 0 \end{cases}$$

وښيئ چې f په صفر کې متمادي نه ده .

حل

قبلوو چې د ....n=1,3,5 لپاره $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ دی پس:

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ دی ،ځکه چې $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ دی مګر دا درست نه دي چې:

$$f(x_n) = f(-1) = -1 \;\; if \;\; n = 1,3,5,.......$$

او

$$f(x_n) = f(\;1\;) = \;\;1 \;\; if \;\; n = 2,4,6,.......$$

2.1.2 منظم متماديت د $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يوه تابع پر D منظماً متمادي ده که چيرې د يو اختياري $\varepsilon > 0$ لپاره $\delta_\varepsilon > 0$ شتون ولري داسې چې:

$$x_1 \in D,\; x_2 \in D \wedge |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

4.1.2 مثال قبلوو چې $f(x) = \frac{1}{x}$ ده . وښيئ چې f پـــر $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ قطعــه خــط منظماً متمادي ده.

حل

فرضوو چې : $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \wedge \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1$ دي ، لرو چې:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 \cdot x_2}$$

ښرنګه چې : $\frac{1}{x_1.x_2} \le 4 \Leftarrow x_1.x_2 \ge \frac{1}{4} \Leftarrow x_2 \ge \frac{1}{2} \wedge x_1 \ge \frac{1}{2}$ دی نو لرو چې :

$$|f(x_2)-f(x_1)| = \frac{|x_1-x_2|}{x_1.x_2} = \frac{|x_1-x_2|}{\frac{1}{4}} = 4|x_1-x_2|.$$

بنا پر دې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ له مخې د $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$ په ټاکلو کــه $\frac{1}{2} \le x_1 \le 1 \wedge \frac{1}{2} \le x_2 \le 1$ وي پس :

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le 4|x_1-x_2| < 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

په پایله کې f پر $\left[\frac{1}{2},1\right]$ قطعه خط منظماً متمادي ده.

3.1.2 تبصره په یوه نقطه کې متمادیت کولای شود منظم متمادیت ښخه په استفاده په لاندې ډول بیان کړو.

د $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یوه تابع پر D منظماً متمادي ده که چېرې، د ورکړشوي $\varepsilon > 0$ لپاره $\delta_\varepsilon > 0$ شتون ولري داسې چې:

$$x \in D, x+h \in D \wedge |h| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon$$

2.1.2 قضیه د $f : D \to \mathbb{R}$ یوه تابع پر D منظماً متمادي ده که چېرې لانـــدې شرط تحقق ومومي:

که $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ پر D ترادفونه او $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ وي پس: $\lim_{n\to\infty}(f(u_n) - f(v_n)) = 0$

ثبوت

فرضووچې f پر D منظماً متمادي او $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ او $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ترادفونه

دی او $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n)$ دی. مونږ بایدوښیو چې: [

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) - f(v_n) = 0$$

قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی. پر D د f منظم متمادیت له مخــې لروچــې، شــتون لــري $\delta_\varepsilon > 0$ داسې چې:

$$x_1 \in D, x_2 \in D \wedge |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$$

ښرنګه چې $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$ دی نو شتون لري $N \in \mathbb{N}$ داسې چې:

$$n \ge N \Rightarrow |u_n - v_n| < \delta_\varepsilon$$

بنا پر دې:

$$n \ge N \Rightarrow |u_n - v_n| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(u_n)-f(v_n)| < \varepsilon$$

په پایله کې $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(u_n)-f(v_n)\right)=0$ دی.

که وغواړو د دې عکس په اثبات ورسوو، فرض به کړوچې f پر D منظماً متمادي نه ده . وبه ښیو چې په D کې د $\{u_n\}$ او $\{v_n\}$ ترادفونه هسې شتون لري چې $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ دی مگر $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(u_n)-f(v_n)\right)=0$ نه دی.

څرنگه چې f پر D منظماً متمادي نه ده ، نو شتون لري $\varepsilon>0$ او په D کې د $\{u_n\}$ او $\{v_n\}$ ترادفونه ، داسې چې.

$$|u_n-v_n|<\frac{1}{n}\wedge|f(u_n)-f(v_n)|\geq 0$$

پس ، $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$ دی مگر دا درست نه دی چې: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(u_n)-f(v_n)\right)=0$ دی .

5.1.2 مثال قبلوو چې د هر $x\neq 0$ لپاره $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ده وښیئ چې: f پر $[0,1]$ منظماً متمادي نه ده.

حل

په پام کې نیسو $u_n=\dfrac{1}{n}\wedge v_n=\dfrac{1}{n+1}$ پس:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$$

د بلې خوا لرو چې:

$$f(u_n)-f(v_n)=\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}=n-(n+1)=-1$$

فلهذا:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(u_n)-f(v_n)\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1$$

بنا پر دې ، f پر $[0,1]$ منظماً متمادي نه ده سره له دې چې f د $[0,1]$ په هره نقطه کې متمادي ده .

3.1.2 قضیه فرضوو چې f د $[a\ ,\ b]$ پر محدود تړلي انتروال متمادي ده پس f پر $[a\ ,\ b]$ منظماً متمادي ده.

ثبوت

قضیه په نا مستقیم ډول په اثبات رسوو . یعنې فرضوو چې f پر $[a\ ,\ b]$ متمادي ده مگر پر نوموړي انتروال منظماً متمادي نه ده . پس په $[a\ ,\ b]$ کې د $\{u_n\}_{n=1}^{\alpha}$ او $\{v_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ترادفونه شتون لري داسې چې د $\varepsilon>0$ لپاره

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0\wedge|f(u_n)-f(v_n)|\geq\varepsilon\ .$$

خرنگه چې $[a\ ,\ b]$یو متواتر کمپکټ (نغښتی لنډیز) دی نو شـــتون لـــري د $\{u_{nk}\}_{k=1}^{\alpha}$او $\{v_{nk}\}_{k=1}^{\alpha}$فرعي انتروالونه داسې چې:

$$\lim_{k\to\infty} u_{nk} = u_0 \in [a,b] \wedge \lim_{k\to\infty} v_{nk} = v_0 \in [a,\ b]$$

لرو چې : $u_0 - v_0 = \lim_{k\to\infty}(u_{nk} - v_{nk}) = 0$ پس $u_0 = v_0$

په u_0کې د f د متماديت له مخې ليکلای شو چې:

$$\lim_{k\to\infty}(u_{nk}) = \lim_{k\to\infty} f(v_{nk}) = f(u_0)$$

بنا پر دې:

$$\lim_{k\to\infty}(f(u_{nk}) - f(v_{nk})) = 0$$

او دا خلاف ددې دی چې د هر n لپاره $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$ دی.

3.1.2 داساسي توابعو متماديت او دهغوی ترکيب

4.1.2 قضيه فرضوو چې f او g په حقيقي قيمتونو د D پر دومـــين توابـــع وي او د $x_0 \in D$ لپاره f او g په x_0کې متمادي وي. پس:

1. f + g په x_0 کې متمادي ده.
2. f . g په x_0کې متمادي دی.
3. $\frac{f}{g}$د x_0 په نقطه کې متمادی دی که $g(x_0) \neq 0$ وي.

1.1.2 مسله قبلوو چې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره $f_n(x) = x^n$ راکړشـــوې کلـــه چـــې n=0,1,2,3,…. وي پس f_n په هر $x \in \mathbb{R}$کې متمادي ده.

ثبوت

که n=0 وي $f_0(x) = 0$ ثابته تابع واضحاً په هرې اختياري نقطې کې متمادي ده. (کولای شو د اختياري $\varepsilon > 0$ لپاره $\delta_\varepsilon = 1$په پام کې ونيسو).

f_1 هسې په نظر کې نيسو چې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره $f_1(x) = x$ وي . دورکړ شـــوي $\varepsilon > 0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ په پام کې نيسو . که $|h| < \delta$ وي پس :

$$|f_1(x+h) - f(x)| = |(x+h) - x| = |h| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

بنا پر دې f په x کې متمادي ده.

فرضوو چې د مسئلې بيان د $n\in\mathbb{N}$ لپاره صحت لري مونږ به وښيو چې هغه د n+1 لپاره هم درسته ده . دا حقيقت به داستقراء رياضي له مخې د لاندې حاصل ضرب څخه روښانه کړو :

$$f_{n+1}(x)=x^{n+1}=x.x^{n}=f_1(x).f_n(x)$$

دا مو ښودلي چې f_1 په x کې متمادي او f_n مو په x کې متمادي فرض کړي . بنا پـــردې f_{n+1} هم په x کې متمادي ده . په پايله کې $f_n(x)=x^n$ د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره متمادي ده.

1.1.2 پايله يو پولينوم په هر $x\in\mathbb{R}$ کې متمادي دی.

نوموړې پايله د 1.1.2 مسئلې څخه په لاس راوړلای شو . ځکه چې پولينوم د

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$$

يو څو جمله اي دی د $a_n,....,a_1,a_0$ په ثابتو ضريبونو کوم چې هر حد يې يوه متمـــادي تابع ده په نتيجه کې د ټولو حدونو مجموعه يې هم يوه متمادي تابع د هر $x\in\mathbb{R}$ لپـــاره راښيي .

2.1.2 پايله که ....,n=1,2,3 او

$$g_n(x)=\frac{1}{x^n}\ ;x\neq 0$$

وي ، پس g په $x\in\mathbb{R}$ کې يوه متمادي تابع ده کله چې $x\neq 0$ وي .

نوموړې پايله د 1.1.2 پايلې له مخې داسې بيانوو چې نسبت د دوه متمادي توابعو متمادي دی په هغه صورت کې چې مخرج يې صفر نه وي .

5.1.2 قضيه فرضـــوو چـــې $f:0\to IR;g:u\to IR\wedge f(D)\subset u$ راکـــړ شوي.

که f په x_0 کې متمادي او g په $f(x_0)$ کې متمادي وي پس gof په x_0 کې متمادي دی .

ثبوت

قبلوو چې $\varepsilon>0$ راکړ شوی. دا چې g په $f(x_0)$ کـــې متمـــادي ده کـــولای شـــو $\delta_r>0$ داسې غوره کړوچې:

$$u\in U\wedge|u-f(x_0)|<\delta\Rightarrow|g(f(u))-f(x_0)|<\varepsilon$$

څرنګه چې f په x_0 کې متمادي ده کولای شو $\delta>0$ داسې غوره کړوچې:

$$x\in D\wedge|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-g(f(x_0))|<\varepsilon$$

په دې ډول :

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

وروستی لیکنه راښیي چې د gof مرکبه تابع په x_0 کې متمادي ده .

6.1.2 قضیه د ساین او کوساین مثلثاتي توابع په هر $x \in \mathbb{R}$ کې متمادي دي .

مونږ د قضیې په ثبوت ټینګار نه کوو ځکه چې مونږ د ساین او کوساین په بـاب دقیـق تعریفونه په اثبات نه رسوو . ښیو چې د هر x او h حقیقي عدد لپاره:

$$|\sin(x+h) - \sin x| \le |h| \wedge |\cos(x+h) - \cos x| \le |h|$$

دغه نا مساواتونه د ساین او کوساین توابعو متمادیت څرګندوي (کـولای شـو د $\varepsilon > 0$ لپاره $\delta_r > 0$ په پام کې ونیسو).

3.1.2 نتیجه د تانجانت او سیکانټ مثلثاتي توابع د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره بې لـه تاقو ضرایبو د $\frac{\pi}{2}$ څخه ، متمادي دي.

ثبوت

نوموړې پایله د 6.1.2 قضیې نژدې پایله ده . څرنګه چې:

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \wedge \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

او د متمادي توابعو نسبت بې له هغو قیمتونو څخه چې مخرج پرې صـفر کیـږي یـوه متمادي تابع راښیي او دا د x هغه قیمتونه دي چې په کې د $\frac{\pi}{2}$ سره طاق عددونـه ضـرب شوي وي.

2.2 د یوې تابع لمیټ په یوه نقطه کې

1.2.2 تعریف د $D \subset \mathbb{R}$ لپاره x_0 یوه لمیټي (یـا د تجمـع) نقطـه ده کـه د ورکړشوي $\varepsilon > 0$ لپاره شتون ولري $x \in D$ ، داسې چې د $x \neq x_0$ لپـاره $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ وي.

1.2.2 مسئله د x_0 نقطه د $D \subset \mathbb{R}$ سټ یوه لمیټي نقطه ده کـه د x_0 د $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقطو د ترادف لمیټ وي داسې چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره $x_n \in D$ او $x_n \neq x_0$ وي.

ثبوت

فرضوو چې x_0 د D یوه لمیټي نقطه ده . د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره شتون لري $x_n \in D$ داسې چې $x_n \neq x_0$ او $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ دی. بنا پر دې: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ دی.

برعکس ، فرضوو چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقطو یو ترادف شتون لري داسې چې $x_n \in D$ ، $x_n \neq x_0$ او $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ دی . د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره $N \in \mathbb{N}$ شـــتون لـــري داسې چې $|x_N - x_0| < \varepsilon$، او لرو چې $x_N \neq x_0$ دی.
بنا پر دې x_0 د D سټ یوه لمیټي نقطه ده.

1.2.2 مثال قبلوو چې : $D = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$

دصفر (0) نقطه په D کې شامله مګر د D لمیټي نقطه نـــه ده ځکـــه چـــې پـــه انتـــروال د $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ کې هیڅ یوه نقطه د D شامله نه ده بې له صفر څخه.

د (−1) نقطه د D یوه لمیټي نقطه ده سره له دې چې $-1 \notin D$ ځکه چې:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \;; 1+\frac{1}{n} \in D \wedge \forall n \in \mathbb{N} \;; 1+\frac{1}{n} \neq 1.$

همدارنګه په $(-\infty, -1)$ کې هره نقطه د D یوه لمیټي نقطه ده.

2.2.2 تعریف فرضوو چې $f : D \to \mathbb{N}$ او x_0 د D یوه لمیټي نقطـــه ده.
لمیټ د f په x_0 کې L دی که چیرې:

$$x \in D \setminus \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

که لمیټ د f په x_0 کې L وي لیکو چې:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

دارنګه یې لولو (لمیټ د f(x) کله چې x ، x_0 ته تقرب وکړي L دی)

1.2.2 تبصره فرضوو چې $f : D \to \mathbb{R}$ او x_0 د D یوه لمیټـــي نقطـــه ده .
پس $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ دی ، که چېرې د هر ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره $\delta_\varepsilon > 0$ شـــتون لـــري داسې چې :

$$h \neq 0 \;; |h| < \delta_\varepsilon \wedge x_0 + h \in D \Rightarrow |f(x_0 + h) - L| < \varepsilon$$

په دې ډول : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$

2.2.2 مسّله فرضوو چې $f : D \to \mathbb{R}$ او $x_0 \in D$ یوه لمیټي نقطه ده .
پس f په x_0 کې متمادي ده که چېرې $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ وي یعنې:

$$\text{f is continuous at } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ثبوت

فرضوو چې x_0 د D یوه لمیټي نقطه ده او f په x_0 کې متمادي ده .
یعنې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره شتون لري $\delta_\varepsilon > 0$ داسې چې :

$$x \in D \wedge |x-x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

بنا پر دې $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ دی.

بر عکس ، فرضوو چې: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ دی . يعنې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره شتون لري $\delta_\varepsilon > 0$ داسې چې:

$$x \in D\ \{x_0\} \wedge |x-x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

که $x = x_0$ په پام کې ونيسو نو:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

په دې ډول :

$$x \in D \wedge |x-x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

بنا پر دې f په x_0 کې متمادي ده.

3.2.2 مسئله فرضوو چې $f : D \to \mathbb{R}$: او x_0 د D يوه لميټي نقطه ده.

پس:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

دی که چيرې د هر $\{x_n\}$ ترادف لپاره په $D \setminus \{x_n\}$ کې داسې چې $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ وي لــرو چې:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

نوموړی اثبات مو د متماديت د پرله پسې خاصيت له مخې چې د 1.2 پر گراف پــه اولــه قضيه کې واضح شوی دی په لاس راوړ.

2.2.2 مثال قبلوو چې $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}\ ;\ x \neq 3$ ده.

a. $\lim_{x \to 3} f(x)$ پيدا کړئ (په ساده حساب) .

b. د a برخې اثبات د ε او δ_ε په مرسته د تعريف له مخې واضح کړئ .

حل

a . لرو چې :

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3\ ; x \neq 3$$

بنا پر دې:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

b . قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی. که $x \neq 3$ وي نو:

$$|f(x)-6| = |(x+3)-6| = |x-3| < \varepsilon$$

بنا پر دې د $\varepsilon =: \delta_\varepsilon$ په پـام کـې نيولـو سـره ، کـه $|x-3| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$ وي نـو $|f(x)-6| < \varepsilon$ دی.

4.2.2 مسئله فرضوو چې $f : D \to \mathbb{R}$ ، x_0 د D یوه لمیتـي نقطـه د (0) شتون لري يو خلاص انتروال د $\mathcal{I}$ چې x_0 په کې شامل دی ، او یوه تابع د g چـې پـه x_0 کې متمادي ده داسې چې د هر $x \in J \setminus \{x_0\}$ لپاره $g(x) = f(x)$ ده ، لروچې:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$$

ثبوت

قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی. څرنګه چې g په x_0 کې متمادي ده نو:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

ځکه چې $f(x) = g(x)$ ده که $x \neq x_0$ وي $x \in J$ لپاره لرو:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

3.2.2 مثال قبلوو چې:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \quad if \quad x > 0 \wedge x \neq 4$$

a. g هسې تعين کړئ چې هغه د $\mathcal{I}$ په يو خلاص انتروال کې چې 4 په کې شامل وي تعریف شوي وي ، یعنې $f(x) = g(x)$ وي که چېري $x \in J$ او g په $x_0 = 4$ کې متمـادي وي ، په دې ډول $\lim_{x \to 4} f(x)$ معلوم کړئ.

b. خپله هغه ادعا چې g په $x_0 = 4$ کې متمادي ده د متمادیت د ε او δ_ε په نظر کې نیولو سره د تعریف مطابق وښيئ.

ثبوت

a. لرو چې :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

که $x > 0 \wedge x \neq 4$ وي او $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ په پام کې ونیسو پس g(x) پـه $x_0 = 4$ کې متمادي ده او

$$g(4) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

څرنګه چې $f(x) = g(x)$ ده که $x > 0 \wedge x \neq 4$ وي:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x) = \frac{1}{4}$$

b. که $0 \neq h \wedge 4 > |h|$ وي.

$$g(4+h)-\frac{1}{4}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}-\frac{1}{4}=\frac{4-\sqrt{4+h}-2}{4\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{2-\sqrt{4+h}}{4\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{2-\sqrt{4+h}}{4\left(\sqrt{4+h}+2\right)}\cdot\frac{2+\sqrt{4+h}}{2+\sqrt{4+h}}$$
$$=-\frac{h}{4\left(2+\sqrt{4+h}\right)}$$

بنا پر دې :

$$\left|g(4+g)-\frac{1}{4}\right|=\frac{|h|}{4\left(2+\sqrt{4+h}\right)}<\frac{|h|}{4(2)^2}=\frac{1}{16}|h|.$$

قبلوو چې $\varepsilon>0$ راکړ شوی ، د $\delta_\varepsilon=\min(16\varepsilon,4)$ په نظر کې نیولو ســـره کــه $h\neq 0$ او $|h|<\delta_\varepsilon$ وي پس :

$$\left|g(4+g)-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{16}|h|.<\frac{1}{16}(16\varepsilon)=\varepsilon$$

د توابعو د لمیټونو لپاره د حاصل جمعې ، حاصل ضرب او نسبت قواعد په مشابه ډول د ترادفونو لپاره هم په کار وړل کېږي.

1.2.2 قضیه فرضوو چې $f:D\to IR, g:u\to\mathbb{R}$ او $f(D)\subset u$ راکړ شوې ، x_0 د D لمیټي نقطه ، $\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0$ او g په y_0 کې متمادي ده . پس:

$$\lim_{x\to x_0}g(f(x))=g(y_0)$$

یعنې:
$$\lim_{x\to x_0}g(f(x))=g\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)$$

ثبوت

قبلوو چې $\varepsilon>0$ راکړ شوی . څرنګه چې g په y_0 کې متمادي ده کــولای شـــو $\delta_1>0$ داسې وټاکو:

$$u\in U\wedge|u-y_0|<\delta_1\Rightarrow|g(u)-g(y_0)|<\varepsilon$$

څرنګه چې $\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0$ دی کولای شو $\delta>0$ هسې وټاکو چې:

$$x\in D\,;\,x\neq x_0\wedge|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-y_0|<\delta_1$$

په دې ډول :
$$x\in D\,;\,x\neq x_0\wedge|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(f(x))-g(y_0)|<\varepsilon$$

دا رابښيي چې $\lim_{x\to x_0}g(f(x))=g(y_0)$ دی .

1.2.2 غیر معین لمیټونه

3.2.2 تعریف f د لمیټ په a کې $+\infty$ دی که دهر M>0 لپاره شتون ولري $\delta_M>0$ داسې چې $f(x)>M$ وي ،که له مخکې نه $0<|x-a|<\delta_M$ په پام کې وي . لیکو چې:

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$$

د f لمیټ په a کې $-\infty$ دی که دهر M>0 لپاره شتون ولري $\delta_M > 0$ داسې چې له مخکـــې نه د $0 < |x-a| < \delta_M$ لپاره $f(x) < -M$ وي . لیکو چې :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

د یو اړخیز معین لمیټ تعریف لکه $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ د تعریف یو بدلون دي د x په محدودولو داسې چې x>a وي یعنې:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x>a)}} f(x) = +\infty$$

2.2.2 تبصره (اخطار) د3.2.2 تعریف په هر حالت کــې مناســـب یـــو اړخیز لمیټ شتون نه لري، په حقیقت کې که $\lim_{x \to a} f(x) = L$ وي پس شتون لري $\delta > 0$ او M>0 داسې چې که $0 < |x-a| < \delta$ وي $|f(x) - L| < M$ دی.

مونږ دلته د ریاضیکي غبرګې وینا یوه بیلګه لرو او هغه دا چې مونږ په مجمـــوع کـــې د limit (حد) لغت او lim سمبول په ترتیب سره د معینو لمیټونو او غیر معینـــو لمیټونـــو لپاره کار وو.

چې دغه غبرګې ویناوې مروج او معمول دي . او مونږ یې په کاروړو . . په دې ډول که د limit لغت سره مخ کیږو له معین لمیټ څخه بحث کیږي او د lim ســـمبول د غیـــر معـــین لمیټ په محاسبه کولو کې په کار وړو.

5.2.2 مثال قبلوو چې : $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$ راکړ شوې.

ثبوت کړئ چې $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ ^ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ دي.

حل

د دې لپاره چې ثابت کړو $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ وي . x هسې محدود وو چې 2<x<3 وي پس 5<x+3<6 دی داسې چې :

$$\frac{1}{x+3} > \frac{1}{6}.$$

بنا پر دې :

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} > \frac{1}{6(x-2)}$$

په دې ډول ، دM>0 لپاره که فرض کړو:

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} M \Rightarrow \frac{1}{6(x-2)} > M \Rightarrow x - 2 < \frac{1}{6M}$$

یعنې:

$$x < 2 + \frac{1}{6M}$$

د2<x<3 په محدودیت که د مخکیني تعریف مطابق په پام کې ونیسو.

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{6M}\right)$$

لرو چې که $2 < x < 2+\delta$ وي $f(x) > M$ دی.

اوس د $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ د اثبات لپاره x هسې محـــدود ووچــې 2>x>1 وي . پــه دې ډول 4>x+3 دی داسې چې : $0 < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{4}$

بنا پردې : $\frac{1}{(x+3)(x-2)} < -M \Rightarrow \frac{1}{4(x-2)} < -M$

په دې حالت کې: $\frac{1}{4(2-x)} > M \Leftrightarrow \frac{1}{4M} > 2-x$

د مخکیني تعریف مطابق که په پام کې ونیسو: $\delta = \min\left(1, \frac{1}{4M}\right)$ وبه لرو چې :

که $2-\delta < x < 2$ وي $f(x) < -M$ دی.

2.2.2 په بې نهایت کې لمیټونه

4.2.2 تعریف د f لمیټ په $+\infty$ کې د L عدد دی ، که د اختیاري ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره A>0 شتون ولري داسې چې د هر x>A لپاره $|f(x)-L| < \varepsilon$ وي.

د f لمیټ په $-\infty$ کې د L عدد دی ، که د اختیاري $\varepsilon > 0$ ورکړ شوي عدد لپاره A>0 شتون ولري داسې چې د هر x<A لپاره $|f(x)-L| < \varepsilon$ وي.

6.2.2 مثال قبلوو چې $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ راکړ شوې ده.د 4.2.2 تعریف مطابق وښیئ چې: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ دی.

حل

لرو چې.

$$|f(x)-L| = \left|\frac{2x}{x+3} - 2\right| = \left|\frac{2x-2(x+3)}{x+3}\right| = \frac{6}{|x+3|}$$

بنا پر دې که x>-3 وي ، په لاس راځي:

$$|f(x)-2| = \frac{6}{x+3}$$

قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړ شوی ، او فرضوو چې x>-3 دی پس:

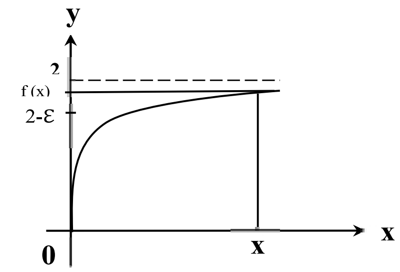
$$|f(x)-2| = \frac{6}{x+3} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x+3}{6} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x+3 > \frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{6}{\varepsilon} - 3.$$

خرنگه چې د $\varepsilon > 0$ لپاره $\frac{6}{\varepsilon} - 3 > -3$ دی ، به حقیقت کې د $x > \frac{6}{\varepsilon} > \frac{6}{\varepsilon} - 3 > -3$ له مخې

لرو چې $x > \frac{6}{\varepsilon}$ دی . د 4.2.2 تعریف له مخې که $A = \frac{6}{\varepsilon}$ په پام کې ونیسو نو لرو چې :

$$|f(x)-L| = |f(x)-2| = \left|\frac{2x}{x+3} - 2\right| < \varepsilon$$

بنا پر دې $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ دی . لاندې شکل د يو ورکړ شوي $\varepsilon>0$ له مخې د A د تعينولــو وضاحت کوي.



5.2.2 تعريف دf لميټ په $+\infty$ کې $+\infty$ دی که د ورکړ شوي هر M>0 لپاره A>0 شتون ولري داسې چې دهر x>A لپاره f(x)>M وي. لميټ د f په $+\infty$ کې $-\infty$ دی ، که دهر ورکړ شوي M>0 لپاره A>0 شتون ولري داسې چې د هر x>A لپارهf(x)<−M وي.

7.2.2 مثال قبلــوو چــې $f(x)=x^2-x$ ده. لــه 5.2.2 تعريــف څخــه پــه اســــتفاده وښيئ چې $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ دی.

حل

لرو چې: $f(x)=x^2-x=x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

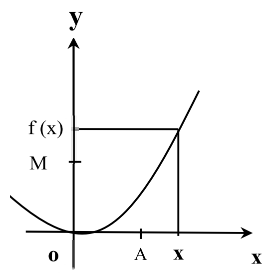
که x>2 وي ، $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

بنا پر دې : $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)>x^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{x^2}{2}$

قبلوو چې M>0 راکړ شوی دی. د پورتني نا مساوات او f(x)>M له مخې د x>2 لپاره

لرو چې $\frac{x^2}{2}>M$ دی.دا هغه حالت دی چې که $x>2\wedge x>\sqrt{2M}$ وي .

د 5.2.2 تعريف له مخې کولای شو، $A=\max\{2,\sqrt{2M}\}$ په پام کې ونيسو . په دې ډول :



که x>A وي f(x)>M دی . بنا پر دې $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ دی.

د شکل له مخې د A غوره کول د ورکړ شوی M لپاره واضح کولای شو.

3.2 د اکستریموم قیمت او د منځني قیمت قضیه

1.3.2 د اکستریموم قیمت قضیه فرضوو چې f پر [a,b] تړلي او محدود انتروال متمادي ده. پس f پر [a,b] د مطلق اعظمي او اصغري لرونکې ده.

ثبوت

مونږ به د مطلق اعظمي په شتون ټینګار وکړو. په شروع کولو یې دا تایید وو چې f پر [a,b] د پورته خوا څخه محدوده ده . که فرض کړو چې f پر [a,b] د پورته خوا څخه محدوده نه ده ، پس د هر $n\in\mathbb{N}$ لپاره $x_n\in[a,b]$ شتون لري داسې چې $f(x_n)>n$ ،ي.

څرنګه چې د[a,b] تړلی او محدود انتروال یوه نغښتې غنچه ده نو د $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ترادف یو فرعي ترادف د $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ او $x_0\in[a,b]$ شتون لري داسې چې :

$$\lim_{k\to+\infty} x_{nk}=x_0$$

دا چې f په x_0کې متمادي ده ، لرو چې :

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{nk})=f(x_0)$$

دا چې یو متقارب ترادف محدود دی ، د $\{f(x_{nk})\}_{k=1}^{\infty}$ ترادف باید محدود وي. مګر دا د دې بیان عکس دی چې د هر $k\in\mathbb{N}$ لپاره $f(x_{n_k})>n_k$ دی. په دې ډول f پر [a,b] له پورته خوا څخه محدوده ده.

د تر ټولو کوچني پورتني سرحد په مفهوم ، د$\{f(x): a\le x\le b\}$ سټ یو د تر ټولو کوچنی پورتنی سرحد لري او هغه $M=\sup_{a\le x\le b} f(x)$ په پام کې نیسو.

مونږ به دا وښیو چې $x_0\in[a,b]$ شتون لري داسې چې $f(x_0)=M$ وي.

د تر ټولو کوچني ترين پورتني سرحد د تعريف له مخې د هر $n\in\mathbb{N}$ لپاره شتون لري $x_n\in[a,b]$ داسې چې : $M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M.$

څرنګه چې د [a,b] تړلی او محدود انتروال يوه نغښتې غنچه ده نو شتون لري د $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ترادف يو فرعي ترادف د $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ او $x_n\in[a,b]$ داسې چې :

$\lim_{k\to\infty}x_{nk}=x_0$

په x_0 کې د f د متماديت له مخې لرو چې $\lim_{k\to\infty}f(x_{nk})=f(x_0)$ دی.

د بلې خوا د $M-\frac{1}{n}<f(x_{nk})\le M.$ نا مساوات واضح کوي چې $\lim_{k\to\infty}f(x_{nk})=M$ دی،د لميټ د يووالي له مخې به ولرو چې $f(x_0)=M$ دی.

2.3.2 د منځني يا وسطي قيمت قضيه

فرضوو چې $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ راکړ شوې او $f(a)\neq f(b)$. کــه c د f(a) او f(b) تــر منځ يو دقيق قيمت وي ، پس $x_0\in(a,b)$ شتون لري داسې چې $f(x_0)=c$ دی.

ثبوت

فرض به کړو چې $f(a)<c<f(b)$ دی . په پام کــې نيســو $g(x)=f(x)-c$ ،داسې چې $g(a)<0\wedge g(b)>0$ وي .

مونږ د $x_0\in[a,b]$ شتون ته داسې ضرورت لرو چې وښيو $g(x_0)=0$ دی.

د منتصفه متود په کارولو، قبلوو چې $a_1=a$ او $b_1=b$ دی ، په پام کې نيسو:

$m_1=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{a+b}{2}$

داسې چې m_1 د [a,b] منتصفه نقطه ده. که $g(m_1)=0$ وی کولای شو $x_0=m$ په پام کې ونيسو . بر خلاف،

که $g(m_1)<0$ وي په پام کې ونيسو. $\quad a_2=m_1\wedge b_2=b_1=b$

که $g(m_1)>0$ وي په پام کې ونيسو. $\quad a_2=a_1=a\ \wedge\ b_2=m_1$

په دې ډول $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]=[a,b]$ او $g(a_2)<0\,;g(b_2)>0$ وي.

د $[a_2,b_2]$ د محدوديت په درلودلو ، په پام کې نيسو .

$m_2=\frac{a_2+b_2}{2}$

داسې چې m_2 د $[a_1,b_1]$ منتصفه نقطه وي . که $g(m_2)$ وي $x_0=m_2$ په پام کې نيسو . برخلاف،

که $g(m_2)<0$ وي $a_3=m_2\wedge b_3=b_2$ په پام کې نيسو .

که $g(m_2)>0$ وي $b_3=m_2\wedge a_3=a_2$ په پام کې نيسو .

یادونه کوو چې $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$ او $g(b_3)>0$ او $g(a_3)<0$ دي.

نوموړې عملې ته تر n ام قدم پورې دوام ورکوو که $m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ او $g(m_n)=0$ وي. په دې حالت کې $x_0=m_n$ په پا م کېنې نیسو. بر خلاف :

که $g(m_n)<0$ وي $b_{n+1}=b_n \wedge a_{n+1}=m_n$ په پام کې نیسو.

که $g(m_n)>0$ وي $b_{n+1}=m_n \wedge a_{n+1}=a_n$ په پام کې نیسو.

په دې ډول $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ او $g(a_n+1)<0\ ;\ g(b_n+1)>0$

که نوموړی عمل پای ته ونه رسوو او تر اخره دوام ورکړو نو د

$[a_n,b_n];\ n=1,2,3,4,........$

انتروالونو یو غنچه ترادف په لاس راوړو داسې چې:

$$g(a_n)<0\ ;\ g(b_n)>0 \wedge b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

د غنچه انتروال د خواصو له مخې، یوازې یو x_0 شتون لري داسې چې:

$$a_n\le x_0\le b_n\ ;\ \forall n\in IN$$

ځکه چې:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0$$

د g د متمادیت له مخې لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}g(a_n)=\lim_{n\to\infty}g(b_n)=g(x_0)$$

څرنګه چې د هر n لپاره $g(a_n)<0$ د ی لرو چې $g(x_0)\le 0$ او دا چې د هر n لپاره $g(b_n)>0$ دی لرو چې $g(x_0)\ge 0$ دی بنا پردې $g(x_0)=0$ دی.

4.2 د معکوسو توابعو موجودیت او متمادیت

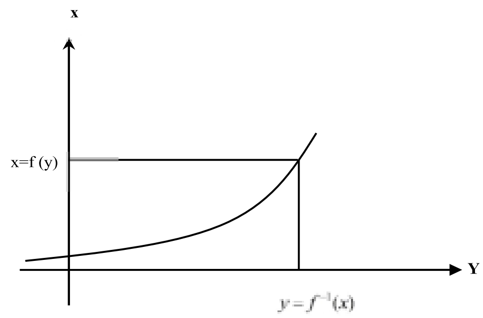
1.4.2 د معکوسې تابع مفهوم

1.4.2 تعریف فرضوو چې د f تابع په رنج کې د هر x لپاره یوازې یو y د f په دومین کې شتون ولري داسې چې f(y)=x وي. د f معکوسه f^{-1} په لاندې ډول تعریفوي:

$$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$$

په دی ډول په x کې د f^{-1} قیمت یعنې $y=f^{-1}(x)$ د x=f(y) معادلې حل دی. ګمارل شوي چې دا حل شتون لري او یوازیني دی. شکل (1) په ګرافیکي ډول د f او f^{-1} ترمنځ رابطه واضح کوي. د yx یا yox په مستوي کې x عمودي او y افقي محورونه ټاکل

شوي دي د f يو ې تابع او د هغې د معکوسې تابع f^{-1} د ارتباط له مخې د f^{-1} دومين د f له رنج سره او د f^{-1} رنج د f له دومين سره يو شان دی. مونږ بايد په دې ټينګـــاروکړو چې د f^{-1} ليکنه بايد د f له معکوس $\frac{1}{f}$ سره مغالــــــــــــــــــــــــطه نه کړو. بلکې د f^{-1} ليکنه بايد په خاص مفهوم واضح کړو.



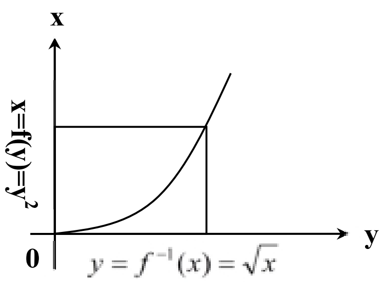
(1) شـــــــــــکل.

1.4.2 مثال قبلوو چې $x = f(y) = y^2$ ده . y هسې محدودوو چې $y \geq 0$ وي په دې ډول د f دومين $[0,+\infty)$دی . همدارنګه رنج د f هم $[0,+\infty)$دی. لروچې :

$$y = \sqrt{x}\ ;\ x \geq 0 \Leftrightarrow x = f(y) = y^2 \wedge y \geq 0.$$

بنا پر دې $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(2) شکل د $\sqrt{x}$ تعريف په ګرافيکي ډول واضح کوي.



(2) شکل.

که f يوه معکوسه تابع ولري نو f معکوسه تابع د f^{-1}ده يعنې : $(f^{-1})^{-1} = f$

په حقیقت کې د $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$ بیانیه داسې لولو لکه

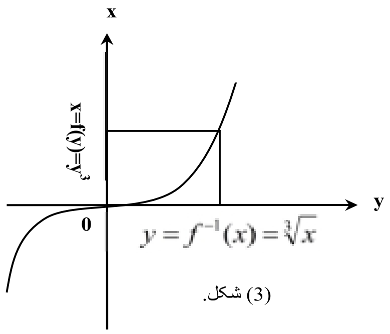
$$x=f(y)\Leftrightarrow y=f^{-1}(x)$$

د مربع جذر تابع د $x^{\frac{1}{n}}$ په شکل تعریفوي داسې چې n جفت مثبت تام عدد وي . لروچې:

$$y=x^{\frac{1}{n}}\Leftrightarrow x=y^{n}$$

داسې چې $x\geq 0$ او $y\geq 0$ وي . بنا پردې ، که چېرې $f(y)=y^{n}\ ;y\geq 0$ په پام کې ونیسو $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ده که $x\geq 0$ وي.

2.4.2 مثال قبلوو چې $f(y)=y^{3}$ وي د $y\in\mathbb{R}$ لپاره ، د $x=f(y)=y^{3}$ معادله د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره د یوازیني حل $y=x^{\frac{1}{3}}$ لرونکې ده .



(3) شکل.

په دې ډول $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ده.

(3) شکل کې د $x=f(y)=y^{3}$ او $y=f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ترمنځ ارتباط واضح کوي .

2.4.2 مثال د $x^{\frac{1}{n}}$ وضاحت کوي کله چې n یو مثبت تام تاق عدد وي.

که nیو مثبت تاق تام عدد او $f(y)=y^{n}$ وي نو د $x=f(y)$معادله د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره $y=x^{\frac{1}{n}}$ یوازیني حل لرونکې ده . بنا پر دې د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$ ده.

1.4.2 مسئله فرضوو چې د f تابع د f^{-1} یوې معکوسې تابع لرونکې ده پس د f تابع په دومین کې د هر y لپاره:

$$(f^{-1}o\ f)(y)=f^{-1}(f(y))=y$$

د f^{-1} تابع په دومین کې د هر x لپاره :

$$(f\ \ o\ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$$

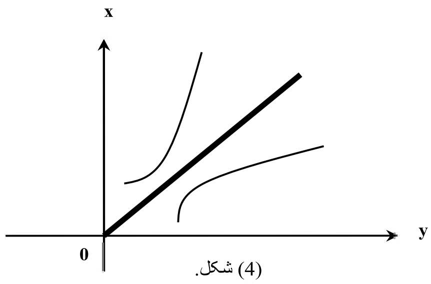
ثبوت

لرو چې $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ داسې چې :

په دومين د f^{-1} کې x چې مساوي په رنج د f دی او مساوي په y دی په دومين د f کې ،
بنا پر دې:

$$\left(f^{-1} o\ f\right)(y) = f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(x) = y$$
$$\left(f\ \ o\ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(y) = x$$

که د عمودي محور پر مخ د واحداتو ويش د افقي محور د واحداتو له ويش سره برابر وي نو د f^{-1} گراف به نظر د y=x مستقيم ته د f د گراف متناظر وي .(4) شکل د دې مطلب وضاحت کوي.



(4) شکل.

2.4.2 مسئله فرضوو چې د f معکوســـه تـــابع شـــتون لـــري .د x=f(y) او $y = f^{-1}(x)$ توابعو گرافونه نظرد y=x مستقيم خط ته متناظر دي . په دې گمان چـــې د واحداتو ويش د افقي او عمودي محور پر مخ يو شان وي.

ثبوت

دا به وښيو چې (x,y) يوه نقطه د f^{-1} پر گراف د (y,x) نقطه ده د f پر گراف .
ځکه چې (x,y) او (y,x) نظر د y=x مستقيم خط ته يوه د بلې متناظرې دي ، دا نتيجه د f او f^{-1} پر گرافونو په لاندې ډول بيانوو . فرضوو چې (x,y) د f^{-1} پر گراف يوه نقطه ده نوموړې نقطه د f پر گراف هم پرته ده ځکه چې x=f(y) راکړ شوې ده . بـــر عکـــس فرضوو چې (y,x) د f پرگراف يوه نقطه ده دغه د f^{-1} پر گراف د (x,y) نقطه ده ځکـــه چې $y = f^{-1}(x)$ ده . په خصوصي ډول که يو شکل لکه شکل4 په پـــام کـــې ونيســـو او د غوښتنې مطابق د y=f(x) او $y = f^{-1}(x)$ گرافونه د xy پر مستوي دواړه رسم کړو ، په

دې حقیقت به سترګې پټې نه کړو چې د $y = f^{-1}(x)$ ګراف د x=f(y) پورې اړه لـري ، نه د y=f(x) پورې. بنا پر دې که وغواړو د $y = f^{-1}(x)$ ګراف xy په مستوي کې رسـم کړو لازم دي د x=f(y) ګراف د yx په مستوي کې رسم کړو . دا هم باید په یاد ولرو چـې د $y = f^{-1}(x)$ او x=f(y) ګرافونه به متناظر رسم نه شي که چیـرې پـر محورونـو د واحداتو ویش یو شان نه وي.

اوس د یوې معکوسې تابع د متمادیت او شتون په باب یو عمومي حقیقت په پام کې نیسو.

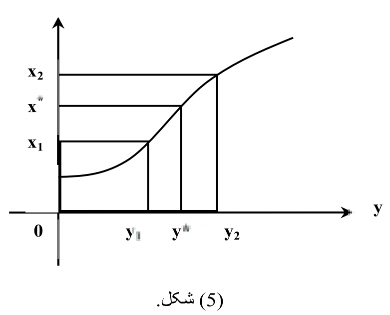
1.4.2 قضیه فرضوو چې د f تابع د J پر یو انټروال متزاید یا متناقصه ده . د f تابع دا رنج هم یو انټروال وي . د f معکوسه تابع f^{-1} پر I متمـادي ده. د f^{-1} تـابع متزایده (یا متناقصه) ده که f متزایده (یا متناقصه) وي.

ثبوت

مونږ د f تابع متزاید حالت د J پر انټروال پام کې نیسو (د تابع متنـاقص حالـت مشابه په دې حالت دی).

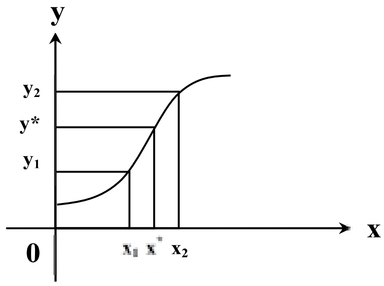
لومړی دا قبلوو چې د f رنج یو انټروال دی. په دې ډول ، فرضوو چې د $x_1 < x_2$ په فرضیه $x_1 = f(y_1)$ او $x_2 = f(y_2)$ د f تابع د رنج دوه نقطـې دي . کـه $x^* \in (x_1, x_2)$ یـا $x^* \in (f(y_1), f(y_2))$ وي. دا به وښیو چې x^* هم د f ذ رنج یوه نقطه ده. په حقیقت کې د وسطي قیمت د قضیې له مخې ویلای شو چې شتون لري $y^* \in J$ داسې چـې $f(y^*) = x^*$ دی.

اوس دا ښیو چې د $x^* = f(y^*)$ حل یوازې یو حل دی چې د هر $x^* \in I$ لپاره په J کـې شامل دی . په حقیقت کې که په J کې د y^* او y^{**} لپـاره $f(y^{**}) = f(y^*) = x^*$ وي مـونږ باید ولروچې $y^{**} = y^*$ ځکه چې د f تابع پر J متزایده ده ; که چیرې $y^* < y^{**}$ وي پـس: $f(y^*) < f(y^{**})$ او که $y^{**} < y^*$ وي $f(y^{**}) < f(y^*)$ په لاس راځي.



(5) شکل.

اوس دا مناسب بولو چې د f د معکوسې تابع f^{-1} په باب خبرې وکړو . (کولای شئ په ډیرې اسانۍ دا وښیئ چې f^{-1} متزایده ده).



(6) شکل.

د f^{-1} تابع متمادیت څه نا څه نور ایجابوي . مونږ دا حالت په نظر کې نیسو چې د a یوه نقطه د I په داخل کې (دغه ټاکل په یوه مشابه متود د I په یوې انجامي نقطې کې چې په I کې شامله وي د یو اړخیز متمادیت څخه بحث کوي).

قبلوو چې $c=f^{-1}(a)$وي څکه چې $a=f(c)$ دی. فرضاً $\varepsilon>0$ په سره سینه یوه سهوه ده. (شکل6) ته په کتنه ، قبلوو چې $a_2=f(c+\varepsilon)\wedge a_1=f(c-\varepsilon)$ دي . پس:

$f^{-1}(a_1)=c-\varepsilon$ او $f^{-1}(a_2)=c+\varepsilon$. څرنګه چې f متزایده ده همدارنګه f^{-1} هم .

بنا پر دې ، که $a_1<x<a_2$ وي.

$$c-\varepsilon=f^{-1}(a_1)<f^{-1}(x)<f^{-1}(a_2)=c+\varepsilon$$

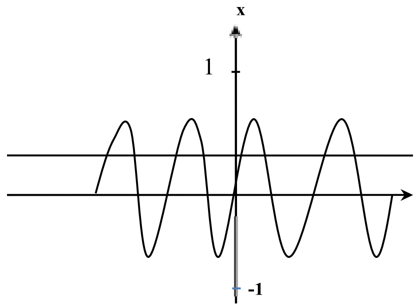
که δ د $|a-a_1|$ او $|a-a_2|$اصغري قیمت په پام کې ونیسو . پس:

$$|x-a|<\delta\Rightarrow x\in(a_1,a_2)\Rightarrow c-\varepsilon<f^{-1}(x)<c+\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|f^{-1}(x)-c\right|=\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right|<\varepsilon$$

اخرنۍ لیکنه د f^{-1} تابع د متمادیت اساس ټینګوي.

2.4.2 مثلثاتي معکوسې توابع

په ټاکلي محدودیت د ساین ، کوساین او تانجانت توابعو لپاره چې د ریاضي مهمې او خاصې توابع دي، معکوسې توابع یې څیړو .



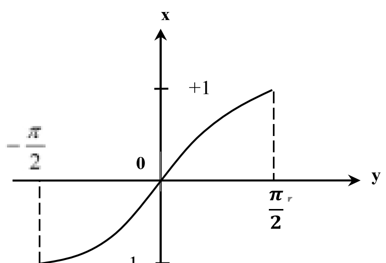
(7) شکل: د $x = \sin(y)$ گراف په افقي خط امتحان شوی دی.

راځئ چې لومړی د ساین په تابع پیل وکړو.

د x=siny معادله $x \in [-1\ ,1]$ لپاره د بې شمیره حلونو لرونکې ده . په حقیقت کې $y < x = \sin(y)$ معادلې یو حل وي ، پس $y + 2n\pi$ د $n = \pm 1, \pm 2, ...$ لپاره هم د نوموړې معادلې حلونه دي ځکه چې ساین د 2π په پریود یوه پریودیکي تابع ده او:

$$\sin(y + 2n\pi) = \sin(y) = x.$$

د ساین گراف د افقي موازي امتحان له مخې لیدل کیږي چې له یو څخه زیات له مستقیم سره قطع کوي چې له شکل(7) څخه څرگند ېږي ، په دې ډول د ساین تابع په عمومي ډول د معکوسې تابع لرونکې نه ده. راځئ چې د ساین تابع په $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ انتروال کې وڅیړو.

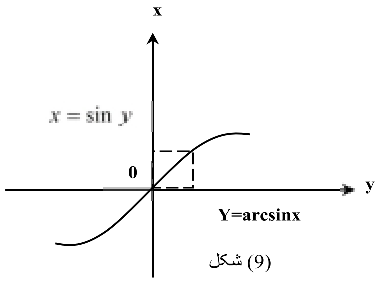


(8)**شکل** : د $x = f(y) = \sin(y)$ پر $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

د $x = f(y) = \sin(y)$ تابع د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ پر انتـــروال متزايـــده او رنـــج يـــې د $[-1\,,\,1]$ انتروال دی. چې شکل(8) د نوموړي حقيقت وضاحت کوي. د 1.4.2 قضيې له مخې ، د f معکوسه تابع f^{-1} موجوده او پر $[-1\,,\,1]$ متمادي ده . لرو چې :

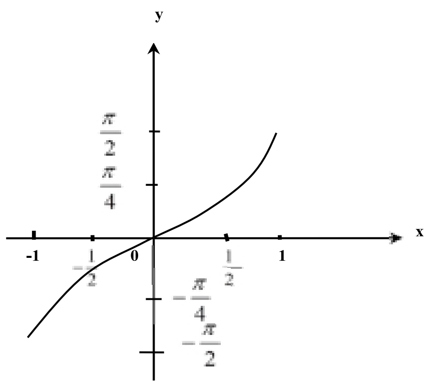
$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y);\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \wedge -1 \le x \le 1$$

کولای شئ $y = \arcsin(x)$ کې y (په راديان) هغه يوازينۍ زاويـــه د $-\frac{\pi}{2}$ او $\frac{\pi}{2}$ تـــرمنځ فرض کړئ چې sin(y)=x وي . شکل(۹)د arcsin تعريف واضح کوي.



(9) شکل

(10) شکل د y=arcsinx ګراف رابنيي . نوموړی ګراف نظر مبـــداء تـــه متنـــاظر دی او arcsine يوه تاقه تابع ده . د arcsin(x) بله بنودنه $\sin^{-1} x$ ده . چې هغه به $\frac{1}{\sin x}$ په پام کې نه نيسو . د يوشمير قيمتونو لپاره کولای شو arcsine په لاس راوړو.



(10) شکل : y=arcsinx

3.4.2 مثال معلوم کړئ:

a. arcsin(1) .b arcsin(−1/2).

حل

a په پام کې نیسو:

$$\arcsin(1) := y \Leftrightarrow \sin(y) = 1 \wedge -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

دا چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې ساین 1 دی پس: $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

b. لروچې. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow \sin y = -\frac{1}{2} \wedge -\frac{\pi}{6} \le y \le \frac{\pi}{6}$

څرنګه چې د $-\frac{\pi}{6}$ رادیان زاویې ساین 1/2− دی پس:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

کمپیوتري الجبري سیستم کولای شي د arcsine درست قیمتونه که ممکن وي بشپړکړي، لکه په 3.4.2 بیلګه کې په هر حالت ، arcsine په توابعوکې د محاسبوي ګټو لپاره یو جوړښت دی او په دې چوړښت اکثراً کولای شو تقریبي قیمتونه حاصل کړو.

4.4.2 مثال د ټولو په ګټه د محاسبې په کومک لاندې د arcsine قیمتونه (تر 6 رقمو اعشاریې پورې) په تقریبي ډول په لاس راوړئ:

$$a: \arcsin e\left(\frac{1}{4}\right). \quad b: \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right).$$

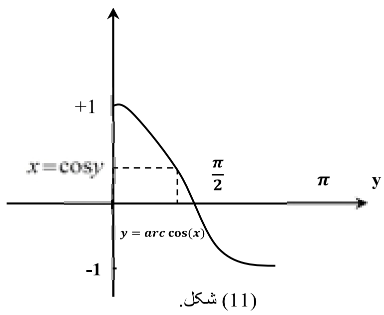
حل

لروچې:

$$a.\ \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \cong 0,252680. \quad b.\ \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \cong 0,339837$$

یوازې د ساین په حالت کې ، نه شو کولای د کوساین پریودیکي تابع معکوسه پیدا کړو. د بلې خوا، د کوساین تابع متمادي او پر $[0,\pi]$ یو نواخت متناقصه ده ، له همدې امله د کوساین تابع په $[0,\pi]$ انتروال کې محدوده او د معکوسې تابع لرونکې ده. هغه په arc arccosine ښیو او په پام کې نیسو: $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$

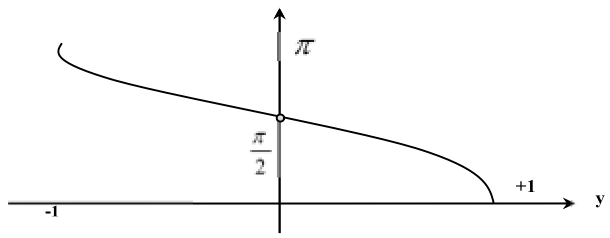
داسې چې $-1 \le x \le 1$ او $0 \le y \le \pi$.



(11) شکل.

په دې ډول په $x \in [-1,1]$ کې د arccosine قیمت د x=cos(y) معادلې یوازینی حل په $[0,\pi]$ انتروال کې y دی .شکل(11) د arccosine تعریف واضح کوي .

د 1.4.2 قضیې څخه په استفاده ،د arccosine تابع پر $[-1,1]$ متمادي ده .



(12) شکل.

د arccos(x) یوه بله بڼودنه $\cos^{-1}(x)$ ده چې هغه باید د $\frac{1}{\cos x}$ سره مغالطه نه کړو.

شکل(12)د arccosine گراف رابڼيي.

د arccosine څنې قیمتونه دقیق په لاس راځي او یو شمیر یې د محاسبوي الجبري سیستم په ذریعه حاصلیږي. د بلې خوا arccosine په توابعو کې د گټورې محاسبې یو جوړښت دی او په دې جوړښت اکثره تقریبیي محاسبې تر سره کولای شو.

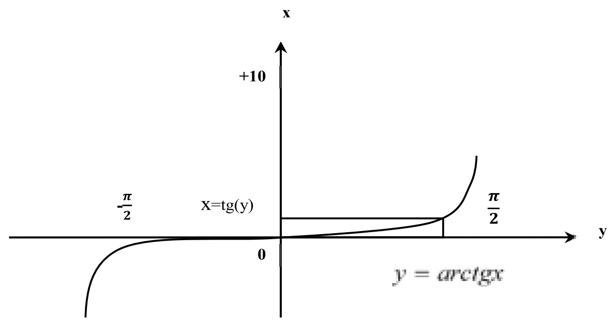
1.4.2 تبصره

د arcsine او arccosine توابع په یوه ساده متود یوه په بلې پورې مربوطې دي. هغه کولای شو دارنگه وښیو چې:

$$\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2};-1\le x\le 1$$

د تانجانت تابع د π په پریود یوه پریودیکي تابع ، رنج یې د اعدادو ټول محور دی. بنا پر دې د x=tg(y) معادله د $x \in \mathbb{R}$ لپاره بې شمیره زیات حلونه لري نو ځکه د تانجانت معکوسه تابع شتون نه لري . د بلې خوا د تانجانت تابع پر $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ محدوده ، متمادي او متزایده ده چې رنج یې د $\mathbb{R}$ سره مساوي دی نو ځکه پر $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ هغه د یوې معکوسې تابع لرونکې ده او د اعدادو پر محور متمادي ده هغه په arctgx ښیو ، په دې ډول:

$$y = arctg(x) \Leftrightarrow x = tg(y)$$

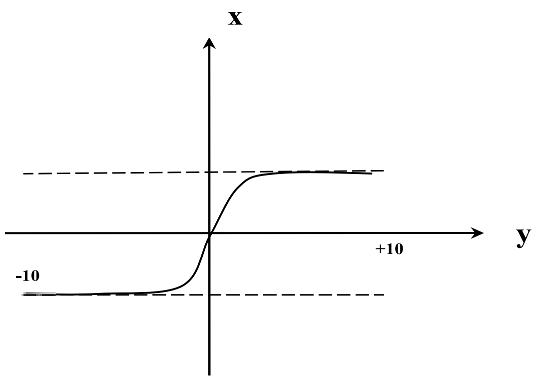


(13) شکل.

داسې چې x یو اختیاري حقیقي عدد او $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ دی. ددې اجازه لرئ چې y د $-\frac{\pi}{2}$ او $\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوازینی زاویه او x=tg(y) په پام کې ونیسئ . شکل(12) د arctgant تعریف واضح کوي. د arctg(x) بل ډول لیکنه $tg^{-1}x$ ده.او هغه باید د $\frac{1}{tgx}$ سره مغالطه نه کړو.

(14) شکل د arctangent گراف رابښيي.د arctangentگراف نظر مبدا ته متناظر دی.لکه چې وینود argtangent تابع تاقه ده. لرو چې:

$$\lim_{x\to+\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2} \wedge \lim_{x\to-\infty} arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$$



(14) شکل.

موازي له دې حقیقتونو سره لاندې حقایق هم لرو:

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty \wedge \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty.$$

5.4.2 مثال a. arctg(−1) د پلټنې له مخې معلوم کړئ.

b. $arctg(\frac{1}{2})$ د کمپيوټري محاسبې په کومک په تقريبي ډول معلوم کړئ.

حل

a:- کولای شو حاصل کړو:

$$a.\quad y := arctg(-1) \Leftrightarrow tgy = -1 \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

يوازنی دا ډول زاويه y مساوي $\frac{\pi}{4}$ – ده. بنا پردې:

$$arctg(-1) = \frac{\pi}{4}.$$

b. لرو چې :

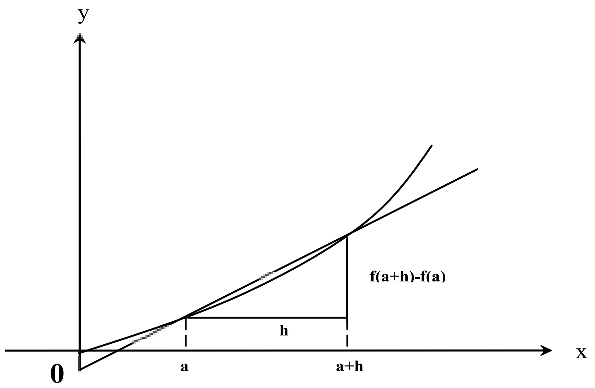
$$arctg\left(\frac{1}{2}\right) \cong 0,463648....$$

دریم څپرکی Chapter 3

مشتق The Derivative

1.3 مشتق او موضعي خطي تقریب

1.1.3 د مشتق تعریف فرضوو چې f(x) په یوه خلاص انتروال کې چې د a **نقطه** په کې شامله ده د هر x لپاره تعریف شوې ده.



(1) شکل: یو قاطع خط.

که $h \neq 0$ او د $|h|$ په کافي اندازه کوچنې قیمت لپاره f(a+h) تعریف شوې وي. د $\overline{AB}$ قاطع خط میل کوم چې د A(a,f(a)) او B(a+h , f(a+h)) له نقطو څخه تیریږي عبارت دی له:

$$tg\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

که چیرې $|h|$ ډیر کوچنی ($h \to 0$) شي یعنې د B نقطه د A نقطې ته نژدې شي نو قاطع خط د f تابع پر گراف د A(a,f(a)) په نقطه کې مماس او ددې مماس میل د f تابع پر گراف عبارت دی له:

$$\lim_{\alpha \to \beta} tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اوس نو د تابع د گراف په یوه نقطه کې د مماس د میل له مفهوم څخه د مشتق مفهوم په لاندې ډول تعریفوو:

1.1.3 تعریف فرضوو چې د f(x) تابع په یو خلاص انتروال کې چې د a نقطه په کې شامله ده د هر x لپاره تعریف شوې ده. د f تابع مشتق په aکې عبارت دی له :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

په دې گومارلو چې دغه لمیت شتون لري.

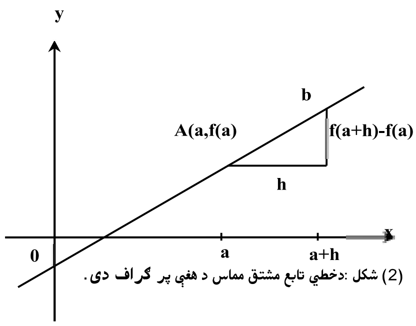
یا دونه کوو چې د f تابع مشتق په a کې $f'(a)$ عبارت دی له :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

په دې ډول : کولای شو $f'(a)$ د f تابع پر گراف د (a, f(a)) په نقطه کې د مماس میل تعبیر کړو.

که د $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نسبت ته مراجعه وکړو دغه نسبت لکه د یو تفاضل خارج قسمت دی ، ځکه f(a+h)−f(a) د f تفاضل دی په a+h او a کې او h تفاضل په منځ د a+h او a کې دی. په گرافیکي ډول دغه خارج قسمت دیو قاطع خط میل تعبیروو.

1.1.3 مثال فرضوو چې f یوه خطي تابع ده د f(x)=mx+b په شکل ، داسې چې m او b ثابت عددونه وي. د f تابع گراف د m په میل یو مستقیم خط دی. بنا پر دې باید ولرو چې $f'(a)=m$ دی په هر a کې.



(2) شکل :دخطي تابع مشتق مماس د هغې پر گراف دی.

په دې ډول کولای شو په لاس راوړو:

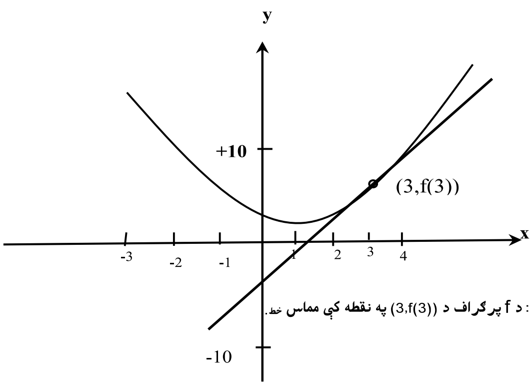
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m(a+h)+b-(ma+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=m.$$

2.1.3 مثال فرضوو چې $f(x)=x^2-2x+4$ ده. مشتق د f په a=4 کې معلوم کړئ . او د f د ګراف په ((3 ,f(3)) نقطه کې د مماس معادله پیدا کړئ.

حل

په دې اړه مو زون خارج قسمت عبارت دی له :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\left((3+h)^2-2(2+h)+4\right)-7}{h}=\frac{7+4h+h^2-7}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h.$$



(3) شکل : د f پرګراف د ((3,f(3)) په نقطه کې مماس خط.

بنا پر دې:

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

.

په دې ډول ، د ((3 , f(3)) په نقطه کې د f پر ګراف د مماس میل 4 دی. مماس خط په نوموړې نقطه کې د لاندې معادلې ګراف دی.

$$y=f(3)+f'(3)(x-3)=7+4(x-3)=4x-5$$

(3) شکل د f تابع ګراف او پر هغې د ((3 , f(3)) په نقطه کې د مماس ګراف رابنيي.

1.1.3 تبصره که a+h:=x یعنې h=x−a قبول کړو ، کله چې h صفر ته نژدې شي، x و a ته نژدې کيږي . بنا پردې حاصلوو:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2.1.3 تعریف وایو چې د f یوه تابع دa په یوې نقطې کې مشتق منونکې ده که مشتق د fپه a کې شتون ولري.

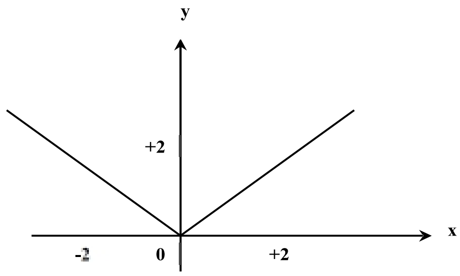
دا ضرور نه ده چې که تابع په یوه نقطه کې متمادي وي په هغې نقطې کې دې مشتق منونکې وي. لکه په لاندې مثال کې:

3.1.3 مثال قبلوو چې $f(x)=|x|$ راکړ شوې ده. وښیئ چې f په x=0 مشتق منونکې نه ده.

حل

یادونه کوو چې f په x=0 کې متمادي ده ، ځکه چې:

$$\lim_{h\to 0} f(h)=\lim_{h\to 0}|h| = 0 = f(0)$$



(4) شکل : دمطلقه قیمت تابع په صفرکې مشتق مننونکې نه ده.

په لاس راځي . (4) شکل د f تابع ګراف راښیي.

لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(-\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=-1.$$

بنا پر دې $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ شتون نه لري ، پس f په x=0 کې مشتق منونکې نه ده.

یوه بله بیلګه د متمادیت بې له مشتق قبلولو څخه په پام کې نیسو.

4.1.3 مثال قبلوو چې $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ راکړ شوې ده . وښیئ چې f په x=0 کې مشتق منونکې نه ده.

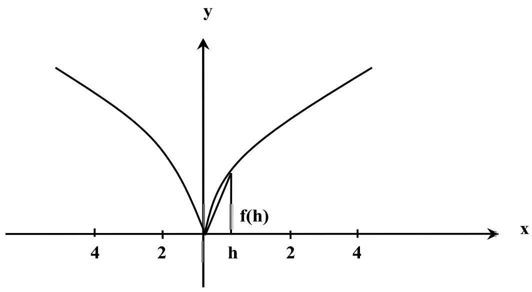
حل

په دې اړه مو زون خارج قسمت عبارت دی له:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)}{h}=\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}.$$

بنا پر دې:

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n^{\frac{1}{3}}.$$



(5) شـــــــکل : کله چې h صفر ته نیژدې شي قاطع د مماس حالت غوره کوي.

د $\{n^{\frac{1}{3}}\}$ ترادف لمیټ نه لري، بنا پر دې f په 0 کې مشتق منونکې نه ده . په ګرافیکي ډول هغه قاطع خط چې د (0,0)0 او $(h, f(h))$ له نقطو څخه تیر شوی په بیړه بیړه د ښي خوا څخه چپې خوا ته راځي کله چې h صفر ته نژدې کیږي . لکه چې په(5) شکل کې واضح شوي دي.

څرنګه چې له متمادیت څخه د مشتق نیولو پایله په لاس نه راځي ویلای شو چې له مشتق منلو څخه د متمادیت پایله په لاس راوړ لای شو.

1.1.3 مسله فرضوو د f تابع په a کې مشتق منونکې ده. پس f په a کې متمادي ده .

ثبوت

لرو چې :

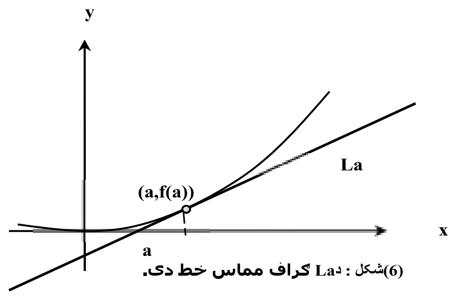
$$f(a+h)-f(a)=\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)h$$
$$f(a+h)=f(a)+\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)h$$
$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(a)+\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)h\right)$$
$$=f(a)+\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0} h=f(a)+f'(a)\cdot 0=f(a)$$

څرنګه چې $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$ حاصل شو نو د f تابع په a کې متمادي ده.

2.1.3 موضعي خطي تقريب د f تابع داسې راکړ شوې چې د a په نقطه کې مشتق منونکې ده. د f تابع پر ګراف د (a , f(a)) په نقطه کې مماس خط د

$y=f(a)+f'(a)(x-a)$

معادلې له ګراف څخه عبارت دی. تر لاس لاندې خطي تابع په يوه نامه يادوو داسې چې :



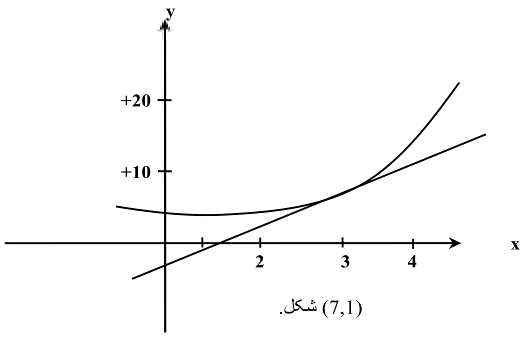
(6)شکل : دLa ګراف مماس خط دی.

3.1.3 تعريف پر f تابع د a په قاعده خطي تقريب عبارت دی له:

$$L_a(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

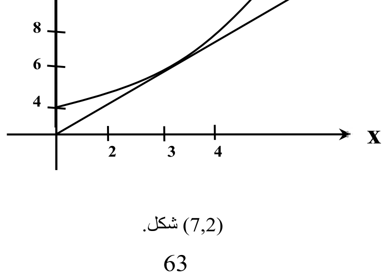
a ته د اساسي يابنستيزې نقطې نسبت ورکوو. شکل(6) ووينئ.

5.1.3 مثال قبلو وچې لکه په 2.1.3 بیلګه کې $f(x)=x^2-2x+4$ راکړ شوې ده. ومو ښودل چې $f'(3)$ او په $f(3,f(3))$ کې پر f تابع د مماس خط ګراف د
$y=f(3)+f'(3)(x-3)=4x-5$
معادلې ګراف دی. په دې ډول، د f پر تابع د 3 په قاعده خطي تقریب عبارت دی له :
$L_3(x)=f(3)+f'(3)(x-3)=7+4(\bar{x}-3):=4x-5.$
(1-7)،(2-7)،(3-7) شکلونه د $(3,f(3))=(3\ ,7)$ نقطې په دواړو خواو د خط السیر مفهوم واضح کوي .

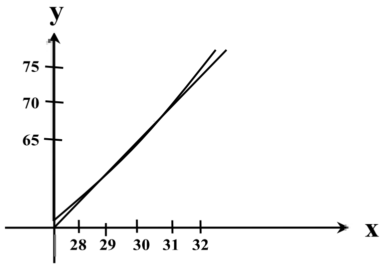


(7,1) شکل.

یادونه کوو چې مونږ به په سختۍ سره په (3-7) شکل د f تابع د ګراف او L_3 تـــر مـــنځ توپیر پیدا کړو. نوموړی حالت دارابنیي چې که x په 3 پورې وتړل شي $L_3(x)$ تقریبـــاً f(x) دی. دبلې خوا مونږ دا توقع نه شو درلودلای چې $L_3(x)$ تقریباً f(x) دی کله چې x له 3 څخه لیرې وي.
د L_3 خطي تابع له (موضعي تقریب) څخه عبارت ده.



(7,2) شکل.



(7,3) شکل.

2.1.3 تبصره

څرنګه چې د f یوې تابع ګراف او د f پر ګراف د ((a , f(a)) په نقطه کې د پر هغې مماس ته د ((a , f(a)) په نژدې خواو کې په ډیرې سختۍ توپیر ورکوو ، د ((a , f(a)) په نقطه کې به د f تابع پر ګراف میل ، په دې نقطه کې د مماس خط میل $f'(a)$ تشخیص کړو. راځئ په دې کوشش وکړو چې که f(x) په $L_3(x)$ عوض کړو په الجبري ډول به پـه دې تقریب کې اشتباه څومره وي. څرنګه چې توقع مو درلوده $L_3(x)$ یو ښه تقریب دی f ته کله چې x و 3 ته نژدې وي ، په آسانۍ سره کولای شو x=3+h په پام کې ونیسو ، پـه دې ډول h=x−3 د x توپیر د اساسي نقطې 3 څخه رابښيي . لرو چې:

$$L_3(3+h)=7+4(x-3)\big|_{x=3+h}=7+4h\ .$$

بنا پر دې:

$$f(3+h)-L_3(3+h)=(3+h)^2-2(3+h)+4-(7+4h)=h^2$$

په دې ډول ، مطلقه اشتباه عبارت ده له:

$$\left|f(3+h)-L_3(3+h)\right|=h^2$$

باید ذکر کړو چې که $|h|$کوچنې وي نسبت هغې ته h^2 ډیر کوچنی دی. د مثـال پـه ډول $\left(10^{-2}\right)^2=10^{-4}$ او $\left(10^{-3}\right)^2=10^{-6}$. په دې ډول مطلقه اشتباه د f(x) تقریب په $L_3(x)$ کې ډیره کمه ده نسبت فاصلې د x له 3 څخه، که چېرې x په 3 پر یوزي. دغه عددي حقیقـت زمونږ په ګرافیکي مشاهدې پورې اړه لري، 5.1.3 بیلګه لاندې عمومي حقیقـت واضـح کوي.

1.1.3 قضیه فرضوو چې f په a کې مشتق منونکې ده ، او د a په قاعده L_a د f خطي تقریب وي. لرو چې: $f(a+h)=L_a(a+h)+h\cdot Q_a(h)$ دی که $\lim_{h\to 0}Q_a(h)=0$ وي.

ثبوت

لروچې: $L_a(a+h)=f(a)+f'(a)(x-a)\big|_{x-a=h}=f(a)+f'(a)h$

بنا پر دي:

$$f(a+h)-L_a(a+h)=f(a+h)-\left(f(a)+f'(a)h\right)=f(a+h)-f(a)-f'(a)h=$$
$$=h\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)$$

راځئ چې $Q_a(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$ قبول کړو پس:

$$h\cdot Q_a(h)=f(a+h)-L_a(a+h)$$

بنا پر دې:

$$f(a+h)=L_a(a+h)+h\cdot Q_a(h).$$

په دې ډول ، $hQ_a(h)$ افاده هغه اشتباه رابښيي چې د f(a+h) تقريب د a په قاعده د مربوطه خطي تقريب په قيمت ښودل کيږي. بايد ذکړ کړو چې $Q_a(h)$ د مناسب تفاضل د خارج قسمت او $f'(a)$ تر منځ تفاضل رابښيي ځکه چې د مناسب تفاضل خارج قسمت کله چې h صفر ته نږدې شي $f'(a)$ ته نږدې کيږي.

$$\lim_{h\to 0}Q_a(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right)=0$$

3.1.3 تبصره څرنګه چې :

$$\left|f(a+h)-L_a(a+h)\right|=\left|hQ_a(h)\right|=|h|\left|Q_a(h)\right|.$$

او $\lim\limits_{h\to 0}Q_a(h)=0$ دی، د $L_a(x)$ په واسطه د f(x) په تقريب کې اشتباه ډيره کوچنۍ ده نسبت هغې فاصلې ته چې د x او a ترمنځ ده. بنا پر دې ، په سختۍ سره کولای شو د f(x) تابع د ګراف او د f پر ګراف د (a , f(a)) په نقطه کې د مماس ترمنځ توپير پيدا کړو کله چې د نظر وړ پايله کوچنۍ وي.

6.2.4 مثال $f(x)=x^3$ راکړ شوې ده.

a. $f'(2)$ معلوم کړئ. b. L_2 معلوم کړئ ، خطي تقريب په f د 2 په قاعده.

c. $Q_2(h)$ معلوم کړئ ، داسې چې : $f(2+h)=L_2(2+h)+hQ_2(h)$ وي.

d. د $h=-10^{-n}$ لپاره f(2+h) او $L_2(2+h)$ محاسبه کړئ $(n=1,2,3,....)$ ، $\left|f(2+h)-L_2(2+h)\right|$ د $|h|$ سره مقايسه کړئ.

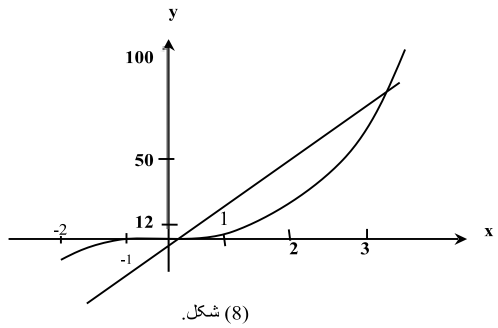
حل

a. د موزون تفاضل خارج قسمت عبارت دی له:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(12+6h+h^2\right)=12$$

.b
$$L_2(x)=f(2)+f'(2)(x-2)=8+12(x-2)$$

د L_2 گراف د f پر گراف د (8 , 2) په نقطه کې له مماس خط څخه عبارت دی لکه څنګه چې په (8) شکل کې واضح دی.



(8) شکل.

c. د 1.1.3 قضیې له مخې لرو چې.
$$f(2+h)-L_2(2+h)=hQ_2(h)$$

داسې چې :
$$Q_2(h)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-f'(2).$$

په دې ډول:

$$Q_2(h)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-f'(2)=\left(12+6h+h^2\right)-12=6h+h^2$$

بنا پر دې :
$$\lim_{h\to 0}Q_2(h)=\lim_{h\to 0}Q_2\left(6h+h^2\right)=0$$

باید ذکر کړو چې اشتباه عبارت ده له:

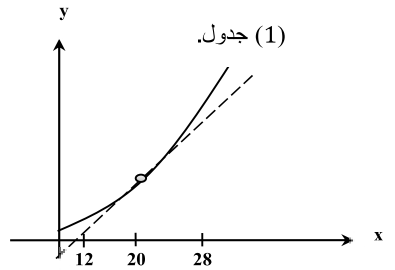
$$f(2+h)-L_2(2+h)=h\cdot Q_2(h)=h\left(6h+h^2\right)=6h^2+h^3\cong 6h^2$$

که $|h|$ کوچنی وي، ځکه چې $|h|^3$ ډیر کوچنی دی نسبت h^2 ته.

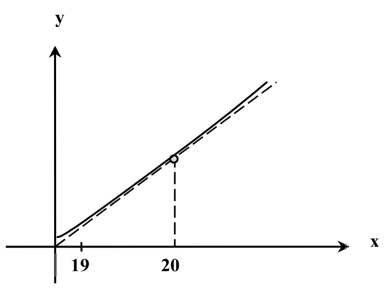
d. لاندې جدول مطلوب معلومات واضح کوي (د توابعو قیمتونه تر شپږو اعشاري رقمونو پورې تخلیص شوي، او مطلقه اشتباه تر دوه اعشاري رقمونو پورې).

h	$f(2+h)$	$L_2(2+h)$	$f(2+h)-L_2(2+h)$
-10^{-1}	6,859	6,8	6×10^{-2}
-10^{-2}	7,88060	7,88	6×10^{-4}
-10^{-3}	7,98801	7,988	6×10^{-6}

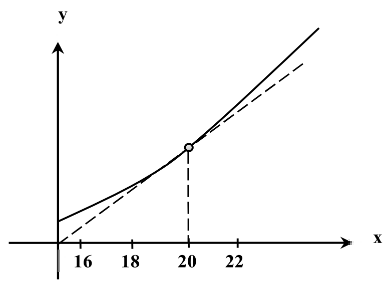
(1) جدول.



(9,1) شکل.



(9,3) شکل.



(9,2) شکل.

وینو چې $|f(2+h)-L_2(2+h)|$ د h د ټولو قیمتونو لپاره نسبت $|h|$ ته ډیر کوچنی دی . په حقیقت کې وینو هغه اعداد چې مشاهده کیږي په هغوی کې که $|h|$ کوچنی وي اشــتباه د $6h^2$ سره د مقایسې وړ ده. د 6.1.3 بیلګې له مخې شــکل(9)د (2,8)=((2)f , 2) نقطــې د واړه خواو ته د تیریدو حقیقت څرګند وي.

وینو چې د f تابع ګراف او مماس خط یعنې د L_2 ګراف په سختئ سره د تــوپیر قابلیــت لري . دا حقیقیت د شکل(9) یو بل پسې شکل له مخې تنظیمولای شو. دا ددې حقیقت کله چې x په اساسي نقطې (2) پر یوزي د f(x) تقریب په L_2(x) ، یو د عالي دقت تطبیقــول

دي، او د تشخیص وړ میل د f ګراف په ((2)f , 2) نقطه کې د مماس میل سره په ((2)f , 2) کې برابر دی . دا د یوې اختیاري f تابع لپاره یو خا ځانګړیتوب دی چې هغه د a په نقطه کې مشتق منونکې ده.

که L_a په a کې f ته یو خطي تقریب وي ، دا مونږ ته L_a خطي تقریب بدلون د قیمت تعریفوي لکه :

$$\frac{L_a(a+h)-L_a(a)}{h}=f'(a)$$

دا کټ مټ لکه د ((a)f , a) په نقطه کې د مماس د میل په شان دی. که L_a د a په قاعده f ته یو درست خطي تقریب وي، په دواړو عددي او ګرافیکي ډولونو ، دا پـه a کـې د f د تغیر قیمت د L_a د تغیر له مخې تعینوي، یعنې په a کې د f د مشتق له مخې د تفاضل خارج قسمت:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{x}=\frac{\text{تغیر یا بدلون په (x)f کې}}{\text{تغیر په x کې}}$$

ته راجع کیږي د (x)f د تغیر اوسط قیمت ته د x پورې مربوط له a څخه a+h ته .

داسې چې:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

او مونږ باید په a کې د f تغیر په $f'(a)$ تشخیص کړو. کولای شو ووایو چې د f تابع مشتق په a کې د f د تغیر د اوسط قیمت له لمیټ څخه عبارت دی کله چې د x تزاید صفر ته نژدې شي.

2.1.3 قضیه فرضوو چې (x)f د یو خلاص انټروال د هر x لپـاره چـې د a نقطه پکې شامله ده تعریف شوې ده. قبلوو چې $L(x)=f(a)+m(x-a)$ راکړ شـوې ، داسې چې L یوه خطي تابع ده چې د ګراف میل یـې m او د ((a)f , a) لـه نقطـې څخـه تیریږي . که $f(a+h)-L(a+h)=h\cdot Q_a(h)$

وي داسې چې $\lim_{h\to 0}Q_a(h)=0$ وي ، د f تابع په a کې مشتق منونکې ده او $f'(a)=m$ دې کله چې $L=L_a$ قبول کړو.

ثبوت

لرو چې : $L(a+h)=f(a)+mh$ دی. بنا پر دې:

$$f(a+h)-L(a+h)=f(a+h)-(f(a)+mh)=f(a+h)-f(a)-mh$$

په دې ډول :

$$(f(a+h)-f(a))-mh=hQ_a(h)$$

له دې ځایه:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-mh=Q_a(h)$$

بنا پر دې :
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-m\right)=\lim_{h\to 0}Q_a(h)=0$$

په دې ډول د غوښتنې مطابق حاصلوو:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m$$

بنا پر دې:
$$L(x)=f(a)+m(x-a)=f(a)+f'(a)(x-a)=L_a(x).$$

2.3 مشتق لکه یوه تابع، او دیفر نسیل

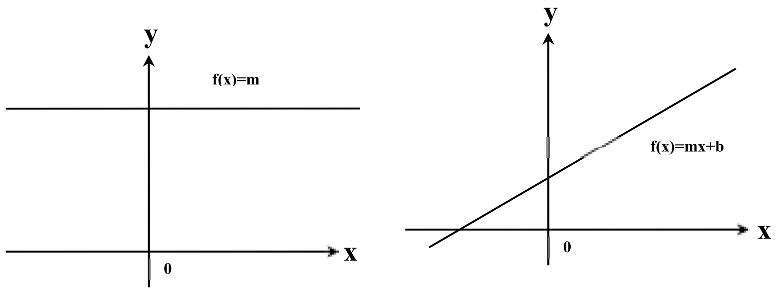
په دې برخه کې د یوې تابع د مشتق اړیکه له هغې نقطې سره چې د مشتق قیمت په کې ټاکل کیږي په نظر کې نیسو او هغې ته د مشتق تابع وایي . د مشتق تابع پــه پیژنــد گلوۍ به مونږ ددې قابل شو چې د موضعي خطي تقریبونو په ذریعه د دیفرنســیل پــه مفهوم ځان پوه کړو . همدارنگه به د مشتق لپاره د لبنیز ښودنه مغرفي کړو. وبه وینــۍ چې د لبنیز ښودنه به په ډیرې اسانۍ یو لړ بیانیې مشخصې کړي.

1.2.3 مشتق لکه یوه تابع که x د f مستقل متحول وي، طبیعــي ده چــې هغې ته د اساسي نقطې متحول هم وایي په کومې کې چې مشتق محاسبه کیــږي . پــه دې ډول:
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

مونږ له x څخه د لمیټ په ټاکنه او شتون کې بحث کوو. کولای شئ h لکــه یــو محــرک (فعال) متحول په پام کې ونیسئ.

1.2.3 تعریف د f تابع مربوط د مشتق تابع دومین د x ټول هغه قیمتونه دي. چې f په کې مشتق منونکې وي. د مشتق تابع قیمت په x کې $f'(x)$ دی.مونږ د f مربوط د مشتق تابع په $f'(x)$ ښیو. تاسې کولای شئ $f'(x)$ داسې ولولۍ (مشتق د (f(x)) یا (مشتق د f په x کې). په گرافیکي ډول د مشتق تابع f' قیمت په x کې عبـــــــارت دی له میل د مماس څخه د ((x , f(x)) په نقطه کې . په دې ډول د مشتق تابع f' مونږ ددې وړ گرزوي دا درک کړو چې د f تابع د گراف میل په اساسي نقطه کې د نورو متفاوتو نقطــو څخــه متغیر دی . معمولاً مونږ د (مشتق د f) پر ځای (د f مربوط د مشتق تابع)وایو.

1.2.3 مثال قبلوو چې f(x)=mx+b يوه خطي تابع راکړ شوې داسې چــې m او b ثوابت دي. د 1.3 برخې په اول مثال کې مونږ وښودل چــې پــه هــر $a \in \mathbb{R}$ کــې $f'(a)=m$ دی. که a په x عوض کړو



(1) شکل: د خطي تابع مشتق دمماس ميل د هغې پر گراف دی.

وبه لرو چې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره $f'(x)=m$ دی.

په دې ډول، د يوې خطي تابع مشتق يوه ثابته تابع ده چې قيمت يې د مستقيم خط د ميل څخه عبارت دی.په خصوصي حالت کې که f يوه ثابته تابع وي نو $f'(x)=0$ دی .

2.2.3 مثال قبلوو چې $f(x)=x^2$ راکړ شوې ده د f' تابع معلومه کړئ.

حل

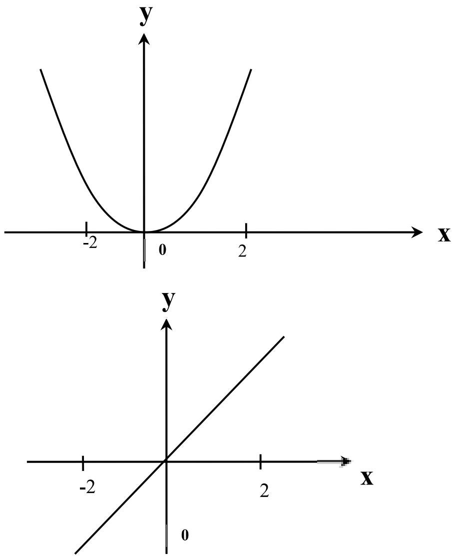
که x پر عددي محور يوه اختياري نقطه او $h \neq 0$ وي نو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

بنا پر دې:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

په دې ډول ، د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره $f'(x)=2x$ دی. وينو چې د ***f***يوې دوهمې درجې تابع مشتق يوه خطي تابع ده. د ***f*** او f' گراف په شکل(2)کې وينو . دا بايد ذکر کړو چې د*f* تابع د گراف ميل د ((x , f(x)) په نقطه کې منفي دی که $x<0$ وي او مثبت دی که $x>0$ وي.



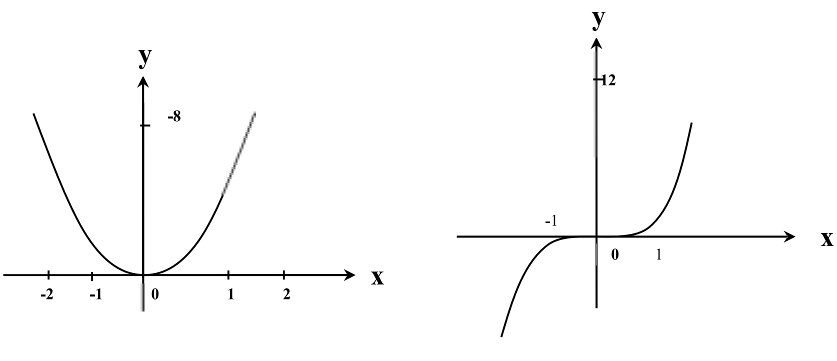
(2)شکل: $f(x) = x^2$ او $f'(x) = 2x$.

3.2.3 مثال فرضوو چې $f(x)=x^3$ ده . f' معلومه کړئ.

حل

که x د اعدادو پر محور یوه اختیاري نقطه او $h \neq 0$ وي،

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$



(3) شکل: $f(x) = x^3$ او $f'(x) = 3x^2$

بنا پر دې:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

په دې ډول ، د f مربوط د مشتق تابع یوه دوهمه درجه تابع ده چې $3x^2$ تعریف شوې ده .
(3) شکل د f او f' گرافونه راښیي . باید ذکر کړو چې د f پر گراف د ((x , f(x)) په نقطه کې د $x\neq0$ لپاره میل مثبت دی، او میل صفر دی که x=0 وي.

4.2.3 مثال قبلووچې f یوه د مطلقه قیمت تابع ، د هر $x\in\mathbb{R}$ لپاره $f(x)=|x|$ راکړ شوې ده. f' پیدا کړئ(په خاص ډول f' مشخص کړئ).

حل

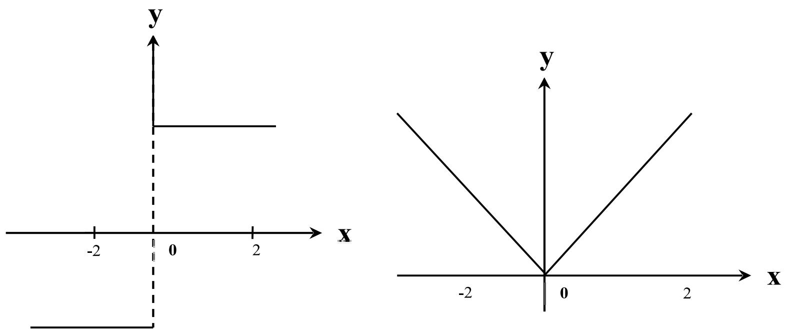
په 3.1.3 مثال کې مو وښودل چې f په x=0 کې مشتق منونکې نه ده .
قبلوو چې $x>0$ دی. پس x+h هم مثبت دی که $|h|$ په کافي اندازه کوچنی وي.
بنا پر دې:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}=1$$

(که $x>0$ او د $|h|$ په کافي اندازه کوچني قیمت لپاره $x+h>0$ وي یعنې $|x+h|=x+h$ وي).
که $x<0$ وي د $|h|$ په کافي اندازه کوچني عدد لپاره $x+h<0$ او $|x+h|=(x+h)$ وي لرو چې :

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h}=-1$$

په دې ډول : $f'(x)=\begin{cases}1 & if\ \ x>0\\ -1 & if\ \ x<0\end{cases}$ دی.
شکل(4)د f او f' گرافونه راښیي . د ((x , f(x)) په نقطه کې د f د گراف میل 1+ دی که x > 0 وي او 1− دی که x < 0 وي.



(4) شکل: د مطلقه قیمت تابع او د هغې مشتق.

2.2.3 ديفرنسيل The Differerntial

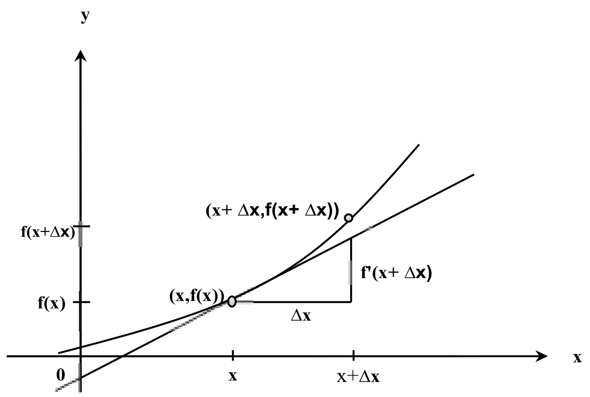
دا معموله ده په نظر کې ونیسو چې د یوې تابع ټول موضعي خطي تقریبونه په یوې اساسي نقطې کې لکه یو متحول په نظر کې نیسو. په دې حالت کې په ډیرې اسانۍ په تفاوتونو او هغه تغیر (یا تزاید) کار وکړو چې په څرګند ډول یې یادونه شوې ده. نظر د x محور په اوږدو تزاید که په Δx وښیو، پس:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cong f'(x)$$

که $|\Delta x|$ په کافي اندازه کوچنی وي ، په دې صورت کې:

$$f(x+\Delta x)-f(x) \cong f'(x)\Delta x$$

باید ذکر کړو چې $f'(x)\Delta x$ د Δx په تزاید پورې تړلی د f پر ګراف د ((x , f(x)) په نقطه کې د مماس خط پر اوږدو تغیر څخه عبارت دی، لکه په شکل (5) چې وینو.



(5) شکل: $f'(x)\Delta x$ و $f(x+\Delta x)-f(x)$ ته نژدې کیږي که چیرې $|\Delta x|$ کو چنی وي.

د $f'(x)\Delta x$ کمیت د x اساسي نقطې او Δx تزاید په دوو متحولو پورې اړه لري مونږ دې افادې ته یو خاص نوم ورکوو:

2.2.3 تعریف **د f تابع دیفرنسیل df د اساسي نقطې x په متحـــول او د Δx تزاید پورې اړه لري. که د Δx پورې اړوند د f تابع دیفرنسیل پـــه $df(x,\Delta x)$ وښـــیو ، کولای شو په پام کې ونیسو:**

$$df(x,\Delta x)=f'(x)\Delta x$$

په دې ډول که $|\Delta x|$ ډېر کوچنی وي لرو چې:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\cong df(x,\Delta x)$$

باید ذکر کړو چې د دیفرنسیل نظریه عیناً لکه د موضعي تقریب نظریه ده، لکـــه څنګـــه چې په 1.3 برخې کې مو پرې بحث وکړ. دیفرنسیل فقط دیوې تابع لپاره په اساسي نقطه کې د خطي تقریب درک کول دي. اساساً د اشتباه تحلیل عیناً لکه د تغیر یادونه ده.

1.2.3 قضیه **فرضوو چې f په x کې مشتق منونکې ده. پس:**

$$f(x+\Delta x)-f(x)=df\left(x\ ,\Delta x\right)+\Delta x\cdot Q_x(\Delta x).$$

داسې چې: $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)=0$ وي ($Q_x(\Delta x)$ یو بې نهایت کوچنی کمیت وي).

ثبوت

په پام کې نیسو:

$$Q_x(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x).$$

په دې ډول :

$$\Delta x\cdot Q_x(\Delta x)=f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x$$

بنا پر دې:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\Delta x\cdot Q_x(\Delta x)=df(x,\Delta x)+\Delta x Q_x(\Delta x)$$

لرو چې:

$$\lim Q_x(\Delta x)=\lim\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right)=0$$

دی. پس $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ په لاس راځي.

5.2.3 مثال قبلوو چې $f(x)=\sqrt{x}$ ده.

a. $f'(x)$ معلوم کړئ که $x>0$ وي. b. په تقریبي ډول $\sqrt{4,1}$ د دیفرنسیل په ذریعه پیدا کړئ .

حل

a. لکه چې مخکې مو ویلي وو، مونږ د f د مشتق لپاره لاندې د تفاضل نسبت په کار اچوو:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

بنا پردې د هر $x>0$ لپاره په لاس راځي:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b. د f دیفرنسیل عبارت دی له:

$$df(x,\Delta x)=f'(x)\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x=\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

دا طبیعي ده چې د $x=4$ او $\Delta x=0,1$ په قبلولو د $\sqrt{4,1}=f(4,1)$ تقریبي قیمت د $f(4)=\sqrt{4}2$ په نظر کې نیولو سره عبارت دی له:

$$\sqrt{4{,}1} = f(4{,}1) - f(4) \cong df(4\,, 0{,}1) = \frac{0{,}1}{2\sqrt{4}} = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025.$$

بنا پر دې:

$$\sqrt{4{,}1} = 2 + \left(\sqrt{4{,}1} - 2\right) \cong 2 + 0{,}025 = 2{,}025.$$

لرو چې: $\sqrt{4{,}1} \cong 2{,}02485$ دی تر 6 اعشاري رقمونو پورې ، او

$$\left|\sqrt{4{,}1} - 2{,}025\right| \cong 1{,}5 \times 10^{-4}$$

باید ذکر کړو چې $\sqrt{4{,}1}$ مطلقه اشتباه د دیفرنسیل په ذریعه نسبت $\Delta x = 0{,}1$ تــه ډیــره کوچنۍ ده ، لکه څنگه چې په 1.2.3 قضیه کې واضح شوي دي.

1.2.3 تبصره راځئ چې بیرته 1.2.3 قضیې ته راشو ، څرنگه چې:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = df(x, \Delta x) + \Delta x \cdot Q_x(\Delta x) = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot Q_x(\Delta x),$$

$\Delta x \cdot Q_x(\Delta x)$ د $f(x+\Delta x) - f(x)$ د اشتباه تقریب ده د $f'(x)\Delta x$ په واسطه . څرنگه چــې $\lim_{\Delta x \to 0} Q_x(\Delta x) = 0$ دی ، یادونه کوو چې ساحه (پراخوالی) د اشتباه نسبت $|\Delta x|$ ته ډیــره کوچنۍ ده که $|\Delta x|$ کوچنی وي . په دې ډول تقریب:

(تغیر په x کې) x (قیمت د تغیر د f په x کې) ≅ تقریب په f(x) کې

او تقریب ډیر دقیق دی که تغیر په x کې کوچنی وي.دا وایــو چــې د تغیــر د قیمــت تشخیص د مشتق پواسطه ډیره د باور وړ ده.

3.2.3 د لبنیز یادونه (ښودنه) The Liebniz Notation

نیوټن او لبنیز دواړه په گډه حساب پیژندونکي وو . نیوټن د لومړي ځل لپاره د f د مشتق لپاره د f' ښودنه په کار کړه . د میخانیک په پخوانیو کتابونو کې کولای شئ د نیوټن ښودنه مشاهده کړئ. لبنیز تر دې غوره ښودنه چې تر اوسه ترې استفاده کیږي اختراع کړه ، په خاص ډول استعمالیږي:

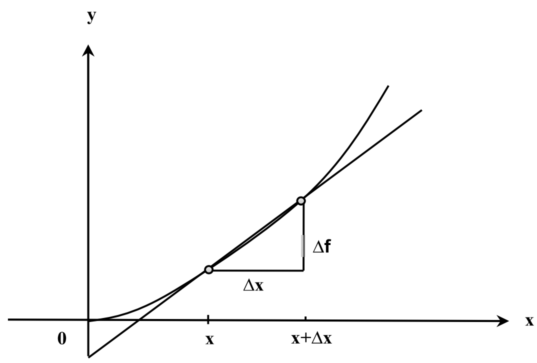
په راتلونکې کې به یې په ښه ډول مشاهده کړو .

لرو چې :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

کولای شو د $f(x+\Delta x) - f(x)$. پر ځای Δf په پام کې ونیسو لکه چې په شکل(6)کې یې وینو واضح شوي دي. په دې ډول:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



(6)**شکل:** $\frac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$

دا ده د لبنیز ښودنه د f د مشتق لپاره په x کې ده:

$$\frac{df}{dx}(x)$$

پس:

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

باید ذکر کړو چې لبنیز د تفاضل د خارج قسمت په افاده کې د Δ پر ځایd په کار کړ او لیکي: $\frac{df}{dx}$

د $\frac{df}{dx}$ سمبول یو واقعي کسر نه دی یعنې د df او dx کمیتونو نسبت نه دی. مونږ هغــه د یو سمبولیکي کسر په شان په کار وړو او د یو معمولي کسر په شان پرې بحث کوو. پــه اوسط ډول د لبنیز ښودنه د مشتق د تعریف یوه ښودنه ده ، یعنې $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ کله چې Δx صفر ته نژدې شي.د لبنیز په ښودنه د f مشتق په لاندې ډولونو ښيي:

$$\frac{df}{dx}(x);\frac{df}{dx};\frac{df(x)}{dx};\frac{d}{dx}f(x.)$$

د مشتق نیولو په قواعدو کې د لبنیز ښودنه ډیره په کاروړل کیږي.

راځئ چې د لبنیز ښودنه په یو شمیر بیلگو په وضاحت ورسوو:

$$\frac{d}{dx}(mx+b)=m\ ;\ m,b\in IR.$$

$$\frac{d}{dx}(x)^2=2x\ ;\ \wedge\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ;\ if\ x>0$$

مونږ به تابع نظر یو مربوطه متحول ته په پام کې نیسو . فرضوو چې x یو مستقل متحول او y د تابع مربوطه متحول دی. مونږ y:=y(x) قبلوو . په داسې حالت کې د تفاضل خارج قسمت

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

دی ، داسې چې Δy د مربوطه متحول تزاید نظر مستقل متحول د Δx ته دی لکه چې په شکل(7)کې ښودل شوی دی.

د لبنیز په ښودنه $\frac{dy}{dx}$ د f تابع مشتق د x لپاره دا رنګه ښیي:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

د بیلګې په ډول ، که $y=x^2$ وي حاصلوو چې :

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x.$$

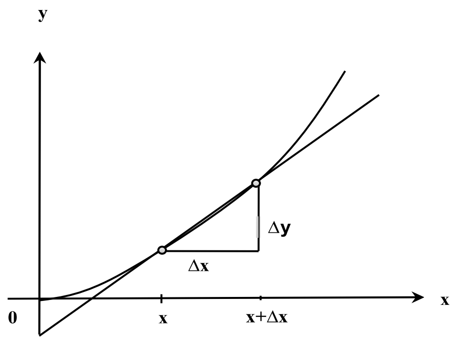
که د مشتق لپاره د لبنیز ښودنه په کار واچوو او وغواړو د x=a په ټاکلې نقطه کې د f د مشتق قیمت پیدا کړو د $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ ښودنه استعمالوو .

دبیلګې په ډول که $f(x)=x^3$ وي، پس:

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^2\wedge\frac{df(2)}{dx}=3(2^2)=12.$$

کولای شو نوموړی حقیقت په لاندې ډول هم څرګند کړو

$$\left.\frac{d(x^2)}{dx}\right|_{x=2}=3x^2\Big|_{x=2}=3(2^2)=12.$$



(7) شکل: $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{dx}$

4.2.3 د دیفرنسیل معموله (مروجه) ښودنه

د f یوې تابع دیفرنسیل د x اساسي نقطې په متحول او Δx په تزاید پورې اړه لري.

$$df(x,\Delta x)=f'(x)\Delta x$$

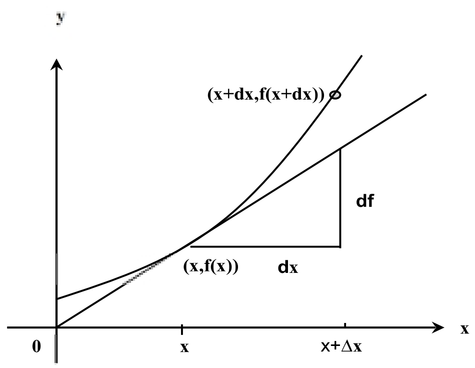
معمولاً د Δx تزاید په dx ښيي او د تابع دیفرنسیل دارنګه ښيي

$$df(x,dx)=f'(x)dx.$$

که د لبنیز ښودنه $df(x,dx)=\frac{df}{dx}(x)dx$ وي، معمولاً بې له اندیښنې د x او dx مربوطه دیفرنسیل دارنګه لیکو:

$$df=\frac{df}{dx}dx.$$

دا ساده او معمولي ښودنه ده، مګر باید په یاد ولرئ چې د $\frac{df}{dx}$ کسریو سمبولیکي کسر دی او په دې کسر کې د مخرج dx لکه د مستقل متحرک د تزاید په شان نه دی.



(8) شکل: د دیفرنسیل هندسي تعبیر.

د $df=\frac{df}{dx}dx$ افادې په شان ده داسې چې: $\Delta x\neq 0$ افاده په تحلیلي ډول د $\Delta f=\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x$ او

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$$

که تابع د y=y(x) په شان په پام کې ونیسو کولای شو ولیکو:

$$dy=\frac{dy}{dx}dx$$

پورتنی افاده په تحلیلي ډول د $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x.$ افاده ده که $\Delta x\neq 0$ او $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ وي.
او $\Delta y\cong dy$ دی که $|\Delta x|$ کوچنی کمیت وي.

6.2.3 مثال قبلوو چې $f(x)=\frac{1}{x}$ راکړ شوې ده

a. $f'(x)$ پیدا کړئ که $x\neq 0$ وي.

b. په مروجې ښودنې د f دیفرنسیل بشپړ کړئ.

c. په تقریبي ډول $\frac{1}{1,9}$ د دیفرنسیل په ذریعه پیدا کړئ.

حل

a. د $x\neq 0$ لپاره لرو چې:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{x+\Delta x-x}{x(x+\Delta x)}\right)=-\frac{\Delta x}{\Delta x[x(x+\Delta x)]}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

بنا پر دې :

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2}$$

b. $df=\frac{df}{dx}dx=\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

c. څرنگه چې 1.9 د 2 عدد نژدې دی او $f(2)=\frac{1}{2}$ دی ، طبیعي ده چې که x=2 په پام کې ونیسو پس dx=−0,1 په لاس راځي

په دې ډول:

$$\frac{1}{1,9}-\frac{1}{2}=f(1,9)-f(2)\cong\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\Big|_{\substack{x=2\\dx=0,1}}=-\frac{1}{4}(-0,1)=\frac{1}{40}=0,025.$$

بنا پر دې :

$$\frac{1}{1,9}=\left(\frac{1}{1,9}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=0,025+0,5=0,525$$

مونږ لرو چې : $\frac{1}{1,9}\cong 0,256316$ (تر 6 اعشاري رقمونو پورې).

چې مطلقه اشتباه عبارت ده له:

$$\left|\frac{1}{1,9}-0,525\right|\cong 1,3\cdot 10^{-13}$$

چې دا قیمت ډیر کوچنی دی نسبت $|dx|=0,1$ ته .

5.2.3 دلوړ ترتیب مشتقات

3.2.3 تعریف د f یوې تابع دوهم مشتق د f' مشتق دی.

د ((زبر په ښودنه)) دوهم مشتق د $f''=(f')'$ په شان ښودل کیږي. په دې ډول ، که د f' تابع په x کې مشتق منونکې وي نو $f''(x)=(f')'(x)$ دی . که دلبنیز ښودنه په کار واچوو وبه لرو چې :

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)=\frac{d^2f}{dx^2}.$$

د f دوهم مشتق په لاندې ډولونو ښودل کیږي:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x);\frac{d^2(f(x))}{dx^2}\vee\frac{d^2}{dx^2}f(x)\vee\frac{d^2}{dx^2}(f(x)).$$

په دې حالت کې د f تابع دوهم مشتق $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$ په لاندې سمبول ښیي.

$$\frac{d^2f}{dx^2}$$

دا خرنی افادې تعبیر دا نه دی چې ګوندې $\frac{d}{dx}$ د دوو په توان پورته وړل شوی دی.

7.2.3 مثال که $f(x)=x^3$ وي ، د f دوهم مشتق معلوم کړئ.

حل

د مخکیني مثال په مرسته مو ښودلې چې $f'(x)=3x^2$ په لاس راځي بنا پر دې :

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2-3x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x)=6x.$$

د f''مشتق f'''دfدریم مشتق دی.یعنې: $\quad f'''(x)=(f'')'(x)$

چې ددریم مشتق لپاره دلبنېزښودنه عبارت ده له: $\frac{d^3f}{dx^3}$.

په دې ډول:

$$\frac{d^3f}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=6.$$

دf دوهم مشتق ته دf دوهم ترتیب مشتق هم وایو،اودریم مشتق ته دریم ترتیب مشتق دf یوې تابع ویل کیږي.په عمومي ډول دf تابع n ام ترتیب مشتق دn-1 ام ترتیب مشتق له مشتق څخه عبارت دی چې په لاندې ډول ښودل کیږي:

$$f^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right)$$

3.3 دمشتق نیولو قواعد

1.3.3 قضیه (دطاقت قاعده) که n یوموجه تام عدد وي ،پس:

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

په دې گومان چې x^n او x^{n-1} تعریف شوي وي

ثبوت

که n=0 وي لروچې $x^n = x^0$=1،پس:

$\frac{d}{dx}(x^0) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

اوس فرضوو چې n یو تام عدد دی .باینومیل دقضیې له مخې لرو چې :

$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}h^k + \ldots + h^n$

دهر $x \in \mathbb{R}$ او $h \neq 0$ لپاره،

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \frac{(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n)-x^n}{h} = nx^{n-1} += $
$+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.h + \right.$
$\left. + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$ ،

اوس قبلوو چې $f(x)=x^{-n}$ ده ،کله چې n مثبت تام عدد وي. که $x\neq 0$ او |h|په کافي اندازه کوچنی وي .لرو چې:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{-n}-x^{-n}}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{x^n-(x+h)^n}{(x+h)^n.x^n}\right) = -\left(\frac{(x+h)^n-x^n)}{h}\right).\frac{1}{x^n(x+h)^n}$$

بنا پردې:

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right].\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^n(x+h)^n} = -nx^{n-1}.\frac{1}{x^{2n}} = -n.x^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

1.3.3 مسئله (د مشتق نیولو لپاره د ثابت ضریب قاعده)

فرضوو چېf په x کې مشتق منونکې ده ،او c یو ثابت دی پس c.f هم په x کې مشتق منونکې، او لرو چې: (cf)'(x)=c.f'(x)

او د لبنیز په ښودنې ،

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c.\frac{d}{dx}f(x)$

ثبوت

د cf (x)پورې مربوط خارج قسمت د $h\neq 0$ لپاره عبارت دی له:

$$\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

د لیمټونو لپاره ثابت ضریب دقانون له مخې لیکلای شو چې:

$$(c.f')(x)=\lim_{h\to 0}\left(c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=c.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c.f'(x)$$

2.3.3 مسئله (د مشتق نیولو لپاره د جمعې قانون)

فرضوو چې f او g په x کې مشتق منوونکې دي پس f+g هم په x کې مشتق منونکې او لرو چې :

(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x) دلبنیز دښودنې له مخې:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big)=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x\ )$$

ثبوت

په (f+g)(x) پورې مربوط او $h\neq 0$خارج قسمت له مخې لرو چې:

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\frac{h(x+h)+g(x+h)}{h}=\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

دلمیټونو په باب د جمعې دقانون له مخې لیکلای شو چې:

$$(f+g)'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

دf او g توابعو خطي ترکیب دc_1او c_2ثابتو عددونو لپاره عبارت له c_1f+c_2gڅخه دی د(1.3.3 تعریف له مخې).

د توابعود خطي ترکیب مشتق دهغوی دمشتقاتو له خطي ترکیب څخه عبارت دی دعین ثوابتو سره یعنې:

$$(c_1f+c_2g)'(x)=c_1f'(x)+c_2g'(x)$$

2.3.3 قضیه فرضوو چې f او g په x کې مشتق منونکې دي. د C_1 او C_2 ثابتو عددونو لپاره د C_1f+C_2g خطي ترکیب هم په x کې مشتق منونکی دی، او لرو چې : $c_1f+c_2g)'(x)=c_1f'(x)+$ $(c_2g'(x)$

د لبنیزپه ښودنه

$$\frac{d}{dx}(c_1f(x)+c_2g(x))=c_1\frac{d}{dx}f(x)+c_2\frac{d}{dx}g(x)$$

ثبوت

دجمعې د قاعدې په تطبيقولو او د مشتق نيولو لپاره د ثابت ضريب د قاعدې له مخې لروچې:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(c_1 f(x)+c_2 g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(c_1 f(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(c_2 f(x)\right)=c_1\frac{d}{dx}f(x)+c_2\frac{d}{dx}g(x)$$

فرضووچې لاندې مسئله دصدق وړ ده.

3.3.3 مسئله مشتق د $\sin x$ په x=0 کې 1 او مشتق د $\cos x$ په x=0 کې صفر دی.

$$\frac{d}{dx}\sin(x)|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1\wedge\frac{d}{dx}\cos(x)|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0.$$

3.3.3 قضيه لرو چې د هر x حقيقي عدد لپاره:

$$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)\wedge\frac{d}{dx}\cos(\mathrm{x})=-\sin(x)$$

ثبوت

پورتنۍ افادې دمخکينۍ مسئلې له مخې د توابعو په باب دجمعې د فورمولونو په مرسته په لاس راځي. راځئ چې لومړی په ساين شروع وکړو داسې چې: د هر $x\in\mathbb{R}$ او $h\neq 0$ لپاره لرو:

$$\frac{d}{dx}(sinx)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-sinx}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{sinx.cosh+cosx.sinh-sinx}{h}=$$
$$=\mathrm{sinx}.\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\cosh-1}{\mathrm{h}}+\mathrm{cosx}\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\sinh}{\mathrm{h}}=\mathrm{sinx}.0+\mathrm{cosx}.1=\mathrm{cosx}.$$

مشابه پردې کولای شو د کوساين مشتق په لاس راوړو. د کوساين لپاره د جمعې د فورمول په کارولو حاصلوو:

$$\frac{d}{dx}(\cos)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\mathrm{x}+\mathrm{h})-\cos\mathrm{x}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\mathrm{x}.\cos\mathrm{h}-\sin\mathrm{x}.\sin\mathrm{h}-\cos\mathrm{x}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(cosx\frac{cosh-1}{h}-sinx\frac{sinh}{h}\right)==cosx.\lim_{h\to 0}\frac{\cos\mathrm{h}-1}{h}-$$
$$-sinx.\lim_{h\to 0}\frac{sinh}{h}=cosx.0-sinx.1=-sinx$$

4.3.3 قضيه (دضرب قاعده) فرضوو چې f او g په x کې مشتق منونکې دي. د f.g حاصل ضرب هم په x کې مشتق منونکی دی او لرو چې:

$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+g'(x).f(x).$

د لبنيز په بڼودنه :

$$\frac{d}{dx}\big(f(x).g(x)\big)=\frac{df(x)}{dx}.g(x)+\frac{dg(x)}{dx}.f(x)$$

ثبوت

قبلوو چې $0\neq h$ دی. د f.g لپاره د تفاضل خارج قسمت په لاندې ډول په پام کې نيسو :

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$
$$=\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

په دې ډول:

$$(\mathbf{f.g})'(\mathbf{x})=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\lim_{h\to0}g(x+h)+f(x).\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$
$$=f'(x).g(x)+f(x).g'(x).$$

4.3.3 مسئله(ديومعکوس مشتق) فرضووچېg پهx کې مشتق

منونکې او $0\neq$g(x) ده. پس $\frac{1}{g}$ هم په x کې مشتق منونکې ده او لرو چې:

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}\right)'(\mathbf{x})=-\frac{\mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\mathbf{g}^2(\mathbf{x})}$$

دلبنيز په بڼودنه:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-\frac{d}{dx}g(x)}{g^2(x)}$$

ثبوت

مناسب دتفاضل خارج قسمت عبارت دی له:

$$\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x).g(x)}\right)=\frac{-\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)}{\Delta x}.\frac{1}{g(x+\Delta x).g(x)}.$$

بناپر دې:

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}\right)'(x)=\lim_{\Delta X\to0}\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}}{\Delta x}=$$
$$=-\lim\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.\lim_{\Delta X\to0}\frac{1}{g(x+\Delta x).g(x)}=-\frac{g`(x)}{g^2(x)}\ .$$

5.3.3 قضیه (دخارج قسمت قاعده) فرضووچې f اوgپهxکې

مشتق منونکې او $g^2(x) \neq 0$ وي پس:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}.$$

دلبنیز په ښودنه:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx}.g(x)-\frac{dg(x)}{dx}.f(x)}{g^2(x)}.$$

ثبوت

دحاصل ضرب قاعدې په تطبیقولواودمعکوس نسبت دمشتق نیولولپاره لروچې:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{df}{dx}.\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right) =$$

$$= \frac{df}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{-\frac{dg}{dx}}{g^2(x)}\right) = \frac{\frac{df}{dx}.g(x)-\frac{dg}{dx}.f(x)}{g^2(x)}.$$

قضیه (دچاین قاعده) فرضووچېg په xکې مشتق منونکې اوfپه(g(xکې

مشتق منونکې ده.پسfogپهxکې مشتق منونکې ده اولروچې:

(fog)`(x)=f`(g(x)).g`(x)

ثبوت

$u = g(x)$ او $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ په پام کې نیسو داسې چې $g(x+\Delta x) =$

$u + \Delta u$ په لاس راځي پس:

$$(fog)(x+\Delta x) - (fog)(x) = f(g(x+\Delta x)) - f(g(x)) = f(u+\Delta u) - f(u)$$

اوس د $f(u+\Delta u) - f(u) = f`(u)\Delta u + \Delta u.Q_u(\Delta u)$ له مخې کله چې:

$\lim_{\Delta u \to 0} Q_u(\Delta u) = 0$ وي لرو چې:

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f`(u).\Delta u + \Delta u.Q_u(\Delta u)}{\Delta x} == \frac{f`(g(x)).\Delta u + \Delta u.Q_{g(x)}(\Delta u)}{\Delta x} =$$

$$= f`(g(x))\frac{\Delta u}{\Delta u} + \frac{\Delta u}{\Delta u}.Q_{g(x)}(\Delta(=).$$

داسې چې$\Delta x \neq 0$ وي لروچې:

$$\lim_{\Delta X \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

ځرنګه چې g په x کې مشتق منونکې ده په x کې متمادي هم ده په دې ډول:

$\lim\limits_{\Delta X\to 0} = \lim_{\Delta X\to 0}(g(x+\Delta x) = 0$:

بنا پر دې : $\lim Q_{g(x)} = 0$ دی. په دې توګه:

$$(fog)`(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta X\to 0}\left(f`(g(x))\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}Q_{g(x)}(\Delta u)\right) = f`(g(x)).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$
$$+\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}(\lim_{\Delta X\to 0}Q_{g(x)}(\Delta u) = f`(g(x)).\,g'(x)+g'(x).\,0 =$$
$$= f`(g(x)).\,g'(x)$$

7.3.3 قضیه (دمعکوسې تابع مشتق) فرضوو چې f د I پرخلاص انتروال متزایده یا یوه متناقصه تابع ده که..

$f`(y)\neq 0$ او $y=f^{-1}(x)\in I$ وي پس f^{-1} په x کې مشتق منونکې او $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}f(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$ دی. د ((زبر په ښودنه))پورتنۍ /رابطه په لاندې ډول ښیو:

$$f^{-1})`(x) = \frac{1}{f`(f^{-1}(x))}$$

ثبوت

په شروع کې د f^{-1} په باب دوینااظهارکوو. ځرنګه چې f دI پر یوه خلاص انتروال مشتق منوونکې ده f پرI متمادي هم ده همدارنګه داچې fپر I یوه متزایده یا یوه متناقصه تابع ده نود f^{-1}معکوسه تابع شتون لري .

فرضوو چې$f'(y)\neq 0$ وي داسې چې که $y= f^{-1}$ وي نو $x= f(y)$ په دې ترتیب په x کې د معکوسې تابع د مشتق لاس ته راوړلو لپاره باید د تفا ضل خارج قسمت جوړکړو.

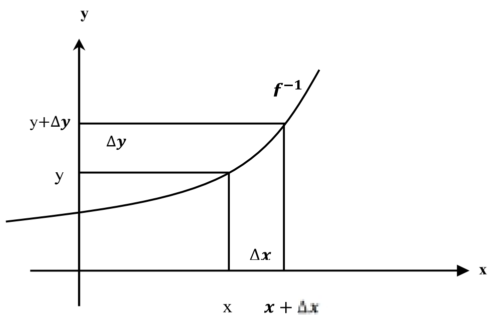
$$\frac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}$$

$y+\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)$ په پام کې نیسوچې $x+\Delta x = f(y+\Delta y)$ په لاس راځي. بنا پر دې
$\Delta x = f(y+\Delta y)-x = f(y+\Delta y)-f(y)$

(1) شکل دیوې متزایدې تابع حالت واضع کوي. په دې ډول دf^{-1} لپاره د تفاضل حاصل دارنګه بیانوو:

$$\frac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کولای شوولیکو چې که $\frac{\Delta x}{\Delta y}\neq 0$ وي.$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ دی . ځرنګه چې:



(1) شـــــــکل.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}=f`(y)\neq 0$$

مونږ باید ولرو، $\frac{\Delta x}{\Delta y}\neq 0$ د که $\Delta y\neq 0$ او $|\Delta y|$په کافي اندازه کوچنی وي. f او f^{-1} داوړه متمادي وي. بنا پر دې $\Delta x=f(y+\Delta y)-f(y)$ صفر ته نږدې کيږي په هغه صورت کې چې$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)$ صفر ته نږدې شي په دې ډول:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f`(y)}$$

1.3.3 تبصره که f او f^{-1}ته رجوع وکړودهغوی د مربوطه متحولينو ترمنځ دا رابطه شتون لري:

y=y(x)=$f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=x(y)=f(y)$

د $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1}{\frac{d}{dy}f(y)|_{y=f^{-1}(x)}}$ را بطه لاندې شکل غوره کوي: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

داسې چې د $\frac{dx}{dy}$ قيمت د y=y(x) له مخې په لاس راځي بايد ذ کر کړو چې پورتنۍبيانيه فورمولي صحت لري چې دا درست دی.که چيرې مونږ په سمبولـــی ډول د هغو کسرونو څخه بحث وکړو کوم چې واقعي وي.تردې علاوه په راتلونکې کې به دکسرلميټي حالت په نظر کې ونيسو داسې چې که$\Delta x\to 0$ $\Delta y\to 0$ **وي** : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1`}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$

8.3.3 قضيه (دطاقت عمومي قاعده) که r يونسبتي عدد وي پس:

$$\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$$

په دې گومان چې x^r او x^{r-1} تعریف شوي وي.

ثبوت

مونږ پخوا دطاقت قاعده د r تام موجه عدد له پاره واضح کړې وه اوس غواړو دا وښیو چې $\frac{d}{dx}x^{1/n}=\frac{1}{n}x^{-(1-1/n)}$ دی که $n \geq 1$ تام عددوی. به دې گمان چې $x^{1/n}$ او $x^{-(1-1/n)}$ تعریف شوي وي.

يو خو مو دا واضح کړي ووچې د خارج قسمت د قاعدې په کومک او د چاين په قاعدې کولای شو عمومي قاعدې ته ورسیږو.

د$x^{1/n}$ افاده د y^n معکوسه افاده معرفي کوي اولروچې: $x=y^n$ $\Leftrightarrow$ y=$x^{1/n}$

بنا پر دې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dx}y^n}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}(x^{x^{1/n}})^{n-1}=\frac{1}{n}x^{1-\frac{1}{n}}$$

5.3.3 مسئله

$$\frac{d}{dx}(arc\ sinx)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};-1<x<1$$

ثبوت

لرو چې: $x=\sin(y)$ $\Leftrightarrow$ y=arc sin(x) کله چې:

$-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ $\wedge$ $-1\leq x\leq 1$ دي. لرو چې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin(y))}=\frac{1}{\cos(y)};\quad(\cos(y)\neq 0)$$

اوس دا چې $cos^2(y)=1-sin^2(y)=1-x^2$ ځکه چې $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos(y)\geq 0$ نو مونږ باید له منفي علامې څخه صرف نظر شو. بنا پر دې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(که چیرې $\cos(y)\neq 0$ وي یعنې $1-x^2>0$ وي او دا هغه حالت دی چې $-1<x<1$ وي

بنا پر دې:

$$\frac{d}{dx}arc\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6.3.3 مسئله

$$\frac{d}{dx}(arc\cos(x))=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};if-1<x<1$$

ثبوت

لرو چې:

Y=arc cos(x)$\Leftrightarrow x = \cos(y)\,; if -1 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le \pi$

دمعکوسې تابع د مشتق له فورمول څخه په استفاده:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\cos(y)} = -\frac{1}{\sin(y)};\ \ if\ \sin(y) \neq 0$$

څرنګه چې $sin^2(y) = 1 - cos^2(y) = 1 - x^2$ دی، پس $\sin(y) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ په لاس راځي. څرنګه چې $\sin(y) \ge 0 \Leftarrow 0 \le y \le \pi$ دی نومونږ باید له (-) علامې څخه صرف نظرنه شو. بنا پر دې:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(که چیرې sin(y)≠ **0** یعنې 1<x<1− وي). په دې ډول:

$$\frac{d}{dx}\ arc\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\ -1 < x < 1$$

7.3.3 مسئله وښیئ چې د هر x∈ ℝ لپاره : $\frac{d}{dx}arc\ tg(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

ثبوت

لرو چې: y= arc tg(x)⇔x=arctg(y)

کله چې x اختیاري عدد او $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ وي.

اوس د تابع د معکوسې تابع دمشتق او د تابع دمشتق ترمنځ له ارتباط څخه په استفاده لیکو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}tg(y)} = \frac{1}{{}^{1}/_{cos^2(y)}} = cos^2(y)$$

یادونه کوو چې $\frac{d}{dy}(tg(y)) = \frac{1}{cos^2 y}; cos^2 y \neq 0$ وي د هر $y \in domtgy$ له پاره چې د x پورې محدودو نه دی. مونږ باید $cos^2(y)$ د x په حدودو کې وټاکو . مونږ دغه مطابقت په کار اچوو:

$$cos^2(y) + sin^2(y) = 1 \Rightarrow 1 + tg^2(y) = \frac{1}{cos^2(y)}$$

بناپردې:

$$cos^2(y) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

په دې ډول:

$$\frac{d}{dx}arc\ tg(x) = \frac{1}{1 + x^2} = cos^2(y)$$

4.3 دوسطي قيمت قضيه

1.4.3 تعريف د f يوه تابع په a كې د يو موضعي اعظمي لرونكې ده كه چيرې د $\mathcal{I}$ يو خلاص انتروال داسې شتون ولري چې a په كې شامل او دهر $x \in \mathcal{I}$ لپاره $f(a) \geq f(x)$ وي. د f تابع په a كې د يو موضعي اصغري لرونكې ده كه چيرې د $\mathcal{I}$ يو خلاص انتروال هسې شتون و لري چې a كې شامل او د هر $x \in \mathcal{I}$ لپاره $f(a) \leq f(x)$ وي. په دواړو حالتونو كې وايو چې f په a كې د يو موضعي اكستريموم لرونكي ده.

د D پرسټ د f مطلق اعظمي له يوه M څخه عبارت دی كه چيرې $C_M \in D$ هسې شتون ولري چې $f(C_M) = M$ او د هر $x \in D$ لپاره$M \geq f(x)$ وي. د D پر يوه سټ د f مطلق اصغري له m څخه عبارت دی كه چيرې $c_m \in D$ هسې شتون ولري چې $f(c_m) = m$ او د هر $x \in D$ لپاره $m \leq f(x)$ وي.مونږ مطلق اعظمي او مطلق اصغري ته مطلق اكستريموم وايو.

1.4.3 قضيه (د فرمات قضيه Fermat's theorem) كه f په a كې د مطلق اعظمي يا اصغري لرونكې او f په a كې مشتق منونكې وي لرو چې f`(a)=0 دی.

ثبوت

فرضوو چې f په a كې موضعي اعظمي ته رسيږي. پس:

$f(a+h) \leq f(a)$

دی، كه |h| په كافي اندازه كوچنی وي. بنا پر دې $f(a+h) - f(a) \leq 0$ دی كه چيرې h>0 او په كافي اندازه كوچنی وي. په دې ډول تر دې شرايطو لاندې

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$

دی.بناپردې:

$$f`(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$$

مشابه پردې، كه h<0 په نظر كې ونيسو داسې چې|h| په كافي اندازه كوچنی، $f(a+h) - f(a) \leq 0$ وي. څرنگه چې h<0 دی لروچې: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$

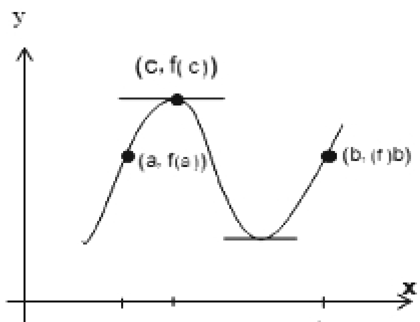
پس:

$$f`(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$$

څرنګه چې مو $0 \leq f`(a)$ او $f`(a) \geq 0$ په لاس راوړ باید ولرو چې $f`(a) = 0$ دی.
ددې حقیقت اثبات چې د f تابع د a په یوه نقطه کې موضعي اصغري ته رسیږي $f`(a) = 0$ دی، مشابه د پورته په شان دی.

1.4.3 تبصره
په پورتني ثبوت کې مو دا حقیقت په کار واچولو چې د h>0 په کافي اندازه دترټولو کوچنی قیمت له پاره $g(h) \geq 0$ وي $\lim_{h\to0} g(h) \leq 0$ دی (او مشابه حقیقت د $\lim_{h\to o^-} g(h)$ لپاره د تمرین په شکل پریښودل شو).

2.4.3 قضیه (د رول قضیه Roll's theorem)
فرضوو چې f پر [a,b] متمادي ده، د (a,b) په هره نقطه کې مشتق منونکې او f(a)=f(b)=0 دی. پس $c \in (a,b)$ هسې شون لري چې f`(c)=0 وي.



شکل (1)

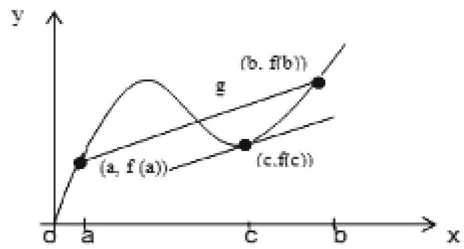
په ګرافیکي ډول د رول قضیه دا بیانوي چې لږترلږه د a او b ترمنځ د c یوه نقطه هسې شتون لري چې د f پر ګراف د (c,f(c)) په نقطه کې مماس پر ګراف موازي د ox له محور سره دی، که f(a)=f(b) وي (کیدای شي له دې نقطې څخه علاوه نورې نقطې هم شتون ولري). دا حقیقت په (1) شکل کې واضح شوی دی.

د رول د قضیې ثبوت که f پر [a,b] ثابته وي، د هر $x \in (a,b)$ لپاره f`(x)=0 دی. بنا پر دې، لازم دي هغه حالت په نظر کې ونیسو چې د f یوه تابع پر [a,b] ثابته نه وي. د اکستریموم قیمت د قضیې له مخې، که f پر [a,b] اعظمي یا اصغري قیمت ته ورسیږي. دغه دواړه قیمتونه باید له هغوقیمتونو سره مساوي نه وي چې پر تابع د a او b په نقطو کې حاصلیږي. له دې څخه به دا نتیجه نه اخلو چې f پر [a,b] ثابته ده. فرضوو چې پر [a,b] د f اعظمي قیمت خلاف د f(a) او f(b) دی، (خلاف د f(a)=f(b)

دی). بنا پر دې ، که f(c) اعظمي قیمت وي باید $c \in (a,b)$ وي. دا حقیقت واضح کوي چې f په c کې د یو موضعي اعظمي لرونکې ده او باید ولرو چې f`(c)=0 دی. مشابه پر دې، که پر [a,b] د f اصغري قیمت خلاف د f(a)او f(b) دی(خلاف دf(a)=f(b)دی).بناپر دې،که f(c) اعظمي قیمت وي باید(a,b) c∈ وي. داحقیقت واضح کوي چې fپه cکې دیوموضعي اعضمي لرونکې ده اوبایدولروچې $f'(c) = 0$ دی .مشابه پر دې،که پر[a,b]د f اصغري قیمت خلاف دf(a)=f(b) وي او f په (a,b) c∈کې هغې قیمت ته ورسیږي ، باید ولرو چې f`(c)=0 دی. د رول له قضیې څخه په استفاده د وسطي (منحني) قیمت قضیه بیانوو.

3.4.3 قضیه (دمنځني قیمت قضیه) فرضوو چې f پر [a,b] متمادي او پر (a,b) مشتق منونکې ده. پس $c \in [a,b]$ هسې شتون لري چې:

f(b)−f(a)=f`(c)(b−a)



(2)شکل .

د منځني قیمت قضیه کولای شو په لاندې لیکنې تعبیر کړو: $f`(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

څرنګه چې دښې خوا افاده دهغې قاطع خط میل دی چې د(a,f(a)) او (b,f(b)) نقطې یوځای کوي، دمنځني قیمت قضیه دا بیانوي چې د (a,b) پر خلاص انتروال اقلاً یوه نقطه داسې شتون لري چې مماس پر ګراف په دې نقطه کې موازي د قاطع خط دی. (2) شکل په ګرافیکي تعبیر د منځني قیمت قضیه واضح کوي.

دمنځني قیمت قضیې ثبوت قبلوو چې g هغه خطي تابع ده چې ګراف یې د (a,f(a)) او (b,f(b)) له نقطو څخه تیر شوی قاطع خط دی، لکه په (شکل 2) کې یې چې وینو. دمماس خط میل عبارت دی له: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

بنا پر دی:

$$g(x) = f(a) + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

(پورتنۍ افاده د a نقطې پر اساس د هغه مماس خط میل دی چې د ((a,f(a) او ((b,f(b) له نقطو څخه تیرېږي اوس مونږ h(x)=f(x)-g(x) په پام کې نیسو:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - (\frac{f(b) - f(a)}{b - a})(x - a)$$

دا چې h(a)=h(b)=0 دی، د رول د قضیې له مخې ویلای شو چې $c \in (a, b)$ شتون لري داسې چې h`(c)=0 وي. نظر x ته د پورتنۍ افادې ددواړو خواو دمشتق په نیولو حاصلوو:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

لرو چې:

$$h`(c) = 0 \Leftrightarrow f`(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

په پایله کې:

f(b)-f(a)=f`(c)(b-a)

4 .4.3 قضیه (دمنځني قضیې عمومیت) فرضوو چې f او g پر

[a,b] متمادي او په (a,b)کې مشتق منونکې دي. پس $c \in (a, b)$ شتون لري داسې چې:

f(c)[g(b)-g(a)]=g`(c)[f(b)-f(a)]

ثبوت

په پام کې نیسو:

h(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]-[g(x)-g(a)][f(b)-f(a)]

پس h(a)=0او h(b)=0 دي. د رول د قضیې له مخې وایو چې$c \in (a,b)$ شتون لري داسې چې h`(c)=0 دی. نظرx ته د پورتنۍ افادې ددواړو خواو د مستق په نیولو حاصلوو چې:

h`(x)=f`(x)[g(b)-g(a)]-g`(x)[f(b)-f(a)].

بنا پر دې:

h`(c)=0⇔ f(c)[g(b)- g(a)]=g`(c)[f(b)-f(a)] .

باید ذکر کړو چې د منځني قیمت قضیې له عمومیت څخه کولای شود

g(x)=x=>g`(x)=1

په پام کې نیولو سره د منځني قیمت قضیه په لاس راوړو، په پایله کې:

$$f`(c)[g(b) - g(a)] = g`(c)[f(b) - f(a)] \xrightarrow[g(b) = b \wedge g(a) = 0]{g'(c)=1} f`(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

دمنځني قیمت قضیه یوه (دشتون قضیه) ده چې دهغې په واسطه کولای شو نورې قضیې لکه (د یونواختوالي له پاره د مشتق امتحان)په اثبات ورسوو.

5.4.3 قضیه فرضوو چې f پر یوه انتروال د $\mathcal{I}$ متمادي ده او هم f د $\mathcal{I}$ انتروال په داخل کې د هر x له پاره مشتق منونکې ده. د $\mathcal{I}$ انتروال په داخل کې د هر x لپاره f`(x)>0 وي نو f پر $\mathcal{I}$ متزایده ده. که د $\mathcal{I}$ انتروال په داخل کې د هر x لپاره f`(x)<0 وي پس f پر $\mathcal{I}$ متناقصه ده.

ثبوت

قبلوو چې x_1 او x_2 د $\mathcal{I}$ په انتروال کې شامل او $x_1 < x_2$ وي. پس د $[x_1, x_2]$انتروال په $\mathcal{I}$ کې شامل او د (x_1, x_2)خلاص انتروال د $\mathcal{I}$ یو داخلي انتروال دی. په دې ډول f پر$[x_1, x_2]$ متمادي او د $[x_1, x_2]$ په داخل کې مشتق منونکې ده. په پایله کې پر f د $[x_1, x_2]$ پر انتروال د منځني قیمت قضیه د صدق وړ ده. یعنې $c \in (x_1, x_2)$شتون لري داسې چې:

$$f(x_2) - f(x_1) = f`(c)(x_2 - x_1).$$

که فرض کړو چې د $\mathcal{I}$ په داخل کې د هر x لپاره f`(x)>0 دی، لرو چې f`(c)>0 دی.

بنا پر دې:

$$f(x_2) - f(x_1) = f`(c)(x_2 - x_1) > 0$$

له دې ځخه په استفاده $f(x_2) > f(x_1)$ په لاس راځي. دارابنیي چې f پر $\mathcal{I}$ متزایده ده که د $\mathcal{I}$ په داخل کې د هر x لپاره f`(x)>0 وي.

که دا فرض کړو چې د $\mathcal{I}$ انتروال په داخل کې د هر x لپاره f`(x)<0 دی، لرو چې:

$$f(x_2 - f(x_1) = f`(c)(x_2 - x_1) < 0$$

له دې ځخه دې پایلې ته رسیږو چې:$f(x_2) < f(x_1)$ دا رابنیي چې f پر $\mathcal{I}$ متناقصه ده. په شعوري ډول، یوه تابع چې لرونکې د ثابت مشتق د صفر په قیمت وي هغه به ثابته وي. دا حقیقت لاندې حالت ایجابوي:

1.4.3 مسئله فرضوو چې د $\mathcal{I}$ یو انتروال د هر x لپاره f`(x)=0 دی. پس f باید پر $\mathcal{I}$ ثابته وي.

ثبوت

قبلوو چې a یوه نقطه ده په $\mathcal{I}$ کې. دمنځني قیمت دقضیې له مخې که x په $\mathcal{I}$ کې یوه اختیاري نقطه او x>a وي، نو د a او x ترمنځ د c یوه نقطه شتون لري داسې چې:

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

څرنګه چې $f`(c)=0$ دی، دا تعبیروي چې $f(x)-f(a)=0$ یعنې $f(x)=f(a)$ دی.مشابه پر دې که $x<a$وي ،دx او a ترمنځ دc یوه نقطه شتون لري داسې چې:

$f(a)-f(x)=f'(c)(a-x)$.

داچې $f'(c)=0$ دی ،تعبیریږي دادی چې$f(a)-f(x)=0$یعنې$f(x)=f(a)$ دی . په دې ډول،وموښودل چې په $\mathcal{I}$ کې د هر x لپاره $f(x)=f(a)$ دی. په پایله کې f پر $\mathcal{I}$ د $f(a)$ یو ثابت قیمت لرونکې ده.

دوه توابع چې لرونکې د عین ترتیب مشتق وي یوه د بلې څخه د یوه ثابت په اندازه فرق لري.

1.4.3 پایله فرضوو چې د $\mathcal{I}$ په یوه انتروال کې د هر x لپاره $f`(x)=g`(x)$ وي. پس د c یو ثابت داسې شتون لري چې د هر $x\in\mathcal{I}$لپاره $g(x)=f(x)+c$ دی.

ثبوت

په پام کې نیسو چې $h(x)=g(x)-f(x)$ ده. پس د هر $x\in\mathcal{I}$ لپاره

$h'(x)=g'(x)-f'(x)=0$ دی .

د1.4.3مسئلې له مخې ، دc یوثابت شتون لري داسې چې $h(x)=0$ وي یعنې داچې $g(x)-f(x)=c$ دی دهر $x\in\mathcal{I}$ لپاره.

بنا پر دې: $g(x)=f(x)+c$

مونږ د لوپیټال د قاعدې تعبیر د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لپاره په لاندې ډول ثابتوو:

6.4.3 قضیه فرضوو چې f او g د $\mathcal{I}$ یو خلاص انتروال په هر x کې چې a هم په کې شامل دی مشتق منونکې وي چې $a\in\mathcal{I}$ وي،دامکان په صورت کې په استثنا د a اوهم دهر $x\in\mathcal{I}$ لپاره $g`(x)\neq 0$ وي.

که $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ او $\lim_{x\to a}\frac{f`(x)}{g`(x)}$شتون ولري. پس:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f`(x)}{g`(x)}.$$

ثبوت

څرنګه چې $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ دی، د f او g توابع پر $\mathcal{I}$ متمادي دي که چیرې دا ومنو چې $f(a)=g(a)=0$ دی. په پیل کې راځئ دا وښیو چې که $x\in\mathcal{I}$ او $x\neq 0$ وي $g(x)\neq 0$ دی. په حقیقت کې که $x\in\mathcal{I}$ ، $x\neq a$ او $g(x)=0$ وي، مونږبه د a او x ترمنځ د یو c لپاره ولرو چې $g`(c)=0$ دی، د رول د قضیې له مخې، ځکه چې $g(x)=g(a)=0$ دی. مګر $g`(c)\neq 0$ دی ځکه چې $c\in\mathcal{I}$دی. دا د مسئلې عکس دی. د منځني قیمت قضیې د عمومیت له مخې c_x د x او a تر منځ شتون لري داسې چې:

$$f`(c_x)[g(x)-g(a)] = g`(c_x)[f(x)-f(a)]$$

بنا پر دی: $f`(c_x)g(x) = g`(c_x)f(x)$

څرنګه چې $0 \neq g(x)$ او $0 \neq g`(c_x)$ دی، نو پر هغوی د تقسیمولو په پایله کې

حاصلوو: $\frac{f`(c_x)}{g`(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

بنا پر دې: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f`(c_x)}{g`(c_x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

ځکه چې c_x د x او a تر منځ واقع دی.

خلورم څپرکی Chapter 4

انتیګرال The Integral

1.4 د ریمن انتیګرال The Riemann Integral

1.4.4 تعریف او اساسي خاصیتونه

1.1.4 تعریف د [a,b] انتروال (قطعه خط) د p تقسیمات (ویشنه) د $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ نقطو سټ (مجمع) ده داسې چې:

$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k < \cdots, x_{n-1} < x_n = b$

وي. د p ویشنې په ذریعه k ام فرعي انتروال عبارت دی له $[x_{k-1}, x_k]$ څخه، د k ام فرعي انتروال اوږدوالی عبارت دی له:

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

د p ویشنې ټاکلې اندازه عبارت له: $||p|| = Max(\Delta x_k)$

د k=1,2,…,n له پاره که $t_k \in [x_{k-1}, x_k$ وي مونږ به لاندې مرتبو جوړوسره مخ شو: $(\{x_k\}_{k=0}^{n}, \{t_k\}_{k=0}^{n})$

لکه د [a,b] قطعه خط د p خط خط شوې برخه . د k=1,2,…,n ; $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ نقطې مونږ ته خط شوې برخې رابښيي.

2.1.4 تعریف که د f تابع چې پر [a,b] او $p^{\cdot} = (\{x_k\}_{k=0}^{n}, \{t_k\}_{k=0}^{n})$ تعریف شوې وي عبارت له خط خط شوې برخې د [a,b] قطعه خط څخه وي، د

$S(f, p^{\cdot}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$

مجموعې ته د f لپاره $p^{\cdot}$ خط خط شوې برخې د ریمن مجموعه وائي. مونږ به د ریمن انتیګرال لکه (د انتیګرالي مجموعې لمیټ) په لاندې ډول په درستو جملو تعریف کړو.

3.1.4 تعریف که د f یوه محدوده تابع پر [a,b] د ریمن انتیګرال منونکې وي د ریمن انتیګرال یې د لاندې عدد څخه عبارت دی.

$\int_a^b f(x)dx.$

که ε>0 راکړ شوی وي د$0<\delta_\varepsilon$ عدد شتون لري داسې چې:

$|S(f, p^{\cdot}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$

د [a,b] د هرې p ویشنې له پاره داسې چې $||P|| < \delta_\varepsilon$ وي.

1.1.4 تبصره د ریمن انتیگرال څخه مقصد د یو لړ پوښل شوو هغو مجموعو څخه بحث کول دي چې توابع په کې محدودې وي، ترڅو چې په 5.4 برخې کې په غیرخاصو انتیگرالونو کې پرې بحث وکړو. په عمومې ډول ، مونږ به په ښکاره ډول دا نه معنی کوو. راځئ په دې تېینګار وکړو چې دلته د $p=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ یوې ورکړشوې ویشنې له پاره د $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\Delta x_k$

په شکل بې شمیره زیاتې د ریمن مجموعې دي. څرنګه چې کولای شود $t_x; k = 1, 2, \dots, n$ خط خط شوې برخه په هره طریقه چې وغواړو وټاکو، داسې چې هر د t_k په k ام انتروال کې واقع وي. راځئ په دې ټېنګار وکړو چې دا ضرور نه ده $[x_{k-1}, x_k]$ چې د هر فرعي انتروال اوږدوالی دې سره برابر وي. د بلې خوا که یوه تابع د ریمن انتیگرال منلو وړ وي، د هغې انتیگرال لمیټ د یو ترادف د خاصې ریمن مجموعې څخه دی.

1.1.4 مسئله که f پر [a,b] د ریمن انتیګرال منونکې وي، د $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دریمن مجموعې شتون لري .داسې چې: $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$

ثبوت

قبلوو چې $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ او $x_k = a + k\Delta x; k = 0, 1, 2, \dots, n$ دي.د $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ نقطې د [a,b] قطعه خط د p_n ویشنې جوړوي داسې چې: $||p_n|| = \frac{b-a}{n}$.

په دې ډول $\lim_{n\to\infty}||p_n|| = 0$ دی. t_k د k– ام فرعي انتروال $[x_{k-1}, x_k]$ منتصفه نقطه ټاکو. په پام کې نیسو:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\frac{b-a}{n}).$$

څرنګه چې f پر [a,b] د ریمن انتیګرال نیولو وړده، د هر ورکړ شوي$\varepsilon>0$ لپاره $\delta_\varepsilon>0$ شتون لري داسې چې:

$|S_n - \int_a^b f(x)dx| = |\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$

که $||p_n|| = \frac{b-a}{\delta_\varepsilon} < \delta_\varepsilon$ وي د هر $n \geq N$ لپاره، داسې چې $N \in \mathbb{N}$ داسې ټاکل شوی وي چې:

$\frac{b-a}{N} < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{b-a}{\delta_\varepsilon}$

په دې ډول که: د$n \geq N > \frac{b-a}{\delta_\varepsilon}$ وي نو $|S_n - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$ دا رابښيي چې:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

2.1.4 مسئله که f پر [a,b] د ريمن انتيګرال منلو وړ وي. د ريمن انتيګرال يې يوازينی او يو دی.

ثبوت

فرضوو چې I_1 او I_2 داسې دوه عددونه دي چې د ريمن انتيګرال د تعريف اړتياوې تعقيقوي. لازم دي وښيو چې $I_1 = I_2$ دی. مونږ دغه حقيقت په لاندې ډول ښيو چې دهر ε>0 لپاره: $|I_1 - I_2| < \varepsilon$

په دې ډول قبلوو چې ε>0 راکړ شوی. د ريمن انتيګرال د تعريف له مخې، شتون لري $\delta_{\varepsilon_1} > 0$ داسې چې :

$$|S(f,p^{\cdot}) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

که p د [a,b] يو تقسيم (يوه برخه) وي د $\|p\| < \delta_{\varepsilon_1}$ لپاره. مشابه پردې، شتون لري $\delta_{\varepsilon_2} > 0$ داسې چې که $\|p\| < \delta_{\varepsilon_2}$ وي $|S(f,p) - I_2| < \delta_{\varepsilon_2}$. بنا پر دې : $\delta_{\varepsilon} = \min(\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2})$ په پام کې ونيسو ، دواړه نامساواتونه تحقيق مومي که د تقسيمات ټاکلې اندازه کوچنۍ تر δ_{ε} وي. مونږ په دې ډول دداسې p يو تقسيمات جوړوو. پس:

$$|I_1 - I_2| = |I_1 - S(f,p^{\cdot}) + S(f,p^{\cdot}) - I_2| \le$$
$$\le |I_2 - S(f,p^{\cdot})| + |S(f,p) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

څرنګه چې ε اختياري مثبت عدد دی، دا رابنيي چې $I_1 = I_2$ دی.

4.1.4 تعريف D د ℝ فرعي سټ راکړ شوی دی x_D د D مشخصه دارنګه تعريفوي.

$$x_D(x) = \begin{cases} 1; if\ x \in D; \\ 0; if\ x \in D; \end{cases}$$

3.1.4 مسئله که $\mathcal{I}$ د c او d په پای نقطو يو محدود انتروال وي پس دهغې مشخصه تابع $x_{\mathcal{I}}$ پر هر [a,b] انتروال د ريمن انتيګلرال منونکې ده داسې چې a≤ $c \le d \le b$ وي او لرو چې $\int_a^b x_{\mathcal{I}}(x)dx = d - c$

يعنې د يو انتروال د مشخصه تابع انتيګرال له اوږدوالي (طول) څخه عبارت دی. که چيرې انتروال يوه زري {c} ته چې c∈ $[a,b]$ وي تغير وکړي، پس $\int_a^b x_{\mathcal{I}}(x)dx = 0$. ثبوت ګرانو لوستونکو ته پريښودل شو.

1.1.4 قضيه فرضوو چې f او g پر [a,b] د ريمن انتيګرال منونکې وي.

پس:

a. د c ثابت لپاره c.f انتيګرال منونکې او

$$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

b. f+g انتيګرال منونکې او

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

c. که د هر $x \in [a,b]$ لپاره $f(x) \leq g(x)$ وي پس:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

ثبوت

a. کولای شو فرض کړو چې $c \neq 0$ دی ځکه چې دواړه خواوې صفر کيږي کله چې c=0 وي. قبلوو چې ε>0 راکړ شوی. $\delta_\varepsilon > 0$ ټاکو داسې چې

$$|s(f,p^{\cdot}) - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

که $\|p\| < \delta_\varepsilon$ وی لرو چې:

$$S(cf,p^{\cdot}) = \sum_{k=1}^n cf(t_k)\Delta x_k = c.\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k = cS(f,p^{\cdot})$$

بنا پر دې:

$$|S(cf,p^{\cdot}) - c\int_a^b f(x)dx| = |c.S(f,p^{\cdot}) - c\int_a^b f(x)dx| = |c||s(f,p^{\cdot}) - \int_a^b f(x)dx| < |c|.\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

که $\|p\| < \delta$ وي. په دې ډول c.f انتيګرال منونکې او $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

b. لرو چې:

$$S(f+g,p^{\cdot}) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (f(t_k)+g(t_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f((t_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(t_k)\,\Delta x_k == S(f,p^{\cdot}) + S(g,p^{\cdot})$$

ε>0راکړ شوی راځئ چې $\delta_\varepsilon > 0$ په پام کې ونيسو داسې چې که $\|p\| < \delta_\varepsilon$ وي نو:

$$|s(f,p^{\cdot}) - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ |S(g,p^{\cdot}) - \int_a^b g(x)dx| < \varepsilon/2$$

پس:

$$S(f+g),p^{\cdot}-(\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx)|=$$

$$=|S(f,p^{\cdot})+s(g,p^{\cdot})-(\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx)|=$$

$$=|S(f,p^{\cdot})-\int_a^b f(x)dx|+|S(g,p^{\cdot})-\int_a^b f(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

پس f+g انتيګرال منونکې او

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

C. قبلوو چې $S_n(f)=\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x=\sum_{k=1}^n f(t_k)(\frac{b-a}{n})$.

کله چې: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ، $x_k=a+k\Delta x$ او د k=1,2,…,n لپاره t_k د $[x_{k-1},x_k]$ منتصفه نقطه وي لکه په 4.4.4 مسئلې کې مشابه د

$$S_n(g)=\sum_{k=1}^n g(t_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

څرنګه چې د هر x∈ [a,b] لپاره $f(x)\le g(x)$ راکړشوي نو دهر n لپاره $S_n(f)\le S_n(g)$ دی بنا پردې:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}S_n(f)\le\lim_{n\to\infty}S_n(g)=\int_a^b g(x)dx.$$

2.1.4 دریمن انتیګرال موجودیت

5.1.4 تعریف د φ یوه زینه اي تابع د مشخصه تابع یو خطي ترکیب دی.

په دې ډول شتون لري د $\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2\ldots\mathcal{J}_n$ انتروالونه او د $C_n,\ldots,C_2,C_1$ عددونه داسې چې دهر $x\varepsilon\mathbb{R}$ لپاره .

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^n\sigma_k x_{\mathcal{J}_k}(x)$$

4.1.4 مسئله که چیرې د k=1,2,3,…n لپاره $\mathcal{J}_k=[c_k,d_k]$ په [a,b] انتروال کې شامل او $\varphi=\sum_{k=1}^n\alpha_n x_{j_k}$ وي پس:

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^n\alpha_k(c_k-d_k).$$

ثبوت

لرو چې :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{j_k}(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b x_{j_k}(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k (c_k - d_{k)}.$$

5.1.4 مسئله (د کوشي معیار دریمن انتیگرال د شتون لپاره): د f یوه تابع د [a,b] پرانتروال دریمن انتیگرال منونکې ده که چېرې د ورکړشوي $\varepsilon > 0$ پاره $\delta > 0$ شتون ولري داسې چې: $|S(f,p^{\cdot}) - S(f,Q^{\cdot})| < \varepsilon.$
که P او Q د [a,b] انتروال ویشنې وي چې نسبت δ ته په کمې تاکل شوې اندازه ویشنې شوي دی.

ثبوت

دا به اسانه وي چې ضروري شرط و ښیو (دتمرین په شکل) مونږ بآید ثبوت کړو چې دغه شرط د انتیگرال منلو قابلیت واضح کوي.

د هو $n\epsilon\mathbb{N}$ لاره د $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ورکړ شوي شرط له مخې شتون لري $\delta_n > 0$ داسې چې:

$$\left|S(f;p^{\cdot}) - S(f;Q^{\cdot})\right| < \frac{1}{n}$$

که چېرې $||Q|| < \delta_n \wedge ||p|| < \delta_n$ وي. کولای شو فرض کړو چې $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ یو نواخت متناقص ترادف دی(که لازم وي مینموم د δ_1 ، δ_2 ، ... ، δ_n په δ_n عوض کړو).

دهر n لپاره د p_n یوې ویشنې لپاره داسې چې $||p_n|| < \delta_n$ وي دریمن مجموعه $S(f;p_n^{\cdot})$ قبلوو .پس $|s(f,p_n^{\cdot}) - s(f,p_m^{\cdot})| < \frac{1}{n}\ ;m > n$

بنا پردې د $\{S(f,p^{\cdot}{}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ ترادف د کوشي یو ترادف دی. د $\mathbb{R}$ په تمامیت د A یو عدد داسې شتون لري چې: $\lim_{m\to\infty} S(f,p^{\cdot}{}_m) = A.$

په دې ډول : $\lim_{m\to\infty}\left|S(f;p^{\cdot}{}_n) - S(f,p^{\cdot}{}_m)\right| = \left|S(f,p^{\cdot}{}_n) - A\right| \le \frac{1}{n}$

او دا مودې حقیقت ته رسوي چې: $\int_a^b f(x)dx = A$

په حقیقت کې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره شتون لري $k\epsilon\mathbb{N}$ داسې چې $k > \frac{2}{\varepsilon}$. که $||Q|| < \delta_\varepsilon$ وي،

$$|s(f,Q^{\cdot}) - A| \le |s(f,Q^{\cdot}| - s(f,p_k)| + |(f,p_k) - A| \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

بنا پردې : $A = \int_a^b f(x)dx$ دی. (هغه څه چې مو غوښتل).

2.1.4 قضيه (د انتيگرالونو لپاره زبېښلې يا فشرده قضيه)

د f تابع د [a,b] پرانتروال دريمن انتيگرال منونکې ده که چېرې د $0<\varepsilon$ لپاره د f او G انتيگرال منونکې توابع داسې شتون ولري چې دهر xϵ [a,b] لپاره $F(x)\le f(x)\le G(x)$ او $\int_a^b (G(x)-F(x))dx<\varepsilon.$

ثبوت

قبلوو چې $\varepsilon>0$ راکړ شوی. څرنگه چې F او G پر [a,b] دريمن انتيگرال منونکې دې نو شتون لري $0<\delta$ داسې چې که $\delta>||p||$ وي:

$$\left|S(F,p^{\cdot})-\int_a^b F(x)dx\right|<\varepsilon \;\wedge\; \left|S(G,p^{\cdot})-\int_a^b G(x)dx\right|<\varepsilon$$

په دې ډول :

$$\int_a^b F(x)dx-\varepsilon<S(F,p^{\cdot}) \;\wedge\; S(G,p^{\cdot})<\int_a^b G(x)dx+\varepsilon$$

د داسې يوې ويشنې له پاره ، څرنگه چې :

∀xϵ[a,b] ; f(x)≤f(x)≤G(x)

لرو چې:

$$S(F,p^{\cdot})\le S(f,p^{\cdot})\le S(G,p^{\cdot})$$

بناپردې:

$$\int_a^b F(x)dx-\varepsilon<S(f,p^{\cdot})<\int_a^b G(x)dx+\varepsilon$$

په دې ډول ، که $\delta>||Q||$ $\delta>||p||$ وي لرو چې :

$$\left|S(f,\dot{p})-S(f,\dot{Q})\right|<\int_a^b G(x)dx-\int_a^b F(x)dx+2\varepsilon=$$
$$=\int_a^b (G(x)-F(x))dx+2\varepsilon=\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon.$$

بنا پردې د f لپاره پر [a,b] د ريمن مجموعې لپاره دکوشي شرط صدق کوي .اودا وضع کوي چې f پر[a,b] دريمن انتيگرال منونکې ده(هغه څه شو چې مو غوښتل).

3.1.4 قضیه که f پر [a,b] متمادي وي پس f پر [a,b] د ریمن انتیگرال منونکې ده.

ثبوت

قبلوو چې ε>0 راکړ شوی. څرنگه چې f پر [a, b] متمادي ده ، نو شتون لري $\delta > 0$ داسې چې:

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \epsilon [a,b] \wedge |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2) < \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$o \le \int_a^b (G(x) - F(x))dx = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} (\frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_k = \varepsilon.$$

د فشرده قضیې له مخې ,f پر [a,b] دریمن انتیگرال منونکې ده (څه چې مو غوښتل وشو):

3.1.4 دریمن انتیگرال اضافي خاصیتونه

6.1.4 تعریف $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \wedge \int_b^a f(x)dx = o.$

4.1.4 قضیه (پرانتروالونو مربوط افزایشي خاصیت)

که $a < c < b$ وي، د f تابع پر [a,b] دریمن انتیگرال منونکې ده په هغه صورت کې چېf پر [a,c] او [c,b] انتیگرال منونکې وي، او لرو چې:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

له ثبوت څخه صرف نظر کوو:

2.1.4 تبصره د 6.1.4. تعریف له مخې پورتنی افزایشي خاصیت دعددونو پر محور د b,a او c نقطو د موقعیت پورې اړه لري.

6.1.4 مسئله (د انتیگرالونو په باب مثلثي نامساوات) فرضوو چې f پر [a,b] متمادي ده. پس:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)dx|.$$

ثبوت

که f پر [a,b] متمادي وي، $|f|$هم پر [a,b] متمادي ده (دتمرين په شکل يې پربږدو)

لرو چې دهر $x\epsilon$ [a,b] لپاره : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

بنا پردې: $\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

د انتيگرالونو په باب د ثابت ضريب د قانون له مخې .

$$\int_a^b -|f(x)|dx = -\int_a^b |f(x)|dx.$$

دی.بناپردې:

$$-\int |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

پورتنی نا مساوات په وضاحت رسوي چې:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(دا هغه څه وو چې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

5.1.4 قضيه (د انتيگرالونو لپاره د عمده قيمت په مفهوم قضيه)

فرضوو چې f او g د [a,b] پر انتروال متمادي او دهر $x\epsilon[a,b]$ لپاره $g(x) \geq 0$يا $g(x) \leq 0$وي ،پس $c\epsilon[a,b]$شتون لري داسې چې :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

ثبوت

څرنګه چې f او g پر [a,b] متمادي دي نو د هغوی حاصل ضرب هم پر نوموړي انتروال متمادي دی. پس f.g پر [a,b] انتيگرال منونکی دی. که دهر $x\epsilon[a,b]$ لپاره $g(x) = o$ وي نو په لاس راځي:

$$\int_a^b g(x)dx = o$$

پس د $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ مساوات د $x\epsilon[a,b]$ لپاره صدق کوي $.(o=o)$

اوس فرضوو چې دهر $x_0\epsilon[a,b]$ لپاره $g(x_0)>o$ دی. پس:

$$\int_a^b g(x)dx > o.$$

gو متماديت په منلو (د تمرين په شکل پربښودل شو). قبلوو چې پر [a,b] د f اعظمي قيمت M او اصغري قيمت يې m دی. لرو چې:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

ځکه چې د $x\epsilon[a,b]$ لپاره $g(x)\ge o$ دی. نو ليکلای شو چې:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

دا چې f پر [a,b] متمادي ده، شتون لري $c\epsilon[a,b]$ داسې چې د منځني قيمت د قضيې له مخې:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

په دې ډول:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

(دا هغه څه و چې موغوښتل او په اثبات ورسېدل) .

1.1.4 پايله (د انتيگرالونو لپاره د منځني قيمت قضيه)

فرضوو چې f پر [a,b] متمادي ده. پس $c\epsilon[a,b]$ شتون لري داسې چې:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(X)DX.$$

ثبوت

د نوموړې قضیې آثبآت دهر $x\epsilon[a,b]$ او g(x)=1 لپاره په پام کې نیسو او وینو چې:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b (1)dx = f(c)(b-1)$$

بنا پردې:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

(مطلوب په اثبات ورسیدو).

2.4 دحساب اساسي قضیه

1.2.4 د حساب د اساسي قضیې لومړۍ برخه

د حساب د اساسي قضیې لومړۍ برخه دا حالت بیانوي چې پر یوه انتروال د تابع د مشتق انتیگرال مساوي دی په تفاضل د قیمت د تابع د انتروال په پای نقطو کې.

1.2.4 قضیه (د حساب داساسي قضیې لومړۍ برخه)

فرضوو چې F' پر [a,b] متمادي ده پس:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

$F'(a)$ او $F'(b)$ په ترتیب سره کولای شو د تابع یو اړخیز مشتقات $F'_+(a)$ او $F'_-(a)$ تعبیر کړو.

ثبوت

د $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ دا ثبات لپاره باید وښیو چې دهر $\varepsilon > 0$ لپاره

$$\left|\int_a^b F'(x)dx - (F(b) - F(a))\right| < \varepsilon.$$

په دې ډول ، قبلوو چې $\varepsilon > 0$ راکړشوی. څرنگه چې F' پر [a,b] متمادي ده نو F' پر [a,b] دریمن انتیگرال منونکې ده. بنا پردې $\delta > 0$ شتون لري داسې چې که p د [a,b] یوه ویشنه وي په دې شرط چې $||p|| < \delta$ او $S(F,\dot{P})$ دریمن مجموعه وي لرو چې:

$$|S(F',\dot{p}) - \int_a^b F'(x)dx| < \varepsilon.$$

راځئ چې تقسیمات دارنګه پام کې ونیسو:

$$p = \{x_2, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{m-1}, x_n\}$$

کولای شو د F تابع د قیمتونو تغیر پر [a,b] انټروال داسې وټاکو چې د F تابع په قیمتونو کې تغیرات پر فرعي انټروالونو کې د P په واسطه داسې معلوم شوي وي:

$$\mathrm{F(b) - F(a) = F(X_n) - f(X_o) =}$$
$$= \left\| f(x_n) - f(x_{n-1}) \right| + \left| f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) \right| + \ldots + \left| f(x_2) - f(x_1) \right| + \left| F(x_1) - f(x_o) \right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left| (x_k) - f(x_{k-1}) \right|.$$

د منحني قیمت د قضیې له مخې $x_k^* \epsilon (x_1, x_2)$ شتون لري داسې چې:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = F'(x_k^*)\Delta x.$$

بنا پر دې:
$$F(b) - F(a) = \sum F'(x_k^*)\Delta x_k.$$

په دې ډول:
$$\left| \int_a^b F'(x)dx - F(b) - F(a) \right| - \left| \int_a^b F'(x)dx - \sum_{k=1}^{n} F'(x_k^x)\Delta x_k \right| < \varepsilon$$

څرنګه چې:
$$\left| \int_a^b F'(x)dx - (F(b) - F(a) \right| < \varepsilon$$

او 0< ε اختیاري عدد دی،

باید ولرو چې:
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

(دا هغه څه وو چې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

1.2.4 مثال قبلوو چې $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ راکړ شوی.

دتوان دقاعدې له مخې لرو:

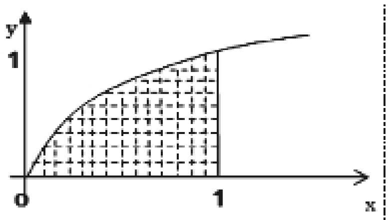
$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}x^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = \sqrt{x}.$$

که $x \geq o$ وي (مونږ باید $f'(o)$ لکه $F'_+(o)$ تعبیر کړو). په دې ډول $F'(x)$ پر [0,1] متمادي دی، ځکه چې پر[0,1] د حساب داساسي قضیې په تطبیق دریمن انټیګرال منونکې ده .

بنا پر دې:
$$\int_0^1 xdx = \int_0^1 F'(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{2}{3}.$$

په دې ډول ، پر [0,1] هغه مساحت چې د $y = \sqrt{x}$ د منحني،

او x=o ، X=1 ترمنځ واقع دی عبارت دی له $\frac{2}{3}$ شخه.



$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$:شکل (1)

2.2.4 **مثال** د $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{d}{dx}\cos(x^2)dx$ قیمت پیداکړئ.

حل

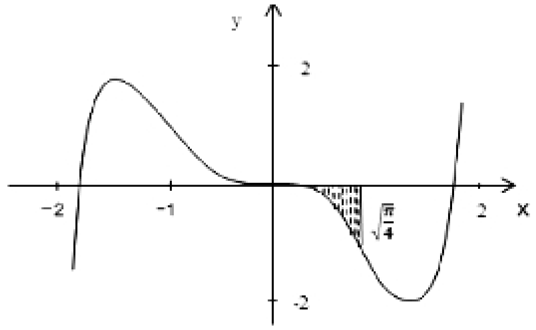
که $F(x)=\cos(x^2)$ په پام کې ونیسو لرو چې :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{d}{dx}\cos(x^2)dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{d}{dx}F(x)dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} d[F(x) = F(x)\Big|_0^{\sqrt{\pi/4}} = \cos(x^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi/4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

باید ذکر کړو چې: $f(x)=\frac{d}{dx}\cos(x^2)=-2x\sin(x^2)$ او $f(x)\le o$ دی که $o\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{4}}$.
په دې ډول، د G ساحې مساحت کومه چې د f تابع دګراف او $[0,\sqrt{\frac{\pi}{4}}]$ انتروال ترمنځ واقع ده عبارت دی له:

$$-\int_0^{\sqrt{\pi/4}} f(x)dx = -\int^{\sqrt{\pi/4}} \frac{d}{dx}\cos(x^2)dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



(1) شكل.

(2) شكل د G ساحه واضح كوي.

مونږ د دې قابل یو چې د پورته بېلګو انتیګرالونه د انتیګرال د حدودو له مخې له د تابع د مشتق له مخې محاسبه کړو.

1.2.4 پایله (د حساب اساسي قضیې پایله)

فرضوو چې f پر [a,b] متمادي او دهر $x\epsilon[a,b]$ لپاره $F^{'}(X)=f(x)$ دی.

پس:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

ثبوت

د حساب د اساسي قضیې د لومړۍ برخې له مخې لروچې:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F^{'}(x)dx = F(b)-F(a)$$

(دا هغه څه ووچې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

لکه څنګه چې په 1.2.4 قضیې کې کولای شو $F^{'}(a)$ او $F^{'}(b)$ په ترتیب سره $F_{+}^{'}(a)$ او $F_{-}^{'}(b)$ تعبیرکړو، کولای شو د حساب اساسي قضیې پایله لکه د (حساب اساسي قضیه) په پام کې ونیسو.

1.2.4 تعریف فرضوو چې F د f او لیه تابع ده د $\mathcal{I}$ پر یوه انتروال کله چې دهر x لپاره $F^{'}(x)=f(x)$ وي دغه مشتق دیو ساده انتروال په انجامي نقطو کې یو اړخیز مشتق په نظر کې نیسي. مونږ د $F(b)-F(a)$ قیمت په $F(x)\big|_a^b$ ښیو.

په دې ډول کولای شو دا پایله په لا ندې ډول دحساب اساسي قضیه په پام کې ونیسو:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

کله چې F پر [a,b] د f اولیه تابع وي.

3.2.4 مثال د $\int_4^9 \sqrt{x}dx$ قیمت پیداکړئ.

حل

د 1.2.4. بیلګې له مخې لیکلاې شو چې:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \wedge \quad F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

پس F د $[0,+\infty)$ پر انتروال د f اولیه تابع ده، ځرنګه چې $f'(x)=f(x)$ په لاس راځي، د هر $x\epsilon(0,+\infty)$ او $f'_+(0) = f(0)$ دی. بنا پر دې:

$$\int_4^9 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^9 = \frac{2}{3}(9^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}.$$

(هغه څه وو چې مو غوښتل)

اولیه تابع ته به مراجعه، وایو چې یوه تابع په حقیقت کې د زیات شمېراولیه توابعو لرونکې ده.

د بلې خوا ، دوه اختیاري اولیه توابع یوه د بلې څخه د یو جمعي ثابت په اندازه فرق کوي.

1.2.4 مسئله فرضوو چې F پر $\mathcal{I}$ پرانتروال د f اولیه تابع ده.

I. که c یو ثابت وي ، F+C هم د $\mathcal{I}$ پرانتروال د f اولیه تابع ده.

II. که G پر $\mathcal{I}$ د f یوه اختیاري اولیه تابع وي، د c یو ثابت داسې شتون لري چې دهر $x\varepsilon J$ لپاره $G(x) = F(x) + c$.

ثبوت

i. ځرنګه چې F پر $\mathcal{I}$ د f اولیه توابع ده، لرو چې دهر $x\varepsilon J$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

که c یو اختیاري ثابت وي، دهر $x\varepsilon J$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}(F(x)+c) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = f(x) + o = f(x)$$

بنا پردې F+C هم پر $\mathcal{I}$ د f اولیه تابع ده.

ii. ځرنګه چې F او G پر $\mathcal{I}$ د f اولیه توابع دي، لرو چې دهر $x\varepsilon J$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)_{\wedge}\ \frac{d}{dx}G(x)=f(x)$$

بنا پردې د c یو ثابت داسې شتون لري چې د ټولو $x\varepsilon J$ لپاره:

$$G(x)=F(x)+c.$$

(د 2.4 برخې د دریمې قضیې د پایلې له مخې ، هغه څه چې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

د 1.2.4 مسئلې له مخې، که F د f یوه اولیه تابع وي، کولای شو د C ثابت لپاره F+C د f یوه اختیاري اولیه تابع وټاکو. مونږ د $\int f(x)dx$ سمبول د f تابع د اولیه تابع ښودنې لپاره په کار اچوو او د $\int f(x)dx$ سمبول ته ، د f تابع غیر معین انتیګرال وایي. په دې ډول:

$$\int f(x)dx=F(x)+c.$$

4.2.4 مثال که $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ او $F(x)=x^2$ وي، پس F د f یوه اولیه تابع ده (د اعدادو د محور د ټولو نقطو لپاره)، ځکه چې دهر $x\epsilon\mathbb{R}$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3)=\frac{1}{3}(3x^2)=x^2$$

بنا پردې، کولای شو د f تابع غیر معین انتیګرال د c اختیاري ثابت لپاره لکه په لاندې ډول وښیو:

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c.$$

(څه مو چې غوښتل په اثبات ورسېدل) .

1.2.4 تبصره (توجه) کولای شو د $\int_a^b f(x)dx$ انتیګرال یو معین انتیګرال په پام کې ونیسو که د انتیګرال او معین انتیګرال ترمنځ تبعیض ته ضرورت وي. پر [a,b] انتروال د f تابع دانتیګرال او غیر معین انتیګرال د اصطلاح او ښودنې ترمنځ تشابه باید له منځه یووړل شي.

د $\int_a^b f(x)dx$ معین انتیګرال له یوه عدد څخه عبارت دی چې دریمن مجموعې له مخې په لاس راځي: داسې چې د $\int f(x)dx$ غیر معین انتیګرال داسې یوه تابع راښیي چې دهغې مشتق مساوي په f وي. په هر حالت f تر انیتګرال لاندې تابع ده.

اساسي قضیه چې رابطه دمعین او غیر معین انتیګرال ترمنځ بیانوي عبارت ده له:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

(دا هغه څه وو چې غوښتل مو په لاس یې راوړو).

5.2.4 مثال قبلوو چې C یو اختیاري ثابت دی، وښیئ چې لاندې دواړه افادې حقیقت لري.

$$\int 2\sin(x).\cos(x)dx = \sin^2(x)+c \quad {}_{\wedge}\int 2\sin(x)\cos(x) = -\cos^2(x)+c.$$

حل

لروچې:

$$\frac{d}{dx}\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos x \wedge \frac{d}{dx}(-\cos^2(x)) = -2\cos x(-\sin x) = 2\sin x\cos x$$ دی.

دا چې $Sin^2(x)$ او $-\cos^2(x)$ د عین تابع اولیه توابع دي هغوی باید د یو ثابت په اندازه یوه د بلې څخه فرق ولري په حقیقت کې دهر $x\in\mathbb{R}$ لپاره

$$.\, Sin^2(x)-(-\cos^2(x\ )=1$$

6.2.4 مثال له .5.2.4. بېلګې څخه په استفاده لرو چې:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin(x).\cos(x)\,dx = sin^2(x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

همدارنګه لرو چې:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin(x).\cos(x)\,dx = -cos^2(x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 0-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

(څه چې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

2.2.4 مسئله که چیرې r یو نسبتي عدد او $r\neq -1$ وي، پس:

که r معین وي . $$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$$

ثبوت

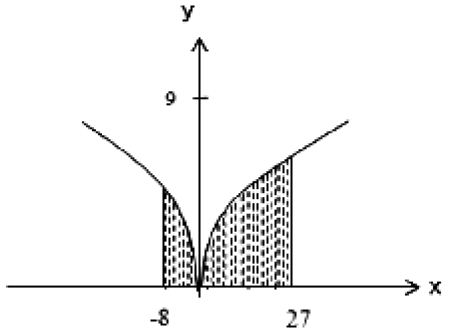
قبلوو چې د $\mathcal{I}$ یو انتروال د X^r په دومین کې شامل دی. د طاقت د قانون له مخې لرو چې :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)=\frac{1}{r+1}\frac{d}{dx}\left(x^{r+1}\right)=\frac{1}{r+1}(r+1)x^{r}=x^{r}.$$

د هر $x\epsilon\mathcal{I}$ لپاره (مشتق باید هسې تعبیر کړو لکه یو اړخیز مشتق په .0. کې). بنا پردې، پر $\mathcal{I}$ انتروال $\int x^r dr=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ +c

پورتنۍ مشتق عکس عملیې(اولیه تابع لاس ته راوړلو طریقې) ته په توجه ویلای شو چې دغه طریقه لکه د طاقت عکس طریقه ده لکه دمشتق نیولو لپاره د طاقت دطریقې له پایلې څخه عبارت ده.

7.2.4 مثال دطاقت ضد (عکس) طریقې له مخې $\int x^{2/3}dx$ معلوم او پایله د مشتق په نیولو دقیقه کړئ $\int_{-8}^{27} x^{2/3}dx$ محاسبه کړئ. د دغې انتیګرال تعبیر دمساحت په بڼودلو واضح کړئ.



شکل(3): $y=x^{2/3}$ دګراف او $[-8,27]$ ترمنځ ساحه

حل

$\frac{a}{-}$. د طاقت ضد عملیې له مخې لرو:
$$\int x^{2/3}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+c=\frac{3}{5}x^{5/3}+c.$$

داسې چې C یو اختیاري ثابت دی. لرو چې دهر $x\in\mathbb{R}$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}x^{5/3}+c\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right)=x^{2/3}$$

بنا پردې پر $\mathbb{R}$ دا بیانیه صدق کوی: $\int x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c.$

b. د حساب داساسي قضیې له مخې لرو چې:

$$\int_{-8}^{27} x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3}\Big|_{-8}^{27} = \frac{3}{5}(27^{5/3} - (-8)^{5/3} = \frac{3}{5}(3^5 + 2^5) = 165.$$

باید ذکر کړو چې f پر $\mathbb{R}$ متمادي ده. سره له دې چې f په .0. کې مشتق منونکې نه ده، خو دلته د f تابع د انتیگرال د موجودیت مسئله مطرح نه ده، همدارنگه د اساسي قضیې تطبیق منظور نه دی.څرنگه چې دهر x لپاره $o \geq x^{2/33}$ دی، د $f(x) = x^{2/3}$ دگراف او [8,27−] ترمنځ مساحت عبارت دی له :165. (مطلوب په اثبات ورسېد).

3.2.4 مسئله که $w \neq 0$ یو ثابت وي، وښیئ چې:

$$\int \sin(wx)dx = -\frac{1}{w}\cos(wx) + c$$

$$\int \cos(wx) = \frac{1}{w}\sin(wx) + c$$

ثبوت

د چاین (زنځیري) قاعدې له مخې لرو چې دهر $x \in \mathbb{R}$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}(-\frac{1}{w}\cos(wx)) = -\frac{1}{w}\frac{d}{dx}(\cos(wx) = -\frac{1}{w}(-w\ \sin(wx) = \sin(wx)$$

بنا پردې :

$\int \sin(wx) = -\frac{1}{w}\cos(wx)$ هغه څه په لاس راغې چې یې غواړو.

مشابه پردې: $\frac{d}{dx}(\frac{1}{w}\sin(wx) = \frac{1}{w}\frac{d}{dx}(\sin(wx)) = \cos(wx).$

بنا پردې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره : $\int \cos(wx) = \frac{1}{w}\sin(wx).$

8.2.4 مثال وښیئ چې : $\int_o^{\pi}\sin(x)dx = 2 \wedge \int_{\pi}^{4^{\pi/3}}\sin(x)dx = -\frac{1}{2}$ دی.

حل

که C یو اختیاري ثابت وي ، معمولاً لروچې:

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c.$$

د حساب داساسي قضیې له مخې لرو چې:

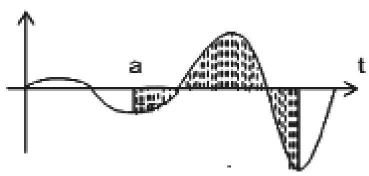
او $\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos(0) = 1 + 1 = 2.$

$$\int_0^{4\pi/3}\sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{\pi}^{4\pi/3} = -\cos(\tfrac{4\pi}{3}) - (-\cos(\pi) = -\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 1 =$$
$$= -\tfrac{1}{2}.$$

(مطلوب په لاس راغلو).

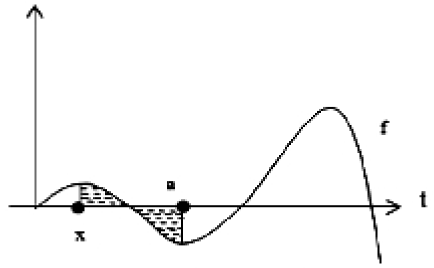
2.2.4 داساسي قضيې دوهمه برخه

دلته دانتيګرالونو په ذريعه توابع معرفي کوو. فرضوو چې د f تابع د $\mathcal{I}$ پر يوانتروال چې د a نقطه په کې شامله ده متمادي ده. قبلوو چې د هر $x \in \mathbb{R}$ لپاره په پام کې نيسو؛ بايد ذکر کړو چې د انتيګرال پورتنی حد د x متحول دی، اوانتيګرال نيولوګونګ (مجازي)متحول د t په حرف ښودل شوی دی (کولای شو له x څخه په غير بل حـــرف (توری) هم استعمال کړو).



$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$: شکل (4)

که X>a وي، F(x) په(شکل 4) کې دهغې ساحې مساحت راښيي چې د f تابع د ګراف او [a,x] ترمنځ واقع ده.
که x<a وي لرو چې:



$F(x) = -\int_x^a f(x)\,dx$: شکل (5)

څرنګه چې F(x) عبارت ده له 1- ځلې د هغې مساحت دی کوم چې د f تابع د ګراف او [a,x] ترمنځ واقع دی
او په (5) شکل کې دغه مساحت په خط خط شوی ډول ښودل شوی دی.
بآید ذکر کړو چې:

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=o.$$

9.2.4 مثال $F(x)=\int_2^x t^2dt$. په پام کې ونیسئ.

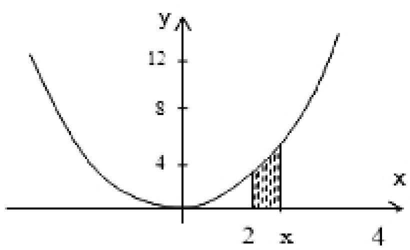
a. F(x), F(3) او F(1) معلوم کړئ.

b. د F(x) مفهوم په ګرافیکي ډول تعبیر کړئ د F ګراف رسم کړئ.

c. $F'(x)$ معلوم کړئ.

حل

$\underline{a}$. د طاقت منعکس قانون له مخې لرو چې:



$\mathbf{F(x)} = \int_0^x t^2\,dt$: شکل (6)

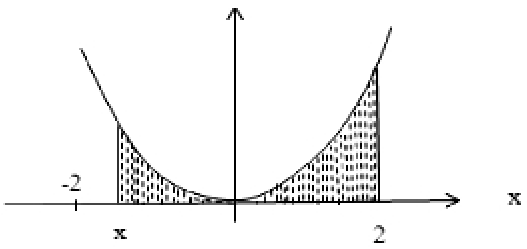
$$\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c\ \ ;\ C\in R.$$

$$F(x)=\int_2^x t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_2^x=\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}.$$

په خصوصي ډول :

$$F(3)=\int_2^3 t^2dt=\frac{19}{3}\wedge F(1)=\int_2^1 t^2dt=-\frac{7}{3}.$$

b. لرو چې: $F(2)=\int_{2}^{2} t^2 dt = o.$



(7) شکل: $f(x) = -\int_x^2 t^2 \, dt$

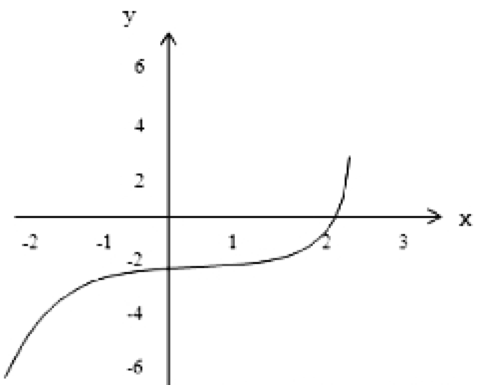
که x>2 وي، پس F(x) هغه مساحت دی چې $f(t) = t^2$ د ګراف او [2,x] انتروا ل ترمنځ واقع دی کوم چې په (6) شکل کې واضح دی.

که x>2 وي، نو $F(x) = -\int_{x}^{2} t^2 dt$ دی.

بنا پردې : F(X) په حقیقت کې (1−) ځلې د هغې ساحې مساحت رابنيي چې د $F(t)=t^2$ دګراف او [x,2] انتروال ترمنځ واقع دی او په (شکل 7) کې ښودل کېږي.

(شکل 8) د F ګراف رابنيي.

C. لرو چې: $F^{'}(x)\dfrac{d}{dx}\int_{2}^{x} t^2 dt = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{8}{3}) = x^2$



(8) شکل: $y = F(x) = \int_2^x t^2 \, dt$

باید ذکر کړو چې: x^2 تر انتیګرال لاندې تابع t^2 قیمت په t=x کې رابنیي.

$$F(x)=\int_2^x t^2 dt$$

په پورتنۍ بېلګې کې په عمومي ډول $\frac{d}{dx}\int_o^x f(t)dt=f(x)$ حقیقت لري.

2.2.4 قضیه (د حساب د اساسي قضیې دوهمه برخه)

فرضوو چې د f تابع د $\mathcal{I}$ پر انتروال متمادي او a د $\mathcal{I}$ یوه ورکړ شوې نقطه ده ، که $f(x)=\int_a^x f(t)dt$ وي پس د هر $x\in\mathcal{I}$ لپاره $F'(x)=f(x)$. نومړی مشتق لکه د $\mathcal{I}$ انتراول په یوې انجامي نقطې کې یو اړخیز مشتق تعبیروي.

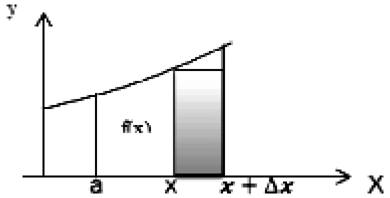
2.2.4 تبصره د حساب د اساسي قضیې دوهمه برخه دا واضح کوي چې دهر $x\in\mathcal{I}$ لپاره :

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$ پر $\mathcal{I}$ د f اولیه تابع ده.

(په دې ګومان چې f پر $\mathcal{I}$ متمادي ده). بنا پردې $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

(دا هغه څه و چې غوښتل مو ثابت یې کړو).

لرو چې: $f(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$



(9) شکل: $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\cong f(x)\Delta x$

(9) شکل ته په توجه که $\Delta x > o$ ډېر کوچنی وي، نوموړی کمیت په تقریبي ډول د هغه مستطیل مساحت رابنیي چې قاعده یې (عرض) یې د $[x, x+\Delta x]$ انتروال او جګوالی (طول) یې f(x) دی بنا پردې:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f(x)\Delta x$$

له دې ځایه د Δx کوچني قیمت لپاره حاصلوو چې:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cong f(x)\Delta x$$

په دې ډول دا ممکنه ده چې :
$$F^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

د 2.2.4. قضیې ثبوت .وبه ښیو چې د $\mathcal{I}$ په داخل کې د x په یوه نقطه کې د $F^{'}(x) = f(x)$ دی.

که x د $\mathcal{I}$ یوه داخلي نقطه وي، دغه مساوات د F دیواړخیزمشتق او f(x) ترمنځ په مشابه ډول یو مناسبت جوړوي.

قبلوو چې $\Delta x > o$ دی. زمونږ دظاهراً معقول متحول له مخې.

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

بنا پردې :
$$\frac{f(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

په دې ډول، دغه د تفاضل نسبت د $[x, k+\Delta x]$ پر انتروال د f تابع د منځني قیمت څخه عبارت دی.

د انتیګرالونو له پاره منځني قیمت دقضیې له مخې په $[x, x+\Delta x]$ پرانتروال د f تابع د منځني قیمت څخه عبارت دی. انتیګرالونو لپاره د منځني قیمت د قضیې له مخې په $[x, x+\Delta x]$ کې د $C(x, \Delta x)$ یوه نقطه داسې شتون لري چې:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c/x, \Delta x))$$

(د $c(x, \Delta x)$ ښودنه رابنیي چې c د x او Δx پورې اړه لري). بنا پردې:

$$F_{+}^{'}(x) = \lim_{\Delta r \to 0^{+}} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta r \to 0^{+}} f(c(x, \Delta x)$$

څرنګه چې $c(x, \Delta x)$ د x او $x+, \Delta x$ ترمنځ واقع دی نو:

$\lim_{\Delta x \to o} c(x, \Delta x) = x$ دی ځکه چې f په x کې متمادي ده یعنې:

$$\lim_{\Delta x\to o^+} f(c(x,\Delta x)) = \lim_{\Delta x\to o} f(c(x,\Delta x)) = f(\lim_{\Delta x\to o} f(c(x,\Delta x) = f(x)$$

$$F_+^{'}(x) = \lim_{\Delta x\to o^+} f(c(x,\Delta x)) = f(x)$$

که $\Delta x < o$ وي

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \frac{1}{(-\Delta x)}(-\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt) = \frac{1}{(-\Delta x)}\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt.$$

وورستنۍ افاده پر $[x+\Delta x\,,x]$ انتروال د f له منځني قيمت څخه عبارت دی.

پرانتيګرالونود منځني قيمت د قضيې له مخې$[x+\Delta x\,,x]$ $\in$ $C(x,\Delta x)$هسې شتون لري چې:

$$\frac{1}{(-\Delta x)}\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt = f(c(x,\Delta x)$$

بنا پر دې:

$$F_-^{'}(x) = \lim_{\Delta x\to o^-}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to o^-} f(c(x,\Delta x) = f(\lim_{\Delta x\to o^-} c(x,\Delta x)) = f'(x)$$

ځکه چې $C(x,\Delta x)$ د $x+\Delta x$ او x ترمنځ واقع ، او f په x کې متمادي ده. په دې ډول

$$F^{'}(x) = F_+^{'}(x) = F_-^{'}(x) = f(x)$$

(دا هغه څۀ ووچې مو غوښتل په اثبات ورسېدل).

10.2.4 مثال د ساين انتيګرال تابع Si په لاندې افادې تعويضوو:

$$Si(x) = \int_o^x \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

$Si^{'}(x)$ پيدا کړئ.

حل

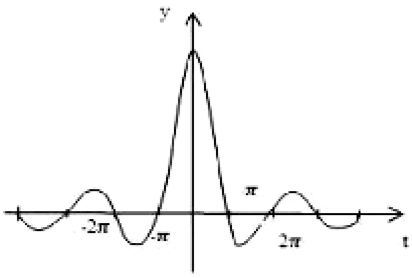
خرنګه چې $\lim_{t\to o}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ دی. که په پام کې ونيسو:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{sint}{t} & ; if\ t \neq 0 \\ 1 & ; if\ t = 0 \end{cases}$$

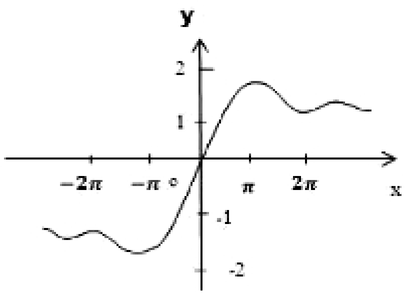
پس f د حقيقي محور په ټولو نقطو کې متمادي ده. کولای شو $\int_o^x \frac{\sin(t)}{t}dt$

داسې تعبیرکړو لکه $\int_{o}^{x} f(t)dt$ په دې ډول، د حساب داساسي قضیې دوهمه برخه صدق کوي او لرو چې:

$$\frac{d}{dx}si(x)=\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & ;if\ \ x\neq 0\\ 1 & ;if\ x=0\end{cases}$$



(10) شکل: $y=\frac{\sin(t)}{t}$



(11) شکل: د ساین انتیګرالي تابع .

11.2.4 مثال د طبيعي لوگارتم افاده دارنگه تعريفوو:

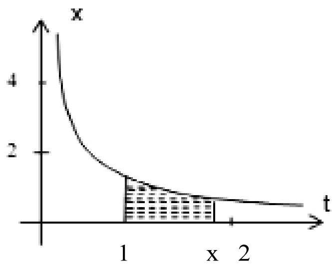
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt; \quad for\ \ x > o.$$

څرنگه چې $\frac{1}{t}$ پر $[0,+\infty)$ يوه متمادي تابع ده، نو طبيعي لوگارتم د هر X>0 لپاره تعريف شوی دی.

لرو چې :

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

که x>1 وي ln(x) لکه چې په(12) شکل کې يې وينو دهغې مساحت څخه عبارت دی چې د f دگراف او [1,x] انټروال ترمنځ واقع دی.



(12) شکل $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

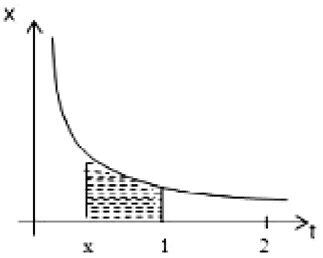
که 0<x<1 وي

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$$

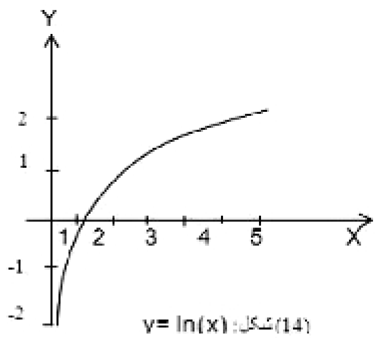
ځکه چې ln(x) مربوط دی په :

(مساحت ترمنځ د $y = \frac{1}{t}$ گراف او [x,1] انټروال) × (−1)

لکه چې په (13) شکل کې يې وينو.



(13) شکل: $\ln(x) = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$



(14)شکل: $y= \ln(x)$

(14) شکل د طبیعي لوګارتم ګراف رابښيي.کولای شو په سیستماتیک ډول د انتیګرال له برکته د طبیعي لوګارتم اساس خواصوته ورسیږو.لاندې خاصیت دا بیانوي چې ولې طبیعي لوګارتم یوه خاصه تابع د حساب بلله کیږي.

4.2.4 مسئله د طبیعي لوګارتم مشتق منونکی دی او هم پر $(0,+\infty)$ متمادي دی. لرو چې :
$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}; \, for \; x > 0$$

له همدې امله د C اختیاري ثابت لپاره پر $(0,+\infty)$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c.$$

ثبوت

څرنګه چې $\frac{1}{t}$ پر $(0,+\infty)$ یوه متمادي تابع رابنيي، لروچې:

$$\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt=\frac{1}{x}.\ ;\ \forall x>o.$$

د حساب داساسي قضيې د دوهمې برخې له مخې دا چې د مشتق نیولو قابلیت پرمتمادیت دلالت کوي نود طبیعي لوګارتم تابع پر $(0,+\infty)$ یوه متمادي تابع ده . دهر $x>0$ لپاره د

$$\frac{d}{dx}\ln(x)\frac{1}{x}$$

حقیقت تعبیر دادی چې د ln(x) تابع پر $(0,+\infty)$یوه اولیه تابع د $\frac{1}{x}$ ده. بنا پردې کولای شو د $\frac{1}{x}$ غیر معین انتیګرال د c اختیاري ثابت په نظر کې نیولو سره د طبیعي لوګارتم تابع په پام کې ونیسو یعنې: $\int\frac{1}{x}dx=\ln(x)+c.$

پورتنۍ بیانیه پر $(0,+\infty)$ د صدق وړ ده. (دمطلوب اثبات ته ورسېدو).

اوس چې مو دحساب اساسي قضيې دوهمه برخه جوړښت ته درسوله ، راځئ چې د دې قضيې دواړه برخې په متناظر ډول پرتوابعو په اسانۍ سره واضح کړو:

$$1.\int_{a}^{x}\frac{df(t)}{dt}=f(x)-f(a).$$

$$2.\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x).$$

دابه مناسبه وي چې اساسي قضيه دارنګه تکرار کړو: د قضيې لومړۍ برخه دابیانوي چې پر یو انتروال د یوې تابع د اولیه تابع انتګرال عبارت دی له تفاوت د قیمتونو دتابع څخه دانتروال په انجامي نقطو کې. دوهمه برخه دقضيې دابیانوي چې د $\int_{a}^{x}f(t)dt$ تابع مشتق د تر انتیګرال لاندې تابع له قیمت څخه عبارت دی د انتیګرال نیولو په فوقاني حد کې. کولای شو ووایو چې مشتق نیول او انتیګرال نیول یوه د بلې عکس عملیې دي نظر پورتنۍ اساسي قضيې ته. کولای شو دحساب داساسي قضيې هره برخه په ساده ډول(دحساب اساسي قضیه) په پام کې ونیسو.

3.4 د تعویض کولو طریقه او په حصو (برخو) دانتیگرال نیول

1.3.4 قضیه (د تعویض کولوطریقه دغیرمعینوانتیگرالونو لپاره)

فرضوو چې f د I پر انتروال متمادي ده، u د $\mathcal{J}$ پرانتروال مشتق منونکې ده او $u(x) \in I$ ده که $x \in J$ وي پس: $\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du$ دی که $x \in \mathcal{J}$ وي .

$\int f(u)du$ افاده د u یوه تابع رابنیي. په دې باید پوه اوسو چې پورتني مساوات صدق کوي په دې گومارلو چې د u پرځای کولی شو x په پام کې ونیسو. څرنگه چې دغه مساوات غیر معین انتیگرال ایجابوي کولای شو یو مناسب اختیاري ثابت یوې خواته علاوه کړو.

د **1.3.4 قضیې ثبوت** د حساب داساسي قضیې دلومړۍ برخې له مخې ،دا چې د f متمادي تابع پرI انتروال د F اولیه تابع لرونکې ده ، په دې ډول پر I:

$$\frac{d}{du}F(u) = f(u) \Leftrightarrow F(u) = \int f(u)\,du$$

دی. راځئ چې Fou پر $\mathcal{J}$ یوه مرکبه تابع قبوله کړو، د زنځیري قاعدې له مخې دهر $x \in J$ لپاره:

$$\frac{d}{dx}(Fou)(x) = \frac{d}{dx}(F(u(x) = \frac{d}{du}(F(u)u = u(x)\frac{d}{dx}u(x) = f(u(x))\frac{du}{dx}$$

بنا پردې پر $\mathcal{J}$:

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = F(u(x))$$

څرنگه چې: $F(u) = \int f(u)du$ دی ، لرو چې پر $\mathcal{J}$

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = F(u(x)) = \int f(u)du\mathrm{I}_{u=u(x)}$$

دی. له دې ځایه:

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du.$$

دی، د دې په پوهیدو چې د ښي خوا قیمت په u(x) کې حاصلیږي. (دمطلوب اثبات).

1.3.4 مثال $\int \sin^2(x)Cos(x)dx$. معلوم کړئ.

حل

په پام کې نیسو $u(x) = \sin(x)$. پس:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

بناپر دې:

د $\int \sin^2(x) Cos(x) dx = \int (\sin))^2 \cos(x) dx = \int (\sin(x))^2 \frac{du}{dx} dx$

تعویض کولو په طریقه او د طاقت عکس قضیې له مخې لرو چې:

$$\int (u(x))^2 \frac{du}{dx} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C$$

داسې چې C یو اختیاري ثابت دی. بنا پردې:

$$\int \sin^2(x).\cos(x) dx = \frac{1}{3} u^3 + C := \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$$

(دمطلوب اثبات).

لکه چې په پورتنې بیلګې کې د تعویض طریقه له مونږ سره دومره کومک کوي په همدې اندازه یې د غیر معین انتیګرال په بدلون کې په شکل دمجمع دغیر معینو انتیګرالونو کې هم کوي.

1.3.4 تبصره دا اسانه ده چې د تعویض کولو طریقې څخه یادونه وکړو: په $\int f(u(x)) \frac{du}{dx}.dx$ افاده کې کولای شو $\frac{du}{dx}$ لکه یوه ((سمبو لیکي تابع)) یا ((سمبولیکي له منځه وړنه)) په پام کې ونیسو او ولیکو چې:

$$\int f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du.$$

په دې ډول په نظر کې نیولای شو: $du = \frac{du}{dx} dx.$

کله چې د تعویض کولو طریقه اجراء کوو. د دې ضرورت نه شته کوشش وکړو چې د سمبولیکي تنظیم په ترڅ کې یو مجازی تعبیر وکړو. مونږ به د تعویض کولو طریقه په یوه خاص ډول یادوو. د دې بیان له مخې د $\frac{du}{dx} dx.$ سمبول ، $du(x, dx.)$ دیفرنسیل قیمت نه شي ټاکلی چې مونږ پرې په 3.5. برخې کې بحث کړی. حتی دغه لکینه یوازې یوه نمایشی ښودنه ده سره له دې هم مونږ به د دې دواړو مقصدونو د جوړښت په باب د دې برخې په پای کې معلومات ارائه کړو.

2.3.4 مثال د $\int x\sqrt{4 - x^2} dx$ قیمت معلوم کړئ.

حل

که $u = 4 - x^2$ قبول کړ وپس د $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(4 - x^2) = -2x$ له مخې لرو چې:

$$du = \frac{du}{dx} dx = -2x dx.$$

د تعویض کولو د طریقې له مخې:

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{4-x^2}\,(-2x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{u}.\frac{du}{dx}.dx = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + 3.$$

باید ذکر کړو چې کولای شو په لنډ ډول $du = \frac{du}{dx}dx$ قبول او دابه مو کومه غلطي نه وي. په دې ډول:

$$du = \frac{d}{dx}(4-x^2)dx = -2xdx$$

په پایله کې کولای شو د xdx پرځای $-\frac{1}{2}du$ ولیکو. بنا پر دې:

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-x^2}\,xdx = \int \sqrt{u}(-\frac{1}{2})du = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du.$$

چې د دې قیمت مو مخکې په لاس راوړی دی. (دمطلب اثبات).

2.3.4 دمعینو انیتگرالونو لپاره دتعویض کولو طریقه

دتعویض کولو په طریقه مو دغیر معین انتیگرال معلومول زده کړل په همدې ډول کولای شو دتعویض کولو په طریقه معین انتیگرالونه هم لکه د پورته مثالونو په شان معلوم او قیمت یې په لاس راوړو. دلته دتعویض کولو تعبیر مستقیماً دمعینو انتیگرالونو پاره په پام کې نیسو.

2.3.4 قضیه (دمعینو انتیگرالونو لپاره دتعویض کولوطریقه)

فرضوو چې f پر یو انتروال چې u(a) او u(b) پرې معلوم دي، متمادي ده او هم du/du پر [a,b] انتروال متمادي دی. پس:

$$\int_a^b f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

ثبوت

د تعویض کولو طریقه دمعینو انتیگرالونو لپاره کولای شو د تعویض کولو له طریقې څخه دغیر معینو انتیګرالونو لپاره استخراج کړو. قبلوو چې F پر یوه انتروال چې u(a) او u(b) پرې معلوم وي د f اولیه تابع ده پس $\frac{d}{du}F(u) = f(u)$ په لاس راځي که u د u(a) او u(b) ترمنځ واقع وي.

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = (\frac{dF}{du}\Big|_{u=u(x)})\frac{du}{dx} = f(u(x))\frac{du}{dx} \quad ; if \ \ x\in[a,b].$$

د حساب د اساسي قضيې له مخې د لومړۍ برخې په تطبيق لرو چې:

$$F(u(b))-F(u(a))=\int_a^b \frac{d}{dx}(F(u))dx=\int_a^b (u(x))\frac{du}{dx}dx.$$

د حساب د اساسي قضيې له مخې د لومړۍ برخې په تطبيق لرو چې:

$$F(u(b))-F(u(a))=\int_a^b \frac{d}{dx}\,(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{dx}=\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{dx}.$$

بنا پردې باید ولروچې:

$$\int_a^b f(u(x))\frac{du(x)}{dx}dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

(دا هغه څه حاصل شو چې غوښتل مو په لاس يې راوړو).

3.3.4 تبصره (توجه) دمعینو انتیګرالونو لپاره دتعویض کولو د طریقې په ترڅ کې مو څرګند کړل چې دغه طریقه مشابه ده په تعویض کولو طریقې سره دغیر معینو انتیګرالونو لپاره 2.1.4. قضیې یوه نوې قاعده مشخصه کړه چې معین او غیر معین انتیګرالونه دوه ډوله مختلف واقعیتونه (د متضادو عددونو توابع) دي. همدارنګه د انتیګرال نیولو په حدونو کې یو بدلون دی داسې چې: په بنیې خواکې u(a) شخه a ته،اونه u(b) شخه b ته ، لکه په اولنې انتګرال کې یې چې بدلون موندلی دی.

3.3.4 مثال دمعین انتیګرال لپاره د تعویض کولو په طریقه د لاندې انتیګرال قیمت پیداکړئ:

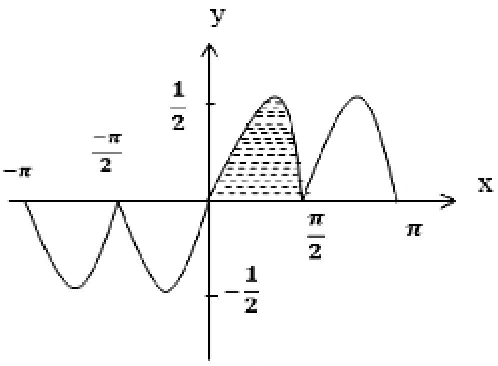
$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2/3}(x)\sin(x)dx.$$

حل

په پام کې نیسو: $u=\cos(x)$ پس :

$$du=\frac{du}{dx}dx=\frac{d}{dx}(\cos(x))dx=-\sin(x)dx.$$

بنا پردې:



(1) شکل

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2/3}(x)\sin(x)dx = = \int_{u=\cos(0)}^{u=\cos(\pi/2)} u^{2/3}(-\frac{du}{dx})dx = -\int_1^{o} u^{2/3}du = \int_0^1 u^{2/3}du =$$

$$= \frac{5}{3}u^{5/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$$

(1) شکل د گراف رابنيي. او دانتيګرال په واسطه مو دخط خط شوي برخې مساحت په لاس راوړ.

1.3.4 مسئله که چيرې:

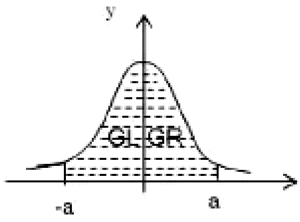
f .a پر [-a,a] متمادي او جفته وي پس: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

f .b پر [-a,a] متمادي او تاقه وي پس : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

د مسئلې دواړه حالتونه ممکن دي. که f جفته وي ګراف يې نظر د oy محور ته متناظر دی لکه په (2) شکل کې چې يې وينو د G_Lاو G_R ساحو مساحتونه سره يو شان او برابر دي: په دې ډول:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = (area\,of\,theG) + (areaofGR) =$$

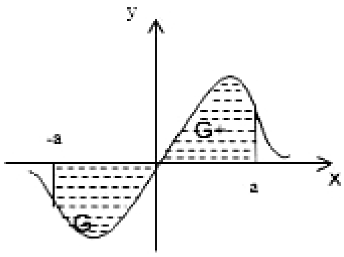
$$= 2x(areaof\,GR) = 2\int_0^a f(x)dx.$$



(2) شکل

که f تاقه وي ګراف يې نظر مبداء د مختصاتو ته متناظر دی.

(3) شکل ته په مراجعه د G_- خط خط شوې برخې مساحت عبارت دی له (−1) چنده د G_+ خط خط شوې برخې له مساحت سره. په دې ډول:



(3) شکل

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

(دG_+ خط خط شوې برخې مساحت) + (G_- خط خط شوی مساحت) =

1.3.4 مسئلې ثبوت مونږ به دلته د مسئلې a جزپه اثبات ورسوو، او مشابه پردې د b جز په اثبات رسوو. په انتروالونو کې دجمعي خاصيت له مخې ليکو چې:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

څرنګه چې f جفته ده نو f(−x) = f (x) ده . بنا پردې:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx.$$

راځئ چې پر انتیګرالونو دتعویض کولو طریقه تطبیق او u=-x یعنې $\frac{du}{dx}=-1$ قبول کړو، په دې توګه:

$$\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_{-a}^{0} f(u)(-1)dx = -\int_{-a}^{0} f(u)\frac{du}{dx}dx =$$

$$= -\int_{u(-a)}^{u(0)} f(u)du = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(u)du.$$

په دې ډول : $\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(x)dx$

بنا پردې:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

(دمطلوب اثبات شو).

3.3.4 دغیر معینو انتیګرالونو انتیګرال نیول په حصو (برخو)

3.3.4 قضیه (دغیر معینو انتیګرالونو لپاره په حصو انتیګرال نیول)

فرضوو چې f او g د J پر انټروال مشتق منونکې دي. پس دهر $x \in J$ لپاره :

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx.$$

کولای شو د زبر یه ښودنې (Prime notation) دارنګه ولیکو:

$$\int f(x).g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x).f'(x)dx.$$

ثبوت

د حاصل ضرب دقاعدې له مخې لرو چې د هر $x \in J$ لپاره :

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$$

دغه لیکنه د fg اولیه تابع $f'g + fg'$ له افادې سره معادله ده . په دې ډول

$$f(x)g(x) = \int \frac{df}{dx}g(x)dx + \int f(x)\frac{dg}{dx}dx$$

بنا پردې دهر $x \in J$ لپاره :

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx.$$

د $du = \frac{du}{dx}dx$ افاده د تعویض کولو په طریقه کې له مونږ سره پوره مرسته کوي همدارنګه دغه افاده له مونږ سره په حصو دانتیګرال نیولو په بشپړتیا کې له پوره مرسته کوي. که د

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{df}{dx}dx$$

په افاده کې f(x) په u او g(x) په v عوض کړو وبه لرو چې :

$$\int udv = u.v - \int vdu.$$

باید ذکر کړو چې : $u = \int \frac{du}{dx}dx = \int du \wedge v = \int \frac{dv}{dx}dx = \int dv$.

4.3.4 مثال $\int x\sin(4x)dx$. معلوم کړئ.

حل

د $\int udv = u.v - \int vdu$ حصوي فورمول په تطبیقولو که $u = x$ او $dv = \sin(4x)dx$ قبول کړو وبه لرو چې:

$$du = \frac{du}{dx}dx = dx.$$

او $v = \int dv = \int \sin(4x)dx = -\frac{1}{4}\cos(4x) =$

بنا پردې:

$$\int x\sin(4x)dx = x(-\frac{1}{4}\cos(4x) - \int -\frac{1}{4}\cos(4x)dx =$$

$$= -\frac{x\cos(4x)}{4} + \frac{1}{16}\sin(4x) + C \quad ; \quad C \in IR$$

پورتنۍ افاده د عددونو دمحور په ټولو نقطو کې صدق کوي.

4.3.4 د معینو انتیگرالونو لپاره په حصو انتیگرال نیول

4.3.4 قضیه (دمعین انتیگرال تعبیر دحصوي انتیگرال په ذریعه)

فرضوو چې $f^{/}$او $g^{/}$ پر [a,b] متمادي دي. پس :

$$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx}\,dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g(x)\frac{df}{dx}\,dx$$

ثبوت

لکه دغیرمعین انتگرال دتعبیرپه شان چې دحصوي انتگرال په ذریعه موثبوت کړ، دشروع نقطه دمشتق نیولو لپاره دضرب قاعده ده داسې چې:

$$\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = \frac{df}{dx}.g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}.$$

خرنګه چې $f^{/}$او $g^{/}$ پر [a,b] متمادي دي نو fg، g $f^{/}g$ او $fg^{/}$ هم پر[a,b] متمادي او انتیګرال منونکې دي. د حساب داساسي قضیې له مخې لرو چې:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

بنا پردې:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b [\frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}]dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\frac{dg}{dx} + \int_a^b \frac{df}{dx}g(x)dx.$$

په دې ډول: $$\int_a^b f(x)\frac{dg}{dx} = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b g(x)\frac{df}{dx}dx.$$

لکه دغیر معینو انتیګرالونو د حالت په شان، کولای شو د معین انتیګرال تعبیر په حصوي انتیګرال نیولو دلاندې سمبول په کارولو وښاکو.

$$du = \frac{du}{dx}dx.$$

په حقیقت کې که f(x) په u او g(x) په v عوض کړو، لروچې:

$$\int_a^b udv = [u(b).v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

5.3.4 **مثال** فرضوو چې $f^{//}$ او $g^{//}$ پر [a,b] انتروال متمادي او هم $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$ دي وښيئ چې:

$$\int_a^b f^{//}(x)g(x)dx=\int_a^b g^{//}(x)f(x)dx.$$

حل

د حصوي انتيګرال په تطبيقولو لروچې:

$$\int_a^b f^{//}(x)g(x)dx=\int_a^b (f^{/})^{/}(x).g(x)dx=$$

$$=[f^{/}(b)gb)-f^{/}(a)g(a)]-\int_a^b f^{/}(x)g^{/}(x)dx=-\int_a^b f^{/}(x)g^{/}(x)dx.$$

څرنګه چې $g(a)=g(b)=0$ دی، د بل ځل لپاره د حصوي انتيګرال په تطبيقولو د $u=g^{/}(x)$ او $dv=f^{/}(x)dx$ له مخې د $du=g^{//}(x)\wedge\vee=f(x)$ په نظر کې نيولو سره حاصلوو چې:

$$\int_a^b g^{'}(x)f^{'}(x)dx=\int_a^b udv=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b vdu=$$

$$=g'(b)f(b)-g'(a)f(a)-\int_a^b f(x)g''(x)dx=-\int_a^b f(x)g''(x)dx.$$

څرنګه چې $f(a)=f(b)=0$ دي.

بنا پر دې:

$$\int_a^b f''(x)g(x)dx=-\int_a^b f^{'}(x).g^{'}(x)dx=-(-\int_a^b f(x).g^{"}(x)dx)=\int_a^b f(x)g''(x))$$

(دمطلوب اثبات).

4.4 نامعمول يا نامناسب(غيرخاص) انتيګرالونه Improper Integrals

په دې برخه کې غواړو دا نتيګرال مفهوم ته په ځينو حالتونو کې لکه په غير محدودو انتروالونو (بې نهايته فاصلو) کې يا دتابع په غير متمادي نقطو کې ، انکشاف ورکړو.

1.4.4 نامناسب انتيګرالونه پرغيرمحدودوانتروالونو

راځئ چې په يوه خاص حالت شروع وکړواوهغه هم په لاندې بيلګې کې .

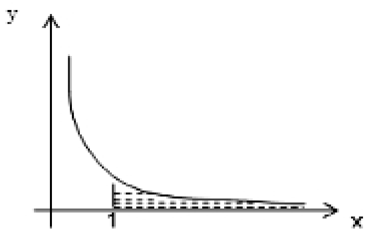
1.4.4 مثال قبلو چې $f(x)=\frac{1}{x^2}$ راکړ شوې ده. غواړو د f تابع انتیګرال د [1,b] په شکل انتروال محاسبهٔ کړو. لروچې:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^b=-\frac{1}{b}+1.$$

بناپردې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+1)=1=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$$

کولای شو د f تابع انتیګرال له 1 څخه تر b پورې په هغه ساحه کې چې د f دګراف او [1,b] انتروال ترمنځ واقع دی تعبیر کړو. دا مناسبه ده، ووایو د هغې ساحې مساحت چې د f تابع دګراف او $[1,+\infty)$ انتروال ترمنځ واقع ده 1 دی. د G ساحه په(شکل 1)کې ښودل شوې ده .



$y=\frac{1}{x^2}$: شکل (1)

1.4.4 تعریف فرضوو چې f د [a,b] په شکل یوه انتروال کې داسې چې b>a وي متمادي ده. وایو چې د $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب Converges دی که:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

موجود وي(لمیټ یې معین وي). په دې حالت کې دغیر خاص انتیګرال قیمت لکه پورتنی لمیټ تعریفوو اوپه عین سمبول یې دارنګه ښیو.

$$\int_a^\infty \mathbf{f(x)dx}=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

وایوچې د $\int_a^\infty \mathbf{f(x)dx}$ غیرخاص انتیګرال متباعد(Diverges) دی که: $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ شتون ونه لري.

دمتقاربيت (convergence) په حالت کې یوغیرخاص انتیګرال داسې تعبیروولکه دهغې خط خط شوې ساحې مساحت چې دf تابع دګراف او [a,+∞) انتروال ترمنځ واقع دی،لکه دیومحدود انتروال په حالت کې.

1.4.4مثال ته په توجه ، که $f(x)=\frac{1}{x^2}$ وي ، پر [a,+∞) انتروال د f غیرخاص انتیګرال متقارب او قیمت یې 1 دی:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^2}\,dx=1.$$

2.4.4 مثال وښیي چې د $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ غیزخاص انتیګرال متقارب دی که متباعد، او که متقارب وي قیمت یې معلوم کړئ.

حل

د b>1 لپاره لرو چې:

$$\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\ln(b).$$

بنا پر دې :

$$\int_1^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}[\ln(b)]=+\infty$$

دا فقط په هغه حالت کې په لنډ ډول لیکو چې د ln(b) حد په اختیاري ډول لوی دی که b په کافي اندازه لوی کمیت وي. په دې ډول د

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$$

غیر خاص انتیګرال متباعد دی. (داؤد مطلب اثبات).

1.4.4 او 2.4.4. بېلګې د $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ په شکل غیر خاص انتیګرالونه دي.

راځئ چې د دغې غیر خاص انتیګرال عمومي حالت وڅیړو.

1.4.4 مسئله فرضوو چې P یو اختیاري حقیقي عدد او a>0 دی. د $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ متقارب دی که p>1 وي، او متباعد دی که $p\leq 1$ وي.

ثبوت

قبلوو چې P=1 دی. لروچې:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln(b) - \ln(a).$$

له دې ځخه لرو:
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln(b) - \ln(a)] = +\infty$$

بنا پردې د $\int_a^\infty \frac{1}{x}dx$ غير خاص انتيګرال متباعد دی.

اوس فرضوو چې $P \neq 1$ دی لرو چې:

$$\int_a^b \frac{1}{x^p}dx = \int x^{-p}dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b = \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-P+1}$$

د p>0 لپاره $-p+1<0$, $b^{-p+1} = \frac{1}{a^{p-1}}$ او $a^{-p+1} = \frac{1}{a^{p-1}}$ دی. لرو چې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}[\frac{b^{-P+1}}{-P+1} - \frac{a^{-P+1}}{-P+1}] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}[-\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}] = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}; \lim\frac{1}{(p-1)b^{p-1}} = 0.$$

بنا پردې د $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$ غير خاص انتيګرال د p>1 لپاره متقارب او :

$$\lim\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$$

اوس فرضوو چې P<1 دی. لروچې:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p}dx = \frac{b^{-P+1}}{-P+1} - \frac{a^{-P+1}}{-P+1} = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

څرنګه چې 1-p>0 دی نو $\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = +\infty$ په لاس راځي. په پايله کې $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$ د $p<1$ لپاره متباعد دی. (دا ثبات نتيجه حاصله شوه).

3.4.4 مثال د $\int_0^\infty \sin(x)dx$ غير خاص انتيګرال هغه حالت معلوم کړئ چې په کې متقارب یامتباعدوي ، که متقارب وي قيمت يې پيداکړئ .

حل

ځرنګه چې $\int_0^\infty \sin(x)dx = -\cos(x)$ دی لرو چې:

$$\int_0^\infty \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^b = -\cos(b)+1.$$

دهر b لپاره د $-\cos(b)+1$ لمیټ د $b \to +\infty$ لپاره شتون نه لري. ځکه چې

n=1,2,3,... لپاره $-\cos((2n+1)\frac{\pi}{2})+1=1 \wedge -\cos(2n\pi)+1=0$ دی.

بنا پردې، د $\int_0^\infty \sin(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متباعد دی. باید ذکر کړو چې دهر b>0 لپاره $0 \le \int_0^\infty \sin(x)dx \le 2$ دی ځکه چې $0 \le -\cos(b)+1 \le 2$. نوموړی مثال رابښيي چې د $\int_a^\infty f(x)dx$ یو غیر خاص انتیګرال کیدای شي متباعد وي، د دې باوجود چې د $b \to \infty$ لپاره $\int_a^\infty f(x)dx$ بې نهایت ته تباعد نه کوي. (دمطلب اثبات).

کولای شو د $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ په شکل غیر خاص انتیګرال هم په نظر کې ونیسو:

2.4.4 تعریف فرضوو چې f پر $[-\infty, a)$ انتروال متمادي ده. وایو چې د $\int_{-\infty}^q f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی که $\lim_{b\to-\infty}\int_0^\infty f(x)dx$ موجود وي (لمیټ یې معین وي).

په دې حالت کې مونږ دغیر خاص انتیګرال قیمت معلومولو لپاره په لاندې سمبول حاصلوو. په دې ډول

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

که پورتنی لمیټ شتون ونه لري، وایو چې د $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متباعد دی.

4.4.4 مثال معلوم کړئ چې د $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx$ غیر انتیګرال متقارب دی که متباعد دی، او که متقارب وي قیمت یې کوم دی.

حل

لروچې:

$$\int_b^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx = arctg(x)\Big|_b^{-1} = arctg(-1) - arctg(b) = -\frac{\pi}{4} - arctg(b).$$

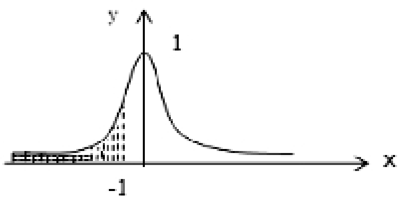
بنا پردې:

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to-\infty}(-\frac{\pi}{4} - arctg(b)) = -\frac{\pi}{4} - \lim_{b\to-\infty} arctg(b) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

په دې ډول ، راکړ شوی غیر خاص انتیگرال متقارب دی او لروچې:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$



(2) شکل.

(2) شکل د f گراف رابنيي. داسې چې $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ده.

هغه مساحت چې د f تابع د گراف او $(-\infty,-1]$ انټروال ترمنځ واقع دی $\frac{\pi}{4}$ دی.

(مطلب ثابت شو).

اوس دوه اړخیز غیر خاص انتیگرالونه په لاندې ډول معرفي کوو:

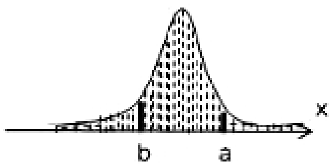
3.4.4 تعریف **فرضوو چې f پر $\mathbb{R}=(-\infty,\infty]$ متمادي ده. وایو چې د $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی که چیرې د $a\in\mathbb{R}$ داسې شتون ولري چې د هغې لپاره $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ او $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ انتیگرالونه متقارب وي.**

که دا داسې یو حالت وي چې په کې به مونږ د غیر خاص انتیګرال قیمت د یو اړخیزو غیر خاصو انتیګرالونو له مجموعې څخه حاصلوو نو په پام کې نیسو:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

د $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال ته متباعد وایي که چیرې د $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ یا $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ انتیګرال متباعد وي.

1.4.4 تبصره د $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متقاربیت یا متباعدیت او دهغې قیمت دمتقاربیت په حالت کې، د a ''په منځني نقطې'' پورې اړه نه لري. دغه ادعا به یوازې د انتیګرال دهندسي تعبیر له مخې دمنلو وړ وي.



(3) شکل : د f تر ګراف لاندې ساحه دa یا b په انتخاب لکه منتصفه نقطې پورې اړه نه لري.

5.4.4 مثال معلوم کړئ چې ایا د $\int \frac{dx}{4x^2-8x+13}$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی، که متباعد او که متقارب وي قیمت یې کوم دی.

حل

کولای شو وښیو چې:

$$\int \frac{dx}{4x^2-8x+13}dx = \frac{1}{6}arctg(\frac{2(x-1)}{3} + C.$$

د اولیه تابع له شکل څخه په اسانۍ تجویز وو چې 1 یوه اسانه منځنۍ نقطه ده. لرو چې:

$$\int_1^b \frac{dx}{4x^2-8x+13} = \frac{1}{6} arctg(\frac{2(x-1)}{3})_1^b =$$
$$= \frac{1}{6} arctg \frac{2(b-1)}{3} - 6arctg(0) = \frac{1}{6} arctg(\frac{2(b-1)}{3}.$$

بنا پر دې:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{4x^2-8x+3} = \lim_{b\to-\infty} \int_1^b \frac{1}{4x^2-8x+3} dx = \lim_{b\to-\infty} \left[\frac{1}{6} arctg \left\{\frac{2(b-1)}{3}\right\}\right] = \frac{1}{6}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

مشابه پر دې:

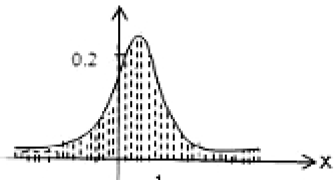
$$\int_b^1 \frac{1}{4x^2-8x+3} dx = \frac{1}{6} arctg(\frac{2(b-1)}{3}) \Big|_b^1 = -\frac{1}{6} arctg(\frac{2(b-1)}{3}).$$

له دې ځایه :

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{4x^2-8x+3} dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^1 \frac{1}{4x^2-8x+3} dx = \lim_{b\to-\infty} [-\frac{1}{6} arctg\{\frac{2(b-1)}{3}\}] =$$
$$= -\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

بناپردې:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2-8x+3} = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{4x^2-8x+3} + \int_1^\infty \frac{dx}{4x^2-8x+3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$



(4) شکل.

(4) شکل د $f(x) = \frac{1}{4x^2-8x+3}$ تابع گراف او د هغې ساحې مساحت رابنيي چې د f تابع د گراف او د ox محور ترمنځ واقع او قیمت یې $\frac{\pi}{6}$ دی.

2.4.4 تبصره(توجه) دا باید تعریف نه گڼو چې د $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

غیرخاص انتیگرال لاندې لیمټ دی:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$$

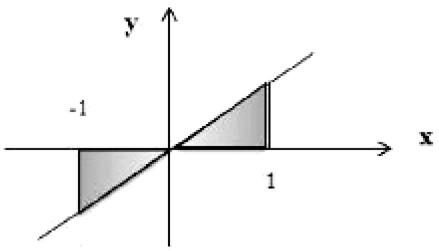
راځې د $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ غیرخاص انتیگرال په نظرکې ونیسو، ځرنگه چې د :

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b xdx = \lim_{b\to-\infty} \frac{b^2}{2} = +\infty.$$

غیرخاص انتیګرال متباعد دی، او دبلې خوا لروچې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} x dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{2}\Big|_{-b}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(0) = 0.$$

باید ذکرو کړو چې $f(x) = x$ یوه تاقه تابع ده چې ګراف یې نظر مبداء ته متناظر دی دا به حیرانونکــــې نه وي چــــې $\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$ دی. زمـــونږ د متقاربیت تعریف د $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ لپاره تقریباً د $\int_{b}^{c} f(x)dx$ شخه مطلب دی کله چې د $b\to-\infty$ لپـــــاره $c\to+\infty$ ته تقرب وکړي، په مخکینۍ نیوې نه چې $b\to-\infty$ یا $b=-c$ وي.



$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$: شکل (5)

6.4.4 مثال معلوم کړئ چې $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ غیرخاص انتیګرال متقارب دی، که متباعد ، او که متقارب وي قیمت ئې معلوم کړئ.

حل

مونږ به 0 منځنۍ نقطه وټاکو. د $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx$ او $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}$ دواړه غیرخاص انتیګرالونه به متقارب وي او د دواړو (دواړو خواو) غیرخاص انتیګرال ورکړ شوو انتیګرالونو متقاربیت لپاره په پام کی نیسو.

$\int_{0}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{b+1}\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(b^2+1).$

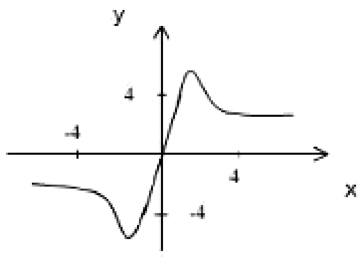
بناپرې د:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}\ln(b^2+1) = +\infty$$

په لاس راځي په دې ډول د $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ غیرخاص انتیګرال متباعد دی باید ذکرکړو چې د $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ تابع یوه تاقه تابع تعریف شوي ده او ګراف ئې نظر مبداء ته متناظر دی کوم چې په (شکل 6) کې ښودل شوی دی. لرو چې د هر $b\in\mathbb{R}$ لپاره

$\int_{-b}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx = 0.$

ځکه چې $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{x}{x^2+1}dx = 0$ دی ، سره له دې چې $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ متقارب نه دی.
(د مطلوب اثبات وشو)



(6) شکل.

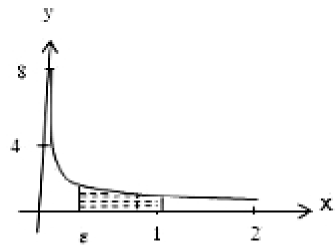
2.4.4 هغه غیرخاص انتیګرالونه چې ترانتیګرال لاندې توابع یې غیرمتمادي وي.

د f یوې تابع ته پر [a, b] انتروال قطعه په قطعه متمادي وایې که چیری f په [a, b] کې لږ تر لږه بې ځایه کیدونکې یا خیزوهونکې غیرمتمادي نقطز ولري. په دې ډول f په دې غیرمتمادي نقطو کې لرونکې د یوارخیز لمیټونوده. په داسې یو حالت کې f پر [a, b] ددې انتروال په فرعي انتروالونو د انتیګرالونو د مجموعې لرونکې ده چې یو لــه بل څخه د f د غیرمتمادي نقطو په واسطه جلا کیږي. اوس په دې غیرمتمادي او خیزوهونکو نقطو کې د انتیګرال د تعریف له مخې ځینې حالتونه معرفي کوو. راځئ چې په یو خــاص حالت پیل وکړو.

7.4.4 مثال قبلوو چې د x>0 لپاره $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ راکړشوې ده.

لرو چې $\lim_{x\to+0^+} f(x) = +\infty$ دی ځـــــــرنګه چې د $1 > \mathcal{E} > 0$ لپاره f د [Ɛ, 1] په شکل انتروال متمادي ده ، نو د f انتیګـــــرال په داسې یوه انتروال موجود او مربوط په هغه مساحت دی چې د f د ګراف او [Ɛ, 1] انتروال ترمنځ واقع دی.لکه په (شکل 7) کې چې ښودل شوی دی. لرو چې:

$$\int_{\mathcal{E}}^{1} f(x)dx = \int_{\mathcal{E}}^{1} x^{\frac{-1}{2}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_{\mathcal{E}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\mathcal{E}}$$



(7) شکل.

طبیعي ده چې په دې حالت کې په [0,1] انتروال کې ε>0 قیمتونه اخلي. او دغیرخـــــاص انتیګرال لیمټ عبارت دی له: $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2$
نوموړې پایله د f د ګراف او [0, 1] ترمنځ مساحت له مخې مشاهده کولای شو.
(دمطلب اثبات وشو)

4.4.4 تعریف فرضوو چې f د (a, b] پر انتروال متمـــــادي او $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ شتون نه لریو، وایې چې د $\int_a^b f(x)dx$ غیرخاص انتیګرال متقارب دی که

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

موجود وي. په دې حالت کې د غیرخاص انتیګــــــرال قیمت لکــــــه د پورته لیمټ په شان معلوموو او په لاندې سمبول یې ښیو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

که $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$شتون ونه لري وایو چې د $\int_a^b f(x)dx$ غیرخاص انتیګرال متباعد دی.

د 4.4.4. تعریف څخه په استفاده کولای شو $C = a + \varepsilon$ په پام کې ونیسو داسې چې که c ، a ته نژدې کیږي ε له ښۍ خوا څخه صفرته نژدې کیږي بناپردې لرو چې:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^d f(x)dx.$$

دغه غیرخاص انتیګرال متباعد دی که $\lim_{c\to a^+}\int_c^d f(x)dx$ شتون ونلري.

8.4.4 مثال د $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ په نظرکې ونیسئ او واضح کړئ چې:

a. ولې دغه انتیګرال غیرخاص انتیګرال دی.

b. معلوم کړئ چې دغه غیرخاص انتیګرال متقارب دی، که متباعد او که متقارب وي قیمت یې کوم دی.

حل

a. راکړشوی انتیګرال غیرخاص دی ځکه چې: $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ دی.

b. قبلوو چې 0<Ɛ<1 دی. لرو چې:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln(x)\, dx = (x\ln(x) - x \Big|_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon$$

(د لوپیتال د قضیې له مخې$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0$ دی) . بناپر دې:

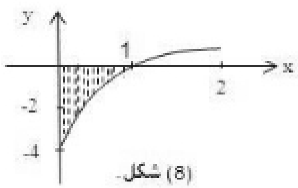
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon) = -1$$

په دې ډول راکړشوی غیرخاص انتیګرال متقارب دی او لروچې:

$$\int_{0}^{1} \ln(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(x)\, dx = -1$$

کولای شو د غیرخاص انتیګرال قیمت د G هغې ساحې مساحت په پام کې ونیسوکوم چې د طبیعي لوګارتم د ګراف او [0, 1] انتروال ترمنځ واقع دی.د G ساحه په (شکل 8) کې ښودل شوې ده. په 7.4.4. بیلګې کې مو وښودل چې $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ متقارب دی.

راځئ چې لاندې عمومیت ته د راتلونکې لپاره مراجعه وکړو.



(8) شکل.

2.4.4 مسئله د p>0 او a>0 لپاره $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ متقارب دی که P<1 وي، او متباعد دی که $p \geq 1$ وي.

ثبوت

راځئ د p=1 په حالت پيل وکړو قبلوو چې 0<Ɛ<a دی.

$$\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_{\mathcal{E}}^{a}\frac{1}{x}dx=\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}(\ln(a)-\ln(\mathcal{E}))=+\infty$$

ځکه چې $\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\ln(\mathcal{E})=-\infty$ بنا پر دې د $\int_0^a\frac{1}{x}dx$ متقارب دی.

فرضوو چې $p\neq 1$ او $0<\mathcal{E}<a$ دی لروچې:

$$\int_{\mathcal{E}}^{a}\frac{x}{x^p}dx=\int_{\mathcal{E}}^{a}x^{-p}=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{\mathcal{E}}^{a}=\frac{a^{-p+1}}{-p+1}-\frac{\mathcal{E}^{-p+1}}{-p+1}$$

که 0<p<1 وي پس 1−p>0 او $\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\mathcal{E}^{1-p}=0$ دی. بناپردې:

$$\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_{\mathcal{E}}^{a}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{\mathcal{E}^{1-p}}{1-p}\right)=\frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

په دې ډول د $\int_0^a\frac{x}{x^p}dx$ متقارب او قيمت يې $\frac{a^{1-p}}{1-p}$ دی.

که p>1 وي نو 1−p<0 او $\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\mathcal{E}^{1-p}=+\infty$ دی . بنا پردې:

$$\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_{\mathcal{E}}^{a}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{\mathcal{E}^{1-p}}{1-p}\right)=+\infty$$

په دې ډول د $\int_0^a\frac{1}{x^p}dx$ متقارب دی. (مطلوب ثبوت شو).

که f پر [a, b] متمادي او $\lim_{x\to b^-}f(x)$ شتون ونه لري، د $\int_a^b f(x)dx$ غيرخاص دی.

5.4.4 تعريف

فرضوو چې f پر [a, b] ممادي او $\lim_{x\to b^-}f(x)$ شتون نه لري.

وائي چې د $\int_a^b f(x)dx$ غيرخاص انتيګرال قيمت متقارب دی که:

$$\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_{a}^{b-\mathcal{E}}f(x)dx$$

شتون ولري . په دې حالت کې د غيرخاص انتيګرال قيمت عبارت دی له:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_{a}^{b-\mathcal{E}}f(x)dx$$

که $\lim_{\mathcal{E}\to 0^+}\int_0^{b-\mathcal{E}}f(x)dx$ شتون ونه لري وايو چې د $\int_a^b f(x)dx$ غيرخاص انتيګرال متباعد دی.

5.4.4. تعريف ته په مراجعه کولای شو $C=b-\mathcal{E}$ په پام کې ونيسو داسې چې که C د چپې خوانه b ته نژدې شي Ɛ صفرته نژدې کيږي او ټول مثبت قيمتونه اخلي.

بناپر دي:

$$\int_{0}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_{a}^{c} f(x)dx$$

غیرخاص انتیگرال متباعد دی که $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$ شتون ونه لري.

9.4.4 مثال $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx$ محاسبه کړئ او معلوم کړئ چې :

a. ولې دغه انتیگرال غیرخاص انتیګرال دی.

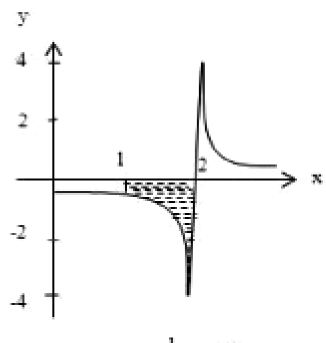
b. دغه غیرخاص انتیگرال متقارب دی، که متباعد، که متقارب وی قیمت یې کوم دی.

حل

نوموړی انتیگرال غیرخاص دی ځکه چې: $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^{1/3}} = -\infty$

b. که 1>ℇ>0 وي لرو چې:

$$\int_{1}^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx = \int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{u^{1/3}}du = \int_{-1}^{-\varepsilon} u^{-1/3}\,du = \frac{3u^{2/3}}{2}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{3\varepsilon^{2/3}}{2}-\frac{3}{2}$$



(9) شکل: $y=(x-2)^{-\frac{1}{3}}$

بنا پر دې:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3u^{2/3}}{2}-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

په دې ډول،ورکړشوی غیرخاص انتیگرال متقارب دی او لرو چې $\int_1^2 \frac{2}{(x-2)^{1/3}}dx = -\frac{3}{2}$

کولای شو پایله د هغې ساحې مساحت تعبیر کړو چې د $y=(x-2)^{-1/3}$ تابع د ګراف او

[1, 2] انتروال تر منځ واقع ده دغه ساحه په (9) شکل کې خط خط شوې برخه رابنيي .
(د مطلب حل او اثبات)
يوه تابع کيداى د يوورکړشوي انتروال په داخل کې د غيرمتمادي نقطې لرونکې وي.

6.4.4 تعريف فرضوو چې f د [a, b] انتروال په هره نقطه کې کې متمادي بې له c په منځ د a او b کې. تر دې علاوه ، فرضوو چې لااقل په يو د لميتي نقطو کې $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ يا $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ شتون ونه لري . په دې حالت کې د $\int_a^b f(x)dx$ متقارب دی يوازې په هغه حالت کې که $\int_c^b f(x)dx \wedge \int_a^c f(x)dx$ شتون ولري که انتيگرال متقارب وي قيمت يې په لاندې توگه معلوموو.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

د $\int_a^b f(x)dx$ متباعد دی که يو له $\int_a^c f(x)dx$ يا $\int_c^b f(x)dx$ متباعد وي.
د 6.4.4 تعريف شتون په ډيرو عمومي حالتونو کې مشاهده شوى دى.
مونږ بايد د غيرخاص انتيگرالونو په محاسبه کې د ترانتيگرال لاندې تابع ټولې غيرمتمادي نقطې په پام کې ونيسو او پر ټولو هغو انتروالونوکې به چې دې غيرمتمادي نقطو سره جلا کړي دي، غيرخاص انتيگرالونه بيل بيل امتحان کړو.

10.4.4 مثال د $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^{2/3}}dx$ غيرخاص انتيگرال په پام کز ونيسئ او معلوم کړئ چې:

a. ولې دغه انتيگرال غيرخاص دى؟

b. دغه غيرخاص انتيگرال متقارب دى ، که متباعد، اوکه متقارب وي قيمت يې معلوم کړئ.

حل

a : دغه انتيگرال غيرخاص دى ځکه چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}dx = +\infty \quad ; \quad x\epsilon[-1,2]$$

دى يعنې تر انتيگرال لاندې تابع $x = 0\epsilon[-1,2]$ غيرمتمادي ده.

b. مونږ بايد لاندې غيرخاص انتيگرال امتحان کړو:

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{2/3}}dx \quad \wedge \quad \int_{0}^{2}\frac{1}{x^{2/3}}dx$$

لروچې:

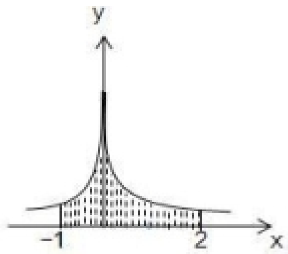
$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{2/3}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}x^{-2/3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-3\varepsilon^{\frac{1}{3}}+3\right) = 3.$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^{2/3}}dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^2 x^{-2/3}dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(3x^{1/3}\Big|_\varepsilon^2\right) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[3\left\{2^{1/3}-\varepsilon^{1/3}\right\}\right] = 3(2^{1/3}$$ او

بنا پردې ، راکړشوی غیرخاص انتیګرال متقارب دی او لرو چې:

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^{2/3}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^{2/3}}dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{x^{2/3}}dx = 3+3\left(2^{1/3}\right) = 3+3\sqrt[3]{2}$$

کولای شو ددې پایلې تعبیر لکه چې په (شکل10) کې واضح شوې. د هغې ساحې مساحت رابنیي چې د $y = x^{-2/3}$ تابع د ګراف او [−1, 2] ترمنځ په توره شوې برخې کې واقع ده.



(10) شکل

3.4.4 تبصره(توجه)

پر[a, b]انتروال د یو غیرخاص انتیګرال له متقاربیت څخه مقصد پر[a, c] او [c, b] انتروالونو د غیرخاص انتیګرالونو د متقاربیت معلومول دي.

مونږ باید $\int_a^b f(x)dx$ لکه په لاندې ډول معرفي کړو:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$$

زمونږ له معرفت څخه مقصد د $\int_a^b f(x)dx$ د متقاربیت لپاره د لاندې لمیټونو

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx \quad \wedge \quad \lim_{\delta\to0^+}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx = \int_c^{b} f(x)dx$$

شتون دی ، بې له دې چې د ε او δ ترمنځ د هر ارتباط (داسې چې $\delta = \varepsilon$ وی) له مخې حاصلیږي.

د مثال په ډول د $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ غیرخاص انتیګرال متقارب نه دی ځکه چې $\int_0^1\frac{1}{x}dx$ متباعددی د بلې خو ، د$\frac{1}{x}$ تابع تاقه تعریف شوې او لرو چې:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = 0$$

په نتیجه کې :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

(دا د مطلوب اثبات دی)

3.4.4 مقايسوي قضيې Comparison Theorem

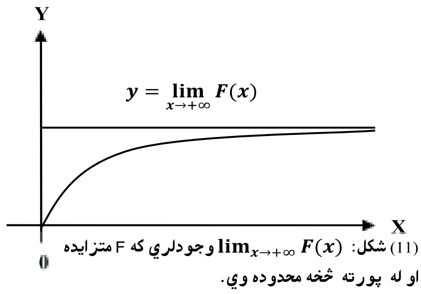
راځئ چې د دې فن په باب له يوې تبصرې څخه پيل وکړو : دا به ووايو چې د F يوه تابع د J پر يوه انتروال يو نواخت متزايد ، ده که:

$$x_1 \in J \;;\; x_2 \in J \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

په قوي وينا ، بايد ووايو چې F پر J غير نزولي ده. مگر په ساده وينا ددې پر ځای چې ووايو (يوه صعودي تابع ده) دا به غوره وي چې ووايو (يوه غير نزولي تابع).
لاندې عموميات په اسان ډول د غير خاصو انتيگرالونو د متقاربيت يا متباعديت د خاصيتونو لپاره بنسټ برابرو:

1.4.4 قضيه (د يو نواخت متقاربيت عموميات) فرضوو چې F

پر $[a,+\infty)$ يوه يونواخت متزايده تابع ده. که د M يو عدد داسې شتون ولري چې د هر $x \ge a$ لپاره $F(x) \le M$ وي ، پس $\lim_{x\to\infty} F(x)$ شتون لري (کله چې لميټ معين وي) او $F(b) \le \lim_{x\to+\infty} F(x)$ دی کله چې $b \ge a$ وي. په بل تعبير $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ وي.
په گرافيکي ډول د يو نواخت متقاربيت عموميات واضح کوي چې د F تابع گراف د يو افقي خط سره کله چې $x \to +\infty$ د يو مجانب لرونکی دی که د F تابع قيمتونه د M يو عدد پواسطه د پورته خوا څخه محدود وي.



(11) شکل: $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ وجودلري که F متزايده او له پورته څخه محدوده وي.

ثبوت

فرضوو چې د M یو عدد داسې شتون لري چې د هر $x \ge a$ لپاره $M \le F(x)$ وي. پس: $M = \sup\{f(x) : x \ge a.\}$ معین دی.

($\lim_{x \to \infty} F(x)$) شتون لري که F یونواخت متزایداو د پورته خواڅخه محدود وي)

مونږ دې پایلې ته رسیږو چې $\lim_{x \to +\infty} F(x) = L$ دی. په حقیقت کې ، د ډیر کوچنی فوقاني حد د تعریف له مخې د ورکړ شوي $\varepsilon > 0$ لپاره x^* داسې شتون لري چې:

$$L - \varepsilon < F(x^*) \le L.$$

څرنگه چې F یو نواخت متزایده ده ، که $x \ge x^*$ وي

$$L - \varepsilon < F(x^*) \le F(x) \le L.$$

دی. (L یو فوقاني حد دی)، د $\{F(x) : x \ge a\}$ لپـــــاره .

په دې ډول د هـــــر $x \ge x^*$ لپاره

$$L - \varepsilon < F(x) \le L.$$

بنا پر دې $\lim_{x \to +\infty} F(x) = L$ دی.

(یوې پایلې ته ورسیده).

څرنگه چې L د $\{F(x) : x \ge a\}$ لپاره یو فوقاني حد دی ، لرو چې:

$F(b) \le \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(x)$ د بلې خوا ، که ومنو چې $\{F(x) : x \ge a\}$ د پورته خوا څخه محدودوه نه ده ، د ورکړ شوی هر M لپاره به $x^* \ge a$ شتون ولري داسې چې $F(x^*) > M$ وي. څرنگه چې F متزایده ده لرو چې د هر $x \ge x^*$ لپاره:

$$F(x) \ge F(x^*) > M$$

بناپردې $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ (په پوره ډول پایلې ته ورسیدو)

3.4.4 مسله فرضوو چې f پر $[a, +\infty)$ متمادي ده او د هر $x \ge a$ لپاره $f(x) \ge 0$ ده . که چیرې M>0 داسې شتون ولري چې د $b \ge a$ لپاره $\int_a^b f(x)dx \le M$ وي ، د $\int_a^\infty f(x)dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب ، او هر $b \ge a$ لپاره:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

د بلې خوا $\lim_{x \to +\infty} \int_a^b f(x) = +\infty$ دی ، پس $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعد دی.

ثبوت

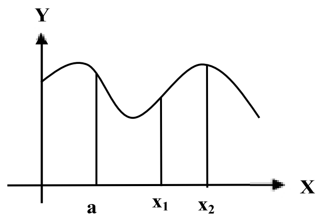
$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ په پام کې نيسو . F پر $[a,+\infty)$ يو نواخت متزايده ده.په

حقيقت کې که $x_2 > x_1 > a$ وي، $F(x_2)=\int_a^{x_2} f(t)dt=\int_a^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt,$

او څرنګه چې $f(t)\geq 0$ دی د $t\geq a$ لپاره نو: $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\geq 0$

بنا پر دې:

$$F(x_2)=\int_a^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\geq\int_a^{x_1} f(t)dt=F(x_1).$$



(12) شکل .

(12) شکل پورتنی نا مساوات واضح کوي: $F(x_2)$ د هغې ساحې مساحت واضح کوي چې د f تابع د ګراف او $[a,\ x_2]$ انتروال تر منځ واقع ده، او $F(x_1)$ د هغې ساحې مساحت رابنيي چې د f تابع د ګراف او $[a\ ,\ x_1]$ انتروال تر منځ واقع ده. واضح ده چې : $F(x_2)\geq F(x_1)$.

په دې ډول 1.4.4. قضيه د F تابع تطبيقوي: که M داسې شتون ولري چې د هر $b\geq a$ لپاره : $F(b)=\int_a^b f(x)dx\leq M$

پس $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ وجود لري او د هر $b\geq a$ لپاره $F(b)\leq\lim_{x\to+\infty} F(x)$ دی او تعبير يې دا دی چې: $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)dx$ شتون لري. په پايله کې د هر $b\geq a$ لپاره: $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^{\infty} F(x)dx.$

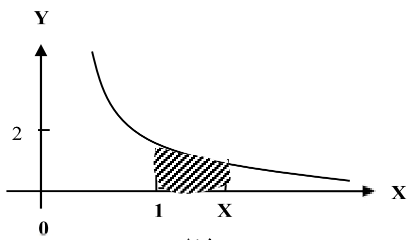
د بلې خوا ، که M>0 شتون ونه لري داسې چې د هر $b\geq a$ لپاره $F(b)=\int_a^b f(x)dx\leq M$ وي،لرو چې : $\lim_{b\to+\infty} F(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=+\infty$

دی .په دې ډول $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متباعد دی. (په پایله کې مطلب ثابت شو).

11.4.4 مثال قبلووچې: $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt\ ,\ x\ge 1.$ ده.

a. F(x) او د هغې ګرافیکي تعبیر معلوم کړئ.

b. $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ معلوم کړئ. د یو غیر خاص انتیګرال د حدودو پایله تعبیر کړئ . د F تابع افقي مجانب معلوم کړئ. د F ګراف رسم کړئ.



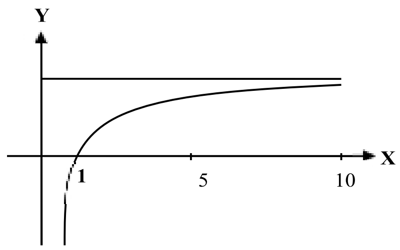
(13) شکل.

حل

a .لرو چې د هر $x\ge 1$ لپاره:

$$F(x)=\int_1^x t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^x=-t^{-1}\Big|_1^x=-\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-\frac{1}{x}.$$

د F(x) کمیت هغه مساحت په (13) شکل کې رابنیي چې د $y=t^{-2}$ تابع د ګراف او $[1,x]$ انتروال ترمنځ واقع دی.



(14) شکل: $y=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

b. د a برخې له مخې لرو چې : $\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1.$

څرنګه چې. $\lim_{b\to+\infty} F(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx.$ دی ، لرو چې $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$

د y=1 مستقیم د y=F(x) د ګراف افقي مجانب دی. (14) شکل د F ګراف رابنیي.

.3.4.4 مسله (پرتليز ازمايښت) څرګند وي.

4.4.4 مسله (یوه پر تلیزه ازموینه) فرضوو چې: f او g پر $[a\,,+\infty)$ متمادي دي.

a. (د متقاربیت برخه (یا شرط)) . که $0 \le f(x) \le g(x)$ وي د هر $x \ge a$ لپاره ,او $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقارب وي، پس د $\int_a^{\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال هم متقارب دی او لرو چې :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} g(x)dx$$

b. (د متباعدیت برخه (شرط)). که $f(x) \ge g(x) \ge 0$ او د هر $x \ge a$ لپاره

$\int_a^{\infty} g(x)dx$

متباعدوي،پس $\int_a^{\infty} f(x)dx$ هم متباعد او لرو چې: $\int_a^{\infty} f(x)dx \ge \int_a^{\infty} g(x)dx.$

ثبوت

a. قبلوو چې $b \ge a$ دی. څرنګه چې د هر $x \ge a$ لپاره $0 \le f(x) \le g(x)$ دی ، لروچې:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^{\infty} g(x)dx$$

د 3.4.4. مسلې په تطبیقولو د $M = \int_a^{\infty} g(x)dx$ له مخې وایو چې د $\int_a^{\infty} f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی،او

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} g(x)dx$$

b. څرنګه چې د هر $x \ge a$ لپاره $g(x) \ge 0$ دی او $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متباعد دی.لرو چې د 3.4.4. مسئلې له مخې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dx = +\infty$$

څرنګه چې $f(x) \ge g(x)$ دی د هر $x \ge a$ لپاره ، نو د هر $b \ge a$ لپاره

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

بنا پر دې $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=+\infty$ دی . په دې ډول د $\int_a^\infty f(x)dx$ غیر خاص انتیگرال متباعد دی.

(په پایله کې مطلوب ثابت شو).

12.4.4 مثال وښیئ چې د $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی.

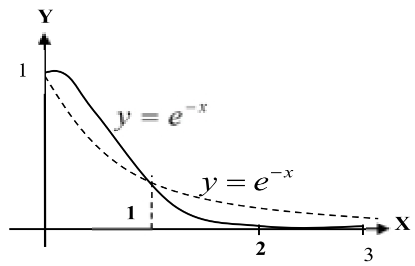
حل

که $x\ge 1$ وي $x^2\ge x$ او $-x^2\le -x$ دی. $-x^2\le -x$ دی .

خرنگه چې د ox پر ټول محور د طبیعي اکسپونینشل تابع متزایده ده ، لرو چې:

$$e^{-x^2}\le e^{-x};\ if\ x\ge 1.$$

د $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ غیر خاص انتیگرال د مستقیمې محاسبې له مخې متقارب دی.



(15) شکل: $e^{-x^2}\le e^{-x}\ if\ x\ge 1$.

په حقیقت کې:

$$\int_1^b e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^b=-\left(e^{-b}-e^{-1}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^b}$$

په پایله کې: $\int_1^b e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^b}\right)=\frac{1}{e}.$

د مقایسوي متقاربیت امتحان (د 4.4.4. مسئلې د a برخې) له مخې ، د $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی.
(مطلوب په اثبات ورسید).

7.4.4 تعریف وایو چې د $\int_a^\infty f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال مطلقاً متقارب دی که $\int_a^\infty |f(x)|dx$ متقارب وي. (د مطلقاً متقاربیت پایله متقاربیت دی).

5.4.4 مسئله فرضوو چې f پر $[a,+\infty)$ متمادي او $\int_a^\infty |f(x)|dx$ متقارب دی. پس $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب دی.

ثبوت

باید ذکر کړو چې $|f|$ پر $[a,+\infty)$ متمادي ده ځکه چې f پر $[a,+\infty)$ متمادي ده (د 2.6.4. تبصرې له مخې) . کولای شو f(x) هسې وټاکو چې:

$$f(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}-\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

قبلو و داسې چې:

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}\wedge f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

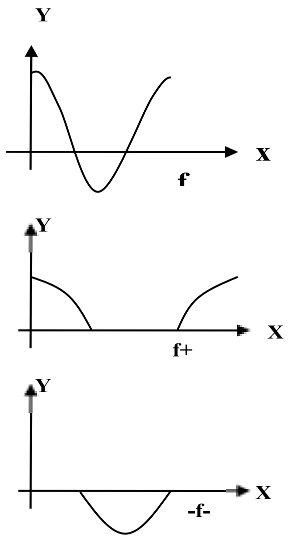
ددې له مخې: $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ ده. د f او $|f|$ توابعو د خطي ترکیب له مخې f_+ او f_- پر $[a,+\infty)$ متمادي دي . لرو چې:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x)=|f(x)|; if, f(x)\geq 0 \\ 0\ ;\ if\ \ f(x)<0\end{cases}\ \wedge f_-(x)=\begin{cases} 0\ ;\ if\ \ f(x)>0 \\ |f(x)|=-f(x): if\ f(x)\leq 0\end{cases}$$

(تصدیقوویې). راځئ چې f_+ او f_- ته مراجعه وکړو داسې چې د f مثبته برخه باالترتیب د f منفي برخه ده. شکل(16) د f ، f_+ او f_- تر منځ رابطه په ګرافیکي ډول را ښیي. په خصوصي حالت کې :

$$0\leq f_+(x)\leq|f(x)|\wedge 0\leq f_-(x)\leq|f(x)|\ ;\ for\ \ x\geq a$$

څرنګه چې $\int_a^\infty |f(x)|dx$ متقارب دی. نو د 4.4.4 مسئلې له مخې $\int_a^\infty f_+(x)dx\wedge\int_a^\infty f_-(x)dx$



شکل (16).

هم متقارب دی. بنا پر دې:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \left(f_+(x) - f_-(x)\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f_+(x)dx - \lim_{b\to\infty}\int_a^b f_-(x)dx = \int_a^\infty f_+(x)dx - \int_a^\infty f_-(x)dx.$$

بنا پر دې $\int_a^\infty f(x)dx$ **متقارب دی، او**

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f_+(x)dx - \int_a^\infty f_-(x)dx$$

(د مطلب اثبات وشو).

13.4.4 مثال وښیئ چې $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(3x)dx$ متقارب دی.

حل

لرو چې: $\left|e^{-x^2} \cdot \cos(3x)\right| = e^{-x^2}\left|\cos(3x)\right| \le e^{-x^2}$

ځکه چې د هر $u \in \mathbb{R}$ لپاره $\left|\cos(u)\right| \le 1$ دی. په 12.4.4 مثال کې مو وښودل چې $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$ متقارب دی. بنا پر دې $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(3x)dx$ د 4.4.4 مسئلې د پرتلیز ازمایښت له مخې متقارب دی.

(د مطلب اثبات).

14.4.4 مثال وښیئ چې د $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ د ریچلیت انتیګرال متقارب دی.

حل

څرنګه چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی. ویلای شو چې تر انتیګـــــرال لانـــدې تابع په [0 , 1] انتروال کې د یو ډول الحاقیه متمادیت لرونکې ده . بنا پر دې کافي ده وښیو چې د $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی. د محاسبې لپاره یې د حصوي فورمول څخه په استفاده په پام کې نیسو:

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{x} \wedge dv = \sin(x)\, dx \;\Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx \wedge v = -\cos(x)}$$

بنا پر دې:

$$\int_{1}^{b} \sin(x)\frac{1}{x}dx = \int_{1}^{u} udv - \int_{1}^{u} vdu =$$

$$= \frac{\cos(x)}{x^2}\Big|_{1}^{b} - \int_{1}^{b}\cos(x)\frac{1}{x^2}dx = \frac{\cos(b)}{b^2} - \cos(1) - \int_{1}^{b}\cos(1) - \int_{1}^{b}\cos(x)\frac{1}{x^2}dx$$

پوهیږو چې: $\left|\frac{\cos(b)}{b^2}\right| = \frac{\left|\cos(b)\right|}{b^2} \le \frac{1}{b^2}$، او $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2} = 0$ دی. بنا پر دې:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\cos(b)}{b^2} = 0$$

په دې ډول:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\cos(b)}{b^2} - \cos(1)\right) = -\cos(1).$$

له دې ځایه د $\int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$ لپاره داچې لیمیټ یې د $b\to\infty$ لپاره موجود دی نو $\int_1^\infty \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی. په حقیقت کې:

$$\left|\cos(x)\frac{1}{x^2}\right| = |\cos(x)|\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

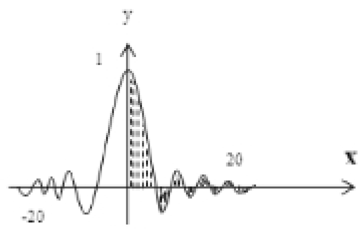
ځکه چې د هر $x\epsilon\mathbb{R}$ لپاره $|\cos(x)| \le 1$ دی.

څرنگه چې $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ متقارب دی. د پرتلیز ازمایښت له مخې د $\int_1^\infty \left|\cos(x)\frac{1}{x^2}dx\right|$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی. بنا پر دې د 5.4.4 مسئلې لــــــه مخــې $\int_1^\infty \cos(x)\frac{1}{x}dx$ هم متقارب دی.

په دې ډول:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{x}\sin(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\cos(b)}{b^2}-\cos(1)\right)+\lim_{b\to\infty}\int_1^b \cos(x)\frac{1}{x^2}dx = -\cos(1)+\int_1^\infty \cos(x)\frac{1}{x^2}dx$$

دی. بنا پردې $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ متقارب دی.(دمطلب اثبات).



(17) شکل.

په دې پوهیږو چې $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ دی. کولای شو دغه قیمت د هغې ساحې مساحت په پام کې ونیسو چې د شکل(17) د خط خط شوې برخې په واسطه د $y=\frac{\sin(x)}{x}$ تابع د گراف او $[0,+\infty)$ انتروال ترمنځ واقع ده. په دې پوه شو چې د $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ غیر خاص انتیگرال متباعد دی.

8.4.4 تعريف د $\int_a^{\infty} f(x)dx$ غير خاص انتيگرال شرطاً متقارب دی، که هغه متقارب او $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ متباعد وي. په دې ډول د $\int_a^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ درېچلیټ انتيگـــــرال شرطاً متقارب دی، مونږ د پورتنيو تعريفونو او مسئلو لپاره د غير خاصو انتيگرالونو په لاندې شکل دوې جوړې لرو:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \wedge \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

راځئ لومړی هغه خاص انتيگرالونه په نظر کې ونيسو چې پر محدودو انتروالونو د غير متمادي توابعولرونکي وي.لاندې مقايسوي امتحان د 4.4.4 مسئلې جوړه (نمونه) ده:

مسئله(پرتليز امتحان پر محدودو انترولونو) فرضوو چې f او g پر (a , b) متمادي دي.

a . فرضوو چې د هر $x \in (a,b)$ له پاره $0 \le f(x) \le g(x)$او g پر [a , b] انتيگرال منونکې وي يا د $\int_a^b g(x)dx$ غير خاص انتيگرال متقارب وي، پس د $\int_a^b f(x)dx$ غير خاص انتيگرال هم متقارب دی او لرو چې: $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

b. که د هر $x \in (a,b)$ لپاره $f(x) \ge g(x) \ge 0$ او د $\int_a^b g(x)dx$ غير خاص انتيگرال متباعد وي: پس د $\int_a^b f(x)dx$ غير خاص انتيگرال هم متباعد دی.

ثبوت

a: کافي ده دا حالت په پام کې ونيسو چې f او g پر [a , b] متمادي دي.

څرنگه چې g پر [a , b] متمادي ده يا دا چې د $\int_a^b g(x)dx$ غير خاص انتيگرال متقارب دی ځکه چې د هر $x \in [a,b)$ لپاره : $\int_a^b g(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c g(x)dx.$ دی.

$F(c) = \int_a^c f(x)dx$ د c يوه متزايده تابع تعريفوو ، داسې چې $a \le c < b$ وي:

څرنگه چې د هر $x \in (a,b)$ لپاره $f(x) \le g(x)$ ده ، لرو چې د هر $c \in [a,b)$ لپاره:

$$F(c)=\int_a^c f(x)dx \le \int_a^c g(x)dx \le \int_a^c g(x)dx$$

ده. په دې ډول د F متزایده تابع ده $x\in[a\ ,b)$ لپاره د $F(c)=\int_a^c f(x)dx$ خاصیت لرونکې ده . په دې ډول د $\int_a^b f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی، او

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx=\lim_{c\to b^-}F(c)\le\int_a^c g(x)dx$$

(مطلب ثابت شو).

15.4.4 مثال د $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}$ غیر خاص انتیګرال په نظر کې

ونیسئ:

a . ولې دغه انتیګرال یو غیر خاص انتیګرال دی.

b. وښيئ چې دغه غیر خاص انتیګرال متقارب دی، که متباعد.

حل

a. تر انتیګرال لاندې تابع په $x\in[0,1)$ کې متمادي ده (ویې ازمائی) ، پس:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}\cong\frac{1}{\sqrt{2(1-x)\left(\frac{1}{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

بنا پر دې:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=+\infty$$

په دې ډول، $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}$ یو غیر خاص انتیګرال دی.

b. که $x\in(0,1)$ وي لرو چې:

$$(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)=(1-x)(1+x)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\ge(1-x)\cdot 1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-x).$$

په پایله کې $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\le\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x\right)}}<0$ دی.

د $\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب دی. په حقیقت کې $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{2}\sqrt{1-x}$ دی(امتحان یې کړئ) . او په نتیجه کې:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{2}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2}. \ ;0 < \varepsilon < 1.$$

بنا پر دې:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

ځکه چې $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}} > 0$ دی.

همدارنګه د 3.4.4 مسئلې له مخې هم راکړ شوې غیر خاص انتیګرال متقارب دی.

9.4.4 تعریف فرضوو چې f پر (a , b) متمادي ده . وایو چې د $\int_a^b f(x)dx$ غیر خاص انتیګرال مطلقاً متقارب دی که د $\int_a^b |f(x)|dx$ غیر خاص انتیګرال متقارب وي.

فقط لکه په غیر محدودو انترووالونو د غیر خاصو انتیګرالونو په حالت کې ، هغه وخت یو غیر خاص انتیګرال مطلقاً متقارب دی چې هغه متقارب وي.

6.4.4 مسئله فرضوو چې f پر (a , b) متمادي او $\int_a^b |f(x)|dx$ متقارب دی. پس $\int_a^b |f(x)|dx$ هم متقارب دی.

د دې مسئلې اثبات عیناً لکه د 5.4.4 مسئلې د اثبات په شان دی.

16.4.4 مثال د $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ په نظر کې ونیسئ او معلوم کړئ چې:

a. ولې دغه انتیګرال غیر خاص انتیګرال دی؟

b. وښیئ چې دغه غیر خاص انتیګرال مطلقاً متقارب دی.

حل

په پام کې نیسو $f(x)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ ، پس $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ شتون نه لري. په حقیقت کې د $n=0,1,2,3,....$ لپاره د $x_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$ په قبلولو یادونه کوو چې $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ دی،

لرو چې:

$$f(x_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$

بنا پر دې:

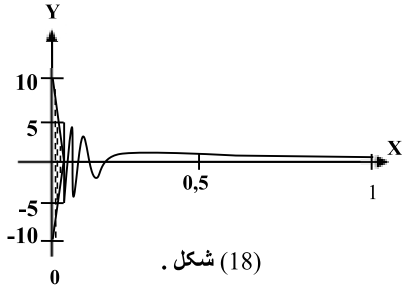
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=+\infty.$$

د بلې خوا ، که د $n=0,1,2,3,....$ له پاره $Z_n=\dfrac{1}{\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi}$ وي ، پس:

$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n=0$ او

$\lim\limits_{n\to\infty} f(Z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi}\right)=-\infty$ دی.

بنا پر دې ، f په (0) کې د ښي خوا لمیټ نه لري. په(18) شکل کې دې ته هڅه شوې چې د f د ګراف په باب یې یو نظر وړاندې کړی.



(18) شکل .

دغه انتیگرال د تعریف له مخې غیر خاص دی.

خرنگه چې $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ دی نو

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad \forall\ x > 0.$$

او د $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی لکه څنگه چې مخکې مو په 8.7.6 بېلگې کې په دې باب بحث کړی ؤ. بنا پر دې راکړ شوی غیر خاص انتیگرال د پرتلیز امتحان له مخې مطلقاً متقارب دی.

(مطلوب ثابت شو).

10.4.4 تعریف فرضوو چې f پر (a , b) متمادي ده. وایو چې د $\int_a^b f(x)dx$ شرطاً متقارب دی که چېرې هغه متقارب مگر $\int_a^b f(x)dx$ متباعد وي.

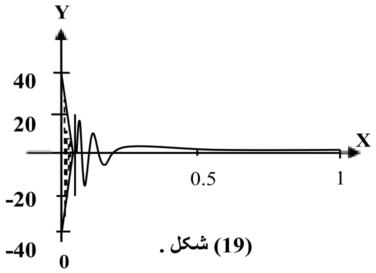
17.4.4 مثال وښیي چې د $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ غیر خاص انتیگرال متقارب دی.

حل

$f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ په پام کې نیسو. نوموړی انتیگرال غیر خاص دی ځکه چې:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

شتون نه لري . په شکل(19) کې دې ته هڅه شوې چې د f ګراف وښيي.



(19) شکل .

مونږ نوموړی غیر خاص انتیګرال په داسې یو غیر خاص انتیګرال عوض کوو چې د هغې په باب مو بحث کړی دی. که $u = \frac{1}{x}$ قبول کړو، لرو چې $du = -\frac{1}{x^2}dx$. په پايله کې:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\int_{\varepsilon}^{1} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{1} \frac{1}{u}\sin u \;\; du = -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{1} \frac{\sin(u)}{u}\;\; du = \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

په دې ډول:

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin(u)}{u}du \Leftrightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}du \;\; converges.$$ (متقارب دی)

په 14.4.4 بیلګې کې مو وښودل چې $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$ متقارب دی. بنا پر دې $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)du$ متقارب دی.

دا کولای شو دارنګه وښیو چې نوموړی انتیګرال مطلقاً متقاربیت نه لري. په دې ډول نوموړی انتیګرال شرطاً متقارب دی(مطلب ثابت شو).

4.4.4 د لمیټ مقایسوي امتحان په ځینو حالتونو کې به دا اسانه نه وي چې د اساسي مقایسوي امتحانونو له مخې د انتیګرال متقاربیت بشپړ کړو، پر ځای یې د لمیټ مقایسوي امتحان معمولاً په ډیرې اسانۍ تطبیقولای شو:

7.4.4 مسئله (د لميټ پرتليز ازماينښت) فرضوو چې f او g

متمادي توابع دي او د هر $x \ge a$ له پاره $0 \ge f(x) > 0$ $g(x) > 0$ دي.

a. (د متقاربيت مشخصه يا امتحان) :- كه $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارب او

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

شتون ولري(لميټ معين وي) ، پس $\int_a^\infty f(x)dx$ هم متقارب دى.

b. (د متباعديت مشخصه) :- كه $\int_a^\infty g(x)dx$ متباعد او

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

وي، پس د $\int_a^\infty f(x)dx$ غير خاص انتيگرال هم متباعد دى.

ثبوت

a :- قبلوو چې $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ دى پس، B>a شتون لري داسې چې كه $x \ge B$ وي.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le 1$$

په خصوصي حالت كې كه $x \ge B$ وي $0 \le \frac{f(x)}{g(x)} < L+1$

په دې ډول كه $x \ge B$ وي. $0 \le f(x) < (L+1)g(x)$ دى.

ځرنگه چې:

$$\int_B^\infty (L+1)g(x)dx = (L+1)\int_B^\infty g(x)dx$$

متقارب دی، پس $\int_B^{\infty} f(x)dx$ هم د 4.4.4 مسئلې له مخې متقارب دی.

په دې ډول $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{B} f(x)dx + \int_B^{\infty} f(x)dx$ هم متقارب دی.

b. که $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ یا $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ وي شتون لري $B > a$ او $C > 0$ داسې چې که $x \geq B$ وي $\frac{f(x)}{g(x)} \geq C$ دی. بنا پر دې که $x \geq B$ وي $f(x) \geq cg(x)$ دی څرنګه چې

$$\int_B^b f(x)dx \geq \int_B^b cg(x)dx = c\int_B^b g(x)dx \;;\; c>0 \text{ ،} \lim_{b\to+\infty}\int_B^b g(x) = +\infty$$

لرو چې: $\lim_{b\to+\infty}\int_B^b f(x)dx = +\infty$ هم دی. په دې ډول دا چې $\int_B^b f(x)dx$ هم متباعد دی.

(د مطلب اثبات) .

18.4.4 مثال د لاندې غیر خاصو انتیګرالونو متقاربیت یا متباعدیت وڅیړئ:

$$a.\ \int_1^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx \;;\quad b.\ \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\ln x}dx.$$

حل

a. لرو چې $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = 0$ (د لوپیتال د قضیې له مخې).

څرنګه $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ متقارب دی په همدې ډول $\int_1^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$ هم متقارب دی.

b. دا چې د لوپیتال د قضیې له مخې لرو:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\cdot\ln(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln(x)} = +\infty$$

او دا چې $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx$ متباعد دی پس $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\ln x}dx$ هم متباعد دی.

8.4.4 مسئله (پر يوه محدود انتروال د لميټ يو پرتليز ازماينت). فرضوو چې f او g پر $[a,b)$ متمادي ، دهر $x\in(a,b]$ لپاره $f(x)\geq 0$ او $g(x)>0$ وي.

a. که g پر [a , b] انتيګرال منونکې يا د $\int_{a}^{b}g(x)dx$ غير خاص انتيګرال متقارب ، او $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ شتون ولري(لميټ معين وي)، پس د $\int_{a}^{b}f(x)dx$ غير خاص انتيګرال هم متقارب دی.

b. که $\int_{a}^{b}g(x)dx$ متباعد او $\lim_{c\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}>0$ يا $\lim_{c\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ وی پس د $\int_{a}^{b}f(x)dx$ غير خاص انتيګرال هم متباعد دی.

19.4.4 مثال د $\int_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ غير خاص انتيګرال د متقاربيت يا متباعديت په باب بحث وکړئ .

حل

لرو چې $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ دی او $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ متباعد دی.

بنا پر دې $\int_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ هم متباعد دی. (دا د مطلوب اثبات دی).

پای

Book Name	Advanced Calculus I Math 534 A
Translator	Prof Hamidullah Yaar
Publisher	Nangarhar Science Faculty
Website	www.nu.edu.af
No of Copies	1000
Published	2015, First Edition
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by German Aid for Afghan Children, a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and Technical support by Afghanic organization.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it. Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:

Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul

Office 0756014640

Email textbooks@afghanic.org

Printed in Afghanistan 2015

Sahar Printing Press

ISBN: 978 9936 620 001

Message from the Ministry of Higher Education

In history,books have played a very important role in gaining, keeping and spreading knowledge and science;and they are the fundamental units of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and today's requirements and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be provided and published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers andauthors and I am very thankful to those who have worked for many years and have written or translated textbooks in their fields. They have offered their national duty and they have motivated the motor of improvement.

I also warmly welcome more lecturers to prepare and publish textbooks in their respective fields so that, after publication, they should be distributed among the students to take full advantage of them. This will be a good step in the improvement of the quality of higher education and educational process.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and standard learning materials in different fields in order to better educate our students.

Finally I am very grateful to the chief of German Committee for Afghan Children, Dr. Eroes, and our colleague Dr. Yahya Wardak who have provided opportunities for publishing textbooks of our lecturers and authors.

I am hopeful that this project should be continued and increased in order to have at least one standard textbook for each subject, in the near future.

Sincerely,

Prof. Dr. Farida Momand

Minister of Higher Education

Kabul, 2015

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!
The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. For this reason, we have published 176 different medical textbooks (95 books funded by DAAD, 80 books funded by kinderhilfe-Afghanistan) from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh and Kapisa medical colleges and Kabul Medical University. It should be mentioned that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost. Currently we are working to publish 20 more non-medical textbooks for Nangarhar University. All published medical & non-medical textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:
"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashtu. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state – of – the – art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers and students, we extended this project to the non-medical subjects e.g. Science, Engineering, Agriculture and Economics.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to the Afghan Universities free of charge. I would like the students to

encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) and its director Dr Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 80 other medical textbooks in the past three years which are being used by the students of Nangarhar and other medical colleges of the country. Dr Eroes has made funds available for 20 additional books which are being printed now.

I am especially grateful to **GIZ** (German Society for International Cooperation) and **CIM** (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past five years in Afghanistan.

In our ministry, I would like to cordially thank Minister of Higher Education Prof Dr Farida Momand, Academic Deputy Minister, Prof M Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof Dr Gul Hassan Walizai, Acting Chancellor of Nangarhar University Prof Dr M Taher Enayat and lectures for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Ahmad Fahim Habibi and Fazal Rahim in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert & Advisor at the Ministry of Higher Education
Kabul/Afghanistan, June, 2015
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

Abstract

As we Knew Afghanistan is one of the Poorest Country in the world, and still suffers from ware and Post war conflict .Our young students, especially science , Engineering and others students can't afford buying Mathematic books and all so their level of understanding from English and others language is not good there for I decided to write Calculus I book in Pashto which is in lined with the curriculum of Science, Education, Engineering, Economic and Computer science Faculties.

I have incorporated all the international changes and progresses happened so far, that every scientist and students will be benefited.

I believe my book would better resources for teaching and research for coming several decades.

1- The Limit of a Sequence.
2- The Limit of a Function and Continuity.
3- The Derivative.
4- The Integrals.

دکتاب د لیکوال حمیدالله یار ژوند ته لنډه کتنه

د اروا ښاد ملا یار محمد زوی په ۱۳۳۳ هـ ش کال د ننګرهار ولایت د ثمر خیلو په کلی کې پیدا شوی دی.

زده کړې یې :

- لومړنی زده کړې یې د ثمر خیلو په د هاتي او عبدالوکیل په ابتدایي ښوونځیو کې .
- ثانوی زده کړې یې د ننګرهار په لیسه کې تر سره او په ۱۳۴۹ -۱۳۵۰ کال کې ورڅخه فارغ شوی دی.
- لسانس زده کړې یې د کابل پوهنتون د ساینس په پوهنځي کې کړي او په ۱۳۵۴ کال کې ورڅخه فارغ شوی دی.
- د ماستری زده کړې یې د اوکراین جمهوریت دادیسې په دولتی پوهنتون کې کړي او په۱۳۶۷ کال کې یې د ماستری سند تر لاسه کړی دی.

دندې په داخل د مملکت کې

- له فراغت سره سم له ۱۳۵۴ څخه تر ۱۳۵۸ پورې د ایمل خان په لیسه کې معلم وو.
- له ۱۳۵۸ څخه تر ۱۳۹۲ پورې د ننګرهار پوهنتون د انجینری پو هنځي د کادر غړی وو.
- د ۱۳۹۲ د ثور له اولی نیټې څخه را په دې خوا د ننګرهار پوهنتون د ساینس پوهنځي د علمي کادر غړی او د ریاضي مضمون تدریس یې پرمخ وړی.

دندې یې په بهر د مملکت کې.

په ۱۳۶۷ لمریزکال کې د پاکستان هیوادد پیښور ښار ته مهاجر شواو هلته یې د پاک جرمن او بیفیر په پروګرام کې د کچه ګړی په نمبر ۴ پرایمري سکول اود ناصر باغ په سکنډري سکول کې د معلم په صفت او هم یې د احمد شاه ابدالی، حزب اسلامی ، سید جمالدین افغان، هیواد او افغان پوهنتونونو کې د ریاضي مضمون تدریس پرمخ وړی دی او په ۱۳۸۱ لمریز کال کې بیرته د خپل هیواد دننګرهار پوهنتون ته راستون شوی دی .چې اوس د پوهندوی په علمی رتبې د ساینس په پوهنځي کې د علمي کادر غړی دی.